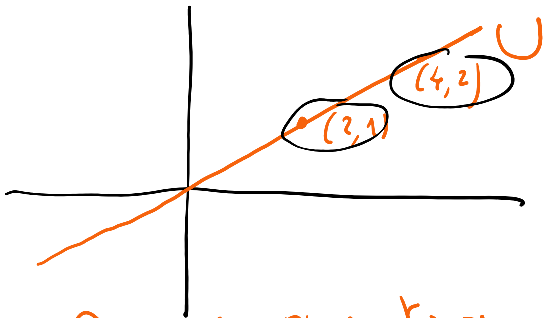
Rappresentazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio vettoriale $U \subseteq V$.

$V = \mathbb{R}^2$



$\underline{x - 2y = 0}$ rappresentazione cartesiana di U

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$

Se $U = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}}_{X} = \overset{\mathbf{0}}{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m}}}\right\}$

diciamo che $AX = \mathbf{0}$ è una rappresentazione cartesiana di U.

$\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases}$$

Ricordo che se S_0 è un sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ allora $Sol(S_0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

allora $Sol(S_0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

sottospazio vettoriale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} m \text{ comp.}$$

S_0 si può scrivere come $AX = \mathbf{0}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in Sol(S_0) \Rightarrow \underline{AX_1 = \mathbf{0}}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} \in Sol(S_0) \Rightarrow AX_2 = \mathbf{0}$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Quindi $X_1 + X_2 \in Sol(S_0)$

$$A(\lambda X_1) = \lambda(AX_1) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Dunque, $Sol(S_0)$ è un s.s.v. di $\mathbb{R}^n$.

NB. La rappresentazione cartesiana non è unica!

$$x - 2y = 0 \qquad\qquad 3x - 6y = 0$$

$$AX = \mathbf{0} \qquad\qquad A'X = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ scriviamo l'equazione del s.s.v. nullo di $\mathbb{R}^3$.

Caso $m=1$ equazioni

$$0x+0y+0z=0 \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso $m=2$ equazioni

$$\begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Equazione parametrica della retta di equazione cartesiana $\boxed{x-2y=0}$.

Risolviamo l'equazione!

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\begin{cases} y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia U un s.s.v. di $\mathbb{R}^n$.

Una rappresentazione parametrica di U è una scrittura del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 a_{11} + \ldots + t_k a_{k1} \\ \vdots \\ x_i = t_1 a_{1i} + \ldots + t_k a_{ki} \\ \vdots \\ x_n = t_1 a_{1n} + \ldots + t_k a_{kn} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$X = t_1 C_1 + \ldots + t_k C_k$$

dove $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1i} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, C_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad \cap \quad\quad\quad\quad\quad\quad \cap$

$\quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^n \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^n$

Ogni s.s.v. di $\mathbb{R}^n$ ammette sia rappresentazioni cartesiane che rappresentazioni parametriche.

Sia U un s.s.v. di $\mathbb{R}^n$.

Essendo, in particolare, uno s.v., ammette una base: $(v_1, \ldots, v_k)$.

una base: $(v_1, \dots, v_k)$.

Ogni vettore v di U si può scrivere (in modo unico) nella forma $v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$.

$$\boxed{X = x_1 V_1 + \dots + x_k V_k}$$

Rappresentazione parametrica di U.

Nota: $\mathbb{R}^2$ Base $B' = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1)}_{v_2})$ $\quad \underset{v}{\underset{\parallel}{(2,0)}} = 1v_1 + 1v_2$

$$\underset{v}{\underset{\parallel}{(2,0)}} \underset{B'}{\equiv} (1,1)$$

$$v \underset{B}{\equiv} X \qquad v_1 \underset{B}{\equiv} V_1, \dots, v_k \underset{B}{\equiv} V_k$$

Come dimostrare che ogni s.s.v. di $\mathbb{R}^4$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana?

Partiamo da un esempio semplice: la retta in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$$

Ricaviamo t dalla prima equazione e sostituiamolo nella seconda:

$$t = \frac{1}{2}x \rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}x + y = 0}$$

$$t = \frac{1}{2}x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{-\frac{1}{2}x + y = 0}$$
$$y = \frac{1}{2}x$$

equazione cartesiana della retta.

In generale si può ottenere una rappresentazione cartesiana di U eliminando iterativamente i parametri nella rappresentazione parametrica.

Esempio: $\mathbb{R}^4$

$$U: \boxed{\begin{cases} x_1 = 2s + 3t \\ x_2 = s - t \\ x_3 = t \\ x_4 = s + 8t \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \\ 8t \end{pmatrix} =$$

$$= s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U = \mathrm{Span}\big((2,1,0,1),(3,-1,1,8)\big)}$$

Calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U:

$$\begin{cases} x_1 = 2s + 3x_3 \\ x_2 = s - x_3 \\ x_4 = s + 8x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2s \\ x_2 + x_3 = s \\ -8x_3 + x_4 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2(x_2 + x_3) = 2x_2 + 2x_3 \\ -8x_3 + x_4 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_2 - 9x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

una rappr. cartesiana di U.

$$\text{rappr. param.} \xRightarrow{\text{elim. i parametri}} \text{rappr. cartesiana}$$

$$\text{rappr. param.} \xLeftarrow{\text{risolvere il sistema}} \text{rappr. cartesiana}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -13s + 2t \\ x_2 = -9s + t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13s \\ -9s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \underline{\text{Span}}\big((-13,-9,1,0),(2,1,0,1)\big)$$

Nomenclatura sulle matrici.

Matrici diagonali.

Una matrice D si dice diagonale se è quadrata e tutti i suoi elementi non nulli (se ci sono) stanno sulla diagonale della matrice (cioè hanno indice di riga uguale all'indice di colonna.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici triangolari superiori.

Una matrice A si dice triangolare superiore se è quadrata e tutti i suoi elementi non nulli (se ci sono) hanno indice di colonna superiore o uguale a quello di riga.

Es.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \square \end{pmatrix}}_{n}\right.$$

diagonale principale

$$n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & & & & \square \\ & & & \square & \\ & & \iddots & & \\ & & & & \\ \square & & & & \end{pmatrix}}_{n}\right.$$

diagonale secondaria

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Data una matrice $\overset{"(a_{ij})"}{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si chiama "trasposta di A" (e si indica usualmente col simbolo A^t) la matrice $\underset{({}^tA)}{}$

$B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ con $b_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici (i,j).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{8} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{0} \\ \underline{-3} & \underline{8} \end{pmatrix}$$

A si dice <u>simmetrica</u> se $A^t = A$

Esempio
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 10 \\ 7 & 0 & -8 & 3 \\ -4 & 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A si dice antisimmetrica se $A^t = -A$

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & 0 & \pi \\ 4 & 5 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

$A(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$

$M_1, M_2 \in A(n)$

$\boxed{M_1^t = -M_1}$, $M_2^t = -M_2$

$$(M_1+M_2)^t \overset{?}{=} -(M_1+M_2)$$

$$\begin{aligned}
&= M_1^t + M_2^t \\
&= -M_1 + (-M_2) \\
&= -M_1 - M_2
\end{aligned}$$

$$(\lambda M_1)^t \overset{?}{=} -(\lambda M_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda M_1^t \\
&= \lambda(-M_1) \\
&= -1(\lambda M_1)
\end{aligned}$$

Ogni matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ si può scrivere come somma di una matrice simmetrica più una matrice antisimmetrica.

$$B = \underbrace{\frac{1}{2}(B+B^t)}_{\in S(n)} + \underbrace{\frac{1}{2}(B-B^t)}_{\in A(n)}$$

$$\frac{1}{2}B + \cancel{\frac{1}{2}B^t} + \frac{1}{2}B - \cancel{\frac{1}{2}B^t} = B$$

$$\left(\frac{1}{2}(B+B^t)\right)^t = \frac{1}{2}\left((B+B^t)\right)^t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(B^t + (B^t)^t\right) = \frac{1}{2}(B^t+B) = \frac{1}{2}(B+B^t)$$

CARDINALITÀ

Si dice che due insiemi A, B hanno la stessa cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca $f: A \to B$.

Es. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \cdots & 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & \cdots \end{array}$$

$$6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \ldots$$

$$\text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{Z}$$

$$\text{card } \mathbb{Q}^+ = \text{card } \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & & & & & & \end{array}$$

$$0 \to 0.374015\ldots$$

$$1 \to 0.148113\ldots$$

$$2 \to 0.588887\ldots$$

$$\vdots$$

$$0.410\ldots$$