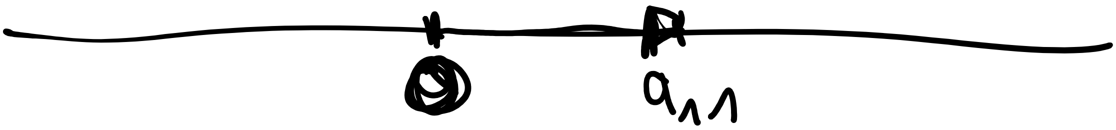
29 March 2025 10:05

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$\det A = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sign} p \; a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$



Teorema di Laplace

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boxed{A_{ij}}$$

cofattore di a_{ij}
con j fissato
arbitrariamente

dove A_{ij} è definito come

$$(-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

matrice che si
ottiene da A
cancellando la

cancellando la
riga i-esima e
la colonna j-esima.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 + 0 + 4 - 0 - 3 = 3$$

Scegliamo $j = 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2 + 4 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a_{12}, a_{22}, a_{32}

$$\det A = 4 \cdot 1 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{} + 1 \, \underline{(-1)} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$= 8 - 5 = 3$$

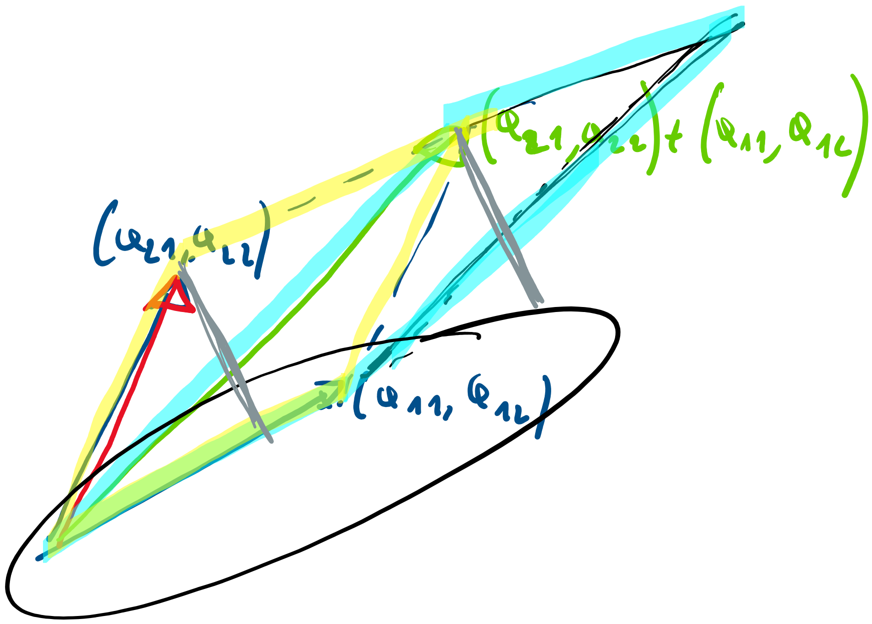
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{per } i \text{ fissato arbitrariamente}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= 1 + 2 = 3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



1) Sia B una matrice ottenuta da A aggiungendo un multiplo di una riga (colonna) di A a un'altra riga (colonna). Allora

$$\det A = \det B$$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\4\\1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\3\\1\end{matrix}\end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

2) Sia B una matrice ottenuta da A moltiplicando una sua riga (colonna) per α. Allora

$$\det B = \alpha \det A$$

3) Se B viene ottenuta da A permutando le sue righe (colonne) con una permutazione di segno 1 il determinante non cambia.

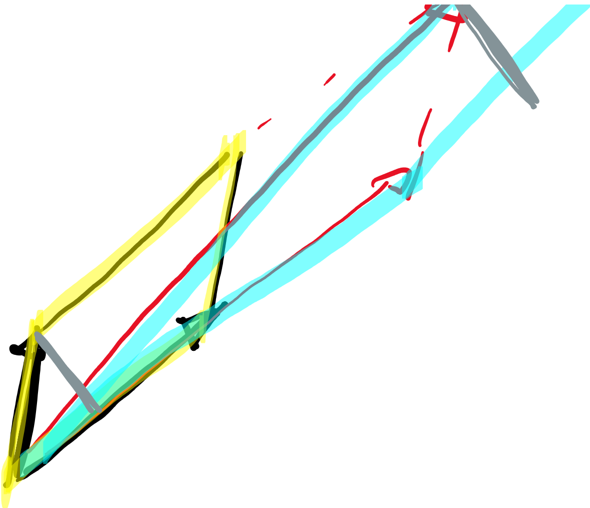
Se B viene ottenuta da A permutando le sue righe (colonne) con una permutazione di segno -1 il determinante cambia di segno.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + 4 - 2 - 3 + 4 - 0 = 8 - 5 = 3$$



$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\4\\1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\3\\1\end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot (-3)) = 3$$

Osservazione importante :

Osservazione importante.

Se A è una matrice $n \times n$ ridotta

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$$\det A = \sum_{p \in S_3} \operatorname{sign} p \; a_{1p(1)} \, a_{2p(2)} \, a_{3p(3)}$$

Possiamo limitarci a considerare il caso $p(3)=3$

$p(2)=2$

$p(1)=1$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 15 \\ 0 & 9 & 6 & 20 \\ 0 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$= -4\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 9 & 6 & 20 \\ 0 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$= -4\cdot 81\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{20}{9} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$= -324\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} & -\frac{55}{36} \\ 0 & 0 & \frac{29}{36} & -\frac{17}{12} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{324}{36^2}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 33 & -55 \\ 0 & 0 & 29 & -51 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{324\cdot 11}{36^2}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 29 & -51 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

$$\frac{20}{9}-\frac{15}{4}=\frac{80-135}{36}=-\frac{55}{36}$$

$$\frac{5}{9}+\frac{1}{4}=\frac{20+9}{36}$$

$$\frac{7}{3}-\frac{15}{4}=\frac{28-45}{12}=-\frac{17}{12}$$

$$-51+29\cdot\frac{5}{3}$$

$$= -\frac{324\cdot 11\cdot 3}{36^2}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{13}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

$$-51+29\cdot\frac{5}{3} = \frac{-153+145}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$= -\frac{324\cdot 11\cdot \cancel{3}}{36^2}\cdot\frac{8}{\cancel{3}} = \dots\dots$$

Calcoliamo ora il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & 0 & & & \vdots\\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & \boxed{1} & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & 0\\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

1000 × 1000

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(-1)(-1) + 1\cdot(+1)(1) = 1+1 = 2 \qquad \det = 0 \qquad \det = 0$$

ATTENZIONE!

Si può dimostrare che

Teorema di Binet:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

però, in generale, come abbiamo visto col nostro esempio,

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ & & & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= 999 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \; 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \; 1 \end{pmatrix}$$

$$= 999 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{998}{2} = 499$$

$$= -999 \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 999 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -999$$

Teor. $\det A = \det {}^tA$

Supponiamo che A contenga una riga (colonna) nulla.

Quanto vale $\det A$? $\det A = 0$

Supponiamo che A contenga due righe (colonne) uguali fra loro.

Quanto vale $\det A$?

$$\det A = 0$$

Metodo alternativo per il calcolo della matrice inversa.

$\boxed{\text{Teor. } A^{-1} \text{ esiste se e solo se } \det A \neq 0.}$

Se $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{{}^t(A_{ij})}{\det A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)(-1) = 1$$

$$\frac{{}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}}{\det A}$$