Esercizio: calcolare la matrice associata:

$F : S(2) \to \mathbb{R}^2$ $\quad F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) := \left(\underset{a+c}{\underset{\shortparallel}{Tr\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}}, b\right)$

$B_{S(2)} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right)$

$B_{\mathbb{R}^2} = \left(\underset{w_1}{(1,1)}, \underset{w_2}{(1,-1)}\right)$

$M_{B_{S(2)} B_{\mathbb{R}^2}}(F) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+z & x+y+z \\ x+y+z & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = a \\ x + y + z = b \\ z = c \end{cases}$$

C

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)}_{}$$

C, A

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

A', C'

$$r(A) = r(A') = 3$$
$$r(C') = r(C) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a - \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-\frac{a-b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

$$\|$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$y = \frac{a-b}{2}$$

Teorema: se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori linearmente indipendenti di uno s.v. di dimensione n, sono anche una base.

Teorema: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori per uno s.v. di dimensione n, sono anche una base.

NB: $\boxed{\dim S(n) = \frac{n(n+1)}{2}}$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ & \times & \times \\ & & \times \end{pmatrix}$$

$$\left(\qquad \times \right)$$

$$\dim S(3) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$\boxed{\dim S(2) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3}$$

$$F(v_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, \ 1)$$

$$F(v_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, \ 1)$$

$$F(v_3) = F\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (2, \ 1)$$

$$M_{B_{S(2)} B_{\mathbb{R}^2}}(F) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 w_1 + 0 w_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x w_1 + y w_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$f : \underline{\mathbb{R}^{\leq 2}[x]} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}$$

$$f(-3x^2 + x + 1) = (-9, -13)$$

$$f(p+q) = ((p+q)(2), (p+q)(-2))$$

$$= \underline{(p(2) + q(2), p(-2) + q(-2))}$$

$$= \underline{(p(2), p(-2))} + \underline{(q(2), q(-2))}$$

$$= f(p) + f(q)$$

$$f(\lambda p) = ((\lambda p)(2), (\lambda p)(-2))$$

$$= (\lambda(p(2)), \lambda(p(-2)))$$

$$= \lambda \left(p(2), p(-2) \right)$$

$$= \lambda f(p)$$

$$B_1 = (1, x, x^2) \qquad f(1) = (1, 1)$$

$$B_2 = ((1,0), (0,1)) \qquad f(x) = (2, -2)$$

$$\qquad\ \ e_1 \qquad\quad e_2 \qquad f(x^2) = (4, 4)$$

$$M_{B_1 B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\dim S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ & & \end{pmatrix} +$$

$$= a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} +$$

$$+ d\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\dim S(n) = 1+2+3+\dots+n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Qualche conseguenza dell'equazione dimensionale

$f: V \to W$

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$$

Supponiamo che $\dim V = \dim W$.

Es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y,\ 2z)$$

Teorema. Se $f: V \to W$ è una trasf. lineare e $\dim V = \dim W$ allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva.

è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Proposizione. Una trasf. lineare $f: V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_V\}$

Dim. Supponiamo che f sia iniettiva e prendiamo un vettore $v \in \ker f$.

$$f(v) = 0_W$$

$$f(0_V) = 0_W$$

$$v, \; 0_V \longrightarrow 0_W \Rightarrow v = 0_V$$

Ciò significa che $\ker f = \{0_V\}$.

Supponiamo ora che $\ker f = \{0_V\}$

Se $f(v_1) = f(v_2)$ allora $f(v_1) - f(v_2) = 0_W$.

Dato che f è lineare, $f(v_1 - v_2) = 0_W$.

Quindi $v_1 - v_2 \in \ker f$.

Dunque, dato che $\ker f = \{0_V\}$, si ha che $v_1 - v_2 = 0_V$, cioè $v_1 = v_2$.

$$\begin{array}{c} \| \\ v_2 \end{array} \to f(v_1) = f(v_2)$$

Dim. del Teorema.

Supponiamo che $\underline{\dim V = \dim W}$.

Supponiamo f iniettiva (cioè $\ker f = \{0_V\}$)

$\dim \ker f$

NB: Lo spazio vettoriale contenente il solo vettore nullo ha come unica base l'insieme vuoto $\emptyset$.

Quindi f iniettiva $\Rightarrow$ $\dim \ker f = 0$.

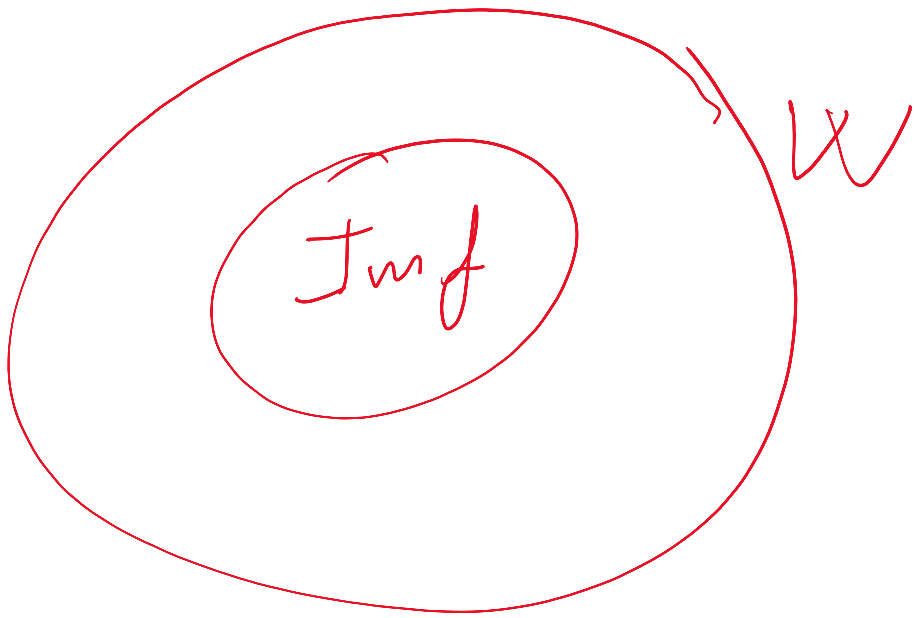
Inseriamo questa informazione nell'eq. dimensionale:

$$\cancel{\underset{\substack{\| \\ 0}}{\dim \ker f}} + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V = \dim W$$

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim W$$

$$\Downarrow$$

$\mathrm{Im}\, f = W$ cioè f è suriettiva



$$\dim U = \dim W$$

$$\Downarrow$$

$$U = W$$

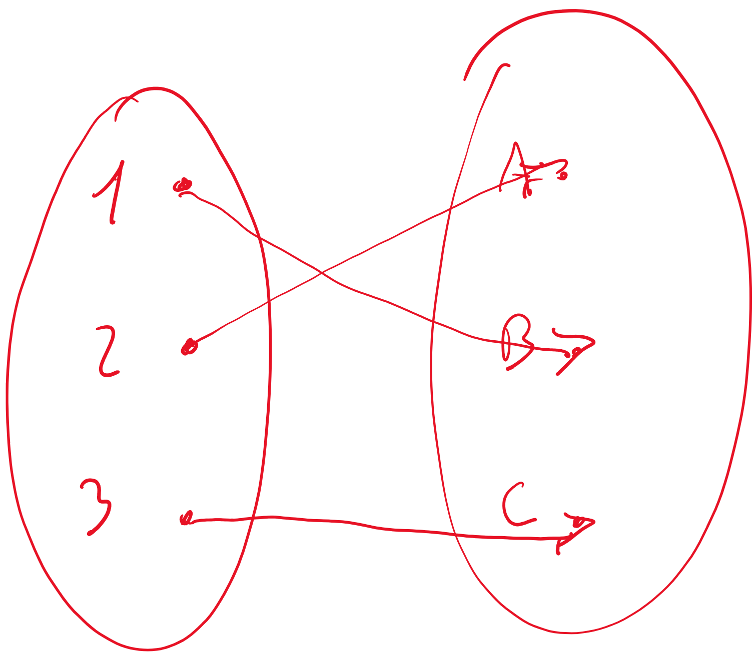
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (0,0)$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$f(x) = x^3$ è biunivoca

ma non è lineare.



X Y

Vediamo ora che se f è suriettiva allora è anche iniettiva.

Se f è suriettiva significa che $\operatorname{Im} f = W$, cioè $\underline{\dim \operatorname{Im} f = \dim W = \dim V}$.

Allora l'equazione dimensionale ci dice che

$$\boxed{\dim \ker f + \underset{\dim W}{\underset{\parallel}{\dim \operatorname{Im} f}} = \underset{\dim W}{\underset{\parallel}{\underline{\dim V}}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \ker f = 0$$

$$\ker f = \{0_V\}$$

cioè f è iniettiva.

Spazio vettoriale delle successioni reali: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad \dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \infty$

$0, 0, \ldots$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

$(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

Un esempio di trasf. lineare $f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che è iniettiva ma non suriettiva:

$$f(v) = (0, v)$$

$$f(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$$