Supponiamo che f sia un endomorfismo, cioè una mappa lineare $f: V \to V$.

Definizione. Un vettore $v \in V$, $v \neq 0$, si dice un autovettore per f se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(v) = \lambda v.$$

In tal caso, λ si dice autovalore.

L'insieme $U_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ si chiama autospazio associato all'autovalore λ.

NB: $f(0_V) = 0_V = \lambda 0_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Quindi $0_V \in U_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Come si fa a calcolare autovalori e autovettori dell'endomorfismo f?

Per prima cosa si sceglie una base $B = (v_1, \dots, v_n)$ per V. Poi scrive la matrice A associata a f rispetto a B.

A questo punto dobbiamo cercare le n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ tali che

$$*) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$f(v) = \lambda v)$$

Possiamo riscrivere la condizione $\ast$)
in questo modo:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - (\lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo.
Affinché questo sistema lineare ammetta anche soluzioni non banali è necessario e sufficiente che il rango della matrice $A - \lambda I$ non sia massimo. detta "matrice caratteristica"

Ciò significa che deve essere

$(A - \lambda I)$ non ha inversa.

caratteristico

Ciò significa che deve essere

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Es. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x+y, x-y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{= A} - \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{= \lambda I} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{matrice caratteristica}}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 - 2$$

Il determinante della matrice caratteristica si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO.

$$\boxed{p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$$

Tornando all'esempio

si ha che le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2$ sono $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$: si tratta dei

gli autovalori dell'endomorfismo f

sono $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$: si tratta dei

due autovalori dell'endomorfismo f.

Abbiamo dunque calcolato gli

autovalori di f.

Calcoliamo ora gli autovettori.

Inseriamo nella matrice caratteristica

gli autovalori.

$$(A-\sqrt{2}\,I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \implies x_2 = (\sqrt{2}-1)x_1 \\ \cancel{x_1 + (-1-\sqrt{2})x_2 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = (\sqrt{2}-1)t \end{cases}$$

$$U_{\sqrt{2}} = \{(t,(\sqrt{2}-1)t) : t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,\sqrt{2}-1)\rangle$$

T... generale per trovare l'autospazio

In generale per trovare l'autospazio U_λ si risolve il sistema lineare omogeneo

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dopo aver sostituito λ col suo valore.

Notate che ogni autospazio è un sottospazio vettoriale di V.

Un esempio in cui non ci sono autovettori: $\underline{f(x,y) = (-y, x)}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1,0) = (0,1)$$

$$f(0,1) = (-1,0)$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

Consideriamo ora la rotazione di π radianti in senso antiorario:

$$f(x,y) = (-x,-y)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)^2 = (\lambda+1)^2$$

C'è un solo autovalore: -1

Calcoliamo il suo autospazio U_{-1}:

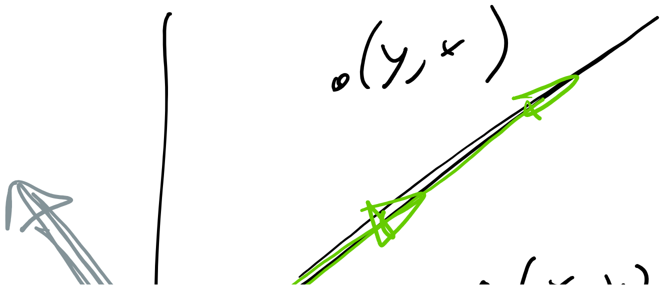
$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

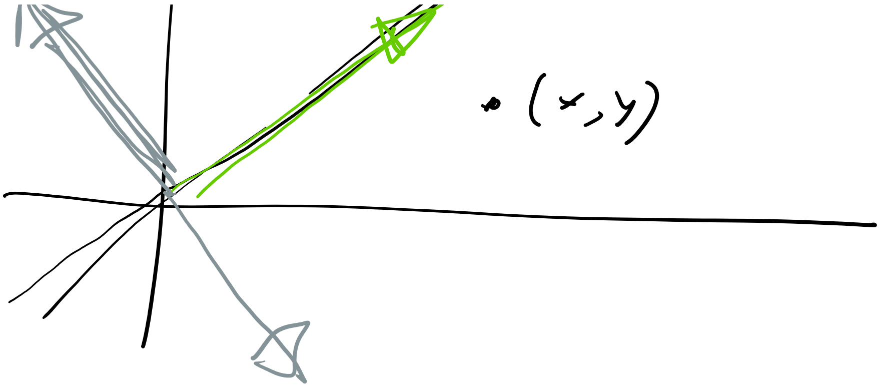
Quindi l'equazione di U_{-1} è

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Quindi $U_{-1} = \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (y,x) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$





$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

autovalori : $-1, 1$

$$U_{-1} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \cancel{x_1 + x_2 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases} \Rightarrow U_{-1} = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle$$

$$U_1 : \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{-x_1 + x_2 = 0} \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$U_1 = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

autovalori: 3, -2

$$U_3 : \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2x + 3y = 0} \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3} t \end{cases}$$

$$U_3 = \left\langle \left(1, \frac{2}{3}\right) \right\rangle = \langle (3, 2) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U_{-2} : \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ \cancel{2x + 2y = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$$

$$U_{-2} = \langle (1,-1) \rangle$$

Es. $f(x,y) = (x+y,\, y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$$

autovalori: 1

$$U_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 = 0 \\ \cancel{0x_1 + 0x_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}}$$

$$U_1 = \langle (1,0) \rangle$$

Immaginiamo un Web con due siti A e B

Immaginiamo un web con due siti web

e queste probabilità di transizione

$$
\begin{array}{c|cc}
 & A & B \\
\hline
A & & \\
B & & \\
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = M
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix}
$$

Distribuzione delle persone dopo 1 minuto

$$
M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

Distrib delle persone dopo 2 minuti

$$
M\left(M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = M^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

Dopo 3 minuti

$$
M^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

A noi interessa però

A noi interessa però

$$\lim_{n\to\infty} M^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{1000000} = ?$$

Proviamo a supporre che esista una base per $V = \mathbb{R}^2$ tutta fatta di autovettori per f definita dalla matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y, \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{3+\cancel{4}}{6} = -\frac{\cancel{7}}{6}$$

$$= \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6}$$

$$6\lambda^2-7\lambda+1=0$$

$$\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{12}$$

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{7\pm 5}{12} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

autovalori di f: $1, \frac{1}{6}$

$$U_1: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2=0 \\ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{3}x_2=0 \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{3}x_2=0 \right. \qquad \begin{cases} x_1=t \\ x_2=\frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$\left\{ 3x_1-2x_2=0 \right.$$

$$U_1=\langle(1,\tfrac{3}{2})\rangle=\langle(2,3)\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U_{\frac{1}{6}}: \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}-\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}$$

$$U_{\frac{1}{6}} = \langle (1,-1) \rangle$$

Quindi, in questo caso, esiste una base spettrale, cioè una base per V tutta fatta di autovettori:

$$B = \Big(\underbrace{(2,3)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1)}_{v_2} \Big)$$

Qual è la matrice di f calcolata non rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ ma rispetto alla nostra base spettrale $B = (v_1, v_2)$?

$$\begin{array}{cc} f(v_1) = 1 v_1 & f(v_2) = \frac{1}{6} v_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$1 v_1 = 1 v_1 + 0 v_2$$

$$\frac{1}{6} v_2 = 0 v_1 + \frac{1}{6} v_2$$

Osservazione: le potenze delle matrici diagonali si calcolano facilmente:

facilmente:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_n^m \end{pmatrix}$$

Nel nostro esempio, se rappresentiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base spettrale trovata, dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi "dopo un tempo infinito" la popolazione $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di utenti del web si distribuisce così:

Supponiamo che la distribuzione

Supponiamo che la distribuzione iniziale delle persone sia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Dobbiamo scrivere le coordinate di tale vettore rispetto alla base spettrale B:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ 3a - b \end{pmatrix}$$

Ciò ci porta al sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b = x_1 \\ 3a - b = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = x_1 + x_2 \Rightarrow a = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ b = 3a - x_2 = \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - x_2 \\ \quad = \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 \end{pmatrix}$$

La distribuzione "dopo un tempo infinito" è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta del vettore

$$\left(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + x_2)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$