TUTOR:

Antonio Di Nunzio

Sistemi di generatori.

Lineare dipendenza e indipendenza.

Basi.

Teor. Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale (reale) V (finitamente generato) hanno la stessa cardinalità.

Si può vedere facilmente che $\mathbb{R}[x]$ NON è finitamente generato.

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è finitamente generato? Sì

$B = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ è una base per $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Quindi

$$\dim M_{n\times n}(\mathbb{R}) = n^2$$

$$\dim M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6$$

$$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \times n$$

$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m\times n$

$$\boxed{\dim \mathbb{R}[x] = \infty}$$

Una base per $\mathbb{R}[x]$:

$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

$\;\; v_0 \; v_1 \; v_2 \dots v_n \dots$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n =$

$p = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Teor. Ogni spazio vettoriale V reale ammette almeno una base.

Dim. Prendiamo un sistema di generatori $(v_1, \dots, v_n)$ per V.

Ci chiediamo: v_1 è comb. lineare degli altri vettori?

Se sì, lo togliamo, altrimenti lo lasciamo.

Andiamo avanti così, con gli altri vettori.

Nell'insieme (ordinato) finale, nessun vettore sarà comb. lineare dei rimanenti.

Quindi sarà una base.

card $\mathbb{R}^2 = \infty$ $\qquad$ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = insieme di tutte le funzioni $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

spazio v. delle succ. reali

A^B = insieme di tutte le funzioni da B a A

$f : B \to A$

$$\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \infty$$

$$\operatorname{card} \mathbb{R}^n = \infty \qquad \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$B = (\underbrace{(1, \ldots, 0)}_{= e_1}, \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)}_{= e_2}, \ldots, \underbrace{(0, \ldots, 1)}_{= e_n})$$

$$\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$$

Vogliamo dimostrare ora il teorema sulla cardinalità delle basi per le basi di sottospazi v. di $\mathbb{R}^n$.
Per farlo abbiamo bisogno di tornare alle operazioni riga sulle matrici.

Teor. Sia B una matrice reale $m \times n$

Teor. Sia B una matrice reale $m \times n$ ricavata da A applicando alcune operazioni riga.

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \qquad \left(\text{p.e. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad R_1 = (1,1,-1),\ R_2 = (0,4,2) \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} R_1' \\ \vdots \\ R_m' \end{pmatrix}$$

Allora:

1) $\langle R_1, \dots, R_m \rangle = \langle R_1', \dots, R_m' \rangle$

2) $R_1, \dots, R_m$ sono lin. indip. se e solo se lo sono $R_1', \dots, R_m'$.

Linea dimostrativa.

Facciamo vedere che l'affermazione è vera per ogni singola operazione riga.

Consideriamo l'operazione riga

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \quad \text{cioè} \quad R_2' = \boxed{R_2 + R_1}$$

$$(R_1, R_2, \dots, R_m)$$

$$(R_1, R_2', \dots, R_m)$$

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_m R_m \in \langle R_1, R_2, \dots, R_m \rangle$$

$$(x_1 - x_2) R_1 + x_2 R_2' + x_3 R_3 + \dots + x_m R_m \in \langle R_1, R_2', \dots, R_m \rangle$$

$$(x_1-x_2)R_1 + x_2 R_2' + x_3 R_3 + \dots + x_m R_m \in \langle R_1, R_2', \dots, R_m \rangle$$

$$\parallel$$

$$(x_1-x_2) R_1 + x_2 (R_2+R_1) + \dots + x_m R_m$$

$$\parallel$$

$$x_1 R_1 - \cancel{x_2 R_1} + x_2 R_2 + \cancel{x_2 R_1} + \dots + x_m R_m$$

$$y_1 R_1 + y_2 R_2' + \dots + y_m R_m$$

$$\parallel$$

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_m R_m$$

con $\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x_1 = y_1 + y_2}$

$\vdots$

$y_m = x_m$

Quindi, se scriviamo una comb. lineare

$$y_1 R_1 + \underline{y_2} R_2' + \dots + y_m R_m$$

possiamo ottenerla come

$$(y_1+y_2) R_1 + y_2 R_2 + \dots + y_m R_m \qquad (\text{NB}: R_2' = R_2 + R_1)$$

NB $\to \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_n R_n = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0}$

$$\boxed{R_2' = R_2 + R_1}$$

$$\boxed{x_1 R_1 + x_2 R_2' + \dots + x_m R_m = 0}$$

$$x_1 R_1 + x_2 (R_2 + R_1) + \dots + x_m R_n = 0$$

$$\parallel$$

$$x_2 R_2 + x_2 R_1$$

$$\parallel$$

$$(x_1 + x_2) R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_m R_m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Esercizio: dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono lin. indipendenti:

$v_1 = (1, 0, -1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 3, -4)$, $v_3 = (5, 6, 7, -6)$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & 12 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$x R_1 + y R_2 \neq 0$

$\neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Sono lin. dip.!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{matrix} \end{array}$$

$(0,0,0,0)$

$$0 R_1' + 0 R_2' + 1 R_3' = (0,0,0,0) + (0,0,0,0) + (0,0,0,0)$$

Es.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{matrix} \end{array}$$

$$0 R_1' + 7 R_2' - 11 R_3' = 0_{\mathbb{R}^5}$$

Quindi la presenza di righe nulle significa LINEARE DIPENDENZA.

L'assenza di righe nulle (nella matrice completamente ridotta) significa LINEARE INDIPENDENZA.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$x_1 R_1 + \dots + x_m R_m = 0$$

$x_1 = 0$, $x_m = 0$

Sia

$v = (4,6,8,1)$

$v = (4, 6, 8, 1)$

v è comb. lineare di v_1, v_2, v_3?

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Esiste sol. per il sist. lineare

$$\begin{cases} x + y + 5z = 4 \\ 2y + 6z = 6 \\ -x + 3y + 7z = 8 \\ 3x - 4y - 6z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & -6 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 4 & 6 & 8 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$w_1 = (1, 0, -1, 3)$

$w_2 = (0, 1, 2, -\frac{7}{2})$

$v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$

le righe di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 6 & 12 & -11 \end{pmatrix}$$

$-11 - 6\left(-\frac{7}{2}\right)$

$-11 + 21$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{matrix}$

Trovare una base per $\overline{\text{Span}}(v_1, v_2, v_3)$

$\mathcal{B} = (w_1, w_2)$

Esercizio: consideriamo lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e prendiamo questi 3 vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quali $a \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono lin. indipendenti?

$$v_1 \longmapsto (1 \quad 2 \quad a \quad 0)$$
$$v_2 \longmapsto (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$
$$v_3 \longmapsto (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $a \neq 2$

Se $a = 2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se la matrice fosse invece stata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Canale Teams

codice Teams: kdtxzao

mail tutor: Antonio Di Nunzio

a.dinunzio@studenti.unipi.it