

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica
Introduzione alla fisica dei sistemi complessi

Modello economico

Presentato da:

Giuseppe Bertolini

Enrico Lenzi

Anno accademico 2023/2024

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Generalità | 1 |
| 2 Abilità e fortuna | 2 |
| 2.1 Eccezioni | 5 |
| 3 Capitali possibili | 6 |
| 4 Previsioni | 6 |
| 4.1 Capitale all'equilibrio | 6 |
| 4.2 Probabilità e capitale medio | 7 |
| 5 Valori utilizzati e valori attesi-Abilità [1-5] | 9 |
| 6 Andamenti sperimentali-Abilità[1-5] | 11 |
| 7 Valori utilizzati e valori attesi-Abilità [1-9] | 18 |
| 8 Andamenti sperimentali-Abilità[1-9] | 19 |
| 9 Conclusioni | 23 |

Introduzione

Si propone di seguito la modellizzazione di un'economia in cui gli scambi di denaro tra i membri della popolazione, cioè i guadagni e le perdite di ogni persona, dipendono dalla propria abilità e dalla fortuna.

Sono state effettuate 20 simulazioni con tutte le possibili combinazioni tra 2 "set" di abilità possibili e 10 influenze della fortuna differenti, e, al termine di ognuna, è stata analizzata la ridistribuzione del capitale e confrontata con quella delle altre simulazioni. L'implementazione del programma con cui sono state effettuate le simulazioni è reperibile su Github.

1 Generalità

Ogni individuo è caratterizzato un'abilità A_i , un capitale $g_i(t)$ e scambia denaro, ad intervalli di tempi regolari, con un numero fisso di persone m scelte a caso tra le M persone presenti nella popolazione. La popolazione all'istante $t_0 = 0$ è formata da M

individui con lo stesso capitale g_0 e una vita rimanente $\tau_{0i} \in [1, \tau]$; a partire da t_0 , ogni Δp , vengono creati $N_t = \frac{M}{m}$ gruppi da m persone che scambiano fra loro denaro. Non è consentito gioco scorretto, quindi, nel caso in cui ad un istante $t = k\Delta p$ fossero presenti h giocatori in rovina ($g_i(t = k\Delta p) = 0$), vengono creati $N_{tr} = \frac{M-h}{m}$ gruppi (N_t è approssimato sempre per difetto); in questo modo $p = M - N_{tr}m$ persone devono aspettare il turno successivo per poter scambiare denaro. Lo scambio che avviene in un gruppo è indipendente da ciò che avviene all'interno di ogni altro gruppo. La durata temporale degli scambi è la stessa per ognuno degli N_t/N_{tr} gruppi, la posta in gioco è quantizzata (una moneta per ciascun individuo) e ogni persona ha la possibilità di terminare lo scambio o vincendo $(m-1)$ monete o perdendone 1. La probabilità di vittoria per ogni singolo giocatore del gruppo è

$$p_i(A_i, f_i) = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^m A_i} + \epsilon f_i \quad (1)$$

dove il termine ϵf_i indica quanto la fortuna abbia inciso sull'esito dello scambio per ogni singolo giocatore. Le f_i sono variabili aleatorie a somma nulla

$$\sum_{i=1}^m f_i = 0 \quad (2)$$

$$f_i \in [-0.04, 0.04] \quad (3)$$

ed ϵ modula l'influenza della fortuna sul singolo scambio, è lo stesso per ogni gruppo, varia ad ogni simulazione ed è costante per tutta la durata di ognuna di esse. Al termine di ogni scambio, ogni gruppo viene sciolto e si creano altri N_t gruppi diversi dai precedenti, dopo un tempo Δp .

Nel caso in cui la probabilità di andare in rovina sia molto bassa $p(g_i(t) = 0) \approx 0$, ogni individuo iniziale effettua $l_0 = \frac{\tau_{0,i}}{\Delta p}$ partite e, alla morte di ognuno, il capitale "muore" con l'individuo (viene distrutto) e nasce un giocatore con vita τ , capitale g_n e abilità casuale A_i ; ogni persona, sempre nel caso $p(g_i(t) = 0) \approx 0$, muore con il suo capitale dopo un numero di partite $l = \frac{\tau}{\Delta p}$. Tale procedimento si ripete alla morte di ogni persona; inoltre, ogni giocatore in vita, a partire da t_0 , ad intervalli di tempo Δ_t guadagna una moneta. Tale meccanismo porta il sistema ad un equilibrio con capitale totale medio $c_T(t) = \sum_{i=1}^M g_i(t)$ costante e consente ad ogni giocatore di partecipare nuovamente agli scambi qualora andasse in rovina.

2 Abilità e fortuna

Sia all'istante iniziale che alla nascita di nuovo individuo, l'abilità $A_i \in N$ è scelta in maniera casuale, con probabilità che varia a seconda del range in cui essa è compresa. Nelle simulazioni sono stati utilizzati due range differenti: $A_i \in [1, 5]$ e $A_i \in [1, 9]$. Le

abilità permesse e le relative probabilità dei due range sono mostrate rispettivamente in tab. 1 e tab. 2.

| A_i | $p(A_i)$ |
|-------|----------|
| 1 | 0.15 |
| 2 | 0.2 |
| 3 | 0.3 |
| 4 | 0.2 |
| 5 | 0.5 |

Tabella 1: Abilità permesse in $[1,5]$ e relative probabilità

| A_i | $p(A_i)$ |
|-------|----------|
| 1 | 0.04 |
| 2 | 0.08 |
| 3 | 0.12 |
| 4 | 0.16 |
| 5 | 0.2 |
| 6 | 0.16 |
| 7 | 0.12 |
| 8 | 0.08 |
| 9 | 0.04 |

Tabella 2: Abilità permesse in $[1,9]$ e relative probabilità

Per ognuno dei due range di abilità sono state effettuate 10 simulazioni, ognuna con un valore diverso di ϵ , da 1 a 10. I parametri f_i sono generati secondo un meccanismo che consente di rispettare le condizioni 2 e 3:

1. *Generazione di ξ_i .* Per ogni persona presente al tavolo viene generato un numero ξ_i secondo una distribuzione uniforme in $[-0.04, 0.04]$.
2. *Modifica dei parametri ξ .* Viene calcolata

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = s$$

e poi definito un nuovo parametro

$$q_i = \xi_i - \frac{s}{m}.$$

Esso rispetta la condizione espressa mediante l'eq 2 ma non necessariamente quella espressa mediante l'eq 3.

3. *Modifica dei parametri q_i .* Se uno dei parametri q_i non rispetta la condizione 3 allora se $q_i \geq 0.04 \rightarrow q_i = 0.04$, se $q_i \leq -0.04 \rightarrow q_i = -0.04$. Questa modifica rende la condizione 2 non più valida, quindi verranno reiterati gli step 2 e 3 fino a quando non saranno rispettate entrambe le condizioni. Quando ciò si verifica il procedimento si arresta, ed i parametri ottenuti corrispondono alle m fortune f_i . Tale procedimento viene reiterato per ognuno degli N_{tr} tavoli presenti ad un istante temporale $t=k\Delta p$.

Questo meccanismo fa sì che la media delle fortune f_i attribuite ad ogni singolo giocatore nel corso della sua vita sia nulla. Infatti, dopo i gli step 1 e 2

$$q_i = \xi_i + \frac{\sum_{j=1}^m \xi_j}{m} \quad (4)$$

e $\bar{q}_i = 0$ essendo somma di variabili aleatorie a media nulla; inoltre, q_i è una variabile aleatoria con distribuzione simmetrica attorno allo 0: $\frac{s}{m}$ può essere approssimata, per il teorema del limite centrale, ad una gaussiana con $\mu = 0$ e $\sigma^2 = m \frac{(0.08)^2}{12}$ e la distribuzione di q_i è l'integrale di convoluzione tra tale gaussiana e una distribuzione uniforme centrata attorno allo 0. Calcolare l'integrale di convoluzione tra la gaussiana e la distribuzione uniforme può risultare complicato; inoltre, l'approssimazione della distribuzione di $\frac{s}{m}$ ad una gaussiana non è estremamente precisa perchè $O(m) = 10$. Per verificare che q_i è una variabile a media nulla con distribuzione simmetrica rispetto a 0, sono state effettuate 10 simulazioni da 10^7 iterazioni, in cui in ogni iterazione è stato generato un q_i mediante gli step 1 e 2. Al termine di ogni simulazione è stata analizzata la distribuzione di q_i ; in particolare sono stati calcolati due parametri, $\bar{q}_i = Q$ e $D = \bar{d}_i$ dove d_i è definito come

$$d_i = |p(q_i) - p(-q_i)|.$$

Se la distribuzione di q_i è a media nulla ed è simmetrica attorno allo zero deve verificarsi $Q \approx 0$, $D \approx 0$.

In fig 1 è presente il risultato di una delle simulazioni effettuate, tutte le altre sono reperibili al seguente link; tutti i risultati sono coerenti con le previsioni.

Essendo la distribuzione di q_i simmetrica rispetto allo 0, il "troncamento" $t_i = \pm(q_i - 0.04)$ dello step 3 è in media nullo, $\bar{t}_i = 0$. Quest'ultimo risultato, unito al fatto che $\bar{q}_i = 0$ prova che $\bar{f}_i = 0$.

La varianza del termine ϵf_i presente in eq. (1)

$$\sigma_\epsilon = \epsilon^2 \sigma_f \quad (5)$$

(σ_f è la varianza di f_i) è direttamente proporzionale a ϵ^2 , dunque, l'andamento del capitale alla morte di ogni giocatore si discosterà sempre di più dal valore medio all'aumentare di ϵ .

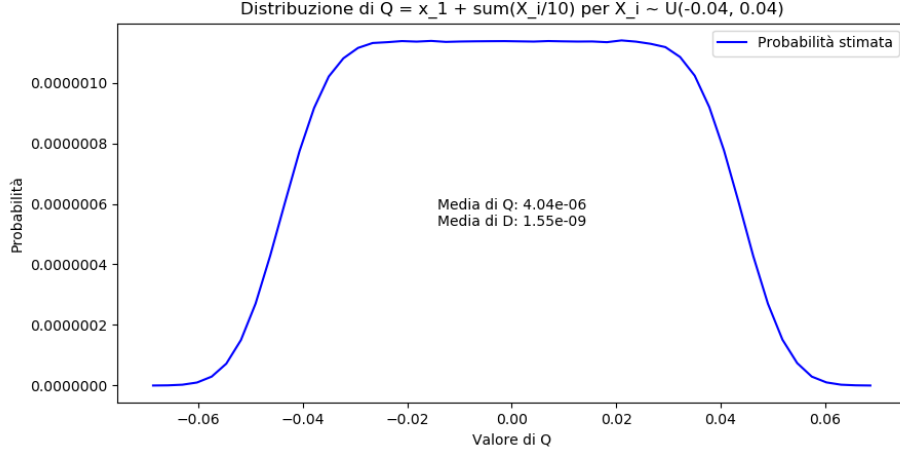


Figura 1: Distribuzione di q

2.1 Eccezioni

Nel caso in cui il contributo del termine ϵf_i in eq. 1 sia tale da rendere la probabilità di vittoria della persona i -esima all'interno del gruppo maggiore di 1

$$p_i(A_i, f_i) > 1 \quad (6)$$

l'esito dello scambio risulta già decretato e le $m - 1$ monete vengono assegnate automaticamente alla persona i -esima. Nel caso in cui risulti

$$p_i(A_i, f_i) < 0 \quad (7)$$

l'individuo i -esimo non ha possibilità di vincere e, per rispettare la condizione

$$0 \leq p_i(A_i, f_i) \leq 1 \quad \forall i \quad (8)$$

viene effettuato il seguente procedimento:

- $p_i < 0$ viene modificata e resa nulla, $p_i = 0$
- Viene definita la somma s delle m probabilità

$$s = \sum_{i=1}^m p_i \quad (9)$$

- Vengono definite delle nuove probabilità

$$p_{ni} = \frac{p_i}{s} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (10)$$

che rispettano la condizione

$$\sum_i p_{ni} = 1$$

3 Capitali possibili

Nel caso nessuna persona vada in rovina, un individuo non può morire con un capitale $g_m \in N$ qualsiasi. Se si indica con v il numero di scambi vittoriosi effettuati da un individuo fino alla sua morte, con s le sconfitte ed $r = v - s$, è possibile ricavare i possibili valori di g_m in funzione di r ed l mediante il seguente sistema

$$\begin{cases} r = v - s \\ l = v + s \\ g_m = v(m - 1) - s + g_n + c_t \end{cases} \quad (11)$$

dove c_t è il capitale che un giocatore guadagna per via del meccanismo che dà una moneta ad ogni giocatore ad intervalli di tempo regolari; in particolare

$$c_t = \frac{\tau}{\Delta t}$$

e, se $p(G_i = 0) \approx 0$,

$$c_t = \frac{l\Delta p}{\Delta t}. \quad (12)$$

Dall'eq. 11 si ricava

$$\begin{cases} v = \frac{l+r}{2} \\ s = \frac{l-r}{2} \\ g_m = \frac{l}{2}(m - 2) + \frac{mr}{2} + g_n + c_t \end{cases} \quad (13)$$

4 Previsioni

4.1 Capitale all'equilibrio

Da ora in poi sarà sempre assunto $p(g_i(t)) = 0$. Per come è strutturata la simulazione, ci si aspetta che il sistema vada all'equilibrio con capitale totale medio $\bar{c}_T(t)$ costante. L'espressione del capitale totale $c_T(t)$ ad un istante t generico è

$$c_T(t) = g_o M + c_{gen} - c_{0m} - c_m \quad (14)$$

dove c_{gen} è il capitale generato fino all'istante t , c_{0m} il capitale distrutto per la morte dei primi M individui e c_m il capitale distrutto per le morti degli individui successivi agli M iniziali. Vale

$$c_{gen} = \bar{c}_{gen} = M \frac{t}{\Delta t}, \quad (15)$$

$$\bar{c}_{0m} = M(\bar{g}_{0m} - g_n) \frac{l\Delta p}{\tau} = M(\bar{g}_{0m} - g_n) \quad (16)$$

e

$$\bar{c}_m = M(\bar{g}_m - g_n) \frac{t - l\Delta p}{\tau} \quad (17)$$

dove \bar{g}_{0m} è il capitale medio con cui muoiono le M persone nate all'istante t_0 e \bar{g}_m indica il capitale medio alla morte di un individuo per ogni individuo diverso dagli M iniziali. Ad un tempo

$$t_B = B\tau = Bl\Delta p$$

dove $B > 1$

$$\bar{c}_T(t_B) = g_0M + M \frac{l\Delta p}{\Delta t} - M(\bar{g}_{0m} - g_n) + M \frac{l\Delta p}{\Delta t}(B-1) - M(B-1)(\bar{g}_m - g_n) \quad (18)$$

Per raggiungere l'equilibrio ci si aspetta un bilanciamento tra gli ultimi due addendi in eq. 18, ottenuto se il capitale distrutto alla morte di un individuo, \bar{g}_m , è uguale alla somma tra il capitale generato per l'individuo in questione durante tutta la sua vita (c_t) e il capitale alla nascita (g_n)

$$\bar{g}_m = c_t + g_n. \quad (19)$$

Il capitale raggiunto all'equilibrio sarà stabilito, dunque, al termine delle prime l iterazioni, una volta morti tutti gli individui nati a t_0 :

$$\bar{c}_T = g_0M + M \frac{l\Delta p}{\Delta t} - M(\bar{g}_{0m} - g_n) \quad (20)$$

4.2 Probabilità e capitale medio

La probabilità che un individuo con abilità A_i muoia con capitale $g_m(A_i)$, $p(g_m(A_i))$, può essere calcolata sfruttando la corrispondenza biunivca $g_m \leftrightarrow (v, s)$, ovvero $g_m \leftrightarrow r$. Utilizzando la teoria di campo medio

$$\begin{aligned} p(g_m(A_i)) &= p(v) = \frac{l!}{v!(l-v)!} \bar{p}^v (1-\bar{p})^{l-v} \\ &= p(r) = \frac{l!}{(\frac{l+r}{2})!(\frac{l-r}{2})!} \bar{p}^{\frac{l+r}{2}} (1-\bar{p})^{\frac{l-r}{2}} \end{aligned} \quad (21)$$

dove $p = p(A_i, f_i)$ è la probabilità di vittoria del singolo scambio (eq. 1) e

$$\bar{p} = \bar{p}(A_i) = \bar{y}(A_i) = \frac{A_i}{A_i + \sum_{j \neq i}^m \bar{A}_j} \quad (22)$$

Utilizzando l'approssimazione di Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (23)$$

l'eq 21 diventa

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} \exp\left(-\frac{(r - \bar{r})^2}{2\sigma_r^2}\right) \quad (24)$$

dove

$$\bar{r} = \bar{r}(A_i) = [\bar{p} - (1 - \bar{p})]l = l(2\bar{y}(A_i) - 1) \quad (25)$$

$$\sigma_r^2 = 4l\bar{p}(1 - \bar{p}) = 4l(\bar{y} - \bar{y}^2). \quad (26)$$

Sostituendo l'eq. 25 e l'eq 26 in eq. 24 si ottiene

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 4l(\bar{y} - \bar{y}^2)}} \exp\left[-\frac{r - l(2\bar{y} - 1)}{4l(\bar{y} - \bar{y}^2)}\right] \quad (27)$$

La densità di probabilità $p_T(r)$ che un giocatore muoia con una determinata differenza tra vittorie e sconfitte non tenendo conto della suddivisione basata sulle abilità, è la somma pesata delle gaussiane $p(r)$, e i pesi corrispondono alle probabilità delle abilità

$$p_T(r) = \sum_{A_i} p(A_i)p(r). \quad (28)$$

Sostituendo, inoltre, l'eq. 25 all'interno dell'eq.13 è possibile ricavare l'espressione di $\bar{g}_m(A_i)$

$$\begin{aligned} \bar{g}_m(A_i) &= \frac{l}{2}(m - 2) + \frac{\bar{r}(A_i)}{2}m + g_n + c_t = \\ &= \frac{l}{2}(m - 2) + \frac{ml}{2}(2\bar{y}(A_i) - 1) + g_n + c_t = \\ &= \frac{l}{2}(2\bar{y}(A_i)m - 2) + g_n + c_t \end{aligned} \quad (29)$$

e il capitale medio alla morte, \bar{g}_m , è la somma pesata dei capitali medi dipendenti dalle singole abilità, con pesi corrispondenti alle probabilità delle singole abilità

$$\bar{g}_m = \sum_{A_i} p(A_i)\bar{g}_m(A_i) = ml \sum_{A_i} p(A_i)\bar{y}(A_i) - l + g_n + c_t \quad (30)$$

Sviluppando $\bar{y}(A_i)$ in $A_i = \bar{A}_i$ si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{A_i} p(A_i)\bar{y}(A_i) &= \sum_{A_i} p(A_i) \left(\frac{A_i}{A_i + (m - 1)\bar{A}_i} \right) \\ &\approx \sum_{A_i} p(A_i) \left[\frac{1}{m} + o(1) \right] \approx \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (31)$$

e sostituendo in eq. 30 si giunge a

$$\bar{g}_m \approx g_n + c_t = g_n + \frac{l\Delta p}{\Delta t} \quad (32)$$

che corrisponde all'espressione del capitale medio alla morte attesa.

Per poter effettuare previsioni numeriche del capitale totale medio all'equilibrio \bar{c}_T , occorre una stima analitica di g_{0m} , ovvero del capitale medio con cui muoiono le prime M persone nate all'istante t_0 . Nelle simulazioni la vita rimanente τ_{0i} è stata generata mediante una distribuzione uniforme in $[1, \tau]$, quindi i giocatori iniziali, in media, partecipano ad un numero di scambi

$$l_o \approx \frac{(\tau/2)}{\Delta p} \quad (33)$$

ed è possibile ricavare una stima di g_{0m} dall'eq 32 considerando, però, un numero di partite effettuate pari a l_o

$$\bar{g}_{0m} = g_0 + \frac{l_o \Delta p}{\Delta t}. \quad (34)$$

L'analisi delle simulazioni si basa sul confronto tra gli andamenti ottenuti e gli andamenti previsti delle distribuzioni di probabilità $p(g_m)$ e $p(g_m(A_i))$. Dall'eq 21, per via della corrispondenza $r \leftrightarrow g$, $p(g_m(A_i))$ è una gaussiana con media $\bar{g}_m(A_i)$ (eq. 29) e varianza

$$\sigma_{A_i}^2 = \frac{m^2}{4} \sigma_r^2. \quad (35)$$

$p(g_m)$ è la somma pesata delle gaussiane $p(g_m(A_i))$:

$$p(g_m) = \sum_{A_i} p(A_i) p(g_m(A_i)). \quad (36)$$

Tali andamenti, ottenuti mediante l'approssimazione di Stirling, sono distribuzioni di probabilità continue. Vista l'assunzione $p(g_i(t)) \approx 0$, rispettata nelle simulazioni effettuate, il range dei capitali possibili alla morte non è continuo ma discreto; di conseguenza ci si aspetta che i grafici ottenuti $P(g_m(A_i))$ e $P(g_m)$ corrispondano a

$$P(g_m(A_i)) = d \cdot (g_m(A_i)) \quad (37)$$

$$P(g_m) = d \cdot p(g_m) \quad (38)$$

dove d corrisponde alla differenza tra due valori consecutivi permessi del capitale alla morte. Dati r_2, r_1 con $r_2 - r_1 = 2$, dall'eq 13 si ricava

$$d = g_m(r_2) - g_m(r_1) = \frac{m(r_2 - r_1)}{2} = m \quad (39)$$

5 Valori utilizzati e valori attesi-Abilità [1-5]

I parametri in input scelti per inizializzare le simulazioni con un range di abilità [1-5] sono i seguenti:

- Numero di persone: $M = 1000$;
- Numero di persone in un gruppo: $m = 10$;
- Capitale alla nascita: $g_0 = g_n = 600$;
- $\Delta p = 1$ (è l'unità temporale);
- $\Delta t = 4 \cdot \Delta p$;
- $\tau = 1000 \cdot \Delta p$;
- Durata della simulazione: $T = 2000 \cdot \tau$;
- Numero di scambi per persona: $l = 1000$;

Utilizzando tali valori si ottengono le seguenti previsioni:

- Capitale medio alla morte per singola abilità:
 - $\bar{g}_m(1) = 207.14$
 - $\bar{g}_m(2) = 539.65$
 - $\bar{g}_m(3) = 850$
 - $\bar{g}_m(4) = 1140.32$
 - $\bar{g}_m(5) = 1412.5$
- Varianze per singola abilità:
 - $\sigma_1^2 = 3443.87$
 - $\sigma_2^2 = 6420.92$
 - $\sigma_3^2 = 9000$
 - $\sigma_4^2 = 11238.29$
 - $\sigma_5^2 = 13183.59$
- Capitale medio alla morte $\bar{g}_m = 850$
- Capitale all'equilibrio medio $\bar{c}_T = 725000$

6 Andamenti sperimentali-Abilità[1-5]

All'interno di questo elaborato sono presenti solamente i grafici relativi alle simulazioni per $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 10$. Tutti gli altri grafici sono reperibili su Github.

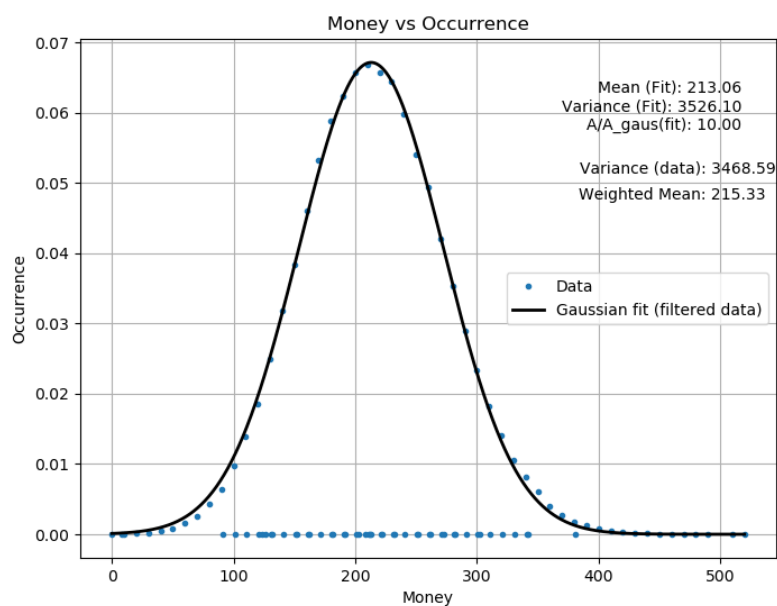


Figura 2: Abilità 1, $\epsilon = 1$

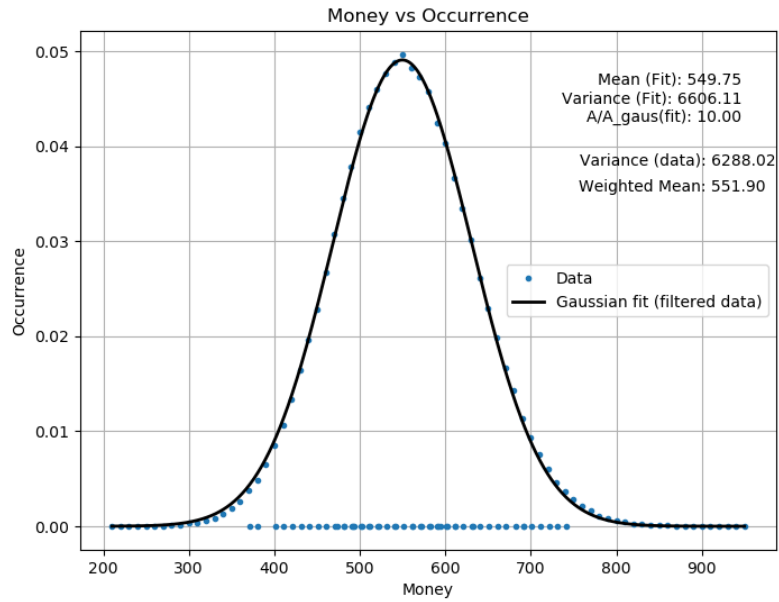


Figura 3: Abilità 2, $\epsilon = 1$

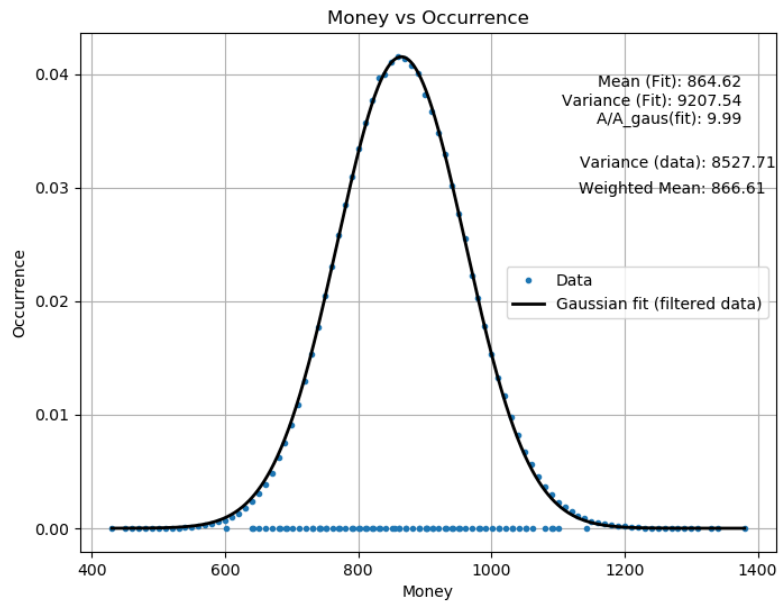


Figura 4: Abilità 3, $\epsilon = 1$

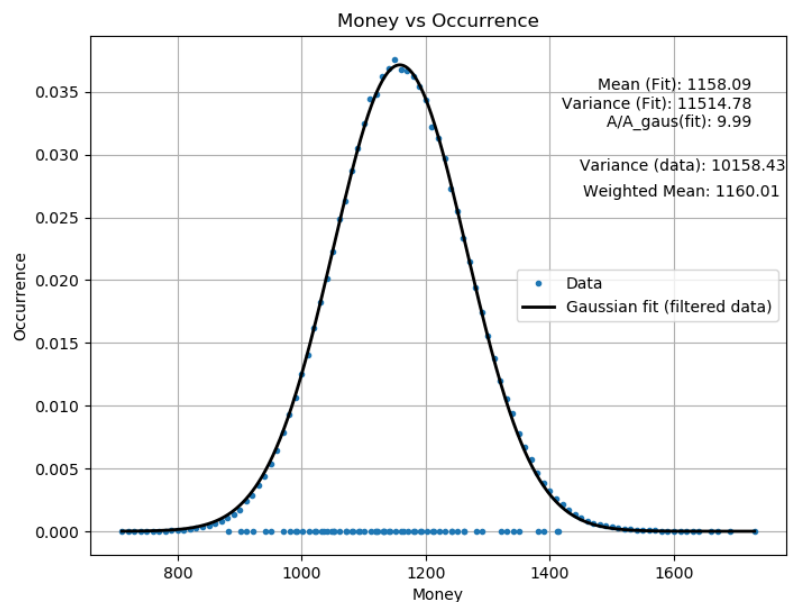


Figura 5: Abilità 4, $\epsilon = 1$

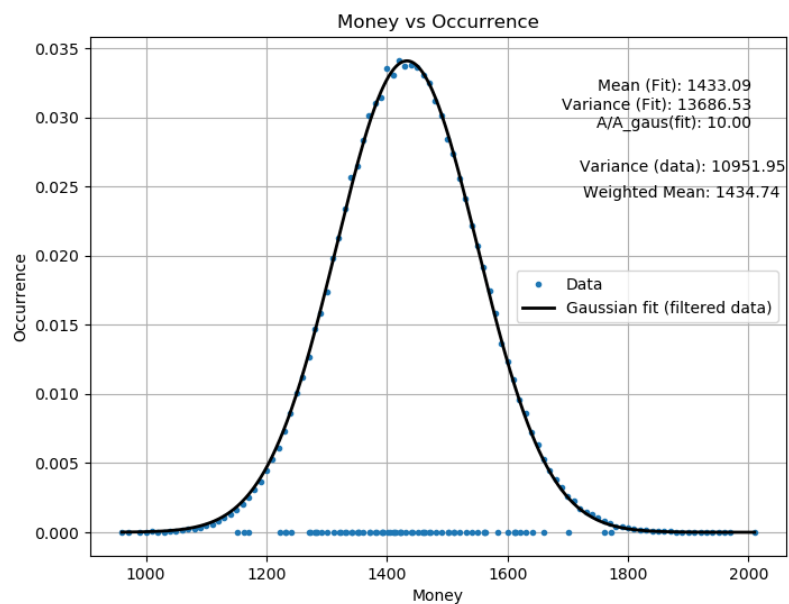


Figura 6: Abilità 5, $\epsilon = 1$

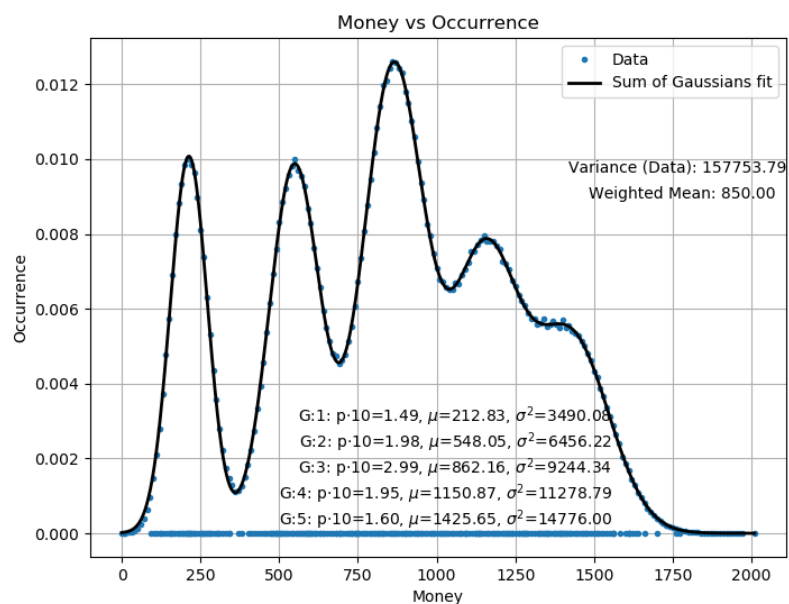


Figura 7: Distribuzione somma, $\epsilon = 1$

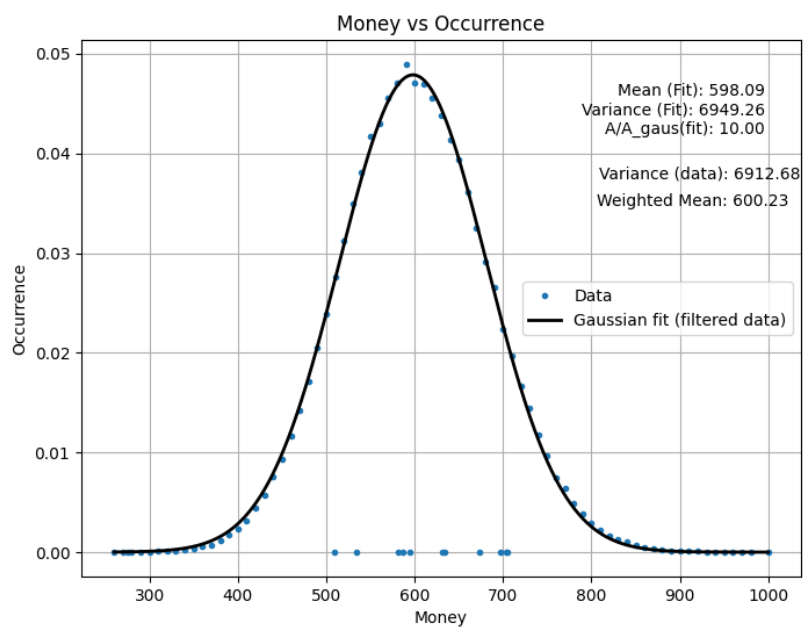


Figura 8: Abilità 1, $\epsilon = 10$

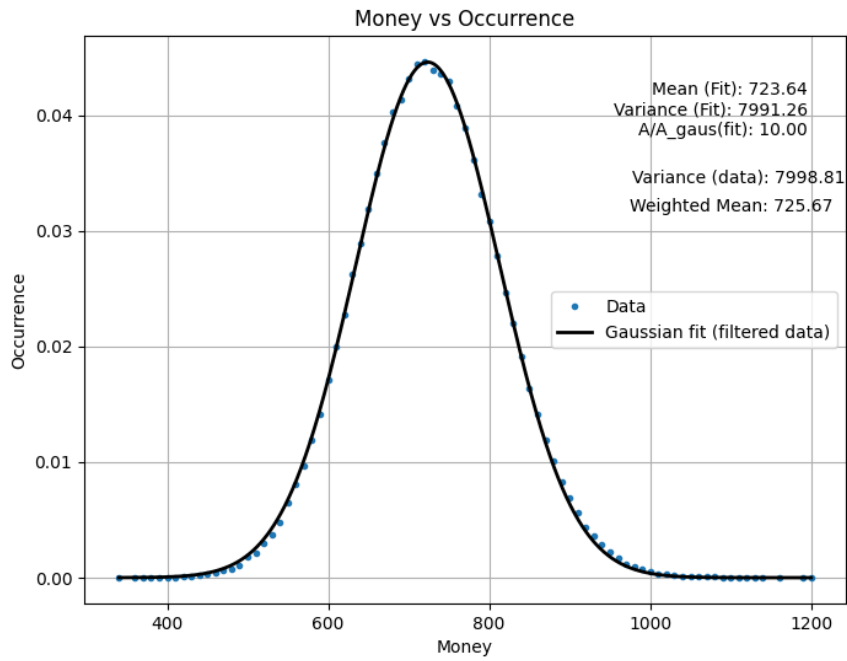


Figura 9: Abilità 2, $\epsilon = 10$

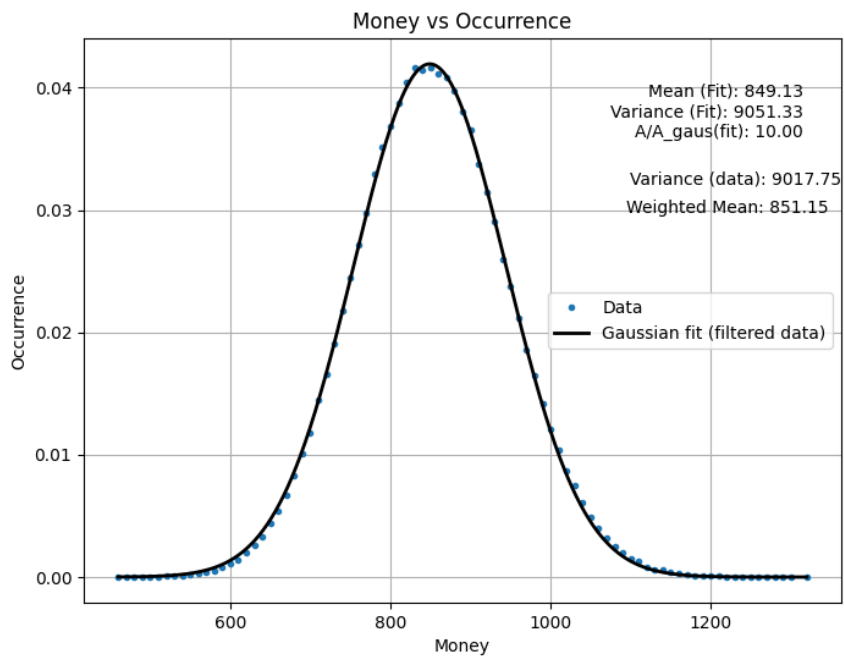


Figura 10: Abilità 3, $\epsilon = 10$

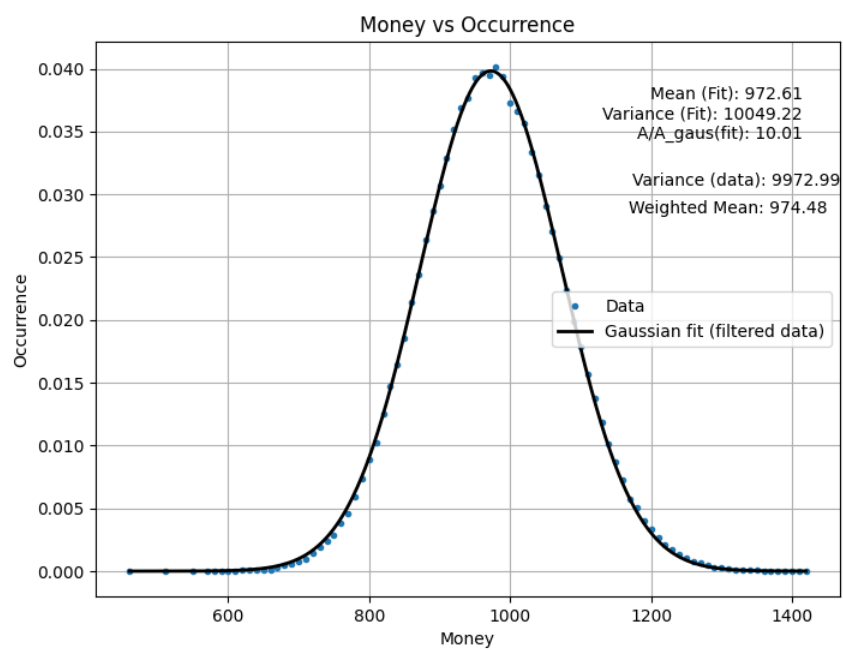


Figura 11: Abilità 4, $\epsilon = 10$

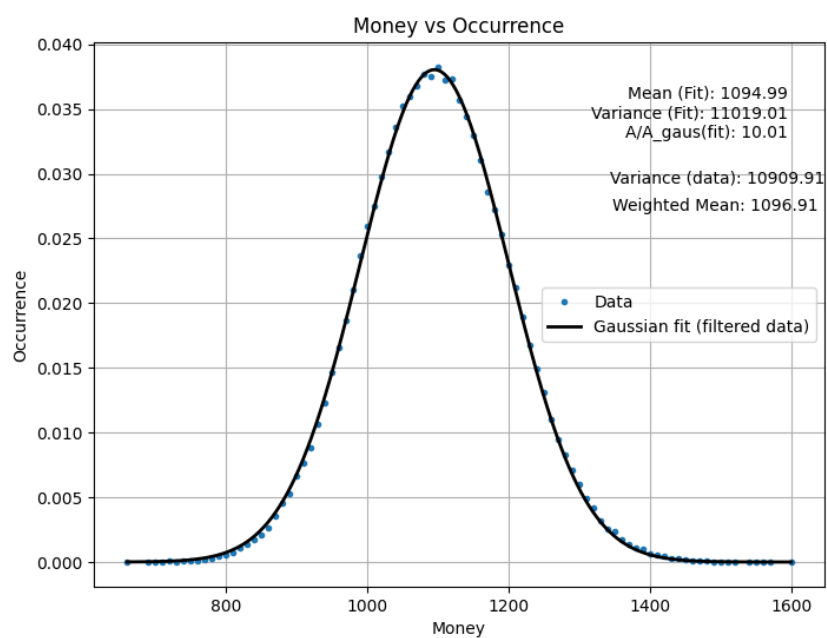


Figura 12: Abilità 5, $\epsilon = 10$

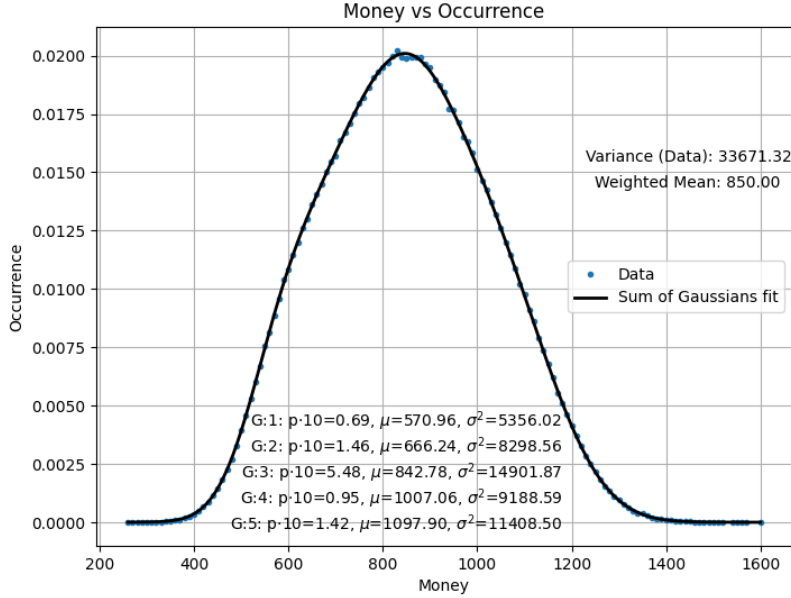


Figura 13: Distribuzione somma, $\epsilon = 10$

I valori $\bar{g}_m(A_i)$ e $\sigma_{A_i}^2$ ottenuti sperimentalmente sono in accordo con le previsioni teoriche, come i valori del capitale all'equilibrio medio \bar{c}_T e quelle del capitale alla morte \bar{g}_m .

Per $\epsilon = 1$ i valori $\bar{g}_m(A_i)$ sono in accordo con i dati teorici elencati in precedenza, in quanto l'influenza della fortuna è bassa, più precisamente nel range $[-0.04, 0.04]$. All'aumentare di ϵ , tali valori, per abilità $A_i < \bar{A}_i$ crescono, mentre, per $A_i > \bar{A}_i$ decrescono. Ciò conferma quanto affermato mediante l'eq 5; in particolare, persone con $A_i < \bar{A}_i$ hanno probabilità di vittoria del singolo scambio molto bassa (per esempio $\bar{y}(1) = 1/28$), per cui l'aumentare dell'influenza della fortuna non può far altro che "aiutare" tali persone. Le persone con abilità $A_i > \bar{A}_i$ invece guadagneranno di meno come conseguenza di quanto appena affermato.

Una conseguenza di questo effetto è che per $\epsilon \geq 7$ i grafici totali (non suddivisi per abilità) raffigurano una singola gaussiana e non sono più evidenti picchi in corrispondenza dei $\bar{g}_m(A_i)$: le singole gaussiane "traslano" e il loro valor medio $\bar{g}_m(A_i)$ si avvicina sempre più a sempre di più al valor medio \bar{g}_m .

Nei grafici per $\epsilon = 1$ sono presenti molti valori del capitale con occorrenza prossima allo 0, e tali valori rendono il range quasi continuo. Questo effetto si è verificato perché $p(g_i(t)) \neq 0$, in quanto i giocatori con abilità bassa sono poco aiutati dalla fortuna. Ciò implica che alcune persone non giocano un numero di partite $l = 1000$, ma ne giocano meno; si verifica, così, che la differenza tra due valori adiacenti permessi del capitale non

è costante. Per valori di ϵ maggiori tale effetto diventa sempre meno rilevante, come mostrato nei grafici per $\epsilon = 10$, in quanto i giocatori con abilità bassa sono aiutati dalla fortuna e cadono meno frequentemente in rovina; il range diventa, quindi, discreto, con differenza tra valori adiacenti del capitale costante (a meno di qualche eccezione), come previsto nel caso $p(g_i(t)) \approx 0$.

Nei grafici, in alto a destra, è presente anche un dato " A/A_{gaus} ", che altro non è che d . Esso rappresenta il rapporto tra l'ampiezza del picco "gaussiano" ottenuto dal fit e il termine

$$A_{gaus} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{A_i}^2}}.$$

Anche questo valore è in accordo con le previsioni: quasi per ogni grafico $d = 10 = m$. Nei grafici totali, mediante il fit, è stato ottenuto anche il peso p che moltiplica ogni gaussiana. Ci si aspetta

$$p \cdot 10 = p(A_i) \cdot 10.$$

Tale risultato non è stato sempre verificato, probabilmente per errori di calcolo dei parametri del fit da parte dello script.

7 Valori utilizzati e valori attesi-Abilità [1-9]

Le simulazioni con range di abilità [1-9] sono state inizializzate con i medesimi parametri delle simulazioni con range [1-5]. Le previsioni sono:

- Capitale medio alla morte per singola abilità:

- $\bar{g}_m(1) = 67.39$
- $\bar{g}_m(2) = 275.53$
- $\bar{g}_m(3) = 475$
- $\bar{g}_m(4) = 666.32$
- $\bar{g}_m(5) = 850$
- $\bar{g}_m(6) = 1026.47$
- $\bar{g}_m(7) = 1196.15$
- $\bar{g}_m(8) = 1359.43$
- $\bar{g}_m(9) = 1516.67$

- Varianze per singola abilità.

- $\sigma_1^2 = 2126.65$
- $\sigma_2^2 = 4074.24$

- $\sigma_3^2 = 5859.37$
- $\sigma_4^2 = 7496.87$
- $\sigma_5^2 = 9000$
- $\sigma_6^2 = 10380.62$
- $\sigma_7^2 = 11649.40$
- $\sigma_8^2 = 12815.94$
- $\sigma_9^2 = 13888.88$

- Capitale medio alla morte $g_m = 850$
- Capitale all'equilibrio medio $\bar{c}_T = 725000$

8 Andamenti sperimentali-Abilità[1-9]

Per le simulazioni nel range di abilità [1-9] sono presenti solamente alcuni dei 100 grafici ottenuti; quelli non mostrati nel presente elaborato sono reperibili al seguente link.

Anche in questo caso, i valori di $g_m(A_i)$, $\sigma_{A_i}^2$, c_T e g_m sono in accordo con le previsioni teoriche.

Per $\epsilon = 1$ i valori di $g_m(A_i)$ e $\sigma_{A_i}^2$ sono in accordo con i dati elencati in precedenza, e all'aumentare di ϵ si verifica lo stesso effetto di traslazione di $\bar{g}_m(A_i)$ verso valori maggiori se $A_i < \bar{A}_i$ e verso valori minori se $A_i > \bar{A}_i$. L'unificazione delle gaussiane nel grafico totale, questa volta, si verifica già per $\epsilon \geq 3$, in quanto in questo range di abilità sono presenti più picchi e ad una distanza relativa media minore rispetto al caso [1-5] (fig. 14, 17, 18).

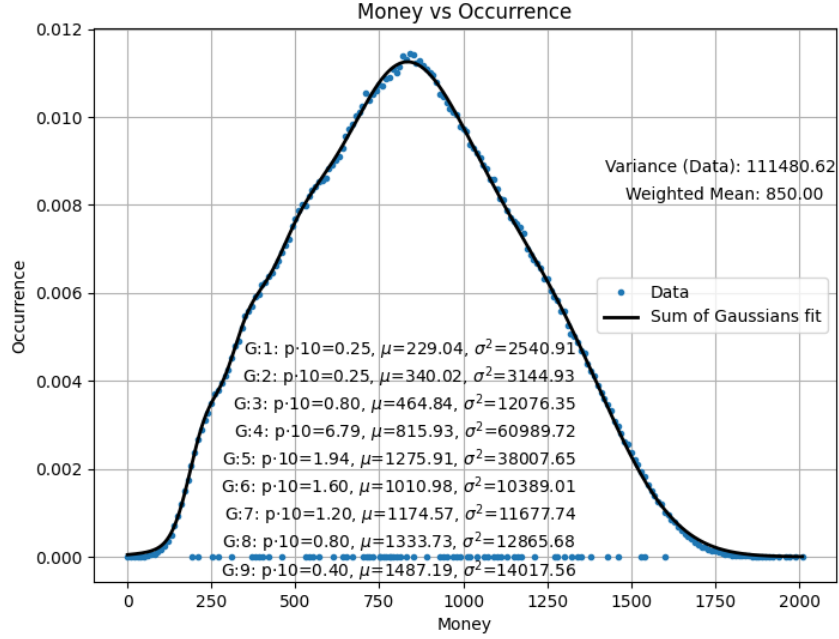


Figura 14: Distribuzione somma, $\epsilon = 3$

Nei grafici per $\epsilon = 1$ non solo il range diventa praticamente continuo, ma i valori non permessi secondo le previsioni teoriche, hanno un'occorrenza visibilmente maggiore di 0 e formano delle altre gaussiane con occorrenze molto minori. Tale effetto è amplificato rispetto alle simulazioni con range di abilità [1-5] in quanto i giocatori con abilità bassa hanno probabilità di vincita ancora minore rispetto ai casi precedenti ($\bar{y}(1) = 1/46$) e vanno in rovina molto più frequentemente (fig. 15, fig. 16).

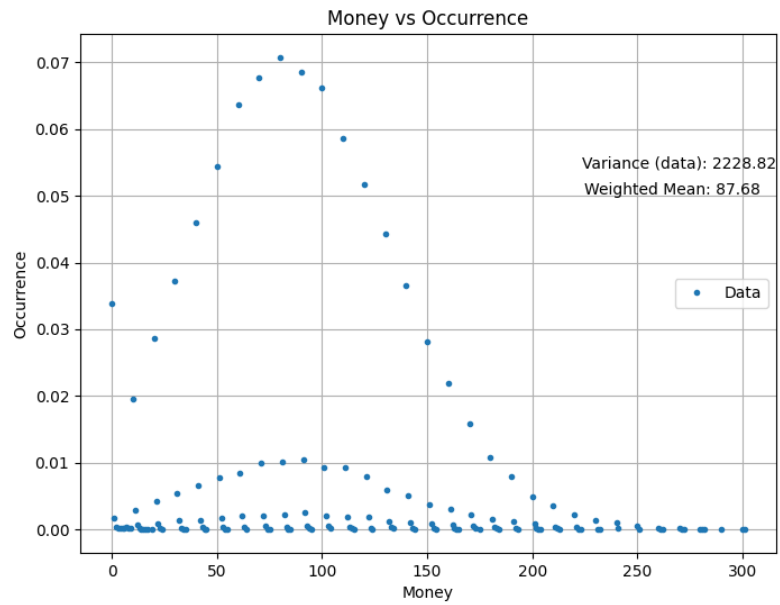


Figura 15: Abilità 1, $\epsilon = 1$

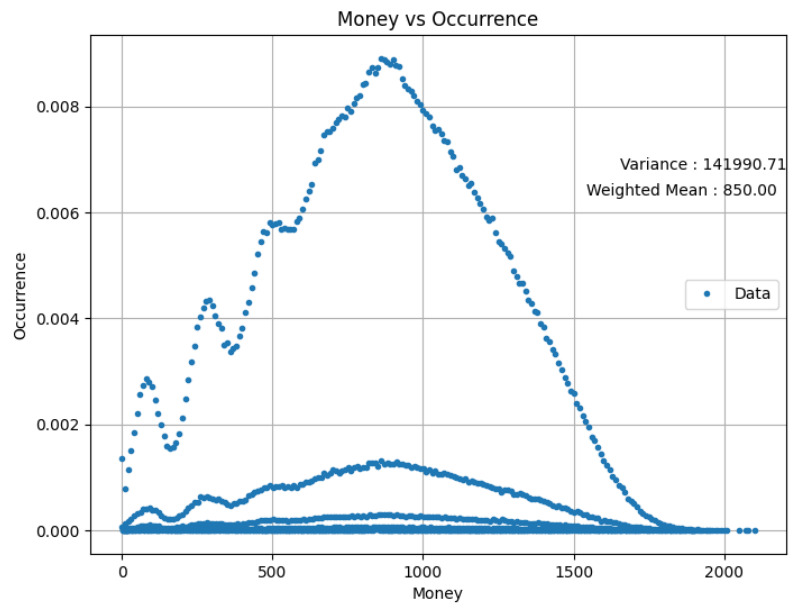


Figura 16: Distribuzione somma, $\epsilon = 1$

Tale effetto diventa sempre meno rilevante all'aumentare di ϵ ed il range torna ad essere discreto, come mostrato nei grafici sottostanti.

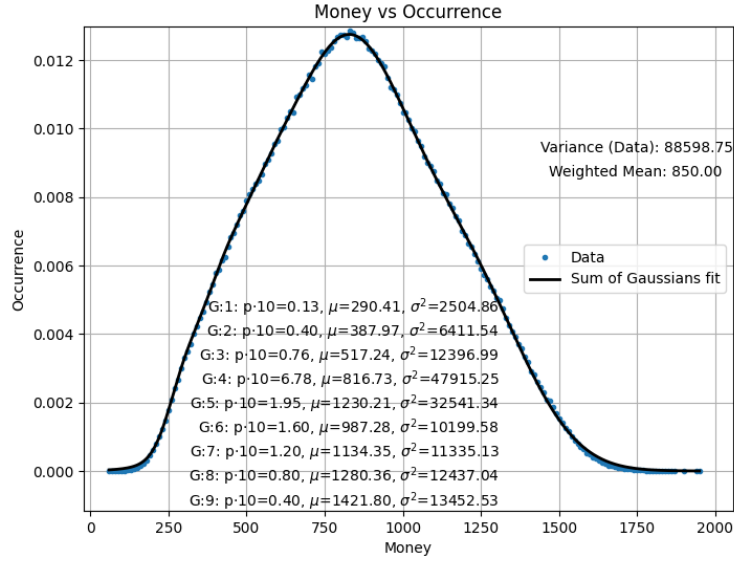


Figura 17: Distribuzione somma, $\epsilon = 4$

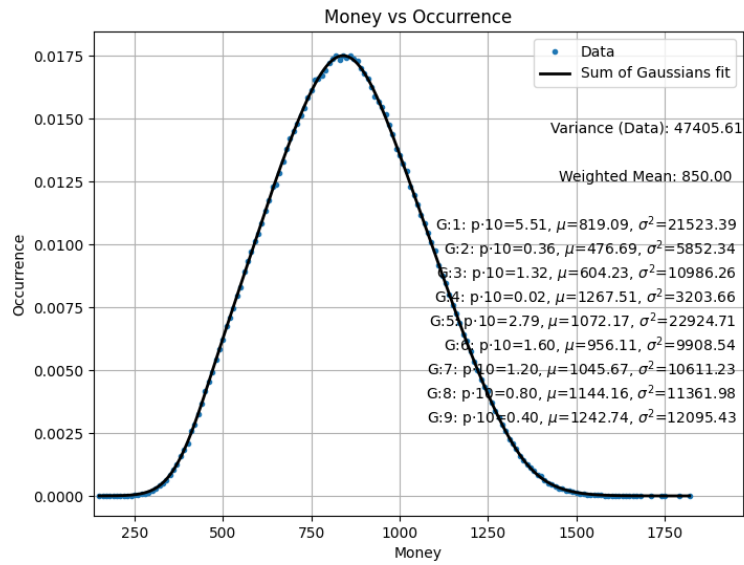


Figura 18: Distribuzione somma, $\epsilon = 7$

Il valore $d = \frac{A}{A_{gaus}}$ è coerente con le previsioni teoriche; I pesi ottenuti mediante il fit, mostrati nei grafici totali, invece, non lo sono.

9 Conclusioni

Nonostante i dati elencati nelle sez. 5 e 7 siano coerenti con i dati sperimentali per simulazioni con $\epsilon = 1$, per questo valore di ϵ il range dei valori del capitale permesso non è discreto come nelle previsioni teoriche per i motivi già discussi.

Per valori di $\epsilon \neq 1$ i dati sperimentali si discostano da quelli elencati e il range diventa discreto con differenza tra valori adiacenti del capitale costante, come da previsione.

I grafici ottenuti sono delle gaussiane non normalizzate per via della discretizzazione del range e il rapporto tra le gaussiane sperimentali, $g_{ms}(A_i)$ e g_{ms} , e le gaussiane ottenute analiticamente, $g_m(A_i)$ e g_m , è costante per ogni valore del capitale e risulta essere pari a m

$$\frac{g_{ms}(A_i)}{g_m(A_i)} = \frac{g_{ms}}{g_m} = m = d.$$

Tale risultato è verificato nonostante i pesi nella somma di gaussiane, mostrati nei grafici totali per le simulazioni nel range [1-9], non siano coerenti; ciò potrebbe essere attribuito ad errori di computazione dello script.

Il capitale medio all'equilibrio \bar{c}_T è lo stesso in tutte le simulazioni per entrambi i range di abilità, in quanto, come da previsione, dipende solamente da c_t e g_n .

Per entrambi i range è verificato $\bar{g}_m = \bar{g}_m(\bar{A}_i)$ e, aumentando ϵ si ottiene una ridistribuzione del capitale totale gaussiana. In altre parole, in una popolazione in cui lo scambio di denaro è regolato solamente dall'abilità e dalla fortuna e in cui le persone estremamente abili e estremamente poco abili sono poche, i ricchi e i poveri sono pochi; le persone mediamente brave sono molte e ci sono molte persone nè ricche, nè povere.

Si può concludere, quindi, che la ridistribuzione del capitale è regolata fortemente dalla distribuzione delle abilità.