02 April 2025 11:17

Teorema: i vettori $(a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,(a_{n1},\dots,a_{nn})$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \neq 0$.

Esempio: $(1,2,3),(1,-1,0),(3,4,3)$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix} = -\cancel{3}+12+\cancel{9}-\cancel{6} = 12 \neq 0$$

Sì i tre vettori sono lin. indip.

In alternativa, riduciamo la matrice per righe,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Per quali valori del parametro t questi 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ sono una base per $\mathbb{R}^4$?

$$(1,t,1,0),(0,1,2,3),(t,1,1,1),(0,3,0,-3)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ t & 1 & 1\end{pmatrix} + (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ t & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 3(2+3t-3) - 3(\underbrace{1+2t^2-t-2}_{-1+2t^2-t})$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= 6+9t-9+3-6t^2+3t$$

$$= \boxed{-6t^2+12t}$$

$$= t(-6t+12)$$

$$= 6t(2-t)$$

I quattro vettori dati sono lin. indip. (e quindi una base per $\mathbb{R}^4$) se e solo se

$$t \neq 0, 2$$

$$\begin{pmatrix} 1-t & 4 & 3 \\ t & 1 & 4 \\ 0 & t & 8 \end{pmatrix} \qquad \frac{t}{1-t}$$

caso $t \neq 1$ ⋮ | caso $t \neq 1$ ⋮

Esercizio sul calcolo della matrice inversa.

Es. Dire se la seguente matrice è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa:

A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -6 \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \ldots$$

$$A^{-1} = \frac{{}^t(A_{ij})}{\det A} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{23} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_{31} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_{32} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{33} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{33} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$A^{\#} = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{{}^t(A_{ij})}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = I \Rightarrow BA = I$$

se A, B e I sono tutte matrici $n \times n$.

$$I_1$$

$$\underset{1 \times 3}{(1, 0, 0)} \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{1 \times 1}{(1)}$$

$$\underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{1 \times 3}{(1\ 0\ 0)} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

T

3×1 $\qquad 1 \times 3$ $\qquad 3 \times 3$

I_3

Teorema di Binet: $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\det AB = \det A \det B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \qquad \det B = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det AB = \cancel{a_{11} a_{21} b_{11} b_{12}} + \cancel{a_{12} a_{22} b_{21} b_{22}} +$$

$$+ a_{11} a_{22} b_{11} b_{22} + a_{12} a_{21} b_{21} b_{12}$$

$$- \left(\cancel{a_{11} a_{21} b_{12} b_{11}} + \cancel{a_{12} a_{22} b_{22} b_{21}} \right.$$

[illegible] $+ a_{12} a_{21} b_{11} b_{22})$

$$+a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$

$$- a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$

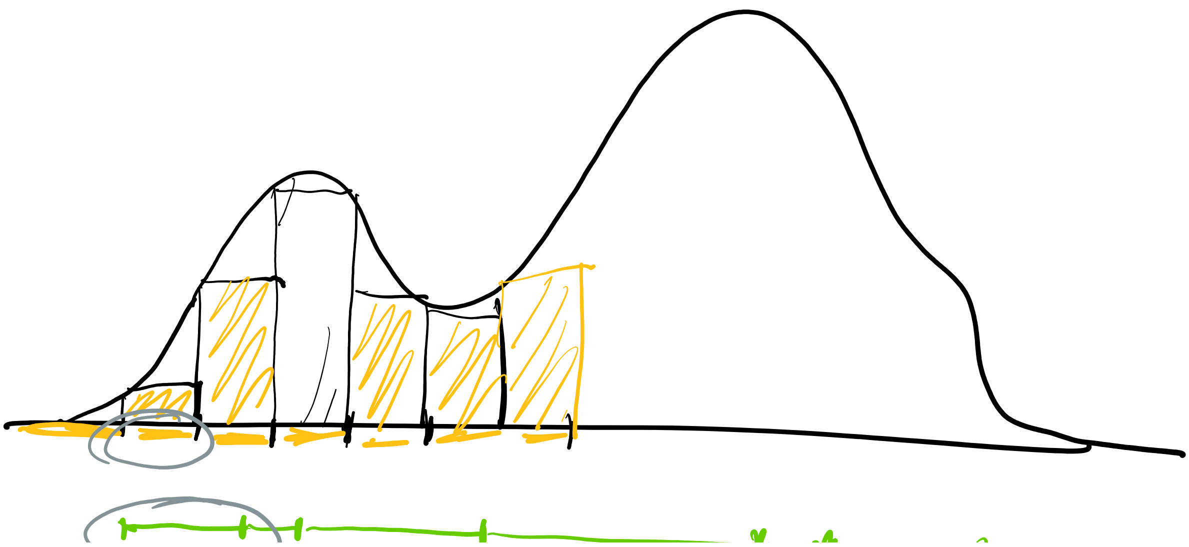
$$(\det A)(\det B) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}$$

$$- a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$

Quindi per le matrici 2×2 abbiamo dimostrato che

$$\det(AB) = \det A \det B$$



$$\frac{dy}{dx}$$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

in generale

$$\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \neq \underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$T : \underline{V} \to \underline{V}$ <u>endomorfismo</u>

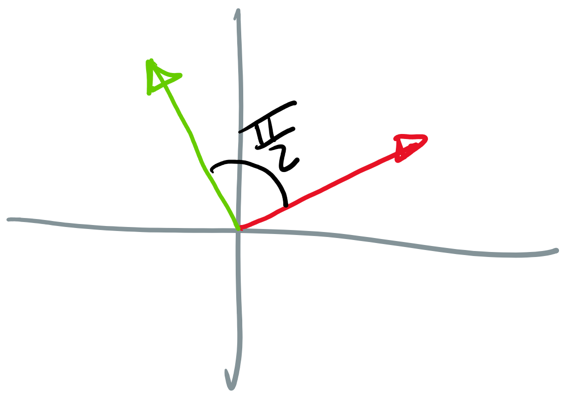
Possono esistere dei vettori $v \in V$ tali che

$$T(v) = \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$T(v) = \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Non è detto che accada!

Es. T = rotazione di $\mathbb{R}^2$ di $\frac{\pi}{2}$ radianti in senso antiorario.



$$\underbrace{T(0)}_{=\,0} = \underbrace{\lambda\, 0}_{=\,0}$$

Prendiamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

così definita:

$$\boxed{f(x,y) = (\underline{x+y}, \underline{x-y})}$$

Esistono vettori $(x,y) \neq (0,0)$ che vengono mandati da f in multipli di se stessi?

mandati da f in multipli di se stessi?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}(f)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere l'equazione così:

$$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{AX = \lambda X}$$

$$\Updownarrow$$

$$AX = \lambda I X$$

$$\Updownarrow$$

$$AX - \lambda I X = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0} \ \ldots$$

$$\overset{\Downarrow}{\underline{(A-\lambda I)X = 0}} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underset{M_{2\times 2}(\mathbb{R})}{\cap}}{B} X = 0$$

Se vogliamo che il sistema lineare

$$BX = 0$$

ammetta una soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non banale (cioè diversa da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) occorre che $r(B) < 2$.

Infatti, se $r(B) = 2$, $\dim Sol\, S = 2 - 2 = 0$ e esisterebbe solo la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quindi vogliamo che $r(\underset{B}{\underbrace{A-\lambda I}}) < 2$.

Cioè vogliamo che $\det(A-\lambda I) = 0$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$ ← MATRICE CARATTERISTICA

Vogliamo che il determinante di questa matrice sia nullo.

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda)-1$$

$$= -1-\lambda+\lambda+\lambda^2-1$$

$$= \lambda^2-1-1$$

$$= \lambda^2-2$$

Autovalori : $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$BX = 0$

$(A-\lambda I)X = 0$

Vediamo i due casi

$\lambda = \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ \cancel{x + (-1-\sqrt{2})y = 0} \end{cases}$$

Se moltiplico la seconda eq. per $1-\sqrt{2}$

$$(1-\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})y = 0$$

cioè

$$(1-\sqrt{2})x + (-1-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}+2)y = 0$$

cioè

$$(1-\sqrt{2})x + y = 0$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (\sqrt{2}-1)t \\ x = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = (x+y,\ x-y)$$

$$f(\underline{1, \sqrt{2}-1}) = (\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}+1) = (\underline{\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}})$$

$$\sqrt{2}(1, \sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$$

Se poste lo stesso calcolo per

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (matrice della rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \boxed{\lambda^2 + 1}$$