Compiti scritti di Geometria 1

Filippo Callegaro, Filippo Disanto, Giovanni Gaiffi, Davide Lombardo

Indice

1 Anno accademico 2017-2018

1.1 Esercitazione del 27/11/2017

Esercizio 1. Consideriamo in $\mathbb{C}^4$ i sottospazi vettoriali

$$V_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \text{ tali che } \begin{cases} -x+z+t=0 \\ ix+y=0 \end{cases} \right\}$$

1. Determinare una descrizione del sottospazio V_1 in termini di equazioni cartesiane.
2. Calcolare $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$.

Soluzione.

1. Partendo dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & i & z \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$$
e riducendo a scala si trova
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -iz \\ 0 & 0 & y+iz+t \\ 0 & 0 & x-(1+i)y-iz \end{pmatrix},$$
da cui vediamo che una descrizione cartesiana di V_1 è
$$\begin{cases} y+iz+t=0 \\ x-(1+i)y-iz=0 \end{cases}$$
Si ricorda che questa è solo una delle infinite descrizioni cartesiane possibili per V_1.

2. Dalle equazioni cartesiane di V_1 scritte sopra otteniamo che $V_1 \cap V_2$ è dato dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} y+iz+t=0 \\ x-(1+i)y-iz=0 \\ -x+z+t=0 \\ ix+y=0 \end{cases}$$
La matrice di questo sistema è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 1 \\ 1 & -1-i & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la cui forma a scala ridotta è $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Questa matrice ha chiaramente rango 3, per cui si vede immediatamente che $V_1 \cap V_2$ è di dimensione 1 (anche se questo non era richiesto: un generatore di $V_1 \cap V_2$ è dato da $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$). Per la formula di Grassmann, $V_1 + V_2$ ha dimensione
$$\dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 2+2-1 = 3.$$

Esercizio 2. In questo esercizio consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi a coefficienti complessi di grado al più 2, e l'applicazione

$$D: \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

che manda un polinomio $p(x)$ nella sua derivata. Si può considerare come noto il fatto che D sia un'applicazione lineare.

1. Determinare una base di $\ker(D)$ e una di $\mathrm{Im}(D)$.
2. Scrivere la matrice dell'applicazione lineare D rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Si ricorda che scrivere la matrice di un'applicazione lineare rispetto ad una certa base vuol dire utilizzare quella base sia in partenza che in arrivo.

Consideriamo ora l'applicazione lineare $I + D$, ovvero l'applicazione lineare da V in sé che manda il polinomio $p(x)$ in $p(x) + p'(x)$.

3. Dimostrare che $I + D$ è effettivamente un'applicazione lineare.
4. Dimostrare che le applicazioni lineari $I + D$ e $(I + D)^4$ sono iniettive.
5. Determinare la matrice di $(I + D)^{-1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo).
6. Trovare tutti i polinomi $q(x) \in V$ con la proprietà che $q(x) + q'(x) = x^2 + 1$.

Soluzione.

1. È chiaro che $D(p(x)) = 0$ se e solo se $p(x)$ è costante. Una base di $\ker D$ è dunque data dal polinomio $p_0(x) = 1$ (polinomio costante 1). Dalla formula
$$\dim V = \dim \mathrm{Im}(D) + \dim \ker(D)$$
segue allora $\dim \mathrm{Im}(D) = \dim V - \dim \ker(D) = 3 - 1 = 2$. Inoltre, dal momento che i polinomi $D(x) = 1$ e $D(x^2) = 2x$ sono linearmente indipendenti e appartengono per costruzione all'immagine di D, questo dimostra che l'immagine di D ammette per base (per esempio) i due polinomi 1 e $2x$.

2. Siano $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ gli elementi della base $\mathcal{B}$. Applicando D a questi polinomi troviamo $D(1) = 0$, $D(x) = 1 = p_0(x)$ e $D(x^2) = 2x = 2p_1(x)$. Dal momento che le colonne della matrice associata a D rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono le coordinate di $D(p_0(x)), D(p_1(x)), D(p_2(x))$ nella base $\mathcal{B}$, otteniamo
$$[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. La somma di applicazioni lineari è lineare.

4. Dal momento che la matrice dell'identità (rispetto a qualunque base di V, dunque in particolare rispetto a $\mathcal{B}$) è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si deduce che la matrice dell'applicazione lineare $I + D$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$[I + D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Essa è già in forma a scalini ridotta per righe, e ha 3 pivot non nulli, dunque il suo rango è uguale a 3. Ne segue che il suo nucleo ha dimensione $\dim V - \mathrm{rango}(I + D) = 3 - 3 = 0$, ovvero che $I + D$ è iniettiva. Inoltre, abbiamo visto che la composizione di applicazioni lineari iniettive è iniettiva, dunque $(I + D)^4$ è iniettiva.

5. Svolgendo i calcoli con l'algoritmo visto a esercitazione si trova:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dunque la matrice inversa di $[I + D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. L'applicazione lineare $I + D$ è iniettiva e surgettiva per i punti precedenti, dunque un tale $q(x)$ esiste ed è unico. Le coordinate del polinomio $x^2 + 1$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; per trovare il polinomio $q(x)$ voluto calcoliamo le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$[(I + D)^{-1}(x^2 + 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $q(x) = x^2 - 2x + 3$ è l'unico polinomio $q(x)$ come nella richiesta; in effetti,

$$q(x) + q'(x) = (x^2 - 2x + 3) + (2x - 2) = x^2 + 1.$$

1.2 Esercitazione del 05/12/2017

Esercizio 1. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tali che } x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

e il sottospazio affine $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Determinare la dimensione e una descrizione cartesiana del sottospazio affine $V \cap R$.
2. Scrivere le coordinate di un punto di $V \cap R$.
3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ottenuto traslando $V \cap R$ nell'origine. Determinare equazioni cartesiane per U.

Soluzione.

1. Per definizione, un punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartiene a R se e solo se il vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Questo è equivalente a richiedere che le colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 + 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 - 1 \\ 3 & 1 & 0 & x_4 + 1 \end{pmatrix}$$

siano linearmente dipendenti, ovvero che il rango di questa matrice sia 3 (non può essere inferiore: si vede facilmente che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti). Usando l'eliminazione di Gauss per righe per eliminare i coefficienti 2 e 3 nella prima colonna si trova

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2+1 \\ 0 & 1 & -1 & x_3-1-2(x_2+1) \\ 0 & 1 & -3 & x_4+1-3(x_2+1) \end{pmatrix},$$

da cui, sommando l'ultima riga alla prima e sottraendo la terza dalla quarta, si arriva alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1-3x_2+x_4-2 \\ 1 & 0 & 1 & x_2+1 \\ 0 & 1 & -1 & x_3-1-2(x_2+1) \\ 0 & 0 & -2 & x_4+1-3(x_2+1)-x_3+1+2(x_2+1) \end{pmatrix}.$$

Chiaramente questa matrice ha rango 3 se e solo se la prima riga è nulla, ovvero se e solo se $x_1 - 3x_2 + x_4 - 2 = 0$; questa è quindi un'equazione cartesiana per R. L'intersezione $V \cap R$ è allora descritta dalle equazioni $V \cap R = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 - 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ La dimensione di tale intersezione è 2: per definizione, la dimensione di uno spazio affine è la dimensione della corrispondente giacitura; per questa, si veda il punto 3 dell'esercizio.

2. Un punto di $V \cap R$ è dato per esempio da $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Equazioni cartesiane per U si ottengono da quelle di $V \cap R$ eliminando i termini costanti. Si ha dunque

$$U = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

e tale spazio vettoriale ha dimensione 2: la matrice associata al sistema, ovvero $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ha evidentemente rango 2, e quindi lo spazio delle soluzioni del corrispondente sistema lineare ha dimensione $4 - 2 = 2$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Consideriamo l'applicazione lineare $T : V \to V$ che manda una matrice nella sua trasposta (si ricorda che la trasposta di una matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice ${}^tA = (a_{ji})$ ottenuta prendendo la simmetrica di A lungo la diagonale principale). Siano inoltre I l'identità di V, $B = I - T$ e $C = I + T$.

1. Dimostrare che $BC = CB = 0$.

2. Dimostrare che $V = \ker(B) \oplus \ker(C) = \mathrm{Imm}(C) \oplus \mathrm{Imm}(B)$.

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare tutte le coppie M_1, M_2 di matrici 3×3 (a coefficienti in $\mathbb{C}$) tali che:

   (a) $M_1 + M_2 = M$;

   (b) M_1 è *simmetrica*, ovvero ${}^tM_1 = M_1$;

   (c) M_2 è *antisimmetrica*, ovvero ${}^tM_2 = -M_2$.

Soluzione.

1. Sfruttando il fatto che $TI = IT = T$ e la linearità della composizione di applicazioni lineari si trova $BC = (I - T)(I + T) = I(I + T) - T(I + T) = I + T - T - T^2 = I - T^2$. D'altro canto è chiaro che $T^2 = I$ (la trasposta della trasposta di una matrice M è la matrice M stessa), per cui $BC = I - T^2 = I - I = 0$. Analogamente si dimostra $CB = 0$.

2. Osserviamo che $\ker(B)$ è il sottospazio costituito dalle matrici simmetriche, che ha dimensione 6 in quanto una base è data dalle 6 matrici seguenti:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare che questa è una base del sottospazio delle matrici simmetriche è sufficiente notare che (i) queste sei matrici sono in effetti simmetriche; (ii) sono linearmente indipendenti; (iii) generano il sottospazio delle matrici simmetriche, in quanto ogni matrice simmetrica $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ c & f & c \end{pmatrix}$ si scrive come combinazione lineare delle matrici M_i:

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ c & f & c \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5 + fM_6.$$

Dalla formula delle dimensioni segue allora $\dim \operatorname{Imm}(B) = \dim(V) - \dim \ker(B) = 9 - 6 = 3$. In maniera simile si verifica che $\ker(C)$ ha dimensione 3, con base

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e dunque $\dim \operatorname{Imm}(C) = \dim(V) - \dim \ker(C) = 6$.

Osserviamo poi che l'equazione $BC = 0$ implica che $\operatorname{Imm}(C) \subseteq \ker(B)$: infatti ogni vettore di $\operatorname{Imm}(C)$ si scrive come $C(v)$ per un qualche $v \in V$, e si ha $B(C(v)) = (BC)(v) = 0(v) = 0_V$. Lo stesso ragionamento (scambiando i ruoli di B e C) dimostra anche che $\operatorname{Imm}(B) \subseteq \ker(C)$. Queste inclusioni sono in realtà uguaglianze, in quanto (per quanto visto sopra) sono inclusioni fra spazi vettoriali della stessa dimensione.

Per concludere notiamo che $\ker(B) \cap \ker(C) = \{M \in V : {}^tM = M \text{ e } {}^tM = -M\}$, da cui per ogni elemento $M \in \ker(B) \cap \ker(C)$ deve valere $M = {}^tM = -M$, ovvero $M = 0$. Quindi $\ker(B) \cap \ker(C) = \{0\}$; siccome si ha anche $\dim(\ker B) + \dim(\ker C) = 6 + 3 = \dim(V)$ segue che $\ker(B) + \ker(C)$ è uguale a tutto V, da cui $V = \ker(B) \oplus \ker(C)$ come voluto. Siccome abbiamo già dimostrato che vale $\ker(B) = \operatorname{Imm}(C)$ e $\ker(C) = \operatorname{Imm}(B)$ abbiamo anche $V = \ker(B) \oplus \ker(C) = \operatorname{Imm}(C) \oplus \operatorname{Imm}(B)$.

3. Siccome $V = \ker(B) \oplus \ker(C)$, ogni elemento di V si scrive in modo unico come somma di un elemento di $\ker(B)$ (ovvero una matrice simmetrica) e di un elemento di $\ker(C)$ (ovvero una matrice antisimmetrica). È naturalmente possibile risolvere a mano il sistema $M = M_1 + M_2$ con M_1 simmetrica e M_2 antisimmetrica, ma è più istruttivo procedere nel seguente modo: si ha
$$M = IM = \frac{B + C}{2}(M) = \frac{1}{2}C(M) + \frac{1}{2}B(M),$$
e siccome abbiamo già dimostrato che $\operatorname{Imm}(C) = \ker(B)$ e $\operatorname{Imm}(B) = \ker(C)$ sappiamo (anche prima di fare il calcolo) che $C(M)$ è simmetrica e $B(M)$ è antisimmetrica. In effetti si ha

$$M_1 := \frac{1}{2}C(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \frac{1}{2}B(M) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e queste matrici forniscono l'unica coppia (M_1, M_2) con le proprietà volute.

Osservazione. Il punto 2 dell'esercizio 2 può anche essere risolto nel modo seguente, che (al prezzo di un'idea in più) risulta molto meno laborioso. Sia M una matrice simmetrica. Allora

$$M = \frac{M+M}{2} = \frac{M + {}^tM}{2} = C(M/2),$$

il che dimostra che $\mathrm{Imm}(C)$ contiene tutte le matrici simmetriche. Come sopra, dall'uguaglianza $BC = 0$ si ottiene $\mathrm{Imm}(C) \subseteq \ker(B)$, e siccome $\ker(B)$ è esattamente il sottospazio delle matrici simmetriche questo dimostra che $\ker(B) = \mathrm{Imm}(C)$. Scambiando i ruoli di B e C, e osservando che ogni matrice antisimmetrica M è nell'immagine di B per via dell'uguaglianza

$$M = \frac{M+M}{2} = \frac{M - {}^tM}{2} = B(M/2),$$

si ottiene anche $\ker(C) = \mathrm{Imm}(B)$. A questo punto si verifica (come sopra) che $\ker(B) \cap \ker(C) = \{0\}$, e si conclude che $V = \ker(B) \oplus \ker(C)$ perché

$$\dim\ker(B) + \dim\ker(C) = \dim\mathrm{Imm}(C) + \dim\ker(C) = \dim(V)$$

grazie alla formula che lega la dimensione del nucleo e quella dell'immagine. Osserviamo che questa dimostrazione non dipende dal fatto che stiamo considerando matrici 3×3: in effetti, per ogni intero positivo n si ha che $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è la somma diretta dei suoi due sottospazi formati dalle matrici simmetriche e da quelle antisimmetriche.

1.3 Compitino del 12/12/2017

Test.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che manda il vettore $(0, 0, 1)$ in $(2, 3, 4)$, il vettore $(0, 2, 0)$ in $(3, 4, 5)$ e il vettore $(1, 0, 0)$ in $(5, 7, 9)$.
   a) (punti 2) Scrivere qui la dimensione del nucleo di f: ....
   b) (punti 2) Scrivere qui l'immagine del vettore $(1, 1, 1)$:

   Soluzione. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$. I valori di $f(e_1), f(e_3)$ sono dati nel testo; in quanto ad $f(e_2)$ si ha $f(e_2) = f\left(\frac{1}{2}(0, 2, 0)\right) = \frac{1}{2} f((0, 2, 0)) = (3/2, 2, 5/2)$. Per definizione, la matrice associata ad f rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo) è allora

   $$\begin{pmatrix} 5 & 3/2 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 5/2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Calcoliamo il rango di questa matrice procedendo con una riduzione di Gauss per colonne. Come prima mossa moltiplichiamo per 2 la seconda colonna, così da lavorare con numeri interi. Si ottiene

   $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\to[2]-[1]} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 7 & -3 & 3 \\ 9 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]\to[3]+[2]} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   da cui si vede immediatamente che il rango della matrice (e dunque la dimensione dell'immagine di f) è 2. Dalla formula $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Imm}(f) = \dim\mathbb{R}^3 = 3$ si ottiene allora $\dim\ker(f) = 1$. (Non richiesto: il nucleo di f è generato da $(-1, 2, 1)$). Infine, si ha

   $$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 3/2 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 12 \\ 31/2 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - ix_4 = 0 \\ ix_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Calcolare $\dim W$: ....

Soluzione. La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare è uguale al numero di incognite meno il rango della matrice associata. La matrice, in questo caso, è

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ i & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediamo con una riduzione a scala per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ i & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]\to[3]-i[1]} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & -1-i\cdot i & 1 & -i \end{pmatrix},$$

da cui, siccome $i^2 = -1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]\to[3]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice associata al sistema è dunque pari a 2, quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è $4 - 2 = 2$.

3. (a) Determinare se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sia invertibile o meno.

Barrare la casella opportuna: ☐ INVERTIBILE ☐ NON INVERTIBILE

(b) Se non è invertibile scrivere qui il suo rango, se è invertibile scrivere qui la matrice inversa:

Soluzione. Procediamo con l'algoritmo visto a lezione:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\to[2]+3[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]\to[3]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\to[2]+3[3]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]\to[3]+2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\to[2]-2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]\to[1]-2[2]-4[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ne deduciamo che la matrice è invertibile, con inversa $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & -11 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

4. Indicare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $V = \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Se non sono sottospazi scrivere NO, se sono sottospazi scrivere la loro dimensione su $\mathbb{C}$.

   $A = \{M \in V : \mathrm{tr}(M) = 0\}$. ....

   $C = \{M \in V : \mathrm{rango}(M) = 1\}$. ....

   Soluzione. A è un sottospazio vettoriale, in quanto descritto dal nucleo dell'applicazione lineare $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Siccome la traccia è certamente surgettiva su $\mathbb{C}$ (quindi la sua immagine ha dimensione 1) e lo spazio di partenza ha dimensione 9, A ha dimensione $9 - 1 = 8$. In alternativa: identificando $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^9$ tramite le coordinate

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

   il sottospazio A è l'iperpiano descritto dall'equazione $x_{11} + x_{22} + x_{33} = 0$. Abbiamo dimostrato in classe che ogni iperpiano (=luogo di zeri di una singola equazione lineare non banale) ha dimensione inferiore di 1 a quella dello spazio ambiente, da cui nuovamente $\dim A = \dim \mathbb{C}^9 - 1 = 8$.

   L'insieme C, invece, non è un sottospazio vettoriale, per esempio perché non contiene la matrice nulla, dal momento che questa non è di rango 1. È anche facile vedere che C non è chiuso per somma, perché in generale la somma di due matrici di rango 1 non è una matrice di rango 1 (si pensi per esempio a due matrici che abbiano rispettivamente solo la prima o solo l'ultima colonna non nulle e linearmente indipendenti).

5. a) Scrivere qui un vettore ortogonale al piano $x - 2y + 3z = 0$:

   b) Scrivere qui la distanza dell'origine di $\mathbb{R}^3$ dal piano affine di equazione $x - 2y + 3z = 5$: ....

   Soluzione. Si è visto ad esercitazione che un vettore ortogonale al piano di equazione $x - 2y + 3z = 0$ è il vettore dei coefficienti $(1, -2, 3)$. In alternativa, si poteva trovare una base di questo piano (ad esempio $(0, 3, 2), (2, 1, 0)$) e poi risolvere il sistema che esprime la condizione di ortogonalità rispetto a questi vettori: un vettore (x, y, z) è ortogonale al piano se e solo se è ortogonale ad entrambi i vettori di una base del piano, se e solo se

$$\begin{cases} 0x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 1y + 0z = 0. \end{cases}$$

   Si verifica facilmente che l'insieme delle soluzioni di questo sistema (che, a meno di scambiare le equazioni, è già ridotto a scala) è formato dai multipli di $(1, -2, 3)$.

   Il punto di minima distanza dall'origine del piano $x-2y+3z = 5$ è dato dalla sua intersezione con la retta $\mathrm{Span}(1, -2, 3)$ ad esso ortogonale. Scrivendo $(x, y, z) = \lambda(1, -2, 3)$ ed imponendo che (x, y, z) appartenga al piano troviamo

$$\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{14},$$

   da cui ricaviamo che la distanza del piano dall'origine è uguale alla distanza dall'origine del punto $\frac{5}{14}(1, -2, 3)$. Essa vale

$$\frac{5}{14}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Esercizio 1 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. Per ogni intero $j \geq 1$ poniamo poi $K_j = \ker(f^j)$.

1. Esibire uno spazio vettoriale W di dimensione 2 e un'applicazione lineare $g : W \to W$ tale che $g \neq 0$ ma $g^2 = 0$.

2. Mostrare che $K_j \subseteq K_{j+1}$ per ogni j intero positivo.
3. Dimostrare che se $K_j = K_{j+1}$ per un certo intero positivo j, allora $K_m = K_{m+1}$ per ogni $m \geq j$.
4. Dimostrare che se esiste un intero positivo j per cui f^j è l'applicazione nulla, allora $f^n = 0$ (si ricorda che $n = \dim V$).

Soluzione.

1. Si possono fornire numerosi esempi, ne descriviamo due abbastanza semplici:
   - $W = \mathbb{R}^2$ e g l'applicazione lineare $(x, y) \mapsto (y, 0)$ (ovvero quella rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$); è chiaro che $g \neq 0$, ma $g^2(x, y) = g(g(x, y)) = g((y, 0)) = (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La verifica che $g^2 = 0$ può anche essere svolta in termini di matrici, ovvero calcolando $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ e verificando che è la matrice nulla.
   - $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ e g l'operatore derivata (la derivata seconda di un polinomio di grado al più uno è sempre nulla, ma esistono polinomi di primo grado la cui derivata non è nulla).
2. Sia $v \in K_j$: questo vuol dire che $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{j \text{ volte}}(v) = 0_V$. Applicando f ad entrambi i lati di questa uguaglianza troviamo allora
$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{j+1 \text{ volte}}(v) = f(0_V) = 0_V,$$
ovvero $v \in K_{j+1}$ (si ricorda che f^j e $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{j \text{ volte}}$ sono due notazioni possibili per la composizione iterata j volte della funzione f).
3. **Prima soluzione.** Sia $m \geq j$. Si ha
$$v \in \ker(f^m) \Leftrightarrow f^j(f^{m-j}(v)) = 0 \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in \ker(f^j) \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in K_j$$
e similmente
$$v \in \ker(f^{m+1}) \Leftrightarrow f^{j+1}(f^{m-j}(v)) = 0 \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in \ker(f^{j+1}) \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in K_{j+1}.$$
Siccome $K_j = K_{j+1}$ per ipotesi, abbiamo allora
$$v \in \ker(f^m) \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in K_j \Leftrightarrow f^{m-j}(v) \in K_{j+1} \Leftrightarrow v \in \ker(f^{m+1}),$$
che è quello che volevamo dimostrare.

   Seconda soluzione. Per semplicità scriviamo $V_j = \mathrm{Imm}(f^j)$. La "formula delle dimensioni" (ovvero la formula che lega le dimensioni di dominio, nucleo ed immagine), applicata a $f^j : V \to V$, fornisce
$$\dim V = \dim \ker(f^j) + \dim \mathrm{Imm}(f^j) = \dim K_j + \dim V_j$$
e similmente, applicata a $f^{j+1} : V \to V$, fornisce anche
$$\dim V = \dim \ker(f^{j+1}) + \dim \mathrm{Imm}(f^{j+1}) = \dim K_{j+1} + \dim V_{j+1}.$$
Confrontando queste equazioni (e usando la condizione $\dim K_j = \dim K_{j+1}$) si ottiene $\dim V_j = \dim V_{j+1}$. Ora consideriamo la restrizione di f allo spazio $V_j = \mathrm{Imm}(f^j)$. La formula delle dimensioni fornisce
$$\dim V_j = \dim f(V_j) + \dim \ker(f|_{V_j}) = \dim(V_{j+1}) + \dim \ker f|_{V_j},$$

ovvero (siccome, come già visto, vale $\dim V_j = \dim V_{j+1}$) si ha $\dim\ker f_{V_j} = 0$ e quindi $f|_{V_j}$ è iniettiva. Dunque $f(V_j)$ ha la stessa dimensione di V_j, e sicuramente $f(V_j) = f^{j+1}(V) \subseteq f^j(V) = V_j$, da cui $f(V_j) = V_j$. Iterando questo ragionamento si ottiene $f^2(V_j) = f(f(V_j)) = f(V_j) = V_j$, eccetera, ovvero per ogni $s \geq 1$ si ha $f^s(V_j) = V_j$. Ricordando che $V_j = f^j(V)$ abbiamo quindi ottenuto $f^{j+s}(V) = V_j$, per ogni $s \geq 1$. Applicando un'ultima volta la formula delle dimensioni (a $f^{j+s} : V \to V$) otteniamo che per ogni $s \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\dim K_{j+s} &= \dim\ker(f^{j+s}) \\
&= \dim V - \dim \mathrm{Imm}(f^{j+s}) \\
&= n - \dim f^{j+s}(V) \\
&= n - \dim f^j(V) \\
&= \dim\ker f^j \\
&= \dim K_j.
\end{aligned}$$

Questo ci dice, come voluto, che $K_{j+1}, K_{j+2}, K_{j+3}, \cdots$ hanno tutti la stessa dimensione di K_j.

4. Sia m il minimo indice per cui $\dim K_m = \dim K_{m+1} = \dim K_{m+2} = \cdots$. Siccome per s grande si ha $f^s = 0$, e quindi $K_s = V$, la dimensione comune di $K_m, K_{m+1}, \cdots$ è la dimensione di V, ovvero n. Per il punto 2 dell'esercizio si ha

$$\dim K_1 < \dim K_2 < \dim K_3 < \cdots < \dim K_m = \dim K_{m+1} = \cdots = n.$$

Ora osserviamo che $\dim K_1 \geq 1$ (se f fosse iniettiva, anche f^j sarebbe iniettiva per ogni j), e quindi $\dim K_2 \geq \dim K_1 + 1 \geq 2$, $\dim K_3 \geq \dim K_2 + 1 \geq 3$, eccetera, fino a $\dim K_m \geq \dim K_{m-1} + 1 \geq m$. D'altro canto sappiamo che $\dim K_m = n$, quindi abbiamo ottenuto $n = \dim K_m \geq m$. E questo è quanto volevamo: si ha $\dim K_m = \dim\ker(f^m) = n$, ovvero $\ker(f^m) = V$, ovvero $f^m = 0$, e $m \leq n$. Ovviamente questo implica anche $f^n = 0$, perché

$$f^n = f^{n-m} \circ f^m = f^{n-m} \circ 0 = 0.$$

Esercizio 2 Sia $V = \mathbb{R}^3$, siano $v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$ vettori linearmente indipendenti e siano $r_i = \mathrm{Span}(v_i)$ i sottospazi di dimensione 1 generati dai v_i. Sia $L(V)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V. Poniamo

$$\mathcal{F} = \ \{f \in L(V) :\ f(r_i) \subset r_i,\ i = 1, 2, 3\}.$$

L'insieme $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $L(V)$ (di questo fatto non è richiesta la dimostrazione).

1. Caratterizzare le matrici delle applicazioni lineari in $\mathcal{F}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ (sia in partenza che in arrivo).

2. Calcolare la dimensione di $\mathcal{F}$ e descriverne una base.

3. Sia $v \in V$ un altro vettore tale che v non sia combinazione lineare di nessuna coppia $v_i,\ v_j$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ e sia $r = \mathrm{Span}(v)$. Dimostrare che $\dim \mathcal{F}' = 1$, dove

$$\mathcal{F}' = \{f \in \mathcal{F} :\ f(r) \subset r\}.$$

Soluzione.

1. Per definizione, ogni applicazione $f \in \mathcal{F}$ invia ogni vettore v_i in un multiplo di se stesso. Questo vuol dire ad esempio che le coordinate di $f(v_1)$ nella base (v_1, v_2, v_3) sono $(\lambda_1, 0, 0)$ per un qualche $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, e similmente per v_2, v_3. Per costruzione della matrice associata ad un'applicazione lineare in una base, questo vuol dire che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ è diagonale.

2. Come visto a lezione, la scelta di una base permette di identificare lo spazio degli endomorfismi di V con lo spazio delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Scegliendo l'isomorfismo φ corrispondente a scrivere le matrici in base $\mathcal{B}$, si ottiene che $\mathcal{F}$ è isomorfo ad un certo sottospazio Z delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Per il punto precedente Z è proprio il sottospazio delle matrici diagonali: ne segue che esso, e dunque anche $\mathcal{F}$, è di dimensione 3; una base di Z è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e tramite l'isomorfismo φ (o più precisamente φ^{-1}) essa corrisponde ad una base di $\mathcal{F}$.

3. Siano (x, y, z) le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$. Un'applicazione lineare $f \in \mathcal{F}$ appartiene a $\mathcal{F}'$ se e soltanto se

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ (questa è semplicemente la traduzione in coordinate della condizione $f(r) \subseteq r$). Osserviamo inoltre che la condizione che v non appartenga allo span di due vettori v_1, v_2, v_3 è, in coordinate, equivalente all'affermazione che $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Dal momento che sappiamo che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ è diagonale, scriviamo

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ numeri reali. La condizione $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ diventa allora

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 x = \lambda x \\ \lambda_2 y = \lambda y \\ \lambda_3 z = \lambda z \end{cases}$$

Siccome x, y, z sono tutti diversi da zero per ipotesi, possiamo semplificare queste tre equazioni in $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = \lambda \\ \lambda_3 = \lambda \end{cases}$. Abbiamo perciò ottenuto che deve valere $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, ovvero che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ è un multiplo dell'identità. Dal momento che 'essere un multiplo dell'identità' è una condizione che non dipende dalla base scelta (l'applicazione lineare identità è rappresentata dalla matrice identità in ogni base[1]), e che chiaramente ogni multiplo dell'identità appartiene a $\mathcal{F}'$, abbiamo così dimostrato che $\mathcal{F}' = \{\lambda \operatorname{Id} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, e in particolare che $\mathcal{F}'$ è un sottospazio di $L(V)$ di dimensione 1.

1.4 Compitino del 27/02/2018

Test.

1. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] purché ovviamente la stessa base sia usata sia in partenza che in arrivo

a) Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$: ....

b) Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non nullo e tale che $\varphi(v,v) = 0$: ....

Soluzione.

a) Si tratta semplicemente di utilizzare la formula $\varphi(v,w) = {}^t vM(\varphi)w$, dove $M(\varphi)$ rappresenta la matrice di φ nella base in cui vengono espressi i vettori v, w. Nel nostro caso,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 8 & -2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = (-3,1,-1)\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix} = 13.$$

b) Si può facilmente notare dalla matrice che rappresenta φ che vale $\varphi(e_3, e_3) = 0$, dove e_3 è il terzo vettore della base canonica; una possibile scelta è quindi $v = e_3$. Alternativamente si può osservare che la matrice assegnata ha determinante nullo, quindi un vettore v come voluto può semplicemente essere preso nel suo nucleo, che – come si verifica facilmente – è generato ad esempio dal vettore $v = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$.

2. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) Determinare il polinomio caratteristico di M: ....

b) La matrice M è diagonalizzabile sul campo $\mathbb{R}$? Barrare la casella opportuna:

☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile

Soluzione.

a) Si ha

$$p_M(t) = \det\begin{pmatrix}t-3 & 2 & 2\\ -4 & t+3 & 2\\ -1 & 0 & t+1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t-3 & 0 & 2\\ -4 & t+1 & 2\\ -1 & -t-1 & t+1\end{pmatrix},$$

dove la seconda matrice è ottenuta dalla prima sottraendo la terza colonna alla seconda. Sommando ora la seconda riga alla terza si trova

$$\begin{aligned} p_M(t) &= \det\begin{pmatrix}t-3 & 0 & 2\\ -4 & t+1 & 2\\ -5 & 0 & t+3\end{pmatrix}\\ &= (t+1)\det\begin{pmatrix}t-3 & 2\\ -5 & t+3\end{pmatrix}\\ &= (t+1)(t^2-9+10)\\ &= (t+1)(t^2+1),\end{aligned}$$

o equivalentemente $p_M(t) = t^3 + t^2 + t + 1$.

b) Dal momento che l'equazione $(t+1)(t^2+1) = 0$ ha solo una soluzione reale (e due soluzioni in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), non tutti gli autovalori di M sono reali; ne segue che M non può essere diagonalizzata su $\mathbb{R}$.

3. a) Sia $N = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 4 & 5\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 4^2 & 5^2\\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 4^3 & 5^3\\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 4^4 & 5^4\end{pmatrix}$. La matrice N è: ☐ Invertibile ☐ Non invertibile

b) Determinare il rango di N: ....

c) Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: ....

Soluzione.

a) La terza e quarta colonna di N sono uguali, dunque il rango di N è al massimo 4 e la matrice non è invertibile.

b) Consideriamo il minore 4×4 formato dalle prime quattro righe della prima, seconda, terza e quinta colonna di N; esplicitamente, esso è dato da $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{pmatrix}$, che è una matrice di Vandermonde. In particolare, il determinante di questo minore è $(5-2)(5-3)(5-4)(4-2)(4-3)(3-2) \neq 0$, e quindi esso è invertibile. Dal momento che il rango della matrice N non è più di 4, ed essa contiene un minore 4×4 invertibile, si ha che N ha esattamente rango 4.

c) Il determinante di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti dei fattori; inoltre, i due fattori sono diagonali a blocchi, e sappiamo che il determinante di una matrice diagonale a blocchi è il prodotto dei determinanti dei blocchi. Il determinante cercato è dunque uguale a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 5 = 150.$$

4. a) Quali sono gli autovalori (con rispettive molteplicità algebriche) della matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 9 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$? Scriverli qui: ....

b) Per ogni autovalore λ di M, determinare la dimensione del corrispondente autospazio V_λ (riempire tante righe quante necessario).

$\lambda_1 =$ .... $\dim V_{\lambda_1} =$ ....

$\lambda_2 =$ .... $\dim V_{\lambda_2} =$ ....

$\lambda_3 =$ .... $\dim V_{\lambda_3} =$ ....

$\lambda_4 =$ .... $\dim V_{\lambda_4} =$ ....

Soluzione.

Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di M:

$$\begin{aligned} p_M(t) &= \det(t \cdot \mathrm{Id} - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} t-3 & 4 & -9 \\ 0 & t-8 & 10 \\ 0 & -5 & t+7 \end{pmatrix} \\ &= (t-3) \det \begin{pmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{pmatrix} \\ &= (t-3)((t-8)(t+7)+50) \\ &= (t-3)(t^2-t-6). \end{aligned}$$

L'equazione $t^2 - t - 6 = 0$ ha come soluzioni $t = 3$ e $t = -2$, dunque $p_M(t) = (t-3)^2(t+2)$. Gli autovalori di M sono quindi $\lambda_1 = 3$, di molteplicità 2, e $\lambda_2 = -2$, di molteplicità 1.

b) Si ha

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = \dim\ker(M - 3\,\mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} = 1,$$

perché la matrice in questione è di rango due (la prima colonna è nulla, le altre due sono linearmente indipendenti). In quanto a $\lambda_2 = -2$, si tratta di un autovalore di molteplicità algebrica 1, e sappiamo che per un tale autovalore la molteplicità geometrica (ovvero la dimensione del corrispondente autospazio) è anch'essa uguale ad 1. Questo è anche facile da verificare esplicitamente:

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \dim V_{\lambda_2} = \dim\ker(M + 2\,\mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 5 & -4 & 9 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 1,$$

dove l'uguaglianza finale segue nuovamente dal fatto che la matrice ha rango due (le ultime due righe sono proporzionali, ma le prime due sono linearmente indipendenti).

5. Sullo spazio $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado al più 3 consideriamo il prodotto scalare

$$\begin{array}{cccc} \psi: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & p(-1)q(-1) + p(1)q(1) \end{array}$$

a) Scrivere la matrice di ψ nella base $1, x, x^2, x^3$:

b) Determinare la dimensione di $V^\perp$ (il radicale di ψ): ....

Soluzione.

a) Per definizione, la matrice di ψ nella base assegnata è la matrice il cui coefficiente in posizione (i, j) è dato dal prodotto scalare $\psi(x^i, x^j)$. Si ha

$$\psi(x^i, x^j) = (-1)^i(-1)^j + 1^i 1^j = \begin{cases} 2, & \text{se } i+j \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } i+j \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Esplicitamente, la matrice di ψ nella base data è $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) È noto dalla teoria che la dimensione del radicale di un prodotto scalare è pari alla dimensione del nucleo della corrispondente matrice. Si ha quindi

$$\dim V^\perp = \dim\ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Parte dimostrativa.

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ munito del suo prodotto scalare standard e denotiamo V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $V^\perp$.

2. Determinare una base di $V^\perp$.

3. Determinare una base di $V^\perp$ che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.
4. Sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su V. Determinare il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di π.

Soluzione.

1. Osserviamo innanzitutto che i due vettori assegnati sono linearmente indipendenti, e dunque, siccome generano V per ipotesi, ne sono una base. In particolare V è di dimensione 2. Un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è ortogonale a V se è solo se è ortogonale ad un insieme di generatori di V; si ha quindi che v appartiene a $V^\perp$ se e solo se
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v \right\rangle = 0.$$
Esprimendo i prodotti scalari in termini delle coordinate di v otteniamo che v appartiene a $V^\perp$ se e solo se
$$\begin{cases} x - z + t = 0 \\ 3x - y - z + 3t = 0; \end{cases}$$
queste sono dunque equazioni cartesiane per $V^\perp$.
2. Per determinare una base di $V^\perp$ è sufficiente risolvere il sistema scritto sopra: dalla prima equazione si ottiene $z = x + t$ e dalla seconda $y = 3x - z + 3t = 2x + 2t$, quindi lo spazio delle soluzioni del sistema (che non è altro che $V^\perp$) è dato da
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+2t \\ x+t \\ t \end{pmatrix} \mid x, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Dal momento che i due vettori appena scritti sono generatori di uno spazio di dimensione $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V = 4 - 2 = 2$, essi ne costituiscono una base, come voluto.
3. Per trovare una base ortogonale di $V^\perp$ applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base determinata al punto precedente. Visto che lo spazio è di dimensione 2, sappiamo che è possibile trovare una base ortogonale della forma
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda v_1,$$
e dobbiamo solo determinare λ. Imponendo la condizione $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ troviamo allora
$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 - \lambda \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 - 6\lambda,$$
ovvero $\lambda = \frac{5}{6}$. Una base ortogonale di $V^\perp$ è quindi
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Essendo una proiezione, π rispetta $\pi^2 = \pi$. Ponendo $m(t) = t^2 - t$ si ha dunque $m(\pi) = 0$: ne segue che il polinomio minimo di π è un divisore di $t^2 - t$, e dunque è uguale a t, $t-1$, o $t(t-1)$. Nei primi due casi si avrebbe rispettivamente $\pi = 0$ e $\pi = \mathrm{Id}$, il che chiaramente non è vero, per cui il polinomio minimo di π è proprio $m(t) = t^2 - t$. In quanto al polinomio caratteristico, per quanto visto ad esercitazione esso deve avere le stesse radici del polinomio minimo ed essere dunque della forma $t^a(t-1)^b$ con $a+b=4$. Dal momento che gli autospazi corrispondenti agli autovalori 0 e 1 sono rispettivamente $V^\perp$ e V, entrambi di dimensione 2, otteniamo che le molteplicità geometriche degli autovalori $0, 1$ sono entrambe uguali ad 2. Dal momento che la molteplicità algebrica è sempre maggiore o uguale a quella geometrica otteniamo allora $a \geq 2, b \geq 2$, e dato che $a + b = 4$ l'unica possibilità è che $a = b = 2$. Il polinomio caratteristico è quindi $p_\pi(t) = t^2(t-1)^2$.

   Soluzione alternativa. La matrice di π nella base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   è data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: infatti i primi due vettori di base sono in V (e sono dunque uguali alla loro proiezione su V), mentre gli ultimi due sono in $V^\perp$, e dunque la loro proiezione è nulla. Da questa matrice è immediato calcolare il polinomio caratteristico $p_\pi(t) = t^2(t-1)^2$, e si verifica facilmente anche che il polinomio minimo è $t(t-1)$.

   Nota. La matrice di π è la stessa in ogni base i cui primi due vettori formino una base di V e i cui ultimi due vettori formino una base di $V^\perp$.

Esercizio 2. Sia M una matrice 3×3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Supponiamo che M sia triangolare superiore.

1. Dimostrare che gli elementi sulla diagonale di M sono esattamente gli autovalori di M (con le corrette molteplicità).

2. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le radici del polinomio caratteristico di M. Per ogni k intero positivo, esprimere la traccia di M^k in termini di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

3. Supponiamo ora che valga $\mathrm{tr}(M) = 0$, $\mathrm{tr}(M^2) = 2$ e $\mathrm{tr}(M^3) = 0$. Quanto vale la traccia di M^8?

4. Supponiamo nuovamente che valgano le relazioni $\mathrm{tr}(M) = 0$, $\mathrm{tr}(M^2) = 2$ e $\mathrm{tr}(M^3) = 0$. La matrice M è necessariamente diagonalizzabile? Se sì, dimostrarlo e descrivere la forma diagonale di M; in caso contrario, fornire un controesempio.

Soluzione.

1. Scriviamo $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Per definizione, il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(t) = \det(t \cdot \mathrm{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & t - \lambda_2 & -a_{23} \\ 0 & 0 & t - \lambda_3 \end{pmatrix} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3),$$

   dove si è sfruttato il fatto che il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Gli autovalori di M sono le soluzioni dell'equazione $p_M(t) = 0$, che sono evidentemente proprio $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ossia gli elementi sulla diagonale di M.

2. Dimostriamo che per ogni $k \geq 0$ la matrice M^k ha la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$$

dove ogni simbolo $\star$ rappresenta un numero complesso (non necessariamente lo stesso per ogni $\star$). Procediamo per induzione su k: l'affermazione è chiara per $k = 0, k = 1$, ed inoltre un calcolo diretto mostra che

$$M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & \star & \star \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & \star \\ 0 & 0 & \lambda_3^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la traccia di M^k è $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$.

3. In virtù del punto precedente abbiamo

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $\lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$ nelle altre due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 2 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 - \lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2^3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 = 0 \end{cases}$$

che a sua volta fornisce subito $\begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 = 1. \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$ Dal momento che $\lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_3$, l'ultima equazione dice che almeno uno fra $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ è nullo. Visto che il ruolo di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nel sistema è simmetrico, possiamo supporre senza perdita di generalità che valga $\lambda_3 = 0$; sostituendo si trova $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_1, \\ \lambda_1^2 = 1, \end{cases}$ ovvero $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ o viceversa. In conclusione, i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono (in un qualche ordine) $0, 1, -1$, e quindi $\operatorname{tr}\left(M^8\right) = 0^8 + 1^8 + (-1)^8 = 2$.

4. Come al punto precedente, gli autovalori di M sono $0, 1, -1$, tutti di molteplicità (algebrica) 1. Per un criterio visto a lezione, una matrice i cui autovalori siano tutti di molteplicità algebrica pari ad 1 è diagonalizzabile, dunque – in una base opportuna – M si scrive nella forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nota. L'ordine degli autovalori lungo la diagonale non è importante: cambiando l'ordine dei vettori di base si può ottenere uno qualunque dei 6 ordinamenti possibili dei tre numeri $\{0, 1, -1\}$.

1.5 Compitino del 17/04/2018

Test.

1. Si consideri in $\mathbb{C}^3$ il prodotto hermitiano standard. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Siano inoltre $B = A + A^*$ e $C = AA^*$.

a) A è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
b) B è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
c) C è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile

Soluzione. La matrice A non è diagonalizzabile, mentre B e C lo sono. Dimostriamo questi fatti:

a) Dal momento che la matrice A è triangolare superiore è immediato trovare il suo polinomio caratteristico, che è $p_A(t) = (t-1)^2(t-2)$; in particolare, gli autovalori di A sono 1 (di molteplicità algebrica 2) e 2 (di molteplicità algebrica 1). Condizione necessaria per la diagonalizzabilità è che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 sia pari alla sua molteplicità algebrica; tuttavia, l'autospazio associato all'autovalore 1 è

$$\ker(A - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha dimensione 1 (in effetti è immediato vedere che la matrice di cui stiamo calcolando il nucleo ha rango 2). Ne segue che A, come affermato, non è diagonalizzabile.

b) Si ha $B^* = (A + A^*)^* = A^* + A = B$, dunque B è hermitiana. Il teorema spettrale garantisce che essa è diagonalizzabile.

c) Similmente al punto precedente, si ha $C^* = (AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^* = C$, e quindi C è hermitiana e dunque diagonalizzabile.

2. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Siano poi $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare la matrice dell'aggiunto di A rispetto a φ:

   b) Determinare la matrice dell'aggiunto di B rispetto a φ:

   Soluzione.

   a) Per definizione di aggiunto si deve avere

$$\varphi(Av, w) = \varphi(v, A^*w)$$

per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$. Usando la definizione del prodotto scalare φ otteniamo quindi

$$v^t A^t M w = v^t M A^* w,$$

e questa equazione è verificata per ogni v, w se e solo se vale l'uguaglianza $A^t M = MA^*$. Ne segue che $A^* = M^{-1} \cdot A^t \cdot M$. Ora osserviamo che $A = A^t = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ commuta con $M = 2\,\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dunque $A^* = M^{-1} \cdot A^t \cdot M = M^{-1}AM = M^{-1}MA = A$.

   b) Come al punto precedente si ottiene

$$\begin{aligned} B^* &= M^{-1} \cdot B^t \cdot M \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nota. Naturalmente anche al punto a) si può concludere con un calcolo diretto.

3. Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare la segnatura di ϕ: scrivere $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

b) Determinare, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non nullo e tale che la restrizione di ϕ a $\mathrm{Span}(v)$ sia definita negativa. Scrivere le coordinate di v oppure "non esiste":

Soluzione. a) Come discusso in classe, una conseguenza del teorema spettrale è che la segnatura di un prodotto scalare può essere determinata a partire dallo studio degli autovalori della matrice che lo rappresenta. Nel nostro caso, il polinomio caratteristico di M è

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} t-2 & -1 & 2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ 2 & 2 & t-1 \end{pmatrix} &= (t-2)^2(t-1) - 4 - 4 - 4(t-2) - (t-1) - 4(t-2) \\ &= (t-2)^2(t-1) - 4t - t + 1 - 4t + 8 \\ &= (t-2)^2(t-1) - 9(t-1) \\ &= (t-1)(t^2 - 4t - 5) \\ &= (t-1)(t-5)(t+1), \end{aligned}$$

dunque gli autovalori sono $1, 5, -1$ (due positivi, uno negativo) e la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

b) Osserviamo che se prendiamo un autovettore w di autovalore -1 (ovvero tale che $Mw = -w$) troviamo $\phi(\lambda w, \lambda w) = \lambda^2 w^t M w = \lambda^2 w^t(-w) = -\lambda^2 \|w\|^2 \leq 0$ (dove $\|\cdot\|$ indica la norma usuale in $\mathbb{R}^3$, e la disuguaglianza vale con il minore stretto per ogni $\lambda \neq 0$). Possiamo quindi prendere come retta su cui la restrizione è definita negativa l'autospazio di M relativo all'autovalore -1. Come v possiamo quindi prendere un qualunque generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -1, ovvero un vettore (non nullo) in

$$\ker(M + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ci sono naturalmente molte altre scelte possibili, per esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per il quale

$$\phi(v, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1.$$

4. Sia $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Determinare matrici P e D, con $P^t = P^{-1}$ e D diagonale, tali che $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$D =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P =$

b) Determinare gli autovalori di B^3: ....

Soluzione. a) L'esistenza di P è garantita dal teorema spettrale; più precisamente, sappiamo che per determinare P è sufficiente trovare due autovettori di B con norma 1 (questi saranno le colonne di P, e saranno ortogonali come conseguenza del teorema spettrale). Il polinomio caratteristico di B è $t^2 - 15t + 50 = (t-5)(t-10)$, dunque gli autovalori di B sono 5 e 10. I corrispondenti autospazi sono

$$\ker(B - 5\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e

$$\ker(B - 10\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Come predetto dal teorema spettrale, i due autovettori trovati sono ortogonali; inoltre entrambi sono di norma $\sqrt{5}$, per cui possiamo prendere $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Naturalmente la matrice D non è altro che la forma diagonale di B, quindi $D = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$.

b) Gli autovalori di B^3 sono i cubi[2] degli autovalori di B, quindi la risposta è $5^3 = 125, 10^3 = 1000$.

5. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita n e siano $S : V \to V$, $T : V \to V$ due endomorfismi. Supponiamo che S sia diagonalizzabile e che i suoi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ siano a due a due distinti. Supponiamo inoltre che valga l'uguaglianza $ST = TS$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere:

a) T è diagonalizzabile	☐ Sicuramente vero	☐ Può essere falso
b) Ogni autovalore di T ha molteplicità algebrica 1	☐ Sicuramente vero	☐ Può essere falso
c) Ogni autovettore di S è autovettore di T	☐ Sicuramente vero	☐ Può essere falso
d) Ogni autovettore di T è autovettore di S	☐ Sicuramente vero	☐ Può essere falso

Soluzione.

a) e c) sono sempre vere, b) e d) possono essere false. Cominciamo con il mostrare con un esempio che b) e d) possono essere false: prendiamo $V = \mathbb{C}^2$, S l'endomorfismo con matrice $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, e T l'identità. Allora certamente S è diagonalizzabile con autovalori distinti e commuta con T. D'altro canto, l'autovalore 1 di T ha molteplicità (algebrica e geometrica) 2, quindi b) è falsa, e il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore di T (*ogni* vettore di V è un autovettore di T!), ma non di S, quindi d) è falsa.

Dimostriamo ora che a) e c) sono vere. È chiaro che c) implica a): infatti sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V costituita di autovettori per S (questa esiste per ipotesi, dal momento che S è diagonalizzabile). Ammettendo la validità di c), ogni autovettore per S è autovettore per T, dunque $v_1, \ldots, v_n$ è una base diagonalizzante anche per T. Quindi basta dimostrare c). Abbiamo visto durante il corso che se S, T commutano, allora T preserva gli autospazi di S: in formule, per ogni λ_i si ha $T(V_{\lambda_i}) \subseteq V_{\lambda_i}$. D'altro canto, questi autospazi sono di dimensione 1 (per ipotesi la molteplicità algebrica, e quindi geometrica, di ogni autovalore di S è uguale ad 1), dunque ogni vettore in V_{λ_i} è multiplo di un certo v_i. Se ne ottiene quindi $T(\mathrm{Span}(v_i)) \subseteq \mathrm{Span}(v_i)$, che è ovviamente equivalente a dire che $T(v_i) = \mu_i v_i$ per un certo $\mu_i \in \mathbb{C}$, ovvero che v_i è anche un autovettore di T.

Parte dimostrativa.

Sia V lo spazio vettoriale $\{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Data una matrice $A \in V$, denotiamo f_A l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f_A : & V & \to & \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Dimostrare che l'immagine di f_A è contenuta in V, così che d'ora in avanti possiamo considerare f_A come un endomorfismo di V.

2. Dimostrare che $\det(f_A) = 0$.

[2] questo si può vedere ad esempio mettendosi in una base in cui B sia diagonale. Osserviamo che l'affermazione "gli autovalori di B^k sono le k-esime potenze degli autovalori di B" è vera per ogni matrice, anche non diagonalizzabile: in effetti lo abbiamo dimostrato per matrici triangolari in uno degli esercizi del secondo compitino, e sappiamo che ogni matrice è triangolabile su $\mathbb{C}$

Consideriamo ora la forma bilineare

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & V\times V & \to & \mathbb{C} \\ & (M_1,M_2) & \mapsto & \operatorname{tr}(M_1M_2^*); \end{array}$$

essa fornisce un prodotto hermitiano su V (non si richiede di dimostrare questa affermazione).

3. Dimostrare che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è definito positivo.
4. Dimostrare che l'aggiunto di f_A rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è f_{A^*}, dove A^* è la trasposta coniugata della matrice A.
5. Supponiamo che $A = A^*$. È vero o falso che f_A è diagonalizzabile e che tutti i suoi autovalori sono reali?
6. Dimostrare che $\operatorname{tr}(f_A) = 0$ per ogni scelta della matrice A.
7. Consideriamo ora f_A come endomorfismo di $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, ovvero consideriamo

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM - MA. \end{array}$$

Dire se può accadere che gli autovalori di f_A siano 3, -1, -2, 0.

Soluzione.

1. Si tratta di verificare che, per ogni $A \in V$ e ogni $M \in V$, la matrice $f_A(M)$ appartiene a V, ovvero che la traccia di $f_A(M)$ è uguale a 0. Si ha in effetti $\operatorname{tr}(AM - MA) = \operatorname{tr}(AM) - \operatorname{tr}(MA) = \operatorname{tr}(AM) - \operatorname{tr}(AM) = 0$, dove si è sfruttata la proprietà vista a lezione $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$, valida per ogni coppia di matrici quadrate X, Y della stessa dimensione (su qualunque campo).
2. Se A è la matrice nulla, allora f_A è l'endomorfismo nullo, dunque sicuramente il suo determinante è zero. Altrimenti si ha $f_A(A) = AA - AA = 0$, dunque la matrice A (che sta in V per ipotesi ed è diversa dalla matrice nulla) è nel nucleo di f_A. Ne segue che il nucleo di A è non banale, quindi f_A non è iniettiva, e dunque il suo determinante è zero.
3. Si tratta di verificare che $\langle A, A\rangle$ è un numero (reale) non negativo, strettamente positivo se A non è la matrice nulla. Scrivendo esplicitamente $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si trova

$$\begin{aligned} \langle A, A\rangle &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 & a_{11}\overline{a_{21}} + a_{12}\overline{a_{22}} \\ a_{21}\overline{a_{11}} + a_{22}\overline{a_{12}} & |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 \end{pmatrix} \\ &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2, \end{aligned}$$

dove $\overline{z}$ indica come d'abitudine il complesso coniugato del numero complesso z. Il risultato trovato è certamente un numero non negativo, ed è positivo non appena almeno uno dei quattro coefficienti $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ è diverso da zero, ovvero è diverso da zero per ogni matrice non nulla, come voluto.
4. Dobbiamo mostrare che, per ogni coppia di matrici $M_1, M_2 \in V$, si ha

$$\langle f_A M_1, M_2\rangle = \langle M_1, f_{A^*} M_2\rangle.$$

Scrivendo esplicitamente questa uguaglianza, troviamo che occorre dimostrare

$$\operatorname{tr}\left((AM_1 - M_1A)M_2^*\right) = \operatorname{tr}\left(M_1(f_{A^*}(M_2))^*\right),$$

ovvero
$$\operatorname{tr}(AM_1M_2^* - M_1AM_2^*) = \operatorname{tr}(M_1(A^*M_2 - M_2A^*)^*)\,,$$
o ancora, sfruttando la proprietà $(XY)^* = Y^*X^*$ dell'aggiunto,
$$\operatorname{tr}(AM_1M_2^* - M_1AM_2^*) = \operatorname{tr}(M_1M_2^*A - M_1AM_2^*)\,.$$
Ora osserviamo che il termine $-M_1AM_2^*$ è presente in entrambi i membri dell'uguaglianza che vogliamo dimostrare, dunque ci riconduciamo a verificare che valga
$$\operatorname{tr}(AM_1M_2^*) = \operatorname{tr}(M_1M_2^*A)\,,$$
e questa è nuovamente una conseguenza della proprietà $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ (è sufficiente scegliere $X = A$ e $Y = M_1M_2^*$).

5. È vero. Dal punto precedente sappiamo che l'aggiunto di f_A è $f_{A^*} = f_A$, dunque f_A è autoaggiunto rispetto ad un prodotto hermitiano definito positivo. Il teorema spettrale garantisce quindi che f_A sia diagonalizzabile; abbiamo inoltre visto a lezione che gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali.

6. Lavoriamo con la base
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
di V. Data $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in V$, scriviamo la matrice di f_A in questa base: si ha
$$f_A(M_1) = AM_1 - M_1A = \begin{pmatrix} 0 & -2a_{12} \\ 2a_{21} & 0 \end{pmatrix} = -2a_{12}M_2 + 2a_{21}M_3$$
$$f_A(M_2) = AM_2 - M_2A = \begin{pmatrix} -a_{21} & 2a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = -a_{21}M_1 + 2a_{11}M_2$$
$$f_A(M_3) = AM_3 - M_3A = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ -2a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}M_1 - 2a_{11}M_3.$$
Ne segue che la matrice di f_A nella nostra base è
$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} \\ -2a_{12} & 2a_{11} & 0 \\ 2a_{21} & 0 & -2a_{11} \end{pmatrix},$$
e questa ha chiaramente traccia nulla.

7. Discutiamo diversi possibili approcci al problema; tutti si riconducono comunque al dire che l'autovalore 0 di f_A deve avere molteplicità almeno 2.

   Prima soluzione. Lavoriamo più generalmente con una qualunque $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ (nel testo del compito si era preso $A \in V$).

   Osserviamo innanzitutto che se A è un multiplo dell'identità allora l'endomorfismo f_A è l'applicazione nulla, che certamente non ha gli autovalori richiesti. Supponiamo quindi che A non sia un multiplo dell'identità. Si può allora osservare che le matrici A ed I (matrice identità di ordine 2) sono entrambe nel nucleo di f_A, perché A commuta tanto con se stessa quanto con l'identità. D'altro canto, A e I sono linearmente indipendenti, perché in caso contrario A sarebbe un multiplo dell'identità, possibilità che abbiamo già escluso. Ne segue che il nucleo di f_A ha dimensione almeno due (abbiamo trovato due vettori linearmente indipendenti in $\ker f_A$), e dunque che la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 per l'endomorfismo f_A è almeno 2 (e quindi anche la molteplicità algebrica dev'essere almeno 2). Deduciamo in particolare che gli autovalori di f_A non possono essere $\{-3, 2, 1, 0\}$.

Seconda soluzione. Osserviamo che si ha la decomposizione $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) = V \oplus \mathbb{C}I$, dove $\mathbb{C}I$ è $\mathrm{Span}(I)$. Si nota inoltre che la restrizione di f_A a $\mathbb{C}I$ è nulla (perché A ed I commutano), ed inoltre sappiamo dalla prima domanda di questo esercizio che f_A si restringe ad un endomorfismo di V. Scegliamo una base $\{M_1, M_2, M_3\}$ qualsiasi di V: nella base $\mathcal{B} = \{I, M_1, M_2, M_3\}$ di $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice di f_A si scrive

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

dove la matrice 3×3 di $\star$ è esattamente la matrice della restrizione di f_A a V. Dalla forma della matrice di f_A si vede immediatamente – per esempio calcolando il polinomio caratteristico – che gli autovalori di f_A sono 0 e gli autovalori di $f_A|_V$. Ma d'altro canto sappiamo che $f_A|_V$ ammette 0 come autovalore, quindi nuovamente abbiamo dimostrato che 0 è autovalore di f_A di molteplicità almeno 2.

Terza soluzione. Ripartiamo dalla matrice

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

L'endomorfismo f_A è diagonalizzabile, perché i suoi autovalori sono a due a due distinti; inoltre, è noto (vedere nota online) che la restrizione di un endomorfismo diagonalizzabile ad un sottospazio invariante (quale V) è a sua volta diagonalizzabile. D'altro canto, gli autovalori della restrizione non possono che essere un sottoinsieme degli autovalori dell'endomorfismo originale: in effetti, se $v \in V$ è un autovettore di $f_A|_V$ di autovalore λ, allora (tautologicamente) $v \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ è un autovettore di f_A di autovalore λ. Ne segue che $f_A|_V$ ha come autovalori $3, -1, -2$ (in effetti, sono gli unici tre autovalori con somma 0, e sappiamo che la traccia di $f_A|_V$ è zero), il che contraddice il fatto che $f_A|_V$ deve avere 0 come autovalore.

1.6 Compito e recuperi del 02/05/2018

In occasione di questo compito era anche possibile recuperare un compitino svolto nel corso dell'anno. Riportiamo qui sotto tutti gli esercizi assegnati in questa data, sia per il compito, sia per i vari recuperi.

Test.

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove tutti i vettori sono scritti rispetto alla base standard e_1, e_2. Poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivere le seguenti tre matrici (dove la base di partenza è indicata con un apice e quella di arrivo con un pedice):

$$[F]^{e_1,e_2}_{e_1,e_2} =$$

$$[F]^{v_1,v_2}_{w_1,w_2} =$$

$$[F]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2} =$$

Soluzione. In ognuno dei casi si tratta di calcolare il valore di F sui vettori della base di partenza ed esprimere il risultato in termini della base di arrivo. Consideriamo i vari casi separatamente.

(a) Calcoliamo $F(e_1) = F(v_1 - 2v_2) = F(v_1) - 2F(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice desiderata è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calcoliamo $F(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2, F(v_2) = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$. La matrice voluta è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Calcoliamo $F(v_1) = w_1 = 2v_1 - v_2$ e $F(v_2) = w_2 = v_1 - v_2$. La matrice voluta è quindi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $V = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\}$ e

$$W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0, \quad 2x - 3y - t = 0\}.$$

Scrivere qui una base per $V \cap W$:

Soluzione. Dal momento che è più facile intersecare sottospazi espressi in forma cartesiana, come primo passo determiniamo equazioni cartesiane per V. Consideriamo quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \\ 3 & 1 & 5 & t \end{pmatrix}$$

e procediamo ad una eliminazione di Gauss per colonne:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \\ 3 & 1 & 5 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[2],[1]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \\ 2 & -3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2],[4]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & 0 & z - x \\ 2 & -3 & 0 & t - 2x \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-y[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & 0 & z - x + y \\ 2 & -3 & 0 & t - 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

Si osservi che la colonna di zeri indica che il sottospazio V è di dimensione 2; possibili equazioni cartesiane si leggono ora a partire dall'ultima colonna, ovvero si ha

$$V = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid z - x + y = 0, t - 2x + 3y = 0\}$$

Determinare $V \cap W$ è ora immediato: si tratta del sottospazio dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y - t = 0x + y = 0 \\ z - x + y = 0 \\ t - 2x + 3y = 0, \end{cases}$$

dove le prime due equazioni definiscono W e le ultime due definiscono V. Eliminando la quarta equazione (che è chiaramente ridondante, vista la prima), si trova facilmente che l'insieme delle soluzioni del sistema è dato dai vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 2x \\ 5x \end{pmatrix}$, ovvero è lo span del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Questo vettore (così come tutti e soli i suoi multipli non nulli) è quindi una base di $V \cap W$.

3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ (dove $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3) data da

$$T(p(x)) = xp''(x) + p(-2)$$

   (a) Scrivere qui la matrice associata a T rispetto alla base $x^3, x^2, x^1, 1$:

   (b) Qual è la dimensione di Imm T? Scrivere qui: ....

   Soluzione.

   (a) Per scrivere la matrice associata a T è sufficiente calcolare i vettori $T(x^3), T(x^2), T(x)$ e $T(1)$ ed esprimerli in coordinate nella base data. Si ha

$$T(x^3) = x \cdot 6x - 8, \quad T(x^2) = 2x + 4$$

$$T(x) = -2, \quad T(1) = 1,$$

   da cui la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) La dimensione di T è uguale al rango della matrice appena scritta. Dal momento che è chiaro che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è proporzionale alla terza, il rango della matrice (e quindi la risposta alla domanda) è 3.

4. Sia $M \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matrice di rango 2. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione:

   (a) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x + y + z + t)^2 = 0\}$. ☐ No ☐ Sì, dimensione: ....

   (b) $\{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : w^t M v = 0 \; \forall w \in \mathbb{R}^4\}$. ☐ No ☐ Sì, dimensione: ....

   Soluzione.

   (a) L'equazione $(x+y+z+t)^2 = 0$ è equivalente all'equazione $x+y+z+t = 0$. L'insieme considerato è dunque un iperpiano di $\mathbb{R}^4$ (in particolare, un sottospazio vettoriale) ed è di dimensione 3.

   (b) La condizione è equivalente al fatto che v sia ortogonale alle righe di M, ovvero (vista l'ipotesi sul rango di M) che v sia ortogonale ad un sottospazio di dimensione 2. In particolare, l'insieme descritto è un sottospazio, e la sua dimensione (vista la formula $\dim W + \dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^4$, valida per ogni sottospazio W di $\mathbb{R}^4$) è $4 - 2 = 2$.

5. Consideriamo i piani affini di equazioni $2x - y + 5z = 3$ e $4x - 2y + 10z = 66$. Qual è la loro distanza? ....

   Soluzione. Le due equazioni sono equivalenti a $2x - y + 5z = 3$ e $2x - y + 5z = 33$, da cui vediamo chiaramente che i due piani (che chiamiamo Π_1, Π_2) sono paralleli. Un vettore ortogonale a Π_1, e quindi anche a Π_2, è dato da $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Per determinare la distanza fra Π_1 e Π_2 procediamo come segue: fissiamo arbitrariamente un punto su Π_1 (per esempio $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$) e poi consideriamo la retta passante per v_0 ed ortogonale a Π_1, che è data dai punti della forma $v_0 + \lambda v = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -3-\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}$. Questa retta interseca Π_2 in corrispondenza del valore di λ per cui le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 2\lambda \\ -3-\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}$ soddisfano l'equazione di Π_2, ovvero $2(2\lambda) - (-3-\lambda) + 5(5\lambda) = 33$. Da qui si ricava $30\lambda = 30$, ovvero $\lambda = 1$. Questo vuol dire che per spostarsi da Π_1 a Π_2 muovendosi ortogonalmente ai piani ci si muove del vettore v. La distanza fra i piani è quindi la norma di v, ovvero $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

6. Siano n un intero ≥ 2 e $H = (a_{ij})$ la matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ definita da:

$$a_{ij} = a \text{ se } i \neq j$$

$$a_{ii} = d_i \geq a.$$

Scrivere Vero o Falso accanto a ciascuna delle seguenti affermazioni:

(a) per $n = 2$ e $n = 3$ accade che se per almeno due indici i, j vale $d_i = d_j = a$ allora $\det H = 0$.

(b) per ogni $n \geq 2$, se per ogni indice i vale $a < d_i$ allora $\det H > 0$.

(c) per ogni $n \geq 2$, se per ogni indice i vale $a < d_i$ allora $\det H \neq 0$ e il suo segno dipende dal valore di a.

(d) per ogni $n \geq 3$ si ottiene $\det H = 0$ se e solo se per almeno $n-1$ indici $\{i_1, i_2, ..., i_{n-1}\}$ vale $d_{i_1} = d_{i_2} = \cdots = d_{i_{n-1}} = a$.

Soluzione.

(a) Vero. Infatti in tal caso la i-esima e j-esima riga di H sono uguali (tutti i coefficienti sono uguali ad a).

(b) Falso. Consideriamo $n = 2$, $a = -1$, $d_1 = d_2 = 0$. Allora $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante -1.

(c) Falso. Consideriamo nuovamente $n = 2$ e $a = -1$, e prendiamo $d_1 = d_2 = 1$. Allora il determinante di $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è 0.

(d) Falso. Prendiamo $a = 0$, $n = 3$, $d_1 = 0$ e $d_2 = d_3 = 1$. Allora $\det H = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

7. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$: ....

Soluzione. Sottraiamo la quinta colonna alla sesta, poi la quarta alla quinta, la terza alla quarta, la seconda alla terza, e infine la prima alla seconda. Queste operazioni non cambiano il determinante, quindi ci riconduciamo a calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo ora multipli appropriati della seconda, terza, ..., sesta colonna alla prima ci riconduciamo a calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che può essere immediatamente trovato sviluppando con Laplace rispetto alla prima colonna: in effetti tramite tale sviluppo si vede che il determinante cercato è uguale a (-6) volte il determinante della matrice identità 5×5, ovvero è -6, che è quindi anche la risposta al problema.

8. $(\star)$ Scrivere 4 matrici $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tali che

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Osserviamo che una matrice X che sia soluzione della precedente equazione commuta con la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, perché X commuta con la proprie potenze e $M = X^2 + X$. Si osservi inoltre che M è diagonalizzabile: in effetti il suo polinomio caratteristico è $\det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2 - 1 = t(t-2)$, quindi gli autovalori sono reali e di molteplicità 1 (il che è condizione sufficiente per la diagonalizzabilità). Autovettori corrispondenti agli autovalori $2, 0$ sono dati ad esempio da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, per cui possiamo scrivere

$$PDP^{-1} = M$$

con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che P è invertibile, possiamo certamente scrivere $X = PYP^{-1}$, per cui l'equazione da risolvere diventa

$$P(Y^2 + Y)P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow Y^2 + Y = D.$$

Come prima possiamo osservare che Y commuta con D, e siccome gli autovalori di D sono distinti è facile verificare (si tratta in effetti di un esercizio fatto in classe) che questo implica che Y stessa è diagonale. Scriviamo quindi $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$: l'equazione diventa allora semplicemente $a^2 + a = 2, b^2 + b = 0$, ovvero $a \in \{1, -2\}$ e $b \in \{0, -1\}$. Ci sono quindi solo 4 matrici X che risolvono l'equazione data, e sono

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$:

- $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
- $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile

Soluzione.

- Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_1:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\,\mathrm{Id} - A_1) &= \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -3 & \lambda-4 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)\left((\lambda+1)(\lambda-4)-3\right) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda-7).\end{aligned}$$

  Le radici di questo polinomio sono -1 e $\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$: siccome gli autovalori sono tutti reali e hanno tutti molteplicità algebrica 1 (e quindi anche molteplicità geometrica 1), la matrice è diagonalizzabile.

- La matrice A_2 è simmetrica, quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale.
- Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A_3:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\,\mathrm{Id} - A_3) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)\left(\lambda(\lambda-2)+1\right) \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1)^2,\end{aligned}$$

  dove nella seconda uguaglianza si è usata la mossa di colonna data dal sottrarre la terza colonna alla seconda e nella penultima uguaglianza si è sviluppato usando la regola di Sarrus. Gli autovalori sono quindi -1 (di molteplicità 1) e 1 (di molteplicità 2). Per stabilire se A_3 sia o meno diagonalizzabile si tratta ora di determinare le molteplicità geometriche di tali autovalori. Per l'autovalore -1 sappiamo dalla teoria che la molteplicità geometrica sarà anch'essa uguale ad 1. Per l'autovalore 1 la molteplicità geometrica è invece data da

$$\dim\ker(A_3 - \mathrm{Id}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1,$$

  dove per calcolare il rango si è usato il fatto che le prime due righe sono chiaramente linearmente indipendenti, e d'altro canto il rango non può superare 2 (questo può essere giustificato in almeno due modi: da un lato sappiamo che la molteplicità geometrica deve essere almeno 1; in alternativa si può facilmente osservare che la somma delle tre righe è 0, e dunque esse sono linearmente dipendenti). Siccome la molteplicità geometrica non coincide con quella algebrica per l'autovalore 1, la matrice A_3 non è diagonalizzabile.

10. Scrivere Vero o Falso accanto a ciascuna delle seguenti affermazioni.

- Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile. Allora A^2 è diagonalizzabile.
- Sia A una matrice quadrata tale che A^2 è diagonalizzabile. Allora A è diagonalizzabile.
- Siano $n \geq 2$ un intero e B, C matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti reali tali che BC e CB sono entrambe diagonalizzabili. Allora B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Soluzione.

- Vero. Infatti, se la matrice M di A in una certa base $\mathcal{B}$ è diagonale, allora la matrice di A^2 in base $\mathcal{B}$ è M^2, anch'essa diagonale.
- Falso. Basta considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che è il prototipo della matrice non diagonalizzabile (l'unico valore è zero, di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1): per questa matrice si ha $A^2 = 0$, che è certamente diagonalizzabile.
- Falso. Basta prendere $B = C = \begin{pmatrix} 0 & 1-1 & 0 \end{pmatrix}$: allora $BC = CB = -\operatorname{Id}$ è certamente diagonalizzabile, ma B non lo è, perché i suoi autovalori sono le radici (non reali) del polinomio caratteristico $p_B(t) = t^2 + 1$.

11. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ rappresentato, in base canonica, dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la segnatura di φ. Scrivere qui (n_+, n_-, n_0): ....

(b) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto al prodotto scalare φ:

Soluzione.

(a) Cominciamo determinando se il prodotto scalare sia o meno non-degenere. Per far questo è sufficiente calcolare il determinante della matrice associata al prodotto scalare, che è

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0.$$

Ne segue che $n_0 \geq 1$; d'altro canto $\varphi(e_1, e_1) > 0$ e $\varphi(e_3, e_3) < 0$, quindi abbiamo anche $n_+ \geq 1$ e $n_- \geq 1$. Dal momento che $n_+ + n_- + n_0 = 3$, l'unica possibilità è che la segnatura sia $(1, 1, 1)$.

(b) È conveniente determinare innanzitutto il radicale del prodotto scalare, che come noto coincide con il nucleo della matrice che lo rappresenta. Un semplice calcolo mostra che il radicale è generato dal vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, che possiamo quindi prendere come primo vettore di base. Per definizione di radicale, v_1 è ortogonale a qualunque altro vettore, quindi possiamo poi prendere $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Infine dobbiamo completare questi vettori ad una base di $\mathbb{R}^3$ usando un vettore $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ che sia ortogonale a v_2 rispetto a φ. Questa condizione si traduce in

$$0 = \varphi(v_2, v_3) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a - 2b.$$

Si può allora prendere per esempio $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2. Sia $D : V \to V$ l'applicazione lineare derivata (ovvero $D(p(x)) = p'(x)$). Muniamo V del prodotto scalare

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx.$$

(a) Scrivere la matrice di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$:

(b) Scrivere la matrice di D in base $\{1, x, x^2\}$:

(c) Scrivere la matrice (in base $\{1, x, x^2\}$) dell'aggiunto di D rispetto al prodotto scalare dato:

Soluzione.

(a) Si tratta di calcolare i prodotti scalari fra gli elementi di base. Si ha

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$\langle x, 1\rangle = \langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = 0$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \langle 1, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2, x\rangle = \langle x, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx = 0$$

$$\langle x^2, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

La matrice richiesta è quindi $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$.

(b) Si ha $D(1) = 0$, $D(x) = 1$ e $D(x^2) = 2x$. La matrice richiesta è quindi

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia D^* l'aggiunto di D. Come noto, le matrici $[D]$ e $[D^*]$ di D e D^* rispettano

$$[D]^t M = M[D^*] \iff [D^*] = M^{-1}[D]^t M.$$

Siccome $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{15}{8} & 0 & \frac{45}{8} \end{pmatrix}$, si ottiene $[D^*] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

13. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Scrivere, se esiste, una matrice $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ che commuta con A e non è invertibile, altrimenti scrivere NON ESISTE.

(b) Scrivere, se esiste, una matrice $C \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che commuta con A, è invertibile, e non è una potenza di A, altrimenti scrivere NON ESISTE.

Soluzione.

(a) Una tale matrice esiste banalmente: è sufficiente prendere come B la matrice nulla.

(b) Osserviamo che $A^2 = -\operatorname{Id}$, $A^3 = -A$ e $A^4 = \operatorname{Id}$, e quindi le potenze di A sono periodiche di periodo 4, e quelle scritte sono in effetti tutte le matrici che sono potenze di A. Una matrice C con le proprietà desiderate è allora data da $\operatorname{Id} + A$: questa non è una potenza di A per quanto detto sopra, commuta con A perché sia Id che A commutano con A, ed è invertibile perché il suo determinante è $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$.

14. Sia $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Per ognuno dei seguenti endomorfismi T_i di $\mathbb{R}^3$ dire se il vettore v sia o meno un autovettore:

(a) $T_1(x, y, z) = (x + 2y, x, 2z)$ ☐ Autovettore ☐ Non autovettore

(b) $T_2(x, y, z) = (x - 2y, y, x + y + z)$ ☐ Autovettore ☐ Non autovettore

(c) $T_3(x, y, z) = (x - 2y, z - 2x, z - x - 2y)$ ☐ Autovettore ☐ Non autovettore

Soluzione.

(a) Si ha $T_1 v = \big(4, 2, 8\big) = 2v$, quindi v è un autovettore di T_1.

(b) Si ha $T_2 v = \big(0, 1, 7\big)$, che non è un multiplo scalare di v, quindi v non è un autovettore di T_2.

(c) Si ha $T_3 v = \big(0, 0, 0\big) = 0v$, quindi v è un autovettore di T_3 (si ricorda che nella definizione di autovettore si esclude che v possa essere il vettore nullo, ma non che l'autovalore possa essere 0).

Parte dimostrativa.

Problema 1.

Siano d un intero positivo, $\mathbb{K}$ un campo e $A, B \in \operatorname{Mat}_{d\times d}(\mathbb{K})$ matrici quadrate a coefficienti in $\mathbb{K}$. Scopo di questo esercizio è dimostrare che AB e BA hanno lo stesso polinomio caratteristico. Data una matrice M, denotiamo $p_M(t)$ il suo polinomio caratteristico.

1. Dimostrare che se A è invertibile o B è invertibile allora AB e BA sono simili.
2. Dedurre che se almeno una fra A e B è invertibile le matrici AB e BA hanno lo stesso polinomio caratteristico.
3. Dare un esempio di matrici A, B a coefficienti reali tali che AB e BA non siano simili.
4. Dimostrare che $p_{AB}(t) = p_{BA}(t)$ nel caso A sia una matrice qualunque e
$$B = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix},$$
dove I_n è l'identità $n \times n$ e $0_{h,k}$ è la matrice nulla con h righe e k colonne.
5. ($\star$) Siano nuovamente A, B matrici quadrate $d \times d$. Dimostrare che esistono matrici invertibili L ed R ed un intero non negativo $n \le d$ tali che $LBR = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix}$.
6. Scrivendo $A = RCL$ per un'opportuna C, dimostrare che $p_{AB}(t) = p_{BA}(t)$ per ogni coppia di matrici quadrate $A, B \in \operatorname{Mat}_{d\times d}(\mathbb{K})$.

Soluzione.

1. In effetti, se A è invertibile si ha $A^{-1}(AB)A = BA$, e dunque AB e BA sono simili tramite il cambiamento di base dato da A. Discorso simmetrico si può fare se B è invertibile.
2. La tesi segue immediatamente dal fatto ben noto che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3. Si può prendere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. In tal caso AB è la matrice nulla, mentre $BA = A$: siccome la matrice nulla è simile solo a se stessa, queste matrici forniscono il controesempio voluto.

4. Scriviamo $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ dove A_{11} è una matrice quadrata $n \times n$, A_{22} è $(d-n) \times (d-n)$, A_{12} ha n righe e $d-n$ colonne, e infine A_{21} ha n colonne e $d-n$ righe. Allora si ha
$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{n,d-n} \\ A_{21} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix}$$
e
$$BA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix}.$$
La tesi ora segue immediatamente, perché i polinomi caratteristici di AB e di BA sono entrambi uguali a $p_{A_{11}}(t)t^{d-n}$: verifichiamolo ad esempio per AB (il ragionamento per BA è del tutto uguale). Si ha
$$p_{AB}(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - AB) = \det \begin{pmatrix} t\,\mathrm{Id}_n - A_{11} & 0_{n,d-n} \\ -A_{21} & tI_{d-n} \end{pmatrix}.$$
Sviluppando lungo l'ultima colonna, poi lungo la penultima, e così via per $d-n$ volte si ottiene che il determinante desiderato è uguale a t^{d-n} moltiplicato per il determinante di $t\,\mathrm{Id}_n - A_{11}$, ovvero come affermato si ha $p_{AB}(t) = t^{d-n}p_{A_{11}}(t)$.

5. Sappiamo dalla teoria che è possibile utilizzare opportune mosse di Gauss (potrebbe essere necessario usare sia mosse di riga che di colonna) per ridurre ogni matrice $d \times d$ ad una della forma $\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix}$, dove n è il rango della matrice. D'altro canto, sappiamo anche che effettuare mosse di riga è equivalente a moltiplicare a sinistra per una matrice invertibile, e che effettuare mosse di colonna è equivalente a moltiplicare a destra per una matrice invertibile. È quindi sufficiente prendere come L (rispettivamente R) la matrice che implementa le mosse di riga (rispettivamente colonna) che portano la matrice B in forma a scalini ridotta.

6. Si tratta di combinare i punti precedenti. Definiamo $C := R^{-1}AL^{-1}$, dove come al punto precedente abbiamo scritto $B = L^{-1} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} R^{-1}$ (le scritture R^{-1}, L^{-1} hanno senso perché R e L sono invertibili). Si ha allora
$$AB = RCLL^{-1} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} R^{-1} = RC \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} R^{-1}$$
e
$$BA = L^{-1} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} R^{-1}RCL = L^{-1} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} CL.$$
In particolare AB è simile alla matrice $D := C \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix}$, e BA è simile alla matrice $E := \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,d-n} \\ 0_{d-n,n} & 0_{d-n,d-n} \end{pmatrix} C$. Siccome matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico abbiamo $p_{AB}(t) = p_D(t)$ e $p_{BA}(t) = p_E(t)$. Per concludere è dunque sufficiente dimostrare che $p_D(t) = p_E(t)$, ma questo è esattamente il contenuto del punto 4.

Problema 2.

Sia n un intero positivo **dispari** e sia $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica.

1. Dimostrare che $\det(M) = 0$.

2. Dimostrare che la matrice M^2 è simmetrica.

3. ($\star$) In virtù del punto precedente la matrice M^2 definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che la segnatura di questo prodotto scalare è

$$(n_+, n_-, n_0) = (0, n - \dim\ker M, \dim\ker M).$$

Indicazione. Potrebbe essere più facile determinare la segnatura del prodotto scalare associato a $-M^2$.

4. Siano

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di queste matrici S_i $(i = 1, 2, 3)$ determinare se S_i ammetta una radice quadrata antisimmetrica, ovvero determinare se esista $A_i \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $S_i = A_i^2, A_i^t = -A_i$.

Soluzione.

1. Usando il fatto che $\det(M^t) = \det(M)$, che $\det(-M) = (-1)^n \det(M)$, e che n è dispari, si ottiene $\det(M) = \det(M^t) = \det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M)$. Questo chiaramente implica $\det(M) = 0$.

2. In effetti $(M^2)^t = M^t \cdot M^t = (-M)(-M) = M^2$, cioè M^2 è simmetrica.

3. Sia v un qualunque vettore in $\mathbb{R}^n$. Si ha $v^t(-M^2)v = v^t M^t M v = (Mv)^t(Mv) = \langle Mv, Mv\rangle_{\mathrm{std}}$, dove $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{std}}$ è il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Siccome $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{std}}$ è definito positivo, abbiamo mostrato che il prodotto scalare associato a $-M^2$ è semidefinito negativo (si faccia attenzione che Mv potrebbe essere il vettore nullo anche quando v non è nullo). Ne segue che la segnatura di M^2 è del tipo $(0, a, b)$ con $a + b = n$, e dove come noto $b = \dim\ker M^2$. È quindi sufficiente dimostrare che $\dim\ker M^2 = \dim\ker M$. Per fare questo osserviamo che se $v \in \ker M^2$, allora $0 = v^t M^2 v = -\langle Mv Mv\rangle_{\mathrm{std}}$, da cui (siccome l'opposto del prodotto scalare standard è definito negativo) $Mv = 0$ come voluto.

4. Discutiamo i tre casi separatamente.

   (a) Se fosse $S_1 = A_1^2$ con A_1 antisimmetrica, in virtù del punto 1 e del teorema di Binet si avrebbe $\det(S_1) = \det(A_1)^2 = 0$. Tuttavia un rapido calcolo mostra che $\det(S_1) = 6$, e quindi una tale matrice A_1 non può esistere.

   (b) Se fosse $S_2 = A_2^2$ con A_2 antisimmetrica, in virtù del punto 3 la matrice S_2 dovrebbe essere semidefinita negativa. Tuttavia è facile trovare vettori v per i quali $v^t S_2 v > 0$, e quindi S_2 non può essere della forma A_2^2 (per un esempio concreto: per $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $v^t S_2 v = 1 > 0$).

   (c) Consideriamo la generica matrice antisimmetrica $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Si ha allora $A_3^2 = \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2 - c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$, e dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -a^2 - b^2 = -4 \\ -bc = 0 \\ ac = 2 \\ -5 = -a^2 - c^2 \\ -ab = 0 \\ -b^2 - c^2 = -1 \end{cases}$$

Dal fatto che $ac = 2$ ricaviamo $c \neq 0$, e a quel punto da $-bc = 0$ segue $b = 0$. Sostituendo abbiamo

$$\begin{cases} b = 0 \\ -a^2 = -4 \\ ac = 2 \\ -5 = -a^2 - c^2 \\ -c^2 = -1 \end{cases}$$

da cui troviamo immediatamente la soluzione $a = 2, c = 1$. Ne segue che S_2 ammette una radice quadrata antisimmetrica data da $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3.

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 2$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di T siano a due a due distinti.

1. Sia U l'endomorfismo $(T - \lambda_2 \operatorname{Id}) \cdots (T - \lambda_n \operatorname{Id})$. Dimostrare che, per ogni $v \in V$, il vettore Uv è nullo oppure è un autovettore di T. Qual è in tal caso il corrispondente autovalore?

   Poniamo ora
   $$\pi := \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)} U.$$

2. Determinare $\dim \operatorname{Im}(\pi)$.

3. Dimostrare che π è una proiezione, ovvero che vale $\pi^2 = \pi$.

4. ($\star$) Sia ora $V = \mathbb{R}^3$, $v \in V$ un vettore fissato e $R : V \to V$ una rotazione intorno alla retta $\operatorname{Span}(v)$ (assumiamo $R \neq \operatorname{Id}$). Poniamo $U = R^2 + (1 - \operatorname{tr}(R))R + \operatorname{Id}$: dimostrare che $U(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Span}(v)$.

5. Sia $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Dimostrare che R rappresenta una rotazione di $\mathbb{R}^3$. Determinare l'asse e l'angolo di tale rotazione.

Soluzione.

1. Osserviamo che il polinomio caratteristico di T è $p_T(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$. Segue dal teorema di Cayley-Hamilton che $0 = p_T(T) = (T - \lambda_1 \operatorname{Id}) \cdots (T - \lambda_n \operatorname{Id})$. Possiamo allora calcolare
   $$(T - \lambda_1 \operatorname{Id})(Uv) = (T - \lambda_1 \operatorname{Id}) \cdots (T - \lambda_n \operatorname{Id})v = 0,$$
   da cui segue che $T(Uv) = \lambda_1(Uv)$, ovvero che Uv è o il vettore nullo, o un autovettore di T di autovalore λ_1.

2. Chiaramente l'immagine di π è la stessa dell'immagine di U, visto che questi due operatori differiscono solo per moltiplicazione per uno scalare non nullo. D'altro canto abbiamo già visto che l'immagine di U è contenuta nel λ_1-autospazio di T, che per ipotesi ha dimensione 1. Ne segue che ci sono solo due possibilità: o $\operatorname{Im}(\pi)$ è l'intero λ_1-autospazio di T, di dimensione 1, oppure è nulla. Per distinguere questi casi osserviamo che, detto v_1 un autovettore di T di autovalore λ_1, si ha
   $$U(v_1) = (T - \lambda_2 \operatorname{Id}) \cdots (T - \lambda_n)(v) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)(v_1) :$$
   questa uguaglianza segue immediatamente dal fatto che T, ristretto a $\operatorname{Span}(v)$, coincide con $\lambda_1 \operatorname{Id}$. Ne segue quindi $\pi(v_1) = v_1$ e $\dim \operatorname{Im}(\pi) = 1$.

3. Possiamo verificare l'identità $\pi^2 = \pi$ su una base di V. Siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori di T, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Questi formano una base di V, perché il fatto che tutte le molteplicità algebriche siano uguali ad 1 è condizione sufficiente affinché T sia diagonalizzabile, e quindi che V ammetta una base costituita da autovettori di T.

   Come già visto si ha $\pi(v_1) = v_1$, e quindi $\pi^2(v_1) = \pi(\pi(v_1)) = \pi(v_1) = v_1$. D'altro canto, per ogni $i = 2, \dots, n$ si ha chiaramente $U(v_i) = 0$ (per via del fattore $T - \lambda_i \operatorname{Id}$) che compare nella definizione di U: si osservi che i fattori $T - \lambda_j \operatorname{Id}$ commutano fra oro), da cui $\pi(v_i) = \pi^2(v_i) = 0$. Avendo verificato l'identità su tutti i vettori di una base di V essa è dimostrata.

4. Come noto, una rotazione ammette 1 come autovalore, e l'ipotesi $R \neq \operatorname{Id}$ implica che la molteplicità di questo autovalore sia 1 (in particolare, l'autospazio relativo all'autovalore 1 è $\operatorname{Span}(v)$). Si ricorda inoltre che $\det(R) = 1$, perché questa uguaglianza vale per ogni rotazione. Il polinomio caratteristico di R si scrive da un lato come

$$p_R(t) = t^3 - \operatorname{tr}(R)t^2 + at - \det(R) = t^3 - \operatorname{tr}(R)t^2 + at - 1$$

   e dall'altro come

$$p_R(t) = (t-1)(t^2 + ct + d) = t^3 + ct^2 + dt - t^2 - ct - d,$$

   da cui otteniamo $d = 1$ e $c - 1 = -\operatorname{tr}(R)$, ovvero $p_R(t) = (t-1)(t^2 + (1 - \operatorname{tr}(R))t + 1)$. A questo punto esattamente come prima si ottiene l'uguaglianza $(R - \operatorname{Id})U = 0$, che implica che l'immagine di U sia contenuta nell'autospazio di R relativo all'autovalore 1. Ma come già detto questo autospazio è proprio $\operatorname{Span}(v)$, per cui otteniamo che $U(\mathbb{R}^3) \subseteq \operatorname{Span}(v)$. Per dimostrare l'uguaglianza si può procedere come al punto 2, oppure anche direttamente: si ha $U(v) = R^2 v + (1 - \operatorname{tr}(R))v + v = v + v - \operatorname{tr}(R)v + v = (3 - \operatorname{tr}(R))v$, e si tratta quindi di dimostrare che $\operatorname{tr}(R) \neq 3$. È noto dalla teoria che gli autovalori di R sono tutti numeri complessi di modulo 1, ed è immediato rendersi conto che la somma di tre numeri complessi di modulo 1 è uguale a 3 se e solo se questi numeri complessi sono tutti e tre uguali a 1, possibilità che abbiamo già escluso (in quanto $R \neq \operatorname{Id}$).

5. Per dimostrare che R è una rotazione è sufficiente verificare che $RR^t = \operatorname{Id}$ e $\det(R) = +1$. L'asse di rotazione è l'autospazio corrispondente all'autovalore 1, e si può quindi trovare come

$$\ker(R - \operatorname{Id}) = \ker \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Infine, è noto che gli autovalori di una rotazione di angolo ϑ sono $1, \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta$, per cui la traccia di R è data da $1 + 2\cos\vartheta$. Nel nostro caso $\operatorname{tr}(R) = 2$, da cui $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$. Questo implica che l'angolo di rotazione è di 60°.

1.7 Compito del 22/06/2018

Test.

1. Siano U, V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{20}$. Sapendo che $\dim U = 18$ e $\dim V = 5$, elencare i valori possibili per $\dim(U \cap V)$: ....

   Soluzione. La risposta è $3, 4, 5$. In virtù della formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 18 + 5 - \dim(U + V).$$

   E' chiaro che $U + V$ contiene U, dunque la sua dimensione è al minimo 18, e d'altro canto $U + V$ è contenuto in $\mathbb{R}^{20}$, dunque la sua dimensione è al massimo 20. Ne segue che gli unici valori eventualmente possibili sono $23 - 18 = 5, 23 - 19 = 4, 23 - 20 = 3$. Per dimostrare che tutti questi valori possono in effetti accadere, costruiamo degli esempi: detti $e_1, \dots, e_{20}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{20}$ e posto $U = \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_{18})$, nei tre casi possiamo prendere rispettivamente $V = \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, $V = \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_{19})$ e $V = \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3, e_{19}, e_{20})$. E' allora chiaro che $U + V$ è generato dai vettori $e_1, \dots, e_{18}$ e dai generatori di V: nei tre casi, $U + V$ ha dimensione 18, 19, 20 come voluto.

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il determinante di AB: ....

(b) Calcolare il determinante di BA: ....

Soluzione. Dal momento che il rango di A è 2, entrambi i prodotti AB e BA hanno rango al più 2. Visto però che AB è una matrice 6×6, se essa è di rango al più 2 non può essere invertibile, dunque $\det(AB) = 0$. Il medesimo ragionamento si applica anche a BA, che però è una matrice 2×2 e quindi può essere invertibile anche se è di rango 2. Per calcolare $\det(BA)$ conviene allora svolgere il calcolo esplicito: si ha

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(BA) = 16.$$

3. (a) Sia φ il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per cui una base ortonormale è data da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice di φ rispetto alla base canonica:

(b) Sia ϕ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che: (i) esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim(W) = \dim(W^\perp) = 2$ (ortogonale preso rispetto a ϕ); (ii) esistono due vettori v_1, v_2 tali che $\phi(v_1, v_1) = \phi(v_2, v_2) = 0$ e $\phi(v_1, v_2) = 1$. Scrivere qui:

- l'indice di nullità $n_0(\phi)$: ....

- l'indice di positività $n_+(\phi)$: ....

- l'indice di negatività $n_-(\phi)$: ....

Soluzione.

(a) L'ipotesi equivale a $\varphi(v_i, v_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$. Denotando con e_i la base canonica di $\mathbb{R}^3$, vogliamo determinare i prodotti scalari $\varphi(e_i, e_j)$: in effetti, questi sono per definizione i coefficienti della matrice di φ in base canonica. Osserviamo che $e_1 = v_1, e_2 = v_3 - v_2$ e $e_3 = 2v_2 - v_1 - v_3$, ovvero i vettori e_1, e_2, e_3, quando scritti nella base $\mathcal{B}$ dei v_j, hanno come coordinate

$$[e_1]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [e_2]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [e_3]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In base $\mathcal{B}$ la matrice di φ è (per ipotesi) uguale all'identità, dunque per calcolare i prodotti scalari $\varphi(e_i, e_j)$ è sufficiente calcolare i prodotti scalari (rispetto al prodotto scalare *canonico*!) fra le precedenti rappresentazioni in base. Ad esempio, si ha

$$\varphi(e_3, e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \text{ e } \varphi(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -3.$$

Procedendo nello stesso modo si determinano anche

$$\varphi(e_1, e_1) = 1, \quad \varphi(e_1, e_2) = 0, \quad \varphi(e_1, e_3) = -1, \quad \varphi(e_2, e_2) = 2,$$

per cui la matrice cercata è

$$[\varphi]_{\text{canonica}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Certamente ϕ è degenere, perché se fosse non degenere si avrebbe $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. D'altro canto, consideriamo il sottospazio U generato da v_1, v_2: per ipotesi, la matrice della restrizione di ϕ a U è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha segnatura $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$, come si può vedere ad esempio dal fatto che gli autovalori della matrice sono 1 e -1. Ne segue che $n_0(\phi) \geq 1, n_+(\phi) \geq 1, n_-(\phi) \geq 1$ e quindi $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$. In alternativa, si poteva anche osservare che $\phi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = 2\phi(v_1, v_2) > 0$ (da cui $n_+(\phi) \geq 1$) e $\phi(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = -2\phi(v_1, v_2) < 0$ (da cui $n_-(\phi) \geq 1$).

4. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Si sa che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, che $\det(A) = 3$ e che $\operatorname{tr}(A) = 5$.

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A: ....

   (b) A è diagonalizzabile? ☐Sì ☐No ☐Non è possibile determinarlo

   Soluzione.

   Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori (eventualmente complessi) di A. Per ipotesi, 3 è un autovalore di A (corrispondente all'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$), per cui a meno di riordinare gli autovalori possiamo supporre $\lambda_1 = 3$. Inoltre, $\det(A) = 3$ è il prodotto degli autovalori (quindi $3 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3\lambda_2\lambda_3$, ovvero $\lambda_2\lambda_3 = 1$) e $\operatorname{tr}(A) = 5$ è la somma degli autovalori di A, da cui $3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5$, ovvero $\lambda_2 + \lambda_3 = 2$. Le due equazioni trovate per λ_2, λ_3 implicano allora $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

   (a) Il polinomio caratteristico di A è quindi $(t-1)^2(t-3) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$.

   (b) A ha un autovalore doppio, quindi senza ulteriori informazioni non è possibile dire se essa si diagonalizzi o meno. Concretamente, ecco due matrici che rispettano le ipotesi, una diagonalizzabile e l'altra no:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Consideriamo la seguente matrice M_a, dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -a^2 & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare, in funzione di a, gli autovalori di M_a: ....

   (b) Scrivere qui i valori di a per i quali M_a **non** è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

   Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di M_a: utilizzando la regola di Sarrus, si vede che esso è dato da

$$\det \begin{pmatrix} t+2 & 0 & 0 \\ 3 & t & -1 \\ 3 & a^2 & t-(a^2+1) \end{pmatrix} = t(t+2)(t-(a^2+1)) + a^2(t+2) = (t+2)(t^2 - (a^2+1)t + a^2);$$

   un autovalore è allora evidente ($t = -2$ è sempre radice del polinomio caratteristico), e gli altri due autovalori sono dati dalle soluzioni di

$$t^2 - (a^2+1)t + a^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{2} = \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2} = a^2, 1$$

   Gli autovalori sono dunque $-2, 1$ e a^2 (in particolare, sono sempre tutti e tre reali). Quando essi sono due a due distinti la matrice è diagonalizzabile, quindi gli unici casi in cui M_a

potrebbe potenzialmente non essere diagonalizzabile sono quelli in cui $a^2 = 1$ o $a^2 = -2$. Ora chiaramente $a^2 = -2$ è impossibile se a è un numero reale, dunque ci interessiamo solo al caso $a^2 = 1$, ovvero $a = \pm 1$. Questi due valori di a corrispondono alla medesima matrice M_a (dal momento che nella matrice M_a compare solo a^2), quindi possiamo lavorare ad esempio con $a = 1$. In tal caso la matrice M_a è $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, e l'autospazio relativo all'autovalore 1 è dato da

$$\ker M_1 - \mathrm{Id} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

che come si vede immediatamente è di dimensione 1. Dal momento che la molteplicità algebrica dell'autovalore $1 = a^2$ è invece uguale a 2, deduciamo che M_1 non è diagonalizzabile (e quindi lo stesso vale anche per M_{-1}). In conclusione, i valori del parametro a per cui M_a non è diagonalizzabile sono $a = \pm 1$.

Parte dimostrativa.

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con 4 autovalori distinti e reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Siano v_1, v_2, v_3, v_4 autovettori corrispondenti a questi autovalori.

1. Ricordare perché $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Poniamo $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Scrivere le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$. Scrivere le coordinate di $T(v), T^2(v), T^3(v)$ nella base $\mathcal{B}$.
3. Dedurre che i vettori $\{v, Tv, T^2v, T^3v\}$ sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^4$.
4. Sia M la matrice di T nella base $\mathcal{A}$. Determinare le prime tre colonne di M.
5. Sia $p_T(t) = t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ il polinomio caratteristico di T. Dimostrare che la quarta colonna di M è $\begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

   Indicazione. Potrebbe essere utile applicare il teorema di Hamilton-Cayley.
6. Trovare una matrice 4×4 a coefficienti interi il cui polinomio caratteristico sia $t^4 + t^2 + 1$.

Soluzione.

1. v_1, v_2, v_3, v_4 sono quattro vettori in uno spazio di dimensione 4, e sono linearmente indipendenti in quanto autovettori relativi ad autovalori diversi. Ne segue che essi costituiscono una base.
2. Per definizione le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ora osserviamo che la matrice di T in base $\mathcal{B}$ (che per definizione è una base diagonalizzante) è data da $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$, per cui le coordinate di $T(v)$ in base $\mathcal{B}$ sono date da

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

quelle di $T^2(v)$ sono date da

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \lambda_3^2 & \\ & & & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_4^2 \end{pmatrix},$$

e similmente quelle di $T^3(v)$ sono date da $\begin{pmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_2^3 \\ \lambda_3^3 \\ \lambda_4^3 \end{pmatrix}$.

Il medesimo risultato può essere ottenuto osservando che, dal momento che i v_i sono autovettori, si ha

$$T(v) = T(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) + T(v_4) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4,$$

e quindi

$$T(T(v)) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4) = \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_3^2 v_3 + \lambda_4^2 v_4$$

e

$$T(T(T(v))) = T(\lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_3^2 v_3 + \lambda_4^2 v_4) = \lambda_1^3 v_1 + \lambda_2^3 v_2 + \lambda_3^3 v_3 + \lambda_4^3 v_4.$$

3. È chiaro che è sufficiente verificare la lineare indipendenza. A questo scopo consideriamo la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori v, Tv, T^2v, T^3v in base $\mathcal{B}$: i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se questa matrice ha determinante diverso da zero. Per quanto visto sopra, la matrice in questione è

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{pmatrix},$$

ovvero la trasposta di una matrice di Vandermonde. Dal momento che tutti i λ_i sono diversi fra loro per ipotesi, il determinante di questa matrice è effettivamente non nullo.

4. Le prime tre colonne di M sono date dalle coordinate dei vettori $T(v), T^2(v), T^3(v)$ nella base $\{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$; osserviamo in particolare che $T(v), T^2(v), T^3(v)$ sono rispettivamente il secondo, terzo e quarto vettore della base $\mathcal{A}$. Per definizione si ha quindi che la prima (rispettivamente seconda, terza) colonna della matrice M è data da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

5. La quarta colonna di M è data dalle coordinate di $T(T^3(v)) = T^4(v)$ nella base $\mathcal{A}$. Ricordiamo che il teorema di Hamilton-Cayley fornisce l'uguaglianza

$$T^4 + a_3 T^3 + a_2 T^2 + a_1 T + a_0 \operatorname{Id} = 0;$$

applicando tale uguaglianza al vettore v troviamo

$$T^4(v) = -a_3 T^3(v) - a_2 T^2(v) - a_1 T(v) - a_0 v,$$

per cui le coordinate di $T^4(v)$ nella base $\{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$ sono effettivamente $-a_0$, $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ come voluto. In particolare, la matrice M è data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Seconda soluzione. Scriviamo genericamente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & C \\ 0 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti A, B, C, D sono le nostre incognite. Un calcolo facile ma un po' lungo mostra che il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -A \\ -1 & t & 0 & -B \\ 0 & -1 & t & -C \\ 0 & 0 & -1 & t-D \end{pmatrix} = t^4 - Dt^3 - Ct^2 - Bt - A;$$

dal momento che questo polinomio caratteristico deve coincidere con quello di T, si ha necessariamente $A = -a_0, B = -a_1, C = -a_2, D = -a_3$.

6. Ispirati dai punti precedenti consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

un semplice calcolo diretto mostra che il suo polinomio caratteristico è effettivamente $t^4 + t^2 + 1$.

1.8 Compito del 16/07/2018

Test.

1. Siano date due applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$. Si sa che $\dim(\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)) = 3$. Dire quali dei seguenti enunciati si possono dedurre da queste ipotesi:

   (a) f è iniettiva ☐ Si può dedurre ☐Non si può dedurre

   (b) g è iniettiva ☐ Si può dedurre ☐Non si può dedurre

   (c) $\dim(\mathrm{Imm}(f) + \mathrm{Imm}(g)) = 4$ ☐ Si può dedurre ☐Non si può dedurre

   (d) $\mathrm{Imm}(g) \subseteq \mathrm{Imm}(f)$ ☐ Si può dedurre ☐Non si può dedurre

Soluzione. Siccome il dominio di g è $\mathbb{R}^3$, l'immagine di g ha dimensione al più 3. Dal momento che $3 = \dim(\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)) \leq \dim \mathrm{Imm}(g)$, ne segue che $\mathrm{Imm}(g)$ ha dimensione esattamente 3, e quindi in particolare (per il teorema che lega rango e dimensione del nucleo alla dimensione del dominio) essa è iniettiva. Dunque (b) si può dedurre dalle ipotesi. Inoltre, siccome $\dim(\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)) = 3 = \dim \mathrm{Imm}(g)$ e chiaramente l'intersezione $\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)$ è contenuta nell'immagine di g, dall'uguaglianza delle dimensioni segue che $\mathrm{Imm}(g) = \mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)$, ovvero $\mathrm{Imm}(g)$ è contenuta in $\mathrm{Imm}(f)$, dunque anche (d) segue dalle ipotesi. In quanto ad (a) e (c), nessuna delle due segue dalle ipotesi, perché si potrebbe avere $\mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Imm}(g)$: ad esempio, le funzioni

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$$

e

$$g : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$$

rispettano l'ipotesi, ma (a) e (c) sono entrambe false.

2. (a) Determinare una base del sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.

   (b) Consideriamo il prodotto scalare ψ sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Sia inoltre $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia ϕ la restrizione di ψ a W. Scrivere qui la terna $(n_+(\phi), n_-(\phi), n_0(\phi))$: ....

Soluzione.

(a) È sufficiente scegliere una qualunque base di V e poi ortogonalizzarla. Scegliamo per esempio come base i tre vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si osserva immediatamente che v_1, v_3 sono già ortogonali fra loro, quindi si tratta soltanto di rendere v_2 ortogonale a v_1, v_3. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt si trova che

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3 = v_2 - \frac{-1}{2} v_1 - \frac{-1}{2} v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

è ortogonale a v_1, v_3, dunque i vettori v_1, v_3, v_2' formano una base ortogonale di V.

(b) Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; essi formano per definizione una base di W (è chiaro che sono linearmente indipendenti). In questa base, la matrice di ϕ è la matrice i cui coefficienti sono i prodotti scalari $\phi(v_i, v_j)$, e dunque è uguale a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$. Dalla matrice è allora chiaro (per esempio guardando gli autovalori, che sono 0 e 15) che la segnatura di questo prodotto scalare è $(n_+, n_-, n_0) = (1, 0, 1)$.

3. (a) Sia A una matrice 4×4 a coefficienti reali tale che $A^5 = 2A^3$. Scrivere qui i possibili valori per $\det(A)$: ....

   (b) Sia M una matrice 3×3 a coefficienti reali il cui polinomio minimo è $t^2 + t - 6$. Sapendo che $\operatorname{tr}(M) = 1$, determinare il polinomio caratteristico di M: ....

Soluzione.

(a) Dal teorema di Binet otteniamo $\det(A^5) = \det(A)^5$ e $\det(2A^3) = \det(2\,\mathrm{Id}) \det(A)^3 = 2^4 \det(A)^3$. Ne segue che $\det(A)$ è soluzione dell'equazione $t^5 = 2^4 t^3$, ovvero $\det(A) = 0$ o ± 4. Tutti questi valori possono effettivamente essere realizzati, prendendo come A la matrice nulla (di determinante 0), $A = \sqrt{2}\,\mathrm{Id}$ (di determinante $\sqrt{2}^4 = 4$), oppure

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & \sqrt{2} & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ di determinante } -4.$$

(b) Sappiamo dalla teoria che il polinomio minimo $t^2 + t - 6 = (t - 2)(t + 3)$ e il polinomio caratteristico di M hanno le stesse radici, dunque gli autovalori di M sono 2 e -3 (con certe molteplicità positive). Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $2a - 3b = 1$, dove a, b sono le molteplicità algebriche di $2, -3$ rispettivamente, ed inoltre sappiamo $a + b = 3$ (perché M è una matrice 3×3). Risolvendo il sistema si trova $b = 1, a = 2$, e quindi il polinomio caratteristico di M è $(t - 2)^2(t + 3)$.

4. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di M e le rispettive molteplicità algebriche:

Autovalore	Molteplicità

(b) M è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

(c) M^2 è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

Soluzione.

(a) Cominciamo calcolando il polinomio caratteristico di M:

$$\begin{aligned} \det(t\,\mathrm{Id} - M) &= \det \begin{pmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ 3 & t-3 & -3 \\ 2 & -3 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t & 0 & -t \\ 3 & t-3 & -3 \\ 2 & -3 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 3 & t-3 & 0 \\ 2 & -3 & t \end{pmatrix} \\ &= t^2(t-3) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta sottraendo la terza riga dalla prima, la terza uguaglianza è ottenuta sommando la prima colonna all'ultima, e l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la matrice è triangolare. Ne segue che gli autovalori di M sono 0 e 3, di molteplicità algebriche 2 e 1.

(b) L'autovalore 3 è di molteplicità algebrica 1, dunque la sua molteplicità geometrica è anch'essa 1. L'autovalore 0 è di molteplicità algebrica 2, e per stabilire se M sia o meno diagonalizzabile dobbiamo determinare la sua molteplicità geometrica, ovvero dobbiamo determinare la dimensione di $\ker M$. È evidente che il rango di M è 2 (la prima e terza colonna sono opposte, mentre la seconda è linearmente indipendente da queste), quindi $\dim \ker M = 1$, e dunque 0 è di molteplicità geometrica 1. Ne segue che M non è diagonalizzabile, perché la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è inferiore alla corrispondente molteplicità algebrica.

(c) Si ha

$$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono i quadrati di quelli di M (dunque 0, di molteplicità 2, e 9, di molteplicità 1). Come sopra è sufficiente determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 0, che è ora uguale a 2 visto che il rango di M^2 è chiaramente uguale ad 1 (le tre righe sono tutte uguali). Ne segue che M^2 è diagonalizzabile, perché le molteplicità algebriche e geometriche dei suoi autovalori coincidono.

5. (a) Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$M_a = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -a \\ a & 3 & 6 \\ 6 & a & -3 \end{pmatrix}$$

risulta ortogonale? ....

(b) Per tali valori del parametro, M_a rappresenta una rotazione. Scrivere qui, per ogni a trovato al punto precedente, un vettore che genera l'asse di rotazione di M_a:

Soluzione.

Affinché una matrice 3×3 sia ortogonale è necessario (e sufficiente) che le sue colonne formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. In particolare, la prima e seconda colonna di M_a devono essere fra loro ortogonali, il che fornisce l'equazione

$$\langle \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \rangle = 0 \Rightarrow -18 + 9a = 0 \Rightarrow a = 2.$$

La matrice M_a può quindi essere ortogonale solo per $a = 2$, ed è facile verificare che in effetti M_2 è ortogonale.

Per determinare l'asse di rotazione di M_2 cerchiamo gli autovettori di autovalore 1, ovvero i vettori nel nucleo di

$$M_2 - \mathrm{Id} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che questo nucleo è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'asse di rotazione di M_a è quindi generato da questo vettore, o da ogni suo multiplo non nullo.

Parte dimostrativa.

a) Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, siano $S, T \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi di V tali che

$$ST - TS = S$$

1. Dimostrare che
$$S^k T - T S^k = k S^k$$
per ogni $k \in \mathbb{N}$.

2. Dedurre che se S^k è diverso dall'endomorfismo nullo allora è autovettore per l'endomorfismo Φ di $\mathrm{End}(V)$ definito da
$$\Phi(L) = LT - TL$$
e dimostrare che S è nilpotente.

b) Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e siano $S, T \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi di V tali che

$$ST - TS = \alpha S + \beta T$$

per certi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune nel caso particolare in cui $\alpha = \beta = 0$.

2. Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune nel caso particolare in cui $\alpha \neq 0, \beta = 0$.

   Indicazione. Come primo passo dimostrare che esiste un autovalore λ di T tale che $\lambda - \alpha$ non è autovalore di T; come secondo passo, mostrare che un autovettore v relativo a tale λ appartiene al nucleo di S.

3. (Facoltativo) Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune per ogni valore dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Soluzione. a)

1. Si procede per induzione, i casi $k = 0$ e $k = 1$ essendo ovvi. Per passare da k a $k+1$, calcoliamo

$$\begin{aligned} S^{k+1}T - TS^{k+1} &= S(S^kT - TS^k + TS^k) - TS^{k+1} \\ &= S(S^kT - TS^k) + (ST - TS)S^k \\ &= S(kS^k) + (S)S^k \\ &= kS^{k+1} + S^{k+1} = (k+1)S^{k+1}. \end{aligned}$$

2. Per definizione di Φ e per il punto precedente si ha $\Phi(S^k) = S^kT - TS^k = kS^k$. In particolare, $\Phi(S^k)$ è multiplo di S^k, con fattore di proporzionalità k: per definizione, questo vuol dire esattamente che, purché S^k non sia l'endomorfismo nullo, esso è autovettore di Φ di autovalore k. D'altro canto, siccome $\mathrm{End}(V)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita, Φ può avere soltanto un numero finito di autovalori, quindi per k sufficientemente grande S^k non può essere un autovettore di Φ. Per quanto già detto, questo è possibile solo se S^k è l'endomorfismo nullo, ovvero esattamente se S è nilpotente.

b)

1. Per quanto visto a lezione, dato che gli endomorfismi S e T commutano, ognuno preserva gli autospazi dell'altro. Dal momento che $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, S possiede almeno un autovalore λ in $\mathbb{K}$, e il corrispondente autospazio V_λ è un sottospazio di V di dimensione positiva stabile per T. Consideriamo allora la restrizione di T a V_λ: per lo stesso ragionamento, questa restrizione ammetterà un autovettore v. Ma allora v è per definizione un autovettore di T, e dal momento che si trova in un autospazio di S è anche un autovettore di S, quindi è un autovettore comune come voluto.

2. Dal momento che $\alpha \neq 0$, se per ogni λ autovalore di T anche $\lambda - \alpha$ fosse autovalore di T, allora (per induzione) ognuno degli infiniti numeri della forma $\lambda - k\alpha$ con $k \in \mathbb{N}$ sarebbe un autovalore di T. Dal momento però che T ha solo un numero finito di autovalori questo non è possibile, dunque esiste λ autovalore di T tale che $\lambda - \alpha$ non sia un autovalore di T. Sia v un autovettore corrispondente all'autovalore λ: usando l'ipotesi si ottiene

$$(ST - TS)v = (\alpha S)(v) \Rightarrow S\lambda v - TSv = \alpha Sv \Rightarrow TSv = (\lambda - \alpha)Sv,$$

da cui Sv è o il vettore nullo, o un autovettore di T di autovalore $\lambda - \alpha$. Visto che abbiamo già scartato la seconda possibilità si deve avere $Sv = 0$, da cui vediamo che v è anche un autovettore di S (appartiene all'autospazio di S corrispondente all'autovalore 0, ovvero $\ker S$), e dunque è un autovettore comune fra T e S.

3. I casi in cui $\alpha = \beta = 0$ e $\alpha \neq 0, \beta = 0$ sono già stati trattati, ed il caso in cui $\alpha = 0, \beta \neq 0$ è evidentemente analogo al caso $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Resta da analizzare la situazione nel caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Poniamo in tal caso $\tilde{T} := T + \frac{\alpha}{\beta}S$. Si ha

$$\begin{aligned} S\tilde{T} - \tilde{T}S &= S\left(T + \frac{\alpha}{\beta}S\right) - \left(T + \frac{\alpha}{\beta}S\right)S \\ &= ST - TS + \frac{\alpha}{\beta}S^2 - \frac{\alpha}{\beta}S^2 \\ &= ST - TS \\ &= \alpha S + \beta T \\ &= \beta\left(T + \frac{\alpha}{\beta}S\right) = \beta\tilde{T}, \end{aligned}$$

e in virtù di uno dei casi precedenti sappiamo che $S, \tilde{T}$ hanno un autovettore v in comune: più precisamente, esistono un vettore v e scalari λ_1, λ_2 tali che

$$Sv = \lambda_1 v, \quad \tilde{T}v = \lambda_2 v.$$

Si ottiene allora

$$\lambda_2 v = \tilde{T} v = \left(T + \frac{\beta}{\alpha} S\right) v = Tv + \frac{\beta}{\alpha} Sv = Tv + \frac{\beta \lambda_1}{\alpha} v,$$

da cui $Tv = \left(\lambda_2 - \frac{\beta\lambda_1}{\alpha}\right) v$, per cui v è autovettore anche per T, ed è dunque un autovettore comune fra S e T.

1.9 Compito del 13/09/2018

Test.

1. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere una base del nucleo dell'applicazione lineare che, rispetto alle basi standard, è rappresentata dalla matrice A.

   (b) Sia $W = \{M \in V : AM = 0\}$. Qual è la dimensione di W? ....

   Soluzione.

   (a) Per determinare il nucleo di A utilizziamo un procedimento di eliminazione di Gauss per righe: sommando la prima riga di A alla seconda e sottraendo la prima dalla terza, troviamo che il nucleo di A è uguale al nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; sottraendo ora la seconda riga dalla terza e sommandola alla prima, vediamo che il nucleo di A è uguale al nucleo di $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dal momento che ci sono due pivot non nulli e la matrice è 3×3, il nucleo è dimensione 1, ed è ora immediato da determinare risolvendo il sistema

   $$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -y + z = 0; \end{cases}$$

   un generatore del nucleo è ad esempio $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Una matrice M appartiene a W se e solo se ognuna delle sue colonne appartiene al nucleo di A, che come già visto è di dimensione 1. Ne segue che ogni colonna di M è scelta (indipendentemente) in uno spazio vettoriale di dimensione 1, e siccome M ha tre colonne lo spazio W ha dimensione 3.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare il determinante di A: ....

   (b) Determinare gli autovalori (con molteplicità) della matrice A: ....

   Soluzione.

(a) Sottraendo la prima riga ad ognuna delle altre otteniamo che il determinante desiderato è uguale a quello della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Possiamo ora sommare la seconda, terza, ..., sesta riga alla prima per ottenere un'ulteriore matrice con il medesimo determinante, ovvero $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ma questa matrice è triangolare (inferiore), e quindi il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, ovvero -5.

(b) Si può osservare che $A + \mathrm{Id} = A - (-1)\,\mathrm{Id}$ è una matrice di rango 1, e dunque il suo nucleo ha dimensione 5: questo vuol dire che -1 è un autovalore di A di molteplicità *geometrica* 5, e quindi è un autovalore di A di molteplicità *algebrica* almeno 5. D'altro canto la traccia di A è uguale a 0, quindi il suo sesto autovalore deve essere uguale a 5. Gli autovalori sono dunque -1, di molteplicità esattamente 5, e 5, di molteplicità 1.

3. Consideriamo il prodotto scalare φ_a su $\mathbb{R}$ (dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$) corrispondente alla matrice $\begin{pmatrix} a^2+a & 2a & 0 \\ 2a & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) (2 punti) Per quali valori di a il prodotto φ_a è definito positivo? ....

   (b) (2 punti) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto φ_3:

   (c) (2 punti) Dedurre dal punto precedente una base orto**normale** di $\mathbb{R}^3$ rispetto a φ_3:

Soluzione.

(a) Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Siccome $\varphi_a(e_2, e_2) = 4a$ deve essere positivo, si deve necessariamente avere $4a > 0$, ovvero $a > 0$. Viceversa, se $a > 0$ mostriamo che φ_a è definito positivo: grazie al teorema spettrale sappiamo che è sufficiente verificare che gli autovalori della matrice che rappresenta il prodotto scalare siano positivi (ricordiamo che, sempre come conseguenza del teorema spettrale, questi autovalori sono reali per ogni a). Gli autovalori in questione sono dati da 1 e dagli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a^2+a & 2a \\ 2a & 4a \end{pmatrix}$. Il determinante di questa matrice è $4a^3 > 0$ e la sua traccia è $a^2+5a > 0$: siccome il determinante (che è il prodotto degli autovalori) è positivo, gli autovalori hanno lo stesso segno. Ma d'altro canto la traccia è positiva, quindi entrambi gli autovalori sono positivi come voluto.

La stessa conclusione può essere raggiunta osservando che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $(t-1)(4a^3 - a^2t - 5at + t^2)$; i due autovalori dipendenti da a sono allora dati da

$$\lambda_{1,2} = \frac{a^2 + 5a \pm a\sqrt{a^2 - 6a + 25}}{2},$$

e si verifica senza difficoltà che essi sono positivi per $a > 0$, perché per tali valori di a si ha $a^2 + 5a = a(a+5) > a\sqrt{a^2 - 6a + 25} = a\sqrt{(a+5)^2 - 16a}$.

(b) Si può procedere in vari modi, ad esempio studiando gli autovettori oppure utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt (dal primo punto dell'esercizio sappiamo che φ_3 è definito positivo). Qui seguiamo questo secondo metodo: è chiaro che e_3 è ortogonale a e_1, e_2, dunque si tratta semplicemente di ortogonalizzare i vettori e_1, e_2. Troviamo allora che una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è formata dai 3 vettori e_1, e_3 e

$$v = e_2 - \frac{\varphi_3(e_1, e_2)}{\varphi_3(e_1, e_1)} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Per ottenere una base ortonormale si tratta ora di dividere i vettori trovati al punto precedente per le loro norme: troviamo allora che una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a φ_3 è data da

$$\frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche: ....

(b) Trovare una base dell'autospazio di B corrispondente all'autovalore $\lambda = 3$. Scrivere qui gli elementi di base:

(c) Determinare un vettore v che sia un autovettore di A e che rispetti $Bv = 3v$. Scrivere qui le coordinate di v:

Soluzione.

(a) Si tratta di determinare il polinomio caratteristico di A, e usando la regola di Sarrus troviamo

$$\begin{aligned} \det(t \operatorname{Id} - A) &= \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= t(t-2)^2 + 1 + 1 - (t + (2-t) + (2-t)) \\ &= t(t-2)^2 + t - 2 \\ &= (t-2)(t(t-2) + 1) \\ &= (t-2)(t^2 - 2t + 1) \\ &= (t-2)(t-1)^2. \end{aligned}$$

Le radici di questo polinomio sono 1 (di molteplicità 2) e 2 (di molteplicità 1).

(b) È sufficiente determinare una base di $\ker(B - 3\operatorname{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Dal momento che la matrice di cui vogliamo determinare il nucleo ha chiaramente rango uno, questo nucleo è di dimensione 2, ed è immediato vedere che è generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'ultima colonna è nulla) e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Per ipotesi v è un autovettore di A. Abbiamo già determinato gli autovalori di A, che sono 1 e 2. L'autospazio corrispondente a 2 è di dimensione 1 (dal momento che la molteplicità algebrica dell'autovalore è 1), ed è facile vedere che è generato dal vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siccome $Bw = 3w$, possiamo prendere come v questo w.

Se fossimo partiti analizzando l'autospazio di A corrispondente all'autovalore 1 (che è meno comodo, perché di dimensione 2) avremmo trovato che esso è il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, generato dai due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e sarebbe stato ugualmente facile notare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore per A che (per la discussione del punto precedente) appartiene al 3-autospazio di B.

Osservazione. Più astrattamente, quello che stiamo facendo è calcolare l'intersezione fra il 3-autospazio di B e il 2-autospazio di A (o l'1-autospazio di A, entrambi funzionano).

Parte dimostrativa.

Scopo di questo esercizio è dimostrare che un endomorfismo **invertibile** T di uno spazio vettoriale complesso V (di dimensione finita) è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.

1. Sia $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalizzabile. Dimostrare che B^2 è diagonalizzabile.

2. Per ogni $n \geq 2$ trovare un esempio di una matrice $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che N^2 sia diagonalizzabile ma N non lo sia.

3. Sia $C \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo tale che $C^2 = \lambda\,\mathrm{Id}$ per qualche $\lambda \neq 0$. Dimostrare che C è diagonalizzabile.

   Indicazione. Si potrà considerare il polinomio minimo di C.

4. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo tale che T^2 è diagonalizzabile. Sia poi V_λ un autospazio relativo a T^2. Dimostrare che $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

5. Supponiamo inoltre che T sia invertibile. Dimostrare che la restrizione di T a V_λ è diagonalizzabile.

6. Dedurre che T è diagonalizzabile.

Soluzione.

1. Se v è un autovettore per B corrispondente all'autovalore λ, allora $B^2v = B(Bv) = B(\lambda v) = \lambda Bv = \lambda^2 v$, dunque v è anche un autovettore di B^2 (di autovalore M^2). Siccome B è diagonalizzabile, c'è una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di B. Per quanto appena detto, la medesima base è anche costituita da autovettori di B^2, e dunque è una base diagonalizzante per B^2.

   In maniera equivalente, ma forse più semplice: la matrice di B in un'opportuna base è diagonale. La matrice di B^2 nella medesima base è il quadrato della matrice di B, e il quadrato di una matrice diagonale è diagonale.

2. Si può ad esempio prendere
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$
   è facile verificare che $N^2 = 0$ (dunque N^2 è certamente diagonalizzabile), ma N non è diagonalizzabile: in effetti il polinomio caratteristico di N è t^n, dunque l'unico autovalore di N è 0, di molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica $\dim\ker N = n - \mathrm{rango}(N) = n-1$. Siccome la molteplicità geometrica è strettamente inferiore a quella algebrica, N non è diagonalizzabile.

3. Per ipotesi l'endomorfismo C soddisfa $C^2 - \lambda \operatorname{Id} = 0$. Ne segue che il polinomio $p(t) = t^2 - \lambda$ si annulla quando lo si valuta in C, dunque è un multiplo del polinomio minimo di C. Ne segue che il polinomio minimo di C può essere solo (fissiamo una radice quadrata $\sqrt{\lambda}$ di λ):
   (a) $t - \sqrt{\lambda}$ (nel qual caso $C = \sqrt{\lambda} \operatorname{Id}$ è certamente diagonalizzabile)
   (b) $t + \sqrt{\lambda}$ (nel qual caso $C = -\sqrt{\lambda} \operatorname{Id}$ è certamente diagonalizzabile)
   (c) $t^2 - \lambda = (t - \sqrt{\lambda})(t + \sqrt{\lambda})$: allora (siccome $\lambda \neq 0$ per ipotesi) il polinomio minimo di C è prodotto di due fattori lineari distinti, e come visto a lezione questo implica che C è diagonalizzabile.
4. Questo segue immediatamente da quanto visto a lezione: certamente T ed T^2 commutano, dunque l'uno preserva gli autospazi dell'altro.
5. Sia $U = T|_{V_\lambda}$ la restrizione di T a V_λ (che ha senso in virtù del punto precedente). Per costruzione, $U^2 = \lambda \operatorname{Id}$: in effetti, dato $v \in V_\lambda$ qualunque, si ha $U^2 v = T^2 v = \lambda v$ dal momento che v sta nel λ-autospazio di T^2. Siccome $\det(T^2) = \det(T)^2 \neq 0$ abbiamo che $\lambda = 0$ non può essere un autovalore di T^2, e quindi dal punto (3) sappiamo che U si diagonalizza.
6. Per ipotesi, V si scrive come la somma diretta degli autospazi V_λ di T^2. Per ogni λ fissiamo una base di V_λ che diagonalizzi $T|_{V_\lambda}$ (questa esiste grazie al punto precedente); l'unione di queste basi è allora una base di V costituita di autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile.

1.10 Compito del 24/01/2019

Test.

1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che, rispetto alla base standard e_1, e_2, è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ una base di $\mathbb{R}^2$. Ricordando che la base di partenza è indicata in alto, scrivere le matrici

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} :$$

$$[F]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2} :$$

   Soluzione. Si tratta di applicare F ai vettori della base di partenza ed esprimere i risultati nella base di arrivo. Analizziamo i due casi separatamente.

   (a) $F(v_1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $F(v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Siccome la base di arrivo è la base standard, la matrice richiesta è semplicemente $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) Abbiamo già svolto sopra il calcolo di $F(v_1)$ e $F(v_2)$; si tratta ora di esprimere i risultati in base $\{v_1, v_2\}$. Osservando che $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = -v_1 + 6v_2$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -v_1 + 4v_2$ otteniamo la matrice cercata,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare che, rispetto alla base standard e_1, e_2, e_3, è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire se T è diagonalizzabile: ☐ T diagonalizzabile ☐ T non diagonalizzabile

(b) Quali sono gli autovalori (con rispettiva molteplicità algebrica) di T^6? ....

Soluzione.

(a) Cominciamo calcolando il polinomio caratteristico della matrice: esso è dato da

$$\det \begin{pmatrix} t & -2 & -8 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t(t^2+1).$$

Gli autovalori sono quindi $0, i, -i$, ciascuno di molteplicità 1. Come noto, questa condizione è sufficiente a garantire la diagonalizzabilità.

(b) Gli autovalori di T^6 sono le seste potenze degli autovalori di T, quindi sono $0, i^6 = -1, (-i)^6 = -1$ (ovvero 0 con molteplicità algebrica 1 e -1 con molteplicità algebrica 2).

3. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che $\det(L) = 1$, $\mathrm{Tr}(L) = -1$ e 5 è un autovalore di L. Questi dati sono sufficienti per determinare univocamente il polinomio caratteristico di L? Se no, scrivere NON SUFFICIENTI, se sì, scrivere il polinomio caratteristico: ....

Soluzione. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 5$ gli autovalori di L. Le condizioni su traccia e determinante forniscono $\lambda_1 + \lambda_2 = -6$ e $\lambda_1\lambda_2 = 1/5$. Il polinomio caratteristico è dunque univocamente determinato, ed è dato da

$$\begin{aligned}(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3) &= (t^2 - (\lambda_1+\lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2)(t-5) \\ &= (t^2 + 6t + 1/5)(t-5) \\ &= t^3 + t^2 - \frac{149t}{5} - 1.\end{aligned}$$

4. Fra le applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ descritte individuare quelle per cui $v = (2,1,0)$ è un autovettore.

(a) $T_1(x,y,z) = (4y, x, x-2y)$ ☐ v è autovettore ☐ v non è autovettore

(b) $T_2(x,y,z) = (z, x-2y+z, 2z)$ ☐ v è autovettore ☐ v non è autovettore

(c) $T_3(x,y,z) = (z, y, x+y)$ ☐ v è autovettore ☐ v non è autovettore

Soluzione. Si tratta di calcolare $T_i(v)$ per $i = 1,2,3$ e verificare se si tratti o meno di un multiplo scalare di v.

(a) $T_1(v) = (4,2,0) = 2v$, quindi v è un autovettore di T_1.

(b) $T_2(v) = (0,0,0) = 0v$, quindi v è un autovettore di T_2.

(c) $T_3(v) = (0,1,3)$, che non è un multiplo scalare di v, quindi v non è un autovettore di T_3.

5. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix})$$

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x+y=0, \;\; \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - z = 0\}$$

(a) Determinare una base per $V \cap W$:

(b) V e W sono in somma diretta? ☐Sì ☐No

Soluzione.

(a) Cominciamo rappresentando V in forma cartesiana. Come noto, per far questo possiamo procedere ad una eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & 5 & z \\ 1 & 1 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-2[2],[3]-4[2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & x \\ -2 & 1 & -2 & y \\ -3 & 2 & -3 & z \\ -1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[1],[4]-x[2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & y-x \\ -3 & 2 & 0 & z-2x \\ -1 & 1 & 0 & t-x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+\frac{y-x}{2}[1]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & z-2x-\frac{3(y-x)}{2} \\ -1 & 1 & 0 & t-x-\frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

Da questo processo di eliminazione vediamo che $\dim V = 2$, e che equazioni cartesiane per questo sottospazio sono date da $z-2x-\frac{3y-3x}{2}=0, t-x-\frac{y-x}{2}=0$. Moltiplicando per 2 in modo da eliminare i denominatori e semplificando otteniamo le equazioni $2z-x-3y=0, 2t-x-y=0$. L'intersezione $V \cap W$ è quindi data da

$$\begin{cases} 2z-x-3y=0 \\ 2t-x-y=0 \\ x+y=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$$

Eliminando la quarta equazione, chiaramente superflua vista la presenza della prima, otteniamo che $V \cap W$ è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2z-x-3y=0 \\ 2t-x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che questo insieme di soluzioni ha dimensione 1, e che una base è data dal singolo vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Visto che $\dim(V \cap W) > 0$, i sottospazi V e W non sono in somma diretta.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det A$: ....

(b) Determinare la segnatura di A: si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

Soluzione.

(a) Sviluppando rispetto alla terza colonna otteniamo immediatamente

$$\det(A) = -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix};$$

sottraendo alla seconda colonna il doppio della prima, ed alla terza il triplo della prima, otteniamo

$$\det(A) = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -5 & -14 \end{pmatrix} = (-2)\det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -14 \end{pmatrix} = (-2)(-39) = 78.$$

(b) Dal momento che il determinante è diverso da zero abbiamo $n_0 = 0$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ gli autovalori di A: come noto, n_+ è dato dal numero di autovalori positivi, ed n_- è dato dal numero di autovalori negativi. Ora da un lato $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 78$, quindi il numero di autovalori negativi è pari. Dall'altro, è evidente che $e_3^t A e_3 = -2 < 0$, dunque $n_- \geq 1$. Infine, il fatto che $e_1^t A e_1 = 1 > 0$ implica che anche n_+ è strettamente positivo. Siccome n_- deve essere pari, non può essere zero, e non può essere 4 (perché in tal caso si avrebbe $n_+ = 0$), l'unica possibilità è $n_+ = n_- = 2$.

Parte dimostrativa.

Sia (V, φ) uno spazio euclideo (cioè uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare definito positivo).

1. Sia W un sottospazio di V. Ricordare come si dimostra che $V = W \oplus W^\perp$.

Dato un sottospazio W di V ha quindi senso definire l'endomorfismo $\rho_W : V \to V$ tramite la formula

$$\rho_W(w + w') \ = \ w - w'$$

con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$.

2. Dimostrare che ρ_W è una trasformazione ortogonale e simmetrica.

3. Dimostrare che se $f : V \to V$ è un endomorfismo ortogonale e simmetrico, allora $f = \rho_W$ per qualche sottospazio $W \subset V$.

4. $(\star)$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano $W_1,\ W_2$ sottospazi di dimensione 1. Dire quando la composizione $\rho_{W_1} \circ \rho_{W_2}$ risulta diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Soluzione.

1. Per questo fatto di teoria si rimanda ad un qualunque libro di testo di algebra lineare.

2. Verifichiamo separatamente le due affermazioni. La trasformazione ρ_W è ortogonale se e solo se per ogni coppia $v_1 = w_1 + w_1'$, $v_2 = w_2 + w_2'$ (dove $w_1, w_2 \in W$ e $w_1', w_2' \in W^\perp$) di vettori di V si ha $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \rho_W(v_1), \rho_W(v_2) \rangle$.

   Effettivamente questa uguaglianza vale: usando la definizione di ρ_W si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \rho_W(v_1), \rho_W(v_2) \rangle &= \langle w_1 - w_1', w_2 - w_2' \rangle \\ &= \langle w_1, w_1' \rangle - \langle w_1', w_2 \rangle - \langle w_1, w_2' \rangle + \langle w_1', w_2' \rangle \\ &= \langle w_1, w_1' \rangle + \langle w_1', w_2' \rangle, \end{aligned}$$

   dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $w_1 \in W, w_2' \in W^\perp$ (e quindi $\langle w_1, w_2' \rangle = 0$), e simmetricamente $w_1' \in W^\perp, w_2 \in W$ (e quindi $\langle w_1', w_2 \rangle = 0$). D'altro canto, in maniera del tutto simile si ottiene

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle w_1 + w_1', w_2 + w_2' \rangle \\ &= \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_2' \rangle + \langle w_1', w_2 \rangle + \langle w_1', w_2' \rangle \\ &= \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1', w_2' \rangle, \end{aligned}$$

   il che conclude la verifica del fatto che ρ_W sia ortogonale.

   Verifichiamo ora la simmetria: con la notazione precedente, si tratta di dimostrare che l'uguaglianza $\langle \rho_W(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, \rho_W(v_2) \rangle$ vale per tutti i vettori $v_1, v_2 \in V$. Il calcolo è del tutto simile al precedente, quindi omettiamo i dettagli: si ha

$$\langle \rho_W(v_1), v_2 \rangle = \langle w_1 - w_1', w_2 + w_2' \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle - \langle w_1', w_2' \rangle$$

   e

$$\langle v_1, \rho_W(v_2) \rangle = \langle w_1 + w_1', w_2 - w_2' \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle - \langle w_1', w_2' \rangle,$$

   il che dimostra che ρ_W è simmetrica.

3. Si osservi che – dal momento che f è simmetrica – essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, e quindi in particolare che i suoi autovalori sono reali. D'altro canto, il fatto che f sia ortogonale implica che i suoi autovalori siano di modulo 1, e quindi gli unici autovalori di f sono $+1$ e -1. Sia W l'autospazio di f relativo all'autovalore 1 e W_- l'autospazio di f relativo all'autovalore -1. Dal momento che f è diagonalizzabile e che i suoi unici autovalori sono ± 1, si ha $V = W \oplus W_-$. D'altro canto, autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali (questa affermazione è parte del teorema spettrale), quindi si ha $W_- \subseteq W^\perp$; ma si ha anche $\dim W^\perp = \dim V - \dim W = \dim(W \oplus W_-) - \dim W = \dim W_-$, per cui l'inclusione deve essere una uguaglianza. Abbiamo quindi scritto $V = W \oplus W^\perp$ come sopra, e siccome $W^\perp$ è proprio l'autospazio di f relativo all'autovalore -1 si ha che, scrivendo un vettore $v \in V$ nella forma $v = w + w'$ con $w \in W, w' \in W^\perp = W_-$, $f(v) = f(w) + f(w') = w - w'$ come voluto.

4. Sia w_1 un generatore della retta W_1. A meno di riscalamento, possiamo supporre che $\|w_1\| = 1$: è allora possibile completare w_1 ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, rispetto alla quale la trasformazione ρ_{W_1} è quindi rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. In altri termini, possiamo assumere senza perdita di generalità che $W_1 = \operatorname{Span}(e_1)$. Fatta tale assunzione, sia $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un generatore della retta W_2. Se $b = c = 0$, allora $W_2 = W_1$ e quindi $\rho_{W_1} \circ \rho_{W_2} = \mathrm{Id}$ è certamente diagonalizzabile. In caso contrario, consideriamo la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori $e_1, \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$. In tale base la trasformazione ρ_{W_1} è ancora rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, mentre la trasformazione ρ_{W_2} è rappresentata da una matrice della forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Per giustificare quest'ultima affermazione osserviamo che $\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e quindi ρ_{W_2} invia tale vettore nel suo opposto; questo giustifica l'ultima colonna della matrice. D'altro canto, l'applicazione ρ_{W_2} è simmetrica e stiamo lavorando in una base ortonormale, quindi la matrice corrispondente deve essere simmetrica: questo giustifica l'ultima riga della matrice e l'uguaglianza $a_{21} = a_{12}$. Si osservi poi che ρ_{W_1} e ρ_{W_2} sono trasformazioni ortogonali (verificato al punto 2) a determinante 1 (si veda la forma esplicita della matrice di ρ_{W_1}), dunque ognuna di esse è una rotazione, e quindi anche la composizione è una rotazione. È ben noto che una rotazione è diagonalizzabile se e solo se essa è l'identità, oppure ha autovalori $-1, -1, 1$. La matrice del prodotto $\rho_{W_1} \circ \rho_{W_2}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & -a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che come visto deve essere diagonalizzabile con autovalori $1, -1, -1$ (oppure essere l'identità, il che è possibile solo se $W_1 = W_2$). In particolare, la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix}$ deve essere diagonalizzabile con autovalori $-1, -1$: questo è possibile soltanto se la matrice in questione è $-\mathrm{Id}$, ovvero se $a_{11} = -1, a_{12} = 0$ e $a_{22} = 1$. Ne segue che – affinché $\rho_{W_1} \circ \rho_{W_2}$ sia diagonalizzabile, con $W_1 \neq W_2$ – si deve avere $\rho_{W_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: da questa descrizione è immediato vedere che $W_2 = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ovvero che W_2 è ortogonale a W_1. Viceversa, se W_2 è ortogonale a W_1 è possibile trovare una base ortonormale (costituita da un generatore di W_1, un generatore di W_2, e un generatore di $W_1^\perp \cap W_2^\perp$) in cui le matrici di ρ_{W_1}, ρ_{W_2} siano rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, il cui prodotto è chiaramente diagonalizzabile. Ne segue che $\rho_{W_1} \circ \rho_{W_2}$ è diagonalizzabile se e solo se una delle seguenti due condizioni è verificata:

- $W_1 = W_2$;
- W_1 ortogonale a W_2.

2 Anno accademico 2018-2019

2.1 Giochi di Geometria del 12/11/2018

Test.

1. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ siano o meno sottospazi vettoriali:

   (a) $V_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$: ☐ Sì ☐ No
   (b) $V_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$: ☐ Sì ☐ No
   (c) $V_3 = \{(x, y, z) : 2x + 3y = 4z\}$: ☐ Sì ☐ No
   (d) $V_4 = \{(x, y, z) : 2x + 3y + 4z = 1\}$: ☐ Sì ☐ No
   (e) $V_5 = \{(x, y, z) : z = xy\}$: ☐ Sì ☐ No
   (f) $V_6 = \{(x, y, z) : (2x - y)^2 = 0\}$: ☐ Sì ☐ No

   Soluzione.

   (a) No: in effetti il vettore $(0, 0, 0)$ non appartiene a V_1, quindi V_1 è un sottospazio vettoriale.
   (b) Sì: l'unico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per il quale si abbia $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ è $(0, 0, 0)$, quindi $V_2 = \{(0, 0, 0)\}$ è il sottospazio vettoriale costituito dalla sola origine.
   (c) Sì: possiamo riscrivere la definizione di V_3 come $V_3 = \{(x, y, z) : 2x+3y-4z = 0\}$, quindi V_5 è l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare a termine noto nullo. Abbiamo visto a lezione che un tale insieme di soluzioni è sempre un sottospazio vettoriale.
   (d) No: l'origine non appartiene a V_4.
   (e) No: l'insieme in questione non è chiuso per somma, né per moltiplicazione per scalare. Giustifichiamo ad esempio la seconda affermazione: il vettore $v = (1, 1, 1)$ appartiene a V_5 (perché $1 = 1 \cdot 1$), ma il suo doppio $2v = (2, 2, 2)$ non sta in V_5, perché la coordinata z di $2v$ non è uguale al prodotto delle sue coordinate x e y.
   (f) Sì: $(2x-y)^2$ è uguale a 0 se e solo se $2x-y = 0$, quindi $V_6 = \{(x, y, z) : 2x-y = 0\}$, che è un sottospazio vettoriale per lo stesso motivo per cui lo è V_3 (insieme delle soluzioni di un'equazione lineare senza termine costante).

2. Consideriamo i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare la dimensione di V: ....
   (b) Determinare la dimensione di W: ....
   (c) Determinare equazioni cartesiane per W:

   Soluzione.

   (a) V è il nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per determinare la dimensione di questo nucleo possiamo procedere ad un'eliminazione di Gauss (ad esempio per righe) come segue:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-3[1]} \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[1]} \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & -4 & 4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Dal momento che ci sono due pivot non nulli, deduciamo che il rango della matrice è 2, quindi la dimensione del suo nucleo è $\dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rango} f = 4 - 2 = 2$. Per quanto detto sopra, tale dimensione è la dimensione di V.

(b) In questo caso la cosa più semplice è procedere ad un'eliminazione di Gauss per colonne, che (condotta fino in fondo) ci permetterà anche di rispondere alla domanda (c):

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & x_1\\ -2 & 2 & 1 & x_2\\ 1 & 0 & -2 & x_3\\ -3 & 4 & 0 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+2[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & x_1\\ -2 & -2 & 1 & x_2\\ 1 & 2 & -2 & x_3\\ -3 & -2 & 0 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ -2 & -2 & 3 & x_2\\ 1 & 2 & -3 & x_3\\ -3 & -2 & 3 & x_4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2}[2],\frac{1}{3}[3]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ -2 & -1 & 1 & x_2\\ 1 & 1 & -1 & x_3\\ -3 & -1 & 1 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ -2 & -1 & 0 & x_2\\ 1 & 1 & 0 & x_3\\ -3 & -1 & 0 & x_4\end{pmatrix}$$

Quanto fatto finora dimostra che W è di dimensione 2 (in effetti W è uguale al sottospazio generato dalle prime due colonne dell'ultima matrice scritta, e queste colonne sono linearmente indipendenti).

(c) Procediamo ora a determinare le equazioni cartesiane di W:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1\\ -2 & -1 & 0 & x_2\\ 1 & 1 & 0 & x_3\\ -3 & -1 & 0 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0 & x_2+2x_1\\ 1 & 1 & 0 & x_3-x_1\\ -3 & -1 & 0 & x_4+3x_1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[4]+(x_2+2x_1)[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & x_3-x_1+(x_2+2x_1)\\ -3 & -1 & 0 & x_4+3x_1-(x_2+2x_1)\end{pmatrix}$$

Le seguenti sono quindi possibili equazioni cartesiane per W:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+x_4=0\end{cases}$$

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base di $\ker f$:

(b) Determinare una base di $\operatorname{Im} f$:

(c) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica in arrivo e alla base $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in partenza:

(d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica in partenza e alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in arrivo:

Soluzione.

(a) Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ y + z = 0; \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ottiene immediatamente $z = -y$, e quindi dalla prima equazione ricaviamo $3x = -2y$. Ne segue che le soluzioni sono tutti e soli i vettori della forma $(-2/3y, y, -y)$, ovvero lo span del vettore $(-2/3, 1, -1)$. Dal momento che questo vettore è un generatore di $\ker f$ ed è non nullo, esso è una base di $\ker f$.

(b) Siccome le prime due colonne della matrice di f chiaramente formano una base di $\mathbb{R}^2$, vediamo immediatamente che l'immagine di f contiene l'intero $\mathbb{R}^2$, e quindi una base dell'immagine è data (per esempio) da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. In alternativa, il fatto che $\operatorname{Imm} f = \mathbb{R}^2$ può essere ottenuto dal teorema fondamentale delle applicazioni lineari, perché $\dim \operatorname{Imm} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$.

(c) Per quanto sappiamo sulla matrice associata ad un'applicazione lineare si tratta di determinare le immagini dei tre vettori dati tramite l'applicazione lineare data. È quindi sufficiente calcolare

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per ottenere la matrice desiderata, ovvero $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che i vettori in $\mathbb{R}^2$ che appaiono in queste uguaglianze sono tutti rappresentati in base canonica.

(d) Esattamente come sopra, si tratta di determinare le immagini dei vettori della base canonica (e queste sono date dalle colonne della matrice data nel testo), ma dobbiamo ora esprimerle nella base fissata in arrivo. Si ha

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice cercata è $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Siano $\mathcal{B}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ due basi di $\mathbb{R}^3$. Sia v il vettore le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}_1$ sono $(1, 2, 3)$. Determinare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}_2$:

Soluzione. Scriviamo innanzitutto il vettore v in base canonica: per definizione di coordinate in una base si ha

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora esprimere questo vettore come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_2$, ovvero dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

le tre incognite x_1, x_2, x_3 sono le tre coordinate cercate. D'altro canto è chiaro (guardando l'ultima coordinata dei due membri) che $x_3 = 0$; a questo punto guardando la seconda coordinata otteniamo $x_1 = 3$, e infine $x_2 = -2$. La soluzione è quindi $(3, -2, 0)$.

Parte dimostrativa.

1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare. Dimostrare che non esiste alcuna applicazione lineare $h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f \circ h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sia l'identità di $\mathbb{R}^5$.
2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare **iniettiva**. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia l'identità.
3. Sia $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Dimostrare che
$$\dim(\ker(h) \cap \operatorname{Imm}(h)) \leq 2.$$
Trovare un esempio di h per cui valga l'uguaglianza.

Soluzione.

1. Sia $h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ una qualunque applicazione lineare. Allora il teorema fondamentale delle applicazioni lineari dimostra che $\dim \ker h \geq 1$, dunque esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $h(v) = 0$. Ma allora $(f \circ h)(v) = f(0) = 0$, mentre (se $f \circ h$ fosse l'identità) si dovrebbe avere $(f \circ h)(v) = v \neq 0$, assurdo.
2. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e siano $v_1 = f(e_1), \ldots, v_4 = f(e_4)$. Allora $v_1, \ldots, v_4$ sono generatori dell'immagine di f, ma d'altro canto $\dim \operatorname{Imm} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4$, dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che f iniettiva $\Rightarrow$ $\ker f = (0)$. Ne segue che $v_1, \ldots, v_4$ sono linearmente indipendenti; per un teorema visto a lezione, un insieme di vettori linearmente indipendenti $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^5$ può essere completato ad una base $v_1, \ldots, v_5$ di $\mathbb{R}^5$. Usando il fatto ricordato nel suggerimento possiamo quindi definire un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ ponendo $g(v_1) = e_1, \ldots, g(v_4) = e_4$ e $g(v_5) = 0$. Si ha allora $(g \circ f)(e_1) = g(v_1) = e_1, \ldots, (g \circ f)(e_4) = e_4$, ovvero $g \circ f$ coincide con l'identità sui vettori $e_1, \ldots, e_4$, che sono una base di $\mathbb{R}^4$. D'altro canto si è visto a lezione (ed è ricordato nel suggerimento) che un'applicazione lineare è completamente determinata dai valori che assume su una base, quindi il fatto che $g \circ f$ coincida con l'identità su una base implica che $g \circ f$ debba coincidere con l'identità su tutto $\mathbb{R}^4$, che è quanto volevamo dimostrare.
3. Chiaramente abbiamo le due disuguaglianze
$$\dim(\ker(h) \cap \operatorname{Imm}(h)) \leq \dim \ker h \text{ e } \dim(\ker(h) \cap \operatorname{Imm}(h)) \leq \dim \operatorname{Imm}(h),$$
quindi se vale almeno una fra $\dim \ker(h) \leq 2$ e $\dim \operatorname{Imm}(h) \leq 2$ abbiamo finito. D'altro canto il teorema fondamentale delle applicazioni lineari fornisce $\dim \ker(h) + \dim \operatorname{Imm}(h) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, quindi almeno una fra $\dim \ker(h)$ e $\dim \operatorname{Imm}(h)$ non supera 2, e abbiamo concluso.

   Un esempio in cui vale l'uguaglianza è dato per esempio dall'applicazione lineare
$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (x_3, x_4, 0, 0). \end{array}$$
   È allora facile verificare che $\ker h = \operatorname{Imm}(h) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, e quindi in particolare che l'intersezione di questi due sottospazi (che coincide con ognuno di essi) è di dimensione 2.

2.2 Compitino del 14/01/2019

Test.

1. Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare una base di $\ker M$:

   b) Sia $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C}) : MA = AM = 0\}$. Calcolare $\dim V$: ....

   Soluzione.

   a) Si tratta di risolvere il sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x - w = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \\ -3x + y + z + w = 0 \end{cases}$

   Si trova facilmente che le soluzioni sono tutti e soli i vettori con $x = y = z = w$, ovvero $\mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ne segue che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $\ker M$.

   b) La condizione $MA = 0$ implica che ognuna delle colonne di A appartiene al nucleo di M, ovvero ciascuna delle colonne di A è della forma $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Scriviamo allora $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$; la condizione $AM = 0$ implica che le colonne di M stiano tutte nel nucleo di A, e cioè in particolare che

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Osserviamo che la quarta tale equazione (corrispondente alla prima colonna di M) è automatica, in quanto questa colonna è (come già osservato) una combinazione lineare delle altre tre, che corrispondono alle equazioni che abbiamo già imposto. Svolgendo i prodotti matrice-vettore è immediato constatare che le equazioni precedenti forniscono $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, ovvero che A è un multiplo scalare di $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ne segue che $V = \mathrm{Span}\, A_0$, e che in particolare $\dim V = 1$.

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

   a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} =$ ....

   b) $\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \right) =$..............

Soluzione.

a) Come noto, sottrarre un multiplo di una colonna da un'altra non cambia il determinante di una matrice. Consideriamo allora alle seguenti mosse di colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[1],[4]-[1],[5]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[5]-[4],[4]-[3],[3]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quest'ultima matrice, chiamiamola A, è ora facile calcolare il determinante con uno sviluppo di Laplace: espandendo rispetto alla prima riga 3 volte si trova

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

che è quindi anche il determinante della matrice considerata nel testo.

b) Grazie al teorema di Binet ci riconduciamo a calcolare separatamente i determinanti delle matrici $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; la risposta al problema sarà poi $(\det B)^2 \cdot \det(C)$. Per quanto riguarda la matrice B, si può osservare che essa è una matrice di Vandermonde (con basi $0, 1, 2, 3$), dunque il suo determinante è $(1-0)(2-0)(3-0)(2-1)(3-1)(3-2) = 12$. Per quanto riguarda la matrice C, essa è diagonale a blocchi, quindi il suo determinante è uguale a $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; questi determinanti 2×2 sono immediati da calcolare direttamente, e si trova quindi $\det(C) = (-4)(1) = -4$. La risposta al problema è quindi $12^2 \cdot (-4) = -576$.

3. a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice A^{-1}:

b) Determinare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

a) Procediamo con l'algoritmo di eliminazione di Gauss (per righe) sulla matrice ottenuta affiancando alla matrice da invertire la matrice identità 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+3[1],[3]+4[1]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]\mapsto -[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa di A è quindi $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice trovata al punto precedente è esattamente la matrice di cambio base dalla base canonica alla base data dalle colonne di A, quindi è sufficiente calcolare

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

In effetti, $-8 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 21 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e consideriamo l'endomorfismo $\begin{array}{cccc} f: & V & \to & V \\ & p(x) & \mapsto & p(x+1) - p(x) \end{array}$

   a) Scrivere la matrice A di f nella base $1, x, x^2, x^3$:

   b) Scrivere la matrice B di f nella base $x^3 + x^2, 1, 2x^2 + x, x^2 + x$:

   c) Calcolare il polinomio caratteristico della matrice B: ....

   Soluzione.

   a) Si tratta di calcolare $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x+1$ e $f(x^3) = 3x^2+3x+1$ ed esprimere questi risultati nella base assegnata. Questo conduce immediatamente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Come sopra, si tratta di calcolare $f(x^3+x^2) = 3x^2+5x+2$, $f(1) = 0$, $f(2x^2+x) = 4x+3$, $f(x^2 + x) = 2x + 2$ ed esprimere questi vettori nella base assegnata. Siano $p_1(x), \ldots, p_4(x)$ i quattro polinomi che costituiscono la base nella quale stiamo lavorando. Si ottiene

$$3x^2 + 5x + 2 = 2 \cdot (1) - 2(2x^2 + x) + 7(x^2 + x) = 2p_2 - 2p_3 + 7p_4,$$

$$4x + 3 = 3 \cdot (1) - 4(2x^2 + x) + 8(x^2 + x) = 3p_2 - 4p_3 + 8p_4,$$

$$2x + 2 = 4(x^2 + x) - 2(2x^2 + x) + 2 \cdot (1) = 2p_2 - 2p_3 + 4p_4,$$

da cui $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Siccome il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta, possiamo semplicemente calcolare il polinomio caratteristico di A; siccome questa è una matrice triangolare superiore, il suo polinomio caratteristico è semplicemente $(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$, dove $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sono gli elementi diagonali. Nel nostro caso si ha quindi $p_B(t) = p_A(t) = t^4$.

5. Consideriamo il piano affine Π di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare un'equazione cartesiana per Π: ....

   b) Sia r la retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a Π. Determinare le coordinate del punto di intersezione $r \cap \Pi$:

   Soluzione.

   a) Come noto, Π può essere espresso nella forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U$, dove U è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ generato dalle *differenze* di vettori in Π; nel nostro caso, $U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, dove questi vettori sono ottenuti come $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una possibile equazione cartesiana per U è data da

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

   ovvero $2x + 2y - 3z = 0$. Un'equazione cartesiana per Π può quindi essere presa della forma $2x + 2y - 3z = c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è tale che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetti tale equazione. Nel nostro caso è quindi sufficiente scegliere $c = 1$, e una possibile equazione cartesiana per Π è $2x + 2y - 3z = 1$.

   b) La retta perpendicolare a Π passante per l'origine è generata, come discusso a esercitazione, dal vettore dei coefficienti $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. I punti di questa retta sono quindi della forma $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; un tale punto si trova sul piano Π se e solo se $2(2\lambda) + 2(2\lambda) - 3(-3\lambda) = 1$, ovvero se e solo se $\lambda = \dfrac{1}{2^2 + 2^2 + 3^2} = \dfrac{1}{17}$. Il punto di intersezione ha quindi coordinate $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Parte dimostrativa.

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita n, chiamiamo *bandiera di sottospazi* un insieme di sottospazi $E_0, E_1, ..., E_n$ tali che

$$E_0 = \{O\} \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = V$$

a) Fare un esempio di una bandiera E_0, E_1, E_2, E_3 di sottospazi in $\mathbb{R}^3$.

b) Data la bandiera del punto a), fare un esempio di un endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango 2 tale che $T(E_i) \subseteq E_i$ per ogni $i = 0, ..., 3$.

c) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $E_0, E_1, ..., E_n$ una bandiera di sottospazi in V; per ogni $i = 1, \dots, n$ scegliamo inoltre un vettore $v_i \in E_i \setminus E_{i-1}$. Dimostrare che i vettori $v_1, ..., v_n$ formano una base di V.

d) Data una bandiera di sottospazi $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, ..., E_n\}$, sia T un endomorfismo di V tale che $T(E_i) \subseteq E_i$ per ogni $i = 0, ..., n$. Dimostrare che esiste una base di V tale che la matrice $[T]$ rispetto a tale base ha tutti i coefficienti sotto la diagonale uguali a zero.

   Sia $L(V)$ lo spazio vettoriale di tutti gli endomorfismi di V. Calcolare la dimensione del sottospazio di $L(V)$ dato da

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \ \{T \in L(V) : \ T(E_i) \subseteq E_i, \ i = 0, \dots, n\}.$$

e) Date due bandiere $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ e $\mathcal{E}' = \{E_0', E_1', E_2', E_3'\}$ in $\mathbb{R}^3$ tali che

$$E_1 \cap E_2' = \{0\} \quad \text{e} \quad E_2 \cap E_1' = \{0\} \tag{1}$$

   calcolare $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \ \cap \ \mathcal{F}_{\mathcal{E}'})$.

f) Calcolare $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \ \cap \ \mathcal{F}_{\mathcal{E}'})$ anche per bandiere $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ in $\mathbb{R}^3$ che non soddisfano la condizione (1).

Soluzione.

a) Detta e_1, e_2, e_3 la base canonica, possiamo ad esempio considerare $E_0 = \{0\}$, $E_1 = \mathrm{Span}(e_1)$, $E_2 = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$ ed $E_3 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$. Dal momento che e_1, e_2, e_3 sono linearmente indipendenti, i vettori indicati sono in ciascun caso basi dei rispettivi sottospazi (cioè e_1, e_2 è una base di E_2, eccetera), per cui $\dim E_i = i$ per $i = 0, 1, 2, 3$; in particolare, gli E_i sono tutti diversi, e chiaramente sono contenuti uno nell'altro (visto che tutti i generatori di E_i compaiono fra i generatori di E_{i+1}).

b) Consideriamo l'endomorfismo T la cui matrice in base canonica sia $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha allora $Te_1 = 0$, $Te_2 = e_1$, $Te_3 = e_2$, da cui $T(E_1) = T(\mathrm{Span}(e_1)) = \mathrm{Span}(T(e_1)) = \mathrm{Span}(0) \subseteq E_1$, $T(E_2) = T(\mathrm{Span}(e_1, e_2)) = \mathrm{Span}(T(e_1), T(e_2)) = \mathrm{Span}(0, e_1) = E_1 \subseteq E_2$, ed infine certamente $T(E_3)$ è contenuto in $E_3 = \mathbb{R}^3$. La forma della matrice rende poi immediato verificare che il rango di T è 2, e quindi T ha tutte le proprietà richieste.

c) Procediamo per induzione sulla dimensione n. Nel caso $n = 1$, stiamo scegliendo $v_1 \in E_1 \setminus E_0 = E_1 \setminus \{0\}$, ovvero un vettore non nullo. È chiaro che un singolo vettore non nullo forma una famiglia linearmente indipendente, e siccome lo spazio V ha dimensione 1 per ipotesi questo vettore v_1 è una base di V. Supponiamo ora di aver dimostrato la tesi per un certo n e verifichiamola per $n + 1$. Per definizione, $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_n$ è una bandiera nello spazio vettoriale E_n, dunque per ipotesi induttiva sappiamo che $v_1, \dots, v_n$ è una base di E_n. A questo insieme aggiungiamo il vettore $v_{n+1} \in E_{n+1} \setminus E_n$; verifichiamo che l'insieme così ottenuto sia una base. Dal momento che questo insieme è costituito da $n + 1$ elementi in uno spazio di dimensione $n + 1$ è sufficiente vedere che si tratta di un insieme di generatori. Osserviamo che $\mathrm{Span}\,(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ contiene $\mathrm{Span}\,(v_1, \dots, v_n) = E_n$, e d'altro canto il contenimento è stretto, perché $v_{n+1} \notin E_n$. Ne segue che $\dim \mathrm{Span}\,(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) >$

$\dim \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n) = n$, dunque $\dim \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) = n + 1$ (non può essere più grande perché l'intero spazio V ha dimensione $n + 1$), e quindi l'inclusione

$$\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) \subseteq V$$

deve essere un'uguaglianza (perché i due spazi hanno la stessa dimensione). Ne segue che i vettori $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ generano V, e siccome sono tanti quanti la dimensione di V ne costituiscono una base, come voluto.

Osserviamo inoltre che per $j > 0$ i sottospazi $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_j$ formano una bandiera nello spazio vettoriale E_j, e dunque quello che abbiamo dimostrato implica che $v_1, \ldots, v_j$ è una base di E_j.

d) Dimostreremo un'affermazione più forte, ovvero che per *ogni* tale endomorfismo T la matrice di T è triangolare superiore rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ costruita al punto precedente. Per definizione di base associata ad un endomorfismo rispetto ad una base, sappiamo che, scrivendo i vettori $T(v_j)$ come combinazioni lineari $\lambda_{1j}v_1 + \ldots + \lambda_{nj}v_n$, i coefficienti della matrice $[T]$ sono proprio i λ_{ij}. Dobbiamo quindi mostrare che, per $j = 1, \ldots, n-1$, se scriviamo

$$T(v_j) = \lambda_{1j}v_1 + \ldots + \lambda_{nj}v_n \tag{2}$$

si ha $\lambda_{ij} = 0$ se $i > j$. Ma questo è chiaro: infatti $T(v_j) \in T(E_j) \subseteq E_j$, e abbiamo dimostrato al punto precedente che i vettori $v_1, \ldots, v_j$ formano una base di E_j. Questo significa che $T(v_j)$ si scrive come combinazione dei vettori $v_1, \ldots, v_j$, e in particolare *senza* coinvolgere i vettori $v_{j+1}, \ldots, v_n$: quindi nell'equazione (2) i coefficienti di $v_{j+1}, \ldots, v_n$ sono uguali a 0, che è quanto volevamo dimostrare.

Sia quindi $\Phi : L(V) \to \operatorname{Mat}_{n\times n}(K)$ l'isomorfismo che associa ad un endomorfismo la sua matrice rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Per quanto visto prima, $\Phi(\mathcal{F}_\mathcal{E})$ è contenuto nel sottospazio delle matrici triangolari superiori. Viceversa, ad ogni matrice triangolare superiore corrisponde un endomorfismo in $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ (si tratta semplicemente di osservare che le implicazioni della dimostrazione precedente sono tutte invertibili, ovvero tutte le condizioni che abbiamo considerato sono necessarie e sufficienti), dunque Φ determina un isomorfismo fra $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ e il sottospazio delle matrici triangolari superiori. Dal momento che una matrice $n \times n$ ha $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ coefficienti sulla diagonale o sopra, questa è la dimensione del sottospazio delle matrici triangolari, e quindi anche la dimensione di $\mathcal{F}_\mathcal{E}$.

e) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $T(E_i) \subseteq E_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ e $T(E'_i) \subseteq E'_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$. Osserviamo che la formula di Grassmann implica

$$3 \geq \dim(E_2 + E'_2) = \dim(E_2) + \dim(E'_2) - \dim(E_2 \cap E'_2) = 4 - \dim(E_2 \cap E'_2)$$

e quindi $\dim(E_2 \cap E'_2) \geq 1$. Se si avesse $\dim(E_2 \cap E'_2) = 2$ allora si avrebbe anche $E_2 = E'_2$ (perché entrambi questi spazi sono di dimensione 2), e quindi $E_1 \cap E'_2 = E_1 \cap E_2$ sarebbe uguale ad E_1, assurdo perché per ipotesi $E_1 \cap E'_2 = \{0\}$. Dunque $E_2 \cap E'_2$ è di dimensione 1, generato da un vettore che chiamiamo w_2. Si ha

$$T(w_2) \in T(E_2 \cap E'_2) \subseteq T(E_2) \cap T(E'_2) \subseteq E_2 \cap E'_2 = \operatorname{Span}(w_2).$$

Siano ora w_1 un generatore di E_1 e w_3 un generatore di E'_1. Mostreremo che

1. w_1, w_2, w_3 è una base di $\mathbb{R}^3$;
2. la matrice di T rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ è diagonale;
3. viceversa, un endomorfismo la cui matrice rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia diagonale appartiene a $\mathcal{F}_\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$.

Dimostriamo queste affermazioni:

1. Ci appoggiamo sul criterio del punto c). Verifichiamo che esso si può applicare: in effetti per costruzione w_1 appartiene a $E_1 \setminus E_0$, il vettore w_2 appartiene a E_2 ma non a E_1 (in effetti, se w_2 stesse in E_1, allora – siccome per definizione w_2 appartiene a E_2' – si avrebbe $w_2 \in E_1 \cap E_2' = \{0\}$, assurdo perché $w_2 \neq 0$), e il vettore w_3 appartiene a $E_3 = \mathbb{R}^3$ ma non a E_2 (in caso contrario, siccome $w_3 \in E_1'$ per definizione, si avrebbe $w_3 \in E_2 \cap E_1' = \{0\}$, assurdo).
2. Si ha $T(w_1) \in T(\operatorname{Span} w_1) = T(E_1) \subseteq E_1 = \operatorname{Span} w_1$, quindi $T(w_1) = \lambda_1 w_1$ per un certo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Similmente,
$$T(w_2) \in T(E_2 \cap E_2') \subseteq T(E_2) \cap T(E_2') \subseteq E_2 \cap E_2' = \operatorname{Span}(w_2)$$
e quindi $T(w_2) = \lambda_2 w_2$ per qualche $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Infine, $T(w_3) \in T(E_1') \subseteq E_1' = \operatorname{Span}(w_3)$ e quindi $T(w_3) = \lambda_3 w_3$ per qualche $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Ne segue che la matrice di T in base $\{w_1, w_2, w_3\}$ è $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$, ed in particolare è diagonale.
3. Sia T un endomorfismo la cui matrice in base $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia diagonale. Verifichiamo ad esempio che $T(E_2) \subseteq E_2$: le altre verifiche sono del tutto analoghe. Si ha in effetti $T(E_2) = T(\operatorname{Span}\{w_1, w_2\}) = \operatorname{Span}\{T(w_1), T(w_2)\} = \operatorname{Span}\{\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2\} \subseteq \operatorname{Span}\{w_1, w_2\} = E_2$.

Possiamo ora rispondere alla domanda del testo: l'isomorfismo Φ sopra introdotto fornisce un isomorfismo fra $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$ e il sottospazio delle matrici diagonali, che ha chiaramente dimensione 3. Ne segue $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) = 3$.

f) Chiaramente la risposta può dipendere dalla scelta delle bandiere: mostreremo che $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'})$ può assumere precisamente i valori 3, 4, 5, 6. Dimostriamo innanzitutto che non ci sono altre possibilità; in seguito faremo vedere che queste quattro possono effettivamente realizzarsi.

Per il punto d) abbiamo $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}}) = \dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}}) = 3(3+1)/2 = 6$, e la formula di Grassmann fornisce
$$\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) = \dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}}) + \dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) - \dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} + \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) = 12 - \dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} + \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}),$$
dove $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} + \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$ ha dimensione compresa fra 6 e 9: il limite inferiore segue dal fatto che questo spazio contiene $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ (di dimensione 6, come già dimostrato), quello superiore dal fatto che è contenuto in $L(\mathbb{R}^3) \cong \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, di dimensione 9. Ne segue che $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) \in \{3, 4, 5, 6\}$ come affermato. Consideriamo ora le quattro possibilità; in tutti gli esempi, $\mathcal{E}$ sarà scelta essere la bandiera 'standard' data da $E_0 = \{0\}, E_1 = \operatorname{Span}(e_1), E_2 = \operatorname{Span}(e_1, e_2), E_3 = \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3)$, e varieremo soltanto $\mathcal{E}'$.

1. dimensione 6: chiaramente è sufficiente scegliere $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$, perché in tal caso $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'} = \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$.
2. dimensione 3: basta far vedere che esistono due bandiere $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ che rispettano l'ipotesi del punto e). Un esempio è dato dalla bandiera $\mathcal{E}'$ definita da $E_1' = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2' = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. La verifica che queste bandiere rispettino l'ipotesi del punto e) è immediata e lasciata come esercizio.
3. dimensione 5: scegliamo $E_1' = \operatorname{Span}(e_2)$ e $E_2' = E_2$. Un endomorfismo T in $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$ soddisfa $T(E_1) \subseteq E_1$ (quindi la prima colonna della matrice $[T]$ di T in base canonica è del tipo $\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{pmatrix}$), $T(E_1') \subseteq E_1'$ (quindi la *seconda* colonna di $[T]$ è del tipo $\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\end{pmatrix}$), e

una volta che soddisfa queste condizioni soddisfa anche automaticamente $T(E_2) \subseteq E_2$ e quindi $T(E_2') = T(E_2) \subseteq E_2 = E_2'$. È allora immediato verificare che $\mathcal{F}_\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$ è isomorfo (tramite l'isomorfismo che associa ad un endomorfismo la sua matrice in base canonica) al sottospazio delle matrici 3×3 della forma $\begin{pmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$, che – avendo 5 coefficienti liberi – è di dimensione 5.

4. dimensione 4: questo è il caso più delicato. Scegliamo $\mathcal{E}'$ data da $E_1' = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Il punto cruciale di questa scelta è che $E_1 \neq E_1'$, $E_2 \neq E_2'$, ma $E_2 \cap E_2' = E_1$. Prendiamo ora un endomorfismo in $\mathcal{F}_\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$: come prima, il fatto che $T \in \mathcal{F}_\mathcal{E}$ implica che la matrice $[T]$ di T rispetto alla base canonica sia triangolare superiore. Scriviamola nella forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. Allora la condizione $T(E_1') \subseteq E_1'$ si traduce nel fatto che $[T]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia un multiplo scalare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero che il vettore $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e \\ f \end{pmatrix}$ abbia tutti i coefficienti uguali. Questo fornisce le equazioni $f = d+e = a+b+c$. Inoltre, osservando che $E_2' = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$, la condizione $T(E_2') \subseteq E_2'$ si traduce nel fatto che il vettore $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ d+e \\ f \end{pmatrix}$ verifichi $f = d+e$, condizione che abbiamo già imposto. Ne segue che $\mathcal{F}_\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}$ si identifica (tramite l'isomorfismo che associa ad un endomorfismo la sua matrice in base canonica) al sottospazio

$$W = \left\{\begin{pmatrix} a & b & (a+b)-(d+e) \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & d+e \end{pmatrix} \mid a,b,d,e \in \mathbb{R}\right\}$$

delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Siccome è chiaro che $\dim W = 4$, si ha anche $\dim(\mathcal{F}_\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{E}'}) = 4$ come voluto.

2.3 Compitino del 04/03/2019

Test.

1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.

   a) Determinare una base di W:

   b) Determinare una base di W ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$. *Si consiglia di verificare che i vettori trovati rispettino le equazioni che definiscono W.*

   c) Sia Q la proiezione ortogonale del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W. Scrivere qui le coordinate di Q (in base canonica): ....

Soluzione. a) Il sistema si può naturalmente risolvere in molti modi diversi. Uno è quello di sfruttare l'eliminazione di Gauss: la matrice del sistema è $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Una mossa di eliminazione di Gauss per righe (che non cambia il nucleo della matrice, ovvero l'insieme delle soluzioni del sistema) conduce alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

si noti che si è sommato il doppio della prima riga alla seconda. Questa matrice corrisponde al nuovo sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

vista la forma ridotta a scala della matrice, una base dello spazio delle soluzioni di questo sistema può essere trovata assegnando valori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ alle variabili libere x_3, x_4 e deducendo i corrispondenti valori di x_2, x_1. Si ottengono allora i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che costituiscono quindi una base di W.

b) Visto che il prodotto scalare standard è definito positivo possiamo applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt: una base ortogonale w_1, w_2 di W è data da v_1 e $v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$. Svolgendo il calcolo, si trova che il secondo vettore è uguale a

$$v_2 - \frac{1}{6} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 4/3 \\ -1/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Il fattore di $1/6$ è irrilevante ai fini dell'ortogonalità, quindi possiamo prendere come base ortogonale di W la base

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Data una base ortogonale w_1, w_2 di W, la proiezione di $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ su W è data da

$$Q = \frac{\langle P, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle P, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{6}{6} w_1 + \frac{0}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare se esistano vettori non nulli v tali che $\varphi(v, v) = 0$. In caso affermativo dare un esempio, in caso negativo barrare la corrispondente casella:

   ☐ Un tale v esiste, ad esempio: .... ☐ Non esistono tali v.

   b) Il prodotto φ è definito positivo? ☐ Sì ☐ No

c) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

d) Sia W l'ortogonale della retta Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a φ. Determinare equazioni cartesiane per W:

Soluzione. a) Detto e_1 il primo vettore della base canonica, il prodotto scalare $\varphi(e_1, e_1)$ è uguale al coefficiente in alto a sinistra della matrice del testo, dunque a 0. Il vettore e_1 è dunque un esempio di vettore non nullo che rispetta $\varphi(v, v) = 0$.

b) Il vettore v trovato al punto precedente contraddice la proprietà di essere definito positivo: in effetti, se φ fosse definito positivo si avrebbe $\varphi(w, w) = 0$ soltanto per $w = 0$, mentre abbiamo trovato un vettore *diverso da zero* che rispetta questa uguaglianza. Dunque φ non è definito positivo.

c) Un calcolo semplice (ad esempio utilizzando la regola di Sarrus) mostra che la matrice di φ ha determinante diverso da 0 e dunque è invertibile. Come visto a lezione, questo implica che φ è non degenere, ovvero che $n_0 = 0$. D'altro canto, la restrizione di φ al sottospazio generato da e_2, e_3 (il secondo e terzo vettore della base canonica) ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dal momento che questa matrice ha determinante positivo ed entrambi i coefficienti diagonali positivi, dalla casistica vista in classe segue che questa restrizione è definita positiva. Abbiamo quindi trovato un sottospazio di dimensione 2 sul quale la restrizione di φ è definita positiva: ne segue che l'indice di positività è almeno 2 (perché l'indice di positività si caratterizza anche come la massima dimensione di un sottospazio su cui la restrizione del prodotto scalare sia definita positiva). D'altro canto non si può avere $n_+ = 3$, altrimenti il prodotto scalare sarebbe definito positivo, cosa che sappiamo non essere. Si deve quindi avere $n_+ = 2$ e $n_- = 1$.

Osserviamo che la medesima conclusione poteva anche essere ottenuta considerando il sottospazio generato dai primi due vettori della base canonica: la restrizione di φ a tale sottospazio ha per matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, che ha determinante negativo. Sempre per la casistica vista in classe, ne segue che questa restrizione ha segnatura $(1, 1, 0)$, e quindi l'indice di negatività di φ è almeno 1.

d) Per definizione del prodotto scalare associato ad una matrice, un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (e quindi a tutta la retta generata da questo vettore) se e solo se

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero se e solo se

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y + 6z = 0.$$

Quest'ultima equazione è dunque una equazione cartesiana per W.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori di A (con le relative molteplicità algebriche); riempire tante righe quante necessario:

Autovalore	Molteplicità algebrica

b) Si scelga uno degli autovalori di A e si determini una base del corrispondente autospazio:

Autovalore scelto: .... Base di V_λ:

c) La matrice A è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

Soluzione.

a) Come noto dalla teoria, si tratta di calcolare le radici del polinomio caratteristico di A. Abbiamo

$$p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t-7 & -8 & -8 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 4 & 8 & t+5 \end{pmatrix},$$

e sviluppando rispetto alla seconda riga otteniamo $p_A(t) = (t-3)\left((t-7)(t+5)+32\right) = (t-3)(t^2-2t-3) = (t-3)(t-3)(t+1)$. Gli autovalori di A sono dunque 3, di molteplicità algebrica 2, e -1, di molteplicità algebrica 1.

b) La risposta a questa domanda dipende ovviamente dall'autovalore scelto.

$\boxed{\lambda = 3}$ Si tratta allora di calcolare una base di

$$\ker(A - 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

La matrice è chiaramente di rango 1 (tutte le sue righe sono proporzionali alla prima) e dunque il nucleo è di rango 2. Si tratta ora di calcolare una base di tale nucleo, cosa che si può fare (ad esempio) imponendo liberamente i valori di y, z e ricavando il corrispondente valore di x. Scegliendo $(y, z) = (1, 0)$ e $(0, 1)$ si trova ad esempio la base $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che è quindi una base dell'autospazio corrispondente a $\lambda = 3$.

$\boxed{\lambda = -1}$ Si tratta allora di calcolare una base di

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare tale nucleo dobbiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 8x + 8y + 8z = 0 \\ 4y = 0 \\ -4x - 8y - 4z = 0, \end{cases}$$

che – si vede facilmente – ha come soluzioni $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Questo vettore è dunque una base dell'autospazio corrispondente a -1.

c) Le verifiche del punto precedente ci dicono che la molteplicità geometrica di -1 è pari ad 1 (cosa che era chiara dalla teoria, per via delle disuguaglianze $1 \le m_{\mathrm{geo}}(-1) \le m_{\mathrm{alg}}(-1) = 1$) e che la molteplicità geometrica di 2 è pari a 2. Si ottiene quindi che le molteplicità geometriche ed algebriche coincidono per ogni autovalore, e quindi la matrice A è diagonalizzabile.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base di V.

a) Consideriamo l'applicazione lineare $d : V \to V$ data dalla derivata (cioè $d(p(x)) = p'(x)$). Scrivere la matrice di d in base $\mathcal{B}$:

b) Determinare il polinomio caratteristico di d: ....

c) L'applicazione lineare d è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

d) Consideriamo il funzionale lineare $\psi : V \to \mathbb{R}$ dato da $p(x) \mapsto p(1) + p(-1)$. Determinare le coordinate di ψ rispetto alla base di V^* duale rispetto a $\mathcal{B}$.

Soluzione. a) Le derivate dei polinomi di base sono $\{0, 1, 2x, 3x^2\}$. Si tratta ora semplicemente di scrivere le coordinate di questi quattro polinomi nella base $\mathcal{B}$, e queste saranno le colonne della matrice di d in tale base. Si ottiene immediatamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Il polinomi caratteristico può essere calcolato a partire dalla matrice scritta in una base qualunque; usando la matrice del punto precedente (che è triangolare superiore) si trova immediatamente che il polinomio caratteristico di d è

$$\det(t\,\mathrm{Id} - d) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -2 & 0 \\ 0 & 0 & t & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} = t^4.$$

c) L'unico autovalore di d, ovvero l'unica radice del polinomio t^4, è 0 (che ha quindi molteplicità algebrica 4). Tuttavia la molteplicità geometrica di 0 in quanto autovalore di d è pari a $\dim\ker d = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$: siccome molteplicità algebrica e geometrica sono diverse, ne segue che d non è diagonalizzabile.

d) Come visto durante il corso, la base duale di $\{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$\left\{ \delta, \frac{d}{dx}|_0, \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}|_0, \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}|_0 \right\}$$

dove δ (la δ di Dirac) è il funzionale lineare $p(x) \mapsto p(0)$, mentre gli altri tre funzionali calcolano rispettivamente il valore della derivata prima, seconda, e terza di $p(x)$ in $x = 0$. Tenendo conto che il vettore $a + bx + cx^2 + dx^3 \in V$ ha coordinate $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$, il funzionale lineare ψ è dato in coordinate da

$$\psi : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ c \end{pmatrix} \mapsto (a + b + c + d) + (a - b + c - d) = 2a + 2c;$$

si osservi che il polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ soddisfa $p(1) = a + b + c + d$ e $p(-1) = a - b + c - d$.

In altri termini, il funzionale ψ, valutato su un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, prende coma valore il doppio della somma della prima e terza coordinata. Siccome il primo e terzo vettore della base duale sono i funzionali lineari che su $p(x)$ prendono come valore la prima (rispettivamente terza) coordinata in base $\mathcal{B}$, si ha

$$\left(2\delta + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}|_0\right)(a + bx + cx^2 + dx^3) = 2a + 2c.$$

Ne segue che $\psi = 2\delta + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}|_0$, e le sue coordinate rispetto alla base duale sono quindi $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Parte dimostrativa.

Sia K un campo qualsiasi. Consideriamo una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_{4\times 4}(K)$ che sia diagonale a blocchi, ovvero della forma $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, dove B, C e 0 indicano matrici 2×2.

1. Dimostrare che se A è diagonalizzabile allora anche B e C (considerate come matrici 2×2) lo sono.
2. Dimostrare che se B, C sono diagonalizzabili (considerate come matrici 2×2) allora anche A lo è.
3. Sia ora $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(K)$ una matrice diagonale e sia $B \in \mathrm{M}_{3\times 3}(K)$ una matrice qualsiasi. Supponiamo che gli autovalori di A siano tutti distinti e che $AB = BA$. Dimostrare che allora B è diagonale.
4. Supponiamo ora che A sia una matrice 3×3 diagonalizzabile (ma non necessariamente diagonale) con tutti gli autovalori distinti. Sia B una matrice 3×3 tale che $AB = BA$. Dimostrare che B è diagonalizzabile.

Soluzione.

Denotiamo come sempre $e_1, \dots, e_4$ i 4 vettori della base canonica di K^4.

1. Dalla forma della matrice A è chiaro che i sottospazi W_1, W_2 di K^4 dati da $W_1 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ e $W_2 = \mathrm{Span}\{e_3, e_4\}$ sono invarianti per l'azione di A. Inoltre, la restrizione di A a $W_1 \cong K^2$ ha come matrice (nella ovvia base e_1, e_2) proprio B, e la restrizione di A a W_2 ha come matrice (nella base e_3, e_4) proprio C. Si è visto a lezione che la restrizione di un'applicazione diagonalizzabile ad un sottospazio invariante è a sua volta diagonalizzabile: segue immediatamente che B, C sono diagonalizzabili.
2. Per ipotesi esistono vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in K^2$ tali che:
   (a) v_1, v_2 sia una base di K^2 costituita da autovettori di B; siano λ_1, λ_2 gli autovalori di B corrispondenti a v_1, v_2.
   (b) v_3, v_4 sia una base di K^2 costituita da autovettori di C; siano λ_3, λ_4 gli autovalori di C corrispondenti a v_1, v_2.

   Scriviamo $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} z_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} z_4 \\ w_4 \end{pmatrix}$. Consideriamo i 4 vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \\ w_3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_4 \\ w_4 \end{pmatrix}.$$

Un facile calcolo diretto mostra che ognuno degli u_i è un autovettore di A: per esempio,

$$Au_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1$$

e similmente per gli altri. D'altro canto per ipotesi u_1, u_2 sono linearmente indipendenti (perché v_1, v_2 lo sono) e appartengono a W_1, quindi u_1, u_2 è una base di W_1 (si osservi che W_1 è di dimensione 2). Allo stesso modo u_3, u_4 è una base di W_2, e siccome $K^4 = W_1 \oplus W_2$ (evidente) si ha che u_1, u_2, u_3, u_4 è una base di K^4. Abbiamo dunque trovato una base di K^4 costituita da autovettori di A, il che è equivalente a dire che A è diagonalizzabile.

3. Gli autospazi della matrice A sono per ipotesi 1-dimensionali perché tutti i suoi autovalori sono distinti (e quindi di molteplicità sia geometrica che algebrica 1). Sia $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

   Siccome A e B commutano, B preserva gli autospazi di A, e dunque $B(\mathrm{Span}(e_i)) \subseteq \mathrm{Span}(e_i)$, che implica in particolare $B(v_i) \in \mathrm{Span}(e_i)$, ovvero che esistono scalari μ_i tali che $Be_i = \mu_i e_i$. Ma questo dice esattamente che la matrice di B è diagonale.

   Forniamo anche una dimostrazione diretta di questa affermazione. Sia come sopra $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ e scriviamo $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. Calcoliamo AB e BA:

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \lambda_1 b_{13} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_3 b_{31} & \lambda_3 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}.$$

   Queste due matrici devono essere uguali; confrontando i coefficienti in posizione (i, j) di AB e BA troviamo l'equazione

$$\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij},$$

   che, se $i \neq j$ implica

$$(\lambda_i - \lambda_j) b_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} = 0,$$

   dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che $\lambda_i \neq \lambda_j$ per ipotesi. Questo mostra che se $i \neq j$ il coefficiente b_{ij} è nullo, e dunque che B è diagonale.

4. La prima dimostrazione data al punto precedente può essere facilmente adattata per dimostrare anche questo punto.

   Alternativamente, l'affermazione voluta segue immediatamente da quella del punto precedente. In effetti, sia P una matrice invertibile tale che $P^{-1}AP = D$ sia una matrice diagonale (una tale matrice P esiste per ipotesi, perché la sua esistenza è equivalente al fatto che A sia diagonalizzabile). Scriviamo $P^{-1}BP = E$. Allora da un lato D è una matrice diagonale 3×3 con tutti gli autovalori distinti (gli autovalori non dipendono dalla base), e dall'altra

$$DE = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}(BA)P = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) = ED,$$

   quindi D, E commutano. Il punto precedente implica che E è diagonale, e quindi che B è diagonalizzabile (in particolare, viene diagonalizzata da qualunque base che diagonalizza A).

2.4 Compitino del 01/04/2019

Test.

1. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori di A: ....

b) Determinare la traccia di A^4: ....

c) Scrivere una matrice triangolare superiore T simile ad A:

Soluzioni.

a) Gli autovalori possono essere determinati tramite il calcolo del polinomio caratteristico: si ha

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+3 & 6 & -7 \\ -2 & t-5 & 5 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} &= (t-1)\det \begin{pmatrix} t+3 & 6 \\ -2 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-1)((t+3)(t-5)+12) = (t-1)(t^2-2t-3) \\ &= (t-1)(t+1)(t-3). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi 1, -1 e 3.

b) La traccia di A^4 è la somma degli autovalori di A^4, che sono le quarte potenze degli autovalori di A. Si ha quindi $\operatorname{tr} A^4 = 1^4 + (-1)^4 + 3^4 = 83$.

c) Dal momento che gli autovalori di A sono tutti di molteplicità 1, essa è diagonalizzabile, e quindi è simile alla matrice diagonale (e quindi in particolare triangolare superiore)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Sia $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$. Determinare matrici P e D, con $P^t = P^{-1}$ e D diagonale, tali che $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$D =$ $\qquad\qquad$ $P =$

Soluzione.

Cominciamo a determinare gli autovalori di B. Il polinomio caratteristico di B è $p_B(t) = t^2 - 16t + 39$, le cui radici sono $8 \pm \sqrt{25} = 3, 13$. I corrispondenti autospazi sono $\ker(B - 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\ker(B - 13\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Potremo quindi prendere $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ (la matrice diagonale i cui coefficienti diagonali sono gli autovalori di B), e come P la matrice che ha per colonne autovettori di B, normalizzati in modo da avere norma 1 (rispetto al prodotto scalare standard): nel nostro caso, $P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Si osservi che l'ordine degli autovalori in D corrisponde all'ordine degli autovettori in P.

3. Consideriamo la matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & x \\ -2 & -2 & y \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix}$

a) Determinare le due terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ per cui la matrice M è ortogonale: ....

b) Si identifichi quale di queste due terne corrisponde ad una matrice M di determinante uguale a 1, e dunque ad una *rotazione*. Scrivere qui la terna: ....

c) Per la matrice identificata al punto precedente si determini un vettore v che genera l'asse di rotazione. Scrivere le coordinate di v:

Soluzione.

a) Come noto, le colonne di una matrice ortogonale 3×3 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. In particolare, si deve avere

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $2x + 2y + z = x - 2y + 2z = 0$. È facile vedere che le soluzioni di questo sistema sono date da Span $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Finora abbiamo solo sfruttato la condizione di ortogonalità; dobbiamo ancora imporre che la terza colonna sia di norma 1. Si deve quindi avere

$$\left\| \lambda \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot (2^2 + (-1)^2 + (-2)^2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Le due terne cercate sono quindi $(2, -1, -2)$ e $(-2, 1, 2)$.

b) Una trasformazione ortogonale è una rotazione se e solo se il suo determinante è positivo. Si tratta quindi di calcolare il determinante di

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

si osservi che il fattore $\frac{1}{3}$ non cambia il segno del determinante. Questo determinante è facile da calcolare: si ha

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -8 + 1 - 8 - 4 - 4 - 4 = -27,$$

quindi la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ non rappresenta una rotazione.

La matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante opposto alla precedente (in effetti esattamente una colonna cambia segno rispetto alla precedente), e quindi rappresenta una rotazione.

c) Si tratta di determinare l'autospazio corrispondente all'autovalore 1 della matrice trovata al punto precedente. Più precisamente, stiamo considerando la matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, dunque si tratta di calcolare

$$\ker(M - \mathrm{Id}) = \ker \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Questo vettore, o un suo qualunque multiplo non nullo, è un generatore dell'asse di rotazione.

4. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

b) Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sia T^* il suo aggiunto rispetto a φ. Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: ....

c) Sia ora ψ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è M^2. Determinare la segnatura di ψ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

Soluzione.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice data: si ha

$$\begin{aligned} p(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-1 & -3 \\ 0 & -3 & t-1 \end{pmatrix} &= (t-1)^3 - (t-1)(-3)(-3) - (t-1)(-2)(-2) \\ = (t-1)^3 - 13(t-1) &= (t-1)(t^2 - 2t + 1 - 13) = (t-1)(t^2 - 2t - 12) \end{aligned}$$

Le radici di questo polinomio (ovvero gli autovalori della matrice data) sono 1 e $1 \pm \sqrt{13}$, dunque sono due positive e una negativa. Segue da un teorema visto a lezione che la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

In alternativa è anche possibile osservare che la restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dunque ha segnatura $(2, 0, 0)$, mentre la restrizione a $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ è rappresentata da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, che ha determinante negativo e quindi segnatura $(1, 1, 0)$. Ne segue facilmente che la segnatura di φ è $(2, 1, 0)$: in effetti l'indice di positività è almeno 2 perché abbiamo trovato un sottospazio di dimensione 2 sul quale la restrizione di φ è definita positiva; similmente, l'indice di negatività è almeno 1 perché abbiamo trovato – seppur non esplicitamente – un sottospazio di dimensione 1 su cui la restrizione di φ è definita negativa. Siccome $n_+ + n_- + n_0 = 3$, l'unica possibilità è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$ come già trovato sopra.

b) Per definizione di aggiunto si ha

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

e quindi basta calcolare

$$\begin{aligned} \varphi\left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= (1, 2, 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, 2, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5. \end{aligned}$$

c) Gli autovalori di M^2 sono i quadrati degli autovalori di M, dunque sono (strettamente) positivi. Ne segue che ψ è definito positivo.

5. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni matrice $M \in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ i cui unici autovalori sono 0 e 1:

a) M è diagonalizzabile	☐ Vero	☐ Falso
b) L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica uguale alla traccia di M	☐ Vero	☐ Falso
c) Si ha $M^5 \cdot (M - \mathrm{Id})^5 = 0$	☐ Vero	☐ Falso
d) $M^2 = M$ se e solo se M è diagonalizzabile	☐ Vero	☐ Falso

Soluzione. a) L'affermazione è falsa per esempio per la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti data la forma triangolare è immediato vedere che il polinomio caratteristico è $(t-1)^2t^3$, dunque gli unici autovalori sono in effetti 0 e 1; tuttavia la molteplicità algebrica algebrica di 0, uguale a 3, è strettamente maggiore della sua molteplicità geometrica (in effetti $\dim\ker M = 1$).

b) L'affermazione è vera: se chiamiamo a_0 e a_1 le molteplicità algebriche degli autovalori 0 e 1, allora la traccia (che è la somma degli autovalori) è uguale a

$$\operatorname{tr} M = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{a_0 \text{ volte}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{a_1 \text{ volte}} = a_1.$$

c) L'affermazione è vera e segue dal teorema di Cayley-Hamilton. In effetti il polinomio caratteristico di M sarà della forma $p_M(t) = t^{a_0}(t-1)^{a_1}$ con $a_0 \leq 5$ e $a_1 \leq 5$; in particolare, si nota immediatamente che $p_M(t)$ divide $q(t) = t^5(t-1)^5$. D'altro canto il teorema di Cayley-Hamilton garantisce che $p_M(M) = 0$, da cui segue che $q(M) = 0$: in effetti possiamo scrivere $q(t) = p_M(t)r(t)$ per un certo polinomio $r(t)$, e quindi $q(M) = p_M(M)r(M) = 0 \cdot r(M) = 0$.

d) L'affermazione è vera. È noto che una matrice è diagonalizzabile se e soltanto se il suo polinomio minimo non ha radici doppie. Sia $m(t)$ il polinomio $t^2 - t$. Allora se $M^2 = M$ si ha $m(M) = 0$, e siccome il polinomio $t^2 - t$ non ha radici doppie si ottiene che nemmeno il polinomio minimo di M (che divide $m(t)$, perché $m(M) = 0$) può avere radici doppie, quindi M è diagonalizzabile. Viceversa, se M è diagonalizzabile, allora M è simile alla matrice $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$ dove ogni λ_i è 0 oppure 1, e quindi in particolare soddisfa $\lambda_i^2 = \lambda_i$. In questa base è chiaro che $N^2 = N$, e siccome questa affermazione non dipende dalla base si ha anche $M^2 = M$ (più esplicitamente: si ha $N = P^{-1}MP$ per una certa matrice di cambio base P. Ma allora $P^{-1}MP = N = N^2 = P^{-1}M^2P$, da cui $M = M^2$).

Parte dimostrativa.

Sia X la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In questo esercizio tutte le matrici considerate sono a coefficienti reali.

1. Trovare un esempio esplicito di una matrice B con $B^2 = X$.
2. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^2 = X$. Dimostrare che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t^3$.
3. Dimostrare che non esiste alcuna matrice A **simmetrica** tale che $A^2 = X$.

D'ora in poi consideriamo una matrice A tale che $A^2 = X$.

4. Dimostrare che $A^3 = 0$.
5. Dedurre che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di A.
6. Dimostrare che $\ker A = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

Denotiamo come sempre $e_1, \dots, e_3$ i 3 vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Si può per esempio prendere $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Osserviamo preliminarmente che il polinomio caratteristico di X è $p_X(t) = t^3$ (questo si può vedere con un facile calcolo diretto, oppure semplicemente osservando che X è triangolare superiore), dunque l'unico autovalore di X è 0, di molteplicità algebrica 3.

   D'altro canto, gli autovalori di $X = A^2$ sono i quadrati degli autovalori di A, dunque se λ è un autovalore di A (eventualmente complesso) si deve avere $\lambda^2 = 0$, ovvero $\lambda = 0$. Ne segue che l'unico autovalore (complesso) di A è $\lambda = 0$, e quindi anche il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t^3$.
3. *Soluzione 1.* Si verifica facilmente che se A è simmetrica anche A^2 è simmetrica. Ma X non è simmetrica, e dunque l'equazione $A^2 = X$ non può avere soluzioni.

   Soluzione 2. Se A è simmetrica allora è diagonalizzabile per il teorema spettrale. Dal punto precedente sappiamo che l'unico autovalore di A è zero, quindi (in una opportuna base diagonalizzante) l'applicazione lineare rappresentata da A si esprime tramite la matrice diagonale che sulla diagonale ha gli autovalori, ovvero la matrice nulla. Ma questo vuol dire che A stessa è la matrice nulla, assurdo perché $A^2 = X$ è diversa da 0.
4. Segue dal punto 2 e dal teorema di Cayley-Hamilton: abbiamo già dimostrato che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t^3$, e il teorema di Cayley-Hamilton assicura che $p_A(A) = 0$. Per quanto appena ricordato, $p_A(A) = A^3$, che quindi è nulla come voluto.
5. Dal momento che $A \cdot A^2 = 0$, i vettori colonna di $A^2 = X$ stanno nel nucleo della matrice A. Siccome e_1 è la seconda colonna di X, questo dimostra che e_1 appartiene al nucleo di A, come voluto.
6. Abbiamo già dimostrato l'inclusione $\operatorname{Span} e_1 \subseteq \ker A$; si tratta di mostrare l'uguaglianza. Come spesso in situazioni simili, conviene dimostrare l'uguaglianza delle dimensioni. Certamente $\operatorname{Span} e_1$ è di dimensione 1; studiamo quindi $\dim \ker A$. L'inclusione $\operatorname{Span} e_1 \subseteq \ker A$ implica chiaramente che $\dim \ker A \geq 1$; mostriamo ora l'altra disuguaglianza. Se si avesse $\dim \ker A = 3$, allora A sarebbe la matrice nulla e il suo quadrato non potrebbe essere uguale ad X. Resta quindi solo da escludere il caso $\dim \ker A = 2$. In tal caso la formula delle dimensioni fornirebbe $\dim \operatorname{Imm} A = 3 - \dim \ker A = 1$; osserviamo inoltre che $\operatorname{Imm} A$ contiene certamente il sottospazio $\operatorname{Imm} A^2 = \operatorname{Imm} X = \operatorname{Span} e_1$, di dimensione 1. Se fosse $\dim \ker A = 2$, dunque, si avrebbe $\operatorname{Imm} A = \operatorname{Span} e_1$ (in effetti abbiamo mostrato che c'è un'inclusione fra questi due spazi e che le loro dimensioni sono uguali). Ma questo è assurdo, perché in tal caso si otterrebbe $A^2 = 0$: infatti per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ si avrebbe $Av \in \operatorname{Span} e_1 = \ker A$, e quindi $A^2 v = A(Av) = 0$. Questo contraddice l'ipotesi $A^2 = X$ e conduce quindi ad un assurdo. Ne segue che $\dim \ker A = 1$ come voluto, e quindi che $\ker A = \operatorname{Span} e_1$.

2.5 Compito del 22/05/2019

Test.

1. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i suoi sottospazi

$$W_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad W_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+w=0\right\}.$$

Per ogni sottospazio W di V indichiamo inoltre con $W^\perp$ l'ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.

(a) Determinare $\dim W_2$: ....

(b) Vale l'uguaglianza $V = W_1 \oplus W_2$? ☐Sì ☐No

(c) Trovare un vettore v tale che $W_2 = \operatorname{Span}(v)^\perp$:

(d) Determinare una base di $W_1^\perp \cap W_2$:

Soluzione.

(a) La risposta è 3. W_2 è definito da una singola equazione lineare in $\mathbb{R}^4$, dunque è di dimensione $4 - 1 = 3$.

(b) La risposta è no. Se valesse l'uguaglianza considerata, si dovrebbe avere $4 = \dim V = \dim W_1 + \dim W_2$; visto il punto precedente, questo è possibile solo se $\dim W_1 = 1$. Ma è chiaro che W_1 è di dimensione almeno 2, perché generato da almeno due vettori linearmente indipendenti (per esempio i primi due dati nel testo).

(c) Si può prendere $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, o un suo qualsiasi multiplo scalare (non nullo). In effetti, un vettore $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare standard se e soltanto se

$$(1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = 0,$$

ovvero se e solo se $x + y + z + w = 0$, o ancora se e solo se $v \in W_2$.

(d) Una base dell'intersezione è data da $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$, o da un qualsiasi multiplo non nullo di questo vettore.

Un vettore è ortogonale a W_1 se e solo se è ortogonale ad ognuno dei suoi generatori. Ne segue che $W_1^\perp$ è definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 0 \\ -2x + y - 3z - 4w = 0 \\ -x - y + w = 0 \end{cases}$$

Ne segue che l'intersezione $W_1^\perp \cap W_2$ è descritta dal sistema ottenuto aggiungendo alle equazioni precedenti l'equazione che definisce W_2. Si ha quindi che $W_1^\perp \cap W_2$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 0 \\ -2x + y - 3z - 4w = 0 \\ -x - y + w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$$

Per trovare l'insieme delle soluzioni di questo sistema procediamo con un'eliminazione di Gauss per righe, che come noto non cambia l'insieme delle soluzioni di un sistema (la matrice da considerare è ovviamente la matrice del sistema):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema che vogliamo risolvere è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ -2y + z + 2w = 0 \\ z/2 + w = 0 \end{cases}$$

Scegliendo per esempio $w = 1$ e sostituendo all'indietro otteniamo quindi $z = -2$, $y = 0$, $x = 1$. Come base dell'intersezione possiamo quindi prendere $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Lavoriamo nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare φ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: ....

   (b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

   (c) Determinare le coordinate di un vettore isotropo (non nullo) per φ:

Soluzione.

(a) Per definizione della matrice associata ad un prodotto scalare, si tratta di calcolare
$$(1,1,0)\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1,0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2+1=-1.$$

(b) La segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (1,2,0)$. La restrizione di φ al sottospazio $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ ha matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, che (avendo determinante positivo e traccia negativa) rappresenta un prodotto scalare definito *negativo*. D'altro canto, la restrizione del prodotto scalare a $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ ha matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, chiaramente di segnatura (1,1,0): ne segue quindi che $n_+(\varphi) \geq 1$ e $n_-(\varphi) \geq 2$, e dunque la segnatura deve necessariamente essere $(1,2,0)$.

Nota. In alternativa, avremmo potuto calcolare il polinomio caratteristico della matrice data, ovvero $(t+3)(t^3-t-3)$, e determinare i segni delle sue radici $-3, \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. In effetti è facile constatare che due di queste sono negative e una è positiva.

(c) Consideriamo nuovamente la restrizione del prodotto scalare al sottospazio $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$. Abbiamo già visto che questa restrizione ha segnatura $(n_+, n_-, n_0) = (1,1,0)$, e quindi – per quanto noto dalla teoria – deve ammettere vettori isotropi. In altre parole, possiamo cercare un vettore isotropo della forma $(x,0,z)$: la condizione di isotropia è che la quantità
$$(x,0,z)\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = (x,0,z)\begin{pmatrix} -2x \\ -x+2z \\ z \end{pmatrix} = -2x^2+z^2$$
sia uguale a 0, per cui si può per esempio scegliere $x=1, z=\sqrt{2}$: il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ è isotropo.

3. Si consideri la seguente matrice A_a, dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$:
$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & 11 & -8 \\ a & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di a la matrice A_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

(b) Determinare per quali valori di a il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A_a: ....

(c) Trovare una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$:

Soluzione.

(a) La matrice è simmetrica, dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale.

(b) La condizione è che $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & 11 & -8 \\ a & -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+12+a \\ -4+66-8 \\ -2a-48+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+a \\ 54 \\ -2a-43 \end{pmatrix}$ sia un multiplo scalare del vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ stesso. Confrontando la seconda coordinata vediamo che il fattore di proporzionalità è $54/6 = 9$, per cui otteniamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 8+a \\ 54 \\ -2a-43 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Confrontando la prima e l'ultima coordinata otteniamo il sistema $\begin{cases} 8+a = -18 \\ -2a-43 = 9 \end{cases}$
Questo sistema ha come unica soluzione $a = -26$, che è quindi la risposta all'esercizio. In effetti per $a = -26$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -26 \\ 2 & 11 & -8 \\ -26 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 54 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Osserviamo innanzitutto che la matrice è certamente diagonalizzabile in una base ortogonale grazie al teorema spettrale. Determiniamo il polinomio caratteristico della matrice (che chiameremo M per semplicità):

$$\begin{aligned} p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -2 & 1 \\ -2 & t-1 & 2 \\ 1 & 2 & t-2 \end{pmatrix} &= \\ = \det \begin{pmatrix} t-2 & -2 & t-1 \\ -2 & t-1 & 0 \\ 1 & 2 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1) \det \begin{pmatrix} t-2 & -2 & 1 \\ -2 & t-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}& \\ = (t-1)\left((t-2)(t-1) - 4 - 4 - (t-1)\right)& \\ = (t-1)(t^2 - 4t - 5) = (t-1)(t+1)(t-5),& \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza della seconda riga è ottenuta sommando la prima colonna all'ultima. Ne segue che gli autovalori di M sono $1, -1$ e 5. Per trovare dei corrispondenti autovettori è sufficiente calcolare il nucleo di $M - \lambda\,\mathrm{Id}$ per $\lambda = 1, -1, 5$. Si trova

- $\lambda = 1$: $\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ è generato ad esempio da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = -1$: $\ker \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ è generato ad esempio da $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 5$: $\ker \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ è generato ad esempio da $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Siccome gli autovalori sono diversi, ed autovettori relativi ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali, questi tre vettori (o qualunque altra base di autovettori di M) formano anche una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

4. Consideriamo la matrice ortogonale

$$S = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -8 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che S ammette -1 come autovalore e determinare le coordinate di un corrispondente autovettore v:

Nota. Per essere sicuri di non aver fatto errori di calcolo, fate la verifica!

(b) La restrizione di S al piano ortogonale a v è una rotazione. Determinare il coseno dell'angolo di questa rotazione:

Soluzione.

a) Si tratta semplicemente di calcolare il nucleo di $S + \mathrm{Id}$, ovvero della matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -8 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 13 \end{pmatrix};$$

per semplificare il calcolo del nucleo di questa matrice possiamo ignorare il fattore $\frac{1}{9}$ e poi applicare qualche mossa di eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -8 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 13 \end{pmatrix} &\xrightarrow{[2]-2[3]} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ 0 & -9 & -27 \\ -4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[1]+2[3]} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 34 \\ 0 & -9 & -27 \\ -4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[3]+2[1]} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 34 \\ 0 & -9 & -27 \\ 0 & 27 & 81 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

a questo punto è chiaro che le ultime due righe sono linearmente dipendenti, e che il nucleo è dato dall'insieme dei vettori che soddisfano

$$\begin{cases} 2x + 10y + 34z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

ovvero da $\operatorname{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Possiamo quindi prendere come v il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gli autovalori di S sono -1 (come visto al punto precedente, dove abbiamo anche visto che è di molteplicità geometrica 1) e gli autovalori della restrizione di S a $(\operatorname{Span} v)^\perp$. Gli autovalori di una rotazione sono, come visto in classe, $\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo di rotazione. Ne segue che la somma degli autovalori di S (ovvero la sua traccia) è $-1 + 2\cos\vartheta$; dal momento che $\operatorname{tr}(S) = \frac{1}{9}$, otteniamo $-1 + 2\cos\vartheta = \frac{1}{9}$, cioè $\cos\vartheta = \frac{5}{9}$.

Parte dimostrativa.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $O(3)$ l'insieme delle matrici 3×3 ortogonali. Sia inoltre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$.

1. Sia $v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice ortogonale U la cui prima colonna sia uguale a v.

2. Sia W un sottospazio di V. Supponiamo che $W \neq \{0\}$: dimostrare che W contiene un vettore w tale che $\langle w, w \rangle = 1$.

3. Sia $v \in V$ un vettore tale che $\langle v, v \rangle = 1$. Dimostrare che esiste una matrice $U \in O(3)$ la cui prima colonna è v.

4. ($\star$) Sia W un sottospazio di V con la seguente proprietà: per ogni $U \in O(3)$, il sottospazio W è U-invariante (cioè per ogni $w \in W$ l'immagine $U(w)$ appartiene a W). Dimostrare che se $W \neq \{0\}$, allora $W = V$.

5. Sia $M \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ una matrice. Supponiamo che M commuti con ogni matrice $U \in O(3)$: dimostrare che $\ker M$ è un sottospazio invariante per ogni $U \in O(3)$.

6. ($\star$) Sia $M \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ una matrice. Supponiamo che M commuti con ogni matrice $U \in O(3)$: dimostrare che M è un multiplo dell'identità.

   Indicazione. Anche se $\ker M$ è banale, si può trovare λ tale che $\ker(M - \lambda\,\mathrm{Id})$ non sia banale...

Soluzione.

1. Una matrice U è ortogonale se e solo se le sue colonne sono ortonormali rispetto al prodotto scalare standard. Si tratta quindi di trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente v: i vettori di questa base formeranno le colonne di una matrice ortogonale. Un esempio di una tale base è
$$v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Per ipotesi W contiene un vettore $u \neq 0$. Siccome W è chiuso per moltiplicazione per scalare, abbiamo che $w = \frac{1}{\sqrt{\langle u,u\rangle}}u$ appartiene a W, e $\langle w, w\rangle = 1$ per calcolo diretto. Osserviamo che l'espressione $\sqrt{\langle u, u\rangle}$ è ben definita ed è un numero reale diverso da zero, in quanto $\langle u, u\rangle > 0$ per ogni vettore diverso da 0.

3. Come al punto 1, è sufficiente dimostrare che v fa parte di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e questo è un teorema visto in classe. Più precisamente, sappiamo che v può essere completato ad una base *ortogonale* v, v_2, v_3 utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt; a meno di riscalare v_2, v_3 per un opportuno scalare come al punto 2, possiamo supporre che $\langle v_2, v_2\rangle = \langle v_3, v_3\rangle = 1$, cioè che $\{v, v_2, v_3\}$ sia ortonormale (visto che sappiamo già che è ortogonale), e questo è quanto voluto.

4. Dal punto 2 sappiamo che in W esiste un vettore u tale che $\langle u, u\rangle = 1$. Per il punto 3, esiste $U \in O(3)$ tale che la prima colonna di U sia u, o in altri termini tale che $U(e_1) = u$, dove come d'abitudine e_1 indica il primo vettore della base canonica. Osserviamo che anche U^{-1} è ortogonale, e soddisfa $U^{-1}(u) = e_1$ per definizione. Dall'ipotesi $U^{-1}(W) \subseteq W$ segue allora $U^{-1}(u) \in W$, ovvero $e_1 \in W$. Sia ora v un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ di norma 1, per esempio e_2. Sappiamo dal punto 3 che esiste una matrice ortogonale $U' \in O(3)$ tale che $U'(e_1) = e_2$, e usando nuovamente l'ipotesi $U'(W) \subseteq W$ otteniamo $e_2 \in W$. Con lo stesso ragionamento otteniamo anche $e_3 \in W$, e quindi W contiene una base di $\mathbb{R}^3$. Siccome W è un sottospazio vettoriale, si deve avere $W = \mathbb{R}^3$.

5. Un lemma visto a lezione dice che, se due matrici commutano fra loro, allora gli autospazi dell'una sono invarianti per l'altra. Osserviamo che M ed U commutano, e che $\ker M$ è un autospazio di M (quello relativo all'autovalore zero): il risultato voluto segue allora direttamente dal lemma appena ricordato.

6. Sia $p_M(t)$ il polinomio caratteristico di M. Siccome M è una matrice 3×3, $p_M(t)$ è un polinomio di grado 3, e come tale ha una radice reale λ. Sia $N := M - \lambda\,\mathrm{Id}$: per costruzione, il nucleo di N è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ diverso da $\{0\}$. Inoltre, per ogni $U \in O(3)$ abbiamo $MU = UM \Rightarrow (M - \lambda\,\mathrm{Id})U = U(M - \lambda\,\mathrm{Id}) \Rightarrow NU = UN$. Dal punto 6 segue che $\ker N$ è un sottospazio U-invariante per ogni $U \in O(3)$. Dal punto 4 e dall'osservazione che $\ker N \neq \{0\}$ segue allora $\ker N = \mathbb{R}^3$, ovvero $N = 0$. Ma per costruzione $N = M - \lambda\,\mathrm{Id}$, quindi $M = \lambda\,\mathrm{Id}$ come voluto.

2.6 Compito del 14/06/2019

Test.

1. Consideriamo le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $\det AB =$ ....

(b) Calcolare $\det BA =$ ....

(c) Determinare la dimensione di $\ker(BA)$: ....

Soluzione.

(a) Un calcolo diretto mostra che
$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$
che ha determinante $-60 - 20 = -80$.

(b) Dal momento che A non è iniettiva, nemmeno BA è iniettiva, quindi ha determinante 0.

(c) Si verifica immediatamente che (l'applicazione lineare associata a) B è iniettiva, perché le sue colonne sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\ker(BA) = \ker A$, che per la formula fondamentale delle dimensioni ha dimensione $5 - \operatorname{rk} A = 3$.

2. Lavoriamo nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare φ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(b) Determinare equazioni cartesiane per un sottospazio massimale di V su cui φ sia definito positivo (denotiamo (x_1, x_2, x_3, x_4) le coordinate su $\mathbb{R}^4$):

Soluzione.

(a) V si decompone come la somma di due sottospazi ortogonali: lo span dei primi due vettori della base canonica e lo span degli altri due vettori della base canonica. Chiamiamo questi sottospazi U e W. La restrizione di φ a U ha matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi è definita negativa (visto che questa matrice ha determinante positivo e traccia negativa). Similmente, la restrizione di φ a W è definita positiva, quindi la segnatura di φ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 2, 0)$.

(b) Come osservato sopra, la restrizione di φ a W è definita positiva. Equazioni cartesiane per W sono date da $x_1 = x_2 = 0$.

3. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

Autovalore	Molteplicità

(b) Calcolare la traccia di A^{-1}: ....

(c) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard:

Soluzione.

(a) Usando le proprietà dello sviluppo di Laplace e la regola di Cramer abbiamo

$$\begin{aligned}
p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) &= \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 & 0 \\ -1 & t & -1 & 0 \\ -1 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} \\
&= (t+2)\det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} \\
&= (t+2)(t^3 - 1 - 1 + t + t + t) \\
&= (t+2)(t^3 - 3t - 2).
\end{aligned}$$

È immediato trovare l'ulteriore radice $t = -1$, da cui si arriva velocemente alla fattorizzazione $p_A(t) = (t+2)(t+1)^2(t-2)$. Gli autovalori sono quindi -1 (di molteplicità 2) e $2, -2$ (ciascuno di molteplicità 1).

(b) Gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A, quindi sono dati da $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1, -1. La traccia è la somma degli autovalori, dunque la traccia di A^{-1} è -2.

(c) Si tratta di determinare basi degli autospazi relativi agli autovalori ± 2 e una base **ortogonale** dell'autospazio relativo all'autovalore -1 (autospazi relativi ad autovalori diversi sono automaticamente ortogonali, quindi ci dobbiamo preoccupare solo di quello che succede all'interno di un singolo autospazio. D'altro canto, se l'autospazio è di dimensione 1 ogni sua base sarà una base ortogonale). Le prime due sono immediate: l'autospazio corrispondente all'autovalore -2 è ovviamente generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, come si vede dalla forma della matrice A, mentre l'autospazio relativo all'autovalore 2 si trova come

$$\ker A - 2\,\mathrm{Id} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda l'autospazio relativo a -1, dobbiamo calcolare

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

e poi ortogonalizzare la base trovata. Una singola applicazione del procedimento di Gram-Schmidt produce la base ortogonale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dell'autospazio relativo a -1; complessivamente, una base di $\mathbb{R}^4$ costituita di autovettori per A ed ortogonale rispetto al prodotto scalare standard è costituita ad esempio dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nota. Gli ultimi due vettori sono univocamente determinati a meno di multipli scalari (questo accade perché i corrispondenti autospazi sono di dimensione 1), mentre per i primi due vettori ci sono infinite scelte.

4. Consideriamo lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Muniamo V del prodotto scalare $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ e lavoriamo nella base $\mathcal{B} = \{x, 1+x^2, 1-x^2\}$.

   (a) Scrivere la matrice del prodotto scalare dato nella base $\mathcal{B}$:

   (b) Trovare una base dell'ortogonale di $\mathrm{Span}(x)$ rispetto al prodotto scalare dato:

   (c) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare derivata $d : V \to V$ in base $\mathcal{B}$:

Soluzione.

(a) Per determinare la matrice del prodotto scalare dobbiamo calcolare $\langle p(x), q(x)\rangle$ per tutte le coppie di vettori di base. Si ha

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x, 1+x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x(1+x^2)\,dx = 0,$$

in quanto l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine si annulla; similmente,

$$\langle x, 1-x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = 0.$$

Restano da calcolare

$$\langle 1+x^2, 1+x^2\rangle = \int_{-1}^{1} 1+2x^2+x^4\,dx = \left[x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = 2+\frac{4}{3}+\frac{2}{5} = \frac{56}{15}$$

$$\langle 1-x^2, 1-x^2\rangle = \int_{-1}^{1} 1-2x^2+x^4\,dx = \left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = 2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

e

$$\langle 1+x^2, 1-x^2\rangle = \int_{-1}^{1} 1-x^4\,dx = \left[x-\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = 2-\frac{2}{5} = \frac{8}{5}.$$

La matrice del prodotto scalare è quindi

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 56/15 & 8/5 \end{pmatrix}.$$

(b) **Prima soluzione.** Stiamo cercando i polinomi $p(x) = a+bx+cx^2$ tali che $\langle p(x), x\rangle = 0$, ovvero tali che

$$0 = \int_{-1}^{1} ax+bx^2+cx^3\,dx;$$

osservando come sopra che l'integrale di x e di x^3 su $[-1,1]$ si annulla, otteniamo la condizione $0 = \frac{2}{3}b$, ovvero $b = 0$. I polinomi ortogonali ad x sono quindi tutti e soli quelli della forma $a+cx^2$, ovvero tutti e soli gli elementi del sottospazio $\mathrm{Span}(1, x^2)$. Dal momento che 1 e x^2 sono linearmente indipendenti, una base di $\mathrm{Span}(x)^\perp$ è data da $\{1, x^2\}$.

Seconda soluzione. Il prodotto scalare dato è chiaramente definito positivo, perché

$$\langle p(x), p(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx \geq 0,$$

con uguaglianza solo se $p(x)$ è il polinomio nullo. Ne segue che l'ortogonale di $\mathrm{Span}(x)$ è di dimensione $2 = \dim V - \dim \mathrm{Span}(x)$, ed al punto precedente abbiamo osservato che $1+x^2, 1-x^2$ sono ortogonali ad x. Ne segue che una base di $\mathrm{Span}(x)^\perp$ è $\{1+x^2, 1-x^2\}$.

(c) Si tratta di calcolare le derivate dei polinomi in $\mathcal{B}$, che sono date da $1, 2x, -2x$, ed esprimerle in base $\mathcal{B}$. Siccome $1 = \frac{1}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)$, la prima colonna della matrice di d è $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, mentre $2x$ e $-2x$ sono multipli del primo vettore di base, per cui otteniamo

$$[d]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parte dimostrativa.

Esercizio 1.

1. Sia M una matrice 2×2 a coefficienti complessi. Si dimostri che vale la formula
$$M^2 = (\operatorname{tr} M) \cdot M - \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Si dimostri che se M è una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi, allora esistono numeri complessi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tali che
$$M^n = a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_2M^2 + a_1M + a_0 \operatorname{Id}.$$
3. Si deduca che $\dim \operatorname{Span}\big(\operatorname{Id}, M, M^2, M^3, \cdots, M^k, \cdots\big) \leq n$.
4. Sia M una matrice $n \times n$ diagonalizzabile e con autovalori tutti distinti. Dimostrare che $\dim \operatorname{Span}\big(\operatorname{Id}, M, M^2, M^3, \cdots, M^k, \cdots\big) = n$.

Soluzione.

1. La formula si può verificare per calcolo diretto, ma si può anche procedere come segue. Il teorema di Cayley-Hamilton garantisce che $p_M(M) = 0$, dove $p_M(t)$ è il polinomio caratteristico della matrice M. D'altro canto, per una matrice 2×2, il polinomio caratteristico è dato da $p_M(t) = t^2 - (\operatorname{tr} M)t + \det M$, da cui
$$0 = p_M(M) = M^2 - (\operatorname{tr} M) \cdot M + \det M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
che è la tesi.
2. Similmente a quanto fatto al punto precedente, sia $p_M(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_0$ il polinomio caratteristico di M. Applicando nuovamente il teorema di Cayley-Hamilton, otteniamo
$$0 = p_M(M) = M^n - a_{n-1}M^{n-1} - \cdots - a_0 \operatorname{Id},$$
ovvero $M^n = a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{Id}$ come voluto.
3. Certamente $S := \operatorname{Span}(\operatorname{Id}, M, M^2, \ldots, M^{n-1})$ ha dimensione al massimo n, perché è generato da n elementi. Dimostriamo ora per induzione che $M^k \in S$ per ogni $k \geq n$: questo implica la richiesta del problema. In effetti, per $k = n$ l'affermazione è stata verificata al punto precedente, perché abbiamo scritto M^n come combinazione lineare di $\operatorname{Id}, M, \ldots, M^{n-1}$. Supponiamo ora di aver dimostrato la tesi fino a k e mostriamola per $k+1$. Per ipotesi possiamo scrivere M^k come $b_0 \operatorname{Id} + \cdots + b_{n-1}M^{n-1}$ per certi coefficienti $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$. Si ottiene allora
$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M \cdot M^k \\ &= M\left(b_0 \operatorname{Id} + \cdots + b_{n-1}M^{n-1}\right) \\ &= b_0M + b_1M^2 + \cdots + b_{n-2}M^{n-1} + b_{n-1}M^n \\ &= b_0M + b_1M^2 + \cdots + b_{n-2}M^{n-1} + b_{n-1}(a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{Id}) \\ &= a_0b_{n-1} \operatorname{Id} + (b_0 + b_{n-1}a_1)M + (b_1 + b_{n-1}a_2)M^2 + \cdots + (b_{n-2} + b_{n-1}a_{n-1})M^{n-1}, \end{aligned}$$
ovvero M^{k+1} è in S, che è quanto volevamo dimostrare.

4. Per quanto già dimostrato al punto precedente, è necessario e sufficiente mostrare che $\mathrm{Span}(\mathrm{Id}, M, M^2, \ldots, M^{n-1})$ è di dimensione n, ovvero che le matrici $\mathrm{Id}, M, M^2, \ldots, M^{n-1}$ sono linearmente indipendenti. Questa affermazione chiaramente non dipende dalla base in cui scriviamo M (e le sue potenze), per cui possiamo assumere che M sia diagonale, con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sia $A_1, \ldots, A_n$ la base del sottospazio delle matrici diagonali costituita dalle matrici A_i il cui unico coefficiente diverso da 0 è un 1 in posizione i lungo la diagonale. Si ha allora $M = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$, e più generalmente, per $k \geq 0$, si ha $M^k = \lambda_1^k A_1 + \ldots + \lambda_n^k A_n$ (questa non è altro che la scrittura in coordinate della matrice diagonale con coefficienti diagonali $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$). Per verificare la lineare indipendenza di $\mathrm{Id}, M, M^2, \ldots, M^{n-1}$ possiamo formare la matrice le cui colonne sono le coordinate di questi vettori in una base data e verificare se essa abbia o meno rango massimo. Usando la base A_i, otteniamo che la matrice in questione è

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

ovvero la trasposta di una matrice di Vandermonde di parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Questa matrice è allora di rango massimo, perché per il teorema di Vandermonde il suo determinante (che è uguale al determinante della sua trasposta) si annulla se e solo se almeno due dei λ_i sono uguali, cosa esclusa dall'ipotesi. Ne segue che effettivamente i vettori $\mathrm{Id}, M, \ldots, M^{n-1}$ formano una base del sottospazio delle matrici diagonali, e quindi la tesi.

Esercizio 2 (approfondimento sull'esercizio 4 del test).

Consideriamo lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Muniamo V del prodotto scalare $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Sia $d : V \to V$ l'applicazione lineare data dalla derivata, e sia d^* l'aggiunto di d rispetto al prodotto scalare dato. Calcolare $d^*(x^2)$.

Soluzione. Osserviamo che $d^*(x^2)$ è ortogonale sia a $1 + x^2$ che a $1 - x^2$, perché

$$\langle d^*(x^2), 1 + x^2 \rangle = \langle x^2, d(1 + x^2) \rangle = \langle x^2, 2x \rangle = 0$$

e

$$\langle d^*(x^2), 1 - x^2 \rangle = \langle x^2, d(1 - x^2) \rangle = \langle x^2, -2x \rangle = 0.$$

Ma l'ortogonale di $\mathrm{Span}(1 + x^2, 1 - x^2)$ è $\mathrm{Span}(x)$, come visto alla domanda (b) dell'esercizio 4 del test, quindi $d^*(x^2)$ è un multiplo di x, diciamo $d^*(x^2) = \lambda x$. D'altro canto,

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle d^*(x^2), x \rangle = \langle x^2, d(x) \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = 2/3,$$

e $\langle x, x \rangle = 2/3$, da cui otteniamo $\lambda = 1$. Quindi $d^*(x^2) = x$.

2.7 Compito del 12/07/2019

Test.

1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 5×5 a coefficienti in $\mathbb{C}$.

   (a) Determinare la dimensione del sottospazio S delle matrici simmetriche: ....

   (b) Sia W il sottospazio delle matrici ognuna delle cui colonne è multipla di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $\dim(W)$: ....

   (c) Determinare $\dim(W + S)$: ....

Soluzione.

(a) Sia D_i per $i = 1, \dots, 5$ la matrice il cui unico coefficiente non nullo è un 1 in posizione i lungo la diagonale, e sia S_{ij} per $1 \le i < j \le 5$ la matrice con esattamente due coefficienti non nulli, entrambi uguali a 1, in posizione (i, j) e (j, i). Si verifica immediatamente che queste matrici formano una base per il sottospazio delle matrici simmetriche, e siccome esse sono in numero di 5 (per le D_i) + 10 (per le S_{ij}) la dimensione del sottospazio S è 15.

(b) Chiaramente l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & W \\ (a, b, c, d, e) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \end{array}$$

è un isomorfismo fra $\mathbb{R}^5$ e W, quindi W è di dimensione 5.

(c) Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(W + S) = \dim(W) + \dim(S) - \dim(W \cap S).$$

Abbiamo già calcolato $\dim W$ e $\dim S$, quindi non resta che calcolare la dimensione dell'intersezione. Consideriamo una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$: affinché essa sia simmetrica è necessario in particolare che la sua prima riga e la sua prima colonna coincidano, da cui $a = b = c = d = e$. Ne segue immediatamente che le matrici nell'intersezione sono tutte e solo quelle della forma $a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ per $a \in \mathbb{C}$, e dunque l'intersezione è di dimensione 1. La formula di Grassmann scritta sopra implica allora $\dim(W + S) = \dim(W) + \dim(S) - \dim(W \cap S) = 5 + 15 - 1 = 19$.

2. (a) Elencare i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \end{pmatrix}$$

non è invertibile: ....

(b) Si determini l'inversa della matrice M_a per $a = 1$:

Soluzione.

(a) La domanda è equivalente a chiedere per quali valori di a il determinante di M_a si annulla. Siccome M_a è triangolare a blocchi, il suo determinante è dato dal prodotto dei determinanti dei blocchi, ovvero $\det \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & a \end{pmatrix} = (2 - a^2)a^2$. Questo determinante si annulla se e solo se a assume uno dei tre valori $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

(b) Procediamo con mosse di riga sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come prima mossa sottraiamo la seconda riga dalla prima e il triplo della terza dalla quarta, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Non resta ora che sottrarre la prima, terza e quarta riga dalla seconda per ottenere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice M_1 è data dalla metà destra della matrice così ottenuta, ovvero

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia φ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per cui v_1, v_2, v_3 sia una base ortonormale.

   (a) Determinare la matrice di φ in base canonica:

   (b) Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: ....

   (c) Determinare una base ortogonale per la restrizione di φ al sottospazio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$:

Soluzione.

(a) Possiamo facilmente esprimere i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica in termini di v_1, v_2, v_3; precisamente si ha $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$, ed $e_3 = v_3 - e_2 = v_3 - v_2 + v_1$. A questo punto, osservando che l'ipotesi implica

$$\varphi(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

possiamo calcolare senza difficoltà tutti i prodotti scalari fra i vettori della base canonica:

$$\varphi(e_1, e_1) = \varphi(v_1, v_1) = 1, \quad \varphi(e_1, e_2) = \varphi(v_1, v_2 - v_1) = \varphi(v_1, v_2) - \varphi(v_1, v_1) = -1$$

$$\varphi(e_1, e_3) = \varphi(v_1, v_3 - v_2 + v_1) = \varphi(v_1, v_1) = 1,$$

$$\varphi(e_2, e_2) = \varphi(v_2 - v_1, v_2 - v_1) = \varphi(v_2, v_2) + \varphi(v_1, v_1) = 2$$

$$\varphi(e_2, e_3) = \varphi(v_2 - v_1, v_3 - v_2 + v_1) = -\varphi(v_2, v_2) - \varphi(v_1, v_1) = -2$$

$$\varphi(e_3, e_3) = \varphi(v_3 - v_2 + v_1, v_3 - v_2 + v_1) = \varphi(v_3, v_3) + \varphi(v_2, v_2) + \varphi(v_1, v_1) = 3.$$

La matrice richiesta è quindi $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Si tratta semplicemente di calcolare

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = 2.$$

In alternativa, si può osservare che $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = v_1 + v_2 + v_3$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = v_3 - v_2 + 2v_1$, per cui il prodotto scalare fra questi due vettori è dato da

$$\varphi(v_1 + v_2 + v_3, 2v_1 - v_2 + v_3) = 2\varphi(v_1, v_1) - \varphi(v_2, v_2) + \varphi(v_3, v_3) = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(c) Si osserva immediatamente che v_3 appartiene a W, quindi può essere preso come elemento di una base ortogonale. Cerchiamo un secondo vettore v (linearmente indipendente da v_3) che sia in W e che si esprima nella forma $\lambda v_1 + v_2 = \begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\0\end{pmatrix}$: siccome sia v_1 sia v_2 sono ortogonali a v_3, i vettori v, v_3 formeranno una base ortogonale di W. Affinché v appartenga a W, lo scalare λ deve rispettare l'equazione $(\lambda+1)+1 = 0$, ovvero $\lambda = -2$, da cui $v = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Una base ortogonale per W è quindi data da $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

4. Sia $a \in \mathbb{C}$. Consideriamo la matrice $A_a = \begin{pmatrix}0 & -a & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

(a) Determinare i valori di a per i quali la matrice A_a possiede almeno un autovalore di molteplicità algebrica almeno 2: ....

(b) Determinare una base di $\mathbb{C}^3$ in cui A_{-1} sia diagonale:

Soluzione.

(a) Determiniamo gli autovalori di A_a. Il polinomio caratteristico di questa matrici è

$$p(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A_a) = \det\begin{pmatrix}t & a & 0\\ -1 & t & -1\\ 0 & 0 & t-2\end{pmatrix} = (t-2)\det\begin{pmatrix}t & a\\ -1 & t\end{pmatrix} = (t-2)(t^2+a),$$

dunque gli autovalori sono 2 e $\pm\sqrt{-a}$. Ci sono solo due casi in cui due di questi autovalori possono coincidere: o $a = 0$, nel qual caso gli due autovalori $\pm\sqrt{-a}$ sono entrambi uguali a 0, oppure $\pm\sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4$, ovvero $a = -4$.

(b) Sappiamo già dalla teoria che una tale base esiste, perché gli autovalori sono tutti distinti. Per trovarla è sufficiente determinare il nucleo di $A_{-1} - \lambda\,\mathrm{Id}$ al variare di λ fra gli autovalori, ovvero – in questo caso – $-1, 1, 2$. Per questi tre valori, sfruttando il fatto che mosse di riga non cambiano il nucleo di una matrice, troviamo:

$\boxed{\lambda = -1}$ Dobbiamo trovare una base di

$$\ker(A_{-1} + \mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

e una tale base è data da $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda = 1}$ Dobbiamo trovare una base di

$$\ker(A_{-1} - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e una tale base è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\lambda = 2}$ Dobbiamo trovare una base di

$$\ker(A_{-1} - 2\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

fissando arbitrariamente $x = 1$ e risolvendo le equazioni $-2x + y = 0$ e $x - 2y + z = 0$ troviamo che una tale base è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Una base diagonalizzante è quindi data dai tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Consideriamo i numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$ (con base $\mathcal{B} = \{1, i\}$). Sia $z = a + bi$ un numero complesso.
   (a) La moltiplicazione per z è un'applicazione lineare $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si scriva la matrice di tale applicazione lineare in base $\mathcal{B}$:
   (b) Per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice trovata al punto precedente è ortogonale?

   Soluzione.

   (a) Per scrivere la matrice di un'applicazione lineare dobbiamo calcolare l'immagine tramite tale applicazione dei vettori della base data, ed esprimere il vettore immagine a sua volta come combinazione dei vettori della base data. Si ha

   $$z \cdot 1 = a + bi, z \cdot i = -b + ai;$$

   è chiaro che le coordinate di z e $z \cdot i$ nella base data sono (a, b) e $(-b, a)$, quindi la matrice della moltiplicazione per z è $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   (b) Una matrice è ortogonale se e solo se $M \cdot {}^tM = \mathrm{Id}$. Nel nostro caso, detta M la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, si ha

   $$M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix},$$

   dunque M è ortogonale se e solo se $a^2 + b^2 = 1$, ovvero se e solo se $|z| = 1$.

Parte dimostrativa.

In questo problema lavoriamo con lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo A la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vogliamo determinare i sottospazi $W \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 che siano A-invarianti, ovvero tali che $Aw \in W$ per ogni $w \in W$.

1. Verificare che il polinomio caratteristico di A è della forma $p_1(t)p_2(t)$, dove $p_1(t), p_2(t)$ sono polinomi di grado 2 senza radici reali.
2. Sia W un sottospazio di dimensione 2 che sia A-invariante, e sia $A|_W : W \to W$ la restrizione di A a W. Dimostrare che il polinomio caratteristico di $A|_W$, che denotiamo $q(t)$, è uguale a $p_1(t)$ o a $p_2(t)$.
3. Dimostrare che $W \subseteq \ker q(A)$.
4. Determinare il numero di sottospazi W di dimensione 2 che siano A-invarianti. Determinare equazioni cartesiane per ognuno di essi.

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & t & 0 & 3 \\ 3 & 0 & t-1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & t-1 \end{pmatrix},$$

il cui calcolo può essere semplificato tramite opportunte operazioni di riga e colonna. Cominciamo a sommare la prima colonna all'ultima per ottenere

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+2 & -1 & -2 & t \\ -2 & t & 0 & 1 \\ 3 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix},$$

e continuiamo sottraendo l'ultima riga dalla prima,

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & t & 0 & 1 \\ 3 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix};$$

a questo punto possiamo sottrarre t volte l'ultima colonna dalla seconda per ridurci a calcolare

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -1-t^2 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Procediamo ora ad uno sviluppo di Laplace lungo la seconda colonna: esso fornisce

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = -(t^2+1)\det \begin{pmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & t-1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quest'ultimo determinante può ora essere calcolato facilmente, per esempio tramite un ulteriore sviluppo di Laplace nell'ultima colonna (si osservi il cambio di segno, dovuto alla posizione dell'unico coefficiente non nullo dell'ultima colonna):

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = (t^2+1)\det \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 3 & t-1 \end{pmatrix} = (t^2+1)(t^2-1+3) = (t^2+1)(t^2+2).$$

È evidente che i polinomi $p_1(t) = t^2+1$ e $p_2(t) = t^2+2$ non hanno radici reali, e questo conclude la verifica richiesta.

2. Il polinomio caratteristico di $A|_W$ è per definizione un polinomio (a coefficienti reali) di grado 2; d'altro canto, per risultati di teoria esso è anche un fattore del polinomio caratteristico di A, dunque è un divisore di $p_1(t)p_2(t)$ per quanto visto sopra. Infine, siccome $p_1(t)$ e $p_2(t)$ sono irriducibili come polinomi a coefficienti reali, l'unica possibilità è che $q(t)$ coincida con uno di questi due fattori.

3. Per il teorema di Cayley-Hamilton abbiamo $q(A|_W) = 0$. D'altro canto, $q(A|_W)$ è semplicemente la restrizione di $q(A)$ al sottospazio W, per cui otteniamo $q(A)|_W = 0$, ovvero W è contenuto nel nucleo di $q(A)$ come voluto.

4. Sia W un sottospazio A-invariante di dimensione 2. Per il punto 2 ed il calcolo di $p_1(t), p_2(t)$ al punto 1 abbiamo $q(t) = t^2 + 1$ oppure $q(t) = t^2 + 2$. Nei due casi otteniamo che $q(A)$ è rispettivamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e sappiamo che W è contenuto nel nucleo della corrispondente matrice. Un calcolo immediato mostra che i nuclei delle due matrici qui sopra sono di dimensione 2, e sono descritti dalle equazioni

$$W_1 = \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad W_2 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Nei due casi si ha quindi $W \subseteq W_1$ e $W \subseteq W_2$, e siccome W, W_1 e W_2 hanno tutti dimensione 2 si deve avere $W = W_1$ o $W = W_2$. D'altro canto, W_1 e W_2 sono certamente A-invarianti, perché dato $w \in W_1 = \ker(A^2 + \mathrm{Id})$ si ha anche $Aw \in W_1$, in quanto $(A^2+\mathrm{Id})(Aw) = A(A^2 + \mathrm{Id})(w) = A(0) = 0$, e similmente per W_2. Se ne ricava quindi che esistono precisamente due sottospazi A-invarianti di dimensione 2, ovvero W_1 e W_2, le cui equazioni sono date qui sopra.

2.8 Compito del 12/09/2019

Test.

1. Consideriamo lo spazio $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sia inoltre $\mathcal{B}$ la base di V formata dalle 4 matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire se la funzione $f : V \to V$ che manda una matrice $M \in V$ nella matrice $(\mathrm{tr}\, M) \cdot \mathrm{Id}_2$ è lineare: ☐ Lineare ☐ Non lineare

   (b) Scrivere la matrice in base $\mathcal{B}$ dell'applicazione lineare $L : V \to V$ che manda una matrice $M \in V$ in AM:

   (c) Dire se l'applicazione lineare L del punto precedente è invertibile o meno:
   ☐ Invertibile ☐ Non invertibile

   Soluzione.

   (a) La domanda è se valgano le uguaglianze $f(M_1 + M_2) = f(M_1) + f(M_2)$ e $f(\lambda M) = \lambda f(M)$ per ogni $M, M_1, M_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideriamo la prima: si ha

$$\begin{aligned} f(M_1 + M_2) &= \mathrm{tr}(M_1 + M_2) \cdot \mathrm{Id} \\ &= (\mathrm{tr}(M_1) + \mathrm{tr}(M_2)) \cdot \mathrm{Id} \\ &= \mathrm{tr}(M_1) \cdot \mathrm{Id} + \mathrm{tr}(M_2) \cdot \mathrm{Id} \\ &= f(M_1) + f(M_2). \end{aligned}$$

   Similmente, $f(\lambda M) = \mathrm{tr}(\lambda M) \cdot \mathrm{Id} = \lambda\, \mathrm{tr}(M) \cdot \mathrm{Id} = \lambda f(M)$, e quindi f è lineare.

(b) Siano M_1, M_2, M_3, M_4 le matrici della base $\mathcal{B}$. Si tratta di calcolare $L(M_i)$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ed esprimere il risultato in base $\mathcal{B}$. Cominciamo da

$$L(M_1) = AM_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4,$$

il che ci dice che la prima colonna della matrice cercata è $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allo stesso modo calcoliamo $L(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2M_2$, $L(M_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = M_1 + 3M_3$ e $L(M_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M_2 + 3M_4$. Ne segue che la matrice di L è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Siccome la matrice A è invertibile, anche l'applicazione L è invertibile: la sua inversa è infatti data dalla moltiplicazione (a sinistra) per la matrice A^{-1}.

2. (a) Determinare, se esiste, la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

☐ Non esiste ☐ Esiste, ed è:

(b) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det(A^2)$: ....

(c) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: la matrice inversa di una matrice triangolare superiore (invertibile) è triangolare superiore. ☐ Vero ☐ Falso

Soluzione.

(a) Procediamo con l'algoritmo visto a lezione, partendo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e procedendo con mosse di riga per rendere la metà sinistra della matrice uguale alla matrice identità. Le mosse che effettuiamo sono le seguenti: sottraiamo la prima riga dalla seconda, poi sottraiamo la seconda riga dalla terza, sommiamo la terza alla seconda, cambiamo segno alla terza e la sommiamo alla prima e infine sottraiamo la seconda dalla prima. L'effetto di queste mosse è il seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa voluta quindi esiste, ed è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Effettuiamo una prima mossa di colonna sottraendo il doppio della prima colonna alla seconda (questo, come noto, non altera il determinante). Otteniamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e possiamo sviluppare lungo l'ultima riga (non dimenticando il segno della regola di Laplace!) per ottenere che il determinante di A è uguale a

$$(-1)\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando nuovamente rispetto all'ultima riga otteniamo allora che

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma questa matrice è una matrice di Vandermonde di parametri $1, 2, 3, 0$, e quindi il suo determinante è dato da $(1-2)(1-3)(1-0)(2-3)(2-0)(3-0) = -12$. Utilizzando il teorema di Binet otteniamo allora immediatamente $\det(A^2) = \det(A)^2 = (-12)^2 = 144$.

(c) L'affermazione è vera. In effetti, il fatto che una matrice M di taglia $n \times n$ sia triangolare superiore è equivalente alla condizione $M(\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)) \subseteq (\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k))$ per ogni $k = 1, \dots, n$, dove $e_1, \dots, e_n$ sono i vettori della base canonica. Siccome M è invertibile per ipotesi, questa condizione è a sua volta equivalente a $M(\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)) = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)$, perché i due spazi hanno la medesima dimensione. Applicando M^{-1} ad entrambi i lati di questa uguaglianza si ottiene allora

$$\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k) = M^{-1}(\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k))$$

per ogni $k = 1, \dots, n$, dunque in particolare $M^{-1}(\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)) \subseteq \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_k)$, e quindi anche M^{-1} è triangolare superiore.

3. Lavoriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Sia $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(a) Completare il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ad una base ortogonale di W. Scrivere qui sotto una base ortogonale di W contenente v_1:

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W:

(c) Determinare una base **ortonormale** di $W^\perp$:

Soluzione.

(a) Osserviamo innanzitutto che W è di dimensione 3, in quanto definito da una singola equazione lineare (non banale) in $\mathbb{R}^4$. Ogni base di W sarà dunque costituita da 3 vettori. Per trovarne una ortogonale potremmo utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt, ma è anche facile individuarne una per tentativi: in effetti, i vettori $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono in W, e i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono a due a due ortogonali. Come visto in classe, questo garantisce anche che siano linearmente indipendenti, fatto che è peraltro immediato da verificare direttamente. Una possibile risposta a questa domanda (fra le infinite risposte ammissibili) è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Come noto, la proiezione ortogonale di un vettore v su un sottospazio W è data da

$$\frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n,$$

dove $v_1, \ldots, v_n$ è una base ortogonale di W. Nel nostro caso otteniamo quindi che la proiezione di v su W è data da

$$0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Per costruzione, W è l'ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $W^\perp$.

Per trovare una base ortonormale possiamo semplicemente di dividere questo vettore per la sua norma: otteniamo allora che una base ortogonale di $W^\perp$ è data dal singolo vettore $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Consideriamo la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & -a \\ -1 & a+2 & 0 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, dipendente da un parametro reale a.

(a) Trovare, in funzione di a, gli autovalori della matrice M_a: ....

(b) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a è diagonalizzabile: ....

(c) Per $a = -1$ determinare tutti gli autovettori di M_{-1} di autovalore 1 e la cui norma (rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$) sia uguale ad 1:

Soluzione.

(a) Calcoliamo dapprima il polinomio caratteristico di M_a, che risulta essere

$$\begin{aligned} p_{M_a}(t) &= \det \begin{pmatrix} t-(1-a) & 0 & a \\ 1 & t-(a+2) & 0 \\ -a & 0 & t-(a+1) \end{pmatrix} \\ &= (t-(a+2)) \det \begin{pmatrix} t-(1-a) & a \\ -a & t-(a+1) \end{pmatrix} \\ &= (t-(a+2)) \left(((t-1)+a)((t-1)-a) + a^2 \right) \\ &= (t-(a+2)) \left((t-1)^2 - a^2 + a^2 \right) \qquad = (t-1)^2(t-(a+2)) \end{aligned},$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo sviluppato rispetto alla seconda colonna. Ne segue che gli autovalori di M_a sono 1 (di molteplicità 2) e $a+2$ (di molteplicità 1), tranne se $a=-1$, nel qual caso l'unico autovalore è 1, di molteplicità 3.

(b) M_a è diagonalizzabile se e solo se $a=0$. Per dimostrare questo fatto, iniziamo confrontando la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1. La prima è uguale a 2, salvo se $a=-1$, nel qual caso è uguale a 3. La seconda è invece data dalla dimensione di

$$\ker(M_a - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ -1 & a+1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

È chiaro che se $a \neq 0$ questa matrice ha rango almeno 2 (perché la prima e seconda riga sono linearmente indipendenti), e quindi nucleo di dimensione al più 1; in particolare, M_a non è diagonalizzabile per $a \neq 0$, perché le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 non coincidono. Infine, per $a=0$ la matrice precedente ha nucleo di dimensione 2, e quindi la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore 1 coincidono. Siccome la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è uguale a 1, lo stesso deve valere per la molteplicità geometrica, e ne segue che M_0 è diagonalizzabile.

(c) Abbiamo già stabilito che per $a=-1$ l'unico autovalore è $\lambda = 1$. Gli autovettori corrispondenti sono i vettori non nulli nel nucleo di

$$M_{-1} - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che il nucleo di questa matrice è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. I vettori multipli di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di norma 1 sono $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che sono quindi gli autovettori cercati.

Parte dimostrativa.

Sia M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ la cui matrice in base canonica è M.

1. Verificare che φ è non degenere.
2. Determinare un sottospazio V_+ di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che la restrizione di φ a V_+ sia definita positiva.
3. Determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che la restrizione di φ a V sia il prodotto scalare nullo.

4. Sia ora ψ un prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^n$, di segnatura $(n_+, n_-, 0)$. Dimostrare che per ogni sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n_+ + 1$ la restrizione di ψ a W non è nulla. Dimostrare anche che per ogni sottospazio U di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n_- + 1$ la restrizione di ψ a U non è nulla.

   Indicazione. Si potrà mostrare che W interseca in modo non banale un sottospazio su cui ψ è definito negativo.

5. ($\star$) Dimostrare che la massima dimensione di un sottospazio Z di $\mathbb{R}^n$ tale che la restrizione di ψ a Z è nulla è $\min\{n_+, n_-\}$.

6. Dedurre dai punti precedenti la segnatura del prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^4$ introdotto sopra.

Soluzione.

1. Come noto, condizione necessaria e sufficiente affinché un prodotto scalare sia non degenere è che esso sia rappresentato da una matrice invertibile, o equivalentemente a determinante diverso da 0. Le seguenti mosse di eliminazione di Gauss (per colonne) rendono questo fatto facile da verificare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-[1],[2]-2[1]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-\frac{1}{5}[4]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

   il determinante di quest'ultima matrice è l'opposto del determinante che si ottiene scambiando le prime due colonne, che è dato da $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = z5 \neq 0$, dove il calcolo del è immediato dal momento che la matrice è diagonale.

2. La restrizione di φ al sottospazio generato da e_2, e_4 (dove e_i è come sempre la base canonica) ha per matrice quella data dalla seconda e quarta riga e colonna, ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Questa matrice ha determinante $9 > 0$ e traccia $7 > 0$, dunque il prodotto scalare da essa rappresentato è definito positivo per quanto visto a lezione. Un possibile sottospazio V_+ è quindi $V_+ = \mathrm{Span}(e_2, e_4)$.

3. Sicuramente un sottospazio di dimensione 2 su cui la restrizione di ψ sia nulla deve contenere un vettore isotropo, quindi iniziamo trovando un tale vettore. Un'analisi diretta della matrice mostra che e_1 è isotropo, quindi ci proponiamo di costruire V come $\mathrm{Span}(e_1, v)$ per un certo v da scegliere. Questo v deve essere tale che $\psi(v, v) = 0$ e $\psi(e_1, v) = 0$. Scrivendo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la seconda condizione fornisce $x_2 = 0$. Siccome consideriamo il sottospazio $\mathrm{Span}(e_1, v)$, il valore della prima coordinata di v è irrilevante (nel senso che il sottospazio $\mathrm{Span}(e_1, v)$ è indipendente da x_1), e quindi possiamo supporre che sia nullo. Posto $x_1 = x_2 = 0$ possiamo allora calcolare

$$\psi(v, v) = \psi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 + x_4 \\ -x_3 \\ 5x_4 \end{pmatrix} = -x_3^2 + 5x_4^2.$$

Un possibile vettore v è quindi $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, e un sottospazio su cui la restrizione di ψ sia nulla è $V = \mathrm{Span}(e_1, v)$.

4. Sappiamo dalla teoria che esiste un sottospazio V_- di $\mathbb{R}^n$, di dimensione n_-, tale che la restrizione di ψ a V_- sia definita negativa. Supponiamo per assurdo che esista un sottospazio W, di dimensione almeno $n_+ + 1$, tale che la restrizione di ψ a W sia il prodotto scalare nullo. Per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(W \cap V_-) = \dim(W) + \dim(V_-) - \dim(W + V_-) \geq (n_+ + 1) + n_- - n = 1;$$

sia $w \in W \cap V_-$ un vettore non nullo. Allora da un lato $\psi(w, w) = 0$, perché $w \in W$ e la restrizione di ψ a W è nulla; dall'altro $\psi(w, w) < 0$, perché $w \in V_-$ e la restrizione di ψ a V_- è definita negativa. Questa è chiaramente una contraddizione, per cui un tale sottospazio W non può esistere. La dimostrazione per $n_- + 1$ è identica, salvo rimpiazzare V_- con V_+, un sottospazio di dimensione n_+ su cui ψ sia definito positivo.

5. Sia $v_1, \dots, v_{n_+}, w_1, \dots, w_{n_-}$ una base ortonormale, con $\psi(v_i, v_i) = +1$ per $i = 1, \dots, n_+$ e $\psi(w_j, w_j) = -1$ per $j = 1, \dots, n_-$. Sia $m = \min\{n_+, n_-\}$. I vettori $u_1 = v_1 + w_1, \dots, u_m = v_m + w_m$ rispettano:

   - $\psi(u_i, u_i) = \psi(v_i + w_i, v_i + w_i) = \psi(v_i, v_i) + \psi(w_i, w_i) = 1 - 1 = 0$ per ogni i (perché $\psi(v_i, w_i) = 0$);
   - $\psi(u_i, u_j) = \psi(v_i + w_i, v_j + w_j) = 0$ per $i \neq j$, perché $\psi(v_i, v_j) = \psi(w_i, w_j) = \psi(v_i, w_j) = \psi(w_i, v_j) = 0$ per definizione di base ortonormale.

   Ne segue che la restrizione di ψ al sottospazio $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_m)$ è nulla, dunque abbiamo trovato un sottospazio di dimensione $\min\{n_+, n_-\}$ su cui la restrizione di ψ è nulla. D'altro canto, per il punto precedente non può esistere un sottospazio di dimensione maggiore su cui la restrizione di ψ sia nulla, e questo completa la dimostrazione.

6. Sia (n_+, n_-, n_0) la segnatura di φ. Dal punto 1 otteniamo che $n_0 = 0$, ed inoltre si possono applicare i punti 5 e 3 per ottenere $\min\{n_+, n_-\} \geq 2$, ovvero $n_+ \geq 2, n_- \geq 2$. D'altro canto $n_+ + n_- = 4$, quindi l'unica possibilità è $n_+ = n_- = 2$. La segnatura richiesta è quindi $(2, 2, 0)$.

2.9 Compito del 24/01/2020

Test.

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in partenza e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in arrivo:

   (b) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di f:

   Soluzione.

(a) Per definizione, per trovare la matrice in questione dobbiamo applicare f ai vettori della base di partenza e esprimere il risultato in termini della base in arrivo. Per il primo vettore della base in partenza abbiamo

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

mentre per il secondo otteniamo

$$f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è quindi $\begin{pmatrix}7 & 1\\-2 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}$.

(b) L'immagine di f è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$. Per determinare equazioni cartesiane per questo sottospazio possiamo procedere ad una eliminazione di Gauss sulla matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\2 & 3 & y\\3 & 4 & z\end{pmatrix}$, ottenendo

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\2 & 3 & y\\3 & 4 & z\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[3]-x[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & y-2x\\3 & -2 & z-3x\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+(y-2x)[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\3 & -2 & z-3x-2(y-2x)\end{pmatrix}.$$

Un'equazione cartesiana per l'immagine di f è quindi data da $z-3x-2(y-2x)=0$, ovvero da $x+z-2y=0$.

2. Sia a un parametro reale e sia $M_a = \begin{pmatrix}a & 2 & 0 & -3\\-1 & -1 & -1 & 2-a\\2 & a+2 & 2-a & -4\\1 & -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il determinante di M_2: ....

(b) Determinare per quali valori di a la matrice M_a ha rango 2: ....

(c) Calcolare il determinante della matrice $M_4^{-1}M_2M_4$: ☐ La matrice M_4 non è invertibile ☐ La matrice M_4 è invertibile, e $\det(M_4^{-1}M_2M_4) =$ ....

Soluzione.

(a) Dobbiamo calcolare il determinante di $\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & -3\\-1 & -1 & -1 & 0\\2 & 4 & 0 & -4\\1 & -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$. Come noto, sommare ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna) non altera il determinante, per cui, sottraendo la prima colonna dalla seconda, ci riconduciamo a calcolare il determinante di $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & -3\\-1 & 0 & -1 & 0\\2 & 2 & 0 & -4\\1 & -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$. Sottraiamo ora la terza colonna dalla prima per ottenere $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & -3\\0 & 0 & -1 & 0\\2 & 2 & 0 & -4\\-2 & -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, e sottraiamo la seconda dalla prima per giungere a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Possiamo ora sviluppare (usando la regola di Laplace) lungo la prima colonna, per cui il determinante cercato è uguale a $2\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; sviluppando ora lungo la prima riga (senza dimenticare il segno meno dovuto alla regola di Laplace) otteniamo $2\det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -4$.

(b) Ricordiamo che condizione necessaria affinché una matrice abbia rango 2 è che il determinante di ogni minore 3×3 si annulli. Scegliamo per esempio il minore 3×3 formato dalla prima, seconda, e quarta riga, e dalle prime tre colonne: questa scelta minimizza il numero di parametri a presenti nel minore. Sappiamo allora che – affinché il rango sia 2 – si deve annullare il determinante

$$\det\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -3a - 2 - a + 6 = 4 - 4a,$$

e dunque si deve avere $a = 1$. Questa è una condizione necessaria, ma non ancora sufficiente: per verificare se $a = 1$ corrisponda effettivamente ad una matrice di rango 2, sostituiamo $a = 1$ e studiamo il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

tramite un'eliminazione di Gauss per colonne. Si ricava

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[4]+3[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2],[4]+2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango di M_1 è effettivamente 2.

(c) Il determinante è invariante per coniugio; come è facile verificare, la matrice M_4 è effettivamente invertibile, e quindi $\det(M_4^{-1}M_2M_4) = \det(M_2) = -4$.

3. Sia $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$, sia φ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è M_a, e sia W il sottospazio $\{z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare gli autovalori di M_a (specificare anche le rispettive molteplicità algebriche):

....

(b) Determinare per quali valori di a il prodotto scalare φ_a è definito positivo: ....

(c) Determinare una base di W che sia ortogonale rispetto a φ_1:

(d) Determinare equazioni cartesiane per l'ortogonale della retta Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a φ_3:

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M_a:

$$\begin{aligned} p_{M_a}(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M_a) &= \det \begin{pmatrix} t-(a+1) & -a & -a \\ -a & t-(a+1) & -a \\ -a & -a & t-(a+1) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t-(a+1) & -a & -a \\ -a & t-(a+1) & -a \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad \text{(sottraendo la prima riga dalla terza)} \\ &= \det \begin{pmatrix} t-(2a+1) & -a & -a \\ -2a & t-(a+1) & -a \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad \text{(sommando la terza colonna alla prima)} \end{aligned}$$

Possiamo ora sviluppare rispetto all'ultima riga, ottenendo così

$$\begin{aligned} (t-1)\det &\begin{pmatrix} t-(2a+1) & -a \\ -2a & t-(a+1) \end{pmatrix} \\ &= (t-1)\det \begin{pmatrix} t-1 & 1-t \\ -2a & t-(a+1) \end{pmatrix} \quad \text{(sottraendo la seconda riga alla prima)} \\ &= (t-1)\det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -2a & t-(3a+1) \end{pmatrix} \quad \text{(sommando la prima colonna alla seconda)} \\ &= (t-1)^2(t-(3a+1)). \end{aligned}$$

Ne segue che gli autovalori di M_a sono $1, 1, 3a+1$. Per $a \neq 0$ gli autovalori sono quindi 1 (di molteplicità algebrica 2) e $3a+1$ (di molteplicità 1), mentre per $a = 0$ l'unico autovalore è 1, di molteplicità algebrica 3.

(b) Possiamo sfruttare il teorema spettrale e determinare la segnatura studiando il segno degli autovalori di M_a. Il prodotto scalare φ_a è definito positivo se e solo se tutti gli autovalori sono positivi, ovvero (tenuto conto che due degli autovalori sono sempre uguali ad 1, e quindi positivi) se e solo se $3a + 1 > 0$. Il prodotto φ_a è quindi definito positivo se e solo se $a > -\frac{1}{3}$.

(c) Dal momento che φ_1 è definito positivo, possiamo procedere con un procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, partendo da una qualsiasi base di $\{z = 0\}$, quale ad esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobbiamo quindi effettuare un unico passo del procedimento di Gram-Schmidt, sostituendo v_2 con

$$v_2 - \frac{\varphi_1(v_1, v_2)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonale di $\{z = 0\}$ è quindi data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Il sottospazio in questione è l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che

$$\varphi_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

perché un vettore è ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ se e solo se è ortogonale a tutto il sottospazio generato da $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Non resta quindi che da calcolare esplicitamente il prodotto scalare:

$$\varphi_3(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = (x,y,z)\begin{pmatrix}4&3&3\\3&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (x,y,z)\begin{pmatrix}7\\6\\7\end{pmatrix} = 7x+6y+7z.$$

L'ortogonale richiesto è quindi descritto dall'equazione $7x + 6y + 7z = 0$.

4. Consideriamo l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è $A = \begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$.

   (a) T è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

   (b) Determinare gli autovalori di T: ....

   (c) Trovare una base orto**normale** di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T, oppure scrivere "non esiste":

Soluzione.

(a) La matrice A è simmetrica, quindi la corrispondente applicazione lineare è diagonalizzabile per il teorema spettrale.

(b) Si tratta di calcolare il polinomio caratteristico di A e le sue radici. Usando la regola di Sarrus per calcolare il determinante delle matrici 3×3 otteniamo

$$\begin{aligned}p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) &= \det\begin{pmatrix}t+1&0&-2\\0&t-1&-2\\-2&-2&t\end{pmatrix}\\&= (t+1)(t-1)t - 4(t+1) - 4(t-1)\\&= t(t^2-1) - 8t = t(t^2-9)\\&= t(t+3)(t-3).\end{aligned}$$

Gli autovalori di T sono quindi $-3, 0, 3$, ognuno di molteplicità 1.

(c) Cominciamo con il determinare autovettori di T corrispondenti ai tre autovalori trovati sopra, ovvero cerchiamo vettori nei nuclei di $T + 3\,\mathrm{Id}, T, T - 3\,\mathrm{Id}$. Esplicitamente, nei tre casi stiamo cercando vettori nei nuclei delle tre matrici

   i. $A + 3\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, come ad esempio $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$;

   ii. $A = \begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$, come ad esempio $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$;

   iii. $A - 3\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-2&2\\2&2&-3\end{pmatrix}$, come ad esempio $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Dal momento che gli autovalori sono di molteplicità 1, e che autospazi relativi ad autovalori diversi di una matrice simmetrica sono ortogonali, la teoria ci garantisce che questi autovettori sono a due a due ortogonali (fatto che è comunque facile verificare anche direttamente). Per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ basta allora riscalare gli autovettori trovati in modo che siano di norma 1: dal momento che la norma di ognuno degli autovettori trovati sopra è $\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$, troviamo la base ortonormale

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $N : V \to V$ un'applicazione lineare nilpotente, ovvero tale che esiste $k \geq 1$ per cui $N^k = 0$.

1. Dimostrare che l'unico autovalore (complesso) di N è 0.
2. Dedurne che l'applicazione lineare
$$\begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & \lambda v - N(v) \end{array}$$
è invertibile se e solo se $\lambda \neq 0$.
3. Supponiamo ora che V sia munito di un prodotto scalare definito positivo (denotato $\langle \cdot, \cdot \rangle$) e che l'identità
$$\langle Nv, w\rangle = \langle v, Nw\rangle$$
valga per ogni scelta di $v, w \in V$. Dimostrare che $N = 0$.
4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 6}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al massimo 6 e sia $d : V \to V$ l'applicazione lineare derivata (ovvero $d(p(x)) = p'(x)$). Calcolare, se esiste, $(\mathrm{Id} - d)^{-1}(x^6)$.
5. Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, definiamo $\|A\|$ come la somma dei quadrati dei suoi coefficienti. Dimostrare che esiste una successione di basi $\mathcal{B}_n$ di V con la seguente proprietà: detta N_n la matrice di N rispetto alla base $\mathcal{B}_n$, la successione $\|N_n\|$ tende a 0 quando $n \to \infty$.

Soluzione.

1. Sia λ un autovalore (eventualmente complesso) di N e sia v un corrispondente autovettore. Dal momento che $Nv = \lambda v$ si ha chiaramente
$$N^2v = N(Nv) = N(\lambda v) = \lambda Nv = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$
e più generalmente
$$N^m v = \lambda^m v$$
per ogni $m \geq 0$. Specializzando questa uguaglianza al caso $m = k$ si ottiene allora $N^m = 0$, da cui
$$0 = \lambda^k v.$$
Siccome per definizione di autovettore v non è il vettore nullo l'unica possibilità è $\lambda^k = 0$, ovvero $\lambda = 0$.
2. L'applicazione lineare $v \mapsto \lambda v - N(v)$ è invertibile se e solo se $\det(\lambda - N) \neq 0$, ovvero se e solo se $p_N(\lambda) \neq 0$, dove $p_N(t)$ è il polinomio caratteristico di N. Dal momento che il polinomio caratteristico si annulla precisamente negli autovalori di N, e dato che l'unico autovalore di N è zero come visto al punto precedente, si ha
$$v \mapsto \lambda v - N(v) \text{ invertibile } \Leftrightarrow\ p_N(\lambda) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda \neq 0$$
come voluto.

3. L'ipotesi vuol dire che N è simmetrica rispetto al prodotto scalare definito positivo dato, e il teorema spettrale assicura che in questa situazione l'applicazione N è diagonalizzabile. Siccome abbiamo già visto che l'unico autovalore di N è zero, in una opportuna base diagonalizzante la matrice di N è nulla (in quanto matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale). Ma se in una qualche base la matrice di N è nulla, questo vuol dire che N stessa è l'applicazione lineare nulla.

4. Risolviamo in generale il problema di invertire $\mathrm{Id}-N$. Sia $k \geq 1$ tale che $N^k = 0$. Ricordiamo che per ogni $k \geq 1$ vale l'identità polinomiale $1 - t^k = (1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{k-1})$, che valutata in $t = N$ fornisce

$$\mathrm{Id}-N^k = (\mathrm{Id}-N)(\mathrm{Id}+N+\cdots+N^{k-1}).$$

Siccome $N^k = 0$ abbiamo

$$\mathrm{Id} = (\mathrm{Id}-N)(\mathrm{Id}+N+\cdots+N^{k-1}),$$

ovvero l'inversa di $\mathrm{Id}-N$ è $\mathrm{Id}+N+N^2+\cdots+N^{k-1}$. Osserviamo ora che l'applicazione lineare d è chiaramente nilpotente: in effetti, d^7 è l'applicazione lineare nulla, perché la derivata settima di un polinomio di grado al più 6 è certamente nulla. Possiamo allora utilizzare la formula ricavata sopra: $(\mathrm{Id}-d)^{-1} = \mathrm{Id}+d+d^2+\cdots+d^6$. In particolare,

$$(\mathrm{Id}-d)^{-1}(x^6) = (\mathrm{Id}+d+d^2+\cdots+d^6)(x^6) = x^6+6x^5+30x^4+120x^3+360x^2+720x+720.$$

5. Sia $d = \dim V$ e sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1,\ldots,v_d\}$ una base rispetto alla quale la matrice di N è triangolare superiore. Una tale base esiste, perché tutti gli autovalori di N (che sono uguali a 0) appartengono al campo base $\mathbb{R}$. Denotiamo per semplicità M la matrice di N in base $\mathcal{B}_1$ e M_{ij} i suoi coefficienti. Osserviamo che M_{ij} è nullo se $i > j$ (perché M è triangolare superiore) e anche se $i = j$ (perché la diagonale di M contiene gli autovalori di N, che sono tutti uguali a 0).

Consideriamo ora la base $\mathcal{B}_n := \{v_1, \lambda_n v_2, \lambda_n^2 v_3, \ldots, \lambda_n^{d-1} v_d\}$, dove λ_n è un parametro reale non nullo (sceglieremo poi $\lambda_n = \frac{1}{n}$). Dalla definizione di M otteniamo

$$N(\lambda_n^{j-1}v_j) = \lambda_n^{j-1}N(v_j) = \lambda_n^{j-1}\sum_{k=1}^{d} M_{kj}v_k,$$

da cui

$$N(\lambda_n^{j-1}v_j) = \lambda_n^{j-1}\sum_{k=1}^{d} M_{kj}v_k = \sum_{k=1}^{d} \lambda_n^{j-k}M_{kj}(\lambda_n^{k-1}v_k).$$

Questo dimostra che il coefficiente in posizione (k,j) di N_n è dato da $\lambda_n^{j-k}M_{kj}$, e che in particolare anche N_n è triangolare superiore con 0 sulla diagonale. Ne segue che con questa scelta di $\mathcal{B}_n$, e purché $\lambda_n \leq 1$, si ha

$$\|N_n\| = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d}(\lambda_n^{j-i}M_{ij})^2 \leq \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d}\lambda_n^2(M_{ji})^2 = \lambda_n^2\|M\|,$$

dove la disuguaglianza è garantita dal fatto che l'esponente $j-i$ è a maggiore o uguale a 1, e $\lambda_n^2 \geq \lambda_n^4 \geq \lambda_n^6 \geq \cdots$ siccome $\lambda_n \leq 1$. È quindi sufficiente scegliere $\lambda_n = \frac{1}{n}$ per assicurare che $\|N_n\| \leq \frac{1}{n^2}\|M\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

3 Anno accademico 2019-2020

3.1 Esercitazione del 25/11/2019

Parte individuale.

1. Consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare la dimensione di W: ....

   (b) Determinare equazioni cartesiane per W:

   (c) Scrivere due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che $\operatorname{Span}(v_1, v_2) + W = \mathbb{R}^4$:

   Soluzione.

(a) e (b) Risolviamo (a) e (b) con un unico procedimento, effettuando un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & x \\ -2 & -1 & -1 & y \\ 3 & 2 & -1 & z \\ 4 & 3 & -3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],\ [3]+2[1],\ [4]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & y+2x \\ 3 & -1 & 5 & z-3x \\ 4 & -1 & 5 & t-4x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+5[2],\ [4]-(y+2x)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & z-3x+(y+2x) \\ 4 & -1 & 0 & t-4x+(y+2x) \end{pmatrix}.$$

Guardando le prime tre colonne della matrice ridotta otteniamo immediatamente che $\dim W = 2$. Considerando invece l'ultima colonna, otteniamo che W è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -2x+y+t=0 \end{cases}$$

(c) Osserviamo che i primi due dei tre vettori dati sono linearmente indipendenti, e che la forma per colonne ridotta della matrice da essi formata è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. È allora evidente che completando questa matrice con i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ottiene una matrice di rango 4. Ne segue immediatamente che una scelta valida (fra le infinite possibili) per i vettori v_1, v_2 è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base di $\ker f$:

(b) Determinare una base di $\operatorname{Imm} f$:

(c) Determinare la dimensione di $\operatorname{Imm} f \cap \ker f$: ....

Soluzione.

(a) Provediamo ad un'eliminazione di Gauss per righe sulla matrice: come noto, questa operazione ne preserva il nucleo. Sommando un opportuno multiplo della prima riga ad ognuna delle altre si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora riscalare la seconda riga di un fattore $\frac{1}{2}$, la terza di un fattore $-\frac{1}{3}$ e la quarta di un fattore $\frac{1}{2}$ per ottenere

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto sottraiamo la seconda riga dalla terza e dalla quarta per arrivare alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\ker f$ è uguale all'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che $\ker f$ è uno spazio di dimensione 2, perché il calcolo precedente mostra che la matrice di f ha rango 2, e lo spazio di partenza ha dimensione 4, da cui

$$\dim \ker f = 4 - \dim \operatorname{Imm} f = 2.$$

Per trovare una base di $\ker f$ è quindi sufficiente determinare due vettori linearmente indipendenti che appartengano a $\ker f$. Per far questo possiamo fissare arbitrariamente i valori di x_3, x_4 e ricavare i valori di x_1, x_2 dal sistema scritto sopra. Scegliendo $(x_3, x_4) = (1, 0)$ e $(x_3, x_4) = (0, 1)$ troviamo facilmente che i due vettori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\ker f$.

(b) Osserviamo che il calcolo del punto precedente mostra che il rango della matrice data è 2. Ne segue che l'immagine di f ha rango 2, ed è quindi generata da qualsiasi scelta di due colonne della corrispondente matrice che siano linearmente indipendenti. Siccome le prime due colonne della matrice data sono fra loro non proporzionali, e quindi linearmente indipendenti, una possibile risposta è che $\operatorname{Im} f$ ha come base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Dal momento che siamo interessati solo alla dimensione dell'intersezione, e non anche a trovarne una base, il modo più semplice di rispondere a questa domanda è probabilmente quello di usare la formula di Grassmann:

$$\begin{aligned}\dim(\ker f \cap \operatorname{Imm} f) &= \dim \ker f + \dim \operatorname{Imm} f - \dim(\ker f + \operatorname{Imm} f) \\ &= 4 - \dim(\ker f + \operatorname{Imm} f).\end{aligned}$$

Per determinare la dimensione di $\ker f + \operatorname{Imm} f$ è sufficiente effettuare una ulteriore eliminazione di Gauss su una matrice che abbia come prime due colonne due vettori che formino una base di $\ker f$, e come ultime due colonne due vettori che formino una base di $\operatorname{Imm} f$. Concretamente, partiamo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e effettuiamo mosse di Gauss (per colonna) come segue:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{[2]-2[1],\ [3]+[1],\ [4]+[1]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[3]+[2],\ 3[4]+[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A questo punto è chiaro che $\ker f + \operatorname{Imm} f$ ha dimensione 3, e quindi $\ker f \cap \operatorname{Imm} f$ ha dimensione 1.

Nota. Anche se non era richiesto, non è difficile calcolare una base dell'intersezione. Si può verificare che una tale base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $(x, y, z) \mapsto (0, y, z)$. Sia inoltre $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$:

(b) Determinare la matrice dell'applicazione lineare π rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo):

Soluzione.

(a) Si tratta di trovare numeri reali a, b, c tali che

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b-c=1 \\ c-a-b=0 \end{cases}$$

Sostituendo $a+b=0$ nella terza equazione otteniamo $c=0$; sostituendo ulteriormente questa informazione nella seconda equazione arriviamo a

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $b=1, a=-1$. La risposta è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Detti v_1, v_2, v_3 i vettori della base $\mathcal{B}$, si tratta di calcolare $\pi(v_1), \pi(v_2), \pi(v_3)$ ed esprimere il risultato in base $\mathcal{B}$. Si nota immediatamente che $\pi(v_1) = -v_3$ e $\pi(v_3) = v_3$. In quanto a v_2, si ha

$$\pi(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e dobbiamo rappresentare questo vettore in base $\mathcal{B}$. Risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si trova facilmente $a=-1, b=1, c=-1$. Ne segue che la matrice di π in base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte a squadre

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. Supponiamo infine che $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ con $\dim(V_1) = \dim(V_2) = \dim(V_3) = 1$, e che $f(V_1) \subseteq V_2, f(V_2) \subseteq V_3, f(V_3) \subseteq V_1$.

1. Dimostrare che esistono una base $\mathcal{B}$ di V e numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tali che la matrice di f in base $\mathcal{B}$ sia
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dimostrare che esiste un numero reale μ tale che $f \circ f \circ f = \mu \,\mathrm{Id}$.

3. Dimostrare che $\mu \neq 0$ se e solo se f è iniettiva.

Soluzione.

1. I sottospazi V_1, V_2, V_3 sono (per ipotesi) di dimensione 1, dunque ognuno di essi possiede una base costituita da un solo elemento. Scegliamo vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$ tali che v_i sia una base del corrispondente V_i. Affermiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V: in effetti si tratta del numero corretto di vettori (nel senso che sono $3 = \dim V$), ed inoltre v_1, v_2, v_3 generano V, perché
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = V_1 + V_2 + V_3 = V,$$

dove la seconda uguaglianza è parte dell'ipotesi. Descriviamo ora la matrice di f in base $\mathcal{B}$. Per ipotesi $f(v_1)$ è contenuto in V_2, e dunque – visto che $V_2 = \mathrm{Span}(v_2)$ – esiste un numero reale λ_1 tale che $f(v_1) = 0\,v_1 + \lambda_1\,v_2 + 0\,v_3$. Ma allora questa è la rappresentazione di $f(v_1)$ in termini della base $\{v_1, v_2, v_3\}$, e quindi, per definizione, questo significa esattamente che la prima colonna della matrice di f in base $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Similmente, $f(v_2)$ è un elemento di V_3, e quindi esiste $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tale che $f(v_2) = \lambda_2 v_3$, ed esiste $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tale che $f(v_3) = \lambda_3 v_1$. Analogamente a quanto osservato sopra, questo implica che la seconda e terza colonna della matrice di f in base $\mathcal{B}$ siano rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Si ha l'uguaglianza $f \circ f \circ f = \mu\,\mathrm{Id}$ se e solo se le matrici di questi endomorfismi in base $\mathcal{B}$ coincidono. D'altro canto, detta M la matrice di f in base $\mathcal{B}$, la matrice di $f \circ f \circ f$ in base $\mathcal{B}$ è M^3, ovvero

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dal momento che l'ultima matrice scritta è chiaramente la matrice in base $\mathcal{B}$ dell'endomorfismo $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,\mathrm{Id}$, abbiamo ottenuto come voluto $f \circ f \circ f = \mu\,\mathrm{Id}$ con $\mu = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

3. Se f è iniettiva, allora anche $f \circ f \circ f = \mu\,\mathrm{Id}$ è iniettiva (in quanto una composizione di funzioni iniettive è iniettiva), e quindi μ non può essere 0 (dato che la funzione $0\,\mathrm{Id}$ è certamente non iniettiva, visto che manda ogni vettore nel vettore nullo). Viceversa, se $\mu \neq 0$ allora f è iniettiva: infatti, dati due vettori $w_1, w_2 \in V$ tali che $f(w_1) = f(w_2)$, otteniamo

$$\mu w_1 = \mu\,\mathrm{Id}(v_1) = f(f(f(w_1))) = f(f(f(w_2))) = \mu\,\mathrm{Id}(w_2) = f(f(f(w_2))),$$

ovvero (siccome $\mu \neq 0$) si ha $w_1 = w_2$, e quindi f è iniettiva come voluto (ricordiamo che la definizione di iniettività è che l'uguaglianza $f(w_1) = f(w_2)$ implica $w_1 = w_2$). Alternativamente, è sufficiente osservare che l'equazione $(f \circ f) \circ f = \mu\,\mathrm{Id}$ con $\mu \neq 0$ implica

$$(\frac{1}{\mu} f \circ f) \circ f = \mathrm{Id},$$

ovvero f è invertibile, con inversa $(\frac{1}{\mu} f \circ f)$, ed in particolare f è iniettiva.

3.2 Compitino del 16/12/2019

Test.

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $V_1 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $V_2 = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\}$.

   (a) Determinare la dimensione di V_1 e V_2: $\dim(V_1) = \dots\dots\dots$ $\dim(V_2) = \dots\dots\dots$

   (b) Dire se $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$: ☐ Sì ☐ No

(c) Trovare equazioni cartesiane per V_2:

Soluzione.

(a) e (c) Procediamo ad una eliminazione di Gauss sui generatori di V_1 dati nel testo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]\leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-3[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque, visto che ci sono esattamente due pivot non nulli, $\dim V_1 = 2$.
Nel caso di V_2, visto che vogliamo anche determinare equazioni cartesiane, procediamo ad una eliminazione di Gauss aggiungendo una colonna incognita $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 3 & 3 & 6 & x_2 \\ 2 & 4 & 2 & x_3 \\ 2 & 1 & 5 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-2[1],[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x_2 - 3x_1 \\ 2 & 2 & -2 & x_3 - 2x_1 \\ 2 & -1 & 1 & x_4 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2],[4]-\frac{1}{2}(x_3-2x_1)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x_2 - 3x_1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & x_4 - 2x_1 + \frac{1}{2}(x_3 - 2x_1) \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi $\dim V_2 = 2$, e che equazioni cartesiane che descrivono questo sottospazio sono

$$\begin{cases} x_2 - 3x_1 = 0 \\ -6x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Visto che $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$, si tratta solo di capire se V_1 e V_2 si intersecano banalmente. Alla luce della formula di Grassmann, questo è equivalente al fatto che $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$, perché

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) = 4 - \dim(V_1 + V_2),$$

e quindi sono equivalenti $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ (cioè $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$) e $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$ (cioè $\dim(V_1 + V_2) = 4$). Vogliamo allora calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$, ed è quindi sufficiente effettuare un'eliminazione di Gauss su un insieme costituito da generatori di V_1 e da generatori di V_2; per semplificare i calcoli, utilizziamo i generatori trovati al punto precedente e procediamo con operazioni di colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]+2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

La matrice ridotta in forma a scala ha 4 pivot non nulli, quindi il suo rango è 4. Ne segue che $\dim(V_1 + V_2) = 4$, da cui, per il ragionamento precedente, si ha $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$, e quindi in effetti $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si consideri il sottospazio V dello spazio delle matrici 3×3 a coefficienti reali definito da $V = \{M \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A \cdot M = 0\}$. Sia inoltre $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice in base canonica è A. Trovare:

   (a) una base per $\ker(L)$:

   (b) la dimensione di V: $\dim(V) = \dots\dots\dots$

   (c) una base per il sottospazio $W = \{M \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \bigm| A \cdot M = 0, M^t = M\}$:

Soluzione.

(a) Si tratta di determinare l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni lineari con matrice A. Come noto, l'insieme delle soluzioni di questo sistema non cambia se si effettuano mosse di riga sulla matrice: si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque possiamo equivalentemente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Dal momento che la matrice dei coefficienti ha rango 2, come verificato sopra, il nucleo di L (equivalentemente, l'insieme delle soluzioni di questo sistema lineare) ha dimensione $3 - \mathrm{rango}(A) = 1$. Per determinarne una base è quindi sufficiente trovare un qualsiasi vettore non nullo in questo nucleo. Ponendo $z = 1$ si ottiene immediatamente che un tale vettore è ad esempio $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che è quindi una base di $\ker L$.

(b) Data la definizione del prodotto fra matrici, una matrice M appartiene a V se e solo se ogni sua colonna appartiene a $\ker L$. In effetti, la i-esima colonna di $A \cdot M$ è uguale al prodotto $A \cdot M_i$, dove M_i è la i-esima colonna di M, e quindi $A \cdot M$ è nulla se e solo se tutte le sue colonne lo sono, e quindi se e solo se $A \cdot M_i$ è il vettore nullo per $i = 1, 2, 3$. Una volta osservato questo, segue immediatamente che V ha dimensione 3: ogni colonna deve essere multipla del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ determinato sopra, quindi una base di V è costituita dalle tre matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Una base del sottospazio in questione è costituita dalla singola matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

In effetti, sia $M \in W$. Allora M è in particolare un elemento di V, da cui, per quanto detto sopra, M è della forma

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2 & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

D'altro canto, la condizione che $M \in W$ sia simmetrica impone le equazioni

$$\begin{cases} -\lambda_2 = 2\lambda_1 \\ -\lambda_3 = \lambda_1 \\ 2\lambda_3 = \lambda_2 \end{cases}$$

che implicano $\lambda_2 = -2\lambda_1, \lambda_3 = -\lambda_1$ (la terza equazione è linearmente dipendente dalle prime due, e quindi non impone una terza condizione). Sostituendo, otteniamo che M è della forma

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 2\lambda_1 & \lambda_1 \\ 2\lambda_1 & -4\lambda_1 & -2\lambda_1 \\ \lambda_1 & -2\lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

ovvero che gli elementi di W sono tutti e soli i multipli scalari di $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, che è quindi una base di W.

3. Sia $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica (sia in partenza che in arrivo): $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

   (b) La funzione f è bigettiva? ☐ Sì ☐ No

   (c) Se possibile, calcolare la matrice inversa della matrice A trovata sopra:
   ☐ A non è invertibile, e una base del nucleo di f è:
   ☐ A è invertibile, e la sua inversa è $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Soluzione.

(a) Detti e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica, si tratta semplicemente di calcolare $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le colonne della matrice A sono allora date dalle coordinate di questi tre vettori scritti in base canonica, ovvero semplicemente da questi tre vettori. Si ha dunque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) e (c) Visto che dominio e codominio di f coincidono, la funzione f è bigettiva se e solo se $\ker f = 0$, se e solo se il suo rango è uguale a 3, se e solo se il rango della corrispondente matrice è uguale a 3. Per calcolare tale rango procediamo ad una eliminazione di

Gauss per righe sulla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, così che in caso la matrice A sia invertibile otterremo anche direttamente la sua inversa. Sottraendo la seconda riga alla terza si trova $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Possiamo ora sottrarre il triplo della terza riga dalla prima per ottenere $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e infine sottrarre la seconda riga dalla prima per trovare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Questo mostra che la matrice A ha rango 3, dunque è invertibile, e che la sua inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. In particolare, la funzione f è bigettiva.

4. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \dots\dots\dots$

   (b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) = \dots\dots\dots\dots$

   (c) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto al prodotto scalare φ:

Soluzione.

(a) Si tratta di ricordare che il prodotto scalare fra due vettori v_1, v_2 definito da una matrice A (in una certa base $\mathcal{B}$) si calcola come $[v_1]_{\mathcal{B}}^t A [v_2]_{\mathcal{B}}$. Nel nostro caso tutto è espresso in base canonica, e quindi

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0,0)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 4.$$

(b) Cominciamo determinando n_0, che come noto è pari alla dimensione del nucleo della matrice che rappresenta il prodotto scalare. Chiaramente il rango di questa matrice è almeno 2 (perché le prime due colonne non sono proporzionali), e un rapido calcolo mostra che il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo, che è quindi di dimensione 1. Abbiamo dunque in particolare $n_0 = 1$.
Inoltre, data la forma della matrice di φ è immediato osservare che $\varphi(e_1, e_1) = 1 > 0$ e $\varphi(e_2, e_2) = -2 < 0$, dove come d'abitudine denotiamo e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Data la caratterizzazione di n_+, n_- come le massime dimensioni di sottospazi su cui il prodotto scalare sia definito positivo (rispettivamente definito negativo), questo mostra $n_+ \geq 1, n_- \geq 1$. Combinato con il fatto che si ha $n_+ + n_- + n_0 = 3$ per definizione, e che $n_0 = 1$ come visto sopra, questo mostra che la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

(c) Abbiamo già osservato sopra che il nucleo della matrice assegnata è generato da $v_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vettore che è dunque ortogonale a qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$. In effetti, detta A la matrice del prodotto scalare si ha che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ vale

$$\varphi(v, v_0) = v^t \cdot A \cdot v_0 = v^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Si tratta ora di determinare altri due vettori ortogonali fra loro che, insieme a v_0, formino una base di $\mathbb{R}^3$. Prendiamo ad esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per il quale si ha $\varphi(v_1, v_1) = 1$. Allora v_1 non è isotropo, e sappiamo quindi che, dato un qualsiasi altro vettore w, otteniamo un vettore v_2 ortogonale a v_1 ponendo $v_2 = w - \frac{\varphi(w,v_1)}{\varphi(v_1,v_1)} v_1$. Scegliendo ad esempio $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si trova $v_2 = w - \varphi(w, v_1)v_1 = w + 2v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. I tre vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono chiaramente linearmente indipendenti (la matrice le cui colonne sono questi tre vettori è già ridotta a scala e ha 3 pivot non nulli), quindi essi formano come voluto una base di $\mathbb{R}^3$ che, vista la costruzione, è necessariamente ortogonale.

Nota. Nonostante non sia necessario per l'esercizio, si può anche facilmente verificare che

$$\varphi(v_0, v_0) = 0, \quad \varphi(v_1, v_1) = 1 > 0,$$

$$\varphi(v_2, v_2) = (2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 < 0,$$

coerentemente con quanto abbiamo dimostrato sulla segnatura del prodotto scalare φ.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

In questo esercizio lavoriamo con lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$. Il prodotto scalare standard fra $v_1 \in \mathbb{R}^3$ e $v_2 \in \mathbb{R}^3$ sarà denotato $\langle v_1, v_2 \rangle$.

1. Sia $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vettore fissato. Scrivere la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f_v : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} \end{array}$$

in base canonica. Questa matrice sarà denotata A_v nel seguito.

Nota. L'applicazione lineare f_v è data dal prodotto vettore per v: si ha $f_v(w) = v \times w$.

2. Determinare, al variare di $v \in \mathbb{R}^3$, il nucleo dell'applicazione lineare f_v.

3. Dimostrare che per ogni $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ si ha $\langle A_v w, z \rangle = -\langle w, A_v z \rangle$.

4. Dimostrare che per ogni $w \in \mathbb{R}^3$ i vettori w e $A_v w$ sono ortogonali.

5. Sia v un vettore non nullo e sia w un vettore che non appartiene a $\mathrm{Span}(v)$. Dimostrare che $v, A_v w, A_v^2 w$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

6. Sia $v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e sia Π l'ortogonale di $\mathrm{Span}(v)$. Dimostrare che per ogni $w \in V$ il vettore $-A_v^2 w$ è la proiezione ortogonale di w su Π.

Soluzione.

1. Le colonne della matrice A_v si ottengono calcolando $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica. Si ottiene immediatamente

$$A_v = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

2. Osserviamo innanzitutto che v appartiene al nucleo di f_v: in effetti,

$$f_v(v) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta + \beta\gamma \\ \gamma\alpha - \alpha\gamma \\ -\beta\alpha + \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Osserviamo poi che se v è il vettore nullo allora f_v è l'applicazione lineare nulla, e quindi il suo nucleo è $\mathbb{R}^3$.

   Supponiamo d'ora in poi che v non sia il vettore nullo. Mostriamo che in tal caso la matrice A_v ha rango almeno due. Siccome v non è il vettore nullo, almeno uno fra i tre numeri α, β, γ è diverso da 0. Supponiamo che $\gamma \neq 0$: allora le prime due colonne della matrice A_v sono linearmente indipendenti, perché

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   implica, confrontando ad esempio le prime due coordinate, $-\gamma\lambda_2 = \gamma\lambda_1 = 0$, ovvero, visto che $\gamma \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Visto che A_v ha due colonne linearmente indipendenti, il suo rango è almeno 2. Similmente, se $\alpha \neq 0$ si ha che la seconda e terza colonna di A_v sono linearmente indipendenti, e se $\beta \neq 0$ la prima e terza colonna sono linearmente indipendenti. Ne segue in ogni caso che se $v \neq 0$ il rango di A_v (e quindi di f_v) è almeno 2. Visto che $\mathrm{rango}(f_v) + \dim\ker f_v = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ e che abbiamo visto che $\mathrm{rango}(f_v) \geq 2, \dim\ker f_v \geq 1$, l'unica possibilità è che $\dim\ker f_v = 1$. Dal momento che v è un vettore non nullo in $\ker f_v$ si ha allora $\ker f_v = \mathrm{Span}(v)$. In conclusione,

$$\ker f_v = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{se } v \text{ è nullo} \\ \mathrm{Span}(v), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. Osserviamo che la matrice A_v è antisimmetrica, ovvero $A_v^t = -A_v$. Si ottiene allora

$$\langle A_v w, z\rangle = (A_v w)^t \cdot z = w^t A_v^t z = w^t \cdot (-A_v) z = \langle w, -A_v z\rangle = -\langle w, A_v z\rangle.$$

4. Utilizzando la formula precedente con $z = w$ si ottiene

$$\langle A_v w, w\rangle = -\langle w, A_v w\rangle = -\langle A_v w, w\rangle,$$

   dove nella seconda uguaglianza si è sfruttata la simmetria del prodotto scalare nei suoi due argomenti. Si ottiene quindi $2\langle A_v w, w\rangle = 0$, ovvero $\langle A_v w, w\rangle = 0$ come voluto.

5. Dal punto precedente sappiamo che $A_v w$ e $A_v^2 w = A_v(A_v w)$ sono ortogonali. Dimostriamo ora che v è ortogonale a $A_v z$ per ogni $z \in \mathbb{R}^3$: da questo seguirà che v è in particolare ortogonale sia a $A_v w$ che a $A_v^2 w = A_v(A_v w)$. In effetti, usando la formula del punto 3 si ha

$$\langle A_v z, v\rangle = -\langle z, A_v v\rangle = -\langle z, 0\rangle = 0,$$

dove si è usato il fatto che (dal punto 2) sappiamo che $A_v v = 0$. Sappiamo quindi che i vettori $v, A_v w, A_v^2 w$ sono a due a due ortogonali. Mostriamo ora che nessuno di questi vettori è nullo. Nel caso di v questo è vero per ipotesi. Nel caso di $A_v w$, questo segue dal fatto che $A_v w = 0$ se e solo se w è un elemento di $\ker f_v = \mathrm{Span}(v)$, e nuovamente questo non accade per ipotesi. Infine, per quanto riguarda $A_v^2 w$, osserviamo che questo vettore è nullo se e solo se $A_v w$ appartiene a $\ker f_v$, ovvero se e solo se appartiene a $\mathrm{Span}(v)$. Ma abbiamo già visto che $A_v w$ appartiene all'ortogonale di $\mathrm{Span}(v)$, e visto che il prodotto scalare standard è definito positivo si ha $\mathrm{Span}(v) \cap \mathrm{Span}(v)^\perp = \{0\}$. Resta quindi da escludere che $A_v w$ sia uguale a 0, cosa che però abbiamo già dimostrato non accadere.

   Per concludere la dimostrazione si può ora ricordare che n vettori in $\mathbb{R}^n$ mutuamente ortogonali rispetto al prodotto scalare standard sono una base se e solo se ognuno di essi è diverso da 0. Anche senza invocare questo fatto, comunque, non è difficile concludere: sappiamo dalla teoria che $\mathrm{Span}(v) \oplus \mathrm{Span}(v)^\perp = \mathbb{R}^3$, e chiaramente v è una base di $\mathrm{Span}(v)$. Inoltre, $A_v w$ e $A_v^2 w$ sono due elementi dello spazio 2-dimensionale $\mathrm{Span}(v)^\perp$, quindi per mostrare che ne sono una base (il che implicherebbe che $v, A_v w, A_v^2 w$ sia una base di $\mathbb{R}^3$) basta dimostrare che non sono proporzionali. Ma d'altro canto abbiamo già dimostrato che sono ortogonali, e quindi di sicuro – visto che sono entrambi vettori non nulli – non possono essere proporzionali: se valesse $A_v^2 w = \lambda A_v w$ (con $\lambda \neq 0$) si avrebbe

$$\langle A_v^2 w, A_v w\rangle = \lambda\langle A_v w, A_v w\rangle \neq 0,$$

   perché $\langle A_v w, A_v w\rangle \neq 0$ visto che $A_v w$ non è il vettore nullo.

6. Questo può essere stabilito tramite un calcolo diretto, ma dimostriamo un fatto più generale: se v è un vettore di norma 1, allora $-A_v^2 w$ è la proiezione ortogonale di w su $\mathrm{Span}(v)^\perp$. Si osservi che questo conclude l'esercizio, perché $\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\rangle = 1$.

   Cominciamo determinando la proiezione ortogonale di w su $\mathrm{Span}(v)^\perp$. Visto che $\mathrm{Span}(v)$ è di dimensione 1, sappiamo dalla teoria che la proiezione ortogonale di w su $\mathrm{Span}(v)$ è data da

$$w_{//} = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \langle w, v\rangle v,$$

   dove si è usata l'ipotesi $\langle v, v\rangle = 1$. La proiezione di w su $\mathrm{Span}(v)^\perp$ è allora data da

$$w_\perp = w - w_{//} = w - v \cdot \langle v, w\rangle = w - vv^t w = (\mathrm{Id} - v \cdot v^t)w.$$

   Si osservi che $v \cdot v^t$ è la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2\end{pmatrix},$$

   e quindi la matrice dell'applicazione lineare che a w associa $w_\perp$ è

$$\begin{pmatrix}1-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma\\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 & -\beta\gamma\\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1-\gamma^2\end{pmatrix}.$$

   Osserviamo ora che, per calcolo diretto, $-A_v^2$ è la matrice

$$\begin{pmatrix}\gamma^2+\beta^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma\\ -\alpha\beta & \gamma^2+\alpha^2 & -\beta\gamma\\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

La tesi ora segue osservando che $1-\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ per via dell'ipotesi $\langle v, v\rangle = 1$, e similmente $\gamma^2 + \alpha^2 = 1 - \beta^2$ e $\beta^2 + \alpha^2 = 1 - \gamma^2$.

Nota. Questo risultato è un caso speciale della cosiddetta **formula di Lagrange** o **identità del prodotto triplo**,

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c,$$

valida per ogni terna di vettori $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. In effetti, ponendo $a = b = v$ e $c = w$ ed utilizzando $\langle v, v\rangle = 1$ si ottiene

$$v \times (v \times w) = \langle v, w\rangle v - \langle v, v\rangle w = -\left(w - \langle v, w\rangle v\right) = -w_{\perp},$$

il che, osservando che $v \times (v \times w) = A_v^2 w$, è proprio la tesi.

3.3 Prova di autovalutazione del 16/03/2020

Test.

1. Sia a un parametro reale. Consideriamo la matrice $M_a = \begin{pmatrix} -a & -a & -a & -a-1 \\ 0 & 0 & a & a+1 \\ 0 & 1-a & 1-2a & -a-1 \\ 0 & a & a & 1 \end{pmatrix}$, con polinomio caratteristico $(t+a)^2(t-1)(t-1+a)$. Elencare i valori di a per cui il rango di M_a è minore di 4 e il corrispondente rango:

a	Rango di M_a

Soluzione. Il rango di M_a è inferiore a 4 se e solo se il suo determinante è zero, ovvero se e solo se $p_{M_a}(0) = 0$. Questa condizione conduce all'equazione $a^2(a-1) = 0$, dunque la matrice M_a ha rango 4 per ogni $a \neq 0, 1$. Per $a = 1$ il polinomio caratteristico diventa $(t+1)^2(t-1)t$, la cui radice 0 è di molteplicità (algebrica) 1. Dalla teoria sappiamo che anche la sua molteplicità geometrica è allora 1, ovvero che $\dim \ker M_1 = 1$. Per differenza, il rango di M_1 è 3. Infine, per $a = 0$ la matrice M_0 è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha manifestamente rango 2 (la prima, seconda e quarta riga sono tutte fra loro proporzionali, e linearmente indipendenti dalla seconda). Riassumendo, la risposta è

a	Rango di M_a
0	2
1	3

2. Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di M e le rispettive molteplicità algebriche: ....

(b) Scrivere una matrice P tale che $P^{-1}MP$ sia una matrice diagonale:

(c) Quanto vale la traccia di M^5? ....

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M: si ha

$$p_M(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 5 & -5 \\ -5 & t+7 & -5 \\ -5 & 5 & t-3 \end{pmatrix},$$

e sommando la seconda colonna alla terza otteniamo

$$p_M(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 5 & 0 \\ -5 & t+7 & t+2 \\ -5 & 5 & t+2 \end{pmatrix} = (t+2)\det \begin{pmatrix} t-3 & 5 & 0 \\ -5 & t+7 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommando ora 5 volte la terza colonna alla prima ricaviamo

$$p_M(t) = (t+2)\det \begin{pmatrix} t-3 & 5 & 0 \\ 0 & t+7 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (t+2)(t-3)\det \begin{pmatrix} t+7 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (t+2)(t-3)(t+2).$$

Gli autovalori sono quindi -2, di molteplicità algebrica 2, e 3, di molteplicità algebrica 1.

(b) La richiesta equivale esattamente a quella di scrivere una matrice P le cui colonne siano tre autovettori di M fra loro linearmente indipendenti. Dobbiamo quindi calcolare una base per gli autospazi di M corrispondenti agli autovalori -2 e 3. Si ha

$$V_{-2} = \ker(M - (-2)\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e

$$V_3 = \ker(M - 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una possibile risposta è quindi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) La traccia di M^5 è la somma delle quinte potenze degli autovalori di M, dunque $\mathrm{tr}\, M^5 = (-2)^5 + (-2)^5 + 3^5 = -32 - 32 + 243 = 179$.

3. Una matrice 5×5 a coefficienti reali A soddisfa le equazioni $A^3 = A$ e $\mathrm{tr}\, A = 1$.

(a) A è necessariamente diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

(b) Dare un esempio di una matrice A con queste proprietà che **non** sia diagonale:

(c) Se in aggiunta alle ipotesi precedente si sa anche che A è invertibile, quali sono i suoi autovalori (e le loro relative molteplicità algebriche)? ....

Soluzione.

(a) Consideriamo il polinomio $p(t) = t^3 - t = t(t-1)(t+1)$. L'ipotesi fornisce $p(A) = A^3 - A = 0$, dunque il polinomio minimo di A è un fattore di $t(t-1)(t+1)$. In particolare, il polinomio minimo ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$, e ognuna di esse ha molteplicità al massimo 1. Segue da un criterio visto a lezione che A è diagonalizzabile.

(b) Per soddisfare la condizione $A^3 = A$ è sufficiente che la matrice verifichi $A^2 = \mathrm{Id}$. Un esempio di matrice non diagonale che rispetta questa proprietà (in dimensione 2) è $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: si ha $B^2 = \mathrm{Id}$ in quanto B rappresenta una simmetria nel piano (rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). Si può allora considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$: questa matrice rispetta $A^2 = \mathrm{Id}$ (e quindi a maggior ragione $A^3 = A$) e $\mathrm{tr}(A) = 1$ come voluto.

(c) Gli autovalori di A sono un sottoinsieme delle radici del polinomio minimo di A, che dal punto (a) sappiamo essere un fattore di $t(t-1)(t+1)$. Gli unici autovalori possibili per A sono dunque $0, 1, -1$, e siccome per ipotesi A è invertibile la prima possibilità va scartata. Ne segue che A ha come unici autovalori 1 e -1, di molteplicità a e b. La condizione $\mathrm{tr}(A) = 1$ allora implica $a \cdot 1 + b \cdot (-1) = 1$, che insieme a $a + b = 5$ (una matrice 5×5 ha 5 autovalori, se contati con molteplicità) implica $a = 3, b = 2$. La matrice A ha quindi autovalori 1, di molteplicità 3, e -1, di molteplicità 2.

4. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni scelta di A matrice antisimmetrica a coefficienti reali.

(a) A^2 è simmetrica ☐ Vero ☐ Falso

(b) A^2 è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ Vero ☐ Falso

(c) A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ Vero ☐ Falso

(d) A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ☐ Vero ☐ Falso

Dire inoltre se la seguente affermazione è vera:

(e) Esiste $A \neq 0$ antisimmetrica diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ Vero ☐ Falso

Nota. Una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$ è *diagonalizzabile* se l'applicazione lineare $L : K^n \to K^n$ la cui matrice in base canonica è M è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) Vero: infatti ${}^t(A^2) = {}^tA \cdot {}^tA = (-A)(-A) = A^2$, quindi A^2 è simmetrica.

(b) Vero: segue dal punto precedente e dal teorema spettrale.

(c) Falso: per esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, perché il suo polinomio caratteristico è $t^2 + 1$, che non ha radici reali.

(d) Vero: in effetti, la matrice $B := iA$ è hermitiana, perché $\overline{{}^t(iA)} = \overline{-iA} = iA$, e quindi diagonalizzabile. Ma allora $A = -iB$ è anch'essa diagonalizzabile.

(e) Falso: come nella dimostrazione del teorema spettrale, supponiamo che A sia $n \times n$ e consideriamo il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$. Allora, detto v un autovettore di A di autovalore λ, si ha

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle {}^tAv, v\rangle = \langle -Av, v\rangle = -\langle \lambda v, v\rangle = -\overline{\lambda}\langle v, v\rangle,$$

e quindi $\overline{\lambda} = -\lambda$, quindi λ è un numero puramente immaginario (ovvero della forma it con $t \in \mathbb{R}$). D'altro canto, se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, allora tutti i suoi autovalori sono reali, e quindi – per quanto appena visto – uguali a 0. Infine, una matrice diagonalizzabile con tutti gli autovalori nulli è essa stessa nulla.

3.4 Compitino dell'08/04/2020

Test.

1. Calcolare i seguenti determinanti:

(a) $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 28 \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Soluzione.

(a) Sviluppando con la regola di Laplace rispetto alla prima riga otteniamo che il determinante voluto è uguale a $3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; sviluppando nuovamente rispetto alla prima riga otteniamo allora

$$3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = 6 \cdot 10 = 60.$$

(b) Ponendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, il determinante voluto è $\det(A \cdot {}^tA)$, per cui – usando il teorema di Binet – è uguale a $\det(A) \cdot \det({}^tA)$. Inoltre sappiamo che $\det({}^tA) = \det(A)$, per cui ci siamo ricondotti a calcolare $\det(A)^2$. Osserviamo ora che A è triangolare a blocchi, per cui

$$\det(A) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 = 25.$$

In conclusione, il determinante voluto è $25^2 = 625$.

(c) Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 28 \end{pmatrix}$. Sottraendo la prima riga dalla terza e dalla quarta (operazione che non cambia il determinante) ci riduciamo a calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 27 \end{pmatrix}$, che è un determinante di Vandermonde di parametri $(0, 1, 2, 3)$. Il determinante voluto è quindi $(1-0)(2-0)(3-0)(2-1)(3-1)(3-2) = 12$.

2. Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione 3 su $\mathbb{R}$. È noto che $\operatorname{tr} T = 8$, che $\det T = 16$, e che esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $Tv = 4v$.

   (a) Dire se il polinomio caratteristico di T è univocamente determinato da questi dati, e in caso affermativo calcolarlo.

   ☐ Ci sono più possibilità per il polinomio caratteristico di T ☐ C'è un'unica possibilità per il polinomio caratteristico di T, ed è ....

   (b) Dire se T è diagonalizzabile: ☐ T è certamente diagonalizzabile ☐ T è certamente NON diagonalizzabile ☐ Esistono alcuni T con queste caratteristiche che sono diagonalizzabili ed altri che non lo sono.

   Soluzione.

   (a) Detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di T, le ipotesi forniscono $\operatorname{tr} T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8$, $\det T = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 16$ e (a meno di rinumerare i λ_1) $\lambda_1 = 4$. Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 8 - 4 = 4 \\ \lambda_2\lambda_3 = 16/4 = 4, \end{cases}$$

   ovvero λ_2, λ_3 sono (a meno dell'ordine) le due soluzioni dell'equazione di secondo grado t^2-4t+4. Si ha dunque $(t-\lambda_2)(t-\lambda_3) = t^2-4t+4$, e dunque il polinomio caratteristico di T è univocamente determinato, ed è dato da

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3) = (t - 4)(t^2 - 4t + 4).$$

   In forma estesa abbiamo $p_T(t) = t^3 - 8t^2 + 20t - 16$, e in forma fattorizzata $p_T(t) = (t - 4)(t - 2)^2$.

   (b) Dal punto precedente sappiamo che gli autovalori di T sono 4 (di molteplicità 1) e 2 (di molteplicità 2). Per quest'ultimo autovalore, la molteplicità geometrica può essere 2 oppure 1, come mostrano i due semplici esempi che seguono, in cui l'autovettore di autovalore 4 è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si noti che entrambi gli esempi hanno traccia 8 e determinante 16):

$$T_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Si osservi che T_1 è diagonale (e quindi in particolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 coincide con quella algebrica); in quanto a T_2, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari alla dimensione del nucleo di $T_2 - 2\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ovvero è uguale a 1, e dunque T_2 non è diagonalizzabile. Concludiamo quindi che le condizioni imposte su T non permettono di decidere se T sia diagonalizzabile o meno.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia v_1, v_2 una sua base. Sia poi v_1^*, v_2^* la corrispondente base di V^*, e infine sia v_1^{**}, v_2^{**} la base di $(V^*)^*$ duale rispetto a v_1^*, v_2^*. Consideriamo ora la base $w_1 := v_1 + 3v_2, w_2 := v_1 + 2v_2$ di V.

   (a) Sia w_1^*, w_2^* la base di V^* duale rispetto a w_1, w_2. Esprimere w_1^*, w_2^* in termini della base v_1^*, v_2^*:

   $w_1^* =$ $w_2^* =$

   (b) Sia w_1^{**}, w_2^{**} la base di $(V^*)^*$ duale rispetto a w_1^*, w_2^*. Esprimere w_1^{**}, w_2^{**} in termini della base v_1^{**}, v_2^{**}:

   $w_1^{**} =$ $w_2^{**} =$

   Soluzione.

(a) Scriviamo $w_1^* = av_1^* + bv_2^*$ con $a, b \in \mathbb{K}$ coefficienti reali da determinare. Per definizione di base duale si ha

$$w_1^*(w_1) = 1, \quad w_1^*(w_2) = 0,$$

ovvero, sostituendo w_1, w_2 con la loro definizione,

$$(av_1^* + bv_2^*)(v_1 + 3v_2) = 1, \quad (av_1^* + bv_2^*)(v_1 + 2v_2) = 0.$$

Sviluppando le precedenti equazioni per linearità e ricordando che

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $a = -2, b = 1$. Si ha dunque $w_1^* = -2v_1^* + v_2^*$. Similmente, scrivendo $w_2^* = cv_1^* + dv_2^*$ e ricordando che $w_2^*(w_1) = 0, w_2^*(w_2) = 1$ si ottiene

$$(cv_1^* + dv_2^*)(v_1 + 3v_2) = 0, \quad (cv_1^* + dv_2^*)(v_1 + 2v_2) = 1,$$

da cui

$$\begin{cases} c + 3d = 0 \\ c + 2d = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow c = 3, d = -1,$$

ovvero $w_2^* = 3v_1^* - v_2^*$.

(b) Gli elementi w_1^{**}, w_2^{**} di $(V^*)^*$ sono applicazioni lineari $V^* \to \mathbb{K}$, univocamente identificate dalle proprietà

$$\begin{aligned} w_1^{**}(w_1^*) = 1, \quad w_1^{**}(w_2^*) = 0 \\ w_2^{**}(w_1^*) = 0, \quad w_2^{**}(w_2^*) = 1. \end{aligned}$$

Come sopra, scrivendo $w_1^{**} = ev_1^{**} + fv_2^{**}$ si trova

$$1 = (ev_1^{**} + fv_2^{**})(w_1^*) = (ev_1^{**} + fv_2^{**})(-2v_1^* + v_2^*) = -2e + f$$

e

$$0 = (ev_1^{**} + fv_2^{**})(w_2^*) = (ev_1^{**} + fv_2^{**})(3v_1^* - v_2^*) = 3e - f,$$

da cui $e = 1, f = 3$, ovvero $w_1^{**} = v_1^{**} + 3v_2^{**}$. Similmente possiamo scrivere $w_2^{**} = gv_1^{**} + hv_2^{**}$, e otteniamo le equazioni

$$0 = (gv_1^{**} + hv_2^{**})(w_1^*), \quad 1 = (gv_1^{**} + hv_2^{**})(w_2^*),$$

ovvero

$$0 = (gv_1^{**} + hv_2^{**})(-2v_1^* + v_2^*), \quad 1 = (gv_1^{**} + hv_2^{**})(3v_1^* - v_2^*).$$

Otteniamo allora

$$0 = -2g + h, \quad 1 = 3g - h,$$

cioè $g = 1, h = 2$. Si ha quindi $w_2^{**} = v_1^{**} + 2v_2^{**}$

Nota 1. Si potrà osservare che i cambiamenti di base in V e in $(V^*)^*$ sono rispettivamente

$$w_1 = v_1 + 3v_2, \quad w_2 = v_1 + 2v_2$$

e

$$w_1^{**} = v_1^{**} + 3v_2^{**}, \quad w_2^{**} = v_1^{**} + 2v_2^{**},$$

ovvero corrispondono alla medesima matrice di cambio base. Questa non è una coincidenza, bensì una conseguenza dell'esistenza di un isomorfismo canonico fra V e $(V^*)^*$.

Nota 2. Il calcolo descritto nella soluzione può essere reinterpretato come segue. Data la matrice di cambio base $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (ovvero la matrice dell'identità dalla base dei $\{w_i\}$ alla base dei $\{v_i\}$), la matrice di cambio base da $\{w_i^*\}$ a $\{v_i^*\}$ è la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che è l'inversa trasposta della precedente. Similmente, la matrice di cambio base da $\{w_i^{**}\}$ a $\{v_i^{**}\}$ è l'inversa trasposta della matrice precedente, ovvero coincide nuovamente con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. In effetti, se scriviamo $w_i = \sum_{j=1}^{2} A_{ji} v_j$ e $w_k^* = \sum_{j=1}^{2} B_{jk} v_j^*$, e se denotiamo per comodità

$$\delta_{ki} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

allora la condizione $w_k^*(w_i) = \delta_{ki}$ diventa

$$\delta_{ki} = w_k^*(w_i) = \left(\sum_{j=1}^{2} B_{jk} v_j^* \right) \left(\sum_{l=1}^{2} A_{li} v_l \right) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} B_{jk} A_{li} v_j^*(v_l);$$

considerando che $v_j^*(v_l)$ è 0 a meno che $j = l$, nel qual caso è uguale ad 1, l'equazione precedente si riscrive

$$\delta_{ki} = \sum_{j=1}^{2} B_{jk} A_{ji} = \sum_{j=1}^{2} {}^t A_{ij} \cdot B_{jk} = ({}^t AB)_{ik}$$

D'altro canto, la matrice che in posizione (i, k) ha come coefficiente δ_{ki} è semplicemente la matrice identità, quindi l'uguaglianza precedente si riscrive in maniera più compatta come

$$\mathrm{Id} = {}^t A \cdot B,$$

ovvero come affermato $B = {}^t(A^{-1})$. Ripetendo il medesimo ragionamento si vedo anche che la matrice di cambio base su $(V^*)^*$ è nuovamente uguale ad A.

4. Consideriamo il prodotto scalare su $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dato da $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-15}^{15} f(x) g(x)\, dx$. Sia $T : V \to V$ l'endomorfismo che manda $f(x)$ in $\int_{-15}^{15} f(x)\, dx$ (ovvero $T(f(x))$ è il polinomio costantemente uguale al numero reale $\int_{-15}^{15} f(x)\, dx$). Sia infine $\mathcal{B}$ la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di V.

   (a) Scrivere la matrice M di T^* (l'aggiunto di T rispetto al prodotto scalare dato) in base $\mathcal{B}$:

   (b) Determinare il polinomio minimo di T: ....

   (c) Trovare una base $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ di V con le seguenti proprietà: il coefficiente di testa di ogni $p_i(x)$ è 1; $p_i(x)$ è un polinomio di grado i per $i = 0, 1, 2, 3$; la base è ortogonale rispetto al prodotto scalare dato, e costituita di autovettori di T. Scrivere qui $p_2(x)$ e $p_3(x)$:

Soluzione.

(a) Si osservi che

$$\begin{aligned}\langle T(f(x)), g(x)\rangle &= \int_{-15}^{15}\left(\int_{-15}^{15} f(y)\,dy\right) g(x)\,dx = \left(\int_{-15}^{15} f(y)\,dy\right)\left(\int_{-15}^{15} g(x)\,dx\right)\\ &= \int_{-15}^{15} f(x)\left(\int_{-15}^{15} g(y)\,dy\right)\,dx = \int_{-15}^{15} f(x)T(g(x))\,dx\\ &= \langle f(x), T(g(x))\rangle,\end{aligned}$$

e dunque T è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare dato. Si ha quindi $T^* = T$, ed è sufficiente determinare la matrice di T: siccome $T(1) = 30$, $T(x) = 0$ (integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico), $T(x^2) = \int_{-15}^{15} x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_{-15}^{15} = \frac{2}{3}\cdot 15^3 = (\frac{2}{3}\cdot 15)\cdot 15^2 = 10\cdot 225 = 2250$ e $\int_{-15}^{15} x^3\,dx = 0$, la matrice di T è

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 2250 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(b) Il prodotto scalare dato è ovviamente definito positivo, e T è autoaggiunto rispetto ad esso, quindi per il teorema spettrale T è diagonalizzabile. Ne segue che il suo polinomio minimo è un prodotto di fattori lineari $(t-\lambda_i)$, dove i λ_i sono precisamente gli autovalori di T. D'altro canto, il polinomio caratteristico di T^* (che coincide con quello di T per quanto osservato sopra) si determina immediatamente dalla matrice scritta sopra, che è triangolare: si ha $p_T(t) = (t-30)t^3$. Ne segue che il polinomio minimo di T è $t(t-30) = t^2 - 30t$.

(c) Il polinomio $p_0(x)$ è fissato dalle condizioni date: si ha $p_0(x) = 1$ (l'unico polinomio di grado 0 con termine di grado massimo uguale ad 1). Si osservi che in effetti $T(p_0(x)) = 30 = 30p_0(x)$, quindi $p_0(x)$ è un autovettore di T. Dal momento che vogliamo una base diagonalizzante, i vettori $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ devono formare una base dell'autospazio relativo all'autovalore 0 (ovvero una base di $\ker T$). Abbiamo già visto che $T(x) = 0$, e quindi $p_1(x) = x$. Anche se non è necessario, osserviamo che questo è in effetti l'unico polinomio $ax + b$ di grado 1, con coefficiente di testa $a = 1$ e tale che $T(ax + b) = 0$: in effetti $T(ax + b) = T(x + b) = T(x) + T(b) = 0 + 30b$ si annulla solo se $b = 0$. Inoltre, un calcolo diretto (o un'applicazione del teorema spettrale: autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali) mostra che $p_1(x)$ è ortogonale a $p_0(x)$.

Veniamo ora a $p_2(x) = x^2 + bx + c$. Affinché questo sia nel nucleo di T si deve avere $0 = T(p_2(x)) = T(x^2) + bT(x) + T(c) = 2250 + 0 + 30c$, da cui $c = -75$. Il coefficiente b è invece fissato dalla condizione $\langle p_2(x), p_1(x)\rangle = 0$: in effetti,

$$0 = \langle x^2 + bx + c, x\rangle = 0 + b\langle x, x\rangle + 0 \Rightarrow b = 0.$$

Si ha dunque $p_2(x) = x^2 - 75$. Infine, $p_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ deve rispettare le seguenti condizioni:

i. $T(p_3(x)) = 0 + 2250a + 0 + 30c \Rightarrow c = -75a$;
ii. $0 = \langle p_1(x), p_3(x)\rangle = \langle x, x^3 + ax^2 + bx + c\rangle = \int_{-15}^{15} x^4 + bx^2\,dx = \frac{2}{5}\cdot 15^5 + \frac{2b}{3}\cdot 15^3$, da cui $b = -\frac{3}{5}\cdot 15^2 = -135$.
iii. $0 = \langle p_2(x), p_3(x)\rangle = \langle x^2 - 75, x^3 + ax^2 + bx + c\rangle = \langle x^2 - 75, ax^2 + c\rangle = \langle x^2 - 75, a(x^2 - 75)\rangle$, da cui $a = 0$ e quindi anche $c = 0$.

Il polinomio $p_3(x)$ è quindi $x^3 - 135x$.

Osservazione. Il calcolo di $p_3(x)$ può essere reso più semplice dalla seguente osservazione: esso deve appartenere all'ortogonale di $\mathrm{Span}\{p_0(x), p_2(x)\} = \mathrm{Span}\{1, x^2\}$, ed è immediato vedere che questo ortogonale è $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$. Il polinomio $p_3(x)$ è quindi della forma $x^3 + bx$, ed è sufficiente imporre la condizione (ii) qui sopra per determinare b.

5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione tale che $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\-11\\10\end{pmatrix}$ e $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'immagine tramite T del vettore $\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}$:

(b) Determinare un vettore a coefficienti interi che generi l'asse di rotazione di T:

Soluzione.

(a) Chiaramente è sufficiente determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e poi moltiplicare il risultato per 15. Scriviamo la matrice M di T in base canonica: $\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & a\\ \frac{-11}{15} & -\frac{2}{3} & b\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & c\end{pmatrix}$, dove $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Come noto, il fatto che T sia una rotazione implica che le colonne di M siano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Otteniamo quindi le condizioni

$$\langle \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\-11\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\rangle = 0, \quad \langle -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\rangle = 0, \quad a^2+b^2+c^2 = 1.$$

Le prime due equazioni danno $\begin{cases}2a-11b+10c=0\\ a+2b+2c=0\end{cases}$, da cui $2(-2b-2c)-11b+10c = 0 \Rightarrow -15b+6c = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2}b$ e $a = -2b-2c = -2b-5b = -7b$. Imponendo infine $a^2+b^2+c^2 = 1$ troviamo $49b^2+b^2+\frac{25}{4}b^2 = 1 \Rightarrow 225b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm\frac{2}{15}$. La terza colonna di M è quindi uguale a $\pm\begin{pmatrix}-\frac{14}{15}\\ \frac{2}{15}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Per determinare quale sia il segno corretto, ricordiamo che una matrice che rappresenta una rotazione deve avere determinante $+1$. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{14}{15}\\ \frac{-11}{15} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} &= \frac{1}{3\cdot 15^2}\det\begin{pmatrix}2 & -1 & -14\\ -11 & -2 & 2\\ 10 & -2 & 5\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3\cdot 15^2}(-20-20-22\cdot 14+8-55-280):\end{aligned}$$

anche senza calcolare esattamente il determinante (che in ogni caso risulta -1, come ci aspettavamo da una matrice le cui colonne siano una base ortonormale) è evidente che questo numero è negativo, e dunque questa scelta non conduce ad una matrice di rotazione. Ne segue che la scelta corretta è quella con il segno opposto, e dunque

$$M = \begin{pmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{14}{15}\\ \frac{-11}{15} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

L'immagine tramite T di $\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}$ è dunque $\begin{pmatrix}14\\-2\\-5\end{pmatrix}$.

(b) Per determinare l'asse di rotazione di T è sufficiente studiare il suo autospazio di autovalore 1, ovvero

$$\ker \begin{pmatrix} \frac{-13}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} \\ \frac{-11}{15} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che il nucleo non cambia se riscaliamo l'intera matrice per un medesimo scalare, possiamo moltiplicare tutto per 15 e ricondurci a lavorare con

$$\ker \begin{pmatrix} -13 & -5 & 14 \\ -11 & -25 & -2 \\ 10 & -10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che le mosse di riga non cambiano il nucleo, procediamo come segue:

$$\xrightarrow{[3]-2[1]} \begin{pmatrix} -13 & -5 & 14 \\ -11 & -25 & -2 \\ 36 & 0 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]/12} \begin{pmatrix} -13 & -5 & 14 \\ -11 & -25 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+4[3]} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -11 & -25 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ci siamo quindi ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x - 5y - 2z = 0 \\ 3x - 4z = 0; \end{cases}$$

si noti che possiamo eliminare un'equazione, perché dalla teoria sappiamo che questo nucleo deve avere dimensione almeno 1, e quindi un'equazione dev'essere linearmente dipendente rispetto alle altre. È a questo punto immediato (ad esempio per sostituzione) trovare la soluzione $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, che è quindi una possibile risposta alla domanda (le altre risposte sono tutti i multipli interi di questo vettore).

Parte dimostrativa.

Notazione. Data una matrice Hermitiana H, scriviamo $H \geq 0$ se tutti gli autovalori di H sono numeri reali non negativi.

1. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice che è simultaneamente Hermitiana ed unitaria. Dimostrare che se $A \geq 0$, allora A è l'identità.

2. Sia $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice diagonale. Supponendo che tutti i coefficienti di D siano non-negativi, dimostrare che esiste una matrice $E \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $D = E^2$.

3. Sia $Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice Hermitiana con la proprietà che $\langle x, Qx\rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ (qui $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota il prodotto Hermitiano standard). Dimostrare che esiste una matrice Hermitiana $H \geq 0$ tale che $Q = H^2$.

4. Data $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ dimostrare che $Q := MM^*$ è Hermitiana e vale $\langle x, Qx\rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$.

5. Dimostrare che data $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertibile esistono una matrice unitaria $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e una matrice Hermitiana $H \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tali che $H \geq 0$ e $M = HU$.

6. $(\star)$ Dimostrare che le matrici H ed U del punto precedente sono uniche.

Soluzione.

1. Il teorema spettrale garantisce che A (in quanto matrice Hermitiana) è diagonalizzabile ed ha tutti gli autovalori reali. D'altro canto, i suoi autovalori hanno valore assoluto 1 (perché A è unitaria), quindi sono tutti uguali a ± 1. La condizione di positività dice allora che tutti gli autovalori sono uguali ad 1, e quindi – in un'opportuna base diagonalizzante – A è l'identità. Ma l'identità ha la medesima matrice in ogni base, e quindi A stessa è l'identità.

2. Detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i coefficienti diagonali di D, è sufficiente prendere come E la matrice diagonale i cui coefficienti sono $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$: si noti che queste quantità hanno senso perché per ipotesi i λ_i sono numeri reali ≥ 0.

3. Il teorema spettrale mostra che possiamo scrivere $Q = UDU^{-1}$, dove D è una matrice diagonale a coefficienti reali e U è una matrice unitaria. Affermiamo che tutti i coefficienti di D sono ≥ 0 (si osservi che D è diagonale, quindi basta dimostrare questa affermazione per i coefficienti diagonali di D). In effetti, sia λ un coefficiente diagonale di D, ovvero un autovalore di Q; sia v un corrispondente autovettore. Otteniamo

$$\langle v, Qv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \geq 0,$$

   e quindi, siccome $\langle v, v \rangle$ è strettamente maggiore di 0 (il prodotto Hermitiano standard è definito positivo, e v è diverso da 0), si ha $\lambda \geq 0$ come voluto. Segue dal punto precedente che possiamo scrivere $D = E^2$ con E che ha tutti i coefficienti non-negativi; poniamo $H = UEU^{-1}$. Allora da un lato si ha $H^2 = UEU^{-1}UEU^{-1} = UE^2U^{-1} = UDU^{-1} = Q$, e dall'altro $H \geq 0$ perché i suoi autovalori sono i coefficienti diagonali di E, che sono ≥ 0 per costruzione.

4. Si ha $Q^* = (MM^*)^* = (M^*)^*M^* = MM^* = Q$, e dunque Q è Hermitiana. Inoltre, $\langle x, Qx \rangle = \langle x, MM^*x \rangle = \langle M^*x, M^*x \rangle$ è ≥ 0 in quanto prodotto Hermitiano di un vettore con se stesso.

5. Supponiamo di riuscire a scrivere $M = HU$: allora (usando $UU^* = \mathrm{Id}$ per una matrice unitaria e $H^* = H$ per una matrice Hermitiana) otterremmo $MM^* = (HU)(U^*H^*) = H(UU^*)H^* = HH^* = H^2$. È quindi naturale cercare di prendere H come una "radice quadrata" di MM^*. Dopo questi commenti, che servono solo a motivare i passaggi che seguiranno, dimostriamo ora l'affermazione del testo.

   Sia $Q = MM^*$. Grazie al punto 4 sappiamo che valgono le ipotesi del punto 3, quindi esiste una matrice Hermitiana $H \geq 0$ tale che $H^2 = Q = MM^*$. Poniamo $U := H^{-1}M$: si noti che questa espressione ha senso, perché $H^2 = MM^*$ è prodotto di matrici invertibili, dunque è invertibile, e quindi anche H stessa è invertibile (ad esempio per il teorema di Binet: se $\det(H^2) = \det(H)^2$ è diverso da 0, anche $\det H$ è diverso da 0). Visto che chiaramente si ha $M = HU$ per costruzione, resta solo da verificare che U è unitaria, ed in effetti si ha

$$UU^* = (H^{-1}M)(H^{-1}M)^* = H^{-1}MM^*(H^*)^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = \mathrm{Id},$$

   dove si è usato il fatto che $MM^* = H^2$ e che $H^* = H$ in quanto H è Hermitiana.

6. Supponiamo di avere $M = H_1U_1 = H_2U_2$ con H_1, H_2 Hermitiane ≥ 0 e U_1, U_2 unitarie. Come sopra osserviamo che $MM^* = H_1^2 = H_2^2$: posto $Q = MM^*$, se dimostriamo che l'equazione $H^2 = Q$ ha un'unica soluzione con H Hermitiana ≥ 0 abbiamo finito, perché a quel punto si avrebbe $H_1 = H_2$ e quindi $U_1 = H_1^{-1}M = H_2^{-1}M = U_2$. Cerchiamo quindi di descrivere le soluzioni dell'equazione $H^2 = Q$. Siccome Q è Hermitiana, si diagonalizza per il teorema spettrale, dunque possiamo scrivere $\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda V_\lambda$, dove V_λ è l'autospazio di Q di autovalore λ. Data una qualsiasi matrice H tale che $H^2 = Q$, si ha chiaramente che H e Q commutano (perché Q è una potenza di H), quindi da un lemma visto a lezione sappiamo che H preserva gli autospazi di Q. Basta quindi mostrare che $H|_{V_\lambda}$ (che ha senso per quanto abbiamo appena detto) è univocamente determinata per ogni autovalore λ. Fissiamo allora un autovalore λ (che ricordiamo essere un numero reale positivo) e sia per semplicità $T := H|_{V_\lambda}$. Allora T è Hermitiana (in quanto restrizione di un endomorfismo Hermitiano) e quindi diagonalizzabile; inoltre $T^2 = Q|_{V_\lambda} = \lambda\,\mathrm{Id}$, quindi tutti gli autovalori

di T sono uguali a $\pm\sqrt{\lambda}$. Ma per ipotesi gli autovalori di H (e quindi a maggior ragione quelli di T) sono ≥ 0, quindi tutti gli autovalori di T sono in effetti uguali a $+\sqrt{\lambda}$. Infine, una matrice diagonalizzabile con tutti gli autovalori uguali a $\sqrt{\lambda}$ è uguale a $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}$. Ne segue che $T = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}$ è univocamente determinata, e quindi anche H è univocamente determinata (perché ne conosciamo la restrizione ad una collezione di sottospazi la cui somma è l'intero spazio).

3.5 Compito del 20/05/2020

Test.

1. Per ciascuno dei seguenti insiemi X si dica se X è un sottospazio vettoriale di $V = \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ e in caso affermativo se ne determini la dimensione.

   (a) $X_1 = \{A \in V : A^2 = 0\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ Sottospazio di dimensione ......

   (b) $X_2 = \{A \in V : MAM = 0\}$, dove $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ Sottospazio di dimensione ......

   Soluzione.

   (a) Non è un sottospazio vettoriale: in effetti le matrici
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   appartengono ad X_1, come è immediato verificare, ma la loro somma non vi appartiene. Si ha quindi che X_1 non è un sottospazio vettoriale in quanto non è chiuso per somma.

   (b) Si tratta di un sottospazio vettoriale, in quanto è definito da equazioni lineari nelle coordinate naturali a_{ij} (dove a_{ij} rappresenta il coefficiente sulla riga i e colonna j). Più precisamente, è facile rendersi conto che la matrice AM ha tutte le colonne uguali, e in particolare uguali a $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34} \\ a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44} \end{pmatrix}$. Ne segue facilmente che MAM è una matrice con tutti i coefficienti uguali fra loro, ed uguali a $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}$, e quindi $MAM = 0$ se e solo se $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij} = 0$. Si ha quindi che X_2 è definito da una singola equazione lineare (non banale), e dunque ha dimensione 15.

2. Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data dalla proiezione ortogonale di un vettore sulla retta $y = 3x$.

   (a) Scrivere la matrice di 10π in base canonica:

   (b) Calcolare il determinante di $\mathrm{Id} - \pi$: ....

   Soluzione.

   (a) Osserviamo intanto che la retta $y = 3x$ è generata dal vettore $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e che la retta ad essa ortogonale è generata da $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Scrivendo un generico vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ come $\lambda u + \mu w$, la proiezione ortogonale di v lungo la retta $y = 3x$ è data da
   $$\pi(v) = \lambda u = \frac{\langle \lambda u + \mu w, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{x + 3y}{10} u.$$

In particolare, $\pi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ e $\pi\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{10}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, quindi la matrice di π in base canonica è $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}$, e quella di 10π è $\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}$.

(b) L'applicazione lineare $\mathrm{Id} - \pi$ è la proiezione ortogonale sulla retta ortogonale a $y = 3x$, e quindi ha rango 1 e determinante 0. Questo si può anche verificare direttamente: per quanto visto sopra, la matrice (in base canonica) di $\mathrm{Id} - \pi$ è $\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$, con determinante $\frac{9}{10}\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\frac{3}{10} = 0$.

3. Si consideri il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\3 & -2 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

(a) Scrivere la matrice di φ in base $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

(b) Determinare la segnatura di φ: si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

Soluzione.

(a) Si tratta di calcolare i prodotti scalari $\varphi(v_i, v_j)$ (dove v_1, v_2, v_3 è la base indicata), o equivalentemente il prodotto

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\3 & -2 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\3 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\5 & 6 & 5\\6 & 5 & 5\end{pmatrix}.$$

(b) Consideriamo la restrizione di φ al sottospazio generato da e_1 ed e_3 (primo e terzo vettore della base canonica): la matrice di questa restrizione è $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, ovvero la sottomatrice della matrice di φ in base canonica corrispondente alla prima e terza riga e prima e terza colonna. Dal momento che sia il determinante sia la traccia di questa matrice sono positivi, questa restrizione è definita positiva, e quindi $n_+ \geq 2$. D'altro canto $\varphi(e_2, e_2) = -2$, come si legge immediatamente dalla matrice data, dunque $n_-(\varphi) \geq 1$. Si conclude immediatamente che $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e $d : V \to V$ l'applicazione lineare derivata, che manda $p(x)$ in $p'(x)$. Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \to V$ data da $f = (\mathrm{Id} - d^2) \circ (2\,\mathrm{Id} - d^3) \circ (3\,\mathrm{Id} - d^4)$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di f: ....

(b) f è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

(c) Determinare il polinomio minimo di f: ....

Soluzione.

(a) Nella base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ la matrice di d è $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, dunque in particolare triangolare strettamente superiore. Ne segue che (nella medesima base) la matrice di $\mathrm{Id} - d^2$ è triangolare con tutti i coefficienti diagonali uguali ad 1, che la matrice di $2\,\mathrm{Id} - d^3$ è triangolare con tutti i coefficienti diagonali uguali a 2, e che la matrice di $3\,\mathrm{Id} - d^4$ è triangolare con tutti i coefficienti diagonali uguali a 3. Il loro prodotto è quindi triangolare con tutti i coefficienti diagonali uguali a 6, e il polinomio caratteristico è dunque $(t - 6)^5$.

(b) Segue dal punto precedente che l'unico autovalore di f è 6. Se f fosse diagonalizzabile sarebbe uguale a 6 volte l'identità, cosa che chiaramente non è, come si può vedere ad esempio applicando f al polinomio x^2: si ha

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (\mathrm{Id} - d^2) \circ (2\,\mathrm{Id} - d^3) \circ (3\,\mathrm{Id} - d^4)(x^2) \\ &= (\mathrm{Id} - d^2) \circ (2\,\mathrm{Id} - d^3)(3x^2) \\ &= (\mathrm{Id} - d^2)(6x^2) = 6x^2 - 12 \neq 6x^2. \end{aligned}$$

(c) Come noto, il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico, quindi sarà della forma $(t-6)^k$ per un certo $k \leq 5$. Osserviamo che $d^5 = 0$, quindi

$$f = (\mathrm{Id} - d^2)(2\,\mathrm{Id} - d^3)(3\,\mathrm{Id} - d^4) = (2\,\mathrm{Id} - 2d^2 - d^3)(3\,\mathrm{Id} - d^4) = 6\,\mathrm{Id} - 6d^2 - 3d^3.$$

Si ha allora $f - 6\,\mathrm{Id} = -6d^2 - 3d^3 = d^2(-6\,\mathrm{Id} - 3d)$, e come prima è facile osservare che la matrice (nella base usata precedentemente) di $-6\,\mathrm{Id} - 3d$ è triangolare con tutti i coefficienti diagonali uguali a -6, e dunque è invertibile. Stiamo perciò cercando il minimo esponente k per cui $\left(d^2(-6\,\mathrm{Id} - 3d)\right)^k = 0$, e visto che il fattore $-6\,\mathrm{Id} - 3d$ è invertibile (e commuta con d^2) questo è equivalente a trovare il minimo k per cui $(d^2)^k = 0$. Siccome $d^4 \neq 0$ ma $d^6 = 0$ si ha $k = 3$, e il polinomio minimo è $(t-6)^3$.

5. Sia M la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 1-i & -1-i \\ 1+i & 3 & 0 \\ -1+i & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) M è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Sì ☐ No

(b) Quali sono gli autovalori di M (con rispettive molteplicità algebriche)? ....

(c) Elencare il massimo numero possibile di autovettori di M linearmente indipendenti:

(d) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa. Dati due autovettori v_1, v_2 di M, questi sono o proporzionali, o ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard

☐ Vero ☐ Falso

Soluzione.

(a) Si verifica immediatamente che la matrice M è Hermitiana, e dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale.

(b) Si tratta di trovare le radici del polinomio caratteristico di M, a sua volta dato da

$$\begin{aligned} p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) &= \det \begin{pmatrix} t-6 & -1+i & 1+i \\ -1-i & t-3 & 0 \\ 1-i & 0 & t-3 \end{pmatrix} \\ &= (t-6)(t-3)^2 - (t-3)(-1+i)(-1-i) - (t-3)(1+i)(1-i) \\ &= (t-3)\left((t-6)(t-3) - ((-1)^2 - i^2) - (1^2 - i^2)\right) \\ &= (t-3)\left(t^2 - 9t + 18 - 4\right) \\ &= (t-3)(t-2)(t-7), \end{aligned}$$

dove si è usata la regola di Sarrus per sviluppare il determinante 3×3. Gli autovalori sono dunque 2, 3, 7, ognuno di molteplicità 1; si noti da un lato che questo conferma la diagonalizzabilità (in quanto il criterio sulle molteplicità algebriche e geometriche è automaticamente rispettato), e dall'altro che gli autovalori sono reali, fatto che come sappiamo dalla teoria vale per ogni matrice hermitiana.

(c) Dal momento che M è diagonalizzabile, esiste una base di $\mathbb{C}^3$ formata di autovettori, quindi dobbiamo trovare tre autovettori linearmente indipendenti. Visto che M possiede tre autovalori distinti, si tratta di trovare un generatore del kernel di $M - \lambda\,\mathrm{Id}$ per $\lambda = 2, 3, 7$ (si osservi che ognuno di questi kernel è necessariamente di dimensione 1). Nei vari casi si ha rispettivamente

- $\lambda = 2$, $\ker \begin{pmatrix} 4 & 1-i & -1-i \\ 1+i & 1 & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}$: il modo più facile di trovare questo vettore è quello di scartare l'equazione corrispondente alla prima riga (che sappiamo dalla teoria essere linearmente dipendente dalle altre due), scegliere la prima coordinata uguale ad 1, e ottenere la seconda e la terza coordinata dalle equazioni corrispondenti alla seconda e terza riga.
- $\lambda = 3$, $\ker \begin{pmatrix} 3 & 1-i & -1-i \\ 1+i & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (è chiaro che la seconda e terza colonna della matrice $M - 3\,\mathrm{Id}$ sono linearmente dipendenti, per cui basta calcolare il fattore di proporzionalità)
- $\lambda = 7$, $\ker \begin{pmatrix} -1 & 1-i & -1-i \\ 1+i & -4 & 0 \\ -1+i & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$, dove il vettore può essere trovato rapidamente come nel caso $\lambda = 2$.

(d) L'affermazione è vera: siccome gli autospazi di M sono di dimensione 1, come verificato sia al punto (b) che al punto (c), si hanno due casi: o v_1, v_2 appartengono al medesimo autospazio (e quindi sono proporzionali), o appartengono ad autospazi diversi (e quindi sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard, come garantito dal teorema spettrale).

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Siano A, B matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} A^3 = B^2 = \mathrm{Id} \\ AB = BA^2 \\ A \neq \mathrm{Id} \end{cases}$$

1. Dimostrare che $\det A = 1$.
2. Dimostrare che, se λ è un autovalore di A, allora $\lambda^3 = 1$.
3. Dimostrare che A ha tre autovalori distinti in $\mathbb{C}$, e che uno di essi è uguale ad 1.
4. Sia v un autovettore di A di autovalore 1. Dimostrare che v è anche un autovettore di B.
5. Dimostrare che esistono una matrice invertibile $P \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, un numero complesso ζ, e una scelta di segno ± 1 tali che si abbia

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

1. Si ha $\det(A^3) = \det(\mathrm{Id}) = 1$, ma d'altro canto $\det(A^3) = \det(A)^3$ per il teorema di Binet. Il determinante di A è quindi un numero reale (perché A è a coefficienti reali) che risolve l'equazione $(\det A)^3 = 1$, da cui $\det A = 1$ come voluto.

2. Sia w un autovettore di A di autovalore λ. Si ha allora

$$w = \mathrm{Id} \cdot w = A^3 \cdot w = A^2(Aw) = A^2(\lambda w) = \lambda A(Aw) = \lambda A(\lambda w) = \lambda^2 Aw = \lambda^3 w,$$

da cui $\lambda^3 = 1$.

In alternativa: l'ipotesi mostra che, detto $q(t) = t^3 - 1$, si ha $q(A) = 0$. Ne segue che il polinomio minimo di A è un divisore di $q(t)$, e abbiamo visto che ogni autovalore di A è una radice del suo polinomio minimo (e quindi anche di $q(t)$, che sappiamo essere un multiplo del polinomio minimo). Si ha perciò $q(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0$ come voluto.

3. Consideriamo il polinomio $q(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$. L'ipotesi su A garantisce che $q(A) = 0$, quindi il polinomio minimo di A è un divisore (di grado positivo) di $(t-1)(t^2+t+1)$. Gli unici tali divisori sono t^2+t+1, $t-1$, e $(t-1)(t^2+t+1)$. Escludiamo le prime due possibilità:

   (a) se il polinomio minimo di A fosse $t-1$, allora si avrebbe $A - \mathrm{Id} = 0$, cioè $A = \mathrm{Id}$, il che contraddice le ipotesi.

   (b) se il polinomio minimo di A fosse t^2+t+1, allora il polinomio caratteristico di A (che è multiplo del polinomio minimo, per il teorema di Cayley-Hamilton) dovrebbe essere della forma $p_A(t) = (t^2+t+1)(t-b)$ per un certo $b \in \mathbb{R}$. Siccome $p_A(0) = \det(-A) = -\det(A) = -1$ otterremmo immediatamente $b = 1$, cioè 1 sarebbe un autovalore di A. Ma ogni autovalore di A è radice anche del polinomio minimo, assurdo perché t^2+t+1 non si annulla per $t = 1$.

   Concludiamo quindi che il polinomio minimo di A è proprio $q(t)$. Ma il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico, che ha a sua volta grado 3 (perché A è una matrice 3×3), quindi il polinomio caratteristico di A deve essere $q(t)$. Gli autovalori si trovano quindi risolvendo l'equazione $q(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1) = 0$, che ha come soluzioni $t = 1$ e $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Come voluto, questi tre autovalori sono distinti, e uno di essi è uguale ad 1.

4. Osserviamo che l'equazione $AB = BA^2$ implica $ABv = BA^2v$, e siccome $Av = v$ per ipotesi otteniamo $ABv = Bv$, ovvero Bv appartiene all'autospazio di A relativo all'autovalore 1. La dimensione di questo autospazio è la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 per la matrice A, e quindi è uguale ad 1 (perché la molteplicità algebrica è 1, come sappiamo dal punto (2)). Questo significa che il vettore v è una base dell'autospazio di A relativo all'autovalore 1, e quindi Bv (che appartiene a tale autospazio) è un multiplo di v. Per definizione, questo vuol dire che il vettore non nullo v è un autovettore di B.

5. Sia v un autovettore di A di autovalore 1 e sia w un autovettore di A di autovalore $\zeta := \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Poniamo poi $u = Bw$. Affermiamo che v, w, u sono autovettori di A relativi agli autovalori $1, \zeta, \zeta^2$. Questo è ovvio per i primi due, ed in quanto ad u abbiamo

$$Au = ABw = BA^2w = BA(Aw) = BA(\zeta w) = \zeta B(Aw) = \zeta B(\zeta w) = \zeta^2 Bw = \zeta^2 u,$$

   dove si è usata l'uguaglianza $AB = BA^2$ data nel testo e il fatto che $Aw = \zeta w$ per definizione di autovettore. Ne segue in particolare che v, w, u sono linearmente indipendenti, in quanto autovettori relativi ad autovalori diversi, e che quindi $\mathcal{B} = \{v, w, u\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia P la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica (ovvero la matrice che ha per colonne i vettori v, w, u). Dette L_A ed L_B le applicazioni lineari le cui matrici in base canonica sono A e B abbiamo allora che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ sono le matrici di L_A, L_B in base $\mathcal{B}$. La matrice di L_A in questa base è chiaramente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$, perché v, w, u sono autovettori relativi agli autovalori $1, \zeta, \zeta^2$. In quanto alla matrice di L_B abbiamo che v è autovettore, e quindi la prima colonna della matrice è della forma $\begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre $Bw = u$ per definizione, e $Bu = B^2w = w$ dal momento che $B^2 = \mathrm{Id}$. Ne segue che la seconda e terza colonna di

$P^{-1}BP$ sono $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ rispettivamente. Resta solo da dimostrare che il coefficiente $\star$ è uguale a ± 1: ma questo è immediato, perché sappiamo che $P^{-1}BP = \begin{pmatrix}\star & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ha come quadrato l'identità. Questo fornisce $\star^2 = 1$, cioè $\star = \pm 1$ come voluto.

Commento. In alternativa, per dedurre $\star = \pm 1$ si poteva semplicemente osservare che la forma della matrice mostra che $\star$ è un autovalore di B, e siccome si ha $B^2 = \mathrm{Id}$ i suoi autovalori devono rispettare $\lambda^2 = 1$.

3.6 Compito del 12/06/2020

Test.

1. Sia V lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) costituito dalle matrici 2×2 a coefficienti reali. Si sa che le seguenti quattro matrici costituiscono una base $\mathcal{B}$ di V:

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il vettore delle coordinate di $\begin{pmatrix}0 & 2\\6 & 2\end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$:

   (b) Sia $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ l'unica applicazione lineare tale che $\phi(M_i) = e_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$, dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica. Sia $W = \{M \in V \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Qual è la dimensione di $\phi(W)$? ....

   (c) Determinare equazioni cartesiane per $\phi(W)$ (si denotino con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di $\mathbb{R}^4$):

Soluzione.

(a) La risposta è per definizione il vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$, dove a, b, c, d è l'unica soluzione dell'equazione $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = \begin{pmatrix}0 & 2\\6 & 2\end{pmatrix}$. Sostituendo ogni M_i con il suo valore si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a+b+d = 0\\ a-c = 2\\ a+c = 6\\ a+b-d = 2\end{cases}$$

Prendendo la somma e la differenza della seconda e terza equazione abbiamo subito $a = 4, c = 2$. Considerando ora la somma e la differenza della prima e ultima equazione otteniamo $b = -3, d = -1$. La risposta è quindi $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

(b) L'applicazione lineare ϕ è chiaramente surgettiva, perché la sua immagine contiene una base. Inoltre si ha $\dim V = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, quindi ϕ è anche iniettiva e dunque un isomorfismo. Ne segue che $\dim \phi(W) = \dim W$, e d'altro canto W è definito da una singola equazione lineare (non banale), quindi $\dim \phi(W) = \dim W = \dim V - 1 = 3$.

(c) Come già osservato W è di dimensione 3. Non è difficile determinarne una base: M_3 ed M_4 appartengono a W, così come $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, ed è immediato verificare che questi tre elementi di W sono linearmente indipendenti, dunque ne costituiscono una base. Ne segue che $\phi(W)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\phi(M_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi(M_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\phi(M_1 - M_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dal momento che $\phi(W)$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$, esso è definito da una singola equazione cartesiana; questa può essere determinata facilmente con il metodo di eliminazione di Gauss, ma nel caso in esame è facile rendersi conto anche senza calcoli che un'equazione rispettata da tutti e tre questi vettori è $x_1 + x_2 = 0$. Dal momento che $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contiene $\phi(W)$ (anch'esso di dimensione 3), si deve avere $\phi(W) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$, ovvero $x_1 + x_2 = 0$ è effettivamente un'equazione cartesiana per $\phi(W)$.

2. Si consideri il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare un vettore isotropo per il prodotto scalare φ:

   (b) Si determini una base $\mathcal{B}$ del sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = z\}$ che rispetti le seguenti proprietà: $\mathcal{B}$ è costituita da vettori a coefficienti interi, è ortogonale rispetto a φ, e il suo primo vettore appartiene a $Z = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x - 11y - 3z = 0\}$:

   (c) Determinare la segnatura di φ: si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

Soluzione.

(a) Si osserva immediatamente che il coefficiente 0 in posizione $(3, 3)$ nella matrice data implica $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$. Il terzo vettore della base canonica è quindi un vettore isotropo.

(b) Il primo vettore di $\mathcal{B}$ deve appartenere a $W \cap Z$, che è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} x + y = z \\ 3x - 11y - 3z = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si trova $3x - 11y - 3x - 3y = 0$, cioè $y = 0$. A questo punto una qualsiasi delle due equazioni fornisce $x = z$, per cui $W \cap Z$ è Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Completiamo il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ad una base di W, ad esempio con il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e tentiamo di applicare un passo del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (non sappiamo a priori che questo ci porterà al risultato, perché non sappiamo se il prodotto scalare sia definito positivo – e in effetti scopriremo sotto che non lo è – ma se non incontriamo vettori isotropi durante il calcolo il procedimento funziona comunque). Dobbiamo quindi calcolare

$$v_2 - \frac{\varphi(v_1, v_2)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1;$$

si ha da un lato

$$\varphi(v_1, v_2) = (1,0,1) \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0,1) \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$$

e dall'altro

$$\varphi(v_1, v_1) = (1,0,1) \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0,1) \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2,$$

per cui troviamo $v_2 - \frac{\varphi(v_1, v_2)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 = v_2 - \frac{-4}{-2} v_1 = v_2 - 2v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una possibile base $\mathcal{B}$ di W ortogonale rispetto a φ (e che rispetta anche le altre proprietà richieste) è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Cominciamo calcolando il determinante della matrice del prodotto scalare dato. Sviluppando rispetto alla terza colonna (e ricordando il segno presente nello sviluppo di Laplace) si ha

$$\det \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

il che mostra che il prodotto scalare è non-degenere e quindi $n_0 = 0$. Osserviamo poi che la restrizione del prodotto scalare a $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ ha matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che mostra chiaramente che questa restrizione è semi-definita negativa (in effetti, il prodotto scalare di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con se stesso è $-2a^2$). Osserviamo anche che la segnatura di questa restrizione è $(n_+, n_-, n_0) = (0, 1, 1)$.

Ne segue che n_+ è al massimo 1: in effetti, se ci fosse un sottospazio W di dimensione 2 su cui la restrizione di φ è definita positiva, questo W necessariamente intersecherebbe $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ in un sottospazio di dimensione (almeno) 1, ma questo è assurdo, perché su questa intersezione φ sarebbe contemporaneamente definito positivo e semidefinito negativo. Viceversa, non è neppure possibile che n_+ sia uguale a 0, perché in questo caso φ sarebbe definito negativo, e tutte le sue restrizioni sarebbero definite negative (e in particolare non degeneri), mentre la restrizione a $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ ha segnatura $n_- = 1, n_0 = 1$. Visto che $n_+ + n_- = 3$ otteniamo che l'unica possibilità è $(n_+, n_-, n_0) = (1, 2, 0)$.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. È noto che $AB = BA$.

(a) Determinare gli autovalori (con rispettive molteplicità algebriche) di A: ....

(b) Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 di B: ....

(c) Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia un autovettore sia di A che di B per il medesimo autovalore:

(d) Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale A e B siano simultaneamente diagonali. ☐ Non esiste una tale base ☐ Una tale base esiste, ad esempio:

Soluzione.

(a) Si tratta di calcolare il polinomio caratteristico di A e poi determinarne le radici. Abbiamo

$$p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 3 & 3 \\ 3 & t+1 & 3 \\ -3 & -3 & t-5 \end{pmatrix};$$

sottraendo la seconda colonna dalla prima (il che non altera il determinante) otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} t-2 & 3 & 3 \\ 2-t & t+1 & 3 \\ 0 & -3 & t-5 \end{pmatrix} = (t-2)\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & t+1 & 3 \\ 0 & -3 & t-5 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora la prima riga alla seconda e poi sviluppiamo con Laplace rispetto alla prima colonna:

$$(t-2)\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & t+4 & 6 \\ 0 & -3 & t-5 \end{pmatrix} = (t-2)((t+4)(t-5)+18) = (t-2)(t^2-t-2).$$

Fattorizzando $t^2-t-2 = (t+1)(t-2)$ otteniamo allora che il polinomio caratteristico di A è $(t-2)^2(t+1)$, e quindi gli autovalori sono 2, di molteplicità 2, e -1, di molteplicità 1.

(b) Per definizione dobbiamo calcolare la dimensione del nucleo di $B - \mathrm{Id}$, ovvero si tratta di calcolare $\dim\ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: è evidente che questa matrice ha rango 1, e dunque nucleo di dimensione 2.

(c) Dal punto precedente sappiamo che l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 2, e quindi molteplicità algebrica almeno 2. Detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di B, si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(B) = 4$, da cui $\lambda_3 = 2$. L'unico autovalore comune fra A e B è quindi 2, e dobbiamo quindi trovare un vettore v che appartenga a $\ker(A - 2\,\mathrm{Id}) \cap \ker(B - 2\,\mathrm{Id})$. Scrivendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ stiamo quindi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

dove le due matrici sono $A - 2\,\mathrm{Id}$ e $B - 2\,\mathrm{Id}$. Sviluppando i prodotti riga per colonna (ed omettendo le equazioni evidentemente ridondanti) troviamo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ -y = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si osservi che questo è anche l'autospazio di B relativo all'autovalore 2 (infatti tale autospazio ha dimensione 1, perché la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è 1).

(d) Vista la condizione $AB = BA$, sappiamo che A e B sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se sono separatamente diagonalizzabili. Invece di testare separatamente la diagonalizzabilità delle due matrici, però, conviene procedere nella maniera seguente. Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ che diagonalizzi simultaneamente A e B deve essere costituita da autovettori per entrambe; in particolare, uno dei tre vettori deve essere un autovettore di B di autovalore 2, quindi come osservato sopra possiamo assumere che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In quanto ai rimanenti due vettori, essi devono essere autovettori di B (necessariamente di autovalore 1) che sono anche autovettori di A (necessariamente di autovalori 2 e -1). A meno di scambiare v_2 e v_3, quindi, se una tale base esiste si dovrà avere $v_2 \in \ker(A + \mathrm{Id}) \cap \ker(B - \mathrm{Id})$ e $v_3 \in \ker(A - 2\,\mathrm{Id}) \cap \ker(B - \mathrm{Id})$. Sappiamo già dal punto (b) che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene a $\ker(B - \mathrm{Id})$ se e solo se $x + y + 2z = 0$, quindi ci riconduciamo a risolvere i due sistemi seguenti, in cui la matrice che compare è $A + \mathrm{Id}$ (rispettivamente $A - 2\,\mathrm{Id}$):

- Per $\lambda_A = -1$ si ha $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$, da cui facilmente

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases},$$

  che ha come soluzioni $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

- Per $\lambda_A = 2$ si ha $\begin{cases} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$, da cui immediatamente troviamo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$, che ha come soluzioni $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Abbiamo così ottenuto che ciascuno dei tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un autovettore comune fra A e B. Visto che è immediato controllare che questi tre vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, abbiamo trovato una base nella quale sia A sia B sono diagonali.

4. Sia ϕ il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3z \\ x \end{pmatrix}$. Denotiamo T^* l'aggiunto di T rispetto a ϕ.

   (a) Calcolare $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$ ....

   (b) Calcolare il determinante di T^*: $=$ ....

   Soluzione.

   (a) La definizione di endomorfismo aggiunto fornisce

$$\begin{aligned}
\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \phi\left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (1,3,0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.
\end{aligned}$$

   (b) Scrivendo per semplicità T e T^* per le matrici di questi endomorfismi in base canonica, sappiamo che vale l'equazione ${}^tTM = MT^*$, dove M è la matrice del prodotto scalare (che sappiamo essere invertibile, perché il prodotto scalare è non-degenere). Prendendo il determinante dei due membri di questa uguaglianza otteniamo

$$\det({}^tTM) = \det(MT^*) \Rightarrow \det({}^tT)\det(M) = \det(M)\det(T^*),$$

   dove si è usato il teorema di Binet. Ricordando inoltre che $\det({}^tT) = \det(T)$ e che $\det(M) \neq 0$, l'equazione precedente fornisce $\det(T^*) = \det(T)$. Ci riconduciamo quindi a calcolare $\det(T)$; siccome la matrice di T è $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si tratta di calcolare $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che si trova immediatamente (ad esempio sviluppando rispetto alla prima colonna) essere uguale a 6.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $P_1, \ldots, P_m : V \to V$ trasformazioni lineari tali che $P_i^2 = P_i$

1. Dimostrare che ogni P_i è diagonalizzabile, e che ognuno dei suoi autovalori è uguale a 0 o a 1.
2. Dimostrare che per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha $\operatorname{rango}(P_i) = \operatorname{tr}(P_i)$.

D'ora in poi supponiamo inoltre che $P_1 + P_2 + \cdots + P_m = \mathrm{Id}$.

3. Dimostrare che allora $V = \operatorname{Imm}(P_1) \oplus \operatorname{Imm}(P_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Imm}(P_m)$.
4. ($\star$) Dedurre che si ha $P_iP_j = 0$ per ogni coppia di indici $i \neq j$.
5. Dimostrare che le applicazioni lineari P_i sono tutte simultaneamente diagonalizzabili.

Soluzione.

1. Consideriamo il polinomio $p(t) = t^2 - t$. Per ipotesi si ha $p(P_i) = P_i^2 - P_i = 0$, quindi il polinomio minimo di P_i è un fattore di $p(t)$. In particolare, esso è un prodotto di fattori lineari con molteplicità 1, dunque per un risultato noto P_i è diagonalizzabile. Osserviamo inoltre che ogni autovalore di P_i è radice del polinomio minimo, e quindi a maggior ragione di $t^2 - t = t(t-1)$. Ne segue che gli autovalori di P_i possono essere solo 0 e 1.

2. Lavoriamo in una base in cui P_i sia diagonale. Come visto al punto precedente, gli unici autovalori di P_i sono 0 e 1, e una matrice diagonale che abbia sulla diagonale k coefficienti uguali a 1 e $n-k$ coefficienti uguali a 0 ha chiaramente rango k. D'altro canto ha anche traccia $\operatorname{tr}(P_i) = k \cdot 1 + (n-k) \cdot 0 = k$, come voluto.

3. Sia v un qualsiasi vettore di V. L'ipotesi fornisce $v = P_1v + P_2v + \cdots + P_mv$, con $P_iv \in \operatorname{Imm}(P_i)$, dunque V è se non altro la somma dei suoi sottospazi $\operatorname{Imm}(P_1)$, $\operatorname{Imm}(P_2)$, ..., $\operatorname{Imm}(P_m)$. Per dimostrare che la somma è diretta è sufficiente dimostrare che $\sum_{i=1}^m \dim \operatorname{Imm}(P_i) = \dim V = n$. D'altro canto, per definizione si ha $\dim \operatorname{Imm}(P_i) = \operatorname{rango}(P_i)$, e per il punto precedente $\operatorname{rango}(P_i) = \operatorname{tr}(P_i)$. Ne segue che
$$\sum_{i=1}^m \dim \operatorname{Imm}(P_i) = \sum_{i=1}^m \operatorname{tr}(P_i) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^m P_i\right) = \operatorname{tr}(\mathrm{Id}) = n,$$
il che come voluto dimostra che la somma è diretta.

4. Sia $v \in V$ un vettore qualsiasi e fissiamo un indice j. Si ha
$$P_jv = \mathrm{Id}\, P_jv = (P_1 + \cdots + P_m)P_jv = P_1(P_jv) + P_2(P_jv) + \cdots + P_m(P_jv).$$
Osserviamo adesso che $P_1(P_jv)$ appartiene a $\operatorname{Imm}(P_1)$, $P_2(P_jv)$ appartiene all'immagine di P_2, e così via fino a $P_m(P_jv)$, che appartiene all'immagine di P_m. D'altro canto, P_jv appartiene all'immagine di P_j. La decomposizione in somma diretta del punto precedente dice che ogni vettore di V si scrive in modo unico come somma di m vettori, ognuno preso in uno dei sottospazi $\operatorname{Imm}(P_i)$. Ne segue quindi che le due rappresentazioni $0 + \cdots + 0 + P_jv + 0 + \cdots + 0$ (in cui il primo 0 è pensato come appartenente a $\operatorname{Imm}(P_1)$, il secondo come appartenente a $\operatorname{Imm}(P_2)$, e così via fino all'ultimo, che è in $\operatorname{Imm}(P_m)$) e $P_1(P_jv) + P_2(P_jv) + \cdots + P_m(P_jv)$ devono essere uguali termine a termine. Per ogni i diverso da j questo fornisce quindi $P_iP_jv = 0$ come voluto.

5. Abbiamo già dimostrato che ogni ogni P_i è diagonalizzabile, e che per ogni $i \neq j$ si ha $P_iP_j = P_jP_i = 0$, quindi in particolare P_i e P_j commutano. L'affermazione segue allora per induzione dal lemma che afferma che due applicazioni lineari separatamente diagonalizzabili che commutano fra loro sono simultaneamente diagonalizzabili.

3.7 Compito del 10/07/2020

Test.

1. Sia $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ la base canonica, e $\mathcal{B}$ la base $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere la matrice dell'identità dalla base $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$:

   (b) Scrivere la matrice dell'identità dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$:

   Soluzione. Per definizione, il vettore di coordinate $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$ ha coordinate in base canonica $a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, ovvero (in base canonica) è il vettore $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
   La matrice dell'identità da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, ovvero la risposta a (b), è quindi $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Un noto teorema assicura che $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \mathrm{Id}$, dunque la risposta ad (a) è l'inverso della matrice trovata precedentemente. Per calcolare l'inversa possiamo usare l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[2]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -2\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[1]+[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2\\0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -2\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

   La risposta ad (a) è quindi $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\-3 & 3 & -2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Si consideri $W = \{M \in V : \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ è autovettore di $M\}$. Dire se W è un sottospazio vettoriale di V e in caso affermativo calcolarne la dimensione.

   ☐ Non è un sottospazio vettoriale perché ....

   ☐ È un sottospazio vettoriale di dimensione ....

   Soluzione. Sia per semplicità $v = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$. Si osserva immediatamente che la matrice nulla appartiene a W. Se M_1, M_2 sono matrici in W, allora esistono scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$M_1 v = \lambda_1 v$ e $M_2 v = \lambda_2 v$. Si ha allora $(M_1 + M_2)v = M_1 v + M_2 v = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v$, quindi v è anche autovettore di $M_1 + M_2$. Similmente, se μ è un qualsiasi scalare in $\mathbb{R}$, allora $(\mu M_1)(v) = (\mu\lambda_1)v$, e quindi v è un autovettore di μM_1. Concludiamo quindi che W è effettivamente un sottospazio vettoriale. In quanto alla sua dimensione, è facile osservare che ogni matrice $M \in W$ si scrive in maniera unica come $\lambda \operatorname{Id} + M'$, dove λ è l'autovalore corrispondente all'autovettore v di M e $M'v = 0$. Ricaviamo quindi che $W = \operatorname{Span}(\operatorname{Id}) \oplus W'$, dove $W' = \{M \in V : Mv = 0\}$. Si osserva poi che $\dim W' = 6$. In effetti, v appartiene al nucleo di una matrice M (con colonne M_1, M_2, M_3) se e solo se la prima colonna di M è uguale a $2M_2 + 3M_3$; ne segue facilmente che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & W' & \to & \operatorname{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \\ & M = \big(M_1 \mid M_2 \mid M_3\big) & \mapsto & \big(M_2 \mid M_3\big) \end{array}$$

è un isomorfismo, da cui $\dim W' = \dim \operatorname{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) = 6$, e infine $\dim W = \dim W' + 1 = 7$.

Nota. In alternativa, si potrebbe risolvere il problema scrivendo gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ in una qualsiasi base il cui primo vettore sia $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. In una tale base, le matrici di W sono tutte e sole quelle che si scrivono nella forma $\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$, da cui si vede immediatamente che la dimensione di W è 7.

3. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado ≤ 3 e il prodotto scalare $\langle p(x), q(x)\rangle = p(1)q(1) + 2p'(0)q'(0) - 3p''(0)q''(0)$.

   (a) Scrivere la matrice del prodotto scalare rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$:

   (b) Trovare una base di $V^\perp = \{p(x) \in V : \langle p(x), q(x)\rangle = 0 \quad \forall q(x) \in V\}$ che sia costituita da polinomi monici (ovvero con coefficiente del termine di grado massimo uguale ad 1):

   (c) Determinare la segnatura di $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

   Soluzione.

   (a) Questo è semplicemente un calcolo: si tratta di scrivere la matrice il cui coefficiente in posizione (i, j) sia $\langle x^i, x^j\rangle$ (qui numeriamo le righe e le colonne a partire da 0 invece che da 1 come facciamo di solito).
   Il calcolo può essere semplificato osservando che per $q(x) = x^3$ si ha $q'(0) = q''(0) = 0$, per cui $\langle p(x), x^3\rangle = p(1)$, e che per ogni polinomio nella base data si ha $p(1) = 1$, per cui l'intera terza riga e colonna della matrice cercata sono costituite da coefficienti 1. Un identico ragionamento vale per $q(x) = 1$, per cui anche la prima riga e colonna sono costituite da coefficienti 1. Si ottiene allora facilmente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Come noto, $V^\perp$ è l'insieme dei vettori le cui coordinate in base $\mathcal{B}$ sono vettori nel nucleo della matrice M qui sopra. Si verifica immediatamente che $\ker M = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (in effetti è chiaro che questo vettore appartiene al nucleo, che d'altro canto ha dimensione $4 - \operatorname{rk} M = 1$). Il vettore di V che ha coordinate $(-1, 0, 0, 1)$ è $x^3 - 1$, che costituisce quindi la base voluta.

Nota. Si osservi peraltro che per $q(x) = x^3 - 1$ si ha $q(1) = q'(0) = q''(0) = 0$, per cui è chiaro dall'espressione esplicita del prodotto scalare che $\langle p(x), q(x)\rangle = 0$ per ogni $p(x) \in V$.

(c) Abbiamo già visto che $n_0 = \dim \ker M = 1$. Inoltre si ha $n_- \geq 1$ in quanto $\langle x^2, x^2\rangle < 0$, e $n_+ \geq 2$ in quanto la restrizione a $\operatorname{Span}(1, x)$ è definita positiva (questo si può sia controllare immediatamente sull'espressione esplicita del prodotto scalare, sia ottenere osservando che questa restrizione ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ con determinante $2 > 0$ e traccia $4 > 0$). Considerato che $n_+ + n_- + n_0 = 4$ concludiamo allora che la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 1)$.

4. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 2 & -5 & -2 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le loro rispettive molteplicità algebriche: ....

(b) Determinare un autovettore (a coordinate intere) per un autovalore di molteplicità 1:
Autovalore scelto: ...... Corrispondente autovettore:

(c) A è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det(t \operatorname{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 3 \\ -2 & t+5 & 2 \\ 3 & -7 & t-2 \end{pmatrix}.$$

Sommando la prima colonna all'ultima (operazione che non cambia il determinante) otteniamo

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 5 & t+1 \\ -2 & t+5 & 0 \\ 3 & -7 & t+1 \end{pmatrix} = (t+1) \det \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 1 \\ -2 & t+5 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix};$$

a questo punto possiamo sottrarre la prima riga dall'ultima, il che (utilizzando poi uno sviluppo di Laplace rispetto all'ultima colonna) conduce a

$$\begin{aligned} p_A(t) = (t+1) \det \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 1 \\ -2 & t+5 & 0 \\ 5-t & -12 & 0 \end{pmatrix} &= (t+1)(24 - (t+5)(5-t)) \\ = (t+1)(24 - (25 - t^2)) = (t+1)(t^2 - 1) &= (t+1)^2(t-1). \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che gli autovalori di A sono -1, di molteplicità algebrica 2, e 1, di molteplicità algebrica 1.

(b) L'unico autovalore di molteplicità 1 è 1. Per trovare un corrispondente autovettore dobbiamo trovare un vettore non nullo in

$$\ker(A - \operatorname{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & -6 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 5y - 3z = 0 \\ 2x - 6y - 2z = 0, \end{cases}$$

dove possiamo omettere la terza equazione in quanto sappiamo dalla teoria che essa sarà ridondante. Ricavando $x = 5y + 3z$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo $0 = 10y + 6z - 6y - 2z = 4(y + z)$; scegliendo ora arbitrariamente $z = 1$ otteniamo allora $y = -1$ e $x = 5(-1) + 3 \cdot 1 = -2$. Le possibili risposte alla domanda sono quindi i multipli interi del vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) La risposta è no. Dobbiamo verificare se per ogni autovalore λ di A valga o meno l'uguaglianza $m_{\text{alg}}(\lambda) = m_{\text{geo}}(\lambda)$. In considerazione delle disuguaglianze $m_{\text{alg}}(\lambda) \geq m_{\text{geo}}(\lambda) \geq 1$, l'uguaglianza vale sicuramente per l'autovalore $\lambda = 1$, quindi dobbiamo solo determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore -1, ovvero la dimensione di

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che questa matrice ha rango 2 (le prime due colonne non sono proporzionali, mentre la prima e la terza sì), quindi ha nucleo di dimensione 1. Ne segue che $m_{\text{geo}}(-1) = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(-1)$, e quindi che A non è diagonalizzabile.

5. Sia $S_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la riflessione ortogonale rispetto al piano $z = 0$ (ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$).
Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia S_2 l'applicazione lineare $w \mapsto w - 2\dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}v$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare standard.

(a) È vero o falso che S_2 è la riflessione ortogonale rispetto al piano $x + 2y + 3z = 0$?
☐ Vero ☐ Falso

(b) Scrivere la matrice di $7S_2$ in base canonica:

(c) Sia $R = S_1S_2$. Sapendo che R è una rotazione, determinare un vettore a coefficienti interi che genera il suo asse fisso:

(d) Determinare il coseno dell'angolo della rotazione R: ....

Soluzione.

(a) Vero. In effetti, $S_1(v) = v - 2\frac{\langle v,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v = -v$, mentre se w è ortogonale a v abbiamo $S_1(w) = w - 2\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}v = w - 2\frac{0}{\langle v,v\rangle}v = w$. Questo mostra che S_1 è l'identità sul piano ortogonale a v, e manda vettori ortogonali a tale piano nei loro opposti. Si tratta quindi della simmetria rispetto al piano ortogonale a v, che per definizione è $x + 2y + 3z = 0$.

(b) Un calcolo diretto mostra che $7S_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Verifichiamo ad esempio che la prima colonna è corretta: si tratta di determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che per definizione viene inviato da S_2 sul vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

(c) In base canonica la matrice di S_1 è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, da cui è immediato calcolare $S_1 S_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Per determinare l'asse fisso dobbiamo semplicemente calcolare l'autospazio di autovalore 1 di questa matrice, o equivalentemente l'autospazio di autovalore 7 della matrice di $7S_1S_2$. Determiniamo perciò

$$\ker(7S_1S_2 - 7\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix},$$

che si vede immediatamente (dato che il rango è due: la seconda colonna è il doppio della prima, mentre la terza colonna non è proporzionale alle altre due) essere Span $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Dalla teoria sappiamo che una rotazione di $\mathbb{R}^3$ ha come autovalori 1 e la coppia di numeri complessi coniugati $\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta$, dove ϑ è proprio l'angolo di rotazione a cui siamo interessati. Ne segue che la traccia di una rotazione di $\mathbb{R}^3$ è $1 + 2\cos\vartheta$; nel nostro caso, la traccia di R è $\frac{1}{7}(6+3+2) = \frac{11}{7}$, per cui $\cos\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{7} - 1\right) = \frac{2}{7}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.
Siano date le matrici hermitiane

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siano $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$ e $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

1. Determinare una base di $\mathbb{C}^2$ di autovettori per σ_x che sia ortonormale rispetto a ψ.

   Similmente, calcolare basi di autovettori per σ_y e per σ_z che siano ortonormali rispetto a ψ.

   Dedurre che nessuna coppia di matrici tra σ_x, σ_y, σ_z può essere simultaneamente diagonalizzata.

2. Sia $\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore unitario (cioè di norma 1 rispetto a φ). Sia

   $$\sigma_{\hat{n}} \ = \ n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z \ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

   Calcolare gli autovalori di $\sigma_{\hat{n}}$ ed una base di autovettori per $\sigma_{\hat{n}}$ che sia ortonormale rispetto a ψ.

3. Date due matrici A e B si dice *commutatore di A e B*, indicato con $[A, B]$, la matrice $[A, B] = AB - BA$. Calcolare i tre commutatori $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

4. Dati $\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ ed $\hat{n}' = \begin{pmatrix} n'_x \\ n'_y \\ n'_z \end{pmatrix}$ vettori in $\mathbb{R}^3$ di norma unitaria, dimostrare che:

$$[\sigma_{\hat{n}}, \sigma_{\hat{n}'}] = 2\,i \cdot \sigma_{\hat{n} \times \hat{n}'}$$

dove $\hat{n} \times \hat{n}'$ è il prodotto vettoriale di $\hat{n}$ e di $\hat{n}'$, e (in analogia al punto 2) per qualsiasi vettore $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ scriviamo $\sigma_v = v_1\sigma_x + v_2\sigma_y + v_3\sigma_z$.

Soluzione.

1. Non è difficile verificare che il polinomio caratteristico di ognuna delle tre matrici è $t^2 - 1$, per cui gli autovalori sono ± 1. Nei tre casi, basi di autovettori ortonormali sono descritte qui sotto:

   (a) per σ_x,
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

   (b) per σ_y,
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix};$$

   (c) per σ_z,
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   In ognuno dei tre casi, il primo autovettore è quello corrispondente all'autovalore $+1$. Si osservi che la condizione di ortogonalità è garantita dal teorema spettrale in quanto le matrici sono Hermitiane; ci dobbiamo quindi solo occupare della condizione di normalizzazione, che è garantita dai coefficienti numerici $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   In quanto all'ultima domanda, due matrici che si diagonalizzano simultaneamente commutano, e ciascuna preserva gli autospazi dell'altra. Ma nel nostro caso tutti gli autospazi sono di dimensione 1, quindi se (ad esempio) σ_y preservasse gli autospazi $V_{\pm 1}$ di σ_x, allora un generatore di $V_{\pm 1}$ sarebbe mandato in un multiplo di se stesso da σ_y, ovvero sarebbe anche un autovettore di σ_y; analogo discorso può essere fatto per qualunque altra coppia. Vediamo allora che se due delle tre matrici fossero simultaneamente diagonalizzabili (e quindi commutassero), i loro autovettori sarebbero proporzionali, ma è immediato vedere che questo non accade. Ne deduciamo come voluto che nessuna coppia di queste matrici è simultaneamente diagonalizzabile.

2. Si osserva che
$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{n}}^2 &= (n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)^2 \\ &= n_x^2\sigma_x^2 + n_y^2\sigma_y^2 + n_z^2\sigma_z^2 + n_xn_y(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) + n_xn_z(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + n_yn_z(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y);\end{aligned}$$
   è facile verificare che $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathrm{Id}$, e che $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0$ (e similmente per tutte le coppie di indici in $\{x, y, z\}$). Il calcolo precedente fornisce perciò $\sigma_{\hat{n}}^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\,\mathrm{Id}$, e l'ipotesi che $\hat{n}$ sia di norma 1 implica che questa è proprio l'identità. Per un ragionamento di polinomi minimi che abbiamo visto molte volte, questo ci dice che gli autovalori di $\sigma_{\hat{n}}$ sono ± 1 (più precisamente: che ogni autovalore λ di $\sigma_{\hat{n}}$ soddisfa $\lambda^2 = 1$: finora non sappiamo ancora che 1 e -1 sono in effetti entrambi autovalori). D'altro canto, la traccia di $\sigma_{\hat{n}}$ è una combinazione lineare delle tracce di $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, che sono tutte 0, per cui i due autovalori di $\sigma_{\hat{n}}$ devono sommare a 0: l'unica possibilità è quindi che siano $+1$ e -1, entrambi di molteplicità 1.

Per costruire una base di autovettori è istruttivo[3] lavorare in coordinate sferiche. Ogni vettore di norma 1 in $\mathbb{R}^3$ si può scrivere in maniera unica come $\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, e la corrispondente matrice $\sigma_{\hat{n}}$ è allora

$$\sigma_{\hat{n}} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\cos\varphi - i\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\sin\varphi & -\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

L'autospazio relativo ad 1 è $\ker(\sigma_{\hat{n}} - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} \cos\vartheta - 1 & \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{i\varphi} & -\cos\vartheta - 1 \end{pmatrix}$. Dal momento che sappiamo dalla teoria che le due equazioni corrispondenti alle due righe di questa matrice sono dipendenti, per trovare un autovettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è sufficiente risolvere $x(\cos\vartheta - 1) + y(\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}) = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix}$$

La condizione di normalizzazione fornisce $|\alpha|^2(\sin^2\vartheta + (\cos\vartheta - 1)^2) = 1$, cioè $|\alpha|^2 = \frac{1}{2-2\cos\vartheta} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$, per cui possiamo prendere $\alpha = -\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$ e come autovettore normalizzato

$$-\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \\ \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

L'altro autovettore è ora immediato da determinare: in effetti sappiamo dal teorema spettrale che l'autovettore di autovalore -1 deve essere ortogonale all'autovettore appena trovato, per cui (tenendo anche conto della condizione di normalizzazione) si può prendere come autovettore relativo a -1 il vettore $\begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$.

In alternativa, è naturalmente possibile effettuare il conto direttamente in coordinate cartesiane (i dettagli sono simili, ma più semplici, in quanto non richiedono nessuna identità trigonometrica); nuovamente il calcolo è molto semplificato dal fatto di conoscere già a priori gli autovalori ± 1. Come base di autovettori si trova allora (a meno di un fattore di riscalamento complesso di norma 1)

$$\frac{1}{A_+}\begin{pmatrix} n_z + 1 \\ n_x + in_y \end{pmatrix}, \frac{1}{A_-}\begin{pmatrix} n_z - 1 \\ n_x + in_y \end{pmatrix},$$

dove $A_\pm = \sqrt{2 \pm 2n_z}$ è determinato dalla condizione di normalizazione. Si osservi ancora una volta che questi autovettori sono ortogonali (rispetto a ψ): in effetti,

$$\langle \begin{pmatrix} n_z - 1 \\ n_x + in_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_z + 1 \\ n_x + in_y \end{pmatrix} \rangle = (n_z - 1)(n_z + 1) + (n_x + in_y)(n_x - in_y) = n_z^2 - 1 + n_x^2 + n_y^2 = 0.$$

3. Un calcolo diretto e non difficile mostra che

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y.$$

4. Usando il fatto che il commutatore è bilineare, ovvero che $[A, \lambda B + \mu C] = \lambda[A, B] + \mu[A, C]$ (e similmente per il primo argomento), si ottiene

$$\begin{aligned}
[\sigma_{\hat{n}}, \sigma_{\hat{n}'}] &= \left[n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z, n'_x\sigma_x + n'_y\sigma_y + n'_z\sigma_z\right] \\
&= [n_x\sigma_x, n'_x\sigma_x + n'_y\sigma_y + n'_z\sigma_z] \\
&\quad + [n_y\sigma_y, n'_x\sigma_x + n'_y\sigma_y + n'_z\sigma_z] \\
&\quad + [n_z\sigma_z, n'_x\sigma_x + n'_y\sigma_y + n'_z\sigma_z] \\
&= n_x n'_x[\sigma_x, \sigma_x] + n_x n'_y[\sigma_x, \sigma_y] + n_x n'_z[\sigma_x, \sigma_z] \\
&\quad + n_y n'_x[\sigma_y, \sigma_x] + n_y n'_y[\sigma_y, \sigma_y] + n_y n'_z[\sigma_y, \sigma_z] \\
&\quad + n_z n'_x[\sigma_z, \sigma_x] + n_z n'_y[\sigma_z, \sigma_y] + n_z n'_z[\sigma_z, \sigma_z].
\end{aligned}$$

[3]anche se assolutamente non necessario! Potreste però incontrare in futuro questo cambio di coordinate nel medesimo contesto, quindi mi sembrava utile descriverlo

Usando ora l'ovvia identità $[A, A] = 0$, valida per ogni matrice A, e osservando che $[A, B] = -[B, A]$ possiamo ulteriormente riscrivere la quantità precedente come

$$[\sigma_{\hat{n}}, \sigma_{\hat{n}'}] = (n_x n'_y - n'_x n_y)[\sigma_x, \sigma_y] + (n_y n'_z - n'_y n_z)[\sigma_y, \sigma_z] + (n_z n'_x - n'_z n_x)[\sigma_z, \sigma_x].$$

Ricordiamo ora che $\hat{n} \times \hat{n}' = \begin{pmatrix} n_y n'_z - n'_y n_z \\ n_z n'_x - n'_z n_x \\ n_x n'_y - n'_x n_y \end{pmatrix}$, per cui – dette v_1, v_2, v_3 le coordinate di questo prodotto vettore – abbiamo ottenuto

$$[\sigma_{\hat{n}}, \sigma_{\hat{n}'}] = v_3[\sigma_x, \sigma_y] + v_1[\sigma_y, \sigma_z] + v_2[\sigma_z, \sigma_x].$$

Sostituendo infine il risultato del punto 3 otteniamo allora

$$[\sigma_{\hat{n}}, \sigma_{\hat{n}'}] = 2i\,(v_3\sigma_z + v_1\sigma_x + v_2\sigma_y) = 2i\sigma_{\hat{n}\times\hat{n}'},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Nota. I calcoli di questo problema sono la base matematica della teoria quantistica dello *spin*: si veda ad esempio l'articolo `https://it.wikipedia.org/wiki/Matrici_di_Pauli`

3.8 Compito del 14/09/2020

Test.

1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare equazioni cartesiane per W:

   (b) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Determinare una base di $W \cap f(W)$:

   (c) Sia Π il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ ottenuto traslando W in modo che passi per il punto di coordinate $Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare le coordinate del punto $\Pi \cap f^3(W)$ o scrivere *non si intersecano*:

Soluzione.

(a) Procediamo ad un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ -3 & -2 & -4 & x_3 \\ 2 & 4 & 0 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Come prima mossa cambiamo l'ordine delle colonne in modo da avere come prima colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Procediamo poi come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ -4 & -3 & -2 & x_3 \\ 0 & 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[3]-3[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & -2 & x_2 \\ -4 & 5 & 10 & x_3 \\ 0 & 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ -4 & 5 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 0 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi eliminare la terza colonna e continuare nella maniera seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ -4 & 5 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ -4 & 5 & x_3 + 4x_1 \\ 0 & 2 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+(x_2-x_1)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & x_3 + 4x_1 + 5(x_2 - x_1) \\ 0 & 2 & x_4 + 2(x_2 - x_1) \end{pmatrix}$$

Una possibile scelta di equazioni cartesiane per il sottospazio W è quindi

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Non è difficile rendersi conto che possiamo ottenere equazioni cartesiane per $f(W)$ semplicemente rinominando ciclicamente le variabili nelle equazioni precedenti: concretamente, $f(W)$ ammette come equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_1 = 0. \end{cases}$$

In effetti, detto $v = f(w)$ (per un certo $w \in W$), la coordinata x_2 di v è la coordinata x_1 di w, e così via, per cui $-x_2(v) + 5x_3(v) + x_4(v) = -x_1(w) + 5x_2(w) + x_3(w) = 0$, e similmente per l'altra equazione. D'altro canto, è chiaro che f è un isomorfismo, quindi $f(W)$ è un sottospazio di dimensione 2, descritto da due equazioni cartesiane indipendenti. Visto che le due equazioni che abbiamo trovato si annullano su tutto $f(W)$, e sono chiaramente indipendenti, sono in effetti equazioni cartesiane per questo spazio.

Nota. Naturalmente è anche possibile trovare equazioni cartesiane per $f(W)$ ripetendo il procedimento di eliminazione di Gauss sui vettori $f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avendo a disposizione equazioni per W e $f(W)$ troviamo allora

$$W \cap f(W) = \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_1 = 0. \end{cases}$$

Stiamo perciò cercando il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Come noto, mosse di Gauss per riga preservano il nucleo di una matrice, quindi possiamo procedere con le seguenti mosse di eliminazione:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[4]+[1]} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+3[3],[2]-8[3]} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -42 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]+7/3[4],\frac{1}{3}[4]} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da Span $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Questo vettore (così come tutti i suoi multipli non nulli) è quindi una base di $W \cap f(W)$.

(c) Come sopra, le equazioni di $f^3(W)$ sono ottenute da quelle di W cambiando opportunamente gli indici delle variabili, per cui $f^3(W)$ ha equazioni

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

D'altro canto, le equazioni di Π sono ottenute da quelle di W cambiando i termini noti in modo tale che il punto Q le soddisfi. Troviamo allora che Π è dato da

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 = -x_1(Q) + 5x_2(Q) + x_3(Q) = -9 + 5 + 1 = -3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = -2x_1(Q) + 2x_2(Q) + x_4(Q) = -18 + 2 + 1 = -15. \end{cases}$$

Dobbiamo allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -x_1(Q) + 5x_2(Q) + x_3(Q) = -9 + 5 + 1 = -3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = -2x_1(Q) + 2x_2(Q) + x_4(Q) = -18 + 2 + 1 = -15. \end{cases}$$

Per la risoluzione di questo sistema si può procedere in vari modi; il più semplice è forse quello di utilizzare il metodo di sostituzione. Dalla prima equazione otteniamo $x_4 = 5x_1 + x_2$, che sostituita nelle altre conduce al sistema

$$\begin{cases} x_4 = 5x_1 + x_2 \\ -8x_1 + x_3 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 = -15 \end{cases}$$

Ricaviamo ora $x_3 = 2x_2 + 8x_1$ e sostituiamo ancora:

$$\begin{cases} x_4 = 5x_1 + x_2 \\ x_3 = 2x_2 + 8x_1 \\ 7x_1 + 7x_2 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 = -15 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono chiaramente incompatibili, per cui concludiamo che W e $f^3(W)$ non si intersecano.

2. Vero o falso?

(a) Esiste una matrice invertibile $M \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tale che $M^5 = -13M$
☐ Vero ☐ Falso

(b) Esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tale che $\det(M^3) = -13$ ☐ Vero ☐ Falso

(c) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ Vero ☐ Falso

(d) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 7 & 9 \\ -5 & -7 & 0 & 11 \\ -7 & -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ Vero ☐ Falso

Soluzione.

(a) Vero. Consideriamo dapprima la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifica facilmente che $N^4 = -\mathrm{Id}$ e quindi $N^5 = -N$. Dato $\lambda \neq 0$, la matrice $M = \lambda N$ rispetta $M^5 = \lambda^5 N^5 = \lambda^5(-N) = -\lambda^4(\lambda N) = -\lambda^4 M$. In particolare, per $\lambda = \sqrt[4]{13}$ abbiamo $M^5 = -13M$ come voluto. Infine, M è invertibile perché N chiaramente lo è e $\lambda \neq 0$.

(b) Vero. Basta scegliere come M la matrice diagonale con coefficienti lungo la diagonale $\sqrt[3]{-13}, 1, 1, 1$. Allora $\det(M) = -\sqrt[3]{13}$ e quindi $\det(M^3) = \det(M)^3 = -13$.

(c) Vero. La matrice A è simmetrica, dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale.

(d) Falso. In effetti, la matrice iB è Hermitiana, dunque per il teorema spettrale è diagonalizzabile e ha tutti gli autovalori reali. Ne segue che B ha tutti gli autovalori che sono numeri immaginari puri, ed inoltre è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. A meno che non siano tutti uguali a zero, quindi, gli autovalori di B non possono essere tutti numeri reali (ed in particolare B non è diagonalizzabile). La matrice B potrebbe quindi essere diagonalizzabile solo se tutti i suoi autovalori fossero uguali a 0: ma se così fosse, tenendo conto che B è diagonalizzabile otterremmo che B è simile alla matrice nulla, cosa che evidentemente non è. Ne deduciamo come affermato che B non è diagonalizzabile.

3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali 2×2, munito del prodotto scalare $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$. Sia inoltre $W = \{M \in V : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

(a) Trovare un vettore isotropo non nullo per φ:

(b) Siano ψ il funzionale lineare $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto a_{12} + 2a_{21}$ e τ l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} \tau: & V & \to & V^* \\ & A & \mapsto & \varphi(A, -) \end{array}$$

Trovare, se esiste, una matrice A tale che $\tau(A) = \psi$.
☐ Non esiste una tale A ☐ Una tale A esiste, ad esempio:

(c) Determinare la segnatura (n_+, n_-, n_0) di $\varphi|_W$: ....

Soluzione.

(a) Visto che $\varphi(A, A) = \mathrm{tr}(A^2)$, è sufficiente considerare qualsiasi matrice non nulla il cui quadrato sia nullo, ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) La richiesta è quella di trovare una matrice $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tale che per ogni matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in V$ si abbia

$$\varphi(A, B) = \psi(B) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AB) = b_{12} + 2b_{21}.$$

Si verifica immediatamente che scelto $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{21} & 2b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix},$$

che ha proprio traccia $2b_{21}+b_{12}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ risponde quindi alla domanda (inoltre, siccome abbiamo visto a lezione che φ è un prodotto scalare non degenere, la matrice A è unica; questo fatto non è comunque necessario per risolvere l'esercizio).

(c) Ricordiamo da quanto visto a lezione che la restrizione di φ al sottospazio S delle matrici simmetriche è definita positiva, mentre la restrizione al sottospazio N delle matrici antisimmetriche è definita negativa. Dal momento che W contiene $N = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, la restrizione $\varphi|_W$ ha indice di negatività almeno 1. Inoltre, visto che W contiene $\mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, un sottospazio di dimensione 2 costituito di matrici simmetriche (su cui quindi la restrizione di φ è definita positiva), l'indice di positività di $\varphi|_W$ è almeno 2. Dato che $\dim W = 3$, combinando queste informazioni otteniamo che la segnatura richiesta è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

4. Sia A_a la seguente matrice, dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$:

$$A_a = \begin{pmatrix} 3-a & a-2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a-2 & 4-a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a possiede autovalori di molteplicità algebrica maggiore o uguale a 2: ....

(b) Determinare per quali dei valori al punto precedente la matrice A_a è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$): ....

(c) Per il massimo valore di a elencato al punto precedente, scrivere qui una base per l'autospazio di A_a di dimensione massima:

Soluzione.

(a) Iniziamo calcolando il polinomio caratteristico di A_a:

$$\begin{aligned} p_{A_a}(t) &= \det\begin{pmatrix} t-(3-a) & 2-a & -1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 2-a & 4-a & t \end{pmatrix} \\ &= (t-2)\det\begin{pmatrix} t-(3-a) & -1 \\ 2-a & t \end{pmatrix} \\ &= (t-2)(t^2 - t(3-a) + (2-a)). \end{aligned}$$

Risolviamo adesso l'equazione $t^2 - t(3-a) + (2-a) = 0$: le sue radici sono date da

$$\frac{(3-a) \pm \sqrt{(3-a)^2 - 4(2-a)}}{2} = \frac{(3-a) \pm \sqrt{1+a^2-2a)}}{2} = \frac{(3-a) \pm (1-a)}{2},$$

ovvero sono 1 e $2-a$. Vediamo quindi che gli autovalori di A_a sono 1, 2 e $2-a$; la matrice A_a possiede quindi un autovalore multiplo se $2-a = 1, 2$, cioè se e solo se $a = 0, 1$.

(b) Osserviamo che sia per $a = 0$ che per $a = 1$ la matrice A_a ha un autovalore semplice (per il quale la condizione su molteplicità algebrica e geometrica è automaticamente verificata) e un autovalore doppio (per cui dobbiamo invece controllarla).

Per $a = 0$ l'autovalore doppio è 2. Dobbiamo quindi controllare la sua molteplicità geometrica,

$$\dim\ker(A_0 - 2\,\mathrm{Id}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2,$$

dove abbiamo usato il fatto che l'ultima matrice ha chiaramente rango 1 perché tutte le sue righe sono fra loro proporzionali. Per $a = 0$ la matrice A_a è quindi diagonalizzabile.

Per $a = 1$ dobbiamo invece calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1, che risulta essere

$$\dim\ker(A_1 - \mathrm{Id}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Per giustificare l'ultima uguaglianza si osservi che il rango della matrice in questione è almeno 2 (in effettim le prime due righe non sono proporzionali), e non può essere 3 in quanto sappiamo che 1 è un autovalore di A_1, e dunque la matrice $A_1 - \mathrm{Id}$ ha nucleo non banale. In questo caso abbiamo quindi trovato che $m_{\mathrm{geo}}(1) < m_{\mathrm{alg}}(1)$, e perciò la matrice A_1 non è diagonalizzabile.

(c) L'unico valore di a valido trovato al punto precedente è $a = 0$. La domanda di calcolare una base dell'autospazio di dimensione massima (quello relativo all'autovalore 2) si riduce a quella di calcolare una base del nucleo di $A_0 - 2\,\mathrm{Id}$, matrice che abbiamo già studiato sopra e che è risultata essere $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Il nucleo di questa matrice è quindi descritto dalla singola equazione $x - 2y + z = 0$; una base dello spazio delle soluzioni è allora (per esempio) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ numeri complessi distinti fra loro e diversi da 0. Siano inoltre $m_1, \dots, m_r$ numeri complessi qualsiasi.

1. Supponiamo che valga $m_1\lambda_1^i+\cdots+m_r\lambda_r^i=0$ per $i=1,\ldots,r$. Descrivere un sistema lineare omogeneo, di dimensione $r\times r$, di cui $\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\end{pmatrix}$ sia una soluzione.

   Nota. Si richiede di descrivere la matrice quadrata dei coefficienti del sistema.

2. Dedurre che $m_1=\ldots=m_r=0$.

3. Sia N una matrice complessa $n\times n$ il cui unico autovalore è 0. Dimostrare che $\operatorname{tr} N^i=0$ per ogni i intero positivo.

4. Sia N una matrice complessa $n\times n$ tale che $\operatorname{tr} N^i=0$ per ogni intero positivo i. Dimostrare che l'unico autovalore di N è 0.

5. Dedurre che una matrice N come al punto precedente soddisfa $N^n=0$.

6. ($\star$) Siano A,B,C matrici $n\times n$ a coefficienti complessi tali che $B=AC-CA$ e $AB-BA=0$. Dimostrare che $B^n=0$.

Soluzione.

1. Si ha $V\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ dove $V=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r\end{pmatrix}$ è la matrice il cui coefficiente in posizione (i,j) è λ_j^i. In effetti, il prodotto fra la i-esima riga di V e il vettore colonna $\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_r\end{pmatrix}$ è per definizione $m_1\lambda_1^i+\cdots+m_r\lambda_r^i$, che per ipotesi è 0.

2. Riprendendo le notazioni del punto precedente, ed utilizzando la multilinearità del determinante per estrarre dalla j-esima colonna della matrice V un fattore λ_j, otteniamo

$$\det(V)=\lambda_1\cdots\lambda_r\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1}\end{pmatrix}.$$

   Ora per ipotesi $\lambda_1\cdots\lambda_r\neq 0$ (perché ognuno dei λ_i è diverso da 0), e il determinante della restante matrice è un determinante di Vandermonde, che è non nullo in quanto per ipotesi i λ_i sono tutti diversi fra loro. Ne segue che $\det(V)\neq 0$, e quindi l'unico vettore nel nucleo di V è il vettore nullo. Siccome dal punto precedente sappiamo che $\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_r\end{pmatrix}$ è nel nucleo di V, otteniamo $\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ come voluto.

3. Detti $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ gli autovalori di una matrice quadrata A, sappiamo dalla teoria che vale $\operatorname{tr} A^i=\lambda_1^i+\cdots+\lambda_n^i$ per ogni i intero positivo (questo si vede facilmente scrivendo A in una base rispetto alla quale essa sia triangolare). Applicando questa formula alla matrice N, visto che per ipotesi si ha $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ otteniamo subito $\operatorname{tr} N^i=0$.

4. Supponiamo per assurdo che N ammetta almeno un autovalore diverso da zero, e siano $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ gli autovalori **non nulli** di N, di molteplicità algebriche rispettive $m_1,\ldots,m_r$ (con

ciò si intende implicitamente che i λ_i sono tutti distinti fra loro). Sia inoltre m_0 la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 (ammettendo eventualmente $m_0 = 0$). Come ricordato al punto precedente, per ogni intero positivo si ha $\operatorname{tr} N^i = m_0 \cdot 0^i + m_1 \cdot \lambda_1^i + \cdots + m_r\lambda_r^i$, e d'altro canto per ipotesi $\operatorname{tr} N^i = 0$. Eliminando l'addendo $m_0 \cdot 0^i = 0$ otteniamo quindi che per ogni intero positivo vale $m_1 \cdot \lambda_1^i + \cdots + m_r\lambda_r^i = 0$. Siccome i λ_i sono tutti diversi fra loro e diversi da zero, il punto 2 di questo esercizio fornisce $m_1 = \ldots = m_r = 0$, assurdo perché si era supposto che N avesse almeno un autovalore non nullo.

5. Siccome tutti gli autovalori di N sono uguali a 0, il suo polinomio caratteristico è $p_N(t) = (t-0)^n = t^n$. Il teorema di Cayley-Hamilton fornisce allora $p_N(N) = 0$, ovvero $N^n = 0$ come voluto.

6. Dai punti precedenti sappiamo che basta dimostrare che la traccia di B^i è 0 per ogni intero positivo i. Osserviamo ora che $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(AC-CA) = \operatorname{tr}(AC)-\operatorname{tr}(CA) = 0$ (ricordiamo che l'uguaglianza $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ vale per ogni coppia di matrici X, Y quadrate della stessa dimensione). Inoltre, per $i \geq 2$ abbiamo

$$\operatorname{tr}(B^i) = \operatorname{tr}(B^{i-1}(AC - CA)) = \operatorname{tr}(B^{i-1}AC - B^{i-1}CA);$$

ora osserviamo che siccome B commuta con A, anche B^{i-1} commuta con A, e quindi

$$\operatorname{tr}(B^i) = \operatorname{tr}(B^{i-1}AC-B^{i-1}CA) = \operatorname{tr}(AB^{i-1}C-B^{i-1}CA) = \operatorname{tr}(A(B^{i-1}C)-(B^{i-1}C)A) = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta come sopra. Abbiamo quindi mostrato che $\operatorname{tr}(B^i) = 0$ per ogni intero positivo i, per cui la tesi segue dal punto 5.

3.9 Compito del 12/11/2020 (appello straordinario)

Test.

1. Sia $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

   (a) Sia $W = \{A \in V : \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(MA) = 0\}$. Qual è la dimensione di W? ....

   (b) Scrivere qui una base di W:

   (c) Sia Z il sottospazio di V generato dalle tre matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare una base di $W \cap Z$:

   Soluzione.

   (a) La risposta è 2. Scrivendo la generica matrice in V come $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, la condizione data si traduce nelle due equazioni $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Queste due sono chiaramente non proporzionali, quindi la dimensione del sottospazio da esse definito è $\dim V - 2 = 4 - 2 = 2$.

   (b) Si tratta di trovare due matrici linearmente indipendenti in W, ad esempio

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (c) Determiniamo preliminarmente una descrizione di Z tramite equazioni cartesiane. Rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di V, i generatori di Z hanno coordinate $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Consideriamo allora la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & a_{11}\\2 & -2 & 1 & a_{12}\\3 & 1 & 1 & a_{21}\\4 & -5 & 1 & a_{22}\end{pmatrix};$$

procedendo con qualche mossa di eliminazione di Gauss si ottiene

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & a_{11}\\2 & -2 & 1 & a_{12}\\3 & 1 & 1 & a_{21}\\4 & 3 & 1 & a_{22}\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & a_{11}\\2 & -2 & -1 & a_{12}\\3 & 1 & -2 & a_{21}\\4 & -5 & -3 & a_{22}\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[3]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & a_{11}\\2 & 0 & -1 & a_{12}\\3 & 5 & -2 & a_{21}\\4 & 1 & -3 & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Continuando con l'eliminazione di Gauss sull'ultima colonna abbiamo poi

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & a_{11}\\2 & 0 & -1 & a_{12}\\3 & 5 & -2 & a_{21}\\4 & 1 & -3 & a_{22}\end{pmatrix} &\xrightarrow{[4]-a_{11}[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & -1 & a_{12}-2a_{11}\\3 & 5 & -2 & a_{21}-3a_{11}\\4 & 1 & -3 & a_{22}-4a_{11}\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow{[4]+(a_{12}-2a_{11})[3]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & -1 & 0\\3 & 5 & -2 & a_{21}+a_{11}-2a_{12}\\4 & 1 & -3 & a_{22}+2a_{11}-3a_{12}\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow{[4]-(a_{22}+2a_{11}-3a_{12})[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & -1 & 0\\3 & 5 & -2 & a_{21}-9a_{11}+13a_{12}-5a_{22}\\4 & 1 & -3 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

da cui come noto si ottiene che un'equazione cartesiana per V è $-9a_{11}+13a_{12}+a_{21}-5a_{22}=0$. Intersecando con W, dato dalle equazioni $a_{11}+a_{22}=0$ e $a_{12}+a_{21}=0$, ci troviamo a dover studiare il sistema

$$\begin{cases}-9a_{11}+13a_{12}+a_{21}-5a_{22}=0\\a_{11}+a_{22}=0\\a_{12}+a_{21}=0.\end{cases}$$

Sostituendo $a_{22}=-a_{11}$ e $a_{21}=-a_{12}$ nella prima equazione otteniamo

$$\begin{cases}-4a_{11}+12a_{12}=0\\a_{11}+a_{22}=0\\a_{12}+a_{21}=0;\end{cases}$$

prendendo ad esempio a_{12} come variabile libera, le soluzioni di questo sistema sono tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix}3a_{12}\\a_{12}\\-a_{12}\\-3a_{12}\end{pmatrix}$, ovvero lo span di $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Ricordando la nostra scelta di coordinate, questo vuol dire che una base di $W\cap Z$ è data da $\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Sia a un numero reale e $M_a = \begin{pmatrix}1 & a & a-3 & 1\\a & 1 & 0 & 1\\1 & a & -1 & 1\\a & 1 & a & a\end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il determinante di M_a: ....

(b) Determinare, in funzione di $a \in \mathbb{R}$, il rango di M_a (riempire le righe necessarie nella tabella):

Rango	Valori di a
0	
1	
2	
3	
4	

(c) Sia $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e sia $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ un vettore tale che $M_3 w = v$. Determinare x_1:

☐ Ci sono più valori possibili ☐ C'è un unico valore possibile, ed è $x_1 =$ ....

Soluzione.

(a) Per calcolare il determinante di M_a usiamo il fatto che questo non cambia se sottraiamo la prima colonna dall'ultima. Si ha perciò

$$\det M_a = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a-3 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 1 & a & -1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \end{pmatrix} = (1-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a-3 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix},$$

dove nel secondo passaggio si è sviluppato rispetto all'ultima colonna. Possiamo ulteriormente sottrarre a volte la prima colonna (della matrice 3×3) alla seconda per ottenere

$$\det M_a = (1-a) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1-a^2 & a \end{pmatrix} = (1-a)(-1)(1-a^2) \det \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dove si è sviluppato rispetto alla seconda colonna. Calcolando ora esplicitamente il determinante della matrice 2×2 otteniamo $\det M_a = (a-1)(a^2-1)(a-2) = (a-2)(a-1)^2(a+1)$.

(b) Dal punto precedente vediamo che $\det M_a \neq 0$ a meno che a non sia uno fra i tre valori $-1, 1, 2$. Per $a = -1$ abbiamo

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che si vede facilmente avere rango 3 (le prime due colonne sono linearmente dipendenti in quanto opposte, ma la seconda, terza e quarta sono indipendenti, come si verifica con una facile eliminazione di Gauss). Per $a = 1$ abbiamo

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha chiaramente rango 2 (la prima, seconda e quarta colonna sono uguali, ma la terza è linearmente indipendente da queste). Infine, per $a = 2$ abbiamo

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+[4],[1]+2[4]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto è immediato vedere che il rango è 3, perché la prima e terza colonna sono opposte, ma la prima, seconda, e quarta colonna sono linearmente indipendenti. Da questi calcoli segue che la risposta è

Rango	Valori di a
0	nessun valore
1	nessun valore
2	$a = 1$
3	$a = -1, 2$
4	$a \notin \{-1, 1, 2\}$

(c) Dal punto precedente sappiamo che M_3 è invertibile, dunque w esiste ed è unico. Per trovare il valore di x_1 la cosa più semplice è forse utilizzare la regola di Cramer,

$$x_1 = \frac{1}{\det M_3} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

dove la matrice è ottenuta da M_3 sostituendo la prima colonna con il vettore v. Per semplificare il calcolo del determinante ancora una volta utilizziamo una mossa di Gauss, in particolare sommando 3 volte la terza riga alla quarta. Tenendo conto che dal punto (a) abbiamo $\det M_3 = 16$ otteniamo allora

$$x_1 = \frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(6 + 30 - 54 - 2) = 5.$$

3. In questo esercizio lavoriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia $W = \langle v \rangle^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio ortogonale alla retta generata da v.

(a) Determinare una base di W che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard:

(b) Scrivere la matrice in base canonica dell'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data dalla proiezione ortogonale su W:

(c) Sia $w = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$. Qual è la distanza di $\pi(w)$ dall'origine? ....

Soluzione.

(a) Osserviamo innanzitutto che W è definito dall'equazione $x + y + 2z = 0$. Una base (non ortogonale) di W è quindi costituita dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Applicando un passo dell'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo allora la base ortogonale

$$v_1,\ v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_2 - \frac{1}{5} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(b) La proiezione ortogonale di un vettore z su $\operatorname{Span}(v)$ è data da $\frac{\langle v,z\rangle}{\langle v,v\rangle} v$, e quindi $\pi(z) = z - \frac{\langle v,z\rangle}{\langle v,v\rangle} v$. Possiamo allora facilmente calcolare

$$\pi(e_1) = e_1 - \frac{1}{6} v = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \pi(e_2) = e_2 - \frac{1}{6} v = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 5/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \pi(e_3) = e_3 - \frac{2}{6} v = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

La matrice voluta è quindi

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Dal punto precedente otteniamo $\pi(w) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. La distanza di questo punto dall'origine è $\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

4. Sia a un parametro reale ed $M_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2-a & a-1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Per quali valori di a la matrice M_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? ....

(b) Per $a = 2$ determinare una base dell'autospazio di M_a di dimensione massima:

(c) Per $a = \frac{5}{2}$ calcolare la traccia di M_a^3: ....

Soluzione.

(a) Iniziamo calcolando il polinomio caratteristico di M_a, che risulta essere

$$p_{M_a}(t) = \det(t \operatorname{Id} - M_a) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ a-2 & 1-a & t-a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 \\ a-2 & 1-a & t-a \end{pmatrix},$$

dove si è sottratta la prima riga dalla seconda. Raccogliendo – per multilinearità del determinante – un fattore $(t-1)$ dalla seconda riga otteniamo

$$\begin{aligned} p_{M_a}(t) &= (t-1) \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-2 & 1-a & t-a \end{pmatrix} \\ &= (t-1) \det \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-2 & 1-a & t-a \end{pmatrix} \\ &= (t-1)\left(t(t-a) + (a-1) - (a-2)\right) \\ &= (t-1)(t^2 - at + 1). \end{aligned}$$

Gli autovalori di M_a sono quindi 1 e le soluzioni di $t^2 - at + 1 = 0$, ovvero $\dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$. In particolare:

- per $|a| < 2$ gli autovalori non sono tutti reali, e quindi la matrice non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;
- per $a = 2$ l'unico autovalore è 1, di molteplicità algebrica 3. Se la matrice fosse diagonalizzabile sarebbe simile all'identità, e quindi dovrebbe coincidere con l'identità (che è rappresentata dalla medesima matrice in ogni base, cosa che non accade. Ne segue che anche per $a = 2$ la matrice non è diagonalizzabile;
- per $a = -2$ l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 1 e l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 1. Per determinare se M_a sia diagonalizzabile si tratta allora di studiare la molteplicità geometrica dell'autovalore -1, ovvero studiare il nucleo di $M_{-2} + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Si vede immediatamente che questa matrice ha rango almeno 2 (le colonne non sono tutte proporzionali), quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è al massimo 1. Anche in questo caso la matrice non è diagonalizzabile;
- infine, per $|a| > 2$ la matrice M_a ha tre autovalori reali e distinti; per ognuno di essi la molteplicità algebrica è uno, e quindi è tale anche la molteplicità geometrica, e la matrice risulta diagonalizzabile.

In conclusione, M_a è diagonalizzabile se e solo se $|a| > 2$.

(b) Come già visto sopra, per $a = 2$ l'unico autovalore è 1, per cui la richiesta è quella di studiare $\ker(M_2 - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Questa matrice ha chiaramente rango 1 (tutte le colonne sono proporzionali all'ultima), quindi il nucleo ha dimensione 2, ed è definito dalla condizione $y + z = 0$. Una base è quindi data, ad esempio, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Appoggiandosi ancora al calcolo del punto (a) vediamo che in questo caso gli autovalori sono 1 e $\dfrac{5/2 \pm \sqrt{(5/2)^2 - 4}}{2} = \dfrac{5/2 \pm 3/2}{2} = 2, 1/2$. Gli autovalori di M_a^3 sono quindi $1, 8, \frac{1}{8}$, e la sua traccia è $9 + \frac{1}{8} = \frac{73}{8}$.

5. Sia $S_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simmetria rispetto al piano W ortogonale al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (si veda anche l'esercizio 3), e sia S_2 la simmetria rispetto al piano $z = 0$. Sia poi $R = S_2 \circ S_1$ la composizione di S_2 ed S_1; si sa che R è una rotazione.

(a) Determinare un generatore per la retta lasciata fissa da R:

(b) Determinare il coseno dell'angolo di rotazione di R: ....

Soluzione.

(a) Abbiamo già incontrato questo piano nell'esercizio 3; la simmetria rispetto a questo piano è $z \mapsto \pi(z) - (z - \pi(z)) = 2\pi(z) - z$. Sulla base del risultato dell'esercizio 3 otteniamo quindi che la matrice di S_1 è

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di S_2, d'altro canto, è immediata da trovare, ed è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. La composizione $S_2 \circ S_1$ ha dunque matrice

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'asse di rotazione è sufficiente cercare l'autospazio corrispondente all'autovalore 1, ovvero

$$\ker\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \mathrm{Id}\right) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

per giustificare l'ultima uguaglianza si osservi che l'ultima matrice nell'uguaglianza precedente ha rango 2 (le prime due colonne sono proporzionali, la terza no), e che il vettore dato è effettivamente nel nucleo. La risposta è quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, o qualsiasi suo multiplo non nullo.

(b) Come noto si ha $\mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo di rotazione. Nel nostro caso si ha $1 + 2\cos\vartheta = \frac{5}{3}$, da cui $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$.

3.10 Compito del 22/01/2021

Test.

1. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Consideriamo un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(e_1+e_2+e_3+e_4) = e_4$, $f(e_1+e_2+e_3) = e_3$, $f(e_1+e_2) = e_2$ e $f(e_1) = e_2+e_3+e_4$.

   (a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo):

   (b) Determinare una base di $\ker f$ costituita da vettori a coordinate intere:

   (c) Sia $W = \mathrm{Span}\{e_1+2e_2-2e_3, e_1+e_2+e_3-2e_4, 3e_2+4e_3-7e_4\}$. Determinare equazioni cartesiane per $W \cap \mathrm{Imm}(f)$ (si denotino con x, y, z, t le coordinate di $\mathbb{R}^4$):

Soluzione.

(a) A partire dalle proprietà date si ottiene, per differenza,

$$f(e_4) = f(e_1+e_2+e_3+e_4) - f(e_1+e_2+e_3) = e_4 - e_3,$$

e similmente

$$f(e_3) = f(e_1+e_2+e_3) - f(e_1+e_2) = e_3 - e_2, \quad f(e_2) = f(e_1+e_2) - f(e_1) = -e_3 - e_4.$$

Infine, $f(e_1)$ è dato nel testo. La matrice di f in base canonica è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice precedente ha rango 3 (è facile vedere che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, e la presenza di una riga nulla prova che il rango è al massimo 3). Ne segue che $\dim \ker f = 4 - \operatorname{rango} f = 1$, e una base è data da un qualsiasi vettore (non nullo) nel nucleo. Si verifica che un tale vettore è ad esempio $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Abbiamo già osservato che $\dim \operatorname{Imm} f = \operatorname{rango} f = 3$, e d'altro canto è chiaro che l'immagine di f è contenuta nell'iperpiano $x = 0$, che ha dimensione 3. Ne segue che il sottospazio $\operatorname{Imm}(f)$ è descritto dall'equazione $x = 0$. In quanto a W, possiamo ottenere un'equazione cartesiana procedendo ad un'eliminazione di Gauss sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ -2 & 1 & 4 & z \\ 0 & -2 & -7 & t \end{pmatrix}.$$

Troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ -2 & 1 & 4 & z \\ 0 & -2 & -7 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[4]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & y-2x \\ -2 & 3 & 4 & z+2x \\ 0 & -2 & -7 & t \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]+3[2],[4]+(y-2x)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 13 & z+2x+3(y-2x) \\ 0 & -2 & -13 & t-2(y-2x) \end{pmatrix}.$$
$$\xrightarrow{[4]-\frac{1}{13}(-4x+3y+z)[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & t+y+z \end{pmatrix}$$

L'intersezione $W \cap \operatorname{Imm}(f)$ è quindi descritta dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

2. Consideriamo il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale rispetto a ϕ, sia costituita di vettori a coefficienti interi, e contenga il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

(b) Determinare la segnatura di ϕ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$.................

(c) Trovare un vettore a coefficienti interi che sia isotropo per ϕ:

Soluzione.

(a) Proviamo ad applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica. Siccome non sappiamo se il prodotto scalare sia o meno definito positivo, non abbiamo garanzia che il procedimento termini; tuttavia, in caso durante lo svolgimento non si incontri alcun vettore isotropo, il risultato del procedimento di Gram-Schmidt è effettivamente una base ortogonale.

Al primo passo del procedimento, il secondo vettore di base viene modificato come segue:

$$e_2 \to e_2 - \frac{\phi(e_1, e_2)}{\phi(e_1, e_1)} e_1 = e_2 - \frac{3}{1} e_1,$$

dove $\phi(e_1, e_2)$ e $\phi(e_1, e_1)$ si leggono direttamente dalla matrice di ϕ. Sia allora $v_2 = e_2 - 3e_1$. Per quanto riguarda il terzo vettore di base, e_3 viene sostituito da

$$e_3 - \frac{\phi(e_3, e_1)}{\phi(e_1, e_1)} e_1 - \frac{\phi(e_3, v_2)}{\phi(v_2, v_2)} v_2.$$

Calcoliamo allora

$$\phi(e_3, v_2) = \phi(e_3, e_2 - 3e_1) = \phi(e_3, e_2) - 3\phi(e_3, e_1) = 7 - 3 \cdot 5 = -8$$

e

$$\phi(v_2, v_2) = \phi(e_2 - 3e_1, e_2 - 3e_1) = \phi(e_2, e_2) - 6\phi(e_1, e_2) + 9\phi(e_1, e_1) = 5 - 6 \cdot 3 + 9 = -4,$$

da cui otteniamo il terzo vettore di una base ortogonale,

$$e_3 - \frac{5}{1} e_1 - \frac{-8}{-4} v_2 = e_3 - 5e_1 - 2(e_2 - 3e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

Abbiamo allora ottenuto la base ortogonale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che il procedimento di Gram-Schmidt ha avuto successo nonostante (come verificheremo sotto) il prodotto scalare non sia definito positivo.

(b) La restrizione di ϕ a $\mathrm{Span}(e_2, e_3)$ ha matrice $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. Dal momento che questa matrice ha traccia $15 > 0$ e determinante $1 > 0$, questa restrizione è definita positiva, da cui $n_+(\phi) \geq 2$. D'altro canto, la restrizione di ϕ a $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, e siccome il determinante di questa matrice è $-4 < 0$ otteniamo che questa restrizione ha segnatura $n_+ = 1, n_- = 1$. Ne segue che $n_-(\phi) \geq 1$, il che – combinato con $n_+(\phi) \geq 2$ – implica che la segnatura di ϕ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

Osservazione. In alternativa, detta v_1, v_2, v_3 la base trovata al punto precedente, sarebbe stato sufficiente calcolare $\phi(v_1, v_1) = 1$, $\phi(v_2, v_2) = -4$, $\phi(v_3, v_3) = 1$ per concludere che la segnatura è quella trovata sopra in altro modo.

(c) Scriviamo un eventuale vettore isotropo v nella base trovata al punto (a), ovvero scriviamo $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, dove $v_1 = e_1$. Siccome la base in questione è ortogonale, otteniamo immediatamente $\phi(v, v) = \lambda_1^2 \phi(e_1, e_1) + \lambda_2^2 \phi(v_2, v_2) + \lambda_3^2 \phi(v_3, v_3) = \lambda_1^2 - 4\lambda_2^2 + \lambda_3^2 \phi(v_3, v_3)$. Possiamo evitare di calcolare $\phi(v_3, v_3)$ scegliendo $\lambda_3 = 0$, e otteniamo un vettore isotropo scegliendo ad esempio $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, da cui $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una scelta altrettanto semplice è $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, da cui $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, in cui $a_{ij} = 0$ ogniqualvolta $i + j$ è dispari. Calcolare $\det(A^2) =$ ....

   Soluzione. Osserviamo innanzitutto che $\det(A^2) = \det(A)^2$ per il teorema di Binet. Permutando opportunamente le righe e le colonne di A si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 3 & 2 & 4 & & & \\ 9 & 4 & 16 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Dal momento che scambiare due righe o due colonne cambia $\det A$ solo per un segno, e siamo interessati soltanto a $\det(A)^2$, possiamo equivalentemente calcolare il determinante di A'. Siccome questa matrice è a blocchi, il suo determinante è il prodotto di $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, che è una matrice di Vandermonde, con determinante $(4-3)(4-2)(2-3) = -2$, e di $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, che è (la trasposta di una) matrice di Vandermonde, con determinante $(2-1)(2+1)(-1-1) = -6$. Otteniamo quindi che A' ha determinante 12, da cui $\det(A^2) = \det(A)^2 = \det(A')^2 = 144$.

   Osservazione. Tenendo conto del numero di scambi di riga e colonna effettuati non è difficile verificare che $\det A = \det(A')$.

4. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di M e le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Qual è il polinomio minimo di M? ....

   (c) Determinare una base dell'autospazio di M corrispondente all'autovalore più grande:

   (d) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di vettori a coordinate intere e che sia ortogonale sia rispetto al prodotto scalare standard, sia rispetto al prodotto scalare la cui matrice in base canonica è M:

   Soluzione.

   (a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M: si ha

$$\det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} t-4 & -3 & -3 \\ -3 & t-4 & -3 \\ -3 & -3 & t-4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t-4 & -3 & -3 \\ 1-t & t-1 & 0 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix},$$

dove si è sottratta la prima riga da ognuna delle altre due. Possiamo ora sfruttare la multilinearità per estrarre un fattore $(t-1)$ dalla seconda e terza riga per ottenere

$$p_M(t) = (t-1)^2 \det \begin{pmatrix} t-4 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (t-1)^2 \left((t-4) - 3 - 3\right) = (t-1)^2(t-10).$$

Gli autovalori sono dunque 1, di molteplicità algebrica 2, e 10, di molteplicità 1.

(b) Dato che M è simmetrica, il teorema spettrale garantisce che è diagonalizzabile. Il polinomio minimo è quindi prodotto di fattori lineari di molteplicità 1, e ogni autovalore compare come radice di uno di tali fattori. Ne segue che il polinomio minimo di M è $(t-1)(t-10)$.

(c) Si tratta di calcolare una base del nucleo di $M - 10\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Si verifica immediatamente che questo nucleo ha dimensione 1 ed è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Dal teorema spettrale otteniamo che è sufficiente trovare una base dell'autospazio relativo ad 1 che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard, e poi unirla alla base dell'autospazio relativo a 10 trovata sopra. Si tratta quindi di trovare una base del nucleo di $M - \mathrm{Id} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una base di questo nucleo è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ma non è ortogonale. Possiamo ortogonalizzarla con un passaggio del procedimento di Gram-Schmidt, ottenendo la base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Moltiplicando per 2 le coordinate di quest'ultimo vettore (per far sì che abbia coordinate intere) e combinandolo con quanto trovato al punto precedente, otteniamo la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia $M \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matrice diversa dall'identità tale che ${}^tM \cdot M = \mathrm{Id}$ e $M^5 = \mathrm{Id}$.

1. Dimostrare che $\det M = 1$.
2. Dimostrare che esistono esattamente due possibilità per il polinomio caratteristico di M.
3. Sia $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$. Determinare $\dim_{\mathbb{C}}(V)$.
4. $(\star)$ Dimostrare che esiste $v \in \mathbb{R}^3$ tale che v, Mv, M^2v sia una base di $\mathbb{R}^3$.
5. Sia $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. Determinare $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.
6. Sia A in W. Dimostrare che A si diagonalizza se e solo se ha un autovalore di molteplicità algebrica almeno 2.

Soluzione.

1. Per il teorema di Binet si ha $\det(M^5) = \det(M)^5$, e d'altra parte per ipotesi $\det(M^5) = \det(\mathrm{Id}) = 1$. Siccome $\det(M)$ è un numero reale, queste due condizioni implicano $\det M = 1$.

2. La condizione ${}^tMM = \mathrm{Id}$, insieme al fatto che $\det(M) = +1$, garantisce che M sia la matrice di una rotazione R, diciamo di angolo ϑ. Siccome M^5 è la matrice della composizione di R con se stessa 5 volte, otteniamo che una rotazione di angolo 5ϑ è l'identità. Per ipotesi, ϑ non è un multiplo di 2π (altrimenti M sarebbe l'identità), quindi (a meno di multipli di 2π) abbiamo $\vartheta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm 2\frac{2\pi}{5}$. Una rotazione di angolo ϑ ha come autovalori $1, e^{i\vartheta}$ e $e^{-i\vartheta}$, per cui il polinomio caratteristico risulta essere $(t-1)(t - 2\cos\vartheta + 1)$. I due polinomi caratteristici possibili corrispondono allora ai due possibili valori del coseno degli angoli ϑ trovati sopra (si osservi che $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$, e similmente si ha $\cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-2\frac{2\pi}{5}\right)$).

3. Pensiamo in termini delle applicazioni lineari corrispondenti alle matrici A ed M. Sappiamo che due endomorfismi commutano se e solo se l'uno preserva gli autospazi dell'altro. La discussione del punto precedente prova che M ha 3 autovalori distinti, e quindi 3 autospazi di dimensione 1. Siano v_1, v_2, v_3 generatori di questi tre autospazi; l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$. Allora – detta f l'applicazione lineare corrispondente ad A – abbiamo che f commuta con R (l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ corrispondente ad M) se e solo se $f(v_1) = \lambda_1 v_1, f(v_2) = \lambda_2 v_2, f(v_3) = \lambda_3 v_3$ per certi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Ne segue quindi che f commuta con R se e solo se la sua matrice, scritta in base $\mathcal{B}$, è diagonale. Otteniamo quindi che V è isomorfo (tramite un opportuno cambiamento di base) allo spazio delle matrici diagonali complesse 3×3, e quindi ha dimensione 3.

4. Dal teorema di struttura per matrici ortogonali sappiamo che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di R è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Consideriamo il vettore w che in questa base ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: allora Rw ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$ e $R^2 w$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \\ 2\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$. Questi tre vettori formano allora una base di $\mathbb{R}^3$, in quanto

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\vartheta & \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & 2\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} = 2\sin\vartheta(1 - 2\cos\vartheta)$$

è diverso da 0 (si ha certamente $\sin\vartheta \neq 0$, e se fosse $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ si avrebbe $\vartheta = \pm\frac{2\pi}{3}$, mentre abbiamo già dimostrato che $\vartheta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}$).

5. Sia $A \in W$, sia v come al punto precedente, e sia $u = Av$. Dalla condizione $AM = MA$ otteniamo $A(Mv) = MAv = Mu$ e $A(M^2v) = M^2Av = M^2u$. Ne segue che la matrice di A in base $\{v, Mv, M^2v\}$ ha come colonne u, Mu, M^2u, e quindi è completamente determinata dalla sua prima colonna. Otteniamo allora che la dimensione di W è 3, in quanto W è isomorfo (tramite il cambiamento di base descritto sopra, ovvero quello dato dalla base $\{v, Mv, M^2v\}$) allo spazio delle matrici della forma appena descritta, che a sua volta è isomorfo ad $\mathbb{R}^3$ (tramite l'applicazione che manda $u \in \mathbb{R}^3$ nella matrice di colonne u, Mu, M^2u).

   Nota. Si sarebbe anche potuto dimostrare che la dimensione di W su $\mathbb{R}$ è la stessa della dimensione di V su $\mathbb{C}$ tramite un argomento generale, ma abbiamo preferito descrivere questo approccio diretto, che è più strettamente collegato alle proprietà di rotazione di M.

6. Come prima consideriamo una base rispetto alla quale la matrice di R sia

$$B := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

   Visto che la condizione di commutare con una data applicazione lineare è indipendente dalla scelta di base, dal punto precedente sappiamo che le matrici che commutano con B formano un sottospazio di dimensione 3. Osserviamo che le tre matrici $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e B sono linearmente indipendenti e commutano con B, quindi formano una base dello spazio delle matrici che commutano con B. In particolare, ogni matrice che commuta con B è della forma

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b + c\cos\vartheta & -c\sin\vartheta\\ 0 & c\sin\vartheta & b + c\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

per opportuni $a, b, c \in \mathbb{R}$. Un rapido calcolo mostra che gli autovalori di questa matrice sono a e $b + ce^{\pm i\vartheta}$. Condizione necessaria per la diagonalizzabilità è che gli autovalori siano reali, il che accade se e solo se $c = 0$: in tal caso, l'autovalore b ha molteplicità almeno 2. Viceversa, se se due autovalori sono uguali fra loro, allora si ha o $a = b + ce^{\pm i\vartheta}$ (per una certa scelta di segno $\pm$), il che implica $c = 0$, oppure $b + ce^{i\vartheta} = b + ce^{-i\vartheta}$, che ancora implica $c = 0$. In entrambi i casi, la matrice considerata è diagonale nella base descritta sopra, e quindi la corrispondente applicazione lineare è certamente diagonalizzabile. Questo conclude la dimostrazione.

4 Anno accademico 2020-2021

4.1 Esercitazione del 24/11/2020

Test.

1. Consideriamo i sottospazi

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare equazioni cartesiane per W_2:

(b) Determinare una base di W_1:

(c) Determinare la dimensione di $W_1 + W_2$:

Soluzione.

(a) Procediamo con un'eliminazione di Gauss per colonne:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & x_1 \\ 8 & 5 & 2 & x_2 \\ -3 & 0 & 3 & x_3 \\ 6 & 3 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+2[1],[3]+5[1],[4]+x_1[1]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 21 & 42 & x_2+8x_1 \\ -3 & -6 & -12 & x_3-3x_1 \\ 6 & 15 & 30 & x_4+6x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-2[2],\frac{1}{3}\cdot[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & x_2+8x_1 \\ -3 & -2 & 0 & x_3-3x_1 \\ 6 & 5 & 0 & x_4+6x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-\frac{1}{7}(x_2+8x_1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & x_3-3x_1+\frac{2}{7}(x_2+8x_1) \\ 6 & 5 & 0 & x_4+6x_1-\frac{5}{7}(x_2+8x_1) \end{pmatrix}$$

Moltiplicando tutto per 7 per eliminare i denominatori, otteniamo allora che equazioni cartesiane per W_2 sono

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Risolviamo il sistema che definisce W_1: equivalentemente, si tratta di trovare il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dal momento che le mosse di Gauss per righe non cambiano il nucleo di una matrice, possiamo semplificare questo sistema procedendo ad una eliminazione di Gauss per righe come segue:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è dunque equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni (prendendo come variabile libera x_3) sono tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero lo span di $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Visto che questo vettore genera (ed è certamente linearmente indipendente, essendo un unico vettore non nullo), esso è una base.

(c) Dalla formula di Grassmann otteniamo $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1 \cap W_2)$. Abbiamo già dimostrato che W_1 ha dimensione 1 (ne abbiamo trovato una base al punto precedente) e che W_2 ha dimensione 2 (segue dall'eliminazione di Gauss svolta al punto (a)), per cui $\dim(W_1 + W_2) = 3 - \dim(W_1 \cap W_2)$. L'intersezione in questione è definita dal sistema

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

dove le prime tre equazioni definiscono W_1 e le ultime due W_2. Abbiamo già verificato che le prime tre equazioni possono essere semplificate come segue:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x_4 = 0$ ovunque, dalla seconda equazione otteniamo $x_2 = x_3$ e dalla prima $x_1 = -2x_3$. Sostituendo nella quarta equazione abbiamo allora $10x_3 + 2x_3 + 7x_3 = 0$, da cui $x_3 = 0$, e l'unica soluzione del sistema è quindi quella banale. Questo dimostra che $W_1 \cap W_2$ è il sottospazio banale, di dimensione 0, e quindi che $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

Nota. Naturalmente è anche possibile anche calcolare direttamente la dimensione di $W_1 + W_2$ effettuando un'eliminazione di Gauss sull'insieme di tutti i generatori di W_2 (dati nel testo) e di W_1 (uno solo, trovato al punto (b)).

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) f è invertibile?

☐ Sì, e l'inversa è rappresentata (in base canonica) dalla matrice:

☐ No, non è invertibile, e il suo rango è: ....

(b) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (sia in partenza che in arrivo).

(a) Come visto a lezione, possiamo effettuare mosse di eliminazione di Gauss *per riga* sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[3]+[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]+\frac{2}{3}[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice ridotta a scalini ha tre pivot non nulli: essa (e quindi anche la matrice M originale, e corrispondentemente l'applicazione lineare f) ha rango 3, e quindi M ed f sono invertibili. Per determinare M^{-1} procediamo con ulteriori mosse di eliminazione di Gauss "verso l'alto", come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+7[3],[1]-4[3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -8 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & -9 & 15 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -8 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[1]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto a lezione, l'inversa di M è allora la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, che è anche la matrice che rappresenta f^{-1} in base canonica.

(b) Seguendo la ricetta generale, detti v_1, v_2, v_3 i vettori della base $\mathcal{B}$ si tratta di calcolare $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ ed esprimere i risultati in base $\mathcal{B}$. Per v_1 abbiamo semplicemente

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_3.$$

Per v_2 si ha

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dove a, b, c risolvono

$$\begin{cases} a+b+c = 5 \\ 2c = 3 \\ b-c = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione si trova immediatamente essere $a = 2, b = 3/2, c = 3/2$. Infine, per v_3 abbiamo

$$f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{cases} d+e+f=-1 \\ 2f=-1 \\ e-f=0, \end{cases}$$

che ha come soluzione $d=0, e=-1/2, f=-1/2$. La matrice di f in base $\mathcal{B}$ è dunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sia Π il piano affine di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare un'equazione cartesiana per Π:

   Soluzione. Consideriamo intanto il piano vettoriale W parallelo a Π. Questo è generato dalle differenze fra vettori in Π, e in particolare è generato da

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Procediamo come d'abitudine per trovare un'equazione per W:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & x \\ -3 & -2 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}[2],[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & -3 & x \\ -1 & -3 & y \\ -1 & -1 & z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]+3[1],[3]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & y+x \\ -1 & -4 & z+x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+\frac{1}{6}(x+y)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & -4 & z+x-\frac{2}{3}(x+y) \end{pmatrix}$$

   Moltiplicando per 3 l'espressione nell'ultima colonna troviamo allora che un'equazione per W è $x-2y+3z=0$. Un'equazione per Π sarà allora della forma $x-2y+3z=d$, dove d è scelto in modo tale che uno qualsiasi dei tre punti dati nel testo soddisfi questa equazione. Utilizzando ad esempio il primo, troviamo $d = 1-2\cdot 3+3\cdot 3 = 4$. Un'equazione per Π è quindi $x-2y+3z=4$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

1. Determinare il massimo intero positivo r con la seguente proprietà: esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tale che $f \circ f = 0$ e $\mathrm{rg}(f) = r$. Denoteremo tale intero con $r_{\max}$

2. Dare un esempio esplicito di una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ con $f \circ f = 0$ e $\mathrm{rango}(f) = r_{\max}$.

   Nota. La seconda domanda è in realtà ricompresa nella prima: in effetti, *determinare il massimo valore tale che esista qualcosa* è una domanda che ne sottintende due. Più precisamente, per dimostrare che la risposta corretta è un certo $r_{\max}$, bisogna mostrare *due* cose: da un lato, che per ogni valore maggiore di $r_{\max}$ il qualcosa non esiste; e dall'altro, che per il valore $r = r_{\max}$ invece esiste un oggetto con le proprietà desiderate. Il modo migliore di dimostrare che un oggetto con certe proprietà esiste è esibire un esempio!

3. Sia $g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ un'applicazione lineare con $g \circ g = 0$ e $\operatorname{rango}(g) = r_{\max}$. Dimostrare che esistono due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbb{R}^7$ con $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e $\dim(g(W_1) \cap g(W_2)) = 2$.

   Nota. In questa domanda non potete assumere che g sia il vostro esempio f del punto precedente: dovete dare una dimostrazione valida per *qualsiasi* applicazione lineare g con le proprietà descritte.

Soluzione.

1 e 2. Dal teorema fondamentale otteniamo $\dim\ker f + \dim\operatorname{Imm} f = 7$. D'altro canto, la condizione $f(f(v)) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^7$ si traduce esattamente nel dire che l'immagine di f è contenuta nel nucleo di f, da cui in particolare $\dim\operatorname{Imm} f \leq \dim\ker f$. Combinando queste informazioni,

$$7 = \dim\ker f + \dim\operatorname{Imm} f \geq 2\dim\operatorname{Imm} f,$$

e quindi $\operatorname{rango}(f) = \dim\operatorname{Imm} f$ è minore o uguale a 3. Vediamo che in effetti il numero 3 è realizzabile: basta prendere l'applicazione lineare f la cui matrice in base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambiando le prime tre colonne con le ultime tre si ottiene una matrice ridotta a scalini con tre pivot, da cui vediamo che M (e quindi f) ha rango 3. D'altro canto, $f \circ f = 0$: questo si può verificare o calcolando M^2 e verificando che è zero (calcolo immediato), oppure osservando che $f \circ f$ è identicamente zero se e solo se è zero sugli elementi di una base. Scegliendo come base quella canonica, che denotiamo e_i, vediamo che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 0$ per costruzione, e quindi a maggior ragione anche $f \circ f(e_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3, 4$, e d'altro canto $f(e_5) = e_1, f(e_6) = e_2, f(e_7) = e_3$, da cui segue $f(f(e_5)) = f(e_1) = 0$ e similmente $f(f(e_6)) = f(f(e_7)) = 0$.

3. Per quanto visto sopra il rango di g è 3. Sia w_1, w_2, w_3 una base dell'immagine di g, e siano v_1, v_2, v_3 vettori tali che $g(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$; tali vettori esistono per definizione di immagine (un vettore è nell'immagine se si può scrivere come g applicato ad un vettore nel dominio). Sia poi v_4 un vettore non nullo nel nucleo di g (si osservi che dalla formula fondamentale segue che $\ker g$ ha dimensione $7 - 3 = 4$, dunque certamente contiene vettori non nulli). Scegliamo $W_1 = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ e $W_2 = \operatorname{Span}(v_1 + v_4, v_2)$. Verifichiamo che questa scelta verifica le condizioni richieste:

   - da un lato $g(W_1)$ è lo span di $g(v_1) = w_1, g(v_2) = w_2$, mentre $g(W_2)$ è lo span di $g(v_1 + v_4) = g(v_1) + g(v_4) = g(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_2$, per cui $g(W_1) = g(W_2)$ e $\dim(g(W_1) \cap g(W_2)) = \dim g(W_1)$. D'altra parte, w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti per definizione (fanno parte di una stessa base), per cui $\operatorname{Span}(w_1, w_2)$ ha w_1, w_2 come base, e quindi ha dimensione 2.
   - Dimostriamo ora che $W_1 \cap W_2$ ha dimensione 1. Da un lato per definizione abbiamo $v_2 \in W_1 \cap W_2$, dunque la dimensione è almeno 1. D'altro canto, se $W_1 \cap W_2$ avesse dimensione 2, allora si avrebbe $W_1 \cap W_2 = W_1$ (inclusione fra sottospazi vettoriali della stessa dimensione), e similmente $W_1 \cap W_2 = W_2$, da cui $W_1 = W_2$. Vediamo che questo è assurdo. In effetti, se così fosse, allora si avrebbe che sia v_1 (che è un elemento di W_1), sia $v_1 + v_4$ (che è un elemento di $W_2 = W_1$) starebbero in W_1, e quindi anche $v_4 = (v_1 + v_4) - (v_1)$ starebbe in W_1.

     Osserviamo ora che W_1 ha per base v_1, v_2. In effetti, questi due vettori generano per definizione, e sono linearmente indipendenti: se per qualche scelta di scalari $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $av_1 + bv_2 = 0$, allora $0 = f(0) = f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2) = aw_1 + bw_2$.

Siccome w_1, w_2 sono linearmente indipendenti otteniamo $a = b = 0$, che è quanto dobbiamo dimostrare per verificare la lineare indipendenza di v_1, v_2.

Siccome v_1, v_2 è una base di W_1, e v_4 è un elemento di W_1, otteniamo che v_4 si scrive anche come $v_4 = \lambda v_1 + \mu v_2$ per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Procedendo come sopra abbiamo allora $0 = f(v_4) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda w_1 + \mu w_2$. Dalla lineare indipendenza di w_1, w_2 otteniamo $\lambda = \mu = 0$ e quindi $v_4 = 0$, assurdo in quanto v_4 è stato espressamente scelto essere un vettore non nullo.

4.2 Compitino del 05/12/2020

Test.

1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di V dire se si tratta di un sottospazio vettoriale e, in tal caso, indicarne la dimensione.

   (a) $W_1 = \{p(x) \in V : p'(2) = 0\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ È un sottospazio di dimensione ....

   (b) $W_2 = \{p(x) \in V : p'(0) = 2\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ È un sottospazio di dimensione ....

   (c) $W_3 = \{p(x) \in V : p(x+1) + p(x-1) = 2p(x)\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ È un sottospazio di dimensione ....

   (d) $W_4 = \{p(x) \in V : p(0)^2 + p'(0)^2 = 0\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ È un sottospazio di dimensione ....

   Soluzione. In tutta la soluzione scriviamo $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

   (a) La condizione si riscrive $a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$. Il sottoinsieme W_1 è quindi dato da una singola equazione lineare omogenea: si tratta quindi di un sottospazio vettoriale, di dimensione inferiore di 1 a quella di V. Come noto $\dim V = 4$, quindi W_1 è un sottospazio vettoriale di dimensione 3.

   (b) Non è un sottospazio: il polinomio 0 non appartiene a W_2.

   (c) Sviluppando la condizione troviamo

   $$a_3((x+1)^3 + (x-1)^3) + a_2((x+1)^2 + (x-1)^2) + a_1((x+1) + (x-1)) + 2a_0 = \\ = 2a_3x^3 + 2a_2x^2 + 2a_1x + 2a_0,$$

   ovvero

   $$a_3(2x^3 + 6x) + a_2(2x^2 + 2) + 2a_1x + 2a_0 = 2a_3x^3 + 2a_2x^2 + 2a_1x + 2a_0.$$

   Semplificando i termini simili su entrambi i lati, otteniamo la condizione equivalente

   $$6a_3x + 2a_2 = 0,$$

   che a sua volta si può riscrivere come $a_2 = a_3 = 0$. Si ha perciò che W_3 è l'insieme dei polinomi di grado al più 1, che è un sottospazio vettoriale (in quanto può essere descritto come $\mathrm{Span}(1, x)$). La sua dimensione è 2 in quanto $1, x$ sono linearmente indipendenti (oltre che generatori di W_3) e quindi sono una base di W_3.

   (d) La condizione si riscrive $a_0^2 + a_1^2 = 0$, che – siccome a_0, a_1 sono numeri reali – è equivalente a $a_0 = a_1 = 0$. Il sottoinsieme W_4 è quindi l'insieme dei polinomi della forma $a_3x^3 + a_2x^2$: questo è un sottospazio vettoriale, in quanto è $\mathrm{Span}(x^3, x^2)$. Siccome x^3, x^2 sono linearmente indipendenti, questa è anche una base, e concludiamo che $\dim W_4 = 2$.

2. Sia W_1 l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{R}^4$ del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W_2 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Determinare una base di W_1:

(b) Determinare equazioni cartesiane per W_2:

(c) Determinare una base per $W_1 \cap W_2$:

Soluzione.

(a) Risolviamo il sistema dato nel testo, prendendo come variabili libere (ad esempio) x_3, x_4: si ottiene allora $x_1 = -2x_3 - x_4$ (dalla seconda equazione) e, per sostituzione nella prima, $x_2 = x_1 + 3x_4 = 2x_4 - 2x_3$. Ne segue che le soluzioni del sistema sono i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ 2x_4 - 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ovvero $W_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Dal momento che i due vettori $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (per due vettori, questo è equivalente a dire non proporzionali), essi formano una base di W_1.

(b) Procediamo ad un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & x_1 \\ -2 & 6 & 4 & x_2 \\ 0 & 2 & 1 & x_3 \\ -1 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}:$$

si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & x_1 \\ -2 & 6 & 4 & x_2 \\ 0 & 2 & 1 & x_3 \\ -1 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+[1],[3]+[1],[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & 0 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-2[3],[4]-\frac{1}{2}(x_2+2x_1)[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - \frac{1}{2}(x_2 + 2x_1) \\ -1 & 0 & 0 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo così le due equazioni cartesiane $2x_3 - x_2 - 2x_1 = 0$ e $x_1 + x_4 = 0$.

(c) L'intersezione considerata è descritta dal sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

che combina le equazioni per W_1 (date nel testo) e quelle di W_2 (ricavate al punto precedente). Trattandosi di un sistema piuttosto semplice possiamo risolverlo per sostituzione: l'ultima equazione fornisce $x_4 = -x_1$, che sostituita nella prima dà $x_2 = x_1 + 3x_4 = -2x_1$. A questo punto la terza equazione diventa semplicemente $x_3 = 0$, che sostituita nella seconda fornisce nuovamente $x_1 + x_4 = 0$ (che è quindi ridondante). Ci siamo perciò ridotti al sistema

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 \\ x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di quest'ultimo sistema (equivalente a quello di partenza) sono chiaramente tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Ne segue che $W_1 \cap W_2 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, e quest'ultimo vettore è quindi una base di $W_1 \cap W_2$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia M la matrice di f in base canonica (in partenza ed in arrivo).

   (a) Scrivere la matrice M:

   (b) Dire se la matrice M è invertibile. In caso affermativo calcolarne l'inversa, in caso negativo specificarne il rango.

   ☐ M non è invertibile, e il suo rango è ..... ☐ M è invertibile, e la sua inversa è:

   (c) Calcolare $f(f(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})))$:

Soluzione.

(a) Siano $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i vettori della base canonica. Si tratta di calcolare $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$: questi vettori (scritti in base canonica) sono le colonne di M. Siano ora $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tre vettori considerati nel testo come argomenti di f. Si osservi che

   i. $v_2 + v_3 = 2e_1$;
   ii. $v_3 - v_2 = 2e_2$;
   iii. $v_1 - v_3 = e_3$.

   Per linearità di f ricaviamo allora:

   i. $f(e_1) = f\left(\frac{v_2+v_3}{2}\right) = \frac{1}{2}f(v_2) + \frac{1}{2}f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

   ii. $f(e_2) = f\left(\frac{v_3-v_2}{2}\right) = \frac{1}{2}f(v_3) - \frac{1}{2}f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

   iii. $f(e_3) = f(v_1 - v_3) = f(v_1) - f(v_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La risposta è quindi
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Procediamo ad un'eliminazione di Gauss per righe sulla seguente matrice:
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{[2]-[1]} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{[1]-2[2]} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{[2]-2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Questo calcolo parziale ci assicura già che la matrice M è invertibile (in quanto abbiamo trovato 3 pivot non nulli). Procedendo con l'eliminazione di Gauss,
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{[2]+[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{[1]+[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo allora che $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) Siccome l'applicazione lineare $f \circ f \circ f$ è rappresentata (in base canonica) dalla matrice $M \cdot M \cdot M$, si tratta di calcolare $M \cdot M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 42 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4. Sia Π il piano (affine) in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallelo al piano (vettoriale) dato da Span $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare un'equazione cartesiana per Π:

Soluzione. Iniziamo determinando un'equazione cartesiana per il piano vettoriale in questione. Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ -2 & 4 & y \\ 1 & -3 & z \end{pmatrix}$ e procediamo ad un'eliminazione di Gauss per

colonne:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ -2 & 4 & y \\ 1 & -3 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-3[1],[3]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & y+2x \\ 1 & -6 & z-x \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-\frac{1}{10}(y+2x)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ 1 & -6 & z-x+\frac{6}{10}(y+2x) \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi l'equazione $z - x + \frac{6}{10}(y + 2x) = 0$, ovvero (moltiplicando tutto per 5 per eliminare il denominatore) $5z - 5x + 3y + 6x = 0$, o ancora $x + 3y + 5z = 0$. L'equazione di Π è allora della forma $x + 3y + 5z = q$, dove q è tale che l'equazione sia verificata dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha quindi $q = -1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7$. La risposta è allora $x + 3y + 5z = 7$, o qualsiasi equazione a questa proporzionale.

5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $\dim \ker(f) = 2$ e che $\ker(f)$, $\mathrm{Imm}(f)$ si intersechino solo nell'origine.

   (a) Qual è la dimensione di $\ker(f \circ f)$? ......

   (b) Vero o falso? Si ha $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \mathrm{Imm}(f)$ ☐ Vero ☐ Falso

   (c) Vero o falso? Per ogni scelta di due vettori v_1, v_2 linearmente indipendenti, entrambi appartenenti a $\mathrm{Imm}(f)$, anche $f(v_1)$ e $f(v_2)$ sono linearmente indipendenti.
   ☐ Vero ☐ Falso

   Soluzione.

   (a) Sia v un vettore di $\mathbb{R}^4$. Osserviamo che $f(f(v)) = 0$ implica in particolare $f(v) \in \ker f$; ma d'altro canto $f(v)$ certamente appartiene a $\mathrm{Imm}\, f$, e $\ker(f) \cap \mathrm{Imm}(f) = \{0\}$ per ipotesi, da cui otteniamo $f(v) = 0$. Abbiamo quindi che $v \in \ker(f \circ f)$ implica $v \in \ker(f)$, e viceversa $v \in \ker(f)$ chiaramente implica $v \in \ker(f \circ f)$. Di conseguenza, $\ker(f \circ f) = \ker f$ ha dimensione 2.

   (b) Vero. Dalla formula fondamentale otteniamo $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Imm}(f) = 4$. Siccome per ipotesi abbiamo anche che l'intersezione $\ker(f) \cap \mathrm{Imm}(f)$ è banale, la somma è in effetti diretta e ha dimensione 4. Siccome siamo in $\mathbb{R}^4$, la somma $\ker(f) \oplus \mathrm{Imm}(f)$ decompone $\mathbb{R}^4$.

   (c) Vero. Per ipotesi possiamo scrivere $v_1 = f(w_1), v_2 = f(w_2)$ per opportuni $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$. Siano ora λ, μ due scalari tali che
   $$0 = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2);$$
   si ha allora
   $$0 = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = f(\lambda v_1 + \mu v_2) = f(\lambda f(w_1) + \mu f(w_2)) = f(f(\lambda w_1 + \mu w_2)).$$
   Come già osservato nel punto (a), questo implica $f(\lambda w_1 + \mu w_2) = 0$, da cui – utilizzando nuovamente la linearità – $\lambda f(w_1) + \mu f(w_2) = 0$, ovvero $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$. L'ipotesi di lineare indipendenza fornisce allora $\lambda = \mu = 0$, il che dimostra che $f(v_1), f(v_2)$ sono linearmente indipendenti.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 6 e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. Denoteremo f^n la composizione di f con se stessa n volte: ad esempio, $f^3 = f \circ f \circ f$. Supponiamo che esista un sottospazio vettoriale W di V tale che $V = W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$ e tale che $f^3(W) = W$.

1. Dare un esempio esplicito di una terna V, f, W con queste caratteristiche.

2. Dimostrare che f è bigettiva.

3. Qual è la dimensione di W?

4. Sia $v \in V$ un vettore tale che $f(v) = v$. Dimostrare che esiste un vettore $w \in W$ tale che $v = w + f(w) + f^2(w)$.

   Indicazione. Si potrà cominciare scrivendo $v = a + f(b) + f^2(c)$ con $a, b, c \in W$.

5. Dimostrare che la dimensione del sottospazio $Z = \{v \in V : f^3(v) = v\}$ è multipla di 3.

6. Supponiamo ora che esistano due vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2 \in W$ tali che $f^3(v_1) = v_1$ e $f^3(v_2) = 2v_2$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

1. Sia $V = \mathbb{R}^6$, sia $e_1, \dots, e_6$ la base canonica di $\mathbb{R}^6$, e sia $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ l'unica applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_3, f(e_2) = e_4, f(e_3) = e_5, f(e_4) = e_6, f(e_5) = e_1, f(e_6) = e_2$. Sia infine $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$. Osserviamo che $f(W) = \mathrm{Span}(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Span}(e_3, e_4)$ e $f^2(W) = \mathrm{Span}(f^2(e_1), f^2(e_2)) = \mathrm{Span}(e_5, e_6)$. Abbiamo in particolare descritto una base per ognuno dei sottospazi $W, f(W), f^2(W)$. Siccome l'unione di queste basi è $\{e_1, \dots, e_6\}$, che è una base di $\mathbb{R}^6$, per una delle caratterizzazioni equivalenti di somma diretta abbiamo in effetti $\mathbb{R}^6 = W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$. Infine, $f^3(W) = \mathrm{Span}(f^3(e_1), f^3(e_2)) = \mathrm{Span}(e_1, e_2) = W$. Le scelte fatte verificano quindi tutte le condizioni del testo.

2. Combinando l'ipotesi $f^3(W) = W$ con $V = W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$ otteniamo $V = f^3(W) \oplus f(W) \oplus f^2(W)$. Questo implica che che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come $v = f^3(w_1) + f(w_2) + f^2(w_3)$ con $w_1, w_2, w_3 \in W$. In particolare abbiamo

$$v = f(f^2(w_1) + w_2 + f(w_3)),$$

   il che mostra che v appartiene all'immagine di f. Dato che questo vale per ogni v, otteniamo che f è surgettiva. Come noto dalla teoria, un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale in sé è bigettiva se e solo se è surgettiva.

3. Dato che f è bigettiva (e quindi in particolare iniettiva), anche la restrizione di f a W è iniettiva. Si ha perciò $\dim f(W) = \dim \mathrm{Imm}(f|_W) = \dim \mathrm{Imm}(f|_W) + \dim \ker(f|_W) = \dim W$, dove nell'ultima uguaglianza si è usata la formula fondamentale per l'applicazione lineare $f|_W : W \to V$. Ripetendo il ragionamento otteniamo anche $\dim f^2(W) = \dim W$. È noto che la dimensione di una somma diretta di sottospazi è la somma delle dimensioni degli addendi, da cui

$$\dim V = \dim W + \dim f(W) + \dim f^2(W) = \dim W + \dim W + \dim W,$$

   da cui – dato che $\dim V = 6$ – si ha $\dim W = 2$.

4. Scriviamo $v = a + f(b) + f^2(c)$ con $a, b, c \in W$: questo è possibile data l'ipotesi $V = W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$. Osserviamo ora che

$$v = f(v) = f(a) + f^2(b) + f^3(c),$$

   dove $f^3(c) \in f^3(W) = W$. In particolare, abbiamo l'uguaglianza

$$a + f(b) + f^2(c) = f^3(c) + f(a) + f^2(b),$$

dove il primo (rispettivamente secondo, terzo) addendo da ogni lato dell'uguale appartiene a W (rispettivamente $f(W), f^2(W)$). Dato però che la somma $W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$ è diretta, la rappresentazione di un vettore di v come somma di 3 vettori, ognuno scelto in un addendo della somma diretta, è unica, da cui otteniamo

$$\begin{cases} a = f^3(c) \\ f(b) = f(a) \\ f^2(c) = f^2(b). \end{cases}$$

Come già osservato f è iniettiva, per cui la seconda e terza condizione forniscono $b = a$ e $c = b$. Scegliendo allora $w = a$ si ottiene $v = a + f(b) + f^2(c) = w + f(w) + f^2(w)$ come voluto.

5. Scrivendo, come al punto precedente, $v = a + f(b) + f^2(c)$, otteniamo questa volta

$$f^3(v) = v = f^3(a) + f^4(b) + f^5(c),$$

dove si osserverà che $f^3(a) \in f^3(W) = W$, $f^4(b) \in f(f^3(W)) = f(W)$ e $f^5(c) \in f^2(f^3(W)) \in f^2(W)$. Per unicità della rappresentazione in somma diretta otteniamo allora $a = f^3(a), b = f^3(b)$ e $c = f^3(c)$. Si osservi che qui a, b, c sono vettori in W. Detto perciò $U = \{w \in W : f^3(w) = w\}$, abbiamo mostrato che $v \in Z$ se e solo se si scrive come $v = u_1 + f(u_2) + f^2(u_3)$ con $u_1, u_2, u_3 \in U$ (e tale rappresentazione è unica, perché $u_1 \in U \subseteq W, f(u_2) \in f(U) \subseteq f(W)$ e $f^2(u_3) \in f^2(U) \subseteq f^2(W)$). Abbiamo perciò dimostrato che $Z = U \oplus f(U) \oplus f^2(U)$. Ragionando come al punto 3 abbiamo $\dim U = \dim f(U) = \dim f^2(U)$, da cui $\dim Z = 3 \dim U$. Dal momento che U è un sottospazio di W (che ha dimensione 2) si ha $\dim U \in \{0, 1, 2\}$, e quindi $\dim Z \in \{0, 3, 6\}$.

6. Consideriamo i 6 vettori $v_1, f(v_1), f^2(v_1)$ e $v_2, f(v_2), f^2(v_2)$. Mostriamo intanto che sono linearmente indipendenti: data una combinazione lineare

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 f(v_1) + \lambda_3 f^2(v_1) + \mu_1 v_2 + \mu_2 f(v_2) + \mu_3 f^2(v_3) = 0,$$

si osservi che l'addendo $\lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2$ appartiene a W (perché $v_1, v_2 \in W$), e che similmente $\lambda_2 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) \in f(W)$ e $\lambda_3 f^2(v_1) + \mu_3 f^2(v_2) \in f^2(W)$. Dal momento che $V = W \oplus f(W) \oplus f^2(W)$, la precedente combinazione lineare è allora nulla se e solo se vale

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2 = 0 \\ \lambda_2 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) = 0 \\ \lambda_3 f^2(v_1) + \mu_3 f^2(v_2) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2 = 0 \\ f(\lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2) = 0 \\ f^2(\lambda_3 v_1 + \mu_3 v_2) = 0. \end{cases}$$

Usando ancora l'iniettività di f, queste condizioni sono equivalenti a

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2 = 0 \\ \lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2 = 0 \\ \lambda_3 v_1 + \mu_3 v_2 = 0, \end{cases}$$

e dal momento che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti per ipotesi otteniamo $\lambda_1 = \mu_1 = 0$, $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, e $\lambda_3 = \mu_3 = 0$. Questo dimostra, come voluto, che i 6 vettori considerati sono linearmente indipendenti, e quindi una base di V (la cui dimensione è 6 per ipotesi). Chiamiamo $z_1 = v_1, z_2 = f(v_1), z_3 = f^2(v_1), z_4 = v_2, z_5 = f(v_2), z_6 = f^2(v_2)$. Per ottenere la matrice di f nella base $\{z_1, \ldots, z_6\}$ dobbiamo semplicemente applicare f ad ognuno dei sei vettori $z_1, \ldots, z_6$ ed esprimere il risultato come combinazione lineare dei vettori $z_1, \ldots, z_6$ stessi. Per definizione si ha $f(z_1) = z_2$ e $f(z_2) = z_3$, mentre usando l'ipotesi $f^3(v_1) = v_1$ si ottiene $f(z_3) = f(f^2(v_1)) = f^3(v_1) = v_1 = z_1$. Similmente, $f(z_4) = z_5, f(z_5) = z_6$ e, usando l'ipotesi $f^3(v_2) = 2v_2$, $f(z_6) = 2z_4$. Per definizione di matrice associata ad una applicazione lineare in una base, segue che la matrice di f in base $\{z_1, \ldots, z_6\}$ è quella data nel testo.

4.3 Compitino del 06/03/2021

Test.

1. (a) Sia M la matrice data dal prodotto di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcolare il determinante di M: ....

   (b) Calcolare il determinante della seguente matrice: ....

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Sia $n \geq 3$ un intero. Consideriamo la matrice A, di dimensioni $n \times n$, i cui coefficienti sono dati da

$$A_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } j > i \\ i - j + 1, \text{ se } j \leq i. \end{cases}$$

   Per esempio, per $n = 4$ si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini (in funzione di n) il coefficiente sulla terza riga, seconda colonna di A^{-1}: ....

Soluzione.

(a) Siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si nota immediatamente che A_2 è la trasposta di A_1. Sappiamo allora dalla teoria che $\det(A_2) = \det(A_1)$. La richiesta è quella di calcolare $\det(M) = \det(A_1A_2)$, e utilizzando il teorema di Binet otteniamo $\det(M) = \det(A_1)\det(A_2) = \det(A_1)^2$. Si tratta allora semplicemente di calcolare il determinante di A_1, che tramite la regola di Sarrus si verifica subito essere uguale a 5. La risposta è quindi $\det(M) = 25$.

(b) Come prima cosa effettuiamo uno sviluppo di Laplace rispetto alla quarta colonna (o riga) per ottenere che il determinante voluto è uguale a

$$4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiando dapprima la seconda e ultima colonna, e successivamente la seconda e ultima riga (ognuna di queste due operazioni cambia il determinante solo per un segno, e quindi la composizione delle due operazioni lascia il determinante inalterato), troviamo che il determinante desiderato è uguale a

$$4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta in questo modo è ora diagonale a blocchi, per cui il suo determinante è uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi. Otteniamo allora la risposta finale $4 \cdot (-6) \cdot (1) \cdot (-11) = 264$.

(c) Abbiamo visto una formula esplicita per l'inversa di una matrice in termini di determinanti di minori. Sappiamo in particolare che il coefficiente in posizione $(3,2)$ di A^{-1} è uguale a $\frac{(-1)^{3+2}}{\det A}$ volte il determinante del minore complementare al coefficiente in posizione $(2,3)$. Dal momento che la matrice A è triangolare con tutti coefficienti 1 sulla diagonale, il suo determinante è 1. Otteniamo quindi che la risposta è -1 per il determinante della matrice ottenuta da A cancellando la seconda riga e terza colonna. Si verifica immediatamente che questa matrice è triangolare, e che i suoi coefficienti lungo la diagonale sono tutti uguali ad 1, salvo quello in posizione (2,2), che è uguale a 2. La risposta è quindi -2, indipendentemente da n.

Nota. Nonostante non sia necessario per rispondere alla domanda, osserviamo che la matrice inversa di A ha una forma molto semplice: gli unici coefficienti $(A^{-1})_{ij}$ non nulli sono quelli con $i = j, i = j+1, i = j+2$, che sono rispettivamente dati da 1, -2, 1. Per esempio, per $n = 6$ si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la matrice di ϕ in base canonica:

(b) Determinare una base del sottospazio $W = \{y = 0\}$ ortogonale rispetto al prodotto scalare ϕ (si descrivano i vettori di base tramite le loro coordinate in base canonica, che richiediamo essere numeri interi):

(c) Si sa che $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, dove l'ortogonale è preso rispetto a ϕ. Determinare la componente lungo $W^\perp$ del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, esprimendo la risposta in base canonica:

Soluzione.

(a) Per definizione si tratta di calcolare la matrice $\begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & \phi(e_1, e_2) & \phi(e_1, e_3) \\ \phi(e_2, e_1) & \phi(e_2, e_2) & \phi(e_2, e_3) \\ \phi(e_3, e_1) & \phi(e_3, e_2) & \phi(e_3, e_3) \end{pmatrix}$. Detti v_1, v_2, v_3 i vettori della base data nel testo, abbiamo $e_1 = v_2$, $e_2 = -v_2 - v_3$ e $e_3 = v_1 + v_3$, da cui

$$\phi(e_1, e_1) = \phi(v_2, v_2) = 4,\ \phi(e_1, e_2) = \phi(v_2, -v_2 - v_3) = -4 - 2 = -6,$$

$$\phi(e_1, e_3) = \phi(v_2, v_1 + v_3) = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi(e_2, e_2) = \phi(-v_2 - v_3, -v_2 - v_3) = \phi(v_2, v_2) + \phi(v_3, v_3) + 2\phi(v_2, v_3) = 9$$

$$\phi(e_2, e_3) = \phi(-v_2 - v_3, v_1 + v_3) = -\phi(v_2, v_1) - \phi(v_3, v_1) - \phi(v_2, v_3) - \phi(v_3, v_3) = -4$$

$$\phi(e_3, e_3) = \phi(v_1 + v_3, v_1 + v_3) = \phi(v_1, v_1) + 2\phi(v_1, v_3) + \phi(v_3, v_3) = 0.$$

La risposta è quindi
$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ -6 & 9 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) I vettori e_1, e_3 formano una base di W (non ortogonale rispetto a ϕ). Ricorriamo allora ad un passo del procedimento di Gram-Schmidt, sostituendo e_3 con
$$e_3 - \frac{\phi(e_1, e_3)}{\phi(e_1, e_1)} e_1,$$
che dato il calcolo del punto precedente è $e_3 - e_1$. Una base con le proprietà richieste è quindi $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Abbiamo ottenuto al punto precedente una base ortogonale di W. Grazie ad essa, possiamo trovare la componente di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ lungo W calcolando
$$\frac{\phi(v, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} w_1 + \frac{\phi(v, w_2)}{\phi(w_2, w_2)} w_2.$$
È a questo punto più comodo effettuare tutti i calcoli in base canonica. Abbiamo $w_1 = e_1, w_2 = e_3 - e_1$ e $v = 2e_2$, da cui facilmente otteniamo
$$\phi(w_1, w_1) = 4,\ \phi(w_2, w_2) = \phi(e_3, e_3) - 2\phi(e_3, e_1) + \phi(e_1, e_1) = -4$$
e
$$\phi(w_1, v) = 2\phi(e_1, e_2) = -12,\ \phi(w_2, v) = 2\phi(e_3 - e_1, e_2) = 2(-4 + 6) = 4.$$
Otteniamo quindi che la componente di v lungo W è $-3w_1 - w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, e per differenza la componente lungo $W^\perp$ è $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Consideriamo il prodotto scalare ψ su $\mathbb{R}^4$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la segnatura di ψ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(b) Sia W il sottospazio $x_1 + x_4 = 0$. Determinare la dimensione di $W^\perp$: ....

Soluzione.

(a) Sia A la matrice data nel testo. Calcoliamo intanto $n_0 = \dim\ker A$ tramite un'eliminazione di Gauss per righe:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-4[2],[3]-2[2],[4]-3[2]} \begin{pmatrix} 0 & -15 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -12 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}[1],\frac{1}{2}[3],\frac{1}{2}[4]} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-[1],[4]-[1]} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+2[4]} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui è chiaro che il rango è 3, e quindi $n_0 = 4-3 = 1$. Osserviamo ora che la restrizione di ψ a $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ ha matrice (in base e_1, e_2) data da $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$: per quanto noto sui prodotti scalari in dimensione 2, dal momento che questa matrice ha determinante positivo e un coefficiente diagonale positivo, essa corrisponde ad un prodotto scalare definito positivo. Si ha quindi $n_+(\psi) \geq 2$. Infine, la restrizione di ψ a $\mathrm{Span}(e_3, e_4)$ ha matrice (in base e_3, e_4) data da $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Dal momento che questa matrice ha determinante negativo, la restrizione in questione ha segnatura $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$. Ne segue che $n_-(\psi) \geq 1$. Combinando tutte le informazioni ottenute ricaviamo che la segnatura di ψ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 1)$.

(b) Come discusso a lezione, la dimensione di $W^\perp$ può essere ottenuta come la dimensione del nucleo di $B \cdot A$, dove B è una matrice avente per righe le coordinate dei vettori di una qualsiasi base di W. Una base di W evidente è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poniamo allora $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e calcoliamo $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il rango di questa matrice è evidentemente pari a 2 (la prima e terza riga sono proporzionali, ma le prime due righe non lo sono), quindi il suo nucleo ha dimensione 2, che è quindi anche la dimensione di $W^\perp$.

4. Consideriamo la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & 4 & 2a-4 & a \\ 0 & 1 & 2a-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$, dipendente da un parametro a.

(a) Determinare gli autovalori di M_a (elencarli con le rispettive molteplicità): ....

(b) Elencare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui M_a non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

(c) Per $a = 1$ trovare una base dell'autospazio di dimensione massima:

(d) Calcolare la traccia di M_1^{-1}: ....

Soluzione.

(a) Cominciamo con il calcolare il polinomio caratteristico di M_a: si ha

$$p_{M_a}(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M_a) = \det \begin{pmatrix} t-a & 0 & -(a+1) & -a+1 \\ 0 & t-4 & 4-2a & -a \\ 0 & -1 & t-2a+1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & t-3a \end{pmatrix}.$$

Utilizzando uno sviluppo di Laplace dapprima rispetto alla prima colonna e poi rispetto all'ultima riga possiamo riscrivere questo determinante come

$$(t-a)(t-3a)\det \begin{pmatrix} t-4 & 4-2a \\ -1 & t-2a+1 \end{pmatrix} = (t-a)(t-3a)(t^2-2at-3t+6a).$$

Troviamo gli autovalori: le radici del polinomio appena scritto sono $a, 3a$, e le radici di $t^2-2at-3t+6a=0$, che si possono trovare tramite la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$\frac{(2a+3) \pm \sqrt{(2a+3)^2 - 24a}}{2} = \frac{(2a+3) \pm (2a-3)}{2} = 2a, 3.$$

Gli autovalori sono perciò $3, a, 2a, 3a$.

(b) Dal punto precedente conosciamo gli autovalori di M_a, e siccome a è un numero reale sappiamo anche che tutti questi autovalori sono reali. Se essi sono tutti distinti, allora sappiamo dalla teoria che la matrice è diagonalizzabile. Bisogna allora solo studiare i casi in cui due autovalori coincidono, ovvero $a=0, a=3, a=3/2$ e $a=1$.

i. per $a=0$ l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 3. La sua molteplicità geometrica è data da

$$\dim\ker M_0 = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

ii. per $a=3$ abbiamo l'autovalore 3 di molteplicità algebrica 2. Per trovare la corrispondente molteplicità geometrica calcoliamo

$$\dim\ker(M_3 - 3\,\mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1.$$

Nuovamente la matrice non è diagonalizzabile.

iii. per $a=3/2$ abbiamo l'autovalore 3 di molteplicità algebrica 2. La corrispondente molteplicità geometrica è

$$\dim\ker(M_{3/2} - 3\,\mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = 1,$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

iv. Infine, per $a=1$ abbiamo ancora l'autovalore 3 di molteplicità algebrica 2, e la corrispondente molteplicità geometrica è

$$\dim\ker(M_1 - 3\,\mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Siccome gli altri autovalori hanno molteplicità algebrica 1, la teoria garantisce che la matrice M_1 è diagonalizzabile.

In conclusione, la matrice M_a non è diagonalizzabile esattamente per i valori $a = 0, 3/2, 3$.

(c) Abbiamo già visto che per $a = 1$ c'è un autospazio di dimensione 2, ovvero quello corrispondente all'autovalore 3. Vista la discussione precedente, per rispondere alla domanda è sufficiente calcolare una base di

$$\ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema associato a questa matrice troviamo ad esempio la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Per $a = 1$ la matrice M_1 è diagonalizzabile con autovalori $1, 2, 3, 3$, e quindi – in una base opportuna – la corrispondente applicazione lineare T_1 si esprime tramite la matrice diagonale con coefficienti $1, 2, 3, 3$. Si osservi che M_1^{-1} è la matrice di T_1^{-1}; d'altro canto, nella base in cui T_1 è diagonale, la matrice di T_1^{-1} è diagonale con coefficienti $1, 1/2, 1/3, 1/3$. Dal momento che la traccia non dipende dalla scelta di base, otteniamo che la risposta alla domanda è $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Sia $P \in V$ una matrice invertibile e sia $f_P : V \to V$ l'endomorfismo

$$f_P(X) \;=\; X \;-\; P^{-1}XP.$$

1. Per $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ scrivere la matrice associata ad f_P rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V. Dire se f_P è diagonalizzabile e in caso affermativo calcolare una base di autovettori per V.
2. Dimostrare che se P è diagonale allora f_P è diagonalizzabile.
3. Dimostrare che se P e Q sono simili allora f_P è diagonalizzabile se e solo se f_Q lo è. Dedurre che se P è diagonalizzabile allora f_P lo è.

Soluzione.

1. Per definizione si tratta di calcolare $f_P(X)$ per ogni $X \in \mathcal{B}$ ed esprimere i risultati in base $\mathcal{B}$. Dal momento che $P^{-1} = P$, è facile vedere che $X \mapsto P^{-1}XP$ agisce su una matrice X scambiandone le due righe e le due colonne. Dette X_1, X_2, X_3, X_4 le 4 matrici della base $\mathcal{B}$ si ottiene allora

$$f_P(X_1) = X_1 - X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad f_P(X_2) = X_2 - X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $f_P(X_3) = -f_P(X_2) = -X_2 + X_3$, $f_P(X_4) = -f_P(X_1) = -X_1 + X_4$. La matrice di f_P è quindi

$$[f_P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico risulta quindi

$$p(t) = \det \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$
$$= ((t-1)^2 - 1)^2 = (t^2 - 2t)^2 = t^2(t-2)^2,$$

dove nell'uguaglianza fra determinanti si sono scambiate opportunamente le righe e colonne della matrice. Gli autovalori sono dunque 0 (di molteplicità algebrica 2) e 2 (di molteplicità algebrica 2). La molteplicità geometrica di 0 è la dimensione del nucleo della matrice $[f_P]$, che è uguale a 2 (in effetti è immediato vedere che il rango è 2). La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è invece la dimensione del nucleo di

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi è anch'essa uguale a 2. Ne segue che f_P è diagonalizzabile. Troviamo allora basi dei due autospazi: l'autospazio relativo a 0 è $\ker[f_P] = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Si noti che questi sono vettori scritti in coordinate: i corrispondenti elementi di V sono $v_1 = X_1 + X_4 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ e $v_2 = X_2 + X_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (si osservi anche l'interpretazione immediata di questi autovettori: $X = v_1$ e $X = v_2$ sono nel nucleo di f_P, in quanto in entrambi i casi si ha $P^{-1}XP = X$, e quindi $f_P(X) = X - X = 0$).

L'autospazio relativo a 2, vista la matrice scritta sopra, ha per base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$. Come sopra possiamo trovare le corrispondenti matrici $v_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$, che di nuovo sono facili da interpretare: la funzione $X \mapsto P^{-1}XP$ (scambiando righe e colonne) manda $v_3 \mapsto -v_3, v_4 \mapsto -v_4$, da cui $f_P(v_3) = 2v_3, f_P(v_4) = 2v_4$. Concludiamo infine che f_P è diagonalizzabile, e che una base di autovettori è costituita da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

2. Sia $P = \begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}$, e quindi $P^{-1} = \begin{pmatrix}a^{-1} & 0\\0 & b^{-1}\end{pmatrix}$. Siccome le matrici diagonali commutano tutte fra loro, se X è una matrice diagonale si ha $f_P(X) = X - P^{-1}XP = X - XP^{-1}P = X - X = 0$. Le matrici diagonali sono quindi nel nucleo di f_P, e quindi in particolare sono autovettori di f_P (di autovalore 0). D'altro canto,

$$f_P(X_2) = X_2 - \begin{bmatrix}a^{-1} & 0\\0 & b^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix} = X_2 - \begin{bmatrix}0 & ba^{-1}\\0 & 0\end{bmatrix} = (1 - ba^{-1})X_2,$$

quindi X_2 è un autovettore di f_P. Similmente anche X_3 è un autovettore di f_P. Ne segue che la base $\mathcal{B}$ è costituita di autovettori per f_P, e quindi che f_P è diagonalizzabile.

3. L'ipotesi che P e Q siano simili fornisce l'esistenza di una matrice invertibile B tale che $Q = BPB^{-1}$. Sia X un autovettore per f_P, di autovalore λ. Per definizione questo significa $\lambda X = f_P(X) = X - P^{-1}XP$, cioè $P^{-1}XP = (1 - \lambda)X$. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} f_Q(BXB^{-1}) &= BXB^{-1} - (BPB^{-1})^{-1}(BXB^{-1})(BPB^{-1}) \\ &= BXB^{-1} - BP^{-1}(B^{-1}BXB^{-1}B)PB^{-1} \\ &= BXB^{-1} - B(P^{-1}XP)B^{-1} \\ &= BXB^{-1} - B((1-\lambda)X)B^{-1} \\ &= BXB^{-1} - (1-\lambda)BXB^{-1} = \lambda BXB^{-1}. \end{aligned}$$

Ne segue che se $\{w_1, \dots, w_4\}$ è una base di V costituita di autovettori per f_P, allora $\{Bw_iB^{-1}\}_{i=1,\dots,4}$ è una base di V costituita di autovettori per f_Q (si noti che la funzione $X \mapsto BXB^{-1}$ è lineare, ed è ovviamente invertibile, perché l'inversa è $X \mapsto B^{-1}XB$.

Come tale, essa trasforma basi in basi). In particolare, se f_P è diagonalizzabile allora anche f_Q è diagonalizzabile, ma visto che la situazione è simmetrica otteniamo anche che se f_Q è diagonalizzabile, allora f_P è diagonalizzabile. Questo dimostra la prima metà dell'enunciato del punto 3, e la seconda metà segue allora da quanto dimostrato al punto 2: se P è diagonalizzabile allora essa è simile ad una matrice diagonale Q. In virtù del punto 2, l'endomorfismo f_Q è diagonalizzabile, e dalla prima metà del punto 3 otteniamo che anche f_P è diagonalizzabile.

Nota. La diagonalizzabilità di f_P per il caso speciale della matrice P del punto 1 segue ora immediatamente: la matrice P data è in effetti diagonalizzabile (ha due autovalori distinti, ± 1).

4.4 Compitino del 01/04/2021

Test.

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare una matrice P tale che ${}^tP = P^{-1}$ e $P^{-1}AP$ sia diagonale:
   Nota. Nel form di consegna sarà richiesto di inserire la matrice $\sqrt{2}P$.

   (b) Sia $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $AB = BA$. Scrivere una base di $\mathbb{R}^2$ costituita di autovettori di B con coordinate intere:

   (c) Determinare le due matrici $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $AB = BA$ e tali che il polinomio caratteristico di B sia $t^2 - 6t + 5$:

Soluzione.

(a) La richiesta è equivalente a trovare una base di autovettori per A che sia ortonormale per il prodotto scalare standard (la matrice P sarà quella che ha come colonne questi autovettori). Si osservi che una tale base esiste certamente in virtù del teorema spettrale.
Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3)$, per cui gli autovalori di A sono -1 e 3. Considerando i nuclei di $A + \mathrm{Id}$ e $A - 3\,\mathrm{Id}$ si trovano corrispondenti autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questi vettori sono ortogonali; per renderli una base ortonormale basta dividere ognuno di essi per la relativa norma, che risulta $\sqrt{2}$ in entrambi i casi. Una matrice P con le proprietà volute risulta quindi $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Nota. Ci sono 8 risposte possibili a questa domanda, che si possono ottenere a partire dalla matrice appena trovata cambiando (indipendentemente) il segno della prima colonna, il segno della seconda colonna, o l'ordine delle due colonne.

(b) La condizione $AB = BA$ implica che B preserva gli autospazi di A. Siccome questi sono di dimensione 1, ciò significa precisamente che gli autovettori di A sono anche autovettori di B. Una possibile risposta è quindi v_1, v_2, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) In aggiunta ai ragionamenti del punto precedente, l'ipotesi sul polinomio caratteristico data nel testo implica che gli autovalori di B sono 1 e 5, e quindi che gli autovettori v_1, v_2 di B hanno autovalori rispettivamente $1, 5$ o $5, 1$. Le due possibili applicazioni lineari T_1, T_2 corrispondenti a matrici B con le proprietà volute sono quindi quelle definite dalle condizioni

$$T_1 v_1 = v_1,\ T_1 v_2 = 5 v_2; \quad T_2 v_1 = 5 v_1,\ T_2 v_2 = v_2.$$

Si tratta ora di scrivere le matrici in base canonica di queste due applicazioni lineari. Per la prima possibilità si ha

$$T_1(e_1) = T_1\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) = \frac{v_1+5v_2}{2} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},$$

$$T_1(e_2) = T_1\left(\frac{-v_1+v_2}{2}\right) = \frac{-v_1+5v_2}{2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$

mentre per la seconda otteniamo

$$T_2(e_1) = T_2\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) = \frac{5v_1+v_2}{2} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},$$

$$T_2(e_2) = T_2\left(\frac{-v_1+v_2}{2}\right) = \frac{-5v_1+v_2}{2} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}.$$

Le matrici cercate sono quindi $B_1 = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}$

2. Sia φ l'unico prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per il quale la base $\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è ortonormale. Sia inoltre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice in base $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

   Sia infine e_1, e_2, e_3 la base canonica.

   (a) Calcolare $\varphi(e_2, e_1 + e_3) =$ ....
   (b) Calcolare $\varphi(e_1, T^*(3e_1 + 2e_2 + e_3)) =$ ....
   (c) Calcolare $\det(T^*) =$ ....
   (d) Determinare il vettore T^*e_3 (esprimere la risposta in base canonica):

   Soluzione.

   (a) Detti v_1, v_2, v_3 i vettori della base $\mathcal{B}$ abbiamo $e_2 = v_2 - v_1$ e $e_1 + e_3 = v_1 + v_3 - v_2$. Sapendo che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale per φ possiamo quindi calcolare subito

   $$\varphi(e_2, e_1 + e_3) = \varphi(v_2 - v_1, v_1 - v_2 + v_3) = -\varphi(v_1, v_1) - \varphi(v_2, v_2) = -2.$$

   (b) La proprietà che definisce l'aggiunto fornisce $\varphi(e_1, T^*(3e_1 + 2e_2 + e_3)) = \varphi(Te_1, 3e_1 + 2e_2 + e_3)$. D'altro canto $e_1 = v_1$ e $Tv_1 = 2v_1$, e infine $3e_1 + 2e_2 + e_3 = v_1 + v_2 + v_3$, per cui stiamo calcolando

   $$\varphi(2v_1, v_1 + v_2 + v_3) = 2.$$

   (c) Come noto, siccome la base $\mathcal{B}$ è ortonormale rispetto a φ, la matrice di T^* in base $\mathcal{B}$ è la trasposta della matrice di T in base $\mathcal{B}$: si ha $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Siccome il determinante non dipende dalla base scelta, $\det T^* = \det[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 6$, dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che la matrice $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è triangolare.

   (d) Le coordinate di e_3 in base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, quindi le coordinate di T^*e_3 in base $\mathcal{B}$ sono date da

   $$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\,[e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

   Per ottenere il risultato in base canonica basta considerare la combinazione lineare $0v_1 + 1v_2 + 1v_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, che è quindi la risposta a questa domanda.

3. Il numero reale x è tale che $R = \begin{pmatrix} x & -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & x \end{pmatrix}$ sia la matrice in base canonica di una rotazione di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determinare un vettore a coefficienti interi che generi l'asse di rotazione di R:

   (b) Determinare l'angolo della rotazione indotta da R sul piano ortogonale all'asse fisso (si risponda con un angolo in radianti nell'intervallo $[0, \pi]$, o con un angolo in gradi nell'intervallo $[0, 180°]$): ....

   (c) Quanto vale $\operatorname{tr}(R) + \operatorname{tr}(R^3)$? ....

   Soluzione. Determiniamo intanto il numero x. La condizione che R sia una matrice di rotazione, quindi in particolare ortogonale, implica che le sue colonne sono a due a due ortogonali. Imponendo l'ortogonalità delle prime due colonne otteniamo

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

   (a) Stiamo semplicemente cercando un autovettore di R di autovalore 1, ovvero un elemento (non banale) nel nucleo di

$$R - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \frac{-2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

   Si vede immediatamente che la prima e ultima colonna di questa matrice sono opposte, e che quindi un vettore nel nucleo è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta generata da questo vettore è dunque l'asse di rotazione.

   (b) Osserviamo che $\operatorname{tr}(R) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2x = 1 + \sqrt{2}$, e che d'altro canto come noto $\operatorname{tr}(R) = 1 + 2\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo della rotazione. Otteniamo quindi $\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè $\vartheta = 45° = \frac{\pi}{4}$.

   (c) R^3 è la composizione di 3 rotazioni di angolo $\pi/4$ con il medesimo asse e nel medesimo verso, ed è quindi una rotazione di angolo $3\pi/4$. Si ha allora $\operatorname{tr}(R^3) = 1 + 2\cos(3\pi/4) = 1 - 2\cos(\pi/4)$. Sommando $\operatorname{tr}(R) = 1 + 2\cos(\pi/4)$ otteniamo $\operatorname{tr}(R) + \operatorname{tr}(R^3) = 2$.

4. (a) Esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con polinomio minimo $t^3 - 1$. ☐ Vero ☐ Falso

   (b) Sia $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $M^3 = \mathrm{Id}$. Allora M è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
   ☐ Vero ☐ Falso

   (c) Trovare, se esiste, una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ della forma $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ e tale che $M^3 = \mathrm{Id}$.
   ☐ Una tale M non esiste ☐ Una tale M esiste, ad esempio $a =$ ...... e $b =$ ....

   Soluzione.

   (a) Falso. Il polinomio minimo di una matrice divide sempre il suo polinomio caratteristico, che in questo caso ha grado 2. Il polinomio minimo non può quindi avere grado strettamente maggiore di 2.

   (b) Vero. In effetti, dalla condizione $M^3 = \mathrm{Id}$ otteniamo che il polinomio $p(t) = t^3 - 1$ si annulla in M. Dato che $t^3 - 1$ non ha radici multiple, neppure il polinomio minimo di M ha radici multiple. Per un criterio visto a lezione questo implica che M si diagonalizza su $\mathbb{C}$.

(c) Un esempio (in effetti l'unico) è dato dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Una possibilità per trovare M è osservare, come al punto precedente, che il polinomio minimo di M è un fattore di $(t-1)(t^2+t+1)$, ovvero è o $t-1$ o t^2+t+1 (non può essere t^3-1, come già osservato al punto (a)). Nel primo caso si avrebbe $M = \mathrm{Id}$, che è impossibile dati i coefficienti già noti. Nel secondo caso, il polinomio minimo è $p(t) = t^2+t+1$, che è del medesimo grado del polinomio caratteristico di M: siccome il primo divide il secondo (per il teorema di Cayley-Hamilton), otteniamo che $p(t)$ è anche il polinomio caratteristico di M. In tal caso abbiamo che $\mathrm{tr}(M) = -1$ e $\det(M) = 1$ (queste informazioni possono infatti essere lette dai coefficienti del polinomio caratteristico), e quindi questo permette di ricostruire $b = \mathrm{tr}(M) = -1$ e $a = -\det M = -1$. Si osservi infine che M rispetta in effetti $M^3 = \mathrm{Id}$: il polinomio minimo di M è $p(t)$ e divide t^3-1, per cui si ha $0 = (t^3-1)(M) = M^3 - \mathrm{Id}$, ovvero $M^3 = \mathrm{Id}$ come voluto.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ poniamo

$$f_v(x) = x - 2\langle x, v\rangle v,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare standard. Scriviamo inoltre $\|v\|$ per la norma di v, ovvero $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

1. Dimostrare che $\det(f_v) = 1 - 2\|v\|^2$.
2. Determinare per quali vettori v l'endomorfismo f_v è ortogonale. Per tali v, descrivere f_v geometricamente.

D'ora in poi siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ due vettori linearmente indipendenti tali che f_{v_1}, f_{v_2} siano trasformazioni lineari ortogonali.

3. Dimostrare che $R_{v_1,v_2} := f_{v_1} \circ f_{v_2}$ è una rotazione.
4. Sia $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Dimostrare che l'asse fisso della rotazione R_{v_1,v_2} è $V^\perp$ (ortogonale preso rispetto al prodotto scalare standard).
5. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione. Dimostrare che $L \circ R_{v_1,v_2} = R_{L(v_1),L(v_2)} \circ L$.
6. Dedurre che l'angolo della rotazione R_{v_1,v_2} è il doppio dell'angolo fra v_1 e v_2.

Soluzione.

1. Sia v_1, v_2 una base di $\mathrm{Span}(v)^\perp$. Dal momento che il prodotto scalare standard è definito positivo si ha $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}(v) \oplus \mathrm{Span}(v)^\perp$, e quindi l'unione di una base di $\mathrm{Span}(v)$ e di una base di $\mathrm{Span}(v)^\perp$ è una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare, v, v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^3$. Se w è un vettore ortogonale a v si ha $f_v(w) = w - 2\langle w, v\rangle v = w$, dunque in particolare $f_v(v_1) = v_1$ e $f_v(v_2) = v_2$. D'altro canto, $f_v(v) = v - 2\langle v, v\rangle v = v - 2\|v\|^2 v = (1 - 2\|v\|^2)v$. In particolare, v, v_1, v_2 sono tutti autovettori di f_v, con autovalori $1 - 2\|v\|^2$, 1, 1. La matrice di f_v nella base v, v_1, v_2 è quindi $\begin{pmatrix} 1-2\|v\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e il suo determinante è chiaramente $1 - 2\|v\|^2$, come richiesto.
2. Condizione necessaria affinché un endomorfismo sia ortogonale è che il suo determinante sia uguale a ± 1. Visto il punto precedente, questo è possibile solo se $\|v\| = 0$ o $\|v\| = 1$. Nel primo caso si ha $v = 0$, per cui f_v è l'identità, che è certamente ortogonale. Nel secondo caso, ripetiamo il ragionamento del punto precedente, scegliendo però come v_1, v_2 una base ortonormale del piano $\mathrm{Span}(v)^\perp$. In tal caso $\{v, v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e come visto sopra in tale base la matrice di f_v è $P := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha allora ${}^tPP = \mathrm{Id}$, e

siccome la base in cui abbiamo scritto P è ortonormale, questo garantisce che f_v rappresenti una trasformazione ortogonale. La risposta è quindi che f_v è ortogonale precisamente per il vettore nullo e per tutti i vettori di norma 1.

La descrizione geometrica è immediata in entrambi i casi: per $v = 0$ abbiamo l'identità, mentre per $\|v\| = 1$ la matrice P mostra che f_v è la simmetria che fissa il piano $\mathrm{Span}(v)^\perp$ e manda v in $-v$.

3. Osserviamo intanto che nessuno dei due vettori v_1, v_2 può essere nullo (per l'ipotesi di lineare indipendenza). Dal punto precedente otteniamo quindi $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, e perciò $\det(f_{v_1}) = \det(f_{v_2}) = -1$.

   La composizione di applicazioni lineari ortogonali è ortogonale. Inoltre, $\det R_{v_1,v_2} = \det(f_{v_1} \circ f_{v_2}) = \det(f_{v_1}) \det(f_{v_2}) = (-1)(-1) = 1$, e quindi R_{v_1,v_2} è una trasformazione lineare ortogonale di determinante $+1$, ovvero una rotazione.

4. Sia $w \in V^\perp$. Allora in particolare w è ortogonale a v_2, e quindi – come osservato nella soluzione del primo punto – $f_{v_2}(w) = w$. Similmente, w è ortogonale a v_1, e quindi $f_{v_1}(w) = w$. Ne segue che $R_{v_1,v_2}(w) = f_{v_1}(f_{v_2}(w)) = f_{v_1}(w) = w$, cioè w è lasciato fisso dalla rotazione R_{v_1,v_2}. Ne segue che l'asse fisso di questa rotazione è proprio $V^\perp$.

   Nota. Per ora abbiamo verificato che $V^\perp$ è *un* asse fisso di R_{v_1,v_2}. Per ottenere una dimostrazione completa bisognerebbe anche dimostrare che la rotazione R ha un *unico* asse fisso; siccome siamo in dimensione 3, questo è equivalente a dire che la rotazione in questione non è l'identità. Per mostrare questo fatto basta trovare un vettore z per cui $R_{v_1,v_2}(z) \neq z$. Scegliamo $z = v_2$: si ha allora $R_{v_1,v_2}(v_2) = f_{v_1}(f_{v_2}(v_2)) = f_{v_1}(-v_2) = -v_2 + \langle v_1, v_2\rangle v_1$, e questo vettore non può essere uguale a v_2 in quanto v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, e l'equazione $-v_2 + \langle v_1, v_2\rangle v_1 = v_2$, ovvero $-2v_2 + \langle v_1, v_2\rangle v_1 = 0$, darebbe esattamente una relazione di dipendenza lineare.

5. Da un lato abbiamo, per ogni $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} L \circ R_{v_1,v_2}(u) &= L\left(f_{v_1}(u - 2\langle u, v_2\rangle v_2)\right) \\ &= L\left(u - 2\langle u, v_2\rangle v_2 - 2\langle u - 2\langle u, v_2\rangle v_2, v_1\rangle v_1\right) \\ &= L\left(u - 2\langle u, v_2\rangle v_2 - 2\langle u, v_1\rangle v_1 + 4\langle u, v_2\rangle\langle v_2, v_1\rangle v_1\right) \\ &= Lu - 2\langle u, v_2\rangle Lv_2 - 2\langle u, v_1\rangle Lv_1 + 4\langle u, v_2\rangle\langle v_2, v_1\rangle Lv_1; \end{aligned}$$

   dall'altro, con un calcolo del tutto analogo (recuperando in particolare la penultima riga dell'uguaglianza precedente e sostituendo $v_1 \mapsto L(v_1), v_2 \mapsto L(v_2), u \mapsto L(u)$) otteniamo

$$R_{L(v_1),L(v_2)}(L(u)) = Lu - 2\langle Lu, Lv_2\rangle Lv_2 - 2\langle Lu, Lv_1\rangle Lv_1 + 4\langle Lu, Lv_2\rangle\langle Lv_2, Lv_1\rangle Lv_1.$$

   Per mostrare l'uguaglianza di questa espressione con la precedente basta allora osservare che L, essendo è una rotazione, preserva i prodotti scalari, e che quindi $\langle Lu, Lv_2\rangle = \langle u, v_2,$ $\langle Lu, Lv_1\rangle = \langle u, v_1\rangle$. Con queste sostituzioni, l'uguaglianza voluta è immediata.

6. La formula del punto 5 fornisce $R_{L(v_1),L(v_2)} = L \circ R_{v_1,v_2} \circ L^{-1}$. È noto che l'angolo ϑ di una rotazione R è determinato dalla formula $1 + 2\cos\vartheta = \mathrm{tr}(R)$; inoltre, per una nota proprietà della traccia, $\mathrm{tr}(L \circ R_{v_1,v_2} \circ L^{-1}) = \mathrm{tr}(R_{v_1,v_2})$. Dalle due osservazioni precedenti segue che l'angolo della rotazione R_{v_1,v_2} è lo stesso dell'angolo della rotazione $R_{L(v_1),L(v_2)}$. Fissati v_1, v_2 (che ricordiamo essere di norma 1) scegliamo allora una prima rotazione L_1 che porti il vettore v_1 sul primo vettore e_1 della base canonica, e scegliamo una seconda rotazione L_2 che fissi e_1 e ruoti $L_1(v_2)$ fino a portarlo in un vettore con coordinata z nulla. Presa $L = L_2 \circ L_1$ si ha allora che l'angolo di R_{v_1,v_2} è uguale all'angolo di $R_{L(v_1),L(v_2)}$, dove per costruzione $L(v_1) = e_1$ e $L(v_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} =: w_2$ (ogni vettore v_2 di norma 1 e coordinata z nulla è di questa forma). Scriviamo allora esplicitamente la matrice di R_{e_1,w_2} in base canonica. La matrice di f_{e_1} è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (si veda ad esempio il primo punto

di questa soluzione). Calcoliamo la matrice di f_{w_2}: per la prima colonna si ha $f_{w_2}(e_1) = e_1 - \langle e_1, w_2\rangle w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\cos^2\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2\cos^2\alpha\\ -2\cos\alpha\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}$. Per la seconda, $f_{w_2}(e_2) = e_2 - 2\langle e_2, w_2\rangle w_2 = \begin{pmatrix}-2\sin\alpha\cos\alpha\\ 1-2\sin^2\alpha\\ 0\end{pmatrix}$. Infine, $f_{w_2}(e_3) = e_3$, e quindi la matrice di f_{w_2} è $\begin{pmatrix}1-2\cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha & 0\\ -2\cos\alpha\sin\alpha & 1-2\sin^2\alpha & 0\\ 0 & & 1\end{pmatrix}$. Otteniamo la matrice di R_{e_1,w_2} come prodotto delle due matrici trovate in precedenza, ovvero $R_{e_1,w_2} = \begin{pmatrix}-1+2\cos^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha & 0\\ -2\cos\alpha\sin\alpha & 1-2\sin^2\alpha & 0\\ 0 & & 1\end{pmatrix}$. Di questa matrice ci interessa solo la traccia, che risulta $1 + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1 + 2\cos(2\alpha)$. D'altro canto, questa traccia è anche uguale a $1 + 2\cos(\vartheta)$, dove ϑ è l'angolo che cerchiamo. Otteniamo allora $\vartheta = \pm 2\alpha$, come voluto: si osservi infatti che α è per definizione l'angolo fra e_1 e w_2, che (dal momento che L è una rotazione, e quindi preserva gli angoli) è anche l'angolo fra v_1 e v_2.

4.5 Compito del 19/05/2021

Test.

1. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(e_1+e_2) = e_2+e_3$, $L(e_2-e_3) = -e_1$, $L(e_1-e_3) = e_1-e_2-e_3$, dove e_1, e_2, e_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Trovare una base di $\ker L$.

   (b) Trovare equazioni cartesiane per $\operatorname{Imm} L$.

   (c) Sia W_1 il sottoinsieme di $\operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ costituito dagli endomorfismi T tali che $\ker L \subseteq \ker T$ e che $\operatorname{Imm} T \subseteq \operatorname{Imm} L$. Il sottoinsieme W_1 è un sottospazio vettoriale? Se sì, indicarne la dimensione.

   ☐ No, non è un sottospazio perché ....

   ☐ Sì, è un sottospazio di dimensione ....

   (d) Sia W_2 il sottoinsieme di $\operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ costituito dagli endomorfismi T tali che $\ker L = \ker T$ e che $\operatorname{Imm} T = \operatorname{Imm} L$. Il sottoinsieme W_2 è un sottospazio vettoriale? Se sì, indicarne la dimensione.

   ☐ No, non è un sottospazio perché ....

   ☐ Sì, è un sottospazio di dimensione ....

Soluzione.

(a) e (b) Osserviamo che l'immagine di L è generata dai 3 vettori $v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Si vede immediatamente che $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, quindi questi vettori non sono linearmente indipendenti; d'altro canto, è chiaro che v_1 e v_2 sono invece linearmente indipendenti. Ne segue che $\dim \operatorname{Imm} L = 2$, e dalla formula fondamentale delle dimensioni otteniamo $\dim\ker L = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\operatorname{Imm} L = 1$. Inoltre,

$$0 = v_1 + v_2 + v_3 = L(e_1+e_2) + L(e_2-e_3) + L(e_1-e_3) = L(2e_1+2e_2-2e_3),$$

cioè il vettore $e_1 + e_2 - e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ è nel nucleo di L. Dato che abbiamo già stabilito che $\ker L$ è di dimensione 1, questo vettore ne è una base. Infine, per determinare un'equazione cartesiana per il piano $\operatorname{Imm} L$ possiamo procedere con un'eliminazione di Gauss sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Sommando x volte la seconda colonna alla terza e $-y$ volte la prima colonna alla terza otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z-y \end{pmatrix}.$$

Se ne ricava che un'equazione cartesiana per $\operatorname{Imm} L$ è $z = y$, o equivalentemente $y - z = 0$.

(c) Sì, il sottoinsieme W_1 è un sottospazio vettoriale. In effetti, siano T_1, T_2 due endomorfismi in W_1, e sia λ un numero reale. Verifichiamo che $T_1 + T_2$ appartiene a W_1; in maniera del tutto analoga si controlla che anche λT_1 appartiene a W_1. Siccome W_1 contiene l'endomorfismo nullo, questo dimostrerà che W_1 è un sottospazio vettoriale. Per verificare che $T_1 + T_2$ appartiene a W_1 dobbiamo mostrare che sono soddisfatte due condizioni:

i. $\ker L \subseteq \ker(T_1 + T_2)$: sia v un vettore in $\ker L$. Allora (visto che T_1, T_2 sono in W_1) esso è anche un vettore in $\ker T_1, \ker T_2$, e quindi $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) = 0 + 0 = 0$. Visto che questo vale per ogni $v \in \ker L$, abbiamo verificato che $\ker L \subseteq \ker(T_1 + T_2)$.

ii. $\operatorname{Imm}(T) \subseteq \operatorname{Imm}(L)$: sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$ qualsiasi. Si ha $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$. Dall'ipotesi che T_1, T_2 siano in W_1 segue che $T_1(v), T_2(v)$ appartengono a $\operatorname{Imm}(L)$. Dato che $\operatorname{Imm}(L)$ è un sottospazio vettoriale, dunque in particolare è chiuso per somma, segue che anche $T_1(v) + T_2(v)$ è in $\operatorname{Imm}(L)$. Visto che questo vale per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, abbiamo verificato che $\operatorname{Imm}(T_1 + T_2) \subseteq \operatorname{Imm}(L)$.

Resta solo da determinare la dimensione di W_1. Scegliendo basi opportune in partenza ed in arrivo (specificamente: scegliendo in partenza una base $\mathcal{B}_1$ il cui primo vettore sia $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, che è una base di $\ker L$, e in arrivo una base $\mathcal{B}_2$ i cui primi due vettori formino una base di $\operatorname{Imm} L$), è facile verificare che un endomorfismo T appartiene a W_1 se e solo se la matrice $[T]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}$ è della forma $\begin{pmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In effetti: la prima colonna fornisce le coordinate dell'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ed è quindi nulla se e solo se $\ker L$ è contenuto in $\ker T$. D'altra parte, il fatto che l'immagine di T sia contenuta in $\operatorname{Imm} L$ è equivalente al fatto che ogni vettore di $\operatorname{Imm} T$ si scriva come combinazione lineare dei primi due vettori della base di arrivo, e quindi abbia terza coordinata nulla. In conclusione, deduciamo che W_1 è isomorfo allo spazio vettoriale delle matrici 2×2, e quindi che la sua dimensione è uguale a 4.

Nota. Per chi è familiare con il concetto di quoziente, può essere utile osservare che un omomorfismo appartiene a W_1 se e solo se si ottiene come composizione della proiezione canonica $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\ker L$ e di un omomorfismo $\mathbb{R}^3/\ker L \to \operatorname{Imm}(L)$. Il sottospazio W_1 è quindi isomorfo allo spazio degli omomorfismi da $\mathbb{R}^3/\ker L$ a $\operatorname{Imm}(L)$. Dato che tanto $\mathbb{R}^3/\ker L$ quanto $\operatorname{Imm}(L)$ sono isomorfi a $\mathbb{R}^2$, ne segue facilmente che $\dim W_1 = \dim \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

(d) Non è un sottospazio vettoriale, perché l'endomorfismo 0 non appartiene a W_2 (in quanto $\ker 0 \neq \ker L$).

2. (a) Indicare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Trovare le matrici $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $B^2 + 2B = A$.
Nota. Se le indicate tutte benissimo, ma anche se ne indicate alcune fate punteggio.

Soluzione.

(a) Calcoliamo $\mathrm{tr}(A) = 3$ e $\det(A) = 0$. Il polinomio caratteristico è $t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A) = t^2 - 3t$, e quindi gli autovalori sono 0 e 3. In particolare, la matrice A è diagonalizzabile, perché gli autovalori sono tutti di molteplicità algebrica 1.

(b) Ogni soluzione B dell'equazione assegnata commuta con A (perché B commuta con le sue potenze, e quindi con $B^2+2B = A$). Ne segue che B preserva gli autospazi di A, che sono di dimensione 1 in quanto ciascun autovalore ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Ne segue facilmente che ogni autovettore di A è autovettore anche di B, e cioè che ogni base diagonalizzante per A è diagonalizzante anche per B. Sia allora P una matrice di cambio base tale che $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dalla discussione precedente segue che $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ per certi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, e dall'equazione $B^2 + 2B = A$ si ottiene $(P^{-1}BP)^2 + 2(P^{-1}BP) = P^{-1}AP$, ovvero

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2^2 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha evidentemente 4 soluzioni, date da $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$, $(-3, 0)$, $(1, -2)$, $(-3, -2)$. Le matrici B cercate sono quindi 4, date da

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

dove λ_1, λ_2 sono scelti in uno dei 4 modi descritti sopra. Resta solo da trovare la matrice P, che come noto può essere costruita come una qualsiasi matrice che abbia per colonne un autovettore di A di autovalore 3 e un autovettore di A di autovalore 0. Un facile calcolo mostra che si può prendere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalle formule precedenti otteniamo allora le 4 matrici volute, ovvero

$$B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -A, \; B_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare φ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$....................

(b) Scrivere equazioni cartesiane per l'ortogonale rispetto a φ del sottospazio $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

(c) Dato un numero reale a, sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare i valori del parametro a per cui T_a è autoaggiunto rispetto a φ.

Soluzione.

(a) Si calcola facilmente che il polinomio caratteristico della matrice M data nel testo è

$$\det(t\,\mathrm{Id}-M)=\det\begin{pmatrix} t & -1 & -1\\ -1 & t & -1\\ -1 & -1 & t\end{pmatrix}=t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2);$$

gli autovalori di M sono quindi $-1,-1,2$. Dal momento che la segnatura si può ottenere contando gli autovalori di ogni dato segno, troviamo $(n_+,n_-,n_0)=(1,2,0)$.

(b) È sufficiente trovare l'ortogonale al singolo vettore $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Per definizione, un vettore $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ rispetto a φ se e solo se

$$(x,y,z)M\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow(x,y,z)\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 2x+3y+3z=0.$$

Questa è dunque una possibile equazione cartesiana per il sottospazio voluto (ed in effetti l'unica, a meno di riscalamento).

(c) In termini di matrici, la condizione che T sia autoaggiunto diventa

$${}^tT_aM=MT_a,$$

dove con leggero abuso di linguaggio identifichiamo T_a con la sua matrice in base canonica. Si trova allora

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ a+1 & 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & a+1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & a\end{pmatrix},$$

che ha evidentemente come unica soluzione $a=3$.

4. Si consideri in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ il prodotto scalare $\langle M,N\rangle=\mathrm{tr}({}^tM\,N)$.

(a) Sia $n=2$ e siano

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Calcolare $\langle A,A\rangle$, $\langle A,B\rangle$, $\langle B,B\rangle$.

(b) Sia $n=3$ e sia S il sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici simmetriche. Data la matrice

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

calcolare il quadrato della distanza di C da S.

Nota. La distanza di C da S è per definizione la distanza (misurata rispetto al prodotto scalare dato) fra C e la sua proiezione ortogonale sul sottospazio S.

Soluzione.

(a) Un veloce calcolo diretto mostra che

$${}^tAA=\begin{pmatrix}13 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix},\ {}^tAB=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 0 & 6\end{pmatrix},\ {}^tBB=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

I prodotti scalari voluti sono quindi $22,0,8$ rispettivamente.

Nota.

i. Si osservi in particolare che $\langle A, B\rangle = 0$. Durante il corso abbiamo in effetti visto che – rispetto a questo prodotto scalare – matrici simmetriche e anti-simmetriche risultano sempre ortogonali.

ii. Durante il corso abbiamo anche osservato che $\langle A, A\rangle$ è uguale alla somma dei quadrati di tutti i coefficienti di A. Questo permette di calcolare immediatamente $\langle A, A\rangle$ e $\langle B, B\rangle$.

(b) Come ricordato sopra, c'è una decomposizione ortogonale $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = S \oplus \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A}$ è il sottospazio delle matrici antisimmetriche. La matrice C del testo si scrive come

$$C = C_s + C_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove i due addendi sono rispettivamente una matrice simmetrica ed una matrice anti-simmetrica. Ne segue (per definizione) che la proiezione ortogonale di C sul sottospazio S è la matrice C_s. La distanza quadra fra C e C_s si ottiene allora calcolando

$$\langle C - C_s, C - C_s\rangle = \langle C_a, C_a\rangle = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10.$$

5. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti complessi e W il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : a + b + c + d = 0 \right\}.$$

Sia poi $T : V \to V$ l'applicazione lineare $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$.

(a) Quali sono gli autovalori di T (con le rispettive molteplicità algebriche)? ....

(b) Qual è il polinomio minimo di T? ....

(c) Qual è il polinomio minimo della restrizione di T al sottospazio W? ....

Soluzione.

(a) Si osserva immediatamente che T^4 è l'identità, ovvero che $T^4 - \mathrm{Id} = 0$. Ne segue che il polinomio minimo di T divide $t^4 - 1$, e quindi che gli autovalori di T sono da ricercarsi fra le radici quarte dell'unità. D'altro canto, detta $\zeta \in \{1, i, -1, -i\}$ una radice quarta dell'unità, si ha

$$T \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^3 & \zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & \zeta^2 \\ 1 & \zeta^3 \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^3 & \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^3 & \zeta^2 \end{pmatrix}$ è un autovettore di T di autovalore ζ. Siccome T agisce su uno spazio di dimensione 4, deve avere esattamente 4 autovalori contati con molteplicità. Ma abbiamo già identificato 4 autovalori distinti, quindi ognuno di essi ha molteplicità (sia algebrica che geometrica) 1. In conclusione, gli autovalori di T sono $\{1, i, -1, -i\}$.

(b) Dalla soluzione del punto precedente vediamo in particolare che T ha polinomio caratteristico $t^4 - 1$. Il polinomio minimo di T divide $t^4 - 1$ (per il teorema di Cayley-Hamilton), e ogni radice di $t^4 - 1$ è anche radice del polinomio minimo (per un fatto visto durante il corso). Siccome le radici di $t^4 - 1$ sono tutte distinte, questo forza il polinomio minimo ad essere $t^4 - 1$.

(c) È immediato verificare che il sottospazio W è invariante per T, ovvero che $T(W) \subseteq W$. La restrizione di T a W è ancora diagonalizzabile (per un fatto visto a lezione). Più in dettaglio, tre dei quattro autovettori esibiti sopra appartengono a W: l'unico che non soddisfa questa condizione è quello corrispondente alla radice $\zeta = 1$, ovvero la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, che chiaramente non appartiene a W. Ne segue che la restrizione di T a W, che agisce su uno spazio di dimensione 3, ha come autovalori precisamente $-1, i, -i$. Per un ragionamento del tutto analogo a quello del punto precedente, il suo polinomio minimo è allora $(t-(-1))(t-i)(t-(-i)) = (t+1)(t^2+1) = t^3+t^2+t+1$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia $p(t) = c_0+c_1t+\cdots+c_4t^4+t^5$ un polinomio a coefficienti complessi di grado 5. Consideriamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che il polinomio caratteristico di C è $p(t)$.
2. Detta λ una radice di $p(t)$, descrivere (in funzione di λ) un autovettore di C di autovalore λ.
3. ($\star$) Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ le radici di $p(t)$ (contate con le opportune molteplicità). Mostrare che C è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se la matrice
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \lambda_5^3 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 \end{pmatrix}$$
è invertibile, e che in tal caso $V^{-1}CV$ è diagonale.
4. Sia ora $p(t) = (t-1)(t^2-2)(t^2-3)$, con i c_i definiti di conseguenza. Dimostrare che $\operatorname{tr} C^n = 1$ per ogni n dispari.
5. Per quali polinomi $p(t)$ la matrice C risulta unitaria?

Soluzione.

1. Si tratta di calcolare
$$\det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & -1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4+t \end{pmatrix}.$$
Applichiamo le seguenti mosse di Gauss per colonne, che non cambiano il determinante: sommiamo t volte la quinta colonna alla quarta, poi sommiamo t volte la quarta colonna alla terza, poi sommiamo t volte la terza colonna alla seconda, e infine sommiamo t volte la seconda colonna alla prima. Possiamo quindi equivalentemente calcolare il determinante di
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \begin{matrix} c_0+c_1t+c_2t^2+ \\ +c_3t^3+c_4t^4+t^5 \end{matrix} & c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+t^4 & c_2+c_3t+c_4t^2+t^3 & c_3+c_4t+t^2 & c_4+t \end{pmatrix}.$$
Sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo che questo determinante è uguale a $c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+t^5 = p(t)$ per il determinante del minore complementare $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, che è chiaramente 1. Il polinomio caratteristico cercato è quindi proprio $p(t)$.

2. Vogliamo studiare il nucleo di

$$C - \lambda \operatorname{Id} = \ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 - \lambda \end{pmatrix}$$

quando λ è una radice di $p(t)$. Se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ è un vettore nel nucleo di questa matrice, le equazioni corrispondenti alle prime 4 righe forniscono $\lambda x_1 = x_2, \lambda x_2 = x_3, \lambda x_3 = x_4, \lambda x_4 = x_5$, per cui il vettore è necessariamente della forma $\begin{pmatrix} a \\ \lambda a \\ \lambda^2 a \\ \lambda^3 a \\ \lambda^4 a \end{pmatrix}$. In termini delle variabili a e λ, l'equazione corrispondente all'ultima riga è

$$-c_0 a - c_1 a\lambda - c_2 a\lambda^2 - c_3 a\lambda^3 - (c_4 + \lambda)(a\lambda^4) = -a(\lambda^5 + c_4\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0) = 0,$$

ed è quindi soddisfatta dal momento che λ è una radice del polinomio $p(t)$. Abbiamo quindi dimostrato che gli autovettori relativi all'autovalore λ sono tutti e soli quelli della forma $\begin{pmatrix} a \\ \lambda a \\ \lambda^2 a \\ \lambda^3 a \\ \lambda^4 a \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$ (si ricorda che un autovettore è per definizione un vettore non nullo). Si osservi in particolare che l'autospazio relativo a λ ha dimensione 1, e dunque la molteplicità geometrica di ogni autovalore λ è 1.

3. Dalla teoria del determinante di Vandermonde sappiamo che V è invertibile se e solo se $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ sono a due a due distinti. Ora:

   (a) se V è invertibile, e quindi i λ_i sono tutti distinti, allora la matrice C ammette tutti i propri autovalori in $\mathbb{C}$ (perché $p(t)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{C}$, in quanto questo campo è algebricamente chiuso), ed inoltre ogni autovalore è di molteplicità algebrica 1. Come noto, questo implica che per ogni autovalore le molteplicità algebriche e geometriche coincidono, e quindi che la matrice è diagonalizzabile.

   (b) viceversa, se C è diagonalizzabile, allora per ogni autovalore le molteplicità algebriche e geometriche coincidono. Ma abbiamo già dimostrato che gli autovalori hanno tutti molteplicità geometrica 1, e quindi devono avere anche molteplicità algebrica 1, ovvero $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ devono essere tutti distinti. In tal caso, la matrice V è invertibile, come già osservato.

   Infine, se V è invertibile, si osservi che è una matrice le cui colonne sono tutte autovettori di C per il punto (2), ovvero le colonne di V formano una base di $\mathbb{C}^5$ costituita di autovettori per C. Come noto, questo implica che $V^{-1}CV$ (che non è altro che la matrice di C nella base data dalle colonne di V) è diagonale.

4. Abbiamo $\{\lambda_1, \dots, \lambda_5\} = \{1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$. Dalla dimostrazione del punto precedente sappiamo che la matrice C è diagonalizzabile (gli autovalori sono tutti distinti). In particolare, in una base opportuna C si scrive come la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{2} & & & \\ & & -\sqrt{2} & & \\ & & & \sqrt{3} & \\ & & & & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Il medesimo cambio base porta C^n in $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{2}^n & & & \\ & & (-\sqrt{2})^n & & \\ & & & \sqrt{3}^n & \\ & & & & (-\sqrt{3})^n \end{pmatrix}$. La traccia di C^n è quindi $1+\sqrt{2}^n+(-\sqrt{2})^n+\sqrt{3}^n+(-\sqrt{3})^n$, che per n dispari è chiaramente uguale ad 1.

5. La condizione di unitarietà è equivalente al fatto che le colonne di C formino una base ortonormale di $\mathbb{C}^5$ rispetto al prodotto Hermitiano standard. In particolare, la condizione di ortogonalità della prima colonna rispetto a tutte le altre fornisce

$$c_0\overline{c_1} = c_0\overline{c_2} = c_0\overline{c_3} = c_0\overline{c_4} = 0,$$

da cui o $c_0 = 0$ o $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Inoltre, la condizione che la prima colonna abbia prodotto Hermitiano con se stessa uguale ad 1 fornisce $|c_0|^2 = 1$, da cui in particolare $c_0 \neq 0$. Otteniamo allora $c_1 = \cdots = c_4 = 0$ e $|c_0| = 1$, e queste condizioni sono necessarie (come già visto) e sufficienti (o perché un calcolo diretto mostra che in tal caso $C^*C = \mathrm{Id}$, oppure perché le condizioni imposte sono sufficienti a garantire che le colonne di C formino una base di $\mathbb{C}^5$ ortonormale per il prodotto Hermitiano standard). I polinomi $p(t)$ cercati sono quindi tutti e solo quelli della forma $t^5 + c_0$ con $|c_0| = 1$.

4.6 Compito dell'11/06/2021

Test.

1. Sia V lo spazio vettoriale i cui elementi sono i prodotti scalari su $\mathbb{R}^4$ (con le ovvie operazioni di somma e prodotto per scalare).

   (a) Qual è la dimensione di V? ....

   (b) Sia $W_1 = \{\varphi \in V : \begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$ è nel radicale di $\varphi\}$. Il sottoinsieme W_1 è un sottospazio vettoriale? Se sì, di quale dimensione?
   ☐ No, non è un sottospazio perché ....
   ☐ Sì, è un sottospazio di dimensione ....

   (c) Sia $W_2 = \{\varphi \in V : \varphi$ è definito positivo$\}$. Il sottoinsieme W_2 è un sottospazio vettoriale? Se sì, di quale dimensione?
   ☐ No, non è un sottospazio perché ....
   ☐ Sì, è un sottospazio di dimensione ....

Soluzione.

(a) La scelta di una base di $\mathbb{R}^4$ (ad esempio quella canonica) fornisce un isomorfismo fra V e lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 simmetriche (a coefficienti reali). Questo ha dimensione $4+3+2+1 = 10$.

(b) Scegliamo una base di $\mathbb{R}^4$ di cui $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$ sia il primo vettore. Usando questa base e l'isomorfismo del punto precedente, W_1 si identifica all'insieme delle matrici 4×4 simmetriche che hanno $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ nel nucleo, ovvero la cui prima colonna (e quindi anche prima riga) è nulla. Questo è uno spazio vettoriale (è un sottoinsieme di $\mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definito da equazioni lineari). Una tale matrice è poi completamente identificata dal suo minore 3×3 in basso a destra, per cui vediamo che W_1 è isomorfo allo spazio delle matrici 3×3 simmetriche, che ha dimensione $3 + 2 + 1 = 6$.

(c) No, W_2 non è un sottospazio vettoriale: ad esempio non è chiuso sotto l'operazione di prodotto per scalare, in quanto se φ è il prodotto scalare standard (che è definito positivo) allora $\varphi \in W_2$, mentre $-\varphi$ è definito negativo e quindi non è in W_2. In alternativa si può anche osservare che il prodotto scalare nullo (lo 0 di V) non appartiene a W_2.

2. (a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det A =$........

(b) Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ sia invertibile, e in caso affermativo calcolarne l'inversa.

☐ Non è invertibile, e il suo rango è .... ☐ È invertibile, e l'inversa è:

(c) Sia M una matrice 3×3 a coefficienti reali che soddisfa $(M - 2\,\mathrm{Id})(M - 3\,\mathrm{Id})(M^2 + M + \mathrm{Id}) = 0$. Elencare tutti i possibili valori per $\det(M)$: ....

Soluzione.

(a) Possiamo semplificare notevolmente il calcolo utilizzando le proprietà del determinante, e in particolare la sua invarianza per mosse di Gauss in cui ad una riga o colonna si sommi un multiplo di un'altra. Cominciamo estraendo (per linearità) un fattore $4 \cdot 3$:

$$\det A = 4 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora sottrarre la prima riga dalla seconda, la quarta due volte dalla quinta, e la terza dalla quarta per ottenere

$$\det A = 4 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Due sviluppi di Laplace (rispetto alle ultime righe) ci forniscono allora

$$\det A = 12 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 12 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 12 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando infine ancora due mosse di Gauss, sottraendo la terza riga dalla prima e dalla seconda, otteniamo

$$\det A = 12 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 24,$$

dove l'ultimo determinante si calcola immediatamente ad esempio con la regola di Sarrus.

(b) Procediamo con l'algoritmo visto a lezione, formando la matrice 3×6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e procedendo ad un'eliminazione di Gauss per righe. Come prima mossa sottraiamo la prima riga 3 volte dalla seconda e 4 volte dalla quarta, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo ora la terza riga dalla seconda,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e sottraiamo nuovamente la seconda dalla terza,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo intanto portato la matrice 3×3 sulla sinistra in forma ridotta a scalini, e siccome ci sono 3 pivot non nulli possiamo già concludere che la matrice di partenza è invertibile. Per concludere il calcolo dell'inversa, sottraiamo la terza riga dalla seconda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e infine la seconda dalla prima

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che l'inversa esiste ed è data da $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) L'ipotesi è equivalente al fatto che il polinomio minimo di M divida $(t-2)(t-3)(t^2+t+1)$. Ogni autovalore di M è anche radice del polinomio minimo, per cui in particolare è una radice del polinomio precedente: si ottiene quindi che gli autovalori di M sono contenuti nell'insieme $\{2, 3, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$. Inoltre, dal momento che M è a coefficienti reali, se uno dei due numeri non reali in questa lista è un autovalore di M, allora anche il suo complesso coniugato lo è. Ricordando infine che il determinante di M è uguale al prodotto dei suoi autovalori, otteniamo che le seguenti sono le uniche possibilità:

i. se M ha un autovalore non reale, allora due dei suoi autovalori sono $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (con prodotto 1), mentre il terzo autovalore è reale e quindi uguale a 2 o a 3. I possibili determinanti in questo caso sono 2 e 3.

ii. se tutti gli autovalori di M sono reali, allora a meno di riordinamento essi sono $\{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 3\}$ o $\{3, 3, 3\}$. Le possibilità per il determinante sono allora $8, 12, 18, 27$.

Verifichiamo infine che le possibilità elencate sono tutte realizzabili. Per quanto riguarda il caso in cui tutti gli autovalori sono reali è sufficiente considerare una matrice diagonale con gli opportuni autovalori lungo la diagonale. Nel caso invece vogliamo una matrice con autovalori $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ e $\lambda \in \{2,3\}$ è sufficiente prendere

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La verifica che queste ultime due matrici soddisfino l'identità polinomiale data nel testo può essere fatta direttamente, oppure sfruttando il teorema di Cayley-Hamilton (il polinomio caratteristico è $(t-\lambda)(t^2+t+1)$, e quindi le matrici in questione soddisfano $(M-\lambda\,\mathrm{Id})(M^2+M+\mathrm{Id})=0$, e quindi a maggior ragione soddisfano l'identità data nel testo). Concludendo, la risposta alla domanda è che i possibili valori per il determinante di M sono $2,3,8,12,18,27$.

3. Consideriamo su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare φ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Sia inoltre W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni $\begin{cases} x_4 = 5x_1 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

   (a) Determinare equazioni cartesiane per l'ortogonale di W rispetto a φ:

   (b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

   (c) Determinare una base del sottospazio $\{x_1 = 0\}$ che sia ortogonale rispetto a φ e costituita da vettori a coefficienti interi:

   Soluzione.

   (a) Cominciamo determinando una base di W. Scegliendo x_1, x_4 uguali prima a $(1,0)$ e poi a $(0,1)$ e risolvendo le equazioni otteniamo la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Riscaliamo per comodità il secondo vettore, lavorando quindi con $(0,-5,1,5)$. Un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ è ortogonale a W se e solo se è ortogonale ad un insieme di generatori di W (in particolare, ad una base). Otteniamo quindi come equazioni per W

$$0 = (1,-1,-1,0)\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad 0 = (0,-5,1,5)\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

   Sviluppando il calcolo otteniamo

$$0 = 0 \quad \text{e} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0.$$

   Concludiamo quindi che $W^\perp$ è di dimensione 3, e che può essere descritto dalla singola equazione $2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$.

   Nota. Si osserverà che $\dim W + \dim W^\perp \neq \dim \mathbb{R}^4$. Verificheremo in effetti al prossimo punto che φ è un prodotto scalare degenere.

(b) Denotiamo come sempre $e_1, \ldots, e_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Innanzitutto è chiaro che $\mathbb{R}^4$ si decompone come la somma diretta fra i due sottospazi ortogonali $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $\mathrm{Span}(e_4)$. In particolare, l'unione di una base di $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ che sia ortogonale rispetto a φ e di una base (automaticamente ortogonale) di $\mathrm{Span}(e_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a φ, per cui la segnatura di φ su $\mathbb{R}^4$ è data dalla somma della segnatura su $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e della segnatura su $\mathrm{Span}(e_4)$.

La restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_4)$ è chiaramente definita positiva, perché $\varphi(e_4, e_4) = +1$. La restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ può essere determinata considerando la matrice di tale restrizione, che è $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha nucleo di dimensione 1, come si vede facilmente (il rango è almeno due perché le prime due colonne sono linearmente indipendenti, ma la prima colonna è uguale alla somma della seconda e terza). Ne segue che $n_0 = 1$. Inoltre $\varphi(e_1, e_1) = 8 > 0$, quindi $n_+ \geq 1$. Infine, la restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ ha matrice $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con determinante $-1 < 0$, quindi tale restrizione ha $n_+ = 1$ e $n_- = 1$. Combinando tutte le informazioni trovate, scopriamo che la restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ ha $n_0 = 1, n_+ \geq 1$ e $n_- \geq 1$, e dunque la segnatura per tale restrizione è $(1, 1, 1)$. Tenendo conto della segnatura su $\mathrm{Span}(e_4)$, concludiamo che la segnatura di ϕ su $\mathbb{R}^4$ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 1)$.

(c) Una base (non ortogonale) di $\{x_1 = 0\}$ è data da $\{e_2, e_3, e_4\}$. Procediamo ad ortogonalizzarla: sappiamo già che e_4 è ortogonale agli altri due vettori, quindi si tratta di ortogonalizzare e_2, e_3. Tuttavia e_2 è isotropo, quindi per utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt dobbiamo scambiare i ruoli di e_2 ed e_3. Possiamo allora prendere come base ortogonale e_4, e_3 e

$$e_2 - \frac{\varphi(e_2, e_3)}{\varphi(e_3, e_3)} e_3 = e_2 - \frac{1}{6} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando per 6 in modo da avere un vettore a coefficienti interi, troviamo una possibile risposta alla domanda, ovvero

$$e_4, e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_b = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

dove b è un parametro reale.

(a) Trovare un autovettore di A relativo ad un suo autovalore di molteplicità algebrica 1:

(b) Per $b = -5$ elencare gli autovalori di B_b: ....

(c) Per $b = -5$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza simultaneamente A e B_b:

(d) Esistono valori di b diversi da -5 per cui le matrici A e B_b sono simultaneamente diagonalizzabili?

☐ No, l'unico valore per cui sono simultaneamente diagonalizzabili è $b = -5$.

☐ Sì, gli altri valori di b per cui sono simultaneamente diagonalizzabili sono ....

Soluzione.

(a) Cominciamo calcolando il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} t+5 & -2 & 2 \\ 2 & t+1 & 2 \\ 3 & -3 & t+6 \end{pmatrix}$$

Sommando la prima colonna alla seconda e usando la linearità del determinante otteniamo

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+5 & t+3 & 2 \\ 2 & t+3 & 2 \\ 3 & 0 & t+6 \end{pmatrix} = (t+3)\det \begin{pmatrix} t+5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & t+6 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo ora il doppio della seconda colonna dalla terza e sviluppando con Laplace possiamo facilmente concludere il calcolo:

$$p_A(t) = (t{+}3)\det \begin{pmatrix} t+5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & t+6 \end{pmatrix} = (t{+}3)(t{+}6)\det \begin{pmatrix} t+5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (t{+}3)(t{+}6)(t{+}3).$$

Gli autovalori di A sono quindi -3 (di molteplicità 2) e -6 (di molteplicità 1). Per trovare un autovettore corrispondente a -6 basta determinare il nucleo di $A + 6\,\mathrm{Id}$, ovvero

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

dove nel secondo passaggio abbiamo effettuato due mosse di eliminazione di Gauss per righe. Otteniamo quindi che questo nucleo ha dimensione 1, come previsto dalla teoria, e che è generato ad esempio da $v := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Poniamo d'ora in poi per semplicità $B = B_{-5}$. Si tratta di calcolare il polinomio caratteristico di B e trovarne le radici:

$$p_B(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - B) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 2 & -2 \\ -2 & t+5 & -2 \\ -3 & 3 & t \end{pmatrix}.$$

Procedendo esattamente come per A (sommando la prima colonna alla seconda, estraendo un fattore $(t+3)$ per linearità, ...) otteniamo

$$p_B(t) = (t+3)\det \begin{pmatrix} t+1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & t \end{pmatrix} = (t+3)\det \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & t \end{pmatrix} = (t+3)^2 t.$$

Gli autovalori di B sono quindi $0, -3, -3$.

(c) Abbiamo già stabilito che v è un autovettore per A di autovalore -6 e per B di autovalore 0. Dobbiamo ora trovare due altri vettori v_1, v_2 che siano autovettori sia per A che per B, ed in entrambi i caso con autovalore -3. In altre parole, dobbiamo trovare una base di $\ker(A + 3\,\mathrm{Id})$ (e per completezza, verificare che si tratta anche di una base di $\ker(B + 3\,\mathrm{Id})$). Si ha

$$\ker(A + 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda B, abbiamo

$$\ker(B + 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \ker(A + 3\,\mathrm{Id}):$$

questo garantisce che in effetti la base $v, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ è costituita di autovettori sia di A che di B, e verifica così quanto affermato nel testo (ovvero che per $b = -5$ le matrici siano simultaneamente diagonalizzabili). Una possibile risposta alla domanda è quindi

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(d) Se A e B_b commutano, allora B_b preserva gli autospazi di A. Dal momento che l'autospazio relativo all'autovalore -6 è di dimensione 1, questo vuol dire in particolare che v è un autovettore anche di B_b. Basta allora calcolare

$$B_b v = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 2 & b & 2\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 4+2b+6\\ 0\end{pmatrix}.$$

Quindi v è un autovettore di B_b se e solo se è un autovettore di autovalore 0, il che succede se e solo se $10+2b = 0$, cioè se e solo se $b = -5$. Non ci sono quindi altri valori di b per cui le due matrici siano simultaneamente diagonalizzabili.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

In $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard e base canonica e_1, e_2, e_3 consideriamo i tre vettori:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \; v_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix},$$

dove $\vartheta \in [0, 2\pi)$ è un angolo fissato.

1. Scrivere le matrici, rispetto alla base canonica, degli endomorfismi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tali che $f(e_1) = v_1,\ f(e_2) = v_2, f(e_3) = v_\vartheta$. Indicare per quali valori di ϑ questi endomorfismi sono simmetrici o ortogonali.
2. Dimostrare che
$$\mathcal{F}_\vartheta = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : \ f \text{ è simmetrico e } v_1, v_2, v_\vartheta \text{ sono autovettori per } f\}$$
è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
3. Dimostrare che e_3 è autovettore per ogni $f \in \mathcal{F}_\vartheta$.
4. Scrivere rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, e_3\}$ le matrici degli endomorfismi $f \in \mathcal{F}_\vartheta$, e determinare la dimensione di $\mathcal{F}_\vartheta$ (in funzione di ϑ).

Soluzione.

1. Per definizione, la matrice in base canonica di f ha per colonne le immagini $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Otteniamo quindi la matrice
$$[f]^{\text{can}}_{\text{can}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & \cos\vartheta\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \cos\vartheta\\ 0 & 0 & \sin\vartheta\end{pmatrix}.$$
Un endomorfismo è simmetrico se e solo se la sua matrice in base canonica è simmetrica, e similmente un endomorfismo è ortogonale se e solo se la sua matrice in base canonica è ortogonale. Una matrice della forma qui sopra certamente non è mai simmetrica (si considerino i coefficienti in posizione $(1, 2)$ e $(2, 1)$). Condizione necessaria affinché sia ortogonale è che la sua terza colonna abbia norma unitaria: questo implica $2\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, e siccome

$2\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=\cos^2\vartheta+1$ questo accade se e solo se $\cos\vartheta=0$ (ovvero $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$). In tal caso $\sin\vartheta=\pm1$, e si vede facilmente che le corrispondenti matrici sono ortogonali: infatti in tal caso $\|v_\vartheta\|=1$, si ha sempre $\|v_1\|=\|v_2\|=1$, e si verifica subito che quando $\cos\vartheta=0$ si ha $\langle v_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_\vartheta\rangle=\langle v_2,v_\vartheta\rangle=0$ (si ricorda che una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$).

2. Si tratta di verificare che l'insieme $\mathcal{F}_\vartheta$ contenga l'endomorfismo nullo (il che è chiaro) e che sia chiuso per combinazioni lineari. Per questa seconda condizione, siano $f_1,f_2\in\mathcal{F}_\vartheta$ e siano μ_1,μ_2 scalari. Allora $\mu_1f_1+\mu_2f_2$ è simmetrico (questo può essere controllato sulle matrici, e una combinazione lineare di matrici simmetriche è simmetrica), e ha v_1,v_2,v_ϑ come autovettori: infatti fissato $v\in\{v_1,v_2,v_\vartheta\}$ esistono scalari λ_1,λ_2 tali che $f_iv=\lambda_iv$ per $i=1,2$. Allora
$$(\mu_1f_1+\mu_2f_2)(v)=\mu_1f_1(v)+\mu_2f_2(v)=\mu_1\lambda_1v+\mu_2\lambda_2v=(\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2)v,$$
e quindi v è un autovettore di $\mu_1f_1+\mu_2f_2$. Siccome questo ragionamento si può ripetere per $v=v_1,v_2,v_\vartheta$, concludiamo come voluto che $\mu_1f_1+\mu_2f_2$ ha v_1,v_2,v_ϑ come autovettori, e quindi che $\mathcal{F}_\vartheta$ è chiuso per combinazioni lineari.

3. Sia $W:=\operatorname{Span}(v_1,v_2)$. Si nota facilmente che W coincide con il sottospazio $z=0$: infatti da un lato $\dim(W)=2$, e dall'altro $v_1-v_2=\sqrt{2}e_1$ e $v_1+v_2=\sqrt{2}e_2$, che sono in W, sono chiaramente una base di $\{z=0\}$. Da un lemma visto a lezione sappiamo che se f è un endomorfismo simmetrico e W è un sottospazio f-invariante, allora $W^\perp$ è anch'esso un sottospazio f-invariante. Nel nostro caso $W^\perp=\operatorname{Span}(e_3)$, da cui otteniamo che $f(e_3)\in W^\perp=\operatorname{Span}(e_3)$, ovvero $f(e_3)=\mu e_3$ per un certo $\mu\in\mathbb{R}$, e quindi e_3 è un autovettore di f, come voluto.

4. Per definizione v_1,v_2 sono autovettori di f, e abbiamo appena dimostrato che anche e_3 lo è. Ne segue che la matrice di ogni $f\in\mathcal{F}_\vartheta$ in base $\{v_1,v_2,e_3\}$ è diagonale, e la scriveremo nella forma $\begin{pmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{pmatrix}$. La condizione che la matrice di f in base $\{v_1,v_2,e_3\}$ sia diagonale è necessaria, ma (a priori) non sufficiente affinché f appartenga a $\mathcal{F}_\vartheta$. Dobbiamo infatti imporre anche che f sia una trasformazione simmetrica e che v_ϑ ne sia un autovettore.

   (a) f simmetrica: dal momento che $\{v_1,v_2,e_3\}$ è una base ortonormale, come si controlla immediatamente (è il caso $\vartheta=\pi/2$ di un'osservazione già fatta in precedenza), la condizione che f sia un endomorfismo simmetrico è equivalente a che la matrice di f in base $\mathcal{B}$ sia simmetrica. Dal momento che abbiamo già imposto che tale matrice sia diagonale, questa condizione è automaticamente soddisfatta.

   (b) v_ϑ è autovettore di f: scriviamo v_ϑ in base $\mathcal{B}$. Si ha $v_\vartheta=\sqrt{2}\cos\vartheta\cdot v_1+\sin\vartheta\cdot e_3$. La condizione che $v_\vartheta=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sia un autovettore di f si traduce nel fatto che $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$ sia un autovettore della matrice $\begin{pmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{pmatrix}$, ovvero che
$$\begin{pmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\cdot\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\mu_3\sin\vartheta\end{pmatrix}$$
sia un multiplo scalare di $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$, diciamo $\nu\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$. Abbiamo quindi ottenuto le equazioni
$$\begin{cases}\mu_1\sqrt{2}\cos\vartheta=\nu\sqrt{2}\cos\vartheta\\ \mu_3\sin\vartheta=\nu\sin\vartheta.\end{cases}$$

Se sia $\cos\vartheta$ che $\sin\vartheta$ sono diverse da 0, allora queste due equazioni chiaramente implicano $\mu_1 = \nu = \mu_3$. Abbiamo allora stabilito che $\mathcal{F}_\vartheta$ è isomorfo allo spazio delle matrici diagonali con primo e terzo coefficiente diagonale uguali, e quindi $\mathcal{F}_\vartheta$ ha dimensione 2. Se invece $\sin\vartheta = 0$, allora la seconda equazione è tautologicamente soddisfatta, e la prima è soddisfatta prendendo $\nu = \mu_1$. In tal caso $\mathcal{F}_\vartheta$ è semplicemente isomorfo allo spazio delle matrici 3×3 diagonali, e quindi ha dimensione 3. Simmetricamente, se $\cos\vartheta = 0$, allora la prima equazione è identicamente soddisfatta, e nuovamente troviamo che $\dim \mathcal{F}_\vartheta = 3$.

4.7 Compito del 09/07/2021

Test.

1. Consideriamo i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Calcolare la dimensione di W_1 e di W_2. Si ha $\dim W_1 =$.......... e $\dim W_2 =$..........

   (b) Determinare una base per $W_1 \cap W_2$ costituita di vettori a coefficienti interi:

   (c) Determinare equazioni cartesiane per $W_1 + W_2$:

Soluzione. Dal momento che sarà utile per tutte le domande, troviamo innanzitutto una base di W_1 e una rappresentazione cartesiana per W_2. In quanto a W_1 possiamo procedere con le seguenti mosse di eliminazione di Gauss per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-7[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & -12 & -24 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-6[2]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da questo intanto deduciamo che la dimensione di W_1 è 2: si tratta infatti dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice associata (scritta sopra) ha chiaramente rango 2. Prendendo x_3, x_4 come variabili libere (e imponendole una volta uguali a $(1,0)$, l'altra a $(0,1)$) troviamo allora la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scriviamo ora equazioni cartesiane per W_2. Come noto, per trovarle possiamo procedere con la seguente eliminazione di Gauss per colonne:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 4 & 4 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]+[1],[4]+x_1[1]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_3 \\ -1 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-[2],[4]-(x_1+x_2)[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & x_3 - 4(x_1 + x_2) \\ -1 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Dal fatto che la terza colonna è nulla, mentre le prime due sono chiaramente non proporzionali, deduciamo che $\dim W_2 = 2$. Abbiamo inoltre ottenuto una descrizione cartesiana di W_2, ovvero $\begin{cases} x_3 = 4x_1 + 4x_2 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$. Siamo ora pronti a rispondere alle domande dell'esercizio.

(a) Abbiamo già determinato che $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$.

(b) Per intersecare W_1 e W_2 basta considerare il sistema dato dalle equazioni cartesiane che descrivono entrambi i sottospazi. Il sottospazio $W_1 \cap W_2$ è quindi descritto da

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_3 = 4x_1 + 4x_2 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$$

dove abbiamo usato le equazioni semplificate già trovate in precedenza per W_1. Sostituendo la terza e quarta equazione nella prima e seconda troviamo

$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 = 0 \\ -9x_1 - 18x_2 = 0 \\ x_3 = 4x_1 + 4x_2 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono manifestamente proporzionali, ed entrambe equivalenti a $x_1 = -2x_2$. Dobbiamo quindi trovare una base per l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -4x_2 \\ x_4 = x_1 = -2x_2; \end{cases}$$

le soluzioni di questo sistema sono chiaramente tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix}$ per $t \in \mathbb{R}$, e dunque una base dello spazio delle soluzioni (che è $W_1 \cap W_2$) è $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) Procediamo con un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & x_1 \\ -2 & 7/2 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x_4 \end{pmatrix},$$

le cui prime due colonne (rispettivamente terza e quarta colonna) sono una base di W_1

(rispettivamente di W_2). Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & x_1 \\ -2 & 7/2 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+[1],[3]+[1],[5]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3/2 & -1 & 1 & x_2+2x_1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & x_3-x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3/2 & 1 & x_2+2x_1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & x_3-x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+3/2[2],\,[4]+[2],\,[5]+(x_2+2x_1)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5/2 & 5 & x_3+x_2+x_1 \\ 0 & -1 & -1/2 & -1 & x_4-x_2-2x_1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la terza e quarta colonna sono proporzionali, quindi possiamo eliminare una delle due (per esempio la terza) e effettuare un ultimo passo di eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & x_3+x_2+x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_4-x_2-2x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-\frac{1}{5}(x_3+x_2+x_1)[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & x_4-x_2-2x_1+\frac{1}{5}(x_3+x_2+x_1) \end{pmatrix}$$

Moltiplicando per 5 e semplificando, concludiamo che un'equazione per W_1+W_2 è data da

$$0 = -9x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4.$$

Nota. Siccome W_1+W_2 è descritto da una singola equazione si ha $\dim(W_1+W_2)=3$. Questo è compatibile con quanto trovato sopra: la formula di Grassmann in effetti fornisce

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

e sappiamo già $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 2, \dim(W_1 \cap W_2) = 1$. In secondo luogo, per verificare la correttezza dell'equazione trovata alla fine, è sufficiente controllare che essa sia soddisfatta dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: ....

   (b) Calcolare la matrice $2A^{-1}$, dove A è la matrice del punto precedente:

   (c) Un endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ soddisfa $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $T^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 27\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Elencare i possibili valori per $\det T$: ....

Soluzione.

(a) Scambiamo la prima colonna con la terza e la seconda con la quarta. Ognuna di tali operazioni inverte il segno di $\det A$, dunque il determinante voluto è uguale al determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome questa è una matrice a blocchi, il suo determinante è uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi, ovvero si ha

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 5 - 7 \cdot 2)(2 \cdot 2 - 4 \cdot 2) = -4.$$

(b) Osserviamo che dal momento che $\det(A) \neq 0$ la matrice è effettivamente invertibile. Per semplificare i calcoli, osserviamo che vale l'uguaglianza fra matrici a blocchi

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_2 & 0 \\ 0 & A_2 B_1 \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice A è dunque la matrice a blocchi $B = \begin{pmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, dove $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ sono i blocchi 2×2 di A. Queste matrici 2×2 sono immediate da invertire, per cui troviamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La risposta alla domanda è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & -14 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) La prima ipotesi ci dice che 3 è un autovalore di T. La seconda ci dice che 4 è un autovalore di T^2, e siccome gli autovalori di T^2 sono i quadrati degli autovalori di T, questo ci dice che almeno uno fra 2 e -2 è un autovalore di T. Dal momento che la somma degli autovalori di T (cioè la traccia di T) è un numero reale, si ottiene che anche il terzo autovalore di T è un numero reale. Infine, l'ultima ipotesi ci dice che 27 è un autovalore di T^3, e quindi che uno fra i tre numeri $3, 3e^{2\pi i/3}, 3e^{4\pi i/3}$ (le tre radici cubiche di 27 in $\mathbb{C}$) è un autovalore di T. Ma abbiamo già dimostrato che gli autovalori di T sono tutti reali, e quindi 3 deve essere un autovalore di T. Ne segue che il determinante di T, che è il prodotto degli autovalori è $3 \cdot (\pm 2) \cdot 3 = \pm 18$. In quanto al fatto che esistano effettivamente endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ con le proprietà descritte, si osservi semplicemente che $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e basta prendere gli endomorfismi che in questa base sono rappresentati dalle matrici $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Trovare, se esiste, un vettore non nullo a coefficienti interi che appartenga al radicale di φ (ovvero che sia ortogonale a tutto $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare φ):

☐ Un tale vettore non esiste ☐ Un tale vettore esiste, ad esempio:

(b) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da vettori a coefficienti interi che sia contemporaneamente ortogonale **sia** rispetto al prodotto scalare φ **sia** rispetto al prodotto scalare standard:

(c) Trovare un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartenga a W e tale che $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

☐ Un tale sottospazio non esiste ☐ Un tale sottospazio è descritto dalle seguenti equazioni cartesiane:

Soluzione. È conveniente ricordare che una base come richiesta dal punto (b) esiste come conseguenza del teorema spettrale, e può essere trovata come base di autovettori della matrice del prodotto scalare. Iniziamo quindi calcolando il polinomio caratteristico della matrice data M, che fra le altre cose ci permetterà anche di dedurre la segnatura del prodotto scalare (e quindi sapere se il radicale sia o meno banale). Si ha

$$p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det\begin{pmatrix} t-3 & -4 & -2 \\ -4 & t-5 & -2 \\ -2 & -2 & t \end{pmatrix}.$$

Sottraendo l'ultima riga due volte dalla prima, e poi estraendo per linearità un fattore $(t+1)$ dalla prima riga, otteniamo

$$\begin{aligned} p_M(t) &= \det\begin{pmatrix} t+1 & 0 & -2-2t \\ -4 & t-5 & -2 \\ -2 & -2 & t \end{pmatrix} \\ &= (t+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & t-5 & -2 \\ -2 & -2 & t \end{pmatrix} \\ &= (t+1)\left(t(t-5) - 16 - 4 - 4(t-5)\right) = (t+1)(t^2-9t) = t(t+1)(t-9). \end{aligned}$$

Ne segue che gli autovalori di M sono $0, -1, 9$. In particolare, essi sono uno positivo, uno negativo e uno nullo, e dunque la segnatura di φ è $(n_+, n_-, n_0) = (1,1,1)$. Possiamo rispondere alle prime due domande calcolando una base di autovettori di A: troviamo allora gli autospazi relativi a $0, -1, 9$. Per $\lambda = 0$ abbiamo che $\ker M$ è generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; per $\lambda = -1$ dobbiamo trovare $\ker(M + \mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e infine per $\lambda = 9$ si ha $\ker(M - 9\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Un vettore nel radicale di φ corrisponde, in coordinate, ad un vettore nel nucleo di M. Una possibile risposta è quindi $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Gli autovalori di M sono tutti di molteplicità uno. È noto che autospazi di un endomorfismo simmetrico relativi ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali, quindi la base v_1, v_2, v_3 trovata sopra è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, detto λ_j l'autovalore relativo all'autovettore v_k, dati $i \neq j$ si ha

$$\varphi(v_i, v_j) = {}^t v_i M v_j = {}^t v_i \lambda_j v_j = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 0,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard. La base v_1, v_2, v_3 è dunque ortogonale anche rispetto a φ, ed è quindi una risposta valida alla domanda.

(c) Un vettore non nullo nell'intersezione $W \cap W^\perp$ è per definizione un vettore isotropo. Motivati da questa osservazione, poniamo $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, dove il primo generatore è il vettore isotropo trovato sopra. Da un lato $W \cap W^\perp$ è non banale perché

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (che sta in W) è ortogonale all'intero W, e quindi appartiene all'intersezione; dall'altro, per costruzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a W, e infine $\dim W = 2$ perché i due generatori dati sono linearmente indipendenti. Tale W è dunque una possibile risposta alla domanda. Per trovarne un'equazione cartesiana possiamo semplicemente imporre che il determinante della seguente matrice sia uguale a 0:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} = -2z - 2y - y - 2x = -2x - 3y - 2z.$$

Una possibile equazione cartesiana per W è dunque $2x + 3y + 2z = 0$.

4. Consideriamo la matrice $A_a = \begin{pmatrix} -3 & a+4 & 4a+4 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 3a \end{pmatrix}$, dipendente da un parametro reale a.

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A_a (in funzione di a): ....

   (b) Per $a = 1$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di vettori a coefficienti interi che diagonalizza A_1:

   (c) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a **non** è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

Soluzione.

(a) Si tratta di calcolare $\det(t \operatorname{Id} - A_a) = \det \begin{pmatrix} t+3 & -a-4 & -4a-4 \\ 0 & t-a & 0 \\ 0 & -1 & t-3a \end{pmatrix}$. Sviluppando prima rispetto alla prima colonna troviamo

$$(t+3) \det \begin{pmatrix} t-a & 0 \\ -1 & t-3a \end{pmatrix} = (t+3)(t-a)(t-3a).$$

(b) Sostituendo $a = 1$ nell'espressione precedente vediamo che gli autovalori di A_1 sono $-3, 1, 3$. Siccome tali autovalori hanno tutti molteplicità algebrica 1, la matrice A_1 è diagonalizzabile. Per trovare una base diagonalizzante è sufficiente calcolare una base di ogni autospazio. Indicando con λ l'autovalore di volta in volta considerato abbiamo:

   i. $\lambda = -3$. È evidente dalla forma della matrice che l'autospazio corrispondente è $\operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   ii. $\lambda = 1$. Dobbiamo considerare il nucleo di $A_1 - \operatorname{Id} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il nucleo di tale matrice ha dimensione 1 (in quanto il rango è chiaramente 2), ed è definito dalle equazioni

$$\begin{cases} -4x + 5y + 8z = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

   Siccome sappiamo a priori che tale sistema definisce un sottospazio di dimensione 1, è facile verificare che una base di questo spazio di soluzioni è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

iii. $\lambda = 3$. Similmente a prima, dobbiamo trovare una base per il nucleo di $A_1 - 3\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifica facilmente che una tale base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Abbiamo visto al punto (a) che gli autovalori di A_a sono tutti reali. Se sono anche tutti distinti, allora sappiamo dalla teoria che A_a è diagonalizzabile, quindi dobbiamo solo considerare i casi in cui alcuni autovalori coincidono. Si tratta quindi di considerare i casi $-3 = a, -3 = 3a, a = 3a$, ovvero $a = -3, a = -1, a = 0$. In ognuno di questi casi dobbiamo solo controllare l'autospazio relativo all'autovalore doppio, che è -3 nei primi due casi e 0 nel terzo.

i. $a = -3$, autovalore -3. La molteplicità algebrica dell'autovalore è 2. Per determinare la sua molteplicità geometrica, dobbiamo calcolare la dimensione del nucleo di $A_{-3} + 3\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$. Tale nucleo ha dimensione 1, perché la seconda e terza colonna non sono proporzionali. Concludiamo che la molteplicità algebrica di -3 è strettamente maggiore della sua molteplicità geometrica, e quindi che A_{-3} non è diagonalizzabile.

ii. $a = -1$, autovalore -3. Dobbiamo considerare il nucleo di $A_{-1}+3\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha chiaramente dimensione 2 (il rango è 1). La molteplicità geometrica dell'autovalore -3 è quindi pari alla molteplicità algebrica, e la matrice A_{-1} è diagonalizzabile.

iii. $a = 0$, autovalore 0. È sufficiente calcolare il nucleo di A_0, cioè $\ker \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tale nucleo ha dimensione 1 (il rango è 2), e quindi A_0 non è diagonalizzabile.

Concludendo, i valori di a cercati sono 0 e -3.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

In $\mathbb{R}^n$ col prodotto canonico $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e con base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, sia dato l'iperpiano $H = \{(x_1, \dots, x_n) : \ x_1 + \cdots + x_n = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi(x, u) = 0\}$, dove $u = e_1 + \cdots + e_n$. Quindi, se $U = \mathrm{Span}(u)$, allora $U = H^\perp$. Siano poi $\pi_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale su H e $\pi_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale su U.

1. Per $n = 2$ si scrivano le matrici $[\pi_H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $[\pi_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ di π_H, π_U rispetto alla base canonica.
2. Per n qualunque, si scriva la proiezione ortogonale $\pi_U(e_i)$ di ogni vettore della base canonica su U e la matrice $[\pi_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
3. Osservando che (per definizione di proiezione ortogonale) per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha $v = \pi_H(v) + \pi_U(v)$, dedurre la matrice $[\pi_H]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
4. Dimostrare che un endomorfismo simmetrico f di $\mathbb{R}^n$ che soddisfi $f^2 = f$ è necessariamente la proiezione ortogonale sul sottospazio $W = \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Soluzione. Il primo punto è chiaramente incluso nei successivi, quindi trattiamo direttamente il caso generale.

2 e 3. Si tratta di scrivere il vettore e_i come la somma di un multiplo λu di u e di un vettore $w_i \in H$. Sia $g(w) = \varphi(w, u)$ la somma delle coordinate del vettore w; si osservi che g è un funzionale lineare. Dal momento che $g(e_i) = 1$, $g(u) = n$, e $g(w_i) = 0$ per definizione di H, l'uguaglianza $e_i = \lambda u + w_i$ implica $1 = g(e_i) = g(\lambda u + w_i) = \lambda g(u) + g(w_i) = n\lambda$, ovvero

$\lambda = \frac{1}{n}$, e per differenza si ottiene $w_i = e_i - \frac{1}{n}u$. Esplicitamente,

$$e_i = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/n\\-1/n\\\vdots\\(n-1)/n\\\vdots\\-1/n\end{pmatrix} = \pi_U(e_i) + \pi_H(e_i),$$

dove l'unico coefficiente $(n-1)/n$ è in corrispondenza della i-esima coordinata. Ne segue che la matrice di π_U in base canonica (che è la matrice che ha per i-esima colonna le coordinate di $\pi_U(e_i)$ in base canonica) è

$$[\pi_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Per differenza, la matrice di $\pi_H = \mathrm{Id} - \pi_U$ è quindi

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1\end{pmatrix}.$$

4. Il teorema spettrale implica che f è diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Sia M la matrice di f in base $\mathcal{B}'$: è una matrice diagonale, con coefficienti lungo la diagonale uguali agli autovalori $\mu_1, \ldots, \mu_n$ di f. L'ipotesi $f^2 = f$ implica $M^2 = M$ e quindi (trattandosi di matrici diagonali) $\mu_i^2 = \mu_i$, ovvero ogni μ_i è uguale a 0 o a 1. A meno di riordinare gli elementi della base $\mathcal{B}'$, la matrice M è quindi la matrice diagonale con coefficienti diagonali $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Supponiamo che compaiano r coefficienti uguali ad 1. Chiaramente lo span delle colonne di M è lo span dei primi r vettori di base. Dal momento che M è scritta in base $\mathcal{B}'$, questo vuol dire che l'immagine W di f è lo span dei primi r vettori della base $\mathcal{B}'$. D'altro canto, i vettori $v_{r+1}, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, appartengono all'ortogonale di W (in quanto $v_1, \ldots, v_n$ è una base ortogonale), e il loro numero è $n - r = n - \dim W = \dim W^\perp$, dove si è usato il fatto che il prodotto scalare canonico è definito positivo. Ne segue che $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ è una base di $W^\perp$.

   Sia ora w un qualsiasi vettore in $\mathbb{R}^n$, e scriviamo $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Si osservi che $w_1 := \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$ appartiene a $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_r) = W$ e che $w_2 := \lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ appartiene a $\mathrm{Span}(v_{r+1}, \ldots, v_n) = W^\perp$. La decomposizione $w = w_1 + w_2$ è dunque la decomposizione secondo la somma diretta $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$. In particolare, w_1 è la proiezione ortogonale di w lungo W. Si ottiene infine

$$f(w) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = w_1,$$

   dove si è usato il fatto che $f(v_i) = v_i$ per $i = 1, \ldots, r$ (si tratta degli autovettori relativi all'autovalore 1) e $f(v_i) = 0$ per $i = r+1, \ldots, n$ (autovalori relativi all'autovalore 0). Concludiamo che in effetti f manda ogni vettore w nella sua proiezione ortogonale su W, come voluto.

4.8 Compito del 13/09/2021

Test.

1. Consideriamo la seguente matrice A_t dipendente da un parametro reale t:

$$A_t = \begin{pmatrix} -3t+4 & 3t-3 & 0 \\ -4t+4 & 4t-3 & 0 \\ -3t+3 & 3t-3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Per quali valori di t la matrice A_t **non** è invertibile? ....

   (b) Per i valori di t per cui A_t è invertibile, determinare la matrice $t \cdot A_t^{-1}$:

   Soluzione.

   (a) Per determinare se A_t sia invertibile è sufficiente calcolare il suo determinante. Sviluppando con Laplace rispetto all'ultima colonna si ottiene subito

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} -3t+4 & 3t-3 \\ -4t+4 & 4t-3 \end{pmatrix};$$

   sommando ora la prima colonna alla seconda (il che, come noto, non altera il determinante) troviamo

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} -3t+4 & 1 \\ -4t+4 & 1 \end{pmatrix} = (-3t+4) - (-4t+4) = t.$$

   Si ha perciò $\det(A_t) \neq 0$ se e solo se $t \neq 0$: questi sono i valori per cui A_t è invertibile, e quindi l'unico valore per cui A_t non è invertibile è $t = 0$.

   (b) Possiamo utilizzare l'algoritmo visto durante il corso anche per matrici con un parametro. Consideriamo quindi la sequenza di mosse per riga

$$\begin{pmatrix} -3t+4 & 3t-3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4t+4 & 4t-3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3t+3 & 3t-3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-[1]} \begin{pmatrix} -3t+4 & 3t-3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-3[2]} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]/t} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1/t & 1/t & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+3[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4-3/t & -3+3/t & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1/t & 1/t & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]+[1],[3]+[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4-3/t & -3+3/t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-4/t & -3+4/t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-3/t & -3+3/t & 1 \end{pmatrix}$$

   Abbiamo ottenuto $A_t^{-1} = \begin{pmatrix} 4-3/t & -3+3/t & 0 \\ 4-4/t & -3+4/t & 0 \\ 3-3/t & -3+3/t & 1 \end{pmatrix}$, da cui la risposta alla domanda è

$$tA_t^{-1} = \begin{pmatrix} 4t-3 & -3t+3 & 0 \\ 4t-4 & -3t+4 & 0 \\ 3t-3 & -3t+3 & t \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ munito del prodotto scalare standard e il suo sottospazio vettoriale W definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base di W che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard:

(b) Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$:

(c) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W:

Soluzione.

(a) Innanzitutto troviamo una base di W, non necessariamente ortogonale. Possiamo usare le equazioni del testo per esprimere le variabili x_3, x_4, x_5 in funzione di x_1, x_2: più precisamente, facendo la differenza delle prime due equazioni otteniamo

$$x_4 = -x_2,$$

dalla terza abbiamo

$$x_3 = -3x_1 - 2x_2$$

e sostituendo nella seconda

$$x_5 = -x_1 - x_3 = -x_1 - (-3x_1 - 2x_2) = 2x_1 + 2x_2.$$

È ora immediato trovare la base $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa base non è ortogonale; per renderla tale, effettuiamo un passo dell'algoritmo di Gram-Schmidt, sostituendo quindi v_2 con

$$v_2' := v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = v_2 - \frac{10}{10} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una possibile risposta è quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) La condizione di essere ortogonale all'intero sottospazio W è equivalente alla condizione di essere ortogonale a dei generatori (in particolare, ad una base) di W. Imponendo questa condizione con i vettori del punto precedente troviamo allora le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

In effetti, la prima equazione esprime la condizione $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 0$, mentre la seconda è equivalente a $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$.

(c) Dal momento che la base $\{v_1, v_2\}$ trovata sopra è ortogonale, è sufficiente calcolare

$$\frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2.$$

Si ha $\langle v_1, v_1\rangle = 10$, $\langle v_2, v_2\rangle = 4$, $\langle v, v_1\rangle = 10$ e $\langle v, v_2\rangle = 16$, da cui la proiezione ortogonale di v su W risulta

$$w := v_1 + 4v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nota. Per verificare il calcolo si può procedere come segue. La differenza $v - w$ è data da $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$, e si può controllare facilmente che questo vettore soddisfa le equazioni per $W^\perp$ trovate al punto precedente.

3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare l'autovalore di A di molteplicità algebrica 1 e un corrispondente autovettore (a coordinate intere).
Autovalore: ....
Autovettore:

(b) Determinare l'autovalore di B di molteplicità algebrica 1 e un corrispondente autovettore (a coordinate intere).
Autovalore: ....
Autovettore:

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$, costituita da vettori a coordinate intere, che diagonalizzi simultaneamente A e B? Se sì, determinare una base con tali proprietà; altrimenti spiegare brevemente perché non esiste.
☐ Una tale base esiste, ad esempio:
☐ Una tale base non esiste perché ....

Soluzione. Sfruttando opportuni sviluppi di Laplace è immediato calcolare i polinomi caratteristici di A e di B:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -8 & 8 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & -4 & t+3 \end{pmatrix} = (t-1)\det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = (t-1)^2(t+3),$$

$$\begin{aligned} p_B(t) &= \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 0 \\ 2 & t+3 & -4 \\ 2 & 2 & t-3 \end{pmatrix} = (t+1)\det \begin{pmatrix} t+3 & -4 \\ 2 & t-3 \end{pmatrix} \\ &= (t+1)((t+3)(t-3)+8) = (t+1)(t^2-1) = (t+1)^2(t-1). \end{aligned}$$

Gli autovalori di A e di B, elencati con molteplicità, sono quindi $1, 1, -3$ e $1, -1, -1$.

(a) e (b) Nei due casi si tratta semplicemente di determinare il nucleo di $M - \lambda\,\mathrm{Id}$, dove $M = A$ o B e $\lambda = -3$ o 1 rispettivamente. Otteniamo

$$\ker(A + 3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(B - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove nei due casi si è osservato rispettivamente che l'ultima colonna è (-2) volte la prima, e che la seconda e terza colonna hanno somma nulla.

(c) Un calcolo diretto mostra che

$$AB = BA = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix},$$

ovvero che A e B commutano. In particolare, ognuna delle due preserva gli autospazi dell'altra. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i vettori trovati sopra.

Siccome v_2 è un autovettore di B relativo all'autovalore di molteplicità algebrica 1 (cioè $\lambda = 1$), il vettore Av_2 è ancora un elemento dell'autospazio relativo all'autovalore 1, e quindi è un multiplo di v_2 stesso. Ne segue che v_2 è un autovettore anche per A. Similmente, v_1 è anche un autovettore di B. Inoltre, siccome v_1, v_2 non sono proporzionali, v_2 non appartiene all'autospazio di A relativo all'autovalore -3, e quindi per esclusione deve essere un autovettore di autovalore 1: si ha $Av_2 = v_2$, come d'altro canto è immediato verificare direttamente. Simmetricamente, si ha $Bv_1 = -v_1$. Per completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi simultaneamente A e B bisogna trovare, se esiste, un vettore v_3 che:

i. insieme a v_2 formi una base dell'autospazio di A relativo all'autovalore 1;
ii. insieme a v_1 formi una base dell'autospazio di B relativo all'autovalore -1.

In particolare, v_3 deve risolvere le equazioni $Av_3 = v_3$ e $Bv_3 = -v_3$, cioè v_3 deve appartenere al nucleo di $A - \mathrm{Id}$ e di $B + \mathrm{Id}$. Calcoliamo allora

$$\ker(A - \mathrm{Id}) \cap \ker(B + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cap \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Questa intersezione è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0, \end{cases}$$

che è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 generato dal vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dal momento che v_3 è linearmente indipendente da v_2 (in quanto ad esso non proporzionale), la coppia $\{v_3, v_2\}$ costituisce una base dell'autospazio di A relativo all'autovalore 1, e similmente $\{v_3, v_1\}$ è una base dell'autospazio di B relativo all'autovalore -1. In particolare abbiamo verificato che A, B sono separatamente diagonalizzabili, e siccome commutano sono anche simultaneamente diagonalizzabili. Inoltre, siccome gli autospazi di B relativi ad autovalori diversi sono in somma diretta otteniamo

$$\mathbb{R}^3 = V_{-1} \oplus V_1 = \mathrm{Span}(v_1, v_3) \oplus \mathrm{Span}(v_2),$$

da cui si vede che v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$. Siccome tutti i vettori di questa base sono autovettori sia di A che di B, essi costituiscono una base che diagonalizza simultaneamente A e B.

4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 2/15 & -11/15 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 14/15 & -2/15 & -1/3 \end{pmatrix}$.

   Si sa che T è una rotazione.

   (a) Trovare un vettore a coefficienti interi che generi l'asse fisso di T:

   (b) Calcolare il coseno dell'angolo della rotazione T^2:

   (c) Sia ora R la rotazione la cui matrice in base canonica è $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore a coefficienti interi che generi l'asse fisso della rotazione $R^{-1}TR$:

   Soluzione.

   (a) Come ben noto si tratta semplicemente di trovare un autovettore di autovalore 1. Determiniamo perciò

$$\ker(T - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -13/15 & -11/15 & 10/15 \\ -5/15 & -25/15 & -10/15 \\ 14/15 & -2/15 & -20/15 \end{pmatrix}.$$

   Moltiplicando per 15 (il che non cambia il nucleo) dobbiamo perciò risolvere il sistema

$$\begin{cases} -13x - 11y + 10z = 0 \\ -5x - 25y - 10z = 0 \\ 14x - 2y - 20z = 0. \end{cases}$$

   Sommando la prima equazione alla seconda e due volte alla terza otteniamo

$$\begin{cases} -13x - 11y + 10z = 0 \\ -18x - 36y = 0 \\ -12x - 24y = 0. \end{cases}$$

   A questo punto è chiaro che (come previsto dalla teoria) l'ultima equazione è ridondante, mentre la seconda fornisce $x = -2y$. Sostituendo nella prima abbiamo poi $15y+10z = 0$, ovvero $z = -3/2y$. Prendendo $y = -2$ in modo che il risultato abbia tutte coordinate intere troviamo allora il vettore fisso $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (b) Detto ϑ l'angolo della rotazione T, l'angolo di T^2 è chiaramente 2ϑ. Ricordando che $1 + 2\cos\vartheta = \mathrm{tr}(T) = -13/15$, da cui $\cos\vartheta = -14/15$, si ottiene la risposta

$$\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1 = 2 \cdot \frac{196}{225} - 1 = \frac{167}{225}.$$

   (c) Un vettore w è lasciato fisso dalla rotazione $R^{-1}TR$ se e solo se $R^{-1}TRw = w$, ovvero se e solo se $T(Rw) = Rw$, cioè se e solo se $Rw = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ (e dove v è il vettore trovato al punto 1, che genera l'asse fisso di T). I vettori w possibili sono quindi quelli della forma $w = \lambda R^{-1}v$. Usando il fatto che $R^{-1} = {}^tR$ in quanto R è una rotazione otteniamo allora

$$w = \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo $\lambda = 3$ per avere un risultato a coordinate intere, un vettore con le proprietà volute è $\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali.

1. Dimostrare che esiste una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ che diagonalizza ${}^tAA$ e che tutti gli autovalori di questa matrice sono reali e non-negativi.

   Ordiniamo gli autovalori di ${}^tAA$ come $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Riordiniamo inoltre anche la base v_i in modo che ${}^tAAv_i = \lambda_i v_i$.

2. Sia r il numero dei λ_i che sono strettamente positivi. Dimostrare che $\text{rango}(A) = r$.

3. Dimostrare che $Av_1, \dots, Av_r$ è una base ortogonale dello span delle colonne di A.

4. Poniamo $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$. Dimostrare che i vettori $u_1 := \frac{1}{\sigma_1}Av_1, \dots, u_r := \frac{1}{\sigma_r}Av_r$ sono fra loro ortogonali e di norma 1, e quindi possono essere completati ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$.

5. ($\star$) Dimostrare che esistono due matrici ortogonali U e V, la prima $m \times m$ e la seconda $n \times n$, tali che $A = U \cdot S \cdot {}^tV$, dove S è la matrice $m \times n$ con coefficienti

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ \sigma_i, \text{ se } i = j \leq r \\ 0, \text{ se } i = j > r. \end{cases}$$

   Esempio. Per $m = 4, n = 3$ e $r = 2$ si ha $S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Diremo che una matrice D è una *diagonale ordinata* se $D_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e se i suoi coefficienti diagonali rispettano $D_{11} \geq D_{22} \geq \cdots \geq D_{nn} \geq 0$. Supponiamo che $A = U_1 S_1 {}^tV_1$, dove U_1, V_1 sono ortogonali e rispettivamente $m \times m$ e $n \times n$, e S_1 è una matrice $m \times n$ diagonale ordinata. Dimostrare che allora $S = S_1$.

Soluzione.

1. La matrice $B := {}^tAA$ è simmetrica, in quanto ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA = B$. L'esistenza di una base diagonalizzante ortonormale segue quindi dal teorema spettrale. In quanto al segno degli autovalori, sia λ un autovalore di B e v un corrispondente autovettore. Denotando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard e con $|\cdot|$ la corrispondente norma otteniamo

$$\lambda |v|^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Bv \rangle = \langle v, {}^tAAv \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2.$$

   Siccome $|v|^2 > 0$ (un autovettore è non nullo per definizione, e il prodotto scalare standard è definito positivo) e $|Av|^2 \geq 0$ otteniamo $\lambda \geq 0$ come voluto.

2. Osserviamo che il nucleo di A coincide con il nucleo di B. In effetti se $Av = 0$ allora $Bv = {}^tA(Av) = {}^tA(0) = 0$, e viceversa se $Bv = 0$ allora come sopra otteniamo

$$0 = \langle v, Bv \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2,$$

   cioè $Av = 0$. Siccome B è diagonalizzabile, la dimensione del suo nucleo (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore 0) è uguale al numero dei suoi autovalori nulli (cioè la molteplicità algebrica dell'autovalore 0), ovvero $n - r$. Per il teorema fondamentale dell'algebra lineare otteniamo

$$\text{rango}(A) = n - \dim \ker A = n - \dim \ker B = n - (n - r) = r.$$

3. I vettori $Av_1, \dots, Av_r$ sono non nulli in quanto
$$|Av_i|^2 = \langle Av_i, Av_i \rangle = \langle v_i, {}^tAAv_i \rangle = \langle v_i, Bv_i \rangle = \langle v_i, \lambda_i v_i \rangle = \lambda_i |v_i|^2 \neq 0,$$
dove nell'ultimo passaggio si è usato $\lambda_i \neq 0$ per $i \leq r$. Per un calcolo simile sono anche ortogonali: per $i \neq j$ si ha
$$\langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, {}^tAAv_j \rangle = \langle v_i, Bv_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 0$$
dal momento che i v_i formano una base ortonormale (e quindi in particolare $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$). Si è visto ad esercitazione che vettori non nulli e a due a due ortogonali rispetto ad un prodotto scalare definito positivo sono linearmente indipendenti. Siccome il loro numero è r, che come stabilito sopra è la dimensione dello span delle colonne di A, oltre ad essere linearmente indipendenti i vettori $Av_1, \dots, Av_r$ sono anche una base di questo spazio.

   Per uso al punto 5, osserviamo anche che $Av_i = 0$ per $i > r$: lo stesso calcolo di prima infatti fornisce $|Av_i|^2 = \lambda_i |v_i|^2$, ma adesso $\lambda_i = 0$.

4. Si è già visto che i vettori dati sono ortogonali. Verifichiamo che ciascuno di essi sia di norma 1: abbiamo già osservato al punto precedente che $|Av_i|^2 = \lambda_i$, per cui $|u_i|^2 = |Av_i|^2/\sigma_i^2 = \lambda_i/\lambda_i = 1$.

5. Sia U la matrice $m \times m$ che ha per colonne gli elementi u_i ottenuti al punto precedente (che sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$) e sia V la matrice $n \times n$ che ha per colonne i vettori v_i (che sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$). Il fatto che le colonne di queste matrici siano basi ortonormali garantisce che esse siano matrici ortogonali. Calcoliamo ora
$$\begin{aligned} US &= \begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & \cdots & | & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1 \,| & \cdots & | & \sigma_r u_r & | & 0 & | & \cdots & | & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Av_1 \,| & \cdots & | & Av_r & | & 0 & | & \cdots & | & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Av_1 \,| & \cdots & | & Av_r & | & Av_{r+1} & | & \cdots & | & Av_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
dove nell'ultimo passaggio si è usata l'osservazione fatta al punto 3 che $Av_i = 0$ per $i > r$. Possiamo chiaramente riscrivere l'ultima matrice trovata qui sopra nella forma AV (in effetti, le colonne della matrice qui sopra sono semplicemente ottenute applicando A alle colonne di V), per cui abbiamo ottenuto
$$US = AV.$$
Moltiplicando entrambi i membri per $V^{-1} = {}^tV$ sulla destra otteniamo $US^tV = AVV^{-1} = A$, come voluto.

6. Osserviamo che
$${}^tAA = {}^t(US^tV)US^tV = V^tS^tUUS^tV = V^tSS^tV,$$
dove si è usato il fatto che ${}^tUU$ è la matrice identità in quanto U è ortogonale. Siccome anche V è ortogonale, e quindi ${}^tV = V^{-1}$, otteniamo che ${}^tAA$ è simile ad ${}^tSS$. Ma ${}^tSS$ è per costruzione la matrice diagonale $n \times n$ con coefficienti diagonali $\sigma_1^2 = \lambda_1, \dots, \sigma_n^2 = \lambda_n$. Allo stesso modo,
$${}^tAA = {}^t(U_1S_1{}^tV_1)U_1S_1V_1 = V_1{}^tS_1{}^tU_1U_1S_1{}^tV_1 = V_1{}^tS_1S_1{}^tV_1 = V_1{}^t(S_1)^{2t}V_1 = V_1{}^tS_1S_1(V_1)^{-1},$$
e quindi ${}^tAA$ è simile anche alla matrice diagonale ${}^tS_1S_1$. Ne segue che sulla diagonale di ${}^tS_1S_1$ ci devono essere gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di ${}^tAA$. Siccome S_1 è ordinata, questi autovalori compaiono anche nello stesso ordine con cui compaiono in ${}^tSS$. Detti allora $\sigma_1', \dots, \sigma_r'$ i coefficienti diagonali non nulli di S_1 otteniamo $(\sigma_i')^2 = \sigma_i^2$. Siccome per ipotesi i coefficienti σ_i' sono positivi otteniamo $\sigma_i' = \sigma_i$ come voluto.

4.9 Compito dell'8/11/2021 (appello straordinario)

Test.

1. (a) Definire, dando la matrice rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$, un'applicazione lineare $L : \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ che sia di rango 2 e tale che $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ si decomponga come somma diretta di $\operatorname{Imm} L$ e $\ker L$.

   (b) Sia $f : \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ un'applicazione lineare che rispetta $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3} = \operatorname{Imm} f \oplus \ker f$. È necessariamente vero che si ha anche $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3} = \operatorname{Imm} f^5 \oplus \ker f^5$? ☐ Vero ☐ Falso

   (c) Si scriva la matrice dell'applicazione lineare L costruita al punto (a) rispetto alla base $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3$.

Soluzione.

(a) Si può ad esempio prendere come L l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, dove i coefficienti non espressamente indicati sono pari a 0. Il rango di tale applicazione lineare è pari a 2 (in quanto la matrice ha questo rango, come si vede dal fatto che è già ridotta a scalini). Per verificare la proprietà $\ker L \oplus \operatorname{Imm} L = \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ è sufficiente notare che $\ker L = \operatorname{Span}(1, x)$ e $\operatorname{Imm} L = \operatorname{Span}(x^2, x^3)$.

(b) Vero. In effetti, possiamo dimostrare per induzione che $\ker f^n = \ker f$ e $\operatorname{Imm} f^n = \operatorname{Imm} f$, da cui – usando l'ipotesi $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3} = \operatorname{Imm} f \oplus \ker f$ – segue ovviamente $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3} = \operatorname{Imm} f^n \oplus \ker f^n$ per ogni n, e in particolare per $n = 5$.

Per l'affermazione riguardante il nucleo osserviamo che si ha $\ker f^{n+1} \supseteq \ker f^n$, ma d'altro canto se $f^{n+1}(v) = 0$ allora $f^n(v)$ è un vettore che sta in $\operatorname{Imm} f^n$ e anche in $\ker f \subseteq \ker f^n$, quindi (per l'ipotesi induttiva $\operatorname{Imm} f^n \oplus \ker f^n = \{0\}$) si ha $f^n(v) = 0$, cioè $\ker f^{n+1} \subseteq \ker f^n$. Dai due contenimenti otteniamo come voluto che $\ker f^{n+1} = \ker f^n$. Da questo segue che $\dim \operatorname{Imm} f^{n+1} = 4 - \dim \ker f^{n+1} = 4 - \dim \ker f^n = \dim \operatorname{Imm} f^n$, e siccome $\operatorname{Imm}(f^{n+1}) \subseteq \operatorname{Imm} f^n$ questi due sottospazi devono essere uguali, come voluto.

(c) Le immagini dei vettori di base tramite L sono $0, x^2, x^2 + x^3, x^3$, che nella base data hanno coordinate

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

per l'unico caso non banale, si osservi che $x^2 = (x^2 + x^3) + (-1)(x^3)$. Ne segue che la matrice dell'applicazione lineare L costruita al punto (a) nella base data è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ (con coordinate x, y, z, t) il sottospazio V_a dato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ ay + z + t = 0 \end{cases}$$

e il sottospazio W_a generato dai vettori $\begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, $\dim(V_a \cap W_a)$.

Risposta:

Soluzione. Il sottospazio W_a ha dimensione al massimo 2 (in quanto è generato da 2 vettori), e ha dimensione 1 se e solo se i due generatori dati sono proporzionali. Confrontando le seconde coordinate, si vede che questo accade se e solo se $a = 0$. Assumendo $a \neq 0$, per trovare equazioni cartesiane di W_a possiamo procedere all'eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & x \\ 0 & a & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & a & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-(a+1)[1],[3]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & y \\ 1 & -a & z-x \\ 0 & a & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a}[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-x \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-y[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & z-x+y \\ 0 & 1 & t-y \end{pmatrix}.$$

Otteniamo allora che le equazioni di W_a sono indipendenti da $a \neq 0$ e sono date da $z+y = x$, $t - y = 0$. Per concludere,

(a) quando $a = 0$ il sottospazio W_a ha dimensione 1, e quindi si ha $V_a \cap W_a = \{0\}$ oppure W_a. Per distinguere fra questi due casi basta verificare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartenga a V_0, cosa che non succede, per cui l'intersezione è banale (di dimensione 0).

(b) quando $a \neq 0$ l'intersezione $W_a \cap V_a$ è descritta dal sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ ay + z + t = 0 \\ z + y - x = 0 \\ t - y = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice associata al sistema e procediamo ad una riduzione di Gauss per righe (che, come noto, non cambia l'insieme delle soluzioni):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[1]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\leftrightarrow[4],\frac{1}{2}[3]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[4]+a[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-[3]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}.$$

Tale matrice definisce quindi un sistema di rango massimo a meno che $a = -1$. Pertanto, per $a \neq -1$ l'intersezione $V_a \cap W_a$ è solamente $\{0\}$, mentre per $a = -1$ l'intersezione è il nucleo di una matrice di rango 3, e quindi ha dimensione 1. Anche se non è richiesto, è facile trovare una base dell'intersezione, che risulta data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(b) Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sia T^* il suo aggiunto rispetto a φ. Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: ....

(c) Sia ora ψ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è M^2. Determinare la segnatura di ψ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

Soluzione.

(a) Calcoliamo $\det(M)$. Ad esempio usando la regola di Sarrus, troviamo $\det(M) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 15$. Ricordando che gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali, ne segue che nessun autovalore di M è nullo e che il numero di quelli negativi è 0 o 2 (in quanto il prodotto è positivo). D'altro canto, la restrizione di φ al sottospazio generato da e_1, e_2 ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, di determinante -3, e quindi ha segnatura $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$. Ne segue che φ ha n_- strettamente positivo, e quindi M ha almeno un autovalore negativo. Deduciamo che M ha esattamente due autovalori negativi, e quindi – dai risultati noti sulla relazione fra segno degli autovalori e segnatura del prodotto scalare – che la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (1, 2, 0)$.

(b) Dalla definizione segue

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Possiamo ora calcolare questo prodotto scalare usando la matrice M ed ottenere

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 3, 5) M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 3, 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 6 + 15 = 22.$$

(c) Gli autovalori di M^2 sono i quadrati degli autovalori di M, dunque sono tutti strettamente positivi. Ne segue che ψ è definito positivo, ovvero che la sua segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (3, 0, 0)$.

4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 6 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -20 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

È noto che A e B commutano e hanno autovalori rispettivamente $-1, 2$ (con opportune molteplicità) e $-1, 1$ (con opportune molteplicità).

(a) Determinare se A e B sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$. ☐ Nessuna delle due è diagonalizzabile. ☐ A è diagonalizzabile ma B no ☐ B è diagonalizzabile ma A no ☐ Entrambe sono diagonalizzabili.

(b) A e B sono simultaneamente diagonalizzabili su $\mathbb{R}$? Se sì, trovare una base in cui siano entrambe diagonali. Altrimenti, spiegare brevemente perché.

☐ Sono simultaneamente diagonalizzabili, ad esempio nella base

☐ Non sono simultaneamente diagonalizzabili perché ....

....

Soluzione.

(a) Determiniamo le molteplicità geometriche dei vari autovalori.

i. Matrice A, autovalore 2. Si tratta di determinare il nucleo

$$\ker(A - 2\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

È evidente che le due equazioni non banali nel sistema rappresentato da questa matrice sono proporzionali, e quindi che il nucleo in questione ha dimensione 2. Ne segue che $m_{geo}(2) = 2$, e quindi $m_{alg}(2) \geq 2$.

ii. Matrice A, autovalore -1. Siccome $m_{alg}(-1) + m_{alg}(2) = 3$ e $m_{alg}(2) \geq 2$, otteniamo che $m_{alg}(-1) = 1$, e quindi anche la corrispondente molteplicità geometrica deve essere 1. La stessa deduzione può essere ottenuta tramite un calcolo diretto:

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -12 & -3 & 6 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 (le ultime due colonne sono proporzionali), e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, come avevamo già scoperto.

iii. Matrice B, autovalore 1. Calcoliamo

$$\ker(B - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni non banali sono proporzionali, quindi – ragionando come sopra – otteniamo che le molteplicità geometrica ed algebrica coincidono e sono uguali a 2.

iv. Matrice B, autovalore -1. Anche in questo caso il calcolo è superfluo, ma si trova facilmente che l'autospazio relativo a -1 corrisponde al nucleo della matrice

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -20 & -4 & 10 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 (prima e terza colonna sono proporzionali).

Concludiamo quindi che le molteplicità algebriche coincidono con le molteplicità geometriche per ogni autovalore, e quindi sia A che B sono diagonalizzabili.

Nota. Per quanto non necessario, le molteplicità algebriche si possono ottenere prima di calcolare le molteplicità geometriche, semplicemente confrontando le informazioni date nel testo con le tracce di A e B. Per esempio, nel caso della matrice A, supponiamo che l'autovalore 2 abbia molteplicità algebrica m_2 e l'autovalore -1 abbia molteplicità m_{-1}. Allora $m_2 \cdot 2 + m_{-1} \cdot (-1) = \mathrm{tr}(A) = 3$, e $m_2 + m_{-1} = 3$. Da questo segue subito $m_2 = 2, m_{-1} = 1$, e una strategia simile si può applicare anche alla matrice B.

(b) Come specificato nel testo, A e B commutano, e abbiamo verificato al punto precedente che sono separatamente diagonalizzabili. Sappiamo allora dalla teoria che sono *simultaneamente* diagonalizzabili; per trovare una base che realizza tale diagonalizzazione simultanea, è sufficiente considerare le intersezioni dei vari autospazi (in effetti, gli elementi di una base che diagonalizzi A sono autovettori per A, ovvero elementi dei suoi autospazi, e gli elementi di una base che diagonalizzi B sono autovettori per B. Autovettori simultanei per A e B devono quindi trovarsi nell'intersezione dei rispettivi autospazi). Denotando con V_{-1}, V_2 gli autospazi di A e con W_{-1}, W_1 gli autospazi di B, e tenendo conto che abbiamo trovato equazioni per tali autospazi al punto precedente, si trova facilmente che

$$V_2 \cap W_1 = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 \cap W_{-1} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, V_{-1} \cap W_1 = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mostriamo ad esempio come trovare l'ultimo vettore. Al punto precedente abbiamo visto che V_{-1} è il nucleo della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -12 & -3 & 6 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, mentre W_1 è il nucleo di $\begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. La loro intersezione è quindi definita dal sistema

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -12x - 3y + 6z = 0 \\ -10x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $x = 0$ nella seconda e terza equazione troviamo due condizioni proporzionali a $y = 2z$, per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, generato da un qualsiasi vettore con $x = 0$ e $y = 2z$, quale ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ scritto sopra.

I tre vettori sopra sono quindi una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza simultaneamente A e B (il fatto che siano una base può essere verificato direttamente, o in alternativa segue dall'osservazione che autospazi relativi ad autovalori diversi sono in somma diretta, applicata sia ad A che a B).

5. Si considerino la riflessione ortogonale $S_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al piano $\Pi_1 : \{x+2y+3z=0\}$ e la riflessione ortogonale $S_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al piano $\Pi_2 : \{z = y\}$.
   (a) Scrivere la matrice di S_1 in base canonica.
   (b) La composizione $S_2 \circ S_1$ è una rotazione. Rispetto a quale asse? Scrivere qui un vettore che lo genera:

Soluzione.

(a) Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vettore ortogonale a Π_1. Come noto si ha $S_1(x) = x - 2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$. Per determinare la matrice di S_1 in base canonica è quindi sufficiente applicare tale formula ai vettori della base canonica, e usare le coordinate trovate come colonne per formare la matrice di S_1. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

(b) Si noti che la retta $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è lasciata fissa sia da S_1 che da S_2, e quindi è fissata dalla rotazione $S_2 \circ S_1$. Si tratta quindi semplicemente di intersecare i piani Π_1, Π_2, il che è immediato visto che essi sono dati tramite equazioni. Si trova che l'intersezione (e quindi la retta fissa) è Span $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nota. In alternativa, sarebbe stato possibile anche scrivere la matrice di S_2 in base canonica, calcolare il prodotto delle matrici di S_2 ed S_1, e determinare un autovettore di autovalore 1 di tale matrice. Più precisamente, procedendo in tal modo si trova

$$[S_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [S_2 \circ S_1] = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \end{pmatrix},$$

$$[S_2 \circ S_1] - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1/7 & -2/7 & -3/7 \\ -3/7 & -13/7 & -2/7 \\ -2/7 & 3/7 & -13/7 \end{pmatrix}$$

e quindi (dopo aver moltiplicato tutto per 7, il che ovviamente non cambia il nucleo) ci si riconduce a risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ -3x - 13y - 2z = 0 \\ -2x + 3y - 13z = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione 3 volte dalla seconda e 2 dalla terza si trova

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ -7y + 7z = 0 \\ 7y - 7z = 0, \end{cases}$$

che non è altro che il sistema che definisce l'intersezione di Π_1 e Π_2.

4.10 Compito del 15/01/2022

Test.

1. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$: ....

Soluzione. Calcoliamo separatamente i determinanti di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda A si ha, sviluppando rispetto all'ultima riga,

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo la prima colonna dalla seconda (operazione che non cambia il determinante) e estraendo per linearità un fattore 4 dalla terza colonna si ottiene ora

$$\det(A) = -4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sottratto la terza colonna dalla prima e dalla seconda. A questo punto un calcolo diretto con la formula di Sarrus fornisce

$$\det(A) = -4\,(1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 9) = -4(3 + 12) = -48.$$

Per quanto riguarda B, che è diagonale a blocchi, abbiamo

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 8 \cdot 1 = 8.$$

Il determinante richiesto è allora $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} = -48/8 = -6$, dove si sono usati il teorema di Binet e il noto risultato $\det(B^{-1}) = \det(B)^{-1}$, valido per ogni matrice quadrata invertibile.

2. Sia ϕ il prodotto scalare di $V = \mathbb{R}^3$ che, in base canonica, ha matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare una base di V ortogonale rispetto a ϕ e formata da vettori a coefficienti interi.

(b) Determinare la segnatura di ϕ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(c) Dire se esiste, ed in tale caso determinare, un vettore di V isotropo rispetto a ϕ.
☐ Non esiste ☐ Esiste, ad esempio:

Soluzione.

(a) e (b) Procediamo ad un'eliminazione di Gauss simmetrica, tenendo traccia delle mosse fatte in una matrice ausiliaria. Partendo da

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iniziamo sommando la prima riga/colonna alla seconda e alla terza riga/colonna (nella matrice ausiliaria teniamo traccia di questa mossa operando soltando sulle colonne):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già ottenuto una matrice diagonale. Dalla matrice con cui teniamo traccia delle mosse vediamo allora che la base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale per ϕ. Usando la matrice diagonale che abbiamo ottenuto dall'eliminazione di Gauss vediamo invece che $\phi(v_1, v_1) = -1$ e $\phi(v_2, v_2) = \phi(v_3, v_3) = 1$. Ne segue anche che la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

(c) Dalla matrice M vediamo subito che il prodotto $\phi(e_2, e_2)$ è nullo, dove e_2 denota il secondo vettore della base canonica. Esistono quindi vettori isotropi per ϕ, quali ad esempio e_2. Anche e_3 ha la stessa proprietà.

3. Sia π il piano di $\mathbb{R}^3$ su cui giacciono i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Considerato il punto $S_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$, dipendente da un parametro reale k, rispondere alle seguenti domande:

(a) Scrivere il valore di k per cui S_k appartiene a π: ....

(b) Scrivere i valori di k per cui S_k dista $\sqrt{6}$ dal piano π: ....

Soluzione. Possiamo pensare π come il piano passante per P e parallelo al piano vettoriale W generato da $Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per trovare un'equazione di W possiamo ad esempio calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = z - 2y - x,$$

da cui otteniamo che W è descritto dall'equazione $-x-2y+z=0$. Il piano π è quindi descritto da $-x-2y+z=-x(P)-2y(P)+z(P)=-2$, come si può anche verificare a posteriori notando che le coordinate dei punti P, Q, R soddisfano tale equazione.

(a) Il punto S_k appartiene a π se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione appena trovata, ovvero se e solo se $-1-2\cdot 2+k=-2$. L'unico valore di k per cui S_k appartiene a π è quindi $k=3$.

(b) La retta passante per l'origine e perpendicolare al piano π (equivalentemente, a W) è generata dal vettore $v=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, le cui coordinate coincidono con i coefficienti dell'equazione che definisce W. La retta ad essa parallela e passante per S_k si può quindi scrivere in forma parametrica come $S_k+tv=\begin{pmatrix}1-t\\2-2t\\k+t\end{pmatrix}$. Tale retta interseca il piano π nel punto corrispondente all'unico valore di t per cui

$$-(1-t)-2(2-2t)+(k+t)=-2 \Leftrightarrow -3+6t+k=0 \Leftrightarrow t=\frac{k-3}{6}.$$

La distanza fra S_k e π è quindi data dal segmento tv, la cui lunghezza è $\left|\frac{k-3}{6}\right|\cdot\|v\|=\left|\frac{k-3}{6}\right|\cdot\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=\left|\frac{k-3}{6}\right|\cdot\sqrt{6}$. La distanza fra S_k e π è quindi uguale a $\sqrt{6}$ se e solo se $\left|\frac{k-3}{6}\right|=1$, cioè se e solo se $k=9$ o $k=-3$.

Nota. La distanza fra il punto S_k e il piano π può anche essere calcolata tramite la formula

$$d(S_k,\pi)=\frac{|-x(S_k)-2y(S_k)+z(S_k)+2|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{6}},$$

che conduce naturalmente allo stesso risultato di prima. Si noti che con la medesima formula si può anche trovare l'unico valore di k per cui la distanza è nulla, ovvero per cui S_k appartiene a π.

4. Consideriamo la seguente matrice, dipendente da un parametro $a\in\mathbb{R}$:

$$M_a=\begin{pmatrix}7&-2&a-4\\12&-3&3a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di M_a: ....

(b) Elencare i valori di a per i quali M_a risulta diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

(c) Sia $a=4$. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice M_4 sia triangolare superiore:

Soluzione.

(a) Si tratta di calcolare

$$\begin{aligned}\det(t\,\mathrm{Id}-M_a)&=\det\begin{pmatrix}t-7&2&-a+4\\-12&t+3&-3a\\0&0&t-1\end{pmatrix}=(t-1)\det\begin{pmatrix}t-7&2\\-12&t+3\end{pmatrix}\\&=(t-1)\left((t-7)(t+3)+24\right)=(t-1)(t^2-4t+3)=(t-1)^2(t-3),\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto all'ultima riga.

(b) La matrice M_a ha sempre autovalori $1,1,3$, indipendentemente da a. Il criterio sulle molteplicità algebriche e geometriche è certamente rispettato per l'autovalore 3, che è di molteplicità algebrica 1, quindi si tratta di verificare per quali valori di a l'autovalore 1 abbia molteplicità geometrica 2. Dobbiamo cioè calcolare

$$\dim\ker(M_a - \mathrm{Id}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 6 & -2 & a-4 \\ 12 & -4 & 3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale nucleo ha dimensione 2 se e solo se la matrice precedente ha rango 1, cioè se e solo se le prime due righe sono proporzionali. L'eventuale fattore di proporzionalità deve necessariamente essere 2, come si vede confrontando i coefficienti sulle prime due colonne, quindi il nucleo ha dimensione 2 se e solo se $3a = 2(a-4)$, cioè se e solo se $a = -8$. Per tale valore di a (e solo per esso) il criterio relativo alle molteplicità è soddisfatto, e quindi $a = -8$ è l'unico valore per cui M_a sia diagonalizzabile.

(c) È certamente sufficiente scegliere una base i cui primi due elementi siano autovettori di M_4 (di autovalori 1 e 3 rispettivamente): in tal caso, qualunque sia il terzo vettore di base, la matrice risulta della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star \\ 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$ e quindi triangolare superiore. Calcoliamo allora un autovettore per $\lambda = 1$ e uno per $\lambda = 3$, ovvero troviamo

$$\ker(M_4 - \mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 12 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\ker(M_4 - 3\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una possibile risposta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o qualsiasi altra base che contenga i primi due di questi vettori.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1.

1. Dire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ con immagine $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ e nucleo $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \right\}$.

2. Esibire, dandone la matrice rispetto alle basi canoniche, un'applicazione lineare surgettiva $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ con nucleo $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. Sia g l'applicazione lineare costruita al punto precedente. Si descriva, dandone la matrice rispetto alle basi canoniche, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $g \circ h$ sia l'identità di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

1. Non esiste. Per mostrarlo, notiamo dapprima che $\dim V = 2$ (in quanto span di due vettori non proporzionali) e $\dim W = 4$ (in quanto sottospazio definito da una singola equazione lineare non nulla in $\mathbb{R}^5$. Se esistesse un'applicazione f come nel testo, il teorema fondamentale delle applicazioni lineari fornirebbe
$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Imm}(f) = \dim V + \dim W = 2 + 4 = 6,$$
il che è evidentemente assurdo.

2. Consideriamo la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
L'applicazione lineare g rappresentata da M ha le caratteristiche volute: la sua immagine è data dallo span delle colonne di M, che è tutto $\mathbb{R}^3$ (la prima, terza e quarta colonna sono proprio i vettori della base canonica). D'altro canto, i vettori dati nel testo sono effettivamente nel nucleo, come si può verificare immediatamente calcolando
$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Questo dimostra che $\mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è *contenuto* nel nucleo di g. D'altro canto si deve avere uguaglianza, perché tale Span ha dimensione 2, e il nucleo di g ha dimensione (per la formula fondamentale)
$$\dim \ker g = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \mathrm{Imm}(g) = 5 - 3 = 2.$$
Nota. Per *costruire* la matrice M si può naturalmente procedere al contrario: la condizione che $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia nullo implica che le prime due colonne di M sono uguali. Dal momento che vogliamo che l'applicazione g sia surgettiva iniziamo a costruire la matrice M usando il primo vettore della base canonica come prima colonna. La seconda colonna è forzata. A questo punto, ci assicuriamo che le colonne di M contengano una base di $\mathbb{R}^3$ scegliendo come terza e quarta colonna gli altri vettori della base canonica, e infine determiniamo la quinta colonna in modo che $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia nullo.

3. Come al punto precedente, prima esibiamo una h con le proprietà volute e poi spieghiamo come è stata ottenuta. Sia h l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per verificare che h soddisfa la proprietà richiesta dal testo, $g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, è sufficiente verificare che le due applicazioni lineari $g \circ h$ e $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ abbiano la stessa matrice rispetto alla base canonica. La matrice della composizione $g \circ h$ è il prodotto $M \cdot N$. Si tratta quindi di calcolare

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e constatare che, in effetti, questa è la matrice identità, che rappresenta $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ in base canonica.

Per trovare la matrice N si può procedere come segue. L'applicazione lineare h è determinata dalle immagini dei vettori della base canonica e_1, e_2, e_3. Per rispettare la condizione del testo basta imporre che $h(e_1)$ sia un vettore che si invia su e_1 tramite g, e similmente per e_2, e_3. Data la nostra scelta di g è naturale prendere $h(e_1) = v_1$, $h(e_2) = v_3$, $h(e_3) = v_4$, dove $v_1, \ldots, v_5$ è la base canonica di $\mathbb{R}^5$. Questa scelta dà la matrice N considerata sopra.

Esercizio 2. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali. In questo esercizio le nozioni di ortogonalità e norma sono considerate rispetto al prodotto scalare standard.

1. Dimostrare che esiste una base ortonormale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ che diagonalizza ${}^tAA$ e che tutti gli autovalori di questa matrice sono reali e non-negativi.

   Ordiniamo gli autovalori di ${}^tAA$ come $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Riordiniamo inoltre anche la base v_i in modo che ${}^tAAv_i = \lambda_i v_i$.

2. Sia r il numero dei λ_i che sono strettamente positivi. Dimostrare che rango$(A) = r$.

3. Dimostrare che $Av_1, \ldots, Av_r$ è una base ortogonale dello span delle colonne di A.

4. Poniamo $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$. Dimostrare che i vettori $u_1 := \frac{1}{\sigma_1}Av_1, \ldots, u_r := \frac{1}{\sigma_r}Av_r$ sono fra loro ortogonali e di norma 1, e quindi possono essere completati ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$.

Soluzione.

1. La matrice $B := {}^tAA$ è simmetrica, in quanto ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = B$. L'esistenza di una base diagonalizzante ortonormale segue quindi dal teorema spettrale. In quanto al segno degli autovalori, sia λ un autovalore di B e v un corrispondente autovettore. Denotando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard e con $|\cdot|$ la corrispondente norma otteniamo

   $$\lambda|v|^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Bv \rangle = \langle v, {}^tAAv \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2.$$

   Siccome $|v|^2 > 0$ (un autovettore è non nullo per definizione, e il prodotto scalare standard è definito positivo) e $|Av|^2 \geq 0$ otteniamo $\lambda \geq 0$ come voluto.

2. Osserviamo che il nucleo di A coincide con il nucleo di B. In effetti se $Av = 0$ allora $Bv = {}^tA(Av) = {}^tA(0) = 0$, e viceversa se $Bv = 0$ allora come sopra otteniamo

   $$0 = \langle v, Bv \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2,$$

   cioè $Av = 0$. Siccome B è diagonalizzabile, la dimensione del suo nucleo (cioè la molteplicità geometrica dell'autovalore 0) è uguale al numero dei suoi autovalori nulli (cioè la molteplicità algebrica dell'autovalore 0), ovvero $n - r$. Per il teorema fondamentale dell'algebra lineare otteniamo

   $$\text{rango}(A) = n - \dim\ker A = n - \dim\ker B = n - (n - r) = r.$$

3. I vettori $Av_1, \ldots, Av_r$ sono non nulli in quanto

   $$|Av_i|^2 = \langle Av_i, Av_i \rangle = \langle v_i, {}^tAAv_i \rangle = \langle v_i, Bv_i \rangle = \langle v_i, \lambda_i v_i \rangle = \lambda_i |v_i|^2 \neq 0,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $\lambda_i \neq 0$ per $i \leq r$. Per un calcolo simile sono anche ortogonali: per $i \neq j$ si ha

$$\langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, {}^t AAv_j \rangle = \langle v_i, Bv_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

dal momento che i v_i formano una base ortonormale (e quindi in particolare $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$). Si è visto ad esercitazione che vettori non nulli e a due a due ortogonali rispetto ad un prodotto scalare definito positivo sono linearmente indipendenti. Siccome il loro numero è r, che come stabilito sopra è la dimensione dello span delle colonne di A, oltre ad essere linearmente indipendenti i vettori $Av_1, \ldots, Av_r$ sono anche una base di questo spazio.

4. Si è già visto che i vettori dati sono ortogonali. Verifichiamo che ciascuno di essi sia di norma 1: abbiamo già osservato al punto precedente che $|Av_i|^2 = \lambda_i$, per cui $|u_i|^2 = |Av_i|^2/\sigma_i^2 = \lambda_i/\lambda_i = 1$.

5 Anno accademico 2021-2022

5.1 Compitino del 04/12/2021

Test.

1. Sia $V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al massimo 2 e $V_3 = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ quello dei polinomi di grado al massimo 3. Siano $\mathcal{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ basi di questi spazi. Si scriva la matrice dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} f: & V_2 & \to & V_3 \\ & p(x) & \mapsto & (2x-3)p(x) \end{array}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}_2$ in partenza e $\mathcal{B}_3$ in arrivo:

Soluzione. Si tratta di calcolare $f(x^2), f(x)$ e $f(1)$, che sono dati da

$$f(x^2) = 2x^3 - 3x^2, f(x) = 2x^2 - 3x, f(1) = 2x - 3.$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}_3$, tali vettori hanno coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Questi vettori formano le colonne della matrice richiesta, che è quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. È noto che v_1, v_2, v_3 è una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Sia poi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare il cui nucleo è $\operatorname{Span} v_1$ e che soddisfa $f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3, f(v_3) = v_1 - v_2 + v_3$.

   (a) Scrivere la matrice di f dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica:

   (b) Scrivere la matrice dell'identità dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$:

   (c) Scrivere la matrice di f dalla base canonica alla base canonica:

   Soluzione.

   (a) Per determinare la matrice richiesta dobbiamo calcolare $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ ed esprimere tali vettori rispetto alla base canonica. Dalle ipotesi otteniamo

$$f(v_1) = 0, \quad f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = v_1 - v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica in arrivo è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) La matrice $[\mathrm{id}]^{\mathrm{can}}_{\mathcal{B}}$ coincide, come noto, con l'inversa della matrice $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathrm{can}}$. A sua volta, le colonne di tale matrice sono per definizione le coordinate dei vettori della base $\mathcal{B}$ in base canonica, informazione che otteniamo dal testo:

$$[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora utilizzare l'algoritmo visto a lezione per invertire tale matrice: partendo da
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
effettuiamo mosse di riga fino a ritrovarsi con la matrice identità come blocco 3×3 sulla sinistra. Nel nostro caso cominciamo sommando la prima riga alla seconda,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
poi sottraiamo il doppio della terza dalla seconda,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
quindi sommiamo il doppio della seconda alla terza,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$
sottraiamo la terza dalla prima e cambiamo segno alla seconda,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$
e infine scambiamo la terza e la seconda, ottenendo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Abbiamo quindi ottenuto
$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{can}} = \left([\mathrm{id}]_{\mathrm{can}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice voluta può essere ottenuta utilizzando il teorema che fornisce la matrice di una composizione di applicazioni lineari:
$$[f]_{\mathrm{can}}^{\mathrm{can}} = [f]_{\mathrm{can}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 5 & 5 & -7 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} \end{array}.$$
Sia $W_1 = \ker f$ e sia $W_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Determinare una base di W_1:

(b) Determinare equazioni cartesiane per W_2:

(c) Determinare una base per $W_1 \cap W_2$:

Soluzione.

(a) Il nucleo di f non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema è già in forma triangolare (ovvero possiamo prima esprimere $x_2 = -\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$ in funzione di x_3, x_4 e poi usare tale informazione per esprimere $x_1 = -x_2 + 2x_3 + x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) + 2x_3 + x_4 = \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$), per cui otteniamo che tutte le soluzioni del sistema sono i vettori

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ -\frac{1}{2}(x_3 + x_4) \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che i vettori $\begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (per due vettori, questo è equivalente a dire non proporzionali), essi formano una base di W_1. Possiamo anche liberarci dei denominatori moltiplicando questi vettori per 2: un'altra possibile base di W_1 è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Procediamo ad un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & x_1 \\ -1 & 0 & -2 & x_2 \\ 0 & -3 & 3 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_4 \end{pmatrix},$$

in cui per comodità si è scambiato l'ordine dei primi due vettori. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & x_1 \\ -1 & 0 & -2 & x_2 \\ 0 & -3 & 3 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+5[1],[3]-7[1],[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & x_2 + x_1 \\ 0 & -3 & 3 & x_3 \\ 1 & 7 & -7 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2],[4]+\frac{x_1+x_2}{5}[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & x_3 - 3\frac{x_1+x_2}{5} \\ 1 & 7 & 0 & x_4 - x_1 + 7\frac{x_1+x_2}{5} \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così le due equazioni cartesiane $x_3 - 3\frac{x_1+x_2}{5} = 0$ e $x_4 - x_1 + 7\frac{x_1+x_2}{5} = 0$, o equivalentemente $-3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ e $2x_1 + 7x_2 + 5x_4 = 0$.

Nota. Per verificare la correttezza di tali equazioni è utile sostituire le coordinate dei vettori dati e controllare che l'uguaglianza sia effettivamente soddisfatta. Ad esempio, per controllare la prima equazioni potremmo calcolare

$$-3 \cdot (-5) - 3 \cdot (0) + 5 \cdot (-3) = 0,$$

dove $(-5, 0, -3)$ sono le coordinate x_1, x_2, x_3 del primo vettore dato, e similmente

$$-3 \cdot (1) - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot (0) = 0$$

per il secondo vettore dato e

$$-3 \cdot (7) - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (3) = 0$$

per il terzo.

(c) L'intersezione considerata è descritta dal sistema

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

che combina le equazioni per W_1 (date nel testo) e quelle di W_2 (ricavate al punto precedente). Per risolvere tale sistema utilizziamo il metodo di eliminazione di Gauss *per righe* sulla matrice associata al sistema, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+3[2],[4]-2[2]} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-\frac{5}{2}[1]} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+\frac{3}{2}[3]} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci siamo cioè ricondotti al sistema equivalente (in cui per comodità scambiamo le prime due righe, cioè le prime due equazioni)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema è ora in forma triangolare; inoltre, il calcolo precedente mostra che la matrice del sistema ha rango 3, per cui lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $4 - 3 = 1$. Sostituendo a ritroso a partire dall'ultima equazione troviamo $x_3 = -3x_4$, $x_2 = x_4$ e $x_1 = -6x_4$, ovvero tutte le soluzioni sono della forma $x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. È allora chiaro che il vettore $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituisce una base di $W_1 \cap W_2$.

4. (a) Sia Π il sottospazio affine in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$ e parallelo al sottospazio vettoriale dato da $3x + 7y + 5z = 0$. Determinare equazioni cartesiane per Π:

(b) Scrivere le coordinate di un vettore non nullo perpendicolare al piano Π:

(c) Sia Π' il piano parallelo a Π passante per il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calcolare **il quadrato** della distanza fra Π e Π':

Soluzione.

(a) Come noto dalla teoria, l'equazione di Π può essere ottenuta modificando soltanto il termine noto dell'equazione data per il sottospazio vettoriale: avremo quindi

$$3x + 7y + 5z = q,$$

dove $q \in \mathbb{R}$ è scelto in modo tale che le coordinate del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$ soddisfino l'equazione. Si trova allora $q = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 16 = 83$.

(b) Come discusso in classe, un vettore ortogonale al piano di equazione $ax + by + cz = 0$ è $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Possiamo quindi prendere $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(c) Ragionando come sopra troviamo che l'equazione di Π' è $3x+7y+5z = -83$. Consideriamo la retta $r = \mathrm{Span}(v)$, dove v è il vettore del punto precedente. Possiamo calcolare le intersezioni di r con Π (rispettivamente Π') imponendo che un punto della forma $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartenga a Π (rispettivamente Π'), ovvero soddisfi $3(3\lambda)+7(7\lambda)+5(5\lambda) = 83$ (rispettivamente $3(3\lambda) + 7(7\lambda) + 5(5\lambda) = -83$). Si verifica immediatamente che le soluzioni di queste equazioni sono $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. I punti di intersezione di r con Π, Π' sono quindi $\pm v$, e la loro distanza (che per definizione è anche la distanza fra Π, Π') è la norma di $2v$, ovvero $2\sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2} = 2\sqrt{83}$. La distanza al quadrato è allora $4 \cdot 83 = 332$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che è rappresentata, rispetto alle basi canoniche in partenza ed in arrivo, dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathrm{Imm}(f)$ ed estenderla ad una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ (si chiede cioè di trovare una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ i cui primi vettori siano quelli di $\mathcal{B}_1$). Scrivere poi la matrice di f rispetto alla base canonica in partenza e alla base $\mathcal{B}_2$ in arrivo.

2. Se f e $\mathcal{B}_2$ sono quelle del punto 1, esibire una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$[f]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Siano V, W due spazi vettoriali (su un campo K) di dimensioni rispettive n, m, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di rango r. Dimostrare che è possibile scegliere una base $\mathcal{A}$ di V e una base $\mathcal{B}$ di W in modo che la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sia

$$M_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero la matrice con m righe ed n colonne in cui le colonne $i = 1, \dots, r$ hanno un solo coefficiente non nullo, pari ad 1 e collocato sulla riga i, e le colonne dalla $r+1$ alla n sono nulle.

4. ($\star$) Dati due spazi vettoriali U, Z sia $\mathcal{L}(U, Z)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da U a Z. Data una f come al punto precedente, determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathcal{L}(V,V) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ & g & \mapsto & f \circ g. \end{array}$$

Soluzione.

1. Un'eliminazione di Gauss per righe mostra facilmente che il rango della matrice M è 2: in effetti si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+4[1],[3]-2[1],[4]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+\frac{1}{2}[3]} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1/2} & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

in cui si noti che abbiamo aggiunto 4 colonne, corrispondenti alla base canonica, in modo da poter trovare in un colpo solo sia $\mathcal{B}_1$ che $\mathcal{B}_2$. In effetti, considerando i pivot di quest'ultima matrice, vediamo che:

(a) le prime due colonne della matrice originaria formano una base dello span delle sue colonne, quindi possiamo prendere $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) la prima, seconda, quarta e quinta colonna della matrice 4×8 formano una base di $\mathbb{R}^4$, quindi possiamo prendere

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Infine, per scrivere la matrice di f fra la base canonica (i cui elementi chiamiamo e_1, e_2, e_3) e la base $\mathcal{B}_2$ (i cui elementi chiamiamo v_1, v_2, v_3, v_4), osserviamo che $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2$ e $f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le coordinate di v_1 in base $\mathcal{B}_2$ sono ovviamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e similmente le coordinate di v_2 sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vogliamo ora rappresentare quest'ultimo vettore in base v_1, v_2, v_3, v_4, ovvero risolvere

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4.$$

D'altra parte sappiamo che tale vettore appartiene all'immagine di f, una cui base è data da v_1, v_2, per cui sicuramente avremo $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Ci riduciamo allora a risolvere

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ -7 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_1 \\ 3 = \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -5/2$. La matrice di f dalla base canonica alla base $\mathcal{B}_2$ è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La formula fondamentale delle applicazioni lineari fornisce $\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema associato alla matrice M, ovvero

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -4x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - y + 3z = 0, \end{cases}$$

troviamo che $\ker f$ è generato dal vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Come base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ scegliamo allora e_1, e_2, w (che questa sia effettivamente una base è immediato da verificare con un'eliminazione di Gauss): si ha $f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2$ e $f(w) = 0$, per cui la matrice $[f]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_2}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ come voluto.

3. Dalla formula fondamentale sappiamo che $\dim \ker(f) = n - r$. Sia allora $v_1, \ldots, v_{n-r}$ una base di $\ker f$, che completiamo ad una base $v_{n-r+1}, \ldots, v_n$ di V. Osserviamo che i vettori

$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Imm}(f)$: in effetti, ogni vettore $v \in V$ si scrive come $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, per cui – per linearità di f – abbiamo

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n),$$

ovvero ogni vettore nell'immagine si scrive come combinazione lineare di $f(v_1), \ldots, f(v_n)$. D'altra parte, per costruzione abbiamo $f(v_1) = \cdots = f(v_{n-r}) = 0$, dunque tali vettori sono irrilevanti ai fini della precedente combinazione lineare, e otteniamo che $f(v_{n-r+1}), \ldots, f(v_n)$ sono ancora generatori di $\mathrm{Imm}(f)$. D'altra parte tali vettori sono in numero di r, che è anche la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$, quindi ne formano una base. Completiamo poi $f(v_{n-r+1}), \ldots, f(v_n)$ ad una base di W, aggiungendo (se necessario) vettori $w_1, \ldots, w_{m-r}$. Scegliamo

$$\mathcal{A} = \{v_{n-r+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_{n-r}\}$$

e

$$\mathcal{B} = \{f(v_{n-r+1}), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_{m-r}\},$$

che per definizione sono basi rispettivamente di V e di W. Scriviamo ora la matrice di f rispetto a tali basi. Per le colonne $i = 1, \ldots, r$ abbiamo che $f(v_{n-r+i})$ (cioè l'immagine dell'i-esimo vettore della base di partenza) è proprio l'i-esimo vettore della base di arrivo, quindi le sue coordinate in base $\mathcal{B}$ sono date dal vettore che ha tutte le coordinate uguali a 0, salvo un 1 sulla i-esima riga. Le prime r colonne della matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sono quindi quelle volute. In quanto alle ultime $n-r$ colonne (cioè quelle dalla $r+1$ alla n), esse sono date dalle coordinate in base $\mathcal{B}$ di $f(v_1), \ldots, f(v_{n-r})$, che per costruzione sono vettori nulli: le loro coordinate sono allora tutte uguali a 0, come voluto.

4. Rappresentando le applicazioni lineari in $\mathcal{L}(V, V)$ come matrici nella base $\mathcal{A}$ e le applicazioni in $\mathcal{L}(V, W)$ come matrici rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e ricordando che la matrice di una composizione è il prodotto delle matrici delle funzioni che vengono composte (rispetto alle basi opportune), vediamo che l'applicazione lineare L si scrive in coordinate come

$$\begin{array}{rccc} L': & \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) & \to & \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \\ & X & \mapsto & [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} X = M_r X. \end{array}$$

Consideriamo le matrici della forma $M_r X$: si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero le matrici della forma $M_r X$ sono tutte e sole quelle le cui prime r righe sono qualsiasi e le cui ultime $m-r$ righe sono nulle. Tale spazio di matrici è l'immagine di L' e ha dimensione $r \cdot n$ (il numero di coefficienti di una matrice con r righe ed n colonne). Usando la formula fondamentale, e osservando che lo spazio di partenza $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ha dimensione n^2, otteniamo che la dimensione di $\ker L'$ è $n^2 - rn$. Dal momento che L' non è altro che la rappresentazione in coordinate di L otteniamo che si ha anche $\dim \ker L = n(n-r)$ e $\dim \mathrm{Imm}\, L = nr$.

Nota. Si sarebbe anche potuto ragionare simmetricamente, determinando prima il nucleo di L'. Le matrici nel nucleo di L' sono quelle le cui colonne appartengono al nucleo di M_r. Il nucleo di M_r è lo span dei vettori di base dall'$(r+1)$-esimo all'n-esimo. Ogni colonna di una matrice in $\ker L'$ è quindi un vettore che ha le prime r coordinate nulle e le ultime $n-r$ qualsiasi: da questo si ottiene che $\ker L'$ ha dimensione $n(n-r)$ (il numero di coefficienti della sottomatrice $(n-r)\times r$ formata dalle ultime $n-r$ righe), e la dimensione dell'immagine può allora essere determinata come la differenza $n^2 - (n(n-r)) = nr$.

Esercizio 2. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali il cui nucleo è Span $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo poi la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 25 & 3 \\ 4 & 24 & 23 \\ 4 & 25 & 21 \end{pmatrix}$, con inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 71 & 450 & -503 \\ -8 & -51 & 57 \\ -4 & -25 & 28 \end{pmatrix}$.

1. Determinare una base per il nucleo di BA.
2. Determinare una base per il nucleo di AB^{-1}.

Soluzione.

1. Abbiamo visto a lezione che se B è una matrice invertibile, allora il nucleo di BA è uguale al nucleo di A. Ne ricaviamo che il nucleo di BA è Span $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quindi che una sua base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Si ha $AB^{-1}v = 0$ se e solo se il vettore $B^{-1}v$ appartiene al nucleo di A, ovvero (data l'ipotesi $\ker A = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$) se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che
$$B^{-1}v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Applicando B ad entrambi i lati di questa uguaglianza otteniamo $v = \lambda B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
I vettori nel nucleo di AB^{-1} sono quindi tutti e soli i multipli di $\begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi una base di tale nucleo è data proprio dal vettore $\begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.2 Compitino del 05/03/2022

Test.

1. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \pi & -19 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 47 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcolare $\det(A^2 \cdot B \cdot A^{-1}) =$ ....
Soluzione. La matrice A è triangolare a blocchi, per cui
$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)(5 \cdot 8 - 6 \cdot 7) = (-2)(-2) = 4.$$
Per quanto riguarda B, sviluppando prima lungo la prima colonna e poi lungo la prima riga della matrice restante troviamo
$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3.$$

Infine, il teorema di Binet fornisce

$$\det(A^2 \cdot B \cdot A^{-1}) = \det(A)^2 \cdot \det(B) \cdot \det(A)^{-1} = \det(A)\det(B) = -12.$$

2. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica sia $M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Sia W il nucleo dell'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-2y-z \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Calcolare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(b) Trovare equazioni cartesiane per $W^\perp$, dove l'ortogonale è calcolato rispetto al prodotto scalare φ:

(c) Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare vettori $w \in W$ e $w^\perp \in W^\perp$ tali che $v = w + w^\perp$.

☐ Tali vettori non esistono. ☐ Tali vettori esistono, ad esempio $w =$ e $w^\perp =$

Soluzione.

(a) Cominciamo osservando che le prime due colonne di M sono proporzionali, quindi $\dim\ker M \geq 1$. È poi immediato verificare che la seconda e terza colonna non sono proporzionali, e che quindi $\mathrm{rg}(M) = 2 \Rightarrow \dim\ker M = 1$. Dalla teoria segue allora $n_0 = 1$. D'altro canto $\varphi(e_1, e_1) = 8 > 0$, per cui si ha anche $n_+ \geq 1$, ed infine si può osservare che la restrizione di φ a $\mathrm{Span}(e_2, e_3)$ ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, di determinante -2. Tale restrizione ha quindi segnatura $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$, il che in particolare ci dice che anche per il prodotto scalare φ si ha $n_- \geq 1$. Dato che i tre invarianti della segnatura di φ devono sommare a 3, questo ci dice che $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

(b) Il sottospazio W è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-2y-z = 0, \end{cases}$$

e si verifica subito che esso è quindi $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. L'ortogonale a W è quindi descritto dall'equazione

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0,$$

ovvero

$$(1, 2, -3)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Svolgendo il prodotto fra il vettore riga e la matrice si trova allora l'equazione

$$(-8, -4, -5)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

e cioè infine $8x + 4y + 5z = 0$.

(c) Si osservi che – nonostante il prodotto scalare φ sia degenere – abbiamo $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$: infatti tali sottospazi hanno dimensioni rispettivamente 1 e 2, ed è immediato verificare che si intersecano banalmente, in quanto il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ non soddisfa l'equazione $8x + 4y + 5z = 0$. Ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può quindi decomporre come $w + w^\perp$ con $w \in W$ e $w^\perp \in W^\perp$, e tale scrittura è unica. Inoltre, siccome il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ non è isotropo, per trovare la proiezione di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W è sufficiente calcolare preliminarmente

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = (1,1,1)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (20,10,19)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -17$$

e

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = (1,2,-3)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (1,2,-3)\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = -1;$$

la proiezione voluta è data da $w = \frac{-17}{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -51 \end{pmatrix}$. Per differenza, si ha $w^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -33 \\ 52 \end{pmatrix}$. Si noti, come verifica a posteriori, che tale vettore soddisfa effettivamente l'equazione $8x + 4y + 5z = 0$, e quindi come voluto appartiene a $W^\perp$.

3. Una matrice $M \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ soddisfa $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $M^2 = 2M$.

(a) Quali sono i possibili polinomi caratteristici di M? ....
....

(b) Dare un esempio di una tale matrice M che sia diversa da $2\,\mathrm{Id}$.

Soluzione.

(a) La prima ipotesi dice che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di M di autovalore 2. La seconda ipotesi dice che il polinomio $q(t) = t^2 - 2t$ soddisfa $q(M) = 0$. Il polinomio minimo di M è quindi un divisore di $q(t)$, e perciò può avere come radici solo 2 e 0. Siccome le radici del polinomio minimo sono tutti e soli gli autovalori, gli autovalori di M sono un sottoinsieme di $\{0, 2\}$. Sappiamo inoltre che 2 è effettivamente autovalore di M. Gli autovalori di M possono quindi essere $2, 2, 2$, oppure $2, 2, 0$, o ancora $2, 0, 0$. Nei tre casi i polinomi caratteristici sono $(t-2)^3, t(t-2)^2$ e $t^2(t-2)$.
Si osservi che tali polinomi caratteristici possono tutti essere realizzati. Un modo semplice di mostrarlo è il seguente. Consideriamo una base $\mathcal{B}$ contenente il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quale ad esempio quella data dai tre vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Siano $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari che in base $\mathcal{B}$ hanno matrici

rispettivamente
$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$
Siano poi M_1, M_2, M_3 le matrici di f_1, f_2, f_3 in base canonica. Siccome per ogni $i = 1, 2, 3$ si ha $f_i^2 = 2f_i$ e $f_1(v_1) = 2v_1$, le matrici M_i soddisfano $M_i^2 = 2M_i$ e $M_i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e hanno i polinomi caratteristici voluti (il polinomio caratteristico non dipende dalla base, quindi si può svolgere il calcolo in base $\mathcal{B}$, calcolo che risulta allora molto semplice).

(b) Abbiamo già quasi risposto al punto precedente: si tratta semplicemente di scrivere la matrice di f_2 in base canonica (che denotiamo e_1, e_2, e_3). Dal momento che $f_2(e_1) = f_2(v_2) = 2v_2 = 2e_1$ e $f_2(e_2) = f_2(v_3) = 0$, le prime due colonne della matrice di f_2 sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il vettore nullo. Resta da determinare
$$\begin{aligned} f_2(e_3) &= f_2(v_1 - v_2 + v_3) = f_2(v_1) - f_2(v_2) + f_2(v_3) \\ &= 2v_1 - 2e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Ne consegue che la matrice di f_2 in base canonica è
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
e che questa matrice è una possibile risposta al punto (b).

Nota. Si potrebbero trovare infinite matrici che rispettano le condizioni volute: basterebbe infatti scegliere una base diversa al punto precedente per trovare una matrice diversa. In alternativa, si potrebbe anche ripetere lo stesso ragionamento sull'applicazione lineare f_3 invece che su f_2.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia
$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Elencare gli autovalori di M con le rispettive molteplicità algebriche.
2. Dire se M è diagonalizzabile. In caso affermativo esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M; in caso negativo, esibire una base per ognuno degli autospazi di M.

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico
$$p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} t-6 & 0 & 3 \\ -3 & t-3 & 3 \\ -5 & 0 & t+2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda colonna troviamo

$$p_M(t) = (t-3)\det\begin{pmatrix} t-6 & 3 \\ -5 & t+2 \end{pmatrix} = (t-3)\left((t-6)(t+2)+15\right) = (t-3)(t^2-4t+3) = (t-3)^2(t-1).$$

Come noto, gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, quindi gli autovalori di M (ripetuti con le rispettive molteplicità algebriche) sono $1, 3, 3$.

2. Calcoliamo la molteplicità geometrica dei due autovalori. Sappiamo dalla teoria che un autovalore di molteplicità algebrica 1 ha anche molteplicità geometrica 1, quindi $m_{\text{geo}}(1) = 1$. In quanto all'autovalore 3, la sua molteplicità geometrica è la dimensione di

$$\ker(M - 3\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 1, in quanto tutte le sue colonne sono a due a due proporzionali. Ne concludiamo che ha nucleo di dimensione 2, e quindi $m_{\text{geo}}(3) = 2$. Siccome tutti gli autovalori sono reali e per ognuno di essi le molteplicità algebriche e geometriche coincidono deduciamo che M è diagonalizzabile.

Per trovare una base diagonalizzante è sufficiente prendere l'unione di basi dei vari autospazi. L'autospazio di autovalore 3 è il nucleo della matrice trovata qui sopra, ovvero è dato dai vettori che rispettano

$$\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ 5x - 5z = 0. \end{cases}$$

Come già sapevamo dal calcolo del rango, tali equazioni sono tutte proporzionali, per cui il sistema è equivalente alla singola equazione $x = z$, e descrive un sottospazio di dimensione 2. Una base può essere costruita trovando due vettori non proporzionali in tale spazio, quali ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, l'autospazio relativo all'autovalore 1 è il nucleo di

$$M - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 5x - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{5}{3}x \\ 3x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 5x = 0 \Rightarrow y = x \\ 5x - 3z = 0 \end{cases}$$

sono tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 5/3x \end{pmatrix}$, per cui troviamo che tale autospazio è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. In conclusione, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per M è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ dato dalla formula

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1.$$

1. Dimostrare che φ è non degenere.
2. Determinare una base ortogonale nel caso $n = 2$.
3. Dimostrare che la segnatura di φ è $(k+1, k, 0)$ quando $n = 2k+1$ è dispari ed è $(k, k, 0)$ quando $n = 2k$ è pari.

Soluzione.

1. Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vettore non nullo. Questo vuol dire che una delle coordinate, diciamo x_i, è diversa da 0. Consideriamo il vettore $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dove l'unico coefficiente uguale ad 1 è in posizione $n+1-i$. Si ha allora

   $$\varphi(x, y) = \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n+1-j}.$$

   Siccome $y_{n+1-j} = 0$ tranne per $n+1-j = n+1-i$, cioè $j = i$, la somma precedente si riduce ad un solo termine, ovvero $x_i y_{n+1-i} = x_i \neq 0$. Per ogni vettore non nullo x abbiamo quindi trovato un vettore y tale che $\varphi(x, y) \neq 0$, e cioè abbiamo verificato che φ rispetta la definizione di prodotto scalare non degenere.

   Soluzione alternativa. La matrice del prodotto scalare dato è

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   ovvero la matrice che ha tutti i coefficienti nulli, salvo quelli sulla diagonale dall'angolo in alto a destra a quello in basso a sinistra, coefficienti che sono tutti uguali a 1. Il rango di questa matrice è evidentemente pari ad n, quindi il suo nucleo è banale, e perciò il prodotto scalare associato è non degenere.

2. La matrice del prodotto scalare è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifica immediatamente che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una base ortogonale.

3. Sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Scriviamo $n = 2k$ o $n = 2k+1$ a seconda che n sia pari o dispari, e consideriamo i vettori

$$v_1^+ = e_1 + e_n, v_1^- = e_1 - e_n, \quad v_2^+ = e_2 + e_{n-1}, v_2^- = e_2 - e_{n-1}, \quad \cdots,$$

$$v_k^+ = e_k + e_{n+1-k}, v_k^- = e_k - e_{n+1+k};$$

se n è dispari, aggiungiamo a questi anche $v_0 = e_{k+1}$. Affermiamo che questi vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$, ortogonale rispetto al prodotto scalare dato. In effetti:

(a) Per vedere che sono una base, dal momento che sono il numero corretto è sufficiente mostrare che sono un insieme di generatori. Basta allora mostrare che ogni vettore della base canonica sta nello span di $v_1^\pm, v_2^\pm, \dots, v_k^\pm, v_0$ (con quest'ultimo vettore presente solo quando n è dispari). Questo fatto è immediato, in quanto si ha

$$e_i = \frac{v_i^+ + v_i^-}{2}, \quad e_{n+1-i} = \frac{v_i^+ - v_i^-}{2} \qquad \text{per } i = 1, \dots, k$$

e $e_k = v_0$ quando $n = 2k+1$.

(b) Per vedere che si tratta di una base ortogonale osserviamo intanto che $\varphi(e_i, e_j) = 0$ a meno che $i + j = n + 1$. Siccome $v_i^\pm$ e $v_j^\pm$ sono combinazioni lineari rispettivamente di e_i, e_{n+1-i} e di e_j, e_{n+1-j}, il prodotto scalare fra $v_i^\pm$ e $v_j^\pm$ può essere diverso da zero solo se $i = j$ o se $i = n+1-j$, e questo secondo caso non accade in quanto gli indici i, j sono entrambi minori di $(n+1)/2$. Si ha quindi che $v_i^\pm$ e $v_j^\pm$ sono ortogonali per ogni coppia di indici $i \neq j$ e ogni scelta dei segni $\pm$. Similmente, v_0 è ortogonale a tutti i $v_i^\pm$. Resta solo da verificare che v_i^+ sia ortogonale a v_i^- per ogni $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned}\varphi(v_i^+, v_i^-) &= \varphi(e_i + e_{n+1-i}, e_i - e_{n+1-i}) \\ &= \varphi(e_i, e_i) + \varphi(e_i, -e_{n+1-i}) + \varphi(e_{n+1-i}, e_i) + \varphi(e_{n+1-i}, -e_{n+1-i}) \\ &= 0 + (-1) + 1 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Avendo costruito una base ortogonale, per calcolare la segnatura è sufficiente valutare il prodotto scalare di ogni vettore di base con se stesso:

$$\begin{aligned}\varphi(v_i^+, v_i^+) &= \varphi(e_i + e_{n+1-i}, e_i + e_{n+1-i}) \\ &= \varphi(e_i, e_i) + 2\varphi(e_i, e_{n+1-i}) + \varphi(e_{n+1-i}, e_{n+1-i}) \\ &= 0 + 2 + 0 > 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(v_i^-, v_i^-) &= \varphi(e_i - e_{n+1-i}, e_i - e_{n+1-i}) \\ &= \varphi(e_i, e_i) - 2\varphi(e_i, e_{n+1-i}) + \varphi(e_{n+1-i}, e_{n+1-i}) \\ &= 0 - 2 + 0 < 0;\end{aligned}$$

infine, se n è dispari si ha anche $\varphi(v_0, v_0) = \varphi(e_{k+1}, e_{n+1-(k-1)}) = 1$. In conclusione, abbiamo k vettori di base il cui prodotto scalare con se stessi è negativo, e $n-k$ vettori per cui tale prodotto scalare è positivo. La segnatura è quindi $(n-k, k, 0)$, dove k è la parte intera di $n/2$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici in $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ della forma $\begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. L'insieme di tali matrici è un sottospazio vettoriale S di $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ (la dimostrazione di questo fatto non è richiesta).

1. Calcolare la dimensione di S ed esibirne una base.

2. Dimostrare che tutti gli elementi di S sono diagonalizzabili.

3. Dimostrare che gli elementi di S sono tutti diagonalizzabili simultaneamente.

4. Sia $f(x) = x^3 + 2x + 1$ e sia $T : \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare

$$T(p(x)) = \text{resto lasciato da } f(x)p(x) \text{ nella divisione per } x^4 - 1.$$

Non si richiede di dimostrare che T sia effettivamente un'applicazione lineare.

(a) Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ in partenza ed in arrivo.

(b) Calcolare gli autovalori di T e dire se è diagonalizzabile.

Soluzione.

1. Consideriamo la matrice

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 R^4 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3. \tag{3}$$

Le matrici R, R^2, R^3, R^4 sono evidentemente linearmente indipendenti, in quanto per la formula precedente una combinazione lineare

$$a_0 R^4 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3$$

è uguale alla matrice $\begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, e quindi è nulla se e solo se $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
D'altro canto, la formula (3) mostra proprio che ogni matrice di S è combinazione lineare di R, R^2, R^3, R^4, e quindi questi quattro vettori sono in S, lo generano, e sono linearmente indipendenti. Ne segue che sono una base di S, e quindi per definizione $\dim S = 4$, il numero di elementi di questa base.

2 e 3. Se in una certa base $\mathcal{B}$ la matrice R risulta diagonale, allora nella stessa base anche le sue potenze R^2, R^3, R^4 sono diagonali, e quindi qualsiasi loro combinazione lineare (ovvero qualsiasi elemento di S) è diagonale. Ne segue che basta verificare che R sia diagonalizzabile. Per far questo osserviamo che il polinomio $q(t) = t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t-i)(t+i)$ rispetta $q(R) = R^4 - \mathrm{Id} = 0$. Il polinomio minimo di R quindi divide $q(t)$, e siccome $q(t)$ ha tutte le radici distinte la stessa cosa è vera per $q(t)$. Per un criterio noto deduciamo allora che R è diagonalizzabile, il che completa la dimostrazione.

Per uso al punto successivo osserviamo inoltre che il polinomio *caratteristico* di R è uguale a $t^4 - 1$, che ha come radici $1, -1, i, -i$. In particolare, gli autovalori di R sono tutti distinti e sono uguali a $\pm 1, \pm i$.

4. (a) Calcoliamo

$$T(1) = \text{ resto di } x^3 + 2x + 1 = x^3 + 2x + 1, \quad T(x) = \text{resto di } x^4 + 2x^2 + x = 2x^2 + x + 1,$$

$$T(x^2) = \text{ resto di } x^5{+}2x^3{+}x^2 = 2x^3{+}x^2{+}x, \quad T(x^3) = \text{resto di } x^6{+}2x^4{+}x^3 = x^3{+}x^2{+}2,$$

dove si è usato il fatto $x^4 = (x^4 - 1) + 1$ lascia resto 1 nella divisione per $x^4 - 1$, e similmente $x^5 = x(x^4 - 1) + x$ lascia resto x e $x^6 = x^2(x^4 - 1) + x^2$ lascia resto x^2. Scrivendo i risultati dei calcoli precedenti in base $\{1, x, x^2, x^3\}$, ovvero estraendo (nell'ordine) il termine noto e i coefficienti di x, x^2, x^3 da ognuno dei polinomi scritti sopra, troviamo la matrice voluta, che risulta essere

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice M di T appartiene al sottospazio S, quindi come già visto è diagonalizzabile. Per trovarne gli autovalori possiamo procedere come segue. Siano v_1, v_2, v_3 e v_4 autovettori di R di autovalori rispettivi $1, i, -1, -i$; che tali autovettori esistano segue dall'analisi dei punti precedenti. Sappiamo inoltre che essi costituiscono una base di $\mathbb{C}^4$, perché come già visto R è diagonalizzabile. Siccome la matrice di T è uguale a $R^4 + 2R + R^3 = R^3 + 2R + \mathrm{Id} = f(R)$, otteniamo subito che

$$Mv_i = f(R)v_i = (R^3 + 2R + \mathrm{Id})(v_i) = \lambda_i^3 v_i + 2\lambda_i v_i + v_i = (\lambda^3 + 2\lambda + 1)v_i = f(\lambda_i)v_i,$$

dove λ_i è l'autovalore corrispondente all'autovettore v_i. Per questo calcolo si è usato il fatto che $M(v_i) = \lambda_i v_i$ implica, per induzione su k, che $M^k(v_i) = \lambda^k v_i$. Otteniamo allora che $v_1, \ldots, v_4$ sono autovettori di M, con autovalori rispettivi $f(1) = 4, f(i) = -i{+}2i{+}1 = 1{+}i$, $f(-1) = -2$ e $f(-i) = 1-i$. Siccome questi sono quattro e sono tutti distinti, devono essere tutti e soli gli autovalori di M (e quindi di T). In alternativa, la stessa conclusione si può raggiungere perché in base $v_1, \ldots, v_4$ la matrice M diventa la matrice diagonale con coefficienti diagonali $4, 1 + i, -2, 1 - i$, e questi quattro numeri sono quindi i suoi autovalori.

5.3 Compitino del 02/04/2022

Test.

1. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ data dai 3 vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il funzionale lineare $\varphi : V \to \mathbb{R}$ dato da $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y + z$.

   (a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$. Trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che

   $$\varphi(w) = \langle v, w \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

   Scrivere qui $v =$

   (b) Calcolare $v_3^*\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$ ....

   (c) Quali sono le coordinate di φ nella base v_1^*, v_2^*, v_3^*?

Soluzione.

(a) Si ha

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = x + y + z = \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

il vettore richiesto è quindi $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Si noti che tale vettore è unico, in quanto il prodotto scalare standard è non-degenere.

(b) Scriviamo il vettore $\begin{pmatrix}7\\-8\\0\end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$. Dobbiamo trovare coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tali che

$$\begin{pmatrix}7\\-8\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2\\ -\lambda_1 - \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Dalla terza coordinata ricaviamo $\lambda_3 = -\lambda_1$, e a quel punto dalla prima troviamo $\lambda_2 = -7$. Dal confronto delle seconde coordinate segue infine $2\lambda_1 = -8 - 2\lambda_2 = 6$, per cui $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_3 = -3$. A questo punto è immediato calcolare

$$v_3^* \left(\begin{pmatrix}7\\-8\\0\end{pmatrix} \right) = v_3^*\left(3v_1 - 7v_2 - 3v_3\right) = 3v_3^*(v_1) - 7v_3^*(v_2) - 3v_3^*(v_3) = -3,$$

in quanto $v_3^*(v_1) = v_3^*(v_2) = 0$ e $v_3^*(v_3) = 1$.

(c) Scriviamo

$$\varphi = \mu_1 v_1^* + \mu_2 v_2^* + \mu_3 v_3^*.$$

Le nostre incognite sono μ_1, μ_2, μ_3. Questa è una uguaglianza fra funzioni; le funzioni in questione sono uguali se e solo se sono uguali quando calcolate su qualsiasi vettore. In particolare possiamo calcolare

$$2 = \varphi(v_1) = (\mu_1 v_1^* + \mu_2 v_2^* + \mu_3 v_3^*)(v_1) = \mu_1 v_1^*(v_1) + \mu_2 v_2^*(v_1) + \mu_3 v_3^*(v_1) = \mu_1,$$

dove abbiamo nuovamente usato la definizione di base duale per calcolare $v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(v_2) = 0$ e $v_1^*(v_3) = 0$. Similmente si ottiene $\mu_2 = \varphi(v_2) = 1$ e $\mu_3 = \varphi(v_3) = 0$. Le coordinate di φ in base v_1^*, v_2^*, v_3^* sono quindi $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

2. (a) Scrivere il polinomio minimo della matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 9 & -5\\ -1 & 6 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$: ....

(b) Sia $M = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -7\end{pmatrix}$. Trovare una matrice diagonale D e una matrice P tali che

$$M = PDP^{-1}, \quad P \cdot {}^tP = \mathrm{Id}\,.$$

Scrivere qui $D =$ e $P =$

Soluzione.

(a) La risposta è $(t-3)(t-2)^2 = t^3 - 7t^2 + 16t - 12$. Calcoliamo intanto il polinomio caratteristico della matrice A, che risulta essere

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det \begin{pmatrix}t & -9 & 5\\ 1 & t-6 & 2\\ 1 & -3 & t-1\end{pmatrix} &\overset{(1)}{=} \det \begin{pmatrix}t & -9 & 5\\ 1 & t-6 & 2\\ 0 & 3-t & t-3\end{pmatrix} = (t-3)\det \begin{pmatrix}t & -9 & 5\\ 1 & t-6 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \\ &\overset{(2)}{=} (t-3)\det \begin{pmatrix}t & -9 & -4\\ 1 & t-6 & t-4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} = (t-3)\det \begin{pmatrix}t & -4\\ 1 & t-4\end{pmatrix} \\ &= (t-3)(t^2 - 4t + 4) = (t-3)(t-2)^2, \end{aligned}$$

dove in (1) si è sottratta la seconda riga dall'ultima ed in (2) si è sommata la seconda colonna all'ultima. Dalla teoria sappiamo allora che il polinomio minimo è un divisore di $p_A(t) = (t-3)(t-2)^2$ che ha sia 3 che 2 come radice. Ci sono quindi solo due possibilità per il polinomio minimo: o esso coincide con $p_A(t)$, oppure è uguale a $(t-2)(t-3)$. Questa seconda possibilità è equivalente al fatto che la matrice A sia diagonalizzabile. D'altro canto, l'autospazio relativo all'autovalore 2 è il nucleo di

$$A - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -5 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

matrice che ha rango almeno 2 in quanto le sue prime due colonne sono fra loro non proporzionali (e in effetti ha rango esattamente 2, dal momento che il suo determinante è nullo per definizione di autovalore). Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è inferiore alla molteplicità algebrica, e che quindi A non è diagonalizzabile. Si ottiene perciò che il polinomio minimo di A deve avere almeno una radice doppia, e quindi – per quanto già discusso – deve coincidere con $p_A(t)$.

(b) Il polinomio caratteristico di M è $t^2 - \mathrm{tr}(M)t + \det(M) = t^2 + 6t - 16 = (t+8)(t-2)$. Ne segue che gli autovalori di M sono 2 e -8. Per il teorema spettrale, la matrice M è diagonalizzabile in una base ortonormale (per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$). Gli autospazi di M sono

$$\ker(M - 2\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\ker(M + 8\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi $D := \begin{pmatrix} 2 & \\ & -8 \end{pmatrix} = P^{-1}MP$ per ogni P la cui prima colonna sia un multiplo di $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la cui seconda colonna sia un multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Si osservi che tali colonne sono certamente ortogonali fra loro; per assicurare che siano anche ortonormali (e che quindi P rispetti $P \cdot {}^tP = \mathrm{Id}$) è sufficiente dividere i vettori trovati per la loro norma. Si ottiene allora la matrice $P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, che soddisfa $P \cdot {}^tP = \mathrm{Id}$ e $P^{-1}MP = D$, ovvero $M = PDP^{-1}$.

3. Consideriamo, sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il prodotto scalare φ la cui matrice in base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e gli endomorfismi T_1, T_2 le cui matrici in base canonica sono rispettivamente $M_1 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere la matrice in base canonica dell'aggiunto di T_1 rispetto a φ:

   (b) È noto che $T_2^* T_2 = T_2 T_2^*$, dove l'aggiunto è preso rispetto al prodotto scalare φ. Calcolare $\varphi\left(T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Soluzione.

(a) La proprietà fondamentale dell'aggiunto

$$\varphi(T_1 v, w) = \varphi(v, T_1^* w),$$

valida per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$, si traduce a livello di coordinate nell'identità

$$^t v \, ^t M_1 A w = {}^t v A [T_1^*] w,$$

dove $[T_1^*]$ è la matrice voluta. Come noto, il fatto che questa uguaglianza sia vera per ogni v e w implica

$$^t M_1 A = A[T_1^*],$$

ovvero

$$\begin{aligned} [T_1^*] = A^{-1 \, t} M_1 A &= \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & -1 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 12 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ 8 & -2 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Per la proprietà fondamentale dell'aggiunto si ha

$$\varphi\left(T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2 T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Usando adesso l'informazione $T_2 T_2^* = T_2^* T_2$ otteniamo che il prodotto scalare desiderato è uguale a

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2 T_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2^* T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

dove nell'ultima uguaglianza si è nuovamente usata la proprietà fondamentale dell'operatore aggiunto. A questo punto il calcolo è semplice: $T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la prima colonna della matrice M_2, mentre $T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobbiamo quindi calcolare

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (3, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (3, 2, 0) \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 14.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$M = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -5 & 8 & -44 \\ x & 19 & 8 \\ -20 & x & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare l'unico valore di $x \in \mathbb{R}$ per cui M è ortogonale.
2. Dire se, per tale valore di x, la trasformazione lineare la cui matrice in base canonica è M è una rotazione.
3. Se si tratta di una rotazione, trovare un vettore v che genera il suo asse fisso. In caso contrario, trovare un vettore v tale che $M(v) = -v$.

4. Determinare il coseno della rotazione indotta da M sul piano ortogonale al vettore v del punto precedente (ortogonale preso rispetto al prodotto scalare standard).

Soluzione.

1. Imponendo la condizione che la prima e seconda colonna di M siano fra loro ortogonali otteniamo l'equazione
$$\langle \begin{pmatrix} -5 \\ x \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ x \end{pmatrix} \rangle = 0,$$
ovvero $-40 + 19x - 20x = 0$, che fornisce $x = -40$.

2. È sufficiente capire se il determinante di M sia positivo o negativo, e per far questo basta determinare il segno del determinante di $45M$. Operando con mosse di Gauss otteniamo che la matrice $45M$ può essere ridotta a
$$\begin{pmatrix} -5 & 8 & -44 \\ -40 & 19 & 8 \\ -20 & -40 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-8[1],[3]-4[1]} \begin{pmatrix} -5 & 8 & -44 \\ 0 & 19-64 & 8+8\cdot 44 \\ 0 & -72 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -44 \\ 0 & -45 & 8\cdot 45 \\ 0 & -72 & 171 \end{pmatrix}.$$
Raccogliendo un fattore 45 dalla seconda riga e un fattore 9 dall'ultima ci riduciamo allora a studiare il segno del determinante di
$$\begin{pmatrix} -5 & 8 & -44 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & -8 & 19 \end{pmatrix},$$
determinante che è pari a $(-5)(-19+64) = -5 \cdot 45 < 0$. La matrice M quindi **non** rappresenta una rotazione.

   Osservazioni.

   (a) Si noti che abbiamo in effetti calcolato esattamente il determinante di $45M$, che è risultato essere pari a $45 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 45 = -(45)^3$. Questo è compatibile con il fatto che $\det(M) = -1$, visto che $\det(45M) = 45^3 \det(M)$.

   (b) Al punto successivo troveremo un vettore v tale che $Mv = -v$. È facile vedere che, se -1 è autovalore di una rotazione di $\mathbb{R}^3$, allora deve essere un autovalore doppio (pensare al teorema di struttura per le matrici ortogonali). Siccome l'autospazio relativo a -1 risulta di dimensione 1, questa sarà un'altra verifica – indipendente – del fatto che M non sia una rotazione.

3. La richiesta si riduce a studiare $\ker(M + \mathrm{Id})$, o equivalentemente
$$\ker(45M + 45\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 40 & 8 & -44 \\ -40 & 64 & 8 \\ -20 & -40 & 40 \end{pmatrix}.$$
Operare con mosse di Gauss per riga non cambia il nucleo; in particolare, possiamo riscalare le tre righe rispettivamente di un fattore $1/4, 1/8, 1/20$ ed ottenere che il nucleo cercato coincide con il nucleo di
$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -11 \\ -5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Riducendo a scala (per righe) troviamo
$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -11 \\ -5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+10[3],[2]-5[3]} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora eliminare la prima riga, dividere la seconda per 9, ed arrivare al sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

che ha per soluzioni tutti e soli i multipli del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Dalla teoria sappiamo che vale la relazione $2\cos\vartheta - 1 = \operatorname{tr}(M) = 1/5$, dove ϑ è l'angolo della rotazione sul piano ortogonale a v. Si ottiene quindi immediatamente $\cos\vartheta = 3/5$.

Esercizio 2. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Scrivere una matrice triangolare superiore B_1 simile alla matrice A che abbia **esattamente due** coefficienti fuori dalla diagonale che siano diversi da 0, precisando rispetto a quale base si sia scritta B_1.

2. Scrivere una matrice triangolare superiore B_2 simile alla matrice A che abbia **esattamente un** coefficiente fuori dalla diagonale che sia diverso da 0, precisando rispetto a quale base si sia scritta B_2.

Soluzione. Capiamo innanzitutto quali siano gli autovalori di A. Un calcolo di polinomio caratteristico, usando Sarrus nell'ultimo passaggio, fornisce facilmente

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(t\operatorname{Id} - A) &= \det \begin{pmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix} \\ &\overset{[2]+[3]}{=} \det \begin{pmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 1 & t-1 & t \end{pmatrix} \\ &= (t-1)\det \begin{pmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = (t-1)\left(t(t-3)+1+1\right), \end{aligned}$$

ovvero $p_A(t) = (t-1)^2(t-2)$. Cerchiamo autovettori corrispondenti agli autovalori 1 e 2.

- $\lambda = 1$: si ha $\ker(A - \operatorname{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $\lambda = 2$: si ha $\ker(A - 2\operatorname{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poniamo $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si osservi che, se v_3 è un qualsiasi vettore tale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, scrivendo la matrice A in base $\mathcal{B}$ si ottiene una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star_1 \\ 0 & 2 & \star_2 \\ 0 & 0 & \star_3 \end{pmatrix},$$

in quanto i primi due vettori di base sono autovettori di autovalori rispettivi $1, 2$. Si noti inoltre che $\star_3 = 1$, in quanto sulla diagonale di una matrice triangolare compaiono esattamente gli autovalori.

Si tratta quindi di scegliere opportunamente v_3 in modo da avere uno oppure due dei coefficienti $\star_1, \star_2$ non nulli.

Scegliamo il vettore v_3 arbitrariamente – per esempio, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per semplicità – e vediamo quanto valgono i coefficienti $\star_1, \star_2$. Dal momento che

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 - v_2 + v_3,$$

se scriviamo la matrice A nella base $\{v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il che risponde alla domanda (1). Infine, per rispondere alla domanda (2), cerchiamo un vettore v_3' tale che in base $\{v_1, v_2, v_3'\}$ la matrice risulti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè una delle matrici più semplici con esattamente un coefficiente fuori dalla diagonale non nullo. Se troviamo una tale base avremo certamente risposto alla domanda (2). Il vettore $v_3' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve quindi rispettare $Av_3' = v_1 + v_3'$, ovvero

$$(A - \mathrm{Id})v_3' = v_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di equazioni per x, y, z risulta allora

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - y + z = 0 \\ x = 1 \\ y - z = 2. \end{cases}$$

La prima e ultima equazione sono equivalenti, per cui come v_3' si può prendere un qualsiasi vettore della forma $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y-2 \end{pmatrix}$ (che insieme a v_1, v_2 formi una base; ad esempio la scelta $y = 1$ funziona).

Nella base $\{v_1, v_2, v_3'\}$, come già discusso, la matrice A si riscrive come $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Osservazione. Si osservi che la scelta di trovare una base rispetto alla quale A si scriva nella forma $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non avrebbe funzionato: in effetti, la matrice C è diagonalizzabile (esercizio!), mentre A non lo è, per cui non esiste alcuna base rispetto alla quale A diventi C.

Esercizio 3. Fissato un intero positivo n consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Per ogni matrice $A \in V$ consideriamo inoltre l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} L_A: & V & \to & V \\ & M & \mapsto & AM. \end{array}$$

1. Supponiamo che λ sia autovalore di A di molteplicità geometrica m. Qual è la molteplicità geometrica dell'autovalore λ di L_A?

2. Dimostrare che L_A è diagonalizzabile se e solo se A è diagonalizzabile.

3. Sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito positivo $\varphi(M_1, M_2) = \operatorname{tr}({}^tM_1 \cdot M_2)$. Per quali matrici A l'applicazione lineare L_A è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare φ?

4. Dimostrare che L_A è ortogonale rispetto al prodotto scalare φ se e soltanto se A è una matrice ortogonale.

Soluzione.

1. Consideriamo una matrice M, di colonne $v_1, \ldots, v_n$, che sia autovettore di L_A per un certo autovalore λ. Si ha allora $L_A(M) = \lambda M$; ricordando che il prodotto AM non è altro che la matrice che ha per colonne $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$, otteniamo

$$\left(Av_1 \mid Av_2 \mid \cdots \mid Av_n\right) = \left(\lambda v_1 \mid \lambda v_2 \mid \cdots \mid \lambda v_n\right),$$

ovvero: M è autovettore per L_A di autovalore λ se e solo se ognuna delle sue colonne è autovettore per A di autovalore λ. In particolare, gli autovalori di A e di L_A coincidono.

Sia ora λ un autovalore di A (o equivalentemente di L_A) e sia W_A l'autospazio di A relativo all'autovalore λ. Affermiamo che l'autospazio di L_A relativo al medesimo autovalore λ, chiamiamolo V_λ, è la somma diretta dei sottospazi

$$V_{\lambda,i} = \left\{ M \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{la } i\text{-esima colonna di } M \text{ è in } W_A \\ \text{le altre colonne di } M \text{ sono nulle} \end{array} \right\}.$$

Infatti: ogni matrice $\left(w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n\right)$ le cui colonne stiano in W_A si può scrivere come

$$\left(w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n\right) = \left(w_1 \mid 0 \mid \cdots \mid 0\right) + \left(0 \mid w_2 \mid \cdots \mid 0\right) + \cdots + \left(0 \mid 0 \mid \cdots \mid w_n\right),$$

dove i vari addendi sono in $V_{\lambda,1}, \ldots, V_{\lambda,n}$. Questo dimostra che $V_\lambda = W_{\lambda,1} + \cdots + W_{\lambda,n}$. D'altra parte, l'intersezione fra $V_{\lambda,i}$ e la somma degli altri $V_{\lambda,j}$ (con $j \neq i$) è banale, in quanto una matrice che sta in $V_{\lambda,i}$ ha tutte le colonne nulle tranne la i-esima, mentre una matrice che sta nella somma dei $V_{\lambda,j}$ con $j \neq i$ ha la i-esima colonna banale. Questo conclude la verifica che $V_\lambda = V_{\lambda,1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda,n}$. Infine, ogni $V_{\lambda,i}$ è chiaramente isomorfo a W_λ (l'isomorfismo manda una matrice di $V_{\lambda,i}$ nella sua i-esima colonna). Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \dim V_\lambda &= \dim\left(V_{\lambda,1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda,n}\right) \\ &= \dim V_{\lambda,1} + \cdots + \dim V_{\lambda,n} \\ &= \dim W_\lambda + \cdots + \dim W_\lambda \\ &= n \dim W_\lambda. \end{aligned}$$

Per definizione, $\dim W_\lambda = m$, per cui $\dim V_\lambda = n \cdot m$.

2. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori di A, di molteplicità algebriche $a_1, \ldots, a_r$ e molteplicità geometriche $g_1, \ldots, g_r$. Siano poi $g_1', \ldots, g_r'$ le molteplicità geometriche dei medesimi autovalori per L_A. La condizione di diagonalizzabilità si scrive $g_1 + \cdots + g_r = n$ per la matrice A, e $g_1' + \cdots + g_r' = \dim V = n^2$ per l'endomorfismo L_A. Dal momento che abbiamo dimostrato che $g_i' = n \cdot g_i$ per ogni i, la seconda condizione si riscrive come $n(g_1 + \cdots + g_r) = n^2$, ed è quindi chiaramente equivalente alla prima.

3. Mostreremo che L_A è autoaggiunta rispetto a φ se e solo se A è simmetrica. Per definizione, L_A è autoaggiunta se e solo se vale $\varphi(L_A M_1, M_2) = \varphi(M_1, L_A M_2)$ per ogni scelta di matrici $M_1, M_2 \in V$. Confrontiamo

$$\varphi(L_A M_1, M_2) = \operatorname{tr}\left({}^t(AM_1)M_2\right) = \operatorname{tr}\left({}^tM_1{}^tAM_2\right)$$

con

$$\varphi(M_1, L_A M_2) = \operatorname{tr}\left({}^tM_1 A M_2\right).$$

Osserviamo innanzitutto che se A è simmetrica, allora ${}^tA = A$ e le due espressioni qui sopra coincidono. Per mostrare il viceversa (ovvero che L_A autoaggiunta implica A è simmetrica) riscriviamo

$$\varphi(L_A M_1, M_2) = \operatorname{tr}\left({}^tM_1 {}^tA M_2\right) = \varphi(M_1, {}^tA M_2).$$

Tale quantità deve essere uguale a $\varphi(M_1, L_A M_2) = \varphi(M_1, AM_2)$, e quindi, per differenza, si deve avere

$$0 = \varphi(M_1, {}^tAM_2) - \varphi(M_1, AM_2) = \varphi(M_1, ({}^tA - A)M_2).$$

Dato che questo vale per ogni M_1 e che il prodotto scalare φ è non-degenere (in quanto definito positivo), otteniamo che $({}^tA - A)M_2 = 0$. Ma siccome questo deve valere per ogni M_2, e quindi in particolare per $M_2 = \mathrm{Id}$, otteniamo ${}^tA - A = 0$, cioè ${}^tA = A$, ovvero A è simmetrica come affermato.

Nota. Osserviamo che abbiamo dimostrato $\varphi(L_A M_1, M_2) = \varphi(M_1, {}^tAM_2) = \varphi(M_1, L_{{}^tA} M_2)$, ovvero $L_A^* = L_{{}^tA}$.

4. Un modo di scrivere la condizione di ortogonalità è richiedere che valga

$$\varphi(L_A M_1, L_A M_2) = \varphi(M_1, M_2)$$

per ogni scelta di $M_1, M_2 \in V$. Usando il fatto che $L_A^* = L_{{}^tA}$ appena dimostrato, la condizione precedente si riscrive come

$$\varphi(M_1, L_A^* L_A M_2) = \varphi(M_1, L_{{}^tA} L_A M_2) = \varphi(M_1, M_2),$$

ovvero

$$\varphi(M_1, {}^tAAM_2) = \varphi(M_1, M_2). \tag{4}$$

Come prima, se A è una matrice ortogonale, ovvero vale ${}^tAA = \mathrm{Id}$, la condizione precedente è evidentemente soddisfatta. Viceversa, supponiamo che la condizione (4) sia soddisfatta. Siccome il prodotto scalare φ è non-degenere e tale uguaglianza vale per ogni matrice M_1, otteniamo ${}^tAAM_2 = M_2$, per ogni matrice M_2. In particolare, scegliendo $M_2 = \mathrm{Id}$ otteniamo ${}^tAA = \mathrm{Id}$, ovvero A è ortogonale, come voluto.

5.4 Compito del 18/05/2022

Test.

1. Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi reali di grado al massimo 2, con base $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$, e $W = \mathbb{R}^4$, con base canonica $\mathcal{B}_2 = \{e_1, \dots, e_4\}$. Consideriamo l'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ data da $\varphi(p(x)) = (p(-1), p(0), p(1), p(2))$.
   (a) Scrivere la matrice di φ dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$:
   (b) Scrivere equazioni cartesiane per l'immagine di φ:
   (c) Determinare una base dell'intersezione dell'immagine di φ con il sottospazio di W descritto dall'equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$:

Soluzione.

(a) Per definizione, si tratta di calcolare $\varphi(p(x))$ per $p(x) = 1, x, x^2$ ed esprimere i risultati nella base di arrivo. La definizione data nel testo della funzione φ fornisce il vettore $\varphi(p(x))$ già scritto in base canonica, per cui possiamo calcolare immediatamente

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Si osservi che φ è iniettiva (l'unico polinomio di grado al massimo due che si annulli nei 4 punti $-1, 0, 1, 2$ è il polinomio nullo), dunque l'immagine di φ ha dimensione pari a $\dim V = 3$. Ne segue che l'immagine di φ sarà descritta da una singola equazione cartesiana. Per determinarla, possiamo procedere o ad un'eliminazione di Gauss per colonne sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix},$$

oppure, in alternativa, cercare un'equazione della forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ che sia soddisfatta dai tre vettori scritti sopra. Questo fornisce le condizioni

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 + a_3 + 4a_4 = 0. \end{cases}$$

Utilizziamo questo secondo metodo. Sommando le ultime due equazioni troviamo $2a_3 + 6a_4 = 0$, cioè $a_3 = -3a_4$. Sostituendo nella seconda equazione questo fornisce $-a_1 - a_4 = 0$, cioè $a_1 = -a_4$. A questo punto, la prima equazione fornisce $a_2 = -a_3 = 3a_4$. I coefficienti (a_1, a_2, a_3, a_4) sono quindi proporzionali a $(-1, 3, -3, 1)$. L'equazione cartesiana cercata è quindi $-x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$, o qualsiasi altra equazione (non nulla) ad essa proporzionale.

Osservazione 1. Si noti che è facile controllare il risultato, semplicemente sostituendo le coordinate dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ nell'equazione trovata e verificando che essa sia soddisfatta.

Osservazione 2. L'equazione desiderata può essere trovata anche imponendo l'annullamento del determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 4 & x_4 \end{pmatrix}:$$

in effetti, siccome le prime tre colonne di questa matrice sono linearmente indipendenti, il vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente da esse (ovvero appartiene al loro span) se e solo se la matrice ha rango 3, se e solo se non è invertibile, o ancora se e solo se il determinante si annulla.

(c) Si chiede di trovare una base per il sottospazio dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni non sono proporzionali, quindi il rango della matrice del sistema è 2. La dimensione dello spazio delle soluzioni è quindi $4 - 2 = 2$: per trovare una base è dunque sufficiente esibire due vettori linearmente indipendenti che siano soluzione del sistema. Sommando le due equazioni date troviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$

di cui è facile trovare due soluzioni indipendenti ponendo prima $x_3 = 2, x_4 = 0$ (che fornisce $x_2 = 1, x_1 = -3$) e poi $x_3 = 0, x_4 = 2$ (che fornisce $x_2 = -1, x_1 = -1$). Una possibile risposta alla domanda è quindi

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$...........................
   (b) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale rispetto a φ:

Soluzione. Procediamo ad una eliminazione di Gauss simmetrica, tenendo simultaneamente traccia delle mosse effettuate (ovvero, effettuiamo le medesime mosse, ma solo per colonne, sulla matrice identità).

(a) Sottraiamo la prima riga/colonna dalla seconda riga/colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Sottraiamo il doppio della prima riga/colonna dalla terza riga/colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così simultaneamente la risposta ad entrambe le domande: la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$ (data dai segni degli elementi diagonali della prima matrice), e una base ortogonale è data dalle colonne dell'ultima matrice scritta, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sia M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 11 & 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare $\det(M) =$............

(b) Siano $W_1 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\7\end{pmatrix}$ e $W_2 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\7\\12\end{pmatrix}$. Consideriamo i sottospazi affini $\Pi_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + W_1$ e $\Pi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + W_2$. In quanti punti si intersecano Π_1 e Π_2?

☐ Nessuno ☐ Uno ☐ Più di uno, ma un numero finito ☐ Infiniti

Soluzione.

(a) Come noto, mosse di Gauss che sommino ad una riga (rispettivamente colonna) un multiplo di un'altra riga (rispettivamente colonna) non cambiano il determinante. Applichiamo allora alcune di tali mosse di Gauss per semplificare il calcolo: sottraendo il doppio della prima riga dalla seconda, tre volte la prima riga dalla terza, e 7 volte la prima riga dalla quarta otteniamo la matrice (con medesimo determinante)

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&4\\4&0&0&5\end{pmatrix}.$$

Uno sviluppo di Laplace rispetto alla seconda riga fornisce allora

$$\det M = \det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\4&0&0\end{pmatrix} = 4,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la regola di Sarrus.

(b) Poniamo $P_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. Chiamiamo inoltre v_1, v_2, v_3, v_4 le colonne di M. La domanda equivale a studiare le soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dell'equazione

$$P_1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = P_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4,$$

in quanto il membro sinistro (rispettivamente destro) di questa equazione rappresenta il generico punto di Π_1 (rispettivamente Π_2). Riarrangiando si ottiene

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 - \lambda_4 v_4 = P_2 - P_1,$$

ovvero

$$M\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\-\lambda_3\\-\lambda_4\end{pmatrix} = P_2 - P_1.$$

Dal momento che $\det(M) \neq 0$, questa equazione ha una e una sola soluzione $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\-\lambda_3\\-\lambda_4\end{pmatrix}$, e quindi Π_1, Π_2 si incontrano in uno e un solo punto.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia M una matrice 3×3 a coefficienti complessi il cui polinomio minimo è $(t-1)^2(t+1)$.

1. Dimostrare che esistono una matrice P invertibile e un numero complesso $a \neq 0$ tale che $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Sia $q(t) = t(t-1)$. Determinare il polinomio minimo di $q(M)$.

Soluzione.

1. Gli autovalori di M coincidono con le radici del polinomio minimo, ovvero sono ± 1. Siano $v_{\pm 1}$ autovettori relativi rispettivamente agli autovalori ± 1. Sia inoltre v un qualsiasi vettore tale che $\mathcal{B} = \{v_1, v, v_{-1}\}$ sia una base di $\mathbb{C}^3$. Osserviamo che, siccome questa è una base, esistono coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ tali che
$$T(v) = av_1 + bv + cv_{-1}.$$
Si ha inoltre $b = 1$, in quanto l'applicazione lineare corrispondente ad M, scritta rispetto alla base $\mathcal{B}$, dà la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di tale matrice devono essere $1, 1, -1$, e d'altro canto un semplice calcolo diretto mostra che sono $1, b, -1$, da cui come affermato $b = 1$. Poniamo ora $w = v + \frac{c}{2}v_{-1}$ e osserviamo che $\{v_1, w, v_{-1}\}$ è ancora una base (in quanto la sostituzione $v \to w$ non altera lo span dei vettori considerati). Si ha
$$T(w) = T(v + \frac{c}{2}v_{-1}) = T(v) + \frac{c}{2}T(v_{-1}) = av_1 + v + cv_{-1} - \frac{c}{2}v_{-1} = av_1 + w,$$
dove si è usato il fatto che $T(v_{-1}) = -v_{-1}$ per definizione di autovettore. Da questo calcolo e dalle definizioni segue allora che, rispetto alla base $\{v_1, w, v_{-1}\}$, l'applicazione lineare corrispondente ad M si rappresenta con la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
come voluto. Si noti che $a \neq 0$: il polinomio minimo di M ha un fattore ripetuto, quindi M non è diagonalizzabile, e quindi a non può essere nullo.
Nota. Il vettore w è stato trovato come segue: ponendo genericamente $w = v + \lambda v_{-1}$ e sviluppando, si ottiene $T(w) = av_1 + v + (c - \lambda)v_{-1}$. La condizione che la seconda colonna della matrice sia del tipo $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ci dice allora che tale espressione deve essere uguale a $av_1 + w$, cioè vorremmo $v + \lambda v_{-1} = v + (c - \lambda)v_{-1}$. L'equazione $\lambda = (c - \lambda)$ fornisce allora $\lambda = \frac{c}{2}$.
2. Il polinomio minimo è indipendente dalla base, quindi possiamo calcolare il polinomio minimo di $q(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha
$$q(A) = A \cdot (A - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Questa matrice è triangolare, quindi i suoi autovalori sono $0, 0, 2$. Per il teorema di Cayley-Hamilton, il polinomio minimo $\mu(t)$ è un divisore di $t^2(t-2)$, e sappiamo inoltre che $\mu(t)$ ha sia 0 che 2 come radici. Ne segue che $\mu(t) = t(t-2)$ oppure $\mu(t) = t^2(t-2)$. D'altro canto, se valutiamo $t(t-2)$ in $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ otteniamo che
$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è la matrice nulla (in quanto $a \neq 0$), quindi per esclusione il polinomio minimo deve essere $t^2(t-2)$.

Esercizio 2. Siano T_1 e T_2 gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che, in base canonica, sono rappresentati dalle matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Dire se T_1 è diagonalizzabile; in caso affermativo, esibire una base diagonalizzante.
2. Dire se T_2 è diagonalizzabile; in caso affermativo, esibire una base diagonalizzante.
3. Dimostrare che non esiste alcun prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale T_1 sia autoaggiunto.
4. ($\star$) Dimostrare che esiste un prodotto scalare definito positivo φ_2 su $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale T_2 sia autoaggiunto. Scrivere la matrice di un prodotto scalare φ_2 con queste proprietà in base canonica.

Soluzione.

1. Calcoliamo intanto il polinomio caratteristico: si ha

$$\begin{aligned} p_{M_1}(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -5 & 5 \\ 0 & t-5 & 4 \\ 4 & -8 & t+2 \end{pmatrix} &\overset{[3]+[2]}{=} \det \begin{pmatrix} t-1 & -5 & 0 \\ 0 & t-5 & t-1 \\ 4 & -8 & t-6 \end{pmatrix} = \\ &= (t-1)(t-5)(t-6) - 20(t-1) + 8(t-1)^2 \\ &= (t-1)(t^2 - 11t + 30 - 20 + 8t - 8) \\ &= (t-1)(t^2 - 3t + 2) \\ &= (t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore 1: si ha

$$\ker(M_1 - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha evidentemente rango (almeno) pari a 2, in quanto le prime due colonne sono fra loro non proporzionali. Ne segue che l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione al massimo 1 (e quindi in effetti esattamente 1), e cioè che $m_{\mathrm{geo}}(1) = 1 < 2 = m_{\mathrm{alg}}(1)$. L'endomorfismo T_1 quindi non è diagonalizzabile.

2. Come prima iniziamo calcolando il polinomio caratteristico,

$$\begin{aligned} p_{M_2}(t) = \det \begin{pmatrix} t-4 & 6 & 0 \\ -7 & t+1 & 6 \\ -6 & 6 & t+2 \end{pmatrix} &\overset{[3]-[1]}{=} \det \begin{pmatrix} t-4 & 6 & 0 \\ -7 & t+1 & 6 \\ -2-t & 0 & t+2 \end{pmatrix} \\ = (t+2) \det \begin{pmatrix} t-4 & 6 & 0 \\ -7 & t+1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\overset{[2]-6[3]}{=} (t+2) \det \begin{pmatrix} t-4 & 6 & 0 \\ -1 & t+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \overset{\text{Laplace}}{=} (t+2) \det \begin{pmatrix} t-4 & 6 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix} &= (t+2)((t-4)(t+1)+6) \\ = (t+2)(t^2 - 3t + 2) &= (t+2)(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Vediamo allora che gli autovalori di T_2 sono tutti reali e di molteplicità algebrica 1, da cui segue che T_2 è diagonalizzabile.

Una base diagonalizzante può essere trovata calcolando i nuclei di $M_2 - \lambda \,\mathrm{Id}$ per $\lambda = -2, 1, 2$. Si trova facilmente la base

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Se esistesse un prodotto scalare definito positivo φ_1 tale che T_1 sia autoaggiunto rispetto a φ_1, il teorema spettrale implicherebbe che T_1 è diagonalizzabile. Siccome questo non accade, φ_1 non può esistere.

4. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base diagonalizzante per T_2 (che esiste per quanto visto al punto 2) e sia φ_2 l'unico prodotto scalare definito positivo per cui v_1, v_2, v_3 è una base ortonormale. Lavorando in base $\mathcal{B}$, e supponendo che v_1, v_2, v_3 corrispondano rispettivamente agli autovalori $-2, 1, 2$, abbiamo

$$[T_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad [\varphi_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che stiamo lavorando in una base $\mathcal{B}$ che è ortonormale per il prodotto scalare definito positivo φ_2, la matrice di T_2^* (aggiunto preso rispetto a φ_2) in base $\mathcal{B}$ è la trasposta della matrice di T_2, e quindi in particolare coincide con la matrice di T_2 in base $\mathcal{B}$. Questo prova che $T_2^* = T_2$: si tratta ora semplicemente di scrivere la matrice in base canonica del prodotto scalare φ_2.

Scriviamo i vettori della base canonica in termini dei vettori della base $\mathcal{B}$ (equivalentemente, invertiamo la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$). Tramite l'algoritmo di eliminazione di Gauss troviamo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-[1]} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-3[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]+2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[2]-2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{-[2],-[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così ottenuto $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $[e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice di φ_2 in base canonica ha come coefficienti i prodotti scalari $\varphi_2(e_i, e_j)$, che possono essere calcolati tramite la formula

$$\varphi_2(e_i, e_j) = {}^t[e_i]_{\mathcal{B}} \cdot [\varphi_2]_{\mathcal{B}} \cdot [e_j]_{\mathcal{B}};$$

equivalentemente,

$$[\varphi_2]_{\text{canonica}} = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & 19 & -37 \\ 19 & 13 & -24 \\ -37 & -24 & 46 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. In questo esercizio denotiamo con I_n la matrice identità $n \times n$.

1. Ricordare perché, se T è una matrice $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ **non è** un autovalore di T, allora $T - \lambda I_n$ è invertibile.

2. Sia O una matrice a coefficienti reali $n \times n$ ortogonale. Supponiamo che O non abbia -1 come autovalore. Dimostrare che $O + I_n$ è invertibile e che $A = (O + I_n)^{-1}(O - I_n)$ è una matrice antisimmetrica.

3. Viceversa, sia A una matrice antisimmetrica $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare che $I_n - A$ è invertibile e che, posto $O = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$, la matrice O è ortogonale e non ha -1 come autovalore.

4. Sia A una matrice antisimmetrica 3×3. Dimostrare che $R := (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$ è una rotazione (eventualmente uguale all'identità), e determinarne l'insieme dei punti fissi in funzione di A, precisando in particolare le possibili dimensioni del sottospazio dei punti fissi di R.

Soluzione.

1. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0. Il determinante di $T - \lambda I_n$ è per definizione il polinomio caratteristico di T valutato in λ: siccome λ non è un autovalore, $p_T(\lambda) \neq 0$, e quindi $T - \lambda I_n$ è invertibile, come voluto.

2. Il fatto che $O + I_n$ sia invertibile segue immediatamente dal caso $\lambda = -1$ del punto precedente. Mostriamo ora che la matrice A è antisimmetrica. Ricordando che il trasposto di un prodotto è il prodotto dei trasposti *nell'ordine ivnerso* si ha
$$^tA = {}^t(O - I_n) \cdot {}^t(O + I_n)^{-1}.$$
Come noto, le operazioni di invertire e trasporre una matrice quadrata commutano; usando questo fatto e la linearità della trasposizione, l'espressione precedente si può scrivere come
$$^tA = ({}^tO - I_n)({}^tO + I_n)^{-1}.$$
Ricordiamo ora che per definizione di matrice ortogonale si ha ${}^tO = O^{-1}$, per cui – continuando dall'espressione precedente – si trova
$$^tA = (O^{-1} - I_n)(O^{-1} + I_n)^{-1}.$$
Mostriamo ora che tale espressione è uguale $-A = (O + I_n)^{-1}(I_n - O)$, ovvero che vale
$$(O^{-1} - I_n)(O^{-1} + I_n)^{-1} = (O + I_n)^{-1}(I_n - O).$$
Moltiplicando per le matrici invertibili $O^{-1} + I_n$ e $O + I_n$, l'uguaglianza desiderata si riscrive in modo equivalente come
$$(O + I_n)(O^{-1} - I_n) \stackrel{?}{=} (I_n - O)(O^{-1} + I_n);$$
sviluppando entrambi i membri troviamo
$$OO^{-1} + O^{-1} - O - I_n \stackrel{?}{=} O^{-1} + I_n - OO^{-1} - O,$$
il che (usando $OO^{-1} = I_n$) è evidentemente vero.

3. Una matrice antisimmetrica ha tutti gli autovalori immaginari puri (eventualmente nulli), quindi 1 non è un autovalore di A, e l'invertibilità di $I_n - A$ segue dal punto 1. La matrice O è quindi ben definita; per mostrare che è ortogonale vogliamo verificare che la sua inversa e la sua trasposta coincidono, ovvero che

$$O^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

è uguale a

$$\begin{aligned} {}^tO &= {}^t(I_n + A) \cdot {}^t(I_n - A)^{-1} \\ &= (I_n + {}^tA) \cdot (I_n - {}^tA)^{-1} \\ &= (I_n - A) \cdot (I_n + A)^{-1}, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che A è antisimmetrica per sostituire ${}^tA$ con $-A$. L'uguaglianza voluta è quindi

$$(I_n + A)^{-1}(I_n - A) \stackrel{?}{=} (I_n - A) \cdot (I_n + A)^{-1},$$

che è equivalente alla relazione

$$(I_n - A)(I_n + A) \stackrel{?}{=} (I_n + A)(I_n - A),$$

la quale è evidentemente vera, perché A e I_n commutano con se stesse e fra loro. Infine, supponiamo per assurdo che O abbia -1 come autovalore, e sia v un corrispondente autovettore. Si ottiene allora

$$Ov = -v \Leftrightarrow (I_n - A)^{-1}(I_n + A)v = -v \Leftrightarrow (I_n + A)v = -(I_n - A)v \Leftrightarrow v + Av = -v + Av,$$

cioè $v = 0$, il che contraddice la definizione di autovettore.

4. La matrice R è ortogonale per il punto precedente, e siccome siamo in dimensione 3 e R non ammette -1 come autovalore (sempre per il punto precedente) sappiamo dalla teoria che essa rappresenta una rotazione (ovvero una trasformazione ortogonale di determinante $+1$). Per determinarne l'asse fisso cerchiamo di caratterizzare quei vettori v tali che

$$Rv = v \Leftrightarrow (I_n - A)^{-1}(I_n + A)v = v \Leftrightarrow (I_n + A)v = (I_n - A)v \Leftrightarrow 2Av = 0.$$

Vediamo quindi che l'autospazio di R relativo all'autovalore 1 coincide con il nucleo di A. Ricordando che:

(a) una matrice antisimmetrica è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, quindi in particolare la dimensione del suo nucleo (=molteplicità geometrica dell'autovalore 0) coincide con la molteplicità algebrica dell'autovalore 0;

(b) gli autovalori di una matrice antisimmetrica sono immaginari puri, e quindi in particolare gli autovalori diversi da 0 compaiono a coppie di complessi coniugati (che in questo caso sono anche opposti, essendo immaginari puri);

otteniamo che A può avere o 0 o 2 autovalori diversi da 0, e per differenza può avere nucleo di dimensione 3 oppure 1. Il primo caso avviene se e solo se $A = 0$: si ha allora $R = I_3$ e ogni punto di $\mathbb{R}^3$ è fisso (quindi la dimensione richiesta è 3). In ogni altro caso, $\ker A$ ha dimensione 1, il nucleo di A coincide esattamente con l'unico asse fisso di R, e la dimensione richiesta è 1.

5.5 Compito dell'11/06/2022

Test.

1. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita dai tre vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Sia $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare identità.

(a) Scrivere la matrice di I rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica in arrivo:

$$[I]^{\mathcal{B}}_{\text{can}} =$$

(b) Scrivere la matrice di I rispetto alla base canonica in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo:

$$[I]^{\text{can}}_{\mathcal{B}} =$$

Soluzione.

(a) Le colonne della matrice richiesta sono i vettori $I(v_1), I(v_2), I(v_3)$ scritti nella base d'arrivo, ovvero la base canonica. La risposta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Dalla teoria sappiamo che la matrice in questione è l'inversa della matrice trovata al punto precedente. Possiamo allora utilizzare l'algoritmo per invertire matrici basato sull'eliminazione di Gauss. Si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[1]-[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]+[2],-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La risposta è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Consideriamo i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ dati da

$$V = \ker f, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

dove f è l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x+y+z. \end{array}$$

(a) Determinare una base per $V \cap W$:

(b) Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ da W: ....

Soluzione.

(a) Determiniamo innanzitutto un'equazione cartesiana per W: questo può essere fatto ad esempio calcolando il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2z + 2y - 6z - 2x = 2y - 2x - 4z.$$

Come noto, un'equazione di W è data allora da $2y - 2x - 4z = 0$, ovvero equivalentemente $y - x - 2z = 0$. La descrizione di V come nucleo mostra invece che V è l'insieme delle soluzioni dell'equazione cartesiana $x + y + z = 0$. L'intersezione $V \cap W$ è quindi data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - x - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 2z \\ x + (x + 2z) + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 2z = \frac{1}{2}z \\ x = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi i multipli del vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che costituisce perciò una base dell'intersezione.

(b) Dall'equazione di W otteniamo subito che il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ovvero il vettore dei coefficienti con cui le variabili x, y, z appaiono nell'equazione, genera la retta perpendicolare al piano W. Possiamo allora trovare la proiezione del punto P sul piano W: consideriamo la retta passante per P e generata dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ovvero la retta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, rappresentabile in forma parametrica come

$$\begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + t \\ 3 - 2t \end{pmatrix}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$. Tale retta interseca il piano W nel punto corrispondente all'unico valore di t per cui le coordinate $\begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + t \\ 3 - 2t \end{pmatrix}$ soddisfano l'equazione di W. Sostituendo, troviamo

$$(1 + t) - (1 - t) - 2(3 - 2t) = 0 \iff 6t - 6 = 0,$$

cioè $t = 1$. La proiezione di P su W è quindi data da $Q = P + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; la distanza di P da W è per definizione la distanza di P dalla sua proiezione su W, distanza che è pari alla lunghezza del vettore $Q - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La distanza voluta è quindi $\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

3. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di M e le rispettive molteplicità algebriche:

(b) Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori per M che sia anche ortogonale rispetto al prodotto scalare standard. Se esiste, esibirne una.

☐ Una tale base non esiste. ☐ Una tale base esiste, ad esempio:

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico,

$$
\begin{aligned}
p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) &= \det \begin{pmatrix} t-2 & -5 & -5 \\ -5 & t-2 & -5 \\ -5 & -5 & t-2 \end{pmatrix} \\
&\overset{[3]-[1]}{=} \det \begin{pmatrix} t-2 & -5 & -5 \\ -5 & t-2 & -5 \\ -t-3 & 0 & t+3 \end{pmatrix} = (t+3)\det \begin{pmatrix} t-2 & -5 & -5 \\ -5 & t-2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{[1]+5[3],[2]+5[3]}{=} (t+3)\det \begin{pmatrix} t-7 & -5 & 0 \\ -10 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (t+3)\left((t-7)(t-2)-50\right) = (t+3)(t^2-9t-36) = (t+3)^2(t-12).
\end{aligned}
$$

Gli autovalori sono quindi -3, di molteplicità algebrica 2, e 12, di molteplicità algebrica 1.

(b) La risposta è positiva per il teorema spettrale. Troviamo esplicitamente una base con le caratteristiche volute, studiando gli autospazi di M.

i. L'autospazio relativo all'autovalore -3 è dato da $\ker(M+3\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Una base è data da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ma tali vettori non sono ortogonali. Un passo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt fornisce però una base dell'autospazio che è anche ortogonale, ovvero quella formata da

$$
w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

ii. L'autospazio relativo all'autovalore 12 è dato da $\ker(M-12\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

Una base di tale spazio è data ad esempio dal vettore $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si osservi che tale vettore è ortogonale a w_1, w_2, come garantito dal teorema spettrale.

Una possibile risposta è quindi data da

$$
w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Consideriamo il prodotto scalare φ su V dato da

$$
\varphi(M_1, M_2) = \mathrm{tr}\left((M_1 + M_1^t)(M_2 + M_2^t)\right),
$$

dove tr indica la traccia e M^t è la matrice trasposta di M.

1. Scrivere una base di $V^\perp = \{v \in V : \varphi(v,w) = 0 \quad \forall w \in V\}$.
2. Determinare la segnatura di φ.

3. Sia $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Determinare una base di $W^\perp$.

Soluzione.

(a) e (b) Si osservi che se M_1, M_2 sono simmetriche si ha $\varphi(M_1, M_2) = \operatorname{tr}((2M_1^t)(2M_2)) = 4\langle M_1, M_2$, dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare 'standard' sullo spazio delle matrici quadrate discusso ad esercitazione. Sappiamo in particolare che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è definito positivo, per cui la restrizione di φ al sottospazio $\mathcal{S}$ delle matrici simmetriche è definito positivo. Dato che $\dim \mathcal{S} = 3$ ne segue in particolare $n_+ \geq 3$. D'altro canto, se A è una matrice antisimmetrica si ha $\varphi(A, M) = \operatorname{tr}((A + A^t)(M + M^t)) = \operatorname{tr}((A - A)(M + M^t)) = 0$ per ogni matrice M, quindi il sottospazio $\mathcal{A}$ delle matrici antisimmetriche è contenuto in $V^\perp$. Da questo segue che $n_0 = \dim V^\perp \geq \dim \mathcal{A} = 1$, e siccome $n_+ + n_- + n_0 = 4$ otteniamo $n_+ = 3, n_- = 0, n_0 = 1$ e che $V^\perp = \mathcal{A}$. Infine, una base di $\mathcal{A} = V^\perp$ è data dalla singola matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

(c) Siano M_1, M_2 le matrici date nel testo e sia M una qualsiasi matrice 2×2, che come noto si può scrivere come $M_s + M_a$ con M_s simmetrica ed M_a antisimmetrica. Si ha $\varphi(M_1, M) = \varphi(M_1, M_s + M_a) = \varphi(M_1, M_s) + \varphi(M_1, M_a)$, e per quanto detto sopra $\varphi(M_1, M_a) = 0$ indipendentemente da M_a. Lo stesso ragionamento vale per M_2, per cui otteniamo che $W^\perp$ è dato da $\mathcal{A} + Z$, dove Z è l'ortogonale a W all'interno del sottospazio delle matrici simmetriche. Presa una generica matrice simmetrica $M_s = \begin{pmatrix}x & y\\y & z\end{pmatrix}$ calcoliamo

$$\varphi(M_1, M_s) = 4\operatorname{tr}(M_1 M_s) = 4\operatorname{tr}\begin{pmatrix}x & y\\0 & 0\end{pmatrix} = x,$$

$$\varphi(M_2, M_s) = 4\operatorname{tr}(M_2 M_s) = 4\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\y & z\end{pmatrix} = z.$$

Vediamo quindi che M_s è ortogonale a M_1, M_2 se e solo se $x = z = 0$. Una base di Z è perciò data da $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, e una base di $W^\perp$ è data da $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Sia $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. È noto che $A^3 = -\mathrm{Id}$ e che A è ortogonale.

1. Calcolare A^2.
2. Dire se -1 è un autovalore di A.

   Suggerimento. Per evitare calcoli complessi può essere utile considerare la traccia di A.
3. Determinare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche.
4. Determinare la forma normale di A, ovvero una matrice che si ottenga da A tramite un cambio di base ortogonale e che sia del tipo

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{Id}_h & & & & & & \\
 & -\mathrm{Id}_k & & & & & \\
 & & \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & & & \\
 & & -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & & & \\
 & & & & \cos\vartheta_2 & \sin\vartheta_2 & \\
 & & & & -\sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 & \\
 & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

per opportuni $h, k \geq 0$ ed angoli $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$

Soluzione.

1. Dato che $A^3 = -\operatorname{Id}$ si ha $A^2 = -A^{-1}$. Sfruttando l'ipotesi che A sia ortogonale, e che quindi $A^{-1} = A^t$, otteniamo allora

$$A^2 = -A^{-1} = -A^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se un autovalore fosse uguale a -1 (e gli altri fossero $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) si avrebbe

$$2 = \operatorname{tr}(A) = -1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4.$$

Dal momento che A è una matrice ortogonale, gli autovalori $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono numeri complessi di modulo 1. D'altra parte, tre numeri complessi di modulo 1 sommano a 3 se e solo se sono tutti e tre uguali ad 1, ma 1 non è un autovalore di A (perché altrimenti sarebbe radice del polinomio minimo di A; come osserveremo al punto successivo, il polinomio minimo divide $q(t) = t^3 + 1$, e $q(1) \neq 0$).

Presentiamo ora una soluzione che passa per un calcolo diretto. Per vedere se -1 sia un autovalore di A, è sufficiente verificare se $A + \operatorname{Id}$ sia o meno invertibile, o equivalentemente se $2A + 2\operatorname{Id}$ lo sia. Tale matrice è data da

$$B := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Controlliamo se il determinante di B sia o meno nullo. Si ha

$$\det(B) \overset{[4]-[2],[3]-[2]}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{[2]-3[1],[3]-[1],[4]+[1]}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -10 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} -10 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sviluppato rispetto alla seconda riga. Possiamo ora estrarre un fattore 2 da ogni riga e sommare la seconda riga alla terza per ottenere

$$\det(B) = -8\det\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{[1]-[2]}{=} -8\det\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Possiamo infine estrarre un fattore 3 dalla prima e dall'ultima riga e utilizzare la regola di Sarrus per ottenere

$$\det B = -8 \cdot 3 \cdot 3 \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -72\,(-1 + 1 + 0 - 0 - 2) = 144 \neq 0.$$

Concludiamo che $A + \operatorname{Id}$ è invertibile, e quindi che -1 non è un autovalore di A.

Osservazione. Notiamo che l'equazione $A^3 = -\operatorname{Id}$ implica $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(-\operatorname{Id}) = (-1)^4 = 1$, da cui $\det(A) = +1$. Gli autovalori di una matrice ortogonale sono o uguali a ± 1, oppure complessi coniugati $\lambda, \overline{\lambda}$ con $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Ne segue facilmente che il segno di $\det(A)$ è $(-1)^{m_{-1}}$, dove m_{-1} è la molteplicità dell'autovalore -1. Otteniamo allora che $m_{-1} \in \{0, 2, 4\}$; inoltre, le matrici ortogonali sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$ (in quanto caso speciale delle matrici unitarie), quindi m_{-1} è anche la molteplicità geometrica di -1. Combinando tutte queste informazioni otteniamo che $\dim\ker(A+\mathrm{Id})$, che è la molteplicità geometrica – e quindi anche la molteplicità algebrica – dell'autovalore -1, può essere solo $0, 2, 4$. Per escludere che -1 sia un autovalore di A è quindi sufficiente verificare che il rango di $A+\mathrm{Id}$ sia almeno 3, il che può essere fatto in diversi modi (ad esempio calcolando un determinante 3×3 di un minore di B, il che è comunque notevolmente più veloce dell'analogo calcolo 4×4).

3. Sia $q(t) = t^3 + 1$. Dal testo sappiamo che $q(A) = 0$, per cui il polinomio minimo di A divide $q(t) = (t+1)(t^2 - t + 1)$. Sappiamo inoltre che gli autovalori di A sono precisamente le radici del polinomio minimo, per cui il fattore $t+1$ è superfluo e il polinomio minimo divide $t^2 - t + 1 = (t - \zeta_6)(t - \overline{\zeta_6})$, dove
$$\zeta_6, \overline{\zeta_6} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{6} \pm i \sin\frac{2\pi}{6}$$
sono le radici primitive seste dell'unità. Siccome il polinomio minimo di una matrice reale ha coefficienti reali, otteniamo che il polinomio minimo di A è $\mu_A(t) = t^2 - t + 1 = (t - \zeta_6)(t - \overline{\zeta_6})$ e che gli autovalori di A sono $\zeta_6, \overline{\zeta_6}$, diciamo di molteplicità a e b rispettivamente. Dato che un autovalore e il suo complesso coniugato si presentano sempre con la stessa molteplicità per una matrice reale, e che chiaramente $a + b = 4$, si deve avere $a = b = 2$.

4. Gli autovalori di A determinano la sua forma normale: in effetti, gli autovalori di una rotazione $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ sono $\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta$, per cui dall'analisi precedente otteniamo che la forma normale di A ha due blocchi corrispondenti a rotazioni (in effetti, A non ha autovalori reali, quindi – nella notazione del testo – si ha $h = k = 0$), e gli angoli di tali rotazioni soddisfano $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm\frac{\pi}{6}$ (si ricorda infatti che gli autovalori di A sono $\cos\frac{2\pi}{6} \pm i \sin\frac{2\pi}{6}$). Una possibile risposta è quindi
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{6} & \sin\frac{2\pi}{6} & & \\ -\sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6} & & \\ & & \cos\frac{2\pi}{6} & \sin\frac{2\pi}{6} \\ & & -\sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6} \end{pmatrix}$$

Osservazione. Gli angoli ϑ_1, ϑ_2 sono univocamente determinati solo a meno del segno: avremmo potuto scegliere ϑ_1, ϑ_2 uguali a $\pm\frac{2\pi}{6}$, eventualmente anche scegliendo i due segni in modo indipendente. Tutte queste scelte sarebbero valide.

5.6 Compito del 09/07/2022

Test.

1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 4. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di V, stabilire se si tratta di un sottospazio vettoriale, di un sottospazio affine ma non vettoriale, o di nessuno dei due. Per ogni sottospazio vettoriale o affine indicare anche la dimensione.

   (a) $W_1 = \{p(x) \in V \mid p'(1) = p''(2) = 0\}$
   ☐ Sottospazio vettoriale di dimensione .... ☐ Sottospazio affine, non vettoriale, di dimensione .... ☐ Non è né un sottospazio affine, né un sottospazio vettoriale

   (b) $W_2 = \{(x-2)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}\}$
   ☐ Sottospazio vettoriale di dimensione .... ☐ Sottospazio affine, non vettoriale, di dimensione .... ☐ Non è né un sottospazio affine, né un sottospazio vettoriale

   (c) $W_3 = \{p(x) \in V \mid p'(1) = 1, p''(2) = 2\}$
   ☐ Sottospazio vettoriale di dimensione .... ☐ Sottospazio affine, non vettoriale, di dimensione .... ☐ Non è né un sottospazio affine, né un sottospazio vettoriale

(d) $W_4 = \{p(x) \in V \mid p(p(0)) = 0\}$
☐ Sottospazio vettoriale di dimensione .... ☐ Sottospazio affine, non vettoriale, di dimensione .... ☐ Non è né un sottospazio affine, né un sottospazio vettoriale

Soluzione. Un elemento di V si scrive in modo unico come $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Utilizziamo $a_0, \dots, a_4$ come coordinate sullo spazio vettoriale V (equivalentemente: scriviamo i vettori di V in coordinate rispetto alla base $x^4, x^3, x^2, x, 1$).

(a) Si tratta di un sottospazio vettoriale di dimensione 3. La condizione data nel testo si scrive
$$\begin{cases} 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ 12a_4 \cdot 2^2 + 6a_3 \cdot 2 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$
Queste equazioni sono chiaramente non proporzionali, e quindi linearmente indipendenti. L'insieme W_1 è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ed è quindi un sottospazio vettoriale. La sua dimensione è $\dim V - \operatorname{rg}(M)$, dove M è la matrice associata al sistema. Abbiamo già osservato che le due equazioni non sono proporzionali, quindi $\operatorname{rg} M = 2$ e $\dim W_1 = 3$.

(b) Si tratta di un sottospazio vettoriale di dimensione 4. In effetti, W_2 è l'immagine dell'applicazione lineare iniettiva
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \\ q(x) & \mapsto & (x-2)q(x). \end{array}$$
Si ha allora che W_2 è un sottospazio vettoriale, e che la sua dimensione è pari a quella di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, ovvero 4.

(c) Si tratta di un sottospazio affine, ma non vettoriale, di dimensione 3. Riprendendo la soluzione di (a), le condizioni date si traducono nel sistema
$$\begin{cases} 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1 \\ 12a_4 \cdot 2^2 + 6a_3 \cdot 2 + 2a_2 = 2 \end{cases}$$
Per il teorema di Rouché-Capelli, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione pari a quella del sottospazio vettoriale del punto (a), ovvero 3. Si osservi che W_3 non è un sottospazio vettoriale in quanto non contiene l'origine di V (il polinomio nullo).

(d) Non è un sottospazio affine, né un sottospazio vettoriale. In effetti osserviamo dapprima che $0 \in W_4$, e quindi se W_4 fosse un sottospazio affine o vettoriale sarebbe in particolare un sottospazio vettoriale, perché passa per l'origine.
D'altro canto, W_4 non è chiuso (ad esempio) per moltiplicazione per scalare: il polinomio $p(x) = 1-x$ verifica $p(0) = 1$ e $p(p(0)) = p(1) = 0$, ma il polinomio $q(x) = 2p(x) = 2-2x$ verifica $q(0) = 2$ e $q(q(0)) = 2 - 4 = -2 \neq 0$. Si ha quindi $p(x) \in W_4$ ma $2p(x) \notin W_4$, e perciò W_4 non è un sottospazio vettoriale.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che in base canonica è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Sia $W = \ker f$ e $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
☐ Un tale v non esiste. ☐ Un tale v esiste, ad esempio:

(b) Scrivere una base di W:

(c) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo:

(d) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica in arrivo:

Soluzione.

(a) Un tale v non esiste. La domanda equivale a chiedere se v appartenga all'immagine di f. Tale immagine è data dallo span delle colonne della matrice data nel testo. Operare con mosse di colonna su tale matrice non cambia il loro span, e sommando la prima colonna alla seconda vediamo che l'immagine di f è generata dai 3 vettori $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, o equivalentemente dal primo e terzo di questi. È adesso chiaro che v non appartiene all'immagine, in quanto l'equazione

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

chiaramente non ha soluzioni (confrontando le terze coordinate si ottiene $\lambda = 0$; l'equazione rimanente è $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, che chiaramente non ha soluzione).

(b) Dal calcolo del punto precedente vediamo che $\dim \operatorname{Imm} f = 2$, quindi dal teorema fondamentale $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Imm} f = 1$. Una base è allora costituita da un solo vettore, e basta allora esibire un singolo vettore non nullo nel nucleo di f. Un rapido calcolo fornisce

$$\ker f = \operatorname{Span} \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

(c) Siano e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica e v_1, v_2, v_3 i vettori della base $\mathcal{B}$. Per determinare la matrice voluta dobbiamo scrivere i vettori $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ nella base di arrivo $\mathcal{B}$, e usare i vettori delle coordinate così trovati come colonne della matrice. Ora, $f(e_1), f(e_2)$ e $f(e_3)$ sono le tre colonne della matrice data nel testo, quindi vogliamo scrivere $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$. Chiaramente

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}};$$

risolviamo poi le equazioni

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} = xv_1 + yv_2 + zv_3 = x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \iff x = -1, y = 4, z = -8$$

e

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = xv_1 + yv_2 + zv_3 = x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \iff x = 0, y = 1, z = -2.$$

La matrice cercata è quindi

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 4 & 1\\0 & -8 & -2\end{pmatrix}.$$

(d) Si tratta semplicemente di applicare f ai vettori della base $\mathcal{B}$: i risultati saranno le colonne della matrice voluta. Si trova così
$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Consideriamo la matrice $M_a = \begin{pmatrix} -7 & a & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & a & 8 \end{pmatrix}$ dipendente da un parametro complesso $a \in \mathbb{C}$.

(a) Determinare gli autovalori di M_a e le rispettive molteplicità algebriche:

(b) Determinare l'unico valore di $a \in \mathbb{C}$ per cui M_a risulta diagonalizzabile: $a =$ ....

(c) Per il valore di a determinato al punto precedente, esibire una base che diagonalizza M_a:

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico di M_a è
$$\begin{aligned} \det(t\,\mathrm{Id} - M_a) &= \det \begin{pmatrix} t+7 & -a & -9 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 6 & -a & t-8 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)\det \begin{pmatrix} t+7 & -9 \\ 6 & t-8 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)(t^2 - t - 56 + 54) = (t-2)(t^2 - t - 2) \\ &= (t-2)^2(t+1), \end{aligned}$$
dove nella prima uguaglianza si è utilizzato uno sviluppo di Laplace rispetto alla seconda riga. Gli autovalori sono dunque 2, di molteplicità 2, e -1, di molteplicità 1.

(b) Il valore cercato è $a = 0$. L'autovalore -1 è di molteplicità algebrica 1, e quindi soddisfa automaticamente l'uguaglianza di molteplicità algebrica e geometrica. La matrice M_a è quindi diagonalizzabile se e solo se $m_{\mathrm{geo}}(2) = \dim \ker(M_a - 2\,\mathrm{Id})$ è uguale a 2. Calcoliamo
$$\ker M_a - 2\,\mathrm{Id} = \ker \begin{pmatrix} -9 & a & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & a & 6 \end{pmatrix}.$$
Come noto, le mosse di riga non cambiano il nucleo: possiamo allora sottrarre $3/2$ volte l'ultima riga dalla prima, ottenendo
$$\ker M_a - 2\,\mathrm{Id} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & a & 6 \end{pmatrix}.$$
Quest'ultima matrice ha nucleo di dimensione 2 se e solo se ha rango 1, se e solo se la sua prima riga è nulla, cioè se e solo se $a = 0$.

(c) Riprendendo il calcolo del punto precedente, l'autospazio relativo all'autovalore 2 è descritto dall'equazione $-6x + 6z = 0$, e una sua base è quindi data dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base per l'autospazio relativo all'autovalore -1 si ottiene invece calcolando
$$\ker(M_0 + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Una possibile risposta è quindi data dalla base

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, nella base $\mathcal{B}$ data dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, è $M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

1. Trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo rispetto al prodotto scalare φ (esprimere la risposta in base canonica).
2. Dire se esiste una base rispetto alla quale la matrice di φ sia $\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&8\end{pmatrix}$. Se una tale base esiste, esibirla (scrivendo i vettori di tale base rispetto alla base canonica).
3. Consideriamo l'unico funzionale lineare $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\psi(v_1) = 1, \psi(v_2) = 2$ e $\psi(v_3) = 3$. Dire se esistono coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che
$$\psi(v) = \varphi(v, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3)$$
per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, e se esistono, esibirli esplicitamente.

Soluzione.

1. Ricordiamo che, per definizione di matrice associata ad un prodotto scalare, dati due vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ si può calcolare $\varphi(w_1, w_2)$ come segue: detti $[w_1]_\mathcal{B}$ e $[w_2]_\mathcal{B}$ i vettori delle coordinate di w_1, w_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha
$$\varphi(w_1, w_2) = {}^t[w_1]_\mathcal{B} \cdot M \cdot [w_2]_\mathcal{B}.$$
In particolare, se $[w]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, allora
$$\varphi(w, w) = {}^t[w]_\mathcal{B} \cdot M \cdot [w]_\mathcal{B} = (1,1,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (1,1,0)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$
e quindi w è isotropo. Per scrivere w in base canonica base ricordare che $[w]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vuol dire per definizione $w = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.
2. La segnatura del prodotto scalare φ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$, come evidente dal fatto che M è già in forma diagonale. D'altro canto, la segnatura di $M' := \begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ è anch'essa $(2, 1, 0)$: la restrizione al sottospazio dato dai primi due vettori di base ha segnatura $(1, 1, 0)$ (in quanto $\det \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix} < 0$), ed è ortogonale al sottospazio dato dallo span del terzo vettore di base, su cui la segnatura è positiva.

Il teorema di Sylvester implica che due matrici rappresentano il medesimo prodotto scalare in due basi diverse se e solo se hanno la stessa segnatura, quindi la risposta alla domanda deve essere affermativa.

Per trovare esplicitamente una base w_1, w_2, w_3 con la proprietà richiesta procediamo come segue. Osserviamo intanto che la restrizione di φ allo span di v_1, v_2 ha segnatura $(1,1,0)$, proprio come la segnatura della restrizione di M' a $\mathrm{Span}(w_1, w_2)$. Possiamo quindi intanto cercare due vettori w_1, w_2 che siano una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e tali che

$$\varphi(w_1, w_1) = \varphi(w_2, w_2) = 0, \quad \varphi(w_1, w_2) = 2.$$

Abbiamo già determinato un vettore isotropo $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$: studiamo ora i vettori u che hanno prodotto scalare uguale a 2 con tale vettore. Scrivendo $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si ha

$$2 = \varphi(w_1, u) = (1,1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1,-1,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y.$$

Dal momento che vogliamo $u \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ dobbiamo prendere $z = 0$; inoltre, vogliamo anche che u (che sarà il nostro w_2) sia isotropo, cioè che valga

$$0 = \varphi(u, u) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 - y^2.$$

Combinando le equazione $x - y = 2$ e $x^2 - y^2 = 0$ troviamo $x = -y = 1$, cioè $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resta soltanto da identificare w_3, che deve essere un vettore ortogonale a $\mathrm{Span}(w_1, w_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Tuttavia, nella base v_1, v_2, v_3 è chiaro che l'ortogonale a $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ è $\mathrm{Span}(v_3)$ (si ricordi infatti che v_1, v_2, v_3 è una base ortogonale), quindi $w_3 = \lambda v_3$, dove λ deve rispettare l'equazione

$$8 = \varphi(w_3, w_3) = \varphi(\lambda v_3, \lambda v_3) = \lambda^2 \varphi(v_3, v_3) = 2\lambda^2,$$

cioè $\lambda = \pm 2$. Scegliendo $\lambda = 2$, abbiamo infine ottenuto la base

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

ovvero, in base canonica,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Come implicitamente già osservato al punto precedente nel momento in cui abbiamo affermato che la segnatura di φ è $(2,1,0)$, il prodotto scalare φ è non degenere, quindi ogni funzionale lineare si può rappresentare nella forma voluta. Per determinare esplicitamente i coefficienti α, β, γ, osserviamo semplicemente che

$$1 = \psi(v_1) = \varphi(v_1, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = \alpha \varphi(v_1, v_1) = \alpha,$$

dove nella penultima uguaglianza si sono utilizzati la linearità del prodotto scalare e il fatto che v_1, v_2, v_3 sia una base ortogonale. Similmente si trova

$$2 = \psi(v_2) = \varphi(v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = \beta \varphi(v_2, v_2) = -\beta$$

e

$$3 = \psi(v_3) = \varphi(v_3, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = \gamma\varphi(v_3, v_3) = 2\gamma.$$

I coefficienti voluti sono quindi $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -2, 3/2)$.

Si noti che le condizioni che ci hanno permesso di calcolare α, β, γ sono solo condizioni necessarie: è l'osservazione iniziale, che il prodotto scalare φ sia non degenere, che ci permette di dire che coefficienti α, β, γ come voluto devono esistere. Una volta nota la loro esistenza, le condizioni necessarie trovate determinano poi i loro valori numerici.

Esercizio 2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i piani

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y + z = 0 \right\}.$$

1. Scrivere la matrice in base canonica della riflessione ortogonale rispetto al piano W_1 e la matrice in base canonica della riflessione ortogonale rispetto al piano W_2.
2. Dette M_1, M_2 le matrici del punto precedente, sia $R = M_1 M_2$. Dimostrare che R è una rotazione e determinare l'unico piano W_3 tale che $R(W_3) = W_3$.
3. Determinare l'angolo della rotazione indotta da R sul piano W_3.
4. Calcolare $R^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Ricordiamo intanto che, se W è il piano perpendicolare al vettore w, la riflessione ortogonale rispetto a W è data da

$$S_W(v) : v \mapsto v - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle}w.$$

In effetti, se v è un vettore nel piano W (quindi è ortogonale a w) si ottiene

$$S_W(v) = v - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle}w = v - 2\frac{0}{\langle w, w\rangle}w = v,$$

e se invece v è perpendicolare al piano W (e quindi proporzionale a w, diciamo $v = \lambda w$) si ottiene

$$S_W(v) = v - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle}w = \lambda w - 2\frac{\langle \lambda w, w\rangle}{\langle w, w\rangle}w = \lambda w - 2\lambda w = -\lambda w = -v.$$

L'applicazione lineare definita dalla formula scritta sopra è quindi l'identità quando ristretta a W, e meno l'identità quando ristretta al suo ortogonale: da questo segue subito che S_W è proprio la simmetria rispetto al piano W.

1. Si noti che W_1 è il piano ortogonale a $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, come si vede dall'equazione che lo definisce.

   Per scrivere la matrice della riflessione S_{W_1} dobbiamo calcolare le immagini tramite S_{W_1} dei vettori della base canonica. Calcoliamo intanto una volta per tutte $\langle w_1, w_1\rangle = 6$. Dalla formula generale scritta sopra si ha allora

$$S_{W_1}(v) = v - \frac{1}{3}\langle v, w_1\rangle w_1,$$

   e quindi

$$S_{W_1}(e_1) = e_1 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$S_{W_1}(e_2) = e_2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},$$

$$S_{W_1}(e_3) = e_3 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

per cui la matrice voluta è

$$M_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per W_2 possiamo procedere esattamente come nel caso precedente: abbiamo $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle w_2, w_2 \rangle = 2$ e

$$S_{W_2}(v) = v - \langle v, w_2 \rangle w_2,$$

da cui

$$S_{W_2}(e_1) = e_1 - 0w_2 = e_1,$$

$$S_{W_2}(e_2) = e_2 - 1w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$S_{W_2}(e_3) = e_3 - 1w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice voluta è

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. È ben noto che S_{W_1}, S_{W_2} sono trasformazioni ortogonali di determinante -1: sono trasformazioni ortogonali in quanto è geometricamente chiaro che preservano la norma di ogni vettore (e questa è una delle caratterizzazioni delle trasformazioni ortogonali), e hanno determinante -1 in quanto, in una base opportuna, si scrivono nella forma $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ (la base opportuna è qualsiasi base i cui primi due vettori formino una base del piano rispetto a cui si riflette, e l'ultimo vettore sia ortogonale a tale piano). Il prodotto $R = M_1M_2$ è quindi una trasformazione ortogonale (in quanto prodotto di trasformazioni ortogonali) e ha determinante $\det(R) = \det(M_1)\det(M_2) = (-1)^2 = 1$ per il teorema di Binet. Essa è allora una rotazione.

   Possiamo determinare il piano invariante di R osservando che esso è l'ortogonale dell'asse di rotazione. Possiamo poi determinare l'asse di rotazione o calcolando esplicitamente l'autospazio relativo ad 1 della matrice $R = M_1M_2$ (che conosciamo esplicitamente), oppure osservando che S_{W_1}, S_{W_2} lasciano fissi rispettivamente i piani W_1, W_2, e quindi entrambe lasciano fissa la retta $r := W_1 \cap W_2$. Tale retta è allora lasciata fissa anche da $R = S_{W_1}S_{W_2}$, e quindi r è l'asse di rotazione di R. Avendo a disposizione equazioni per W_1, W_2 troviamo subito

$$r = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   da cui il piano invariante (cioè l'ortogonale ad r) è $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; -x + y - z = 0 \right\}$.

3. Detto ϑ l'angolo della rotazione indotta su W_3, come noto si ha

$$\begin{aligned}1+2\cos\vartheta &= \operatorname{tr}(R)=\operatorname{tr}(M_1M_2)\\ &= \operatorname{tr}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{tr}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\\ &= 2\end{aligned},$$

ovvero $\cos\vartheta=\frac{1}{2}$: la rotazione su W_3 è di angolo $60° = \frac{\pi}{3}$ in un verso opportuno.

4. Si osservi che iterando 6 volte una rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ si ottiene una rotazione di angolo 2π, ovvero l'identità. Ne ricaviamo che $R^6=\mathrm{Id}, R^{12}=\mathrm{Id}$, e $R^{13}=R$. La risposta è allora

$$R^{13}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

5.7 Compito del 05/09/2022

Test.

1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $\mathcal{B}$ la base di V costituita da

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad M_4=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere le coordinate in base $\mathcal{B}$ di $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$:

(b) Sia $L: V\to V$ l'applicazione lineare che manda ogni matrice M nella sua trasposta. Scrivere la matrice di L in base B (in partenza e in arrivo):

(c) Calcolare il determinante di L: ....

Soluzione.

(a) Si tratta di risolvere l'equazione

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=1\\ 2\lambda_1+2\lambda_4=2\\ 4\lambda_2+2\lambda_4=4\\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=5.\end{cases}$$

Sottraendo l'ultima equazione dalla prima troviamo subito $2\lambda_3=-4$, cioè $\lambda_3=-2$. Dalla prima (o equivalentemente quarta) equazione abbiamo allora $\lambda_1+2\lambda_2=3$; d'altro canto, sommando la seconda e la terza equazione troviamo $2(\lambda_1+2\lambda_2)+4\lambda_4=6$, e utilizzando $\lambda_1+2\lambda_2=3$ troviamo $6+4\lambda_4=6$, cioè $\lambda_4=0$. Dalla seconda e terza equazione ricaviamo allora $\lambda_1=1,\lambda_2=1$. La risposta è perciò che il vettore delle coordinate in base $\mathcal{B}$ voluto è $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

(b) Si tratta di calcolare $L(M_1) = \frac{1}{2}M_2, L(M_2) = 2M_1, L(M_3) = M_3, L(M_4) = M_4$ ed esprimere il risultato nella base $\mathcal{B}$. Dal momento che le matrici trovate come immagini dei vettori di base sono ancora tutte multiple dei vettori di base, è immediato scrivere la matrice

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per definizione, il determinante di L è il determinante di una qualsiasi matrice che rappresenta tale applicazione lineare. Calcolando il determinante della matrice qui sopra (ad esempio sviluppando due volte con Laplace rispetto all'ultima colonna) si ottiene facilmente $\det L = \det[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -1$.

2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Elencare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità: ....

(b) Esibire una base diagonalizzante per B:

(c) Esibire, se esiste, una base che diagonalizza simultaneamente A e B:

☐ Una tale base esiste, ad esempio:

☐ Una tale base non esiste, perché ....

....

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico: si ha

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) &= \det \begin{pmatrix} t+3 & 9 & -9 \\ 0 & t+1 & -2 \\ 0 & 4 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t+3)\det\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ 4 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t+3)\left((t+1)(t-5)+8\right) \\ &= (t+3)\left(t^2-4t+3\right) \\ &= (t+3)(t-3)(t-1). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi $-3, 3, 1$, tutti di molteplicità (algebrica e quindi geometrica) 1.

(b) Anche in questo caso calcoliamo dapprima il polinomio caratteristico,

$$\begin{aligned}
p_B(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - B) = \det\begin{pmatrix} t & 2 & -2 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 2 & 2 & t-4 \end{pmatrix} \\
&\overset{[2]-[1]}{=} \det\begin{pmatrix} t & 2-t & -2 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix} = (t-2)\det\begin{pmatrix} t & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \\
&\overset{[1]+[2]}{=} (t-2)\det\begin{pmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \\
&= (t-2)\det\begin{pmatrix} t+1 & -3 \\ 2 & t-4 \end{pmatrix} = (t-2)((t+1)(t-4)+6) \\
&= (t-2)(t^2-3t+2) = (t-2)^2(t-1).
\end{aligned}$$

Calcoliamo poi una base dei due autospazi: per l'autovalore 1 dobbiamo studiare $\ker(B - \mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente essere generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per l'autovalore 2 dobbiamo invece trovare una base del nucleo di $B - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente essere data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una possibile risposta è quindi

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Non esiste una tale base. Questo fatto si può mostrare ad esempio in uno dei seguenti modi:

i. Condizione necessaria per la diagonalizzabilità simultanea è che A e B commutino. Tuttavia, calcolando il coefficiente in alto a sinistra di AB si trova $(-3, -9, 9)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -9$, mentre calcolando il coefficiente in alto a sinistra di BA si trova $(0, -2, 2)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Ne segue che $AB \neq BA$, e quindi A, B non sono simultaneamente diagonalizzabili.

ii. In alternativa, è noto che se $AB = BA$ allora ognuna preserva gli autospazi dell'altra. Gli autospazi di A sono tutti di dimensione 1, e l'autospazio relativo all'autovalore -3 è chiaramente generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (come evidente dalla forma della matrice A). Allora $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dovrebbe essere un autovettore di A relativo all'autovalore -3, ma non è così (perché tutti tali autovettori sono multipli del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

3. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ costituita dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'unico prodotto scalare ψ su $\mathbb{R}^4$ con la proprietà che $\mathcal{B}$ sia una base ortogonale per ψ tale che $\psi(v_1, v_1) = 1, \psi(v_2, v_2) = 2, \psi(v_3, v_3) = -2$, $\psi(v_4, v_4) = -1$.

(a) Scrivere la matrice di ψ in base canonica, riempiendo la matrice parziale seguente:

$$[\psi]_{\text{canonica}} = \begin{pmatrix} ... & ... & ... & 0 \\ ... & 3 & -2 & 0 \\ ... & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Trovare, se esiste, un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che la restrizione di ψ a W sia il prodotto scalare nullo. Descrivere tale sottospazio fornendone una base (si precisi in quale base si sta esprimendo la risposta).

☐ Un tale sottospazio non esiste

☐ Un tale sottospazio esiste, ad esempio:

Soluzione.

(a) Detti $e_1, \ldots, e_4$ i vettori della base canonica si ha $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1, e_3 = v_3 - v_2$ ed $e_4 = v_4 - v_3$. Per definizione, la matrice di ψ in base canonica è la matrice che in posizione (i, j) ha come coefficiente il prodotto scalare $\psi(e_i, e_j)$. Calcoliamo ad esempio la prima riga: usando il fatto che $\psi(v_1, v_2) = \psi(v_1, v_3) = \psi(v_1, v_4) = 0$ e $\psi(v_1, v_1) = 1$ otteniamo

$$\psi(e_1, e_1) = \psi(v_1, v_1) = 1, \quad \psi(e_1, e_2) = \psi(v_1, v_2 - v_1) = -\psi(v_1, v_1) = -1$$

$$\psi(e_1, e_3) = \psi(v_1, v_3 - v_2) = 0, \quad \psi(e_1, e_4) = \psi(v_1, v_4 - v_3) = 0.$$

Similmente, per la seconda riga (oltre a $\psi(e_2, e_1) = \psi(e_1, e_2) = -1$) abbiamo

$$\psi(e_2, e_2) = \psi(v_2 - v_1, v_2 - v_1) = \psi(v_2, v_2) + \psi(v_1, v_1) = 3,$$

$$\psi(e_2, e_3) = \psi(v_2 - v_1, v_3 - v_2) = -\psi(v_2, v_2) = -2$$

$$\psi(e_2, e_4) = \psi(v_2 - v_1, v_4 - v_3) = 0.$$

Calcoliamo infine

$$\psi(e_3, e_3) = \psi(v_3 - v_2, v_3 - v_2) = \psi(v_3, v_3) + \psi(v_2, v_2) = 0,$$

$$\psi(e_3, e_4) = \psi(v_3 - v_2, v_4 - v_3) = -\psi(v_3, v_3) = 2,$$

$$\psi(e_4, e_4) = \psi(v_4 - v_3, v_4 - v_3) = \psi(v_4, v_4) + \psi(v_3, v_3) = -3.$$

La matrice richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) È facile vedere che $u := v_1 + v_4$ e $v := v_2 + v_3$ sono vettori isotropi, in quanto

$$\psi(u,u) = \psi(v_1 + v_4, v_1 + v_4) = \psi(v_1, v_1) + \psi(v_4, v_4) = 1 + (-1) = 0,$$

e similmente per v. Inoltre, siccome v_1 e v_4 sono ortogonali sia a v_2 che a v_3, abbiamo anche $\psi(u,v) = 0$. Ne segue allora che la restrizione a ψ al sottospazio generato da u e v è banale, come voluto. Una possibile risposta è quindi $W = \mathrm{Span}(u,v)$, ed è chiaro che u, v è una base di W perché questi due vettori non sono fra loro proporzionali. Possibili risposte alla domanda sono quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, o la sua equivalente in base canonica, ovvero $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Tutte le matrici considerate in questo esercizio sono a coefficienti reali.

1. Sia $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice **ortogonale** P tale che $P^{-1}CP$ sia diagonale, ed esplicitare la matrice $P^{-1}CP$.

2. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$, sia P una matrice ortogonale $n \times n$, e sia $B = P^{-1}AP$. Dimostrare che B è simmetrica.

Soluzione.

1. Studiamo innanzitutto la diagonalizzabilità di C. È evidente che il rango di C è 1 (tutte le colonne sono proporzionali), quindi $\dim \ker C = 4 - 1 = 3$. In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è pari a 3. Dalla nota disuguaglianza $m_{\mathrm{alg}}(0) \geq m_{\mathrm{geo}}(0) = 3$ otteniamo che almeno 3 autovalori di C sono uguali a 0. Il quarto autovalore può essere ottenuto ad esempio osservando che $\operatorname{tr} C = 4$ è la somma degli autovalori di C, e quindi il quarto autovalore è 4. Questa conclusione naturalmente si può trovare anche calcolando il polinomio caratteristico di C.

   Noti gli autovalori, studiamo gli autospazi di C. L'autospazio relativo a $\lambda = 4$ è $\ker(C - 4\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'autospazio relativo a 0 è invece $\ker C$, generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Per trovare la matrice P dobbiamo ancora ortogonalizzare i vettori trovati. Come sappiamo dalla teoria, e come è immediato verificare, l'autovettore relativo all'autovalore 4 è ortogonale agli autovettori in $\ker C$. Ortogonalizziamo allora i vettori in $\ker C$; i vettori v_1, v_3 sono già ortogonali, quindi si tratta soltanto di ortogonalizzare v_2 rispetto agli altri. Seguendo il procedimento di Gram-Schmidt, sostituiamo v_2 con

$$v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3 = v_2 - \frac{-1}{2} v_1 - \frac{-1}{2} v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Infine, dividiamo ciascun autovettore per la sua norma, ottenendo la matrice ortogonale

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $P^{-1}CP$ è semplicemente la matrice diagonale con elementi diagonali dati dagli autovalori di C: si ha cioè

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ricordiamo che la condizione che P sia ortogonale è equivalente a $P^{-1} = {}^tP$. Possiamo allora calcolare

$${}^tB = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP \cdot {}^tA \cdot {}^t(P^{-1}) = P^{-1} \cdot A \cdot {}^t({}^tP) = P^{-1}AP = B,$$

dove si è usato ${}^tA = A$ (la matrice A è simmetrica per ipotesi).

Esercizio 2. Tutte le matrici considerate in questo esercizio sono a coefficienti reali. Data una matrice simmetrica A di dimensioni $n \times n$, poniamo

$$V_A = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tMA + AM = 0\}.$$

1. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Dimostrare che se due matrici M, N appartengono a V_A, allora anche $MN - NM$ appartiene a V_A.
2. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$, sia P una matrice ortogonale $n \times n$, e sia $B = P^{-1}AP$. Dal secondo punto del primo esercizio sappiamo che B è simmetrica. Costruire un'applicazione lineare bigettiva $V_A \to V_B$ e dedurre in particolare che $\dim V_A = \dim V_B$.
3. Calcolare $\dim V_C$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice del primo esercizio.
4. ($\star$) Sia A una matrice simmetrica $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Calcolare $\dim V_A$.

Soluzione.

1. Osserviamo che la condizione $M \in V_A$ equivale a ${}^tMA = -AM$, e similmente $N \in V_A$ implica ${}^tNA = -AN$. Verifichiamo ora che $MN - NM$ soddisfa la condizione per appartenere a V_A, ovvero che

$${}^t(MN - NM)A + A(MN - NM) \stackrel{?}{=} 0.$$

Come noto, il trasposto di un prodotto di matrici è il prodotto delle matrici trasposte nell'ordine opposto, per cui

$${}^t(MN - NM)A + A(MN - NM) = ({}^tN{}^tM - {}^tM{}^tN)A + A(MN - NM).$$

Usiamo ora le relazioni ${}^tMA = -AM$ e ${}^tNA = -AN$ per riscrivere il membro destro come

$$\begin{aligned}({}^tN{}^tM - {}^tM{}^tN)A + A(MN - NM) &= {}^tN({}^tMA) - {}^tM({}^tNA) + A(MN - NM) \\ &= {}^tN(-AM) - {}^tM(-AN) + A(MN - NM) \\ &= ({}^tNA)(-M) - ({}^tMA)(-N) + A(MN - NM) \\ &= (-AN)(-M) - (-AM)(-N) + A(MN - NM) \\ &= ANM - AMN + A(MN - NM) = 0.\end{aligned}$$

2. Partiamo dalla condizione
$$ {}^tMA + AM = 0 $$
e moltiplichiamo per $P^{-1} = {}^tP$ a sinistra e per P a destra, ottenendo
$$ {}^tP^tMAP + P^{-1}AMP = 0; $$
inserendo ancora dei fattori $\mathrm{Id} = PP^{-1}$, otteniamo ancora la condizione equivalente
$$ \left({}^tP^tMP\right)\left(P^{-1}AP\right) + \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}MP\right) = 0. $$
Si osservi infine che, usando la condizione ${}^tP = P^{-1}$, si ha anche ${}^tP \cdot {}^tM \cdot P = {}^t(P^{-1}MP)$. Tenuto conto che $B = P^{-1}AP$, l'equazione qui sopra si riscrive quindi anche nella forma
$$ {}^t(P^{-1}MP)B + B\left(P^{-1}MP\right) = 0. $$
Questo calcolo mostra che $M \in V_A$ se e solo se $P^{-1}MP$ appartiene a V_B. Possiamo allora considerare le applicazioni lineari
$$ \begin{array}{cccc} L_1 : & V_A & \to & V_B \\ & M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} L_2 : & V_B & \to & V_A \\ & M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} $$
che sono ben definite per quanto visto sopra (ovvero, l'immagine di L_1 è effettivamente contenuta in V_B, e viceversa l'immagine di L_2 è contenuta in V_A), e chiaramente sono una l'inversa dell'altra. Ne segue come voluto che $\dim V_A = \dim V_B$.

3. Non sarebbe difficile calcolare direttamente la dimensione usando l'equazione che definisce V_C, ma procediamo in maniera diversa, sfruttando il punto precedente. Sia P la matrice ortogonale trovata al primo punto dell'esercizio e sia $D = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Dal punto 1 del primo esercizio sappiamo che $D = P^{-1}CP$; dal punto 2 di questo esercizio otteniamo allora $\dim V_C = \dim V_D$. Possiamo ora esplicitare la condizione affinché una matrice M appartenga a V_D: scrivendo $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ si ha ${}^tMD + DM = 0$ se e solo se
$$ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = 0, $$
ovvero
$$ \begin{pmatrix} 4a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 4a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 4a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 4a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} & 4a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, $$
che è verificata se e solo se $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$. Lo spazio V_D è quindi lo spazio delle matrici la cui prima colonna è nulla, e ha perciò dimensione 12.

4. Dal teorema spettrale sappiamo che esiste una matrice P ortogonale tale che $P^{-1}AP = E$ sia diagonale. Dal punto 2 otteniamo $\dim V_A = \dim V_E$, dove E è una matrice diagonale con tutti i coefficienti diagonali non nulli (in quanto $\det E = \det A \neq 0$ è il prodotto dei termini sulla diagonale di E). Per calcolare $\dim V_E$ osserviamo che una matrice M appartiene a V_E se e solo se ${}^tME + EM = 0$, ovvero, tenuto conto del fatto che E è simmetrica, ${}^t(EM) + EM = 0$, ovvero se e solo se EM è una matrice $n \times n$ antisimmetrica. Dal momento che E è una matrice invertibile (e quindi esiste l'inversa E^{-1}), le applicazioni lineari
$$ \begin{array}{ccc} \{\text{matrici } n \times n \text{ antisimmetriche}\} & \longleftrightarrow & V_E \\ N & \mapsto & E^{-1}N \\ EM & \leftarrow\!\shortmid & M \end{array} $$

forniscono isomorfismi (uno inverso dell'altro) fra V_E e lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche. Ne segue infine $\dim V_A = \dim V_E = \dim\{\text{matrici } n \times n \text{ antisimmetriche}\} = \frac{n^2-n}{2}$.

5.8 Compito del 03/11/2022 (appello straordinario)

Test.

1. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sia $W = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ e sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su W.

   (a) Scrivere equazioni per il piano parallelo a W passante per il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$:

   (b) Scrivere la matrice di π in base canonica (in partenza ed in arrivo):

   (c) Scrivere la matrice di π rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo:

   (d) Determinare il polinomio minimo di π: ....

Soluzione.

(a) Un'equazione cartesiana per W è data da

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = x - y.$$

L'equazione voluta è allora del tipo $x - y = c$, dove c è scelta in modo che il vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ soddisfi tale equazione. Sostituendo otteniamo $c = 5 - 7 = -2$, per cui l'equazione richiesta è $x - y = -2$.

(b) Un vettore perpendicolare a W è $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (il vettore dei coefficienti di un'equazione cartesiana per W). La proiezione ortogonale su W è allora data da $v \mapsto v - \frac{\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle} w$. Tenuto conto di $\langle w, w \rangle = 2$, è allora facile calcolare che i vettori della base canonica hanno per immagini

$$\pi(e_1) = e_1 - \frac{1}{2}\langle e_1, w \rangle w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(e_2) = e_2 + \frac{1}{2} w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\pi(e_3) = e_3 - \frac{1}{2}\langle e_3, w \rangle w = e_3.$$

La matrice voluta è quindi $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Per scrivere la matrice richiesta dobbiamo calcolare le coordinate di $\pi(v_1), \pi(v_2), \pi(v_3)$ in base $\mathcal{B}$, e usare i vettori di tali coordinate come colonne della matrice.
Per definizione, dal momento che v_1, v_2 appartengono a W si ha $\pi(v_1) = v_1$ e $\pi(v_2) = v_2$. Le coordinate in base $\mathcal{B}$ di v_1, v_2 sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e questo determina le prime due colonne della matrice $[\pi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. D'altra parte, in base canonica abbiamo

$$\pi(v_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si tratta ora di esprimere tale vettore in base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema si trova $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_1 = 3/2$. La matrice richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Come qualunque proiezione, π soddisfa $\pi^2 = \pi$, cioè $\pi^2 - \pi = 0$, e quindi il suo polinomio minimo divide $t^2 - t = t(t-1)$. Esso deve perciò essere uno fra $t, t-1$ e $t(t-1)$. Dal momento che $\pi \neq 0, \mathrm{Id}$, il polinomio minimo non è né t né $t-1$, e quindi è $t(t-1) = t^2 - t$.

2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e il prodotto scalare

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & p(-1)q(-1) - p(0)q(0) + p(1)q(1). \end{array}$$

(a) Scrivere la matrice di φ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$:

(b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

(c) Determinare una base dell'ortogonale rispetto a φ del sottospazio $\mathrm{Span}(1, x)$:

Soluzione.

(a) Si tratta semplicemente di calcolare $\varphi(v_i, v_j)$ al variare di v_i, v_j fra i vettori di base. Abbiamo

$$\varphi(1, q(x)) = q(-1) - q(0) + q(1),$$

per cui in particolare $\varphi(1,1) = 1, \varphi(1,x) = 0, \varphi(1,x^2) = 2$ e $\varphi(1,x^3) = 0$. Abbiamo poi

$$\varphi(x, q(x)) = -q(-1) + q(1),$$

da cui $\varphi(x,x) = 2, \varphi(x,x^2) = 0, \varphi(x,x^3) = 2$. Continuando nello stesso modo troviamo

$$\varphi(x^2, q(x)) = q(-1) + q(1),$$

da cui $\varphi(x^2,x^2) = 2$ e $\varphi(x^2,x^3) = 0$, e $\varphi(x^3,x^3) = 2$. La matrice richiesta è quindi

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Un semplice calcolo mostra che il nucleo di M ha dimensione 1, per cui $n_0 = 1$. La restrizione di φ al sottospazio generato da x^2, x^3 (di dimensione 2) ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e quindi è definita positiva, mentre la restrizione al sottospazio generato da $1, x^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, di determinante -2, e quindi ha segnatura $(1, 1, 0)$. Combinando queste informazioni vediamo che $n_+ \geq 2, n_- \geq 1$ e $n_0 = 1$, e quindi la segnatura è $(2, 1, 1)$.

(c) Un vettore $v \in V$ appartiene al sottospazio ortogonale a $\mathrm{Span}(1, x)$ se e solo se è ortogonale ai vettori 1 ed x. Dal momento che

$$\varphi(v_1, v_2) = {}^t[v_1]_{\mathcal{B}} M [v_2]_{\mathcal{B}},$$

dove $[v_i]_{\mathcal{B}}$ è il vettore delle coordinate di v_i nella base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, la condizione di ortogonalità è equivalente alla seguente: le coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ di v soddisfano

$$(1, 0, 0, 0) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (0, 1, 0, 0) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Esplicitando la condizione appena scritta troviamo

$$(1, 0, 2, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (0, 2, 0, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Le soluzioni di questo sistema sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} -2t \\ u \\ t \\ -u \end{pmatrix}$, ovvero lo spazio delle soluzioni è $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. In termini di vettori di V, questi corrispondono ai polinomi $-2 + x^2$ e $x - x^3$. Otteniamo allora che l'ortogonale a $\mathrm{Span}(1, x)$ ha per base i due polinomi $x^2 - 2$ e $x^3 - x$.

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Elencare gli autovalori di M con le rispettive molteplicità algebriche:

(b) Dire se M è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, e in caso affermativo esibire una base diagonalizzante.
☐ M non è diagonalizzabile ☐ M è diagonalizzabile, e una base diagonalizzante è data da:

(c) Dire se M^2 è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, e in caso affermativo esibire una base diagonalizzante.

☐ M^2 non è diagonalizzabile ☐ M^2 è diagonalizzabile, e una base diagonalizzante è data da:

Soluzione.

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 1 & t-3 & 1 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{[2]-[1]}{=} \begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 2-t & t-2 & 0 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix} = (t-2)\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{[1]+[2]}{=} (t-2)\begin{pmatrix} t-2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix} = (t-2)\begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2)((t-2)(t+2)+4) = (t-2)\cdot t^2.$$

Gli autovalori sono dunque 0, di molteplicità algebrica 2, e 2, di molteplicità algebrica 1.

(b) Dal momento che 2 è di molteplicità algebrica 1, per questo autovalore la molteplicità algebrica e geometrica coincidono. Per capire se M sia diagonalizzabile bisogna quindi solo capire se la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 sia 1 o 2. Osserviamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è la dimensione del nucleo di M.

È però facile vedere che il rango di M è almeno due (le prime due colonne sono chiaramente linearmente indipendenti), e quindi $\dim\ker M = 3 - \mathrm{rango}(M) \leq 1$. Otteniamo quindi che la molteplicità geometrica di 0 è esattamente 1 (si ricorda che la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre almeno uno), e quindi è diversa dalla molteplicità algebrica. Ne segue che M non è diagonalizzabile.

(c) Si ha

$$M^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di M^2 sono i quadrati degli autovalori di M, e sono quindi $0, 0, 4$. Il rango di M^2 è chiaramente 1 (le tre colonne sono tutte proporzionali), e quindi il suo nucleo ha dimensione 2. La molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è quindi 2, e perciò M^2 è diagonalizzabile. Troviamo una base diagonalizzante: una base di $\ker M$ si trova facilmente; ad esempio possiamo prendere $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 4 si ottiene calcolando $\ker(M^2 - 4\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. In conclusione, la matrice M^2 è diagonalizzabile, e una possibile base diagonalizzante è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Un sottospazio $W \subseteq V$ è detto T-invariante se $T(W) \subseteq W$.

1. Dimostrare che un sottospazio $W = \mathrm{Span}(w)$ di dimensione 1 è T-invariante se e solo se w è un autovettore di T.

2. ($\star$) Sia $v \in V$ un vettore. Dimostrare che $U_v := \mathrm{Span}(v, Tv, T^2, \dots, T^{n-1}v)$ è il più piccolo sottospazio T-invariante che contiene v (con *più piccolo* si intende che U_v è un sottospazio T-invariante, e che inoltre ogni sottospazio T-invariante che contiene v contiene anche tutti gli elementi di U_v).

3. Determinare tutti i sottospazi T-invarianti nel caso in cui V sia $\mathbb{R}^3$ e T sia l'endomorfismo la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Nel caso in cui V sia $\mathbb{R}^4$ e T sia l'endomorfismo che in base canonica ha matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
dimostrare che ogni vettore $v \in V$ non nullo è contenuto in un sottospazio T-invariante di dimensione 2.

Soluzione.

1. Se $\mathrm{Span}(w)$ è T-invariante, allora $T(w)$ appartiene a $\mathrm{Span}(w)$, cioè $T(w) = \lambda w$ per un qualche λ, ovvero w è effettivamente un autovettore di T. Viceversa, se w è un autovettore di T (diciamo con autovalore λ), allora la retta $\mathrm{Span}(w)$ è T-invariante: infatti per ogni $\mu w \in \mathrm{Span}(w)$ il vettore $T(\mu w) = \mu T(w) = \mu\lambda w$ appartiene ancora a $\mathrm{Span}(w)$.

2. Sia W un sottospazio T-invariante che contiene v: allora $v \in W$ implica $T(v) \in W$, il che a sua volta implica $T(T(v)) \in W$, e così via, fino a $T^{n-1}(v) \in W$. Dal momento che W è un sottospazio vettoriale e contiene $v, \dots, T^{n-1}v$, contiene tutto il loro span, ovvero contiene U_v.

   Viceversa, mostriamo che U_v è T-invariante. Il teorema di Cayley-Hamilton ci dice che, se $p_T(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ è il polinomio caratteristico di T, allora $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0 \,\mathrm{Id} = 0$, ovvero
   $$T^n = -a_{n-1}T^{n-1} - \ldots - a_0 \,\mathrm{Id}\,.$$
   Applicando questa uguaglianza a v otteniamo che
   $$T^n(v) = -a_{n-1}T^{n-1}(v) - \ldots - a_0 v \in U_v.$$
   Ne segue che T manda ciascuno dei vettori $v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v$ dentro U_v, e perciò manda lo span di $v, Tv, \dots, T^{n-1}v$ (che è U_v) dentro U_v. Questo vuol dire esattamente che U_v è un sottospazio T-invariante.

3. Ci sono alcuni sottospazi invarianti evidenti: $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, e i sei sottospazi $\mathrm{Span}(e_1)$, $\mathrm{Span}(e_2)$, $\mathrm{Span}(e_3)$, $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Span}(e_1, e_3)$ e $\mathrm{Span}(e_2, e_3)$. Consideriamo ora un generico vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Come dimostrato sopra, il più piccolo sottospazio invariante che contiene v è $\mathrm{Span}(v, Tv, T^2v)$, ovvero
   $$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 4y \\ 9z \end{pmatrix} \right).$$

Si potrebbe ora argomentare ragionando sulle matrici di Vandermonde, ma procediamo in modo diretto con mosse di Gauss. Consideriamo le seguenti mosse:

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ y & 2y & 4y \\ z & 3z & 9z \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-[1]} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & y & 3y \\ z & 2z & 8z \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-3[2]} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & y & 0 \\ z & 2z & 2z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-[3],[1]-1/2[3]} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[2],1/2[3]} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che $U_v = \text{Span}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. È chiaro che U_v è uno degli 8 sottospazi già trovati sopra: ad esempio, se $x \neq 0, y \neq 0$ e $z = 0$, allora questo span è semplicemente $\text{Span}(e_1, e_2)$. Ne segue che i sottospazi invarianti sono tutti e soli gli otto sottospazi elencati all'inizio della soluzione.

4. Osserviamo che $T^2 = -\text{Id}$. Dato un vettore v, il più piccolo sottospazio T-invariante che contiene v è $U_v = \text{Span}(v, Tv, T^2v, T^3v) = \text{Span}(v, Tv, -v, -Tv) = \text{Span}(v, Tv)$. Questo spazio è T-invariante ed è effettivamente di dimensione 2, perché v, Tv sono linearmente indipendenti: se si avesse $Tv = \lambda v$ (siccome $v \neq 0$, ogni relazione di dipendenza lineare ne dà una di questa forma), allora λ sarebbe un autovalore (reale) di T. Tuttavia, il polinomio caratteristico di T è $(t^2+1)^2$, che non ha radici reali. Quindi T non ha autovalori reali, e perciò U_v è un sottospazio T-invariante di dimensione esattamente due che contiene v.

5.9 Compito del 23/01/2023

Test.

1. Consideriamo le due applicazioni lineari $S_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ed $S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date rispettivamente dalle riflessioni ortogonali rispetto alle rette $3x + 2y = 0$ e $-x + y = 0$.

   (a) Scrivere la matrice in base canonica di S_1:

   (b) Scrivere la matrice di S_2 rispetto alla base data dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (c) La composizione $S_2 \circ S_1$ è una rotazione di angolo ϑ. Quanto vale $\cos\vartheta$? ....

   Soluzione. Osserviamo che le rette del testo sono ortogonali rispettivamente ai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (che sono i vettori dei coefficienti delle equazioni date). Come noto, la riflessione rispetto all'ortogonale di un certo vettore u è data dalla formula

$$S_u(v) = v - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}u.$$

   (a) Basta calcolare le immagini dei vettori e_1, e_2 della base canonica. Data la formula qui sopra (con $u = u_1$), otteniamo

$$S_1(e_1) = e_1 - 2\frac{3}{13}u_1 = \begin{pmatrix} -5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix}$$

   e

$$S_1(e_2) = e_2 - 2\frac{2}{13}u_1 = \begin{pmatrix} -12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$$

   La risposta è quindi $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) S_2 è la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, per cui (in base canonica) si ha $S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (questo si può anche ricavare come al punto precedente). Si noti in particolare che la matrice di S_2 in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: useremo questo fatto nel punto (c).
Si ha allora

$$S_2(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S_2(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per rispondere alla domanda dobbiamo ora scrivere questi vettori nella base di arrivo, cioè nuovamente $\{v_1, v_2\}$. Per determinare la rappresentazione di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dobbiamo determinare quegli (unici) scalari $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_{1,1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_{2,1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema si trova $\lambda_{1,1} = -5$ e $\lambda_{2,1} = 8$, e quindi le coordinate di $S_2(v_1)$ in base $\{v_1, v_2\}$ sono $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Similmente, cerchiamo $\lambda_{2,1}$ e $\lambda_{2,2}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_{2,1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_{2,2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

si trova $\lambda_{2,1} = -3$ e $\lambda_{2,2} = 5$, per cui le coordinate di $S_2(v_2)$ in base $\{v_1, v_2\}$ sono $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. In conclusione, la matrice voluta è

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) In base canonica, la matrice di $S_2 \circ S_1$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}.$$

Come noto, la traccia di una matrice di rotazione (nel piano) è il doppio del coseno dell'angolo di rotazione, da cui otteniamo che la risposta è $-\frac{12}{13}$.

2. Consideriamo su $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ il prodotto scalare

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (p(x), q(x)) & \mapsto & \int_0^1 p'(x) q'(x) dx. \end{array}$$

(a) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$.............
(b) Determinare una base per $V^\perp$: ....
(c) Determinare una base per $\mathrm{Span}(x, x^2, x^3) \cap W^\perp$, dove $W = \mathrm{Span}(1, x, x^2)$:

Soluzione.

(a) e (b) Si ha chiaramente $\varphi(p(x), p(x)) = c \int_0^1 [p'(x)]^2 \, dx \geq 0$, per cui φ è semidefinito positivo. Questo implica che la sua segnatura sia $(n_+, n_-, n_0) = (4 - r, 0, r)$, dove $r = \dim V^\perp$. Siccome il prodotto è semidefinito positivo, è noto che $V^\perp$ coincide con l'insieme dei vettori isotropi, che in questo caso sono quelli che soddisfano $\int_0^1 [p'(x)]^2 \, dx = 0$. L'integrale di una funzione continua e non-negativa (come $(f'(x))^2$) su un intervallo di lunghezza positiva è nullo se e solo se la funzione continua a è nulla a tappeto, ovvero se e solo se $f'(x) = 0$, e cioè se e solo se $f(x)$ è costante. Otteniamo allora che $V^\perp = \mathrm{Span}(1)$ e che la segnatura del prodotto scalare è $(3, 0, 1)$.

(c) Dobbiamo trovare il sottospazio dato dai polinomi $q(x)$ con $q(0) = 0$ che siano ortogonali a ciascuno dei polinomi $1, x, x^2$. Scriviamo $q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. Sappiamo già che $\varphi(q(x), 1) = 0$ per ogni $q(x)$, quindi basta imporre

$$0 = \varphi(q(x), x) = \int_0^1 q'(x)\,dx = q(1) - q(0) = a_3 + a_2 + a_1$$

$$0 = \varphi(q(x), x^2) = \int_0^1 q'(x) \cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1)x\,dx = 2\left(\frac{3}{4}a_3 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1\right).$$

Risolviamo infine il sistema

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ \frac{3}{4}a_3 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $a_1 = -a_2 - a_3$ nella seconda equazione troviamo

$$\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{6}a_2 = 0,$$

e cioè $a_3 = -\frac{2}{3}a_2$, $a_1 = -a_2 - a_3 = -\frac{1}{3}a_2$. I polinomi voluti sono quindi tutti e soli quelli del tipo

$$q(x) = -\frac{2}{3}a_2x^3 + a_2x^2 - \frac{1}{3}a_2x = \frac{a_2}{3}(-2x^3 + 3x^2 - x),$$

ovvero (moltiplicando tutto per tre) l'intersezione $\operatorname{Span}(x, x^2, x^3) \cap W^\perp$ coincide con $\operatorname{Span}(-2x^3 + 3x^2 - x)$. Una sua base è quindi costituita dal polinomio $-2x^3 + 3x^2 - x$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, dipendente da un parametro reale a:

$$W_a = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\4\\a\\4a-a^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8-2a\\2\\6-a\end{pmatrix}\right)$$

1. Calcolare la dimensione di W_3 e scrivere equazioni cartesiane per questo sottospazio.
2. Determinare la dimensione di W_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
3. Dire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ per cui si abbia $\ker g = \operatorname{Imm} g = W_a$ per un qualche $a \in \mathbb{R}$ (ovvero il nucleo e l'immagine di g coincidono, e sono dati da un certo sottospazio W_a, per un'opportuna scelta di a).

Soluzione. Dal momento che il primo punto è parzialmente contenuto nel secondo, nella soluzione partiamo da quest'ultimo.

2. La dimensione di W_a è pari al rango della matrice $M_a = \begin{pmatrix}1 & a & 2\\2 & 4 & 8-2a\\1 & a & 2\\2 & 4a-a^2 & 6-a\end{pmatrix}$. Per studiare tale rango, osserviamo intanto che esso è al massimo 3 (il numero di colonne) e al minimo 1, visto che la prima colonna è non nulla. Ricordiamo che il rango è minore o uguale ad 1 se e solo se tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo, ed è minore o uguale a 2 se e solo se tutti i minori 3×3 hanno determinante nullo. Considerando il minore 2×2 in alto a sinistra, $\begin{pmatrix}1 & a\\2 & 4\end{pmatrix}$, di determinante $4 - 2a$, vediamo che il rango può essere 1 solo per

$a = 2$. In effetti, per tale valore di a si ha $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, che è chiaramente di rango 1. Consideriamo ora il minore 3×3 formato dalla prima, seconda e quarta riga: esso ha determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 4 & 8-2a \\ 2 & 4a-a^2 & 6-a \end{pmatrix} \overset{[2]-2[1],[3]-2[1]}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 4-2a & 4-2a \\ 0 & 2a-a^2 & 2-a \end{pmatrix}$$
$$= (4-2a)(2-a) - (4-2a)a(2-a) = 2(2-a)^2(1-a).$$

Vediamo quindi che il rango può essere ≤ 2 solo per $a = 1, 2$. D'altro canto, il rango è ≤ 1 solo per $a = 2$, quindi concludiamo che il rango (ovvero la dimensione di W_a) è pari ad 1, se $a = 2$; a 2, se $a = 1$; e a 3 altrimenti.

Commento. Si noti che i minori 3×3 che contengono sia la prima che la terza riga hanno determinante nullo, perché queste due righe sono uguali. La scelta di minore 3×3 effettuata è quindi essenzialmente l'unica possibile (l'altra sarebbe stata quella del minore formato dalla seconda, terza e quarta riga, il cui determinante differisce solo per un segno dal minore che abbiamo considerato).

1. Sappiamo già che $\dim W_3 = 3$. Il sottospazio W_3 è quindi descritto da una singola equazione cartesiana, data da
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 4 & 2 & x_2 \\ 1 & 3 & 2 & x_3 \\ 2 & 3 & 3 & x_4 \end{pmatrix} = 0 :$$
tale condizione esprime infatti il fatto che il vettore generico $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sia linearmente dipendente con le prime tre colonne della matrice, ovvero che appartenga al loro span. Si osservi ora che sottraendo la prima riga dalla terza otteniamo la condizione equivalente
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 4 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 2 & 3 & 3 & x_4 \end{pmatrix} = 0;$$
dall'analisi del punto precedente sappiamo che il minore $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, chiamiamolo δ, per cui l'equazione precedente (sviluppando rispetto alla terza colonna) si riscrive $\delta(x_3 - x_1) = 0$. Anche senza calcolare $\delta \neq 0$, tale equazione è quindi equivalente a $x_3 - x_1 = 0$.

3. Una tale applicazione lineare esiste; l'unica scelta possibile per a è $a = 1$. Infatti, dal teorema fondamentale abbiamo
$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker g + \dim \operatorname{Imm} g = 2 \dim W_a,$$
per cui $\dim W_a = 2$. Come sappiamo, l'unico valore di a per cui questo si verifica è $a = 1$. D'altra parte, sia v_1, v_2 una base di W_1, che completiamo ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Dalla teoria sappiamo che esiste un'unica applicazione lineare che verifica
$$g(v_1) = g(v_2) = 0, \quad g(v_3) = v_1, \quad g(v_4) = v_2;$$
per tale applicazione lineare è chiaro che $\operatorname{Imm} g = \operatorname{Span}(v_1, v_2) = W_1$, per cui in particolare $\dim \operatorname{Imm} g = 2$. Dalla formula fondamentale abbiamo allora $\dim \ker g = 2$, e d'altro canto

$W_1 \subseteq \ker g$, in quanto $v_1, v_2 \in \ker g$ per costruzione. I sottospazi $\ker g$ e W_1 hanno quindi la stessa dimensione e sono contenuti uno nell'altro, e devono perciò essere uguali, come voluto.

Esercizio 2. Sia N una matrice invertibile $n \times n$ a coefficienti complessi. Chiamiamo $v_1, \ldots, v_n$ le sue colonne e scriviamo $\|v_i\| := \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle_H}$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ è il prodotto Hermitiano standard. Scopo di questo esercizio è dimostrare la disuguaglianza

$$|\det(N)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|, \tag{5}$$

con uguaglianza se e solo se $\langle v_i, v_j \rangle_H = 0$ per $i \neq j$.

1. Supponiamo che (5) valga quando $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dimostrare che (5) vale per ogni $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\det(N) \neq 0$.

   Supponiamo quindi d'ora in poi che $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Questa ipotesi vale per i punti 2, 3, 4, 5 qui sotto.

2. Sia $P = N^* \cdot N$. Calcolare la traccia di P.

3. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di P. Dimostrare che i λ_j sono reali e positivi.

4. Dimostrare che $\det P \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $\lambda_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$. Dedurre in particolare che (5) vale per ogni matrice $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ le cui colonne abbiano tutte norma 1.

   Indicazione. Ricordiamo la **disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica**: se $x_1, \ldots, x_n$ sono numeri reali non-negativi si ha $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, con uguaglianza se e solo se gli x_i sono tutti uguali.

5. Dimostrare che $\det(P) = 1$ se e solo se P è l'identità.

6. Dedurre che vale l'uguaglianza in (5) se e solo se i v_i sono tutti non nulli e soddisfano $\langle v_i, v_j \rangle_H = 0$ per $i \neq j$.

Soluzione.

1. Siccome $\det(N) \neq 0$, nessuna colonna di N è nulla. Per multilinearità del determinante possiamo scrivere
$$\det N = \|v_1\| \cdots \|v_n\| \det \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \mid \cdots \mid \frac{v_n}{\|v_n\|} \right).$$
   Sia $\tilde{N} := \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \mid \cdots \mid \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$, le cui colonne hanno tutte norma 1. Applicando (5) alla matrice $\tilde{N}$ (possiamo farlo per ipotesi, perché come appena osservato tutte le sue colonne hanno norma 1) otteniamo $|\det(\tilde{N})| \leq 1$, e quindi
$$|\det N| = \|v_1\| \cdots \|v_n\| |\det \tilde{N}| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|,$$
   ovvero (5) vale per N.

2. L'elemento in posizione (i, i) di P è dato dal prodotto fra la i-esima riga di N^* (che è il vettore riga ${}^t\overline{v_i}$) e la i-esima colonna di N (che è v_i). Si ha quindi $P_{ii} = {}^t\overline{v_i} v_i = \langle v_i, v_i \rangle_H = 1$. Ne segue che la traccia di P è la somma di n termini uguali ad 1, e quindi $\mathrm{tr}(P) = n$.

3. La matrice P è Hermitiana, in quanto $P^* = (N^*N)^* = N^*(N^*)^* = N^*N = P$, e sappiamo dalla teoria che gli autovalori di una matrice Hermitiana sono reali. Se v è un autovettore relativo all'autovalore λ abbiamo poi
$$\lambda \langle v, v \rangle_H = \langle \lambda v, v \rangle_H = \langle Pv, v \rangle_H = \langle M^*Mv, v \rangle_H = \langle Mv, Mv \rangle_H \geq 0,$$
   dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il prodotto Hermitiano standard è definito positivo. In particolare, siccome v è diverso da 0 abbiamo anche $\langle v, v \rangle_H > 0$, e quindi, dividendo per questa quantità, otteniamo $\lambda \geq 0$. Infine, se λ fosse uguale a 0, allora il determinante di P sarebbe nullo, e quindi anche quello di N lo sarebbe, perché $\det(P) = \det(N^*N) = \det(N*) \det(N) = \overline{\det(N)} \det(N) = |\det(N)|^2$.

4. Come noto, $\det(P) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Utilizzando la disuguaglianza fra media algebrica e geometrica otteniamo

$$\begin{aligned} \det(P) = \lambda_1 \cdots \lambda_n &= \left(\sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \right)^n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} \right)^n \\ &= \left(\frac{\operatorname{tr} P}{n} \right)^n = \left(\frac{n}{n} \right)^n = 1. \end{aligned}$$

   L'uguaglianza vale se e solo se vale nella disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica, cioè se e solo se tutti i λ_i sono uguali. Siccome questi sono n numeri con somma n, l'uguaglianza vale se e solo se sono tutti uguali ad 1.

   Infine, si ha $1 \geq \det(P) = |\det(N)|^2$, da cui $|\det(N)| \leq 1$ come voluto: la disuguaglianza (5) vale per ogni matrice N le cui colonne abbiano tutte norma 1.

5. Se P è l'identità ovviamente vale $\det(P) = 1$. Viceversa, se $\det(P) = 1$, allora tutti i suoi autovalori sono uguali ad 1 per il punto precedente. D'altra parte, P è una matrice Hermitiana, e il teorema spettrale assicura che ogni matrice Hermitiana sia diagonalizzabile. Una matrice diagonalizzabile con tutti gli autovalori uguali ad 1 è simile alla matrice identità (ovvero diventa la matrice identità dopo un cambio di base), ma visto che l'identità si scrive con la stessa matrice in ogni base otteniamo che $P = \mathrm{Id}$, come voluto.

6. Per quanto già dimostrato, vale l'uguaglianza in (5) se e solo se nessuna colonna è nulla e vale $|\det(\tilde{N})| = 1$, dove $\tilde{N}$ è la matrice normalizzata $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \mid \cdots \mid \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$. Costruiamo la matrice $\tilde{P} = (\tilde{N})^* \tilde{N}$ corrispondente ad $\tilde{N}$. Per quanto visto ai punti 4 e 5, si ha $|\det(\tilde{N})| = 1$ se e solo se $\det(\tilde{P}) = 1$, se e solo se $\tilde{P} = \mathrm{Id}$.

   Per definizione, la matrice $\tilde{P}$ ha come coefficiente in posizione (i,j) il prodotto

$$\frac{{}^t\overline{v_i}}{\|v_i\|} \frac{v_j}{\|v_j\|} = \overline{\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle_H} = \langle \frac{v_j}{\|v_j\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \rangle_H.$$

   In particolare, $\tilde{P}$ è uguale all'identità se e solo se i coefficienti diagonali $\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \rangle_H = \frac{\langle v_i, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ sono uguali ad 1, il che è automatico, e se quelli non-diagonali (con $i \neq j$) sono uguali a 0. Quest'ultima condizione però è evidentemente equivalente al fatto che $\langle v_i, v_j \rangle_H = 0$, il che conclude la dimostrazione.

6 Anno accademico 2022-2023

6.1 Compitino del 03/12/2022

Test.

1. Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ determinare una matrice M tale che $A \cdot M = \mathrm{Id}_{3\times 3}$.

   Soluzione. Procediamo con mosse di riga sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[2]-[3],[1]-[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

   Per quanto noto dalla teoria la matrice voluta è $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è M.

   (a) Determinare una base di $\ker f$:

   (b) Determinare una base di $\operatorname{Imm} f$:

   Soluzione.

   (a) Il sottospazio $\ker f$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

   le cui equazioni corrispondono alle righe di M. Ricavando x_4 dalla prima equazione e x_3 dalla seconda otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + x_2 - (-2x_1 + 3x_2) = 3x_1 - 2x_2 \\ x_3 = -2x_1 + 3x_2 \\ -5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

   Sostituendo ora nell'ultima equazione si trova $-5x_2+3(-2x_1+3x_2)+2(3x_1-2x_2) = 0 \Leftrightarrow -5x_2 - 6x_1 + 9x_2 + 6x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, cioè l'ultima equazione è automaticamente soddisfatta quando lo sono le prime due. Il sistema che stiamo studiando è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x_4 = 3x_1 - 2x_2 \\ x_3 = -2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ovvero si ha $\ker f = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dal momento che i due vettori appena scritti generano $\ker f$ e sono evidentemente linearmente indipendenti, ne costituiscono una base.

(b) Una base di $\operatorname{Imm} f$ è una base dello span delle colonne di M. Dal teorema fondamentale e dal calcolo del punto precedente abbiamo $\dim \operatorname{Imm} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 2$. Ne segue che per ottenere una base di $\operatorname{Imm}(f)$ basta scegliere due colonne di M che siano linearmente indipendenti: una possibile risposta è allora ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

3. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vettori in $\mathbb{R}^3$. È noto che ne formano una base $\mathcal{B}$. Consideriamo l'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e canonica in arrivo:

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo:

Soluzione.

(a) Per definizione, la matrice richiesta ha per colonne le coordinate dei vettori $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ in base canonica. Essa è quindi

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per definizione, la matrice richiesta ha per colonne le coordinate dei vettori $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ in base $\mathcal{B}$. Per ottenere tali coordinate dobbiamo scrivere i vettori in questione come combinazioni lineari dei vettori v_1, v_2, v_3.

i. Si osserva subito che $f(v_1) = v_1 + v_2$, e quindi le coordinate di $f(v_1)$ in base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se avessimo voluto determinare tali coordinate in modo sistematico, avremmo dovuto considerare l'equazione $f(v_1) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Essa si traduce in

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases}3 = x + 2y - z\\ 2 = x + y\\ 1 = x + 2z.\end{cases}$$

Sostituendo $x = 2 - y$ (seconda equazione) nella prima troviamo $3 = 2 + y - z$, cioè $z = y - 1$. Sostituendo entrambe queste relazioni nell'ultima equazione troviamo $1 = (2 - y) + 2(y - 1) = y$, e quindi $x = 1$ e $z = 0$, come già osservato.

ii. Procediamo come sopra: l'equazione

$$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

si riscrive

$$\begin{cases}3 = x + 2y - z\\ 2 = x + y\\ 2 = x + 2z.\end{cases}$$

Stavolta procediamo con mosse di riga: sottraendo la seconda equazione membro a membro dalle altre due troviamo

$$\begin{cases}1 = y - z\\ 2 = x + y\\ 0 = -y + 2z.\end{cases}$$

Sommando ora l'ultima equazione alla prima troviamo $1 = z$, da cui si ricava immediatamente $y = 2$ e $x = 0$. Le coordinate di $f(v_2)$ in base $\mathcal{B}$ sono quindi $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

iii. Chiaramente $f(v_3) = v_1$, quindi le sue coordinate sono $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

La matrice voluta è quindi

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

e

$$S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 = 2x + y - t\right\}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per W ed una sua base.
2. Determinare una base per S.
3. Dire se W ed S sono in somma diretta.
4. Trovare una base per $W + S$.

Soluzione.

1. Effettuiamo mosse di colonna sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 & x \\ -1 & -1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & -1 & z \\ 1 & -5 & -1 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-4[1],[3]-2[1],[4]+3[1],[5]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & y+x \\ 1 & -3 & -1 & 2 & z-x \\ 1 & -9 & -3 & 6 & t-x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-3[3],[4]+2[3],[4]-(x+y)[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & z-x+(x+y) \\ 1 & 0 & -3 & 0 & t-x+3(x+y) \end{pmatrix}.$$

A meno di scambiare la seconda e terza colonna, abbiamo una matrice le cui le prime due colonne contengono due pivot non nulli. Ne segue che il sottospazio W è di dimensione 2. Esso è inoltre descritto dall'annullarsi dell'ultima colonna, ovvero dalle equazioni $z + y = 2x - 3z + t = 0$. Una base è data ad esempio dalla prima e terza colonna della matrice qui sopra: esse sono elementi di W, linearmente indipendenti in quanto la corrispondente matrice è già ridotta a scalini con due pivot non nulli, ed essendo due vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2 ne costituiscono una base.

2. Dalle equazioni che definiscono S si ottiene immediatamente che i vettori in S sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ 2x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo allora $S = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dal momento che questi due vettori sono chiaramente linearmente indipendenti, essi costituiscono una base di S.

3. Si tratta di verificare se W ed S si intersechino banalmente o meno. Avendo descritto sia S che W tramite equazioni cartesiane, è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} z + y = 0 \\ 2x - 3z + t = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + y - t = 0. \end{cases}$$

Dalla prima e terza equazione ricaviamo $z = x, y = -x$. Sostituendo nell'ultima abbiamo allora $t = x$, e sostituendo ulteriormente nella seconda $2x - 3x + x = 0$, che è automaticamente verificata. L'intersezione è allora non banale e data da

$$\operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ricaviamo quindi che W ed S non sono in somma diretta.

4. Dalla formula di Grassmann abbiamo $\dim(W+S) = \dim W + \dim S - \dim(W \cap S) = 2+2-1 = 3$.

   Osserviamo che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che appartiene a S, non appartiene a W, perché non rispetta l'equazione $y+z=0$ trovata sopra. Allora $\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ è un sottospazio di $W+S$ (in quanto ciascuno dei tre vettori considerati appartiene ad almeno uno fra W ed S) di dimensione 3 (in quanto il terzo vettore non sta nello span dei primi due, a loro volta linearmente indipendenti), e quindi coincide con $W+S$. Siccome abbiamo già osservato che $\dim(W+S) = 3$, i tre vettori appena scritti (che sono generatori di $W+S$) devono essere anche linearmente indipendenti, e quindi costituirne una base.

Esercizio 2. Sia n un intero positivo e sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al massimo n.

1. Ricordare quanto vale $\dim V$ ed esibirne una base.
2. ($\star$) Consideriamo i polinomi

$$\begin{aligned} p_0(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n), \\ p_1(x) &= x(x-2)(x-3)\cdots(x-n), \\ p_2(x) &= x(x-1)(x-3)\cdots(x-n), \\ &\vdots \\ p_n(x) &= x(x-1)\cdots(x-(n-1)), \end{aligned}$$

   dove $p_i(x)$ è il polinomio ottenuto moltiplicando i monomi $x, x-1, x-2, \dots, x-n$ ad eccezione di $x-i$. Dimostrare che $p_0(x), \dots, p_n(x)$ sono linearmente indipendenti in V.
3. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & V & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & p(x) & \mapsto & (p(0), p(1), \dots, p(n)). \end{array}$$

   Dimostrare che f è bigettiva.
4. Consideriamo ora il caso speciale $n=4$ e l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} g: & V & \to & \mathbb{R}^{3} \\ & p(x) & \mapsto & (p(0), p(1), p(2)). \end{array}$$

   Dire se $g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un sottospazio affine e in caso affermativo determinarne la dimensione.

Soluzione.

1. La dimensione di V è $n+1$, in quanto una sua base è data da $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.
2. Osserviamo che per ogni $j = 0, \dots, n$ si ha $p_j(j) \neq 0$, mentre se i, j sono due indici diversi fra 0 e n si ha $p_i(j) = 0$. Consideriamo allora una combinazione lineare nulla

$$a_0 p_0(x) + \ldots + a_n p_n(x) = 0 : \tag{6}$$

mostreremo che questo implica $a_0 = \ldots = a_n = 0$, cioè che i polinomi $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ sono linearmente indipendenti.

L'uguaglianza (6), essendo un'uguaglianza di polinomi, deve essere vera quando ad x si sostituisce qualsiasi valore reale. In particolare, essa deve valere per $x = 0, \ldots, n$. In virtù di quanto già osservato, quando sostituiamo $x = i$, tutti i valori $p_j(i)$ sono nulli, salvo quello corrispondente a p_i. Otteniamo allora in particolare

$$a_i p_i(i) = 0,$$

da cui, siccome $p_i(i) \neq 0$, otteniamo $a_i = 0$. Dato che questo vale per ogni $i = 0, \ldots, n$ concludiamo che si ha $a_0 = \ldots = a_n = 0$, come voluto.

3. Siccome i polinomi $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ sono una base di V, un generico polinomio $p(x)$ in V si scrive nella forma
$$p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \ldots + \lambda_n p_n(x).$$
Valutando in $x = 0, \ldots, n$ otteniamo come sopra
$$p(i) = \lambda_i p_i(i) \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$
In particolare, se $p(x)$ è un elemento di $\ker f$, allora $p(i) = 0$ per ogni i, da cui (siccome $p_i(i) \neq 0$) $\lambda_i = 0$ per ogni i, e quindi $p(x) = 0$. Abbiamo così verificato che f è iniettiva, cioè che $\dim \ker f = 0$. Per il teorema fondamentale si ha $\dim \ker f + \dim \mathrm{Imm}(f) = \dim V = n+1$, da cui $\dim \mathrm{Imm}(f) = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. L'immagine di f è quindi un sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$ di dimensione $n+1$, e quindi coincide con $\mathbb{R}^{n+1}$. Ne segue che f è anche surgettiva, e quindi bigettiva.

4. La funzione g è la composizione della funzione f del punto 3 e della proiezione
$$\begin{array}{cccc} \pi: & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, \ldots, x_5) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3). \end{array}$$
Siccome f è surgettiva per il punto precedente e π è chiaramente surgettiva, anche g è surgettiva. In particolare, esiste $p_0(x) \in V$ tale che $g(p_0(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Scrivendo allora un generico polinomio di V nella forma $p(x) = p_0(x) + q(x)$ si ha
$$\begin{aligned} g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left\{ p(x) \in V \;\middle|\; g(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ p_0(x) + q(x) \in V \;\middle|\; g(p_0(x) + q(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ p_0(x) + q(x) \in V \;\middle|\; g(p_0(x)) + g(q(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ p_0(x) + q(x) \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + g(q(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ p_0(x) + q(x) \in V \;\middle|\; g(q(x)) = 0 \right\} = p_0(x) + \ker g. \end{aligned}$$
L'insieme $g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è quindi un sottospazio affine, di dimensione pari a quella di $\ker g$. Infine, abbiamo già visto che la funzione g è surgettiva, e quindi il teorema fondamentale fornisce
$$\dim \ker g = \dim V - \dim \mathbb{R}^3 = (n + 1) - 3 = 2.$$

6.2 Compitino del 04/03/2023

Test.

1. Consideriamo il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Esibire, se esiste, un vettore isotropo rispetto a φ.
☐ Un tale vettore non esiste ☐ Un vettore isotropo è ad esempio:

(b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$.....................

(c) Scrivere la matrice di φ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

(d) Sia U l'ortogonale rispetto a φ del sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y + z = 0 \right\}$. Determinare equazioni cartesiane per U:

Soluzione.

(a) Sì, un tale vettore esiste, ad esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: infatti $\varphi(e_1, e_1)$ è per definizione il coefficiente in posizione $(1, 1)$ della matrice data nel testo.

(b) È facile vedere che il rango della matrice è 2 (le prime due colonne sono linearmente indipendenti, la seconda e la terza sono una il doppio dell'altra). Ne segue che la dimensione del suo nucleo, e quindi n_0, è pari a 1. D'altro canto, la restrizione al sottospazio generato dai primi due vettori della base canonica ha matrice (rispetto alla base data da tali due vettori) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, di determinante -1. Come noto dalla teoria, questo implica che la segnatura di questa restrizione sia $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$. Ne segue che per φ si ha $n_+ \geq 1, n_- \geq 1$ e quindi $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

(c) Detti $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si tratta di calcolare i prodotti $\varphi(v_i, v_j)$. Se M è la matrice del testo, questi prodotti scalari si calcolano tramite la formula

$$\varphi(v_i, v_j) = {}^t[v_i]_{\text{can}} M [v_j]_{\text{can}}.$$

Sfruttando la simmetria (che permette di ottenere subito i valori di $\varphi(v_i, v_j)$ con $j < i$ da quelli con $j \geq i$), e osservando che i nostri vettori sono già scritti in base canonica, è sufficiente valutare

$${}^tv_1 M v_1 = 0, {}^tv_1 M v_2 = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, {}^tv_1 M v_3 = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$${}^tv_2 M v_2 = (1, 3, 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4, {}^tv_2 M v_3 = (1, 3, 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

e infine

$${}^tv_3 M v_3 = (3, 7, 14) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 24.$$

La matrice voluta è quindi
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

(d) È chiaro che W, essendo un iperpiano in $\mathbb{R}^3$, ha dimensione 2. Una sua base è quindi costituita da qualsiasi coppia di vettori non proporzionali le cui coordinate soddisfino l'equazione $x + 2y + z = 0$. Possiamo per esempio prendere come base
$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Equazioni per U sono allora date da $\varphi\left(w_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$ e $\varphi\left(w_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$, cioè
$$(2,-1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,-1,2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$
$$\iff (-1,0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3,6,12)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$
$$\iff -x = 3x + 6y + 12z = 0,$$
ovvero, dividendo la prima per -1 e la seconda per 3,
$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare i seguenti determinanti:

(a) $\det A =$ ....
(b) $\det B =$ ....
(c) $\det(A \cdot B^2 \cdot {}^t(A^{-1})) =$ ....

Soluzione.

(a) Si tratta di una matrice di Vandermonde di parametri $-1, 1, 0, 2$. Il suo determinante è quindi
$$(1-(-1))(0-(-1))(0-1)(2-(-1))(2-1)(2-0) = -12.$$

(b) Applichiamo le due mosse di colonna che scambiano la prima con la terza e la seconda con la quarta: il determinante cambia allora segno due volte, cioè resta inalterato. Ci siamo allora ricondotti a calcolare il determinante della matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
che è triangolare a blocchi. Il suo determinante è allora
$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (9-10)(8-5) = -3.$$

(c) Per il teorema di Binet,

$$\det(A \cdot B^2 \cdot {}^t(A^{-1})) = \det(A)\det(B)^2\det({}^t(A^{-1})).$$

D'altra parte, $\det({}^t(A^{-1})) = \det(A^{-1})$ per un noto teorema, e

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(\mathrm{Id}) = 1$$

nuovamente per il teorema di Binet, da cui $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. Sostituendo nella formula sopra troviamo che il determinante voluto è uguale a $(\det B)^2 = (-3)^2 = 9$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Siano α, β numeri reali, $n \geq 2$ un intero, e M la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali a β, tranne quelli sulla diagonale principale, uguali ad α.

Ad esempio, per $n = 3, \alpha = 5$ e $\beta = 1$ la matrice che stiamo considerando è $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori della matrice dell'esempio sopra, ovvero il caso $n = 3, \alpha = 5$ e $\beta = 1$;
2. Trovare (in funzione di α, β) un autovalore γ di M di molteplicità geometrica almeno $n - 1$.
3. Dedurre gli autovalori di M e le rispettive molteplicità algebriche.
4. Calcolare $\det(M)$.
5. Per quali valori di α, β la matrice M è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico: si ha

$$p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} t-5 & -1 & -1 \\ -1 & t-5 & -1 \\ -1 & -1 & t-5 \end{pmatrix} \overset{[1]-[2],[2]-[3]}{=} \det \begin{pmatrix} t-4 & 0 & -1 \\ 4-t & t-4 & -1 \\ 0 & 4-t & t-5 \end{pmatrix};$$

raccogliendo per linearità un fattore $(t-4)$ dalla prima colonna e un fattore $t-4$ dalla seconda,

$$p_M(t) = (t-4)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-5 \end{pmatrix} \overset{[3]+[1]}{=} (t-4)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & t-5 \end{pmatrix} = (t-4)^2(t-7),$$

dove nell'ultimo passaggio si è prima fatto uno sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga e poi calcolato direttamente il determinante 2×2 restante. Concludiamo quindi che gli autovalori sono 4 e 7. Determiniamo ora i corrispondenti autospazi: quello relativo a 4 è il nucleo di $M - 4\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha per base ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quello relativo a 7 è il nucleo di $M - 7\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, che ha per base ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Una possibile risposta è quindi data dalla base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Si osservi che per definizione $M - (\alpha - \beta)\,\mathrm{Id}$ è la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali a β, e quindi ha rango al massimo 1 (tutte le colonne sono proporzionali; possono essere nulle se $\beta = 0$). Questo ci dice che la dimensione dell'autospazio relativo al numero reale $\gamma := \alpha - \beta$ ha dimensione almeno $n - 1$, e quindi che tale numero reale è effettivamente un autovalore, di molteplicità almeno $n - 1$.

3. Dalla disuguaglianza $m_{\text{alg}}(\gamma) \geq m_{\text{geo}}(\gamma) \geq n-1$ vediamo che M ha (almeno) $n-1$ autovalori uguali a γ. Detto λ l'n-esimo autovalore, si ha

$$\operatorname{tr}(M) = \text{somma degli autovalori} = (n-1)\gamma + \lambda,$$

e d'altra parte $\operatorname{tr}(M) = n\alpha$ in quanto tutti gli n elementi diagonali di M sono uguali ad α. Se ne ricava $\lambda = n\alpha - (n-1)\gamma = n\alpha - (n-1)(\alpha - \beta) = \alpha + (n-1)\beta$. Si presentano quindi due casi: se $\beta = 0$, allora $\gamma = \alpha$ è l'unico autovalore, di molteplicità algebrica n; altrimenti gli autovalori sono $\gamma = \alpha - \beta$, di molteplicità algebrica $n - 1$, e $\alpha + (n-1)\beta$, di molteplicità algebrica 1.

4. Il determinante è il prodotto degli autovalori, ed è quindi uguale a $\gamma^{n-1}\lambda = (\alpha - \beta)^{n-1} \cdot (\alpha + (n-1)\beta)$.

5. La matrice M è sempre diagonalizzabile. In effetti, osserviamo innanzitutto che gli autovalori di M sono sempre reali per quanto visto prima. Inoltre,

   (a) se $\beta = 0$, allora $M = \alpha\,\mathrm{Id}$ è già diagonale;

   (b) se $\beta \neq 0$, allora l'autovalore λ ha molteplicità algebrica e geometrica 1, mentre l'autovalore γ ha molteplicità algebrica $n-1$ e molteplicità geometrica almeno $n-1$ per quanto visto sopra. Dal momento che la disuguaglianza opposta è sempre valida, le molteplicità algebrica e geometrica di γ coincidono. Ne segue che le molteplicità algebrica e geometrica coincidono per ogni autovalore di M, e quindi che M è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 3$ e $T : V \to V$ un endomorfismo. Dati $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, denotiamo con $M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

ovvero la matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono tutti nulli, tranne quelli sotto la diagonale principale (uguali ad 1) e quelli sull'ultima colonna (uguali, dall'alto in basso, a $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$).

1. Sia $v \in V$ un vettore con la proprietà che $v, Tv, T^2v, \ldots, T^{n-1}v$ è una base $\mathcal{B}$ di V. Dimostrare che la matrice di T in base $\mathcal{B}$ è $M(c_0, \ldots, c_{n-1})$, dove i coefficienti $c_0, \ldots, c_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico

$$p_T(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

2. Supponiamo che gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di T siano tutti distinti e siano $v_1, \ldots, v_n$ corrispondenti autovettori. Poniamo $v = v_1 + \ldots + v_n$. Dimostrare che $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ è una base di V.

3. Esibire un esempio di endomorfismo $T : V \to V$ (con V di dimensione almeno 3) per cui **non** esistano una base $\mathcal{B}$ di V e coefficienti $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ tali che $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = M(b_0, \ldots, b_{n-1})$.

4. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ la cui matrice in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dire se esistono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ e coefficienti $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ tali che $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = M(b_0, b_1, b_2)$.

Soluzione.

1. Questo fatto è essenzialmente parte della dimostrazione del teorema di Cayley-Hamitlon vista in classe. Lo ri-deduciamo adesso a partire da quel teorema. Consideriamo la colonna i-esima, con $i < n$. Essa si ottiene scrivendo le coordinate in base $\mathcal{B}$ del vettore ottenuto applicando T all'i-esimo vettore v_i della base $\mathcal{B}$. Per definizione della base, si ha $Tv_i = v_{i+1}$, le cui coordinate in base $\mathcal{B}$ sono date dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dove il coefficiente uguale ad 1 è in posizione $i+1$. Questo verifica la correttezza delle prime $n-1$ colonne della matrice. Per quanto riguarda l'ultima, il teorema di Cayley-Hamilton fornisce
$$0 = p_T(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \cdots + c_1 T + c_0 \operatorname{Id},$$
da cui (applicando questa identità al vettore v)
$$0 = T^n v + c_{n-1}T^{n-1}v + \cdots + c_1 Tv + c_0 v,$$
ovvero
$$T(T^{n-1}v) = -c_0 v - c_1 Tv - \ldots - c_{n-1}T^{n-1}v.$$
Questo mostra che, come voluto, che le coordinate di $T(v_n)$ in base $\mathcal{B}$ sono $-c_0, -c_1, \ldots, -c_{n-1}$, ovvero che l'ultima colonna di $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è data da $\begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ \vdots \\ -c_{n-1} \end{pmatrix}$, come voluto.

2. Osserviamo che $v_1, \ldots, v_n$, essendo autovettori relativi ad autovalori distinti, sono linearmente indipendenti, e quindi (essendo il numero giusto) formano una base $\mathcal{B}$ di V. La matrice di T in tale base è $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Le coordinate di $T^k v$ in base $\mathcal{B}$ sono allora
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$
Per verificare che $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ sia una base, consideriamo la matrice formata dalle coordinate di $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ in base $\mathcal{B}$, ottenendo
$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
La condizione che $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ sia una base si traduce nel fatto che la matrice qui sopra sia invertibile. Tale matrice è di Vandermonde, di parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dove i λ_i sono tutti distinti per ipotesi, e quindi è invertibile, come voluto.

3. È sufficiente prendere V di qualsiasi dimensione ≥ 3 e $T = \operatorname{Id}_V$: in effetti, l'applicazione lineare identità è rappresentata dalla matrice identità in una qualsiasi base, e quindi in particolare non è della forma $M(b_0, \ldots, b_{n-1})$.

4. Come sappiamo dal primo punto, è sufficiente trovare (o mostrare che non esiste) un vettore v tale che v, Tv, T^2v sia una base di $\mathbb{C}^3$. Prendiamo $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: si ha allora $Tv = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $T^2v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. È allora chiaro che $\mathcal{B} = v, Tv, T^2v$ è una base di $\mathbb{C}^3$, e quindi dal primo punto dell'esercizio concludiamo che in base $\mathcal{B}$ la matrice di T è $M(b_0, b_1, b_2)$, dove b_0, b_1, b_2 sono i coefficienti del polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tale polinomio caratteristico (siccome la matrice è diagonale) è uguale a $(t-1)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$, e quindi abbiamo
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(-1, 3, -3).$$

6.3 Compitino del 01/04/2023

Test.

1. Sia φ il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per il quale una base ortonormale è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere la matrice di φ in base canonica.

   (b) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$ e sia T^* l'aggiunto di T rispetto a φ. Calcolare $\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$=..........

Soluzione.

(a) Detta $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base del testo e e_1, e_2, e_3 la base canonica, osserviamo innanzitutto che si ha
$$e_1 = -v_1 + v_3, \quad e_2 = v_2, \quad e_3 = 2v_1 - v_3.$$
Riscriviamo questa informazione nella forma
$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Possiamo allora calcolare facilmente tutti i coefficienti della matrice di φ in base canonica utilizzando il fatto che la matrice che rappresenta φ in base v_1, v_2, v_3 è l'identità, tramite la formula
$$\varphi(e_i, e_j) = {}^t[e_i]_{\mathcal{B}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot [e_j]_{\mathcal{B}} = {}^t[e_i]_{\mathcal{B}} \cdot [e_j]_{\mathcal{B}}.$$
In particolare,
$$\varphi(e_1, e_1) = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \varphi(e_1, e_2) = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\varphi(e_1, e_3) = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3, \quad \varphi(e_2, e_2) = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi(e_2, e_3) = (0,1,0)\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = 0, \quad \varphi(e_3, e_3) = (2,0,-1)\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = 5.$$

La matrice richiesta è pertanto

$$[\varphi]_{\text{can}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\0 & 1 & 0\\-3 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

(b) Per definizione di operatore aggiunto,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \varphi\left(T\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix}8\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Utilizzando la matrice del prodotto scalare in base canonica determinata al punto precedente possiamo allora calcolare

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}8\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (8,2,3)\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\0 & 1 & 0\\-3 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (8,2,3)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = -8+6 = -2.$$

2. Scrivere la matrice (in base canonica) della proiezione ortogonale sul piano $x+y-z=0$ in $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione. Il piano in questione è l'ortogonale al vettore $w = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Come noto dalla teoria, la proiezione ortogonale in questione è data da $f(v) = v - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$. Questo fatto è comunque facile da verificare: se v giace sul piano $x+y-z=0$ (e quindi è ortogonale a w), si ha $f(v) = v - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w = v - 0\cdot w = v$, mentre se v appartiene alla retta perpendicolare al piano (cioè lo span di w, che è anche il nucleo della proiezione) si ha in effetti

$$f(\lambda w) = \lambda w - \frac{\langle \lambda w, w\rangle}{\langle w,w\rangle}w = \lambda w - \lambda w = 0.$$

Per trovare la matrice in base canonica (base che denotiamo e_1, e_2, e_3) basta ora calcolare $\langle w,w\rangle = 3$, e poi

$$f(e_1) = e_1 - \frac{\langle e_1, w\rangle}{3}w = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix},$$

$$f(e_2) = e_2 - \frac{\langle e_2, w\rangle}{3}w = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix},$$

$$f(e_3) = e_3 - \frac{\langle e_3, w\rangle}{3}w = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

I vettori appena calcolati forniscono le colonne della matrice richiesta, che risulta quindi essere

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

3. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali tale che $A^4 - 2A^3 + A^2 = 0$ e $\operatorname{tr}(A) = 2$. Elencare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche.

   Soluzione. Consideriamo il polinomio $p(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 = t^2(t-1)^2$. Siccome $p(A) = 0$ per ipotesi, il polinomio minimo di A divide $p(t)$, e quindi tutte le radici del polinomio minimo (cioè gli autovalori di A) sono anche radici di $p(t)$. Ne segue che gli autovalori di A sono tutti contenuti nell'insieme $\{0, 1\}$. Dalla condizione sulla traccia (ovvero il fatto che la somma degli autovalori, contati con le rispettive molteplicità algebriche, sia uguale a 2) otteniamo allora che l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 1.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare una matrice P tale che ${}^tP = P^{-1}$ e $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A,

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} t & -2 & -2 \\ -2 & t-3 & -4 \\ -2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} \overset{[2]-[3]}{=} \det \begin{pmatrix} t & -2 & -2 \\ 0 & t+1 & -1-t \\ -2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} \\ &= (t+1) \det \begin{pmatrix} t & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & t-3 \end{pmatrix} \overset{[3]+[2]}{=} (t+1) \det \begin{pmatrix} t & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & t-7 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{=} (t+1) \det \begin{pmatrix} t & -4 \\ -2 & t-7 \end{pmatrix} = (t+1)(t^2 - 7t - 8) = (t+1)^2(t-8). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi -1, di molteplicità 2, e 8, di molteplicità 1. Troviamo basi dei rispettivi autospazi, ricordando che (siccome la matrice è diagonalizzabile per il teorema spettrale) sappiamo già che le dimensioni degli autospazi sono 2 (per l'autovalore -1) e 1 (per l'autovalore 8):

1. Per l'autovalore -1, calcoliamo

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   dove si è usato il fatto che (conoscendo già la dimensione dell'autospazio) è sufficiente trovare il corretto numero di vettori indipendenti che stiano nel nucleo considerato.

2. Per l'autovalore 8, calcoliamo

$$\ker(A - 8\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Si noti che un autovettore per l'autovalore 8 può essere individuato anche più facilmente imponendo la condizione che esso sia ortogonale ai due vettori individuati al punto precedente (tale condizione è soddisfatta perché A è simmetrica: sappiamo che in tal caso autospazi relativi ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali).

Procediamo infine ad una ortogonalizzazione (e successiva normalizzazione) utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt: partendo dalla base $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e osservando che il terzo vettore è già ortogonale ai primi due, un passo del procedimento di Gram-Schmidt produce la base ortogonale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dividendo ciascun vettore per la sua norma otteniamo infine la base ortonormale (costituita di autovettori di A)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora prendere $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Essa è una matrice ortogonale (le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$) e le sue colonne sono autovettori di A, per cui $P^{-1}AP$ è diagonale, e più precisamente

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

in quanto la prima e seconda colonna di P (rispettivamente la terza) sono autovettori di A di autovalore -1 (rispettivamente 8).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ munito di un prodotto hermitiano $(\, , \,)$ definito positivo. Sia u un vettore di norma 1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si consideri l'endomorfismo $T : V \to V$ tale che per ogni $v \in V$ vale $T(v) = v + z(v, u)u$.

1. Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ l'endomorfismo T è bigettivo? Esibire in tal caso l'inverso (o tramite una formula, come è stato definito T, oppure, fissata un base a vostra scelta, descrivere la matrice dell'inverso).

2. Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ l'endomorfismo T è autoaggiunto rispetto a $(\, , \,)$?

3. Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ l'endomorfismo T è unitario?

Soluzione.

Completiamo u ad una base ortonormale $\mathcal{B}$, diciamo formata dai vettori $u = v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V. Questo è possibile in quanto u è di norma 1 per ipotesi. Dato che $v_2, \ldots, v_n$ sono ortogonali a $v_1 = u$, per $i = 2, \ldots, n$ si ha $T(v_i) = v_i + z(v_i, u)u = v_i$, indipendentemente dal valore di z. Questo implica che le colonne dalla seconda alla n-esima della matrice di T sono le stesse della matrice identità. Per quanto riguarda la prima colonna, calcoliamo invece $T(v_1) = T(u) = u + z(u, u)u = u + zu = (1 + z)u$. Ne segue che la matrice di T in base $\mathcal{B}$ è

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+z & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

1. T è bigettiva se e solo se il suo determinante è non nullo. Vediamo immeditatamente dalla matrice scritta qui sopra che $\det(T) = 1 + z$, quindi T è invertibile se e solo se $z \neq -1$. In base $\mathcal{B}$, la matrice di T^{-1} è chiaramente data da

$$[T^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (1+z)^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo anche scrivere una formula simile a quella data nel testo per T^{-1}: dalla matrice qui sopra si vede che T^{-1} manda u in $\frac{1}{1+z}u$ e fissa punto per punto l'ortogonale ad u. Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{C}$, la trasformazione della forma $T'(v) = v + \alpha(v,u)u$ fissa punto per punto l'ortogonale ad u e manda u in $u + \alpha u = (1+\alpha)u$. Imponendo $1 + \alpha = \frac{1}{z+1}$ troviamo $\alpha = -\frac{z}{z+1}$, da cui l'inversa di T è data da

$$T^{-1}(v) = v - \frac{z}{z+1}(v,u)u.$$

Questo si può anche verificare direttamente: usando $(u,u) = 1$ calcoliamo

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(v + z(v,u)u) &= v + z(v,u)u - \frac{z}{z+1}\left(v + z(v,u)u, u\right)u \\ &= v + z(v,u)u - \frac{z}{z+1}\left(v,u\right)u - \frac{z}{z+1}\left(z(v,u)u, u\right)u \\ &= v + z(v,u)u - \frac{z}{z+1}\left(v,u\right)u - \frac{z}{z+1} z(v,u)\left(u,u\right)u \\ &= v + z(v,u)u\left(1 - \frac{1}{z+1} - \frac{z}{z+1}\right) \\ &= v + z(v,u)u \cdot \frac{(z+1) - 1 - z}{z+1} = v. \end{aligned}$$

2. Dato che la base $\mathcal{B}$ è ortonormale, possiamo ottenere la matrice di T^* in base $\mathcal{B}$ come

$$^t\overline{[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1+\overline{z} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'endomorfismo T è autoaggiunto se e solo se $T = T^*$ (per definizione), e questo è equivalente al fatto che T, T^* abbiano la stessa matrice in base $\mathcal{B}$. Ne ricaviamo che T è autoaggiunto se e solo se $1 + z = 1 + \overline{z}$, cioè se e solo se z è reale.

3. La trasformazione T è unitaria se e solo se $TT^* = \mathrm{Id}$, cioè se e solo se il prodotto delle matrici di T e T^* in base $\mathcal{B}$ è l'identità. Tale prodotto è

$$\begin{pmatrix} (1+z)(1+\overline{z}) & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}:$$

ricaviamo che T è unitaria se e solo se $|1+z|^2 = 1$. Geometricamente, questa condizione equivale al fatto che z appartenga alla circonferenza nel piano complesso di centro -1 e raggio 1.

Esercizio 3. Sia M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Determinare gli autospazi di M, fornendo una base per ciascuno di essi.

Sia $X = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}) : A$ **non** diagonalizzabile e tale che $AM = MA\}$.

2. Scrivere un esempio di una matrice $A \in X$.

3. Dire se esiste $A \in X$ tale che $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Supponiamo che $A \in X$ abbia polinomio minimo di grado 2. Dimostrare che A ha un unico autovalore, di molteplicità algebrica 3.

5. Supponiamo che $A \in X$ abbia un unico autovalore λ, di molteplicità algebrica 3. Determinare la molteplicità geometrica di λ.

Soluzione. Nella soluzione scriveremo V per lo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$.

1. Siccome M è una matrice a blocchi, possiamo trovare il suo polinomio caratteristico come prodotto dei polinomi caratteristici dei blocchi: si ha perciò $p_M(t) = (t^2-1)(t-1) = (t-1)^2(t+1)$. Gli autospazi V_1, V_{-1} relativi agli autovalori 1 e -1 sono dati rispettivamente da
$$\operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
come si trova immediatamente dal calcolo di $\ker(M - \mathrm{Id})$ e $\ker(M + \mathrm{Id})$. Chiamiamo w_1, w_2, w_3 i tre vettori qui sopra, nell'ordine.

2. Ricordiamo che una condizione necessaria affinché M ed A commutino è che A preservi gli autospazi di M. Siccome $V = V_1 \oplus V_{-1}$ (la somma di autospazi è sempre diretta, quindi basta verificare l'uguaglianza di dimensione) e A preserva questa decomposizione (cioè manda ognuno dei due sottospazi in sé stesso), essa è non-diagonalizzabile solo se la sua restrizione ad uno di questi due sottospazi è non-diagonalizzabile. Possiamo allora scegliere A imponendo che essa, in una opportuna base, sia rappresentata da $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ in V_1, e da un qualsiasi numero (per esempio 1) su V_{-1}. Come basi di V_1, V_{-1} scegliamo quelle trovate al punto precedente. La A desiderata ha quindi il seguente comportamento sulla base w_1, w_2, w_3:
$$Aw_1 = w_1, \quad Aw_2 = w_1 + w_2, \quad Aw_3 = w_3.$$
Per determinare la matrice di A è sufficiente determinare le immagini dei vettori della base canonica. Esprimiamo perciò tali vettori nella base w_1, w_2, w_3:
$$e_1 = \frac{w_1+w_3}{2}, \quad e_2 = \frac{w_1-w_3}{2}, \quad e_3 = w_2.$$
Otteniamo infine
$$Ae_1 = \frac{1}{2}A(w_1+w_3) = \frac{1}{2}(w_1+w_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \frac{1}{2}A(w_1-w_3) = \frac{1}{2}(w_1-w_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$
$$Ae_3 = Aw_2 = w_1 + w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Una matrice A con le caratteristiche volute è quindi
$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
È in effetti facile verificare che $AM = MA$, e d'altro canto è chiaro che A non è diagonalizzabile (tutti i suoi autovalori sono uguali ad 1, quindi se A fosse diagonalizzabile sarebbe l'identità, cosa che evidentemente non è).

3. No: se A ed M commutano, A preserva gli autospazi di M. Siccome $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ è un autovettore di M di autovalore -1, anche $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ deve essere un autovettore di M di autovalore

-1. Tuttavia, ogni autovettore di M di autovalore -1 è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ non ha questa proprietà, quindi una tale A non può esistere.

4. Scriviamo $\mu_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ per il polinomio minimo di A (sui numeri complessi, ogni polinomio si scrive in questo modo). Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti con esponente 1, e quindi per un teorema noto A è diagonalizzabile, il che contraddice l'ipotesi. Ne segue che $\lambda_1 = \lambda_2$, cioè $\mu_A(t) = (t - \lambda_1)^2$. D'altro canto, siccome ogni autovalore di A è radice del suo polinomio minimo, questo implica che A abbia un unico autovalore (necessariamente di molteplicità algebrica 3, la dimensione dello spazio).

5. Consideriamo ancora la decomposizione $V = V_1 \oplus V_{-1}$. Come già detto, $V_{-1} = \operatorname{Span}(v_2)$ è costituito di autovettori per A. La restrizione di A a V_1 (che ha senso, in quanto abbiamo già ricordato che $AM = MA$ implica $A(V_1) \subseteq V_1$) ammette a sua volta almeno un autovalore, in quanto questo è vero per qualsiasi applicazione lineare definita sul campo dei numeri complessi. Sia w un autovettore per la restrizione di A a V_1. I due autovettori v_2, w sono linearmente indipendenti (appartengono a sottospazi in somma diretta), e quindi vediamo che A ammette almeno due autovettori. Per ipotesi, A ha un unico autovalore λ, quindi v_2, w sono autovettori (linearmente indipendenti) relativi a λ. Questo dimostra che l'autospazio di A relativo a λ ha dimensione almeno 2 (perché contiene v_2, w), e cioè che la molteplicità geometrica di λ è almeno 2. D'altro canto, tale molteplicità non può essere 3, perché altrimenti per l'unico autovalore λ si avrebbe $m_{\text{geo}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda) = 3$, e quindi A sarebbe diagonalizzabile, assurdo. Concludiamo quindi che la molteplicità geometrica di λ è esattamente due.

6.4 Compito del 17/05/2023

Test.

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare l'inversa della matrice A:

   (b) Calcolare gli autovalori della matrice A, precisandone le molteplicità algebriche:

   ....

   (c) Dire se A è diagonalizzabile. ☐ A è diagonalizzabile ☐ A non è diagonalizzabile.

   Soluzione.

   (a) Applichiamo l'algoritmo visto a lezione, partendo dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e applicando mosse di riga:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2],-[1]} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-[3]} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora leggere la risposta dalle ultime tre colonne di questa matrice: si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} = (t-1) \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = (t-1)(t^2-1) = (t-1)^2(t+1),$$

dove nel primo passaggio si è sviluppato il determinante rispetto alla seconda riga (o colonna, il risultato non cambia). Gli autovalori sono quindi 1, di molteplicità algebrica 2, e -1, di molteplicità 1.

(c) Per determinare se A sia o meno diagonalizzabile, dobbiamo solo verificare se la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 coincida con la sua molteplicità algebrica (questa condizione è infatti automatica per l'autovalore -1). Calcoliamo allora $\dim\ker(A - \mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. È chiaro che questa matrice ha rango due (le prime due righe sono linearmente indipendenti), e quindi nucleo di dimensione 1. Allora $m_{\mathrm{geo}}(1) = 1 < 2 = m_{\mathrm{alg}}(1)$, e quindi A non è diagonalizzabile.

2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 munito del prodotto scalare $\varphi(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) - p'(1)q'(1)$. Sia $W = \mathrm{Span}(x, x^2, x^3)$.

(a) Calcolare la segnatura di $\varphi|_W$ (la restrizione di φ al sottospazio W).
Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$....................

(b) Dire se W ha un sottospazio isotropo (cioè un sottospazio costituito solo da vettori isotropi) di dimensione 2 ed eventualmente trovare una base di un tale sottospazio.
☐ Un tale sottospazio non esiste ☐ Un tale sottospazio esiste, ed una sua base è data dai vettori:

Soluzione. Può essere conveniente rappresentare il prodotto scalare dato tramite la sua matrice in una base, ad esempio la base $\{x, x^2, x^3\}$. Calcoliamo facilmente che la matrice del prodotto scalare in tale base è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -5 \\ -2 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Mostriamo ad esempio come calcolare la prima riga (e quindi colonna): si ha $\varphi(x, x^i) = 0 + 1 - 1 \cdot i$ per $i = 1, 2, 3$.

(a) Per calcolare la segnatura possiamo procedere con l'algoritmo di eliminazione di Gauss simmetrico: cominciamo sottraendo il doppio della seconda riga (e colonna) dalla terza, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora la prima riga e colonna alla terza,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e scambiamo le prime due righe/colonne,

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, sottraiamo un terzo della prima riga/colonna dalla seconda, ottenendo la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segnatura è quindi $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

(b) Sì, un tale sottospazio esiste. Per trovarlo è sufficiente trovare un vettore nel nucleo di M (che è isotropo *ed ortogonale ad ogni altro*) e un secondo vettore isotropo da esso linearmente indipendente. Dalla forma della matrice M risulta subito che come (secondo) vettore isotropo possiamo prendere il polinomio x. Per trovare un vettore nel nucleo di M ripetiamo invece un calcolo di mosse di Gauss, ma stavolta solo di riga (così da non modificare il nucleo della matrice considerata):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -5 \\ -2 & -5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[2]} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[1],[2]-3[1]} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È ora facile trovare il nucleo di questa matrice, che risulta essere generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ricordando che tale vettore è espresso in base $\{x, x^2, x^3\}$, troviamo che un generatore del radicale di φ è dato dal polinomio $x - 2x^2 + x^3$. Una possibile risposta è quindi data dai vettori $x - 2x^2 + x^3, x$.

3. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ col prodotto scalare canonico. Trovare una base del sottospazio W ortogonale a $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Soluzione. Consideriamo la matrice A che ha per righe i vettori del testo (che chiamiamo v_1, v_2, v_3), ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un vettore v è ortogonale al vettore v_i se e solo se, nel calcolare Av, il coefficiente nella i-esima riga del prodotto è nullo. In particolare, il sottospazio W (l'insieme dei vettori simultaneamente ortogonali a v_1, v_2 e v_3) è il nucleo della matrice A. Procedendo allora mosse di Gauss per righe sulla matrice A, che non ne cambiano il nucleo, troviamo che possiamo equivalentemente calcolare il nucleo delle matrici

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Quest'ultima matrice, chiamiamola B, ha chiaramente rango 2 (due righe non nulle e non proporzionali), e quindi il nucleo ha dimensione $4-2=2$. Per trovare una base di W (cioè di $\ker A$, ovvero ancora di $\ker B$) basta allora esibire due vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\ker B$, quali ad esempio $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1.

1. Sia $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare non nulla e tale che $L^2=0$. Dimostrare che $\dim\ker L=2$.
2. Sia $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Dire se M è diagonalizzabile: se lo è, esibire una base che la diagonalizza; se non lo è, esibire una base che la triangola.
3. Sia $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare non nulla e tale che $L^2=0$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che v_1 è una base di $\operatorname{Imm}L$, $\{v_1,v_2\}$ è una base di $\ker L$, ed L è rappresentata in base $\mathcal{B}$ dalla matrice $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Si ricorda che due matrici A,B sono dette **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $B=PAP^{-1}$. Equivalentemente, A e B sono simili se rappresentano la stessa applicazione lineare in due basi diverse.

4. Sia $B\in\operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $B^3=0$. Dimostrare che B è simile ad una matrice triangolare strettamente superiore (ovvero triangolare superiore con coefficienti diagonali tutti nulli).

Soluzione.

1. L'ipotesi $L^2=0$ significa che l'immagine di L è contenuta nel nucleo di L. Allora $\dim\ker L\geq\dim\operatorname{Imm}L$, e d'altro canto per il teorema fondamentale $\dim\ker L+\dim\operatorname{Imm}L=3$. Dal momento che $\dim\ker L$ non è 3 (in quanto L è non nulla) ma è maggiore o uguale a $\dim\operatorname{Imm}L$, necessariamente $\dim\ker L=2$.
2. Il polinomio caratteristico di M è

$$\begin{aligned}p_M(t)&=\det\begin{pmatrix}t-1 & -1 & 2\\ -1 & t-1 & 2\\ -1 & -1 & t+2\end{pmatrix} \overset{[2]-[1],[3]-[1]}{=} \det\begin{pmatrix}t-1 & -1 & 2\\ -t & t & 0\\ -t & 0 & t\end{pmatrix}\\ &=t^2\det\begin{pmatrix}t-1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{[1]+[2],[1]+[3]}{=} t^2\det\begin{pmatrix}t & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=t^3.\end{aligned}$$

L'unico autovalore è quindi 0; se M fosse diagonalizzabile, in una base diagonalizzante diventerebbe la matrice nulla, ma questo è impossibile (l'applicazione lineare nulla è rappresentata dalla matrice nulla in ogni base). In alternativa, possiamo verificare che la molteplicità geometrica dell'autospazio relativo all'autovalore 0, ovvero $\dim \ker M$, è 2: il nucleo $\ker M$ è generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siccome $m_{\text{geo}}(0) < m_{\text{alg}}(0)$, la matrice M non è diagonalizzabile. D'altro canto, scegliendo come base $\{v_1, v_2, v_3\}$, dove v_3 è un qualsiasi completamento a base di $\mathbb{R}^3$, la matrice di M ha le prime due colonne nulle e risulta quindi triangolare superiore. Esplicitamente, se prendiamo ad esempio $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo $L(v_1) = 0, L(v_2) = 0$ e $L(v_3) = v_1$, per cui L in tale base è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Per il teorema fondamentale e il calcolo del primo punto, $\dim \operatorname{Imm} L = 3 - 2 = 1$. Sia v_1 una base di $\operatorname{Imm} L$. Abbiamo già osservato che $\operatorname{Imm} L$ è contenuta in $\ker L$ e che $\dim \ker L = 2$, quindi la base v_1 di $\operatorname{Imm} L \subset \ker L$ può essere estesa ad una base v_1, v_2 di $\ker L$. Sia infine v_3 tale che $L(v_3) = v_1$: un tale vettore esiste perché v_1 è nell'immagine. Si osservi inoltre che v_1, v_2, v_3 è una base: v_3 è linearmente indipendente dai precedenti vettori in quanto non appartiene a $\ker L$, mentre v_1, v_2 è una base di $\ker L$. Trattandosi di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, essi ne formano una base. Per costruzione si ha $L(v_1) = 0, L(v_2) = 0$ e $L(v_3) = v_1$, il che mostra che la matrice di L in questa base è quella voluta.

4. Sia $q(t) = t^3$. Dato che $q(B) = 0$, il polinomio minimo di B divide $q(t)$, e quindi è della forma t^k per qualche $k \in \{1, 2, 3\}$. In ogni caso, l'unica radice del polinomio minimo è $\lambda = 0$, e quindi l'unico autovalore di B è $\lambda = 0$. Dalla teoria sappiamo che una matrice che ha tutti gli autovalori nel campo base si triangola su quel campo: B è quindi simile ad una matrice triangolare. D'altro canto, i coefficienti diagonali di questa forma triangolare sono gli autovalori di B, e quindi sono tutti nulli per quanto già dimostrato.

Esercizio 2. Siano $R_1, R_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due rotazioni (ovvero trasformazioni ortogonali per il prodotto scalare standard, con determinante $+1$). Assumiamo che né R_1 né R_2 sia l'identità, così che ciascuna di esse abbia un ben definito asse di rotazione. Chiamiamo v_1, ϑ_1 rispettivamente un vettore che genera l'asse fisso di R_1 e il suo angolo di rotazione, e similmente v_2, ϑ_2 quelli di R_2. Sia infine $R = R_2 R_1 R_2^{-1}$.

1. Dimostrare che R è una rotazione.

2. Determinare, in funzione dei dati, l'asse fisso della rotazione R.

3. Determinare, in funzione di ϑ_1, ϑ_2, l'angolo ϑ della rotazione R (a meno del segno).

4. Dimostrare che $\pi_1 = \frac{1}{2 - 2\cos\vartheta_1}(R_1^2 - 2\cos\vartheta_1 \cdot R_1 + \mathrm{Id})$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ con immagine contenuta in $\operatorname{Span}(v_1)$ e che $\pi_1^2 = \pi_1$.

5. Dimostrare che in effetti l'applicazione lineare π_1 è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Span}(v_1)$

Soluzione.

1. È noto che le rotazioni formano un gruppo: l'inverso di una rotazione è una rotazione e una composizione di rotazioni è una rotazione. Ne segue che R_2^{-1} è una rotazione, e R è una rotazione in quanto composizione delle tre rotazioni R_2, R_1, R_2^{-1}.

2. L'asse fisso di R è generato da un vettore v (non nullo) tale che $Rv = v$, ovvero tale che $R_2 R_1 R_2^{-1} v = v$, o ancora $R_1(R_2^{-1} v) = R_2^{-1} v$. Vediamo quindi che $R_2^{-1} v$ viene fissato dalla rotazione R_1, quindi (per definizione di v_1) $R_2^{-1} v$ è proporzionale a v_1, diciamo $R_2^{-1} v = \lambda v_1$. Otteniamo allora $v = \lambda R_2 v_1$. Dal momento che vettori proporzionali generano la stessa retta, possiamo prendere $v = R_2 v_1$.

Commento. Una volta trovata, questa risposta è facile da verificare: in effetti, preso $v = R_2 v_1$, possiamo calcolare $Rv = (R_2 R_1 R_2^{-1})(R_2 v_1) = R_2 R_1 v_1 = R_2 v_1 = v$, dove si è usato $R_1 v_1 = v_1$.

3. È noto che l'angolo ϑ della rotazione R è determinato dalla formula $1 + 2\cos\vartheta = \operatorname{tr}(R)$. Dal momento che la traccia è invariante per cambio di base, e $R = R_2 R_1 R_2^{-1}$ è ottenuta da R_1 tramite un cambio di base, abbiamo $1 + 2\cos\vartheta = \operatorname{tr}(R) = \operatorname{tr}(R_1) = 1 + 2\cos\vartheta_1$. Si ha perciò $\vartheta = \pm\vartheta_1$.

4. Il polinomio caratteristico di R_1 è $(t-1)(t - e^{i\vartheta_1})(t - e^{-i\vartheta_1}) = (t-1)(t^2 - 2\cos\vartheta_1 t + 1)$. Il teorema di Cayley-Hamilton fornisce allora
$$(R_1 - \mathrm{Id})(R_1^2 - 2\cos\vartheta_1 R + \mathrm{Id}) = 0,$$
cioè l'immagine di $R_1^2 - 2\cos\vartheta_1 R + \mathrm{Id}$ è contenuta in $\ker(R_1 - \mathrm{Id}) = \operatorname{Span}(v_1)$. Dato che π_1 differisce da $R_1^2 - 2\cos\vartheta_1 R + \mathrm{Id}$ solo per un fattore numerico, la stessa conclusione vale per π_1, come voluto. Mostreremo che $\pi_1^2 = \pi_1$ nel prossimo punto.

5. Dalla teoria sappiamo che esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$, diciamo $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, rispetto alla quale R_1 si esprime con la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 \\ 0 & \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$. Il primo vettore di questa base è fissato da R_1, quindi è proporzionale a v_1. Ora, il polinomio $q(t) = t^2 - 2\cos\vartheta_1 t + 1$ è proprio il polinomio caratteristico della matrice $\begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$, perciò (dal teorema di Cayley-Hamilton) otteniamo che $q(M) = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ne segue che, nella base $\mathcal{B}$, l'applicazione lineare π_1 è rappresentata dalla matrice $\frac{1}{2 - 2\cos\vartheta_1} q(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. È evidente che tale matrice è uguale al proprio quadrato, il che dimostra che $\pi_1^2 = \pi_1$ è *una* proiezione su $\operatorname{Span}(w_1) = \operatorname{Span}(v_1)$. Infine, siccome la base $\mathcal{B}$ è ortogonale, tale proiezione è proprio *la* proiezione ortogonale: in effetti, la proiezione ortogonale su $\operatorname{Span}(v_1)$ è caratterizzata (fra tutte le proiezioni su $\operatorname{Span}(v_1)$) dal fatto che il suo nucleo sia $\operatorname{Span}(v_1)^\perp$. D'altro canto, dalla matrice scritta sopra vediamo che il nucleo di π_1 è $\operatorname{Span}(w_2, w_3)$, e siccome w_1, w_2, w_3 è una base ortogonale si ha $\operatorname{Span}(w_2, w_3) = \operatorname{Span}(w_1)^\perp = \operatorname{Span}(v_1)^\perp$, come voluto.

6.5 Compito del 09/06/2023

Test.

1. Sia $T \in O(3, \mathbb{R})$ rappresentata rispetto alla base standard dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Detta r la retta di $\mathbb{R}^3$ invariante per T ('asse invariante'), scrivere qui un generatore per r:
   (b) Determinare l'angolo di rotazione di T sul piano ortogonale all'asse invariante: ....

   Soluzione.

   (a) Una retta invariante per una trasformazione lineare non è altro che lo span di un autovettore di tale trasformazione. Dalla forma della matrice è evidente che il secondo vettore della base canonica è un autovettore di T, e ne genera quindi l'asse invariante. Una possibile risposta è quindi $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Nota. Non è difficile controllare che questo è in effetti l'unico asse invariante di T: il polinomio caratteristico di T è $(t+1)(t^2+1)$, quindi l'unico autovalore reale è -1, e il corrispondente autospazio ha dimensione 1 (in quanto la molteplicità geometrica dell'autovalore è al massimo pari a quella algebrica, che è 1).

(b) La trasformazione indotta da T sul piano ortogonale a Span $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (cioè sul piano $y=0$) è rappresentata (nella base ortonormale e_1, e_3) dalla matrice $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, che è facile identificare come la matrice di una rotazione di $90°$.

Nota. In alternativa, si può osservare che l'angolo ϑ soddisfa $\mathrm{tr}(T) = -1 + 2\cos\vartheta$, da cui $\cos\vartheta = 0$, e quindi $\vartheta = \pm 90°$. Si noti che il -1 nella formula precedente proviene dal fatto che l'unico autovalore reale di T è uguale a -1 (la trasformazione T non è una rotazione).

2. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 con prodotto scalare (non degenere) $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Sia $T : V \to V$ data da $T(A) = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} A$. Calcolare

$$T^*\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} =$$

Soluzione. Per definizione si ha

$$\begin{aligned}\varphi\left(T^*\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, B\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, T(B)\right) = \mathrm{tr}\left({}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} T(B)\right)\\ &= \mathrm{tr}\left({}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} B\right) = \mathrm{tr}\left({}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} B\right)\\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}, B\right).\end{aligned}$$

Dal momento che questa formula vale per ogni B, la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$ ha la proprietà che definisce $T^*\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, e concludiamo quindi che

$$T^*\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a coefficienti reali. Siano $W_1 = \{M \in V \mid {}^tM = M \text{ e } \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $W_2 = \{M \in V \mid {}^tM = -M \text{ e } \mathrm{tr}(M) = 0\}$ e $W_3 = \mathrm{Span}(\mathrm{Id})$.

(a) W_1, W_2, W_3 sono in somma diretta? ☐ Sì ☐ No

(b) Calcolare le dimensioni di W_1, W_2, W_3. Si ha

$$\dim W_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \dim W_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \dim W_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(c) Sia $M = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 0 & 2 & 4\\3 & 2 & 1 & 3\\4 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Trovare $M_1 \in W_1, M_2 \in W_2$ e $M_3 \in W_3$ tali che $M = M_1 + M_2 + M_3$.

☐ Tali matrici non esistono, perché ....

☐ Tali matrici esistono, ma non sono uniche. Un esempio è:

☐ Tali matrici esistono e sono uniche, date da:

Soluzione. Anche se sarebbe possibile affrontarli separatamente, per semplicità svolgeremo i primi due punti contemporaneamente. La prima osservazione è che la condizione ${}^tM = -M$ implica $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}({}^tM) = \operatorname{tr}(-M) = -\operatorname{tr}(M)$, e quindi $\operatorname{tr}(M) = 0$: in altre parole, la condizione $\operatorname{tr}(M) = 0$ nella definizione di W_2 è superflua, e W_2 è semplicemente il sottospazio delle matrici anti-simmetriche. Una seconda osservazione è che chiaramente $W_1 \cap W_3 = \{0\}$, in quanto gli elementi di W_3 sono multipli dell'identità, e l'unico multiplo dell'identità con traccia nulla è la matrice nulla.

Sia ora $S = \{M \in V \mid {}^tM = M\}$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Consideriamo l'applicazione lineare $T : S \to \mathbb{R}$ che manda ogni matrice nella sua traccia: questa è chiaramente surgettiva (per ogni data traccia esiste un opportuno multiplo dell'identità con quella traccia), e il suo nucleo è per definizione W_1. Applicando il teorema fondamentale dell'algebra lineare otteniamo allora

$$\dim W_1 + 1 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim S = 10,$$

dove si è usato il noto fatto che lo spazio delle matrici simmetriche $n \times n$ ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ (nel caso speciale $n = 4$). Abbiamo allora dedotto che $\dim W_1 = 9$. Osserviamo infine che W_1, W_3 sono entrambi contenuti in S, hanno intersezione banale come visto sopra, e soddisfano $\dim(W_1+W_3) = \dim(W_1)+\dim(W_3) = 9+1 = 10 = \dim(S)$, quindi $W_1+W_3 = S$ (qui si è usato il fatto che $\dim(W_3) = 1$, in quanto tale sottospazio è generato da un singolo vettore non nullo). Ne segue che $S = W_1 \oplus W_3$.

(a) Sì, sono in somma diretta, e in effetti decompongono V. Dato quanto osservato sopra, basta ricordare che V è la somma diretta del sottospazio delle matrici simmetriche S e delle matrici antisimmetriche (che come già notato coincide con W_2). Si ha allora $V = S \oplus W_2 = (W_1 \oplus W_3) \oplus W_2$.

(b) Abbiamo già osservato che $\dim W_3 = 1$ e che $\dim W_1 = 9$. Il sottospazio W_2 è il sottospazio delle matrici anti-simmetriche, che come noto ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ in generale, e quindi 6 nel caso particolare. In alternativa, si può usare la decomposizione in somma diretta del punto precedente per ottenere $\dim W_2 = \dim V - \dim W_1 - \dim W_3 = 16 - 9 - 1 = 6$.

(c) Per quanto visto al primo punto, le matrici M_1, M_2 e M_3 esistono e sono uniche. Per trovarle, decomponiamo innanzitutto M come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica usando l'identità

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ulteriormente decomporre la prima matrice (simmetrica) come somma di una matrice simmetrica a traccia nulla (cioè un elemento di W_1) e un multiplo dell'identità come segue. Scriviamo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = M_1 + M_3$ con $M_1 \in W_1$ e $M_3 \in W_3$. Prendendo la traccia di questa equazione otteniamo $4 = \operatorname{tr}(M_1) + \operatorname{tr}(M_3) = \operatorname{tr}(M_3)$, quindi M_3 deve avere traccia 4. L'unico multiplo dell'identità con traccia 4 è l'identità stessa, per cui dobbiamo prendere $M_3 = \operatorname{Id}$ e $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. In definitiva, la risposta è data (in modo unico) dalle matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Si sa che $AB = BA$.

1. Determinare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche.
2. Determinare una base dell'autospazio relativo all'autovalore -1 di B.
3. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi simultaneamente A e B, e in caso affermativo esibire esplicitamente una tale base.

Soluzione.

1. Basta calcolare il polinomio caratteristico di A e poi trovarne le radici: si ha
$$p_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) = \begin{pmatrix} t+2 & 2 & -1 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 0 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = (t+2)(t+2)(t+1),$$
dove l'ultima uguaglianza si ottiene facilmente sviluppando dapprima con Laplace lungo la prima colonna. Gli autovalori sono quindi -2, di molteplicità algebrica 2, e -1, di molteplicità algebrica 1.

2. L'autospazio relativo a -1 è per definizione
$$\ker(B - (-1)\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Si osservi che sappiamo ora che -1 è un autovalore di molteplicità geometrica 2, e quindi di molteplicità algebrica almeno 2. Utilizzando il fatto che la traccia di B è la somma dei suoi tre autovalori, troviamo $-1 = \mathrm{tr}(B) = (-1) + (-1) + \lambda_3$. Otteniamo perciò che il terzo autovalore è $\lambda_3 = 1$.

3. Dal punto precedente sappiamo che B è diagonalizzabile: in effetti, la condizione di uguaglianza fra molteplicità algebriche e geometriche è soddisfatta per entrambi gli autovalori (1 e -1). Sappiamo inoltre dal testo che A e B commutano, quindi per capire se A e B si possano diagonalizzare simultaneamente è sufficiente capire se A sia diagonalizzabile. Conosciamo già gli autovalori di A: per determinare se essa sia diagonalizzabile basta controllare che la molteplicità geometrica dell'autovalore -2 sia pari alla molteplicità algebrica (questa condizione è automatica per l'autovalore -1). L'autospazio di A relativo all'autovalore -2 è dato da
$$\ker(A + 2\,\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$
che è chiaramente uno spazio di dimensione 2, in quanto il rango della matrice che appare nella formula qui sopra è pari ad 1. Questo verifica che A è diagonalizzabile, e quindi, come già spiegato, che A e B si diagonalizzano simultaneamente. Per trovare esplicitamente una base che diagonalizzi entrambe, intersechiamo gli autospazi di A con quelli di B.

(a) L'autospazio di A relativo all'autovalore -1 è

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo vettore è anche un autovettore di B, con autovalore -1.

(b) L'autospazio di B relativo all'autovalore 1 è

$$\ker(B - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questo vettore è anche un autovettore di A, di autovalore -2.

(c) Per completare i due vettori precedenti ad una base che diagonalizzi sia A, sia B, ci occorre allora trovare un vettore che sia un autovettore di A per l'autovalore -2 e un autovettore per B di autovalore -1. Intersechiamo allora i relativi autospazi:

$$\ker(A + 2\,\mathrm{Id}) \cap \ker(B + \mathrm{Id}).$$

Il primo nucleo è descritto, come visto sopra, dall'equazione $-2y + z = 0$; il secondo è invece descritto dall'equazione $x + 2y - z = 0$. L'intersezione è allora

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0, \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è Span $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. È immediato verificare (e segue dalla teoria) che i tre vettori trovati formano una base di $\mathbb{R}^3$. In conclusione, una base con le proprietà volute è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Consideriamo il prodotto scalare φ_x su $\mathbb{R}^3$ che in base canonica ha matrice

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix},$$

dove x è un parametro reale.

1. Discutere la segnatura di φ_x al variare di $x \in \mathbb{R}$.
2. Fissato $x = 3$, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto al prodotto considerato.
3. Ancora per $x = 3$, dire se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita interamente da vettori isotropi. Se è possibile, esibirla. Se non è possibile, spiegare perchè.

Soluzione.

1. Consideriamo innanzitutto la restrizione di φ_x a $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, dove e_1, e_2 è la base canonica. Osserviamo che tale restrizione coincide con quella del prodotto scalare standard, e quindi è definita positiva. Questo mostra che, per ogni x, si ha $n_+(\varphi_x) \geq 2$. D'altra parte, sappiamo che la segnatura di φ_x è data dai segni degli autovalori di A_x, e per quanto già visto, due di questi autovalori sono positivi. Per determinare il segno del terzo (o sapere se esso sia nullo) è quindi sufficiente calcolare il determinante di A_x, che è dato da

$$\det(A_x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix} \overset{[3]-[1]}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x-1 \end{pmatrix} = x - 5.$$

Concludiamo quindi che:

(a) per $x > 5$, il prodotto dei tre autovalori è positivo e sappiamo già che almeno due sono positivi, quindi tutti e tre sono positivi e $(n_+, n_-, n_0) = (3, 0, 0)$;

(b) per $x = 5$, il prodotto degli autovalori è nullo e almeno due sono positivi, quindi due sono positivi e uno è nullo e $(n_+, n_-, n_0) = (2, 0, 1)$;

(c) per $x < 5$, il prodotto degli autovalori è negativo e almeno due sono positivi, quindi due sono positivi e uno è negativo e $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

2. Come già osservato, e_1 ed e_2 sono ortogonali rispetto a ogni φ_x per ogni x, e in particolare per $x = 3$. Ortogonalizziamo ora e_3 rispetto ai vettori precedenti, utilizzando un passo del procedimento di Gram-Schmidt (che possiamo usare in quanto e_1, e_2 non sono isotropi): sostituiamo e_3 con

$$e_3 - \frac{\varphi_3(e_1, e_3)}{\varphi_3(e_1, e_1)} e_1 - \frac{\varphi_3(e_2, e_3)}{\varphi_3(e_2, e_2)} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} e_1 - \frac{2}{1} e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonale per φ_3 è quindi data da $e_1, e_2, v := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nota. Si osservi che questo calcolo di base è indipendente dal valore di x. Questa base è perciò ortogonale rispetto a ogni φ_x, e può essere utilizzata per calcolare la segnatura: si ha $\varphi(e_1, e_1) = 1 > 0$, $\varphi(e_2, e_2) = 1 > 0$, e $\varphi(v, v) = (-1, -2, 1) A_x \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, -2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x - 5 \end{pmatrix} = x - 5$. Il segno di quest'ultima quantità determina la segnatura, in completa analogia a quanto fatto in precedenza tramite lo studio del determinante.

3. Consideriamo un vettore della forma $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda e_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando il fatto che $\varphi_3(e_1, v) = 0$, $\varphi_3(e_1, e_1) = 1$ e $\varphi_3(v, v) = -2$, troviamo che w è isotropo se e solo se

$$0 = \varphi_3(w, w) = \varphi_3(v + \lambda e_1, v + \lambda e_1) = \varphi_3(v, v) + 2\lambda\varphi_3(v, e_3) + \lambda^2 \varphi_3(e_1, e_1) = -2 + 0 + \lambda^2,$$

il che accade per $\lambda = \sqrt{2}$ e $\lambda = -\sqrt{2}$. Similmente, $v + \sqrt{2} e_2$ è anch'esso isotropo. Consideriamo i tre vettori

$$v + \sqrt{2} e_1, v - \sqrt{2} e_1, v + \sqrt{2} e_2,$$

che per costruzione sono isotropi. Affermiamo che costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$: in effetti sono 3, e il loro Span è dato da

$$\begin{aligned}
\mathrm{Span}\left(v + \sqrt{2}e_1, v - \sqrt{2}e_1, v + \sqrt{2}e_2\right) &= \mathrm{Span}\left((v + \sqrt{2}e_1) - (v - \sqrt{2}e_1), v - \sqrt{2}e_1, v + \sqrt{2}e_2\right) \\
&= \mathrm{Span}\left(2\sqrt{2}e_1, v - \sqrt{2}e_1, v + \sqrt{2}e_2\right) \\
&= \mathrm{Span}\left(e_1, v - \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_1, v + \sqrt{2}e_2\right) \\
&= \mathrm{Span}\left(e_1, v, v + \sqrt{2}e_2 - v\right) \\
&= \mathrm{Span}\,(e_1, v, e_2) = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Siano u, v due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$, scritti, nella base standard, così:

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Associamo a u, v la matrice 4×4 $C(u,v) = (c_{i,j})$ in cui per ogni $i = 1,2,3,4$ e per ogni $j = 1,2,3,4$ vale che

$$c_{i,j} = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$$

1. Calcolare la matrice $C(u,v)$ nel caso in cui i vettori dati siano rispettivamente $u = e_1$ e $v = e_2$, i primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Dimostrare che $C(u,v)$ è una matrice antisimmetrica non nulla.
3. Dimostrare che se u', v' è un'altra base di $\mathrm{Span}(u,v)$ allora le matrici $C(u,v)$ e $C(u',v')$ differiscono l'una dall'altra solo per la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \neq 0$.
4. Dimostrare che $C(u,v)$ ha determinante 0. Stimare il rango di $C(u,v)$.

Soluzione. Dati u, v consideriamo la matrice $M(u,v)$, di taglia 4×2, che ha u, v come colonne. Per definizione, i coefficienti $c_{i,j}$ sono dati dai determinanti di matrici 2×2 estratte della matrice $M(u,v)$. In particolare:

- Quando $i = j$, la matrice 2×2 ha per definizione due righe uguali e quindi determinante nullo. I coefficienti $c_{i,i}$ sono quindi sempre tutti nulli.
- Quando $i < j$, la matrice $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$ è semplicemente un minore 2×2 estratto da $M(u,v)$;
- Quando $i > j$, la matrice $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$ è ottenuta da un minore 2×2 di $M(u,v)$ scambiandone le righe.

Passiamo ora a risolvere il problema:

1. La matrice $M(e_1, e_2)$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'unico minore con determinante non nullo è quello che coinvolge le prime due righe: i coefficienti $c_{i,j}$ sono quindi tutti nulli, tranne $c_{1,2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ e $c_{2,1} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$. La matrice $C(u,v)$ è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Per definizione,
$$c_{j,i} = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ a_i & b_i \end{pmatrix} = -c_{j,i},$$
dove nel passaggio intermedio si è utilizzata la proprietà di alternanza del determinante. Questa catena di uguaglianze mostra che $C(u,v)$ è antisimmetrica. Per mostrare che essa è non nulla, osserviamo che i vettori u, v sono linearmente indipendenti, quindi la matrice $M(u,v)$ introdotta sopra ha rango 2. Per un noto teorema, questo implica che esiste un minore 2×2 di $M(u,v)$ il cui determinante non è nullo: diciamo che questo minore corrisponda alle righe i e j. Per quanto discusso sopra, il coefficiente $c_{i,j}$ è proprio il determinante di tale minore, e quindi non è nullo. Di conseguenza, neppure la matrice $C(u,v)$ è nulla.
3. Se u', v' è un'altra base dello stesso sottospazio, esiste una matrice invertibile P di dimensione 2×2 tale che $u' = uP$ e $v' = vP$, o in altre parole $M(u',v') = M(u,v)P$. In effetti, per mostrare questo fatto basta osservare che per definizione di base esisono coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che
$$u' = au + cv, \quad v' = bu + dv.$$
Consideriamo allora $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Per definizione di prodotto fra riga e colonna, $M(u,v)P$ è la matrice la cui prima colonna è la combinazione lineare delle colonne di $M(u,v)$ con

coefficienti dati dalla prima colonna di P. Le colonne di $M(u,v)$ sono proprio u,v, e i coefficienti della prima colonna di P sono a,c per costruzione. Ne segue che la prima colonna di $M(u,v)P$ è $au+cv=u'$, come voluto. Un simile argomento si applica alla seconda colonna. Questo mostra l'esistenza di P: la sua invertibilità segue dal fatto che u',v' sono linearmente indipendenti.

A questo punto, detti $c'_{i,j}$ i coefficienti di $C(u',v')$, abbiamo che i $c'_{i,j}$ sono i determinanti di certi minori 2×2 (nel senso precisato sopra, in cui le righe possono essere ripetute o scambiate) della matrice $M(u',v')$. Dato che $M(u',v')=M(u,v)P$, ogni minore di $M(u',v')$ si ottiene da un corrispondente minore di $M(u,v)$ moltiplicando per P. In conclusione: per ogni scelta di indici i,j si ha

$$c'_{i,j}=\det\begin{pmatrix}a'_i & b'_i\\ a'_j & b'_j\end{pmatrix}=\det\left(\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{pmatrix}P\right)=\det\left(\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{pmatrix}\right)\det P=c_{i,j}\det(P).$$

Abbiamo così ottenuto che $C(u',v')=\det(P)C(u,v)$, dove $\det(P)$ è non nullo in quanto P è invertibile.

4. Grazie al punto precedente, applicando opportune mosse di Gauss possiamo supporre che u,v siano della forma $\begin{pmatrix}1\\0\\a\\b\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\c\\d\end{pmatrix}$ (eventualmente, i pivot non nulli potrebbero trovarsi in un'altra posizione: questo non cambia sostanzialmente i calcoli successivi). La matrice $C(u,v)$ è allora data da

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & c & d\\ -1 & 0 & -a & -b\\ -c & a & 0 & ad-bc\\ -d & b & bc-ad & 0\end{pmatrix}.$$

Sottraendo la prima riga b volte dall'ultima e la seconda riga d volte dall'ultima, otteniamo che il rango di $C(u,v)$ è uguale al rango di

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & c & d\\ -1 & 0 & -a & -b\\ -c & a & 0 & ad-bc\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

il che mostra che il rango è al massimo 3 (e in particolare, $\det C(u,v)=0$ in quanto non ha rango massimo). Procedendo similmente, sottraiamo dalla terza riga la prima moltiplicata per a e la seconda moltiplicata per c, ottenendo che il rango di $C(u,v)$ è uguale a quello di

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & c & d\\ -1 & 0 & -a & -b\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Quest'ultimo rango è chiaramente due: è al massimo due in quanto ci sono solo due righe non nulle, ed è almeno 2 perché il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante 1.

Nota. Una soluzione più elegante consiste nell'osservare che $C(u,v)=u^tv-v^tu$. Ciascuna delle matrici u^tv e v^tu ha rango 1, dunque la loro differenza ha rango al massimo 2 (lo span delle colonne della differenza è contenuto nella somma degli span delle colonne delle singole matrici). D'altra parte, una matrice antisimmetrica reale A (come ad esempio $A=C(u,v)$) è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, con autovalori che sono immaginari puri (se A è antisimmetrica, la matrice iA è Hermitiana, quindi è diagonalizzabile con autovalori reali). Siccome gli autovalori immaginari non nulli di una matrice reale compaiono a coppie complesse coniugate, il numero di autovalori immaginari puri diversi da 0 è pari. Nel nostro caso, siccome $C(u,v)$ è 4×4, per differenza otteniamo anche che il numero di autovalori nulli è pari. Per diagonalizzabilità di $C(u,v)$, la dimensione del nucleo di $C(u,v)$ è pari al numero di autovalori nulli, e quindi è pari; nuovamente per differenza, il rango di $C(u,v)$ è pari. Abbiamo allora ottenuto che tale rango è al massimo 2, è pari, e non è zero, e quindi è esattamente due.

6.6 Compito del 07/07/2023

Test.

1. (a) Si scriva una base del sottospazio $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \right\}$:

   (b) Scrivere la matrice in base canonica di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo sia V e la cui immagine sia il sottospazio $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

   ☐ Una tale applicazione lineare non esiste, perché ....

   ☐ Una tale applicazione lineare esiste, ad esempio:

Soluzione.

(a) La matrice del sistema lineare che definisce V ha chiaramente rango 2 (le due equazioni non sono proporzionali), quindi $\dim V = 4 - 2 = 2$. Ponendo prima $x = 1, y = 0$ e poi $x = 0, y = 1$ e risolvendo il sistema, troviamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartengono a V, sono linearmente indipendente, e quindi ne costituiscono una base in quanto sono il numero giusto.

(b) Una tale applicazione lineare esiste.
Si osservi che, detti $e_1, \ldots, e_4$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e v_1, v_2 i vettori trovati al punto precedente, i quattro vettori e_1, e_2, v_1, v_2 costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$ (semplice verifica diretta). Per costruire un'applicazione lineare con le proprietà volute possiamo imporre $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $f(v_1) = f(v_2) = 0$: le prime due condizioni assicurano infatti che f abbia come immagine W, e le ultime due che abbia il nucleo voluto. Per scrivere la matrice di f in base canonica non serve ora far altro che esprimere i vettori e_3, e_4 nella base e_1, e_2, v_1, v_2. Si trova immediatamente $e_3 = v_2 - e_2$ e $e_4 = v_1 - e_1$. Otteniamo allora

$$f(e_3) = f(v_2) - f(e_2) = -f(e_2) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e

$$f(e_4) = f(v_1) - f(e_1) = -f(e_1) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così determinato i vettori $f(e_1), \ldots, f(e_4)$ per un'applicazione lineare con le proprietà richieste dal testo, e tali vettori sono esattamente le colonne della matrice di f in base canonica. Una matrice con le proprietà volute è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Sia A una matrice 5×5 a coefficienti reali diagonalizzabile sul campo $\mathbb{R}$. Supponiamo che $A^2(A + 2\,\mathrm{Id})(A^2 + \mathrm{Id}) = 0$.

   (a) Scrivere il polinomio minimo di A:

   ☐ $\mu_A(x) =$ ....

   ☐ non è possibile determinare il polinomio minimo di A.

   (b) Elencare tutti i possibili valori per $\mathrm{tr}(A)$: ....

   Soluzione.

   (a) Non è possibile determinare il polinomio minimo di A. Consideriamo il polinomio $g(t) = t^2(t+2)(t^2+1)$. Per ipotesi abbiamo $g(A) = 0$, e quindi il polinomio minimo di A divide $g(t)$. Inoltre, la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, e quindi il suo polinomio minimo è un prodotto di fattori lineari con esponente 1. Ne segue che il polinomio minimo di A divide in effetti $t(t+2)$. Le tre possibilità t, $t+2$ e $t(t+2)$ sono effettivamente tutte realizzabili, ad esempio dalla matrice nulla, dalla matrice $-2\,\mathrm{Id}$, e dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& -2 \end{pmatrix}$, rispettivamente.

   (b) Gli autovalori di A sono le radici del suo polinomio minimo, e quindi – per quanto detto sopra – gli autovalori di A possono essere uguali solo a 0 e a -2. Detta k la molteplicità[4] dell'autovalore 0, la molteplicità di -2 è $5-k$. Le possibili tracce di A sono quindi date da $k \cdot 0 + (5-k) \cdot (-2) = 2k - 10$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La risposta è quindi che le tracce possibili sono $-10, -8, -6, -4, -2, 0$ (che questi valori siano tutti effettivamente realizzati si vede facilmente considerando matrici diagonali i cui coefficienti lungo la diagonale sono uguali a 0 o a -2).

3. Sia Π il piano affine in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per Π:

   (b) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale del punto $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su Π:

   (c) Determinare la distanza di Π dal punto $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ....

   Soluzione.

   (a) Siano v_1, v_2, v_3 i tre vettori del testo. Il piano Π è ottenuto a partire dal piano vettoriale $W := \mathrm{Span}(v_3 - v_1, v_2 - v_1)$ traslando del vettore v_1. Calcoliamo allora un'equazione cartesiana per W. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1-1 & x \\ 3-1 & 3-1 & y \\ 4-(-1) & 3-(-1) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 5 & 4 & z \end{pmatrix};$$

[4] algebrica o geometrica: esse sono uguali in quanto A è diagonalizzabile

procedendo con mosse di colonna otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 5 & 4 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+x[1]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & y+2x \\ 5 & 4 & z+5x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-\frac{y+2x}{2}[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & z+5x-2(y+2x)=z+x-2y \end{pmatrix}.$$

Otteniamo allora che W è descritto dall'equazione cartesiana $x-2y+z=0$. Un'equazione cartesiana per il piano Π è allora della forma $x-2y+z=c$, dove c è determinata dalla condizione che questa equazione sia soddisfatta dal vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il che fissa $c = 1-2\cdot 1+(-1) = -2$. La risposta è quindi $x-2y+z=-2$.

(b) La retta r per l'origine perpendicolare a W è generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ogni retta perpendicolare a Π è ottenuta traslando r; in particolare, la retta perpendicolare a Π passante per Q è la retta $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-2t \\ 1+t \end{pmatrix}$. La proiezione di Q su Π è data dall'intersezione di Π con la retta perpendicolare a Π passante per Q. In termini di equazioni dobbiamo quindi trovare un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 1-2t \\ 1+t \end{pmatrix}$ che appartenga a Π, ovvero le cui coordinate soddisfino l'equazione $x-2y+z=-2$. Sostituendo troviamo allora

$$(5+t)-2(1-2t)+(1+t) = -2 \Longleftrightarrow 5+t-2+4t+1+t=-2,$$

cioè $t = -6/6 = -1$. Le coordinate della proiezione si ottengono allora ponendo $t=-1$ nelle formule precedenti: la proiezione (chiamiamola R) è $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) La distanza fra Q e Π è per definizione la distanza fra Q e la sua proiezione R. Per costruzione, $R = Q - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quindi $\|R-Q\| = \|-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1} = \sqrt{6}$.

4. Calcolare la segnatura del prodotto scalare associato (rispetto ad una certa base di $\mathbb{R}^3$) alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$................

Soluzione. Procediamo con un'eliminazione di Gauss simmetrica. Sottraendo il doppio della prima riga/colonna dalla seconda e terza riga/colonna trasformiamo la matrice data in $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Sottraiamo poi la seconda riga/colonna dalla terza, ottenendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La segnatura è quindi $(n_+, n_-, n_0) = (2,1,0)$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'endomorfismo L di V tale che

$$L(p(x)) = p(x+1)$$

per ogni polinomio $p(X) \in V$.

1. Trovare una base di ker $(L - I)^2$
2. Trovare una base di Imm $(L - I)^2$
3. Calcolare il polinomio caratteristico di L.
4. Calcolare il polinomio minimo di L.
5. Trovare, se possibile, una base di V tale che rispetto a questa base la matrice di L sia triangolare superiore, con 9 dei suoi 16 coefficienti uguali a 0 e 7 uguali a 1.

Soluzione. Osserviamo intanto che, dato un polinomio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V$, si ha

$$\begin{aligned}(L - \mathrm{Id})(p(x)) &= p(x+1) - p(x) = a_3[(x+1)^3 - x^3] + a_2[(x+1)^2 - x^2] + a_1[x+1-x] + a_0 \\ &= a_3(3x^2 + 3x + 1) + a_2(2x+1) + a_1 \\ &= 3a_3x^2 + (3a_3 + 2a_2) \cdot x + (a_3 + a_2 + a_1).\end{aligned}$$

1. Iterando la formula appena trovata otteniamo

   $$\begin{aligned}(L - \mathrm{Id})^2(p(x)) &= (L - \mathrm{Id})\left(3a_3x^2 + (3a_3 + 2a_2) \cdot x + (a_3 + a_2 + a_1)\right) \\ &= 3a_3(2x+1) + (3a_3 + 2a_2).\end{aligned}$$

   Un tale polinomio è nullo se e solo se i suoi coefficienti lo sono, ovvero se e solo se vale

   $$\begin{cases} 6a_3 = 0 \\ 3a_3 + 3a_3 + 2a_2 = 0, \end{cases}$$

   che ha come soluzione $a_2 = a_3 = 0$. Ne segue quindi che un polinomio è nel nucleo di $(L - \mathrm{Id})^2$ se e solo se i suoi coefficienti di grado 2 e 3 sono nulli, ovvero se e solo se è di grado minore o uguale ad 1. Una base dei polinomi di grado minore o uguale ad 1 è data da $1, x$.

2. La formula scritta al punto precedente mostra che l'immagine di $(L - \mathrm{Id})^2$ è l'insieme dei polinomi della forma $3a_3(2x+1) + (3a_3 + 2a_2) = 6a_3x + (6a_3 + 2a_2)$ al variare di $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'immagine di $(L - \mathrm{Id})^2$ ha dimensione $\dim V - \dim\ker(L - \mathrm{Id})^2 = 4 - 2 = 2$, e che scegliendo $a_3 = 1/6, a_2 = -1/2$ (e $a_1 = a_0 = 0$) otteniamo $(L - \mathrm{Id})^2\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = x$, mentre scegliendo $a_3 = 0, a_2 = 1/2$ otteniamo $(L - \mathrm{Id})^2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = 1$. Ne segue che l'immagine di $(L - \mathrm{Id})^2$ è uno spazio di dimensione 2 che contiene i vettori linearmente indipendenti 1 ed x, che quindi ne formano una base. In particolare, $\mathrm{Imm}(L - \mathrm{Id})^2 = \ker(L - \mathrm{Id})^2$.

3. Dal punto precedente segue che $(L-\mathrm{Id})^4 = (L-\mathrm{Id})^2 \circ (L-\mathrm{Id})^2$ è l'applicazione lineare nulla, in quanto l'immagine di $(L-\mathrm{Id})^2$ è proprio il nucleo di $(L-\mathrm{Id})^2$. Detto allora $f(t) = (t-1)^4$, abbiamo che $f(L) = 0$. Il polinomio minimo di L è quindi un divisore di $(t-1)^4$, e cioè è della forma $(t-1)^h$ per un certo intero positivo $h \leq 4$. Indipendentemente dal valore di h, l'unica radice di questo polinomio minimo in $\mathbb{C}$ (e quindi l'unica radice in $\mathbb{C}$ del polinomio caratteristico) è 1, e perciò anche il polinomio caratteristico è della forma $(t-1)^k$ per un opportuno k. In questo caso, k è semplicemente la dimensione dello spazio su cui agisce l'endomorfismo L, cioè 4, da cui otteniamo che il polinomio caratteristico è $(t-1)^4$.

4. Sappiamo già che il polinomio minimo è della forma $(t-1)^h$: dobbiamo solo determinare h, sapendo che $h \leq 4$. Mostriamo che in effetti $h = 4$: se fosse $h < 4$, allora il polinomio minimo dividerebbe $(t-1)^3$, e quindi l'endomorfismo $(L-\mathrm{Id})^3$ sarebbe l'endomorfismo nullo. Sfruttando la formula del punto 1 è però facile calcolare

   $$(L - \mathrm{Id})^3(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2) = (L - \mathrm{Id})(L - \mathrm{Id})^2(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2) = (L - \mathrm{Id})(x) = 1 \neq 0,$$

   e quindi $(L - \mathrm{Id})^3$ non è l'endomorfismo nullo. Ne segue che $h > 3$ e quindi $h = 4$.

5. Poniamo $T = L - \mathrm{Id}$. Costruiremo una base in cui la matrice di L sia $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, o, equivalentemente, la matrice di T sia $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per motivare la scelta di base che faremo, si noti che se vogliamo imporre che la matrice di T abbia la forma precedente, allora – detti v_1, v_2, v_3, v_4 i quattro vettori della base (che per ora non conosciamo, e costruiremo sotto!) – si deve avere $T(v_1) = 0$ (guardando la prima colonna), $T(v_2) = v_1$ (guardando la seconda), $T(v_3) = v_2$ (terza colonna) e $T(v_4) = v_3$ (ultima colonna). Il modo più semplice di ottenere vettori con queste proprietà è probabilmente quello di scegliere $v_4 = x^3$, $v_3 = T(x^3) = 3x^2 + 3x + 1$, $v_2 = T(v_3) = T(3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$ e $v_1 = T(v_2) = T(6x + 6) = 6$. Si verifica immediatamente che i quattro vettori così trovati sono linearmente indipendenti: questo segue ad esempio dal fatto che le coordinate di questi vettori in base $\{1, x, x^2, x^3\}$ sono $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la matrice che ha questi quattro vettori come colonne è invertibile (è ridotta a scalini con 4 pivot non nulli). Possiamo ora ripercorrere in senso inverso il ragionamento precedente: v_1, v_2, v_3, v_4 è una base; per costruzione vale $T(v_1) = 0, T(v_2) = v_1, T(v_3) = v_2$ e $T(v_4) = v_3$, e quindi la matrice di T in questa base è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; infine, la matrice di $L = T + \mathrm{Id}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha le caratteristiche richieste dal testo.

Nota. Per rispondere ai primi tre punti si può anche procedere scrivendo la matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Si trova facilmente

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui è immediato calcolare il polinomio caratteristico (la matrice è triangolare). Per quanto riguarda le prime due domande, l'applicazione lineare $T = L - \mathrm{Id}$ è rappresentata dalla matrice

$$[L - \mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $(L - \mathrm{Id})^2$, grazie al teorema di composizione, è rappresentata dal quadrato della matrice precedente, ovvero da

$$[(L - \mathrm{Id})^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da qui si ottengono immediamente il nucleo dell'applicazione in questione (lo span dei primi due vettori di base, cioè 1 e x) e la sua immagine (lo span di 2 e $6x+6$, che coincide con lo span di 1 e x).

Esercizio 2. Sia X lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Sia A una matrice 3×3 reale simmetrica.

1. Si dimostri che il prodotto scalare su X dato da
$$\psi_A(M, N) = \text{tr}\ ({}^tMAN)$$
è non degenere se e solo se A è invertibile.

2. Supponiamo che A sia invertibile, così che ψ_A è non degenere. Sia $T_A : X \to X$ l'applicazione lineare $T_A(M) = AM$. Si dimostri che T_A è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare ψ_A.

3. Sia v_1, v_2, v_3 una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale per il prodotto scalare standard e costituita di autovettori di A. Si giustifichi perché una tale base esiste e si espliciti (in funzione di v_1, v_2, v_3) una base di X che sia ortogonale rispetto a ψ_A.

4. Si discuta come la segnatura di ψ_A varia al variare del segno degli autovalori di A.

Soluzione. Cominciamo ricordando che se B è una matrice quadrata con coefficienti b_{ij}, allora $\text{tr}({}^tBB)$ è la somma dei quadrati dei coefficienti b_{ij}. In particolare, $\text{tr}({}^tBB)$ è nullo solo se B è la matrice nulla.

1. Supponiamo dapprima A invertibile. Vogliamo mostrare che ψ_A è non-degenere, ovvero che per ogni vettore non nullo N esiste un vettore M tale che $\psi_A(M, N) \neq 0$. Per far ciò basta prendere $M = AN$ (che è non nulla, in quanto $N \neq 0$ e A è invertibile): si ha allora $\psi_A(AN, N) = \text{tr}({}^t(AN)AN)$, che come osservato sopra è un numero diverso da 0.

   Viceversa, supponiamo A non invertibile. Sia v un vettore non nullo nel nucleo di A e sia N una matrice quadrata le cui colonne sono tutte uguali a v. Allora AN è la matrice nulla, e per ogni matrice $M \in X$ si ottiene $\psi_A(M, N) = \text{tr}({}^tMAN) = \text{tr}({}^tM0) = 0$. In particolare, questo mostra che ψ_A è degenere, in quanto il vettore N è ortogonale ad ogni vettore dello spazio X.

2. Si può verificare con un calcolo diretto. Usando il fatto che A è simmetrica, e quindi ${}^tA = A$, otteniamo
$$\begin{aligned} \psi_A(T_AM, N) &= \psi_A(AM, N) = \text{tr}({}^t(AM)AN) \\ &= \text{tr}({}^tM{}^tAAN) = \text{tr}({}^tMA(AN)) \\ &= \psi_A(M, AN) = \psi_A(M, T_AN), \end{aligned}$$
come voluto.

3. La matrice A è diagonalizzabile in una base ortogonale in virtù del teorema spettrale. Sia v_1, v_2, v_3 una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori di A che siano ortogonali per il prodotto scalare standard. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i corrispondenti autovalori (non necessariamente distinti). Dividendo i vettori v_i per le rispettive norme, possiamo assumere che ${}^tv_iv_i = 1$. Consideriamo le 9 matrici
$$M_{11} = \left(v_1 \mid 0 \mid 0\right), \quad M_{12} = \left(0 \mid v_1 \mid 0\right), \quad M_{13} = \left(0 \mid 0 \mid v_1\right)$$
$$M_{21} = \left(v_2 \mid 0 \mid 0\right), \quad M_{22} = \left(0 \mid v_2 \mid 0\right), \quad M_{23} = \left(0 \mid 0 \mid v_2\right)$$
$$M_{31} = \left(v_3 \mid 0 \mid 0\right), \quad M_{32} = \left(0 \mid v_3 \mid 0\right), \quad M_{13} = \left(0 \mid 0 \mid v_3\right).$$
Le 9 matrici M_{ij} formano una base di X: è immediato verificare che sono tante quante $\dim X = 9$ e che sono linearmente indipendenti.

   Osserviamo che le colonne della matrice AM_{ij} si ottengono moltiplicando A per le colonne di M_{ij}. In particolare, le colonne di AM_{ij} sono tutte nulle tranne la j-esima, che è data da $Av_i = \lambda_iv_i$. Ne segue che $AM_{ij} = \lambda_iM_{ij}$. Infine, si verifica facilmente che $\text{tr}\,({}^tM_{ij}M_{kl}) = 0$

se $(i,j) \neq (k,l)$. In effetti, se $j \neq l$ allora i coefficienti lungo la diagonale del prodotto ${}^tM_{ij}M_{kl}$ sono ottenuti moltiplicando almeno una riga o una colonna nulla, e quindi sono nulli (e a maggior ragione la traccia è nulla); se invece $j = l$ ma $i \neq k$, allora il prodotto ${}^tM_{ij}M_{kj}$ ha un unico coefficiente eventualmente non nullo, ovvero quello in posizione (j,j), e tale coefficiente è dato da ${}^tv_iv_k = \langle v_i, v_k\rangle_{\text{std}}$, che per definizione dei vettori v_i è nullo a meno che $i = k$ (in quanto i vettori v_i formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$). Si ottiene quindi che la traccia di ${}^tM_{ij}M_{kj}$ è nulla se $i \neq k$. Infine, osserviamo che la traccia di ${}^tM_{ij}M_{ij}$ è data, per lo stesso calcolo appena fatto, dal prodotto scalare di v_i con se stesso, e data la nostra normalizzazione, questo prodotto scalare vale 1.

Possiamo ora calcolare agevolmente

$$\begin{aligned} \psi_A(M_{ij}, M_{kl}) &= \operatorname{tr}\left({}^tM_{ij}AM_{kl}\right) = \operatorname{tr}\left({}^tM_{ij}\lambda_k M_{kl}\right) \\ &= \lambda_k \operatorname{tr}\left({}^tM_{ij}M_{kl}\right) = \begin{cases} \lambda_k, \text{ se } (i,j) = (k,l) \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Questo mostra che la base costruita è ortogonale.

4. Dal punto precedente conosciamo una base di X ortogonale rispetto a ψ_A. Per calcolare la segnatura basta allora valutare i segni dei prodotti scalari $\psi_A(M_{ij}, M_{ij}) = \lambda_i$. Si vede allora immediatamente che i segni dei 9 prodotti scalari $\psi_A(M_{ij}, M_{ij})$ sono gli stessi dei segni degli autovalori λ_i, ciascuno ripetuto tre volte. Siccome i λ_i danno la segnatura di A (conseguenza del teorema spettrale), otteniamo che – detta $(n_+(A), n_-(A), n_0(A))$ la segnatura di A – la segnatura di ψ_A è $(3n_+(A), 3n_-(A), 3n_0(A))$.

6.7 Compito dell'11/09/2023

Test.

1. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Consideriamo l'endomorfismo f di V definito da $f(A) = A - A^t$.

   (a) Calcolare gli autovalori di f, esplicitandone le molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Se possibile, trovare una base di V composta da autovettori di f che siano ortogonali rispetto al prodotto scalare definito da $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}({}^tA \cdot B)$.

   ☐ Tale base non esiste, perché ....

   ☐ Una tale base esiste, ad esempio:

   Soluzione.

   (a) Osserviamo che $\ker f$ (ovvero l'autospazio relativo a 0) è per definizione il sottospazio delle matrici simmetriche, di dimensione 2. Questo mostra che $m_{\text{geo}}(0) = 3 \leq m_{\text{alg}}(0)$. D'altro canto, se A è una matrice anti-simmetrica non nulla si ha $f(A) = A - {}^tA = A + A = 2A$, e quindi A è un autovettore di autovalore 2. Questo dimostra che 2 è autovalore di f, di molteplicità geometrica e quindi algebrica almeno 1. Siccome la somma delle molteplicità algebriche di tutti gli autovalori è $4 = \dim V$, l'unica possibilità è che valga $m_{\text{alg}}(0) = 3$ e $m_{\text{alg}}(2) = 1$, da cui anche $m_{\text{geo}}(2) = 1$.

   (b) Una tale base esiste. Come già osservato, un autovettore relativo a 2 è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Da quanto visto a lezione sappiamo che matrici simmetriche e anti-simmetriche sono ortogonali rispetto al prodotto scalare dato, per cui è sufficiente costruire una base del sottospazio delle matrici simmetriche che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare dato (ogni matrice simmetrica, come già osservato, è autovettore di f). È immediato verificare che la base delle matrici simmetriche data da

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è già ortogonale rispetto a φ (se non lo fosse stata avremmo potuto applicare il procedimento di Gram-Schmidt: ricordiamo infatti dalla teoria che φ è definito positivo). Una possibile risposta è quindi costituita dalle quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo, sullo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, il prodotto scalare

$$\varphi(p(x), q(x)) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1) - p(0)q(0).$$

   (a) Scrivere la matrice associata al prodotto scalare φ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$:

   (b) Determinare la segnatura di φ. Si ha $(n_+, n_-, n_0) =$ ....

   (c) Determinare una base del radicale di φ: ....

   (d) Determinare una base di $\mathrm{Span}(x, x^2, x^3)$ che sia ortogonale rispetto a φ:

   Soluzione.

   (a) Si tratta di calcolare i prodotti scalari $\varphi(x^a, x^b)$ con $0 \leq a, b \leq 3$. Per $a = 0$ abbiamo $\varphi(1, q(x)) = q(-1) + q(1) - q(0)$, da cui $\varphi(1, 1) = 1, \varphi(1, x) = 0, \varphi(1, x^2) = 2, \varphi(1, x^3) = 0$. Per $a = 1$ abbiamo $\varphi(x, q(x)) = q(-1) - q(1)$, da cui $\varphi(x, x) = -2, \varphi(x, x^2) = 0, \varphi(x, x^3) = -2$. Per $a = 2$ si ha $\varphi(x^2, q(x)) = q(-1) + q(1)$, da cui $\varphi(x^2, x^2) = 2$ e $\varphi(x^2, x^3) = 0$, e infine $\varphi(x^3, x^3) = -2$. La matrice voluta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Eseguiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss simmetrica sulla matrice trovata al punto precedente. Sottraendo la seconda riga/colonna dalla quarta troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

   sottraendo inoltre il doppio della prima riga/colonna dalla terza otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Questa matrice è diagonale e ci permette quindi di leggere la segnatura $(1, 2, 1)$.

   (c) Il radicale di φ corrisponde al nucleo della matrice trovata sopra. Sappiamo già (dalla segnatura) che questo nucleo ha dimensione 1, ed è chiaro che la seconda e quarta colonna sono uguali, ovvero che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo della matrice. Traducendo questo vettore di coordinate in un elemento di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ troviamo che $x^3 - x$ appartiene al radicale di φ. Siccome il radicale ha dimensione 1, il vettore $x^3 - x$ ne è una base.

   (d) Dal momento che $x^3 - x$ appartiene al sottospazio considerato ed è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ (essendo un elemento del radicale), è sufficiente trovare una base del tipo $x^3 - x, v_1, v_2$ con v_1, v_2 ortogonali fra loro, e basta ad esempio prendere $v_1 = xv_2 = x^2$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Definiamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \right\}$$

e

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Trovare delle equazioni cartesiane per W.
2. Trovare una base di V.
3. Costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo sia il sottospazio V e la cui immagine sia il sottospazio W. Descrivere f tramite la sua matrice rispetto a opportune basi a vostra scelta.
4. Scrivere la matrice dell'applicazione f costruita nel punto precedente rispetto alla base canonica, sia in partenza che in arrivo.

Soluzione.

1. L'eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \\ 1 & 4 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],[3]-x[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & y-x \\ 1 & 2 & z-x \\ 1 & 3 & t-x \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-(y-x)[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & z-x-2(y-x) \\ 1 & 3 & t-x-3(y-x) \end{pmatrix}$$

mostra che possiamo prendere come equazioni

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-3y+t=0. \end{cases}$$

Una possibile alternativa (trovata sottraendo il doppio della prima equazione dalla seconda) è

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2z+t=0. \end{cases}$$

2. V è definito da due equazioni chiaramente non proporzionali, e quindi ha dimensione $4-2=2$. Per trovarne una base basta quindi trovare due vettori in V non proporzionali. Sommando e sottraendo le equazioni che definiscono V troviamo il sistema

$$\begin{cases} x-t=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

Due vettori non proporzionali che soddisfano tali equazioni sono $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Consideriamo i vettori $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. È facile verificare che v_1, v_2, v_3, v_4 formano una base di $\mathbb{R}^4$, perché la matrice che li ha per colonne, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ha rango 4 (come si vede con un'eliminazione di Gauss, sottraendo la terza colonna dalla prima e la quarta dalla seconda). Prendiamo allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ come base in partenza e la base canonica come base in arrivo. Esiste un'unica applicazione lineare f che manda v_1, v_2, v_3, v_4 rispettivamente in $0, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tale applicazione lineare è rappresentata dalla matrice

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'immagine di f è generata dallo span delle colonne di questa matrice, e quindi è W per definizione. Per il teorema fondamentale, il nucleo ha allora dimensione $\dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Imm}(f) = 4 - 2 = 2$. D'altro canto, i vettori $v_!, v_2$ appartengono al nucleo per costruzione, e quindi V (di dimensione 2) è contenuto in $\ker f$. Siccome anche $\ker f$ è di dimensione 2, si ha $V = \ker f$ come voluto.

4. Detti e_1, e_2, e_3, e_4 i vettori della base canonica, si tratta di calcolare $f(e_1), \ldots, f(e_4)$. Conosciamo già $f(e_1) = f(v_3)$ e $f(e_2) = f(v_4)$. Si ha poi

$$f(e_3) = f(v_2 - v_4) = f(v_2) - f(v_4) = 0 - f(v_4) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f(e_4) = f(v_1 - v_3) = f(v_1) - f(v_3) = 0 - f(v_3) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice voluta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ uno spazio vettoriale con prodotto un scalare φ, la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il vettore $w \in V$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e l'endomorfismo $f : V \to V$ dato da $f(v) = \varphi(v, w)w$. Poniamo $g : V \to V$, $g = \operatorname{Id} - f$.

1. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla basa canonica.
2. Trovare gli autospazi di g, dando per ciascuno una base.
3. Dire se g è diagonalizzabile rispetto ad una base φ-ortogonale ed eventualmente trovare una tale base.

Soluzione.

1. Detti e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica, calcoliamo intanto

$$\varphi(e_1, w) = (1,0,0)M \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (1,0,0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1, \quad \varphi(e_2, w) = (0,1,0)M \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi(e_3, w) = (0,0,1)M \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1.$$

Si ha perciò $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = w$, e quindi la matrice di f in base canonica è

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

2. La matrice di g è $\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di g è allora dato dal determinante

$$\begin{aligned} p_g(t) = \det \begin{pmatrix}t&1&1\\1&t&1\\1&1&t\end{pmatrix} &\overset{[3]-[2],[1]-t[2]}{=} \det \begin{pmatrix}0&1-t^2&1-t\\1&t&1\\0&1-t&t-1\end{pmatrix} \\ &= (-1)\det\begin{pmatrix}1-t^2&1-t\\1-t&t-1\end{pmatrix} = -(t-1)(1-t^2) + (1-t)^2 \\ &= (1-t)^2(1+t) + (1-t)^2 = (t-1)^2(t+2). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi -2, di molteplicità 1, e 1, di molteplicità 2. Ragionando sulla geometria del problema si nota che f manda ogni vettore in un multiplo di w, e quindi w è un autovettore di f, e quindi anche di $g = \mathrm{Id} - f$ (in quanto è autovettore anche di Id). In effetti, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di g:

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Abbiamo così trovato un autovettore di autovalore -2 (che è una base dell'autospazio relativo all'autovalore -2, in quanto questo ha molteplicità algebrica e quindi geometrica pari ad 1). Per quel che riguarda l'autovalore 1, cerchiamo

$$\ker(g - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}.$$

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è quindi data dai due vettori $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

3. Si verifica subito che w è ortogonale rispetto a v_2, v_3 per il prodotto scalare φ, in quanto
$$\varphi(w,v) = (1,1,1)Mv = (1,1,1)v,$$
e sia per $v = v_2$ che per $v = v_3$ il prodotto scalare $(1,1,1)v$ è nullo. Cerchiamo ora di ortogonalizzare i vettori v_2, v_3 rispetto a φ: proviamo a fare un passo del procedimento di Gram-Schmidt, sostituendo a v_3 il vettore
$$v_3 - \frac{\varphi(v_2,v_3)}{\varphi(v_2,v_2)} v_2.$$
Si calcola
$$\varphi(v_2,v_2) = (1,-2,1)M\left(1,-2,1\right) = (1,-2,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$
$$\varphi(v_2,v_3) = \varphi(v_3,v_2) = (1,1,-2)M\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1,-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$
e si deduce quindi che $v_3 - \frac{-3}{6}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ è ortogonale a v_2 e appartiene ancora all'autospazio relativo all'autovalore 1, e quindi in particolare è ancora ortogonale a w. In conclusione (riscalando l'ultimo vettore trovato per un fattore $2/3$) concludiamo che una base con le proprietà volute è data da
$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia n un intero positivo e $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $N^2 = 0$.

1. Dimostrare che $(\mathrm{Id} + N)^{-1} = \mathrm{Id} - N$, dove Id è la matrice identità $n \times n$.
2. Supponiamo che $\mathrm{Id} + N$ sia una matrice ortogonale. Dimostrare che N è anti-simmetrica.
3. Determinare, in funzione di N, il polinomio minimo di $\mathrm{Id} + N$.
4. Dedurre che $\mathrm{Id} + N$ ha 1 come unico autovalore e che è diagonalizzabile se e solo se $N = 0$.

Soluzione.

1. Si tratta solo di moltiplicare $\mathrm{Id} + N$ per $\mathrm{Id} - N$: il prodotto è $(\mathrm{Id} + N)(\mathrm{Id} - N) = \mathrm{Id} + N - N - N^2 = \mathrm{Id}$, come voluto.
2. Supponiamo che $A := \mathrm{Id} + N$ sia ortogonale, ovvero che ${}^tA$ coincida con A^{-1}. Dal primo punto sappiamo che $A^{-1} = \mathrm{Id} - N$, quindi otteniamo l'equazione
$$\mathrm{Id} - N = (\mathrm{Id} + N)^{-1} = A^{-1} = {}^tA = \mathrm{Id} + {}^tN,$$
che fornisce ${}^tN = -N$, cioè N è anti-simmetrica, come voluto.
3. Poniamo come sopra $A := \mathrm{Id} + N$. Si osservi che $A^2 = (\mathrm{Id} + N)^2 = \mathrm{Id} + 2N + N^2 = \mathrm{Id} + 2N$. Otteniamo allora che $A^2 + \mathrm{Id} = 2\,\mathrm{Id} + 2N = 2(\mathrm{Id} + N) = 2A$. Ne segue che $f(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ è un polinomio tale che $f(A) = 0$, e quindi $f(t)$ è un multiplo del polinomio minimo di A. Ci sono allora solo due possibilità: il polinomio minimo può essere solo $(t-1)^2$ o $(t-1)$. Il secondo caso è possibile solo se $A = \mathrm{Id}$, cioè se e solo se $N = 0$. In tutti gli altri casi, il polinomio minimo è $(t-1)^2$.
4. Gli autovalori $\mathrm{Id} + N$ coincidono con le radici del polinomio minimo, che è $(t-1)^2$ oppure $(t-1)$. In entrambi i casi, l'unico autovalore è quindi il numero 1, come voluto. D'altra parte, A è diagonalizzabile se e solo se il polinomio minimo non ha fattori ripetuti, il che – nel nostro caso – accade se e solo se il polinomio minimo è $t-1$, cioè se e solo se $\mathrm{Id} + N = \mathrm{Id}$, che è a sua volta equivalente a $N = 0$.

6.8 Compito del 30/11/2023 (appello straordinario)

Test.

1. Sia V lo spazio degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $v = (1, 1, 1)$ e $w = (0, -1, 1)$, sia W l'insieme degli endomorfismi $f \in V$ tali che $f(v) = f(w) = \underline{0}$.

   (a) Dire se W è un sottospazio di V ed, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ Sottospazio di dimensione ......

   (b) Si scriva in base canonica la matrice dell'operatore $g \in W$ per cui $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

   Soluzione.

   (a) L'insieme W è un sottospazio in quanto contiene l'endomorfismo nullo e somme e multipli di endomorfismi di W sono ancora contenuti in W. Possiamo completare l'insieme $\{v, w\}$ a base di $\mathbf{R}^3$ aggiungendo un terzo vettore u. L'endomorfismo f è completamente determinato dai valori che assume su una base, e quindi è determinato dal valore che assume $f(u)$, che può essere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$. Pertanto $\dim W = 3$.

   (b) Abbiamo che $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Inolrte si ha che $e_2 = 1/2(-e_1 + v - w)$ e $e_3 = 1/2(-e_1 + v + w)$. Dunque $g(e_2) = (-1/2, 0, 0)$ e $g(e_3) = (-1/2, 0, 0)$. Quindi la matrice associata a g rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi X si dica se X è un sottospazio vettoriale di $V = \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ e in caso affermativo se ne determini la dimensione:

   (a) $X_1 = \{A \in V : A^2 = 0\}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ Sottospazio di dimensione ......

   (b) $X_2 = \{A \in V : \mathrm{tr}(MA) = \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(A) = 0\}$, dove $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   ☐ Non è un sottospazio ☐ Sottospazio di dimensione ......

   Soluzione.

   (a) Non è un sottospazio in quanto, detta $E_{i,j}$ la matrice i cui coefficienti sono tutti nulli, salvo per un 1 in posizione (i, j), si ha $E_{1,4}, E_{4,1} \in X_1$, ma $(E_{1,4} + E_{4,1})^2 \neq 0$.

   (b) È un sottospazio in quanto contiene la matrice nulla e per la linearità della traccia si ha che è chiuso per somma e per prodotto per scalare.
   Scriviamo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. La matrice AM è la matrice che ha 4 colonne uguali fra loro e uguali alla somma delle colonne di A: la sua traccia è quindi la somma di tutti i coefficienti di A. Similmente, MA è la matrice che ha 4 righe uguali fra loro e uguali alla somma delle righe di A: la sua traccia è quindi ancora pari alla somma di tutti i coefficienti di A. Ne consegue che X_2 è definito dalle due equazioni lineari $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^4 a_{ii} = 0$ e $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(MA) = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} = 0$. Essendo definito da due equazioni lineari chiaramente fra loro non proporzionali, si ha $\dim X_2 = \dim V - 2 = 14$.

3. Sia M_k la matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

(a) Per $k = 3$, calcolare gli autovalori di M_k, determinandone la molteplicità algebrica e geometrica.

Autovalore	Molteplicità algebrica	Molteplicità geometrica

(b) Dire per quali valori di k la matrice M_k è diagonalizzabile. $k =$ ....

(c) Per $k = 0$, trovare una matrice ortogonale P ed una diagonale D tali che $P^{-1}\cdot M_k \cdot P = D$

Soluzione.

(a) Calcoliamo il determinante di $t\,\mathrm{I} - M_k$:

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & -k & -1 \\ 0 & t-1 & -1 \\ -1 & -k-1 & t-2 \end{pmatrix} = t^3 - 4t^2 + (3-k)t.$$

Pertanto per $k = 3$ il polinomio caratteristico di M_3 ha due autovalori: $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di λ_2 è quindi 1, mentre per calcolare la molteplicità algebrica di λ_1 calcoliamo il rango di

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

che è pari a 2. Ne segue che la molteplicità geometrica di λ_1 è $3 - 2 = 1$.

(b) In generale il polinomio caratteristico $p_{M_k}(t) = t^3 - 4t^2 + (3-k)t$ ha radici $0, 2 - \sqrt{k+1}, 2 + \sqrt{k+1}$. Pertanto le tre radici sono distinte, a meno che sia $k = 3$ oppure $k = -1$. Per $k = 3$ abbiamo già visto che M_k non è diagonalizzabile. Per $k = -1$ abbiamo $2I - M_{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi anche in questo caso la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è 1, mentre la molteplicità algebrica è 2. Tenuto conto che dobbiamo anche imporre che gli autovalori di M_k siano reali, ovvero che $k + 1 \geq 0$, segue che M_k è diagonalizzabile se e solo se $k > -1$ e $k \neq 3$.

(c) Abbiamo visto che per $k = 0$ la matrice M_0 ha autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Gli autospazi corrispondenti sono generati da $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (1, 1, 2)$. Normalizzando tali vettori otteniamo le colonne di P:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

mentre la matrice diagonale D è determinata dagli autovalori considerati:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_2 + 2\,x_2\,y_3 + x_3\,y_3.$$

(a) Scrivere in base canonica la matrice associata a ϕ:

(b) Trovare la segnatura di ϕ.

Soluzione.

(a) Un calcolo diretto fornisce la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice associata a ϕ ha determinante negativo ($-6 < 0$), mentre la sua restrizione al sottospazio di dimensione 2 dato da $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$ è definita positiva. Quindi ϕ è non degenere e la segnatura di ϕ è pari a $(i_+, i_-, i_0) = (2, 1, 0)$.

6.9 Compito del 17/01/2024

Test.

1. Si consideri il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare una base del radicale di ϕ.

   Soluzione. La matrice data ha rango 2 è il suo nucleo è generato dal vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ che costituisce dunque una base del radicale.

   (b) Calcolare la segnatura di ϕ:
   Soluzione. Poiché il radicale ha dimensione 1, $n_0 = 1$, inoltre poiché $\phi(e_1, e_1) = 1$, $n_+ \geq 1$ e poiché $\phi(e_3, e_3) = -1$ allora $n_- \geq 1$. Ma poiché $n_+ + n_- + n_0 = 3$ allora necessariamente $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

   (c) Determinare una base del sottospazio ortogonale al piano $\pi : x + y + z = 0$ rispetto a ϕ .

   Soluzione. Il piano π è generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (che sta nel nucleo di ϕ) e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pertanto i vettori ortogonali a π sono i vettori $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $\phi(v, v_1) = 0$ e $\phi(v, v_2) = 0$. La prima condizione è sempre vera perché v_1 è nel radicale. Quindi l'ortogonale di π è lo spazio dei vettori v che soddisfano $\phi(v, v_2) = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

   cioè $-x-y-z = 0$. Quindi l'ortogonale a π è π stesso e una base è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

   Soluzione. Operando mosse di colonna otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e dunque $\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 5 = -10$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio $W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ed i vettori $v_1(t) = \begin{pmatrix}t+4\\-t-5\\t+6\\1\end{pmatrix}$, $v_2(t) = \begin{pmatrix}1\\3-t\\2t+3\\t\end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix}7\\9\\5\\-4\end{pmatrix}$, dove t è un parametro reale.

1. Trovare la dimensione di W.
2. Trovare equazioni cartesiane per W nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4.
3. Stabilire per quali valori di t l'insieme $\{v_1(t), v_2(t), v_3\}$ forma una base di W.
4. Posto $\mathcal{B} = \{v_1(-3), v_2(-3), v_3\}$, calcolare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix}7\\1\\11\\0\end{pmatrix}$ tramite l'applicazione $f : W \to W$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza ed arrivo) ha matrice $\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\0 & 1 & 3\\5 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

Soluzione.

1. Consideriamo la matrice che ha per colonne i generatori di W:
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-3 & 1 & -5\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
Questa matrice ha chiaramente rango 3 perché contiene una sottomatrice 3×3 triangolare superiore con termini sulla diagonale mai nulli: quella fatta con le ultime 3 righe. Dunque $\dim W = 3$.

2. Consideriamo la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & x_1\\-3 & 1 & -5 & x_2\\0 & 2 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{pmatrix}$$
e imponiamo che abbia rango 3. Riducendo per righe otteniamo:
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & x_1\\-3 & 1 & -5 & x_2\\0 & 2 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & x_1\\-3 & 1 & 0 & x_2+5x_4\\0 & 2 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1-x_3/2\\-3 & 0 & 0 & x_2+5x_4-x_3/2\\0 & 2 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_1-x_3/2\\0 & 0 & 0 & 3x_1+x_2-2x_3+5x_4\\0 & 2 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{pmatrix}.$$
Pertanto, la condizione che il rango sia 3 è espressa dall'equazione $3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0$, che è dunque l'equazione di W.

3. Usando l'equazione trovata nel punto (2) otteniamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $v_1(t) \in W$, $v_2(t) \in W$; inoltre, $v_3 \in W$. Affinché i tre vettori formino una base di W abbiamo bisogno di verificare quando sono linearmente indipendenti. Osservando i generatori di W dati nel punto (1) possiamo notare che la proiezione $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sulle coordinate x_2, x_3, x_4 manda W bigettivamente in uno spazio di dimensione 3. Quindi per verificare che $v_1(t), v_2(t), v_3$ sono linearmente indipendenti ci basta imporre
$$\det\begin{pmatrix} -t-5 & 3-t & 9 \\ t+6 & 2t+3 & 5 \\ 1 & t & -4 \end{pmatrix} \neq 0$$
ovvero $18t^2 + 96t + 120 \neq 0$, cioè $6(t+2)(3t+10) \neq 0$ e quindi $t \neq -2, -\frac{10}{3}$.

4. Calcoliamo intanto le coordinate di $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left\{ v_1(-3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \right\}.$$
Abbiamo che
$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 33 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{19}{2} \\ -\frac{17}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{37}{6} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
e quindi
$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{19}{2} \\ -\frac{17}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{37}{6} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
da cui $w = v_1(-3) - v_2(-3) + v_3$, ovvero $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque $[f(w)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e quindi $f(w) = 3v_1(-3) + 2v_2(-3) - v_3 =$
$$3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 4t \end{pmatrix}$, dove t è un parametro reale.

1. Trovare l'inversa di A_t per $t = -1$.

2. Trovare per quali valori di t il rango di A_t è massimo.

3. Posto $t = 3$, trovare una base per $\ker(a)$ ed equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(a)$ (nelle variabili x_1, x_2, x_3), quando $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione definita da $a(v) = A_t \cdot v$.

4. Con la notazione di (3), mostrare che $\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \mathrm{Im}(a)$ e far vedere che $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2)$.

5. Mostrare in generale che, se $f : V \to V$ è un'applicazione lineare, si ha $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ se e solo se $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Soluzione.

1. Per $t = -1$ applichiamo l'algoritmo di Gauss per il calcolo dell'inversa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -13 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 27 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -13 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 27 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 68 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 27 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 68 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -58 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 27 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -58 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 27 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{38}{12} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{12} & -\frac{13}{6} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{38}{12} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e quindi $A_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{12} & -\frac{13}{6} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{19}{6} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. Calcoliamo il determinante di A_t:

$$\det \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 4t \end{pmatrix} = 8t^2 - 19t - 15 = (t-3)(8t+5).$$

Dunque A_t ha rango massimo per $t \neq 3, -\frac{5}{8}$.

3. Per $t = 3$ la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Riducendo per righe si calcola che il nucleo è generato dal vettore $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'immagine di a è generata dalle prime due colonne di A_3 e dunque otteniamo una sua equazione imponendo che la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & x_1 \\ -3 & 2 & x_2 \\ 2 & -3 & x_3 \end{pmatrix}$ abbia rango 2. Riducendo per righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & x_1 \\ -3 & 2 & x_2 \\ 2 & -3 & x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 + x_2 \\ -3 & 2 & x_2 \\ 2 & -3 & x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 + x_2 \\ 0 & 11 & 3x_1 + 4x_2 \\ 0 & -9 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 + x_2 \\ 0 & 11 & 3x_1 + 4x_2 \\ 0 & 0 & 5x_1 + 14x_2 + 11x_3 \end{pmatrix},$$

e dunque l'equazione per l'immagine di a è $5x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 0$.

4. Valutando l'espressione $5x_1 + 14x_2 + 11x_3$ sul vettore w che genera $\ker(a)$ otteniamo $24 \neq 0$ e dunque $w \notin \operatorname{Im}(a)$, quindi $\ker(a)$ e $\operatorname{Im}(a)$ sono in somma diretta e avendo dimensione rispettivamente 1 e 2, abbiamo che $\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \operatorname{Im}(a)$.

   Poiché $\ker(a) \cap \operatorname{Im}(a) = \{0\}$, ne segue che $\operatorname{Im}(a^2)$ è un sottospazio contenuto in $\operatorname{Im}(a)$ e di dimensione pari a $\dim \operatorname{Im}(a) - \dim(\operatorname{Im}(a) \cap \ker(a)) = \dim \operatorname{Im}(a)$ e quindi $\operatorname{Im}(a^2) = \operatorname{Im}(a)$.

5. L'argomento esposto nel punto precedente vale così come scritto per una qualsiasi $f: V \to V$ con $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   Per l'altra implicazione, supponiamo che valga $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Mostriamo che allora $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$: applicando il teorema fondamentale alla restrizione $f|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f^2)$, che per definizione è surgettiva, si ottiene

   $$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^2) + \dim (\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)) .$$

   Usando l'ipotesi $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^2)$ si ottiene allora $\dim (\mathrm{Im}(f) \cap \ker f) = 0$, come voluto. I sottospazi $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono quindi in somma diretta. D'altra parte, per il teorema fondamentale $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$, e quindi si ha anche $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$.

Esercizio 3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -1 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in caso affermativo esibire una base che diagonalizza.
2. Dire se B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in caso affermativo esibire una base che diagonalizza.
3. Dire se esiste un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ che rende la matrice A autoaggiunta e in tal caso esibirlo tramite la sua matrice in base canonica.
4. Dire se esiste un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ che rende la matrice B autoaggiunta e in tal caso esibirlo tramite la sua matrice in base canonica.

Soluzione.

1. La matrice A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 4$, con autovalori $\lambda_1 = -1$, con molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 2$, con molteplicità algebrica 2. Inoltre $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 2$ è $3 - 2 = 1$, diversa dalla molteplicità algebrica. Pertanto A non è diagonalizzabile.

2. La matrice B ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3 + t^2 + t - 1$, con autovalori $\lambda_1 = -1$, con molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebrica 2. Inoltre $B - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$ è pari a $3 - 1 = 2$ e coincide con la molteplicità algebrica. Quindi B è diagonalizzabile.

   Il nucleo di $B + I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 2 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ è generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il nucleo di $B - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ è generato da $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza B.

3. Se un tale prodotto scalare ϕ esistesse, il teorema spettrale (applicato al prodotto ϕ, per ipotesi definito positivo, e all'applicazione lineare corrispondente ad A, per ipotesi autoaggiunta rispetto a ϕ) mostrerebbe che A è diagonalizzabile, contraddicendo quanto concluso in (1).

4. Chiamiamo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale la base $\mathcal{B}$ è ortonormale. Espressa in tale base la matrice di ϕ è l'identità. Posta $U =$

$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = ([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ abbiamo quindi che la matrice M che descrive ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $M = {}^tUU = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 5 & 9 & -16 \\ -9 & -16 & 29 \end{pmatrix}$.

La matrice B è autoaggiunta rispetto al prodotto definito da M, infatti se chiamiamo $V = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = U^{-1}$ abbiamo che $V^{-1}BV = D$ è diagonale e vale

$${}^tVMBV = {}^tVMVV^{-1}BV = ID = DI = {}^tDI = {}^tV^tB^tV^{-1t}VMV = {}^tV^tBMV.$$

7 Anno accademico 2023-2024

7.1 Compitino del 02/12/2023

Test.

1. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$: $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y+w = 0\}$ e i vettori $v_1 = (1, 3, -2, 1), v_2 = (3, 4, 1, -2)$. Dire quale dei seguenti vettori completa l'insieme $\{v_1, v_2\}$ ad una base di W:

$$w_1 = (0, 0, 1, 1), \qquad w_2 = (4, 7, -1, -1), \qquad w_3 = (2, 1, 2, -3), \qquad w_4 = (5, 5, 4, -5).$$

Soluzione. Notiamo che W è un sottospazio di dimensione 3.

Il vettore w_1 non appartiene a W. Il vettore w_2 è dipendente da v_1 e v_2: $w_2 = v_1 + v_2$. Il vettore w_3 appartiene a W e non è dipendente da v_1 e v_2: $w_3 = v_2 - v_1 + (0, 0, -1, 0)$ e la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Il vettore w_4 è dipendente da v_1 e v_2: $w_4 = -v_1 + 2v_2$.

Pertanto la risposta corretta è che w_3 completa v_1, v_2 a base di W.

2. Consideriamo i seguenti insiemi. Dire se sono sottospazi vettoriali dei rispettivi spazi ambiente. In caso affermativo calcolare la dimensione. In caso negativo dare una breve giustificazione.

   A. $\{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ lineare}, f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$;
   B. $\{p(x) \in \mathbb{C}_5[x] \mid p(x) = 3xp'(x) + x^2\} \subset \mathbb{C}_5[x]$;
   C. $\{M \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid M^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^{3\times3}$;
   D. $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid 3x + iy - w = 0, z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^4$.

Soluzione.

   A. È un sottospazio vettoriale. Rappresentando le applicazioni lineari tramite le loro matrici in base canonica, f appartiene all'insieme dato se e solo se la sua matrice è della forma $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$. Questo mostra sia che l'insieme in questione è un sottospazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$, sia che la sua dimensione è 6.
   B. Non è un sottospazio vettoriale dello spazio dei polinomi, in quanto non contiene il polinomio nullo.
   C. Non è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici 3×3, in quanto non è chiuso per somma. Si verifica infatti facilmente che $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartengono all'insieme dato, ma la loro somma non vi appartiene.
   D. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$, in quanto è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + iy - w = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

   Si osservi infatti che $z^2 = 0$ se e solo se $z = 0$. Le due equazioni del sistema sono manifestamente indipendenti, per cui la dimensione dello spazio delle soluzioni è $4-2 = 2$.

3. Scrivere le coordinate del vettore $v = (0, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$.

   Soluzione. Risolviamo il sistema

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

   tramite operazioni di riga, per cui otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&1&3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&1&3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&4\end{array}\right).$$

   Pertanto

$$[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 2).$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \qquad W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + 2y - 3z = 0, x - z = 0\}.$$

1. Calcolare la dimensione di V ed estrarre una base dall'insieme di generatori.
2. Esprimere V in forma cartesiana.
3. Calcolare la dimensione di W ed esibirne una base.
4. Calcolare la dimensione di $V \cap W$ ed esibrne una base.
5. Calcolare la dimensione di $V + W$ ed esibirne una base completando la base di $V \cap W$ trovata nel punto precedente.

Soluzione.

1. e 2. Scriviamo la matrice che ha per colonne i vettori che generano V e un vettore generico e mettiamola a scala con operazioni di riga:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0&x\\0&2&3&0&y\\1&0&2&1&z\\0&3&3&-1&w\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0&x\\0&2&3&0&y\\0&-1&0&1&z-x\\0&3&3&-1&w\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0&x\\0&-1&0&1&z-x\\0&2&3&0&y\\0&3&3&-1&w\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0&x\\0&-1&0&1&z-x\\0&0&3&2&y+2(z-x)\\0&0&3&2&w+3(z-x)\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0&x\\0&-1&0&1&z-x\\0&0&3&2&y+2(z-x)\\0&0&0&0&w-y+z-x\end{pmatrix}$$

   Poiché abbiamo trovato dei pivot nelle prime tre colonne possiamo concludere che i primi tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}$$

   costituiscono una base di V, che dunque ha dimensione 3. Inoltre otteniamo che un generico vettore (x, y, z, w) appartiene a V se e solo se soddisfa l'equazione $x + y - z - w = 0$.

3. Riduciamo a scala la matrice associata alle equazioni di W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che il rango di questa matrice è 2, e che pertanto la dimensione di W è $4-2=2$. Per esibire una base risolviamo il sistema lineare (nella sua forma ridotta a scala): la seconda equazione fornisce $-2y-4z=0$, cioè $y=-2z$. La prima equazione è $x+2y-3z=0$, da cui sostituendo $y=-2z$ troviamo $x=3z-2y=3z+4z=7z$. I vettori di W sono perciò quelli della forma

$$\begin{pmatrix} 7z \\ -2z \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $z, w \in \mathbb{R}$. Ne segue che una base di W è costituta dai vettori $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Abbiamo già espresso V in forma cartesiana, per cui troviamo subito che l'intersezione $V \cap W$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x+2y-3z=0 \\ -2y-4z=0, \end{cases}$$

dove la prima equazione rappresenta la condizione di appartenere a V e le ultime due la condizione di appartenere a W. Riducendo a scala la matrice corrispondente a questo sistema lineare troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1],-\frac{1}{2}[3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Constatiamo allora che il rango di questa matrice è 3, e perciò, per differenza, la dimensione di $V \cap W$ è $4-3=1$. Possiamo ora risolvere esplicitamente il corrispondente sistema lineare: l'ultima equazione fornisce $z=\frac{1}{4}w$; sostituendo nella terza equazione troviamo

$$y-2z+w=0 \Longleftrightarrow y=2z-w=-\frac{1}{2}w,$$

e sostituedo ulteriormente nella prima

$$x=-y+z+w=\frac{1}{2}w+\frac{1}{4}w+w=\frac{7}{4}w.$$

I vettori nell'intersezione sono quindi quelli della forma

$$\begin{pmatrix} 7/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

al variare di $w \in \mathbb{R}$, e una base dell'intersezione è allora data dal vettore $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Per la formula di Grassmann sappiamo che $\dim(V+W) = \dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W) = 3+2-1 = 4$. Si tratta quindi di completare la base di $V \cap W$ appena trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$: un possibile completamento è

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare che si tratta effettivamente di una base è sufficiente osservare che la matrice che ha questi quattro vettori come colonne è ridotta a scala e ha 4 pivot non nulli.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (2x+y-z, x-y-2z, 3x+2y-z, -x-y).$$

1. scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche;
2. calcolare la dimensione del nucleo di f e trovarne una base;
3. calcolare la dimensione dell'immagine di f e trovarne una base;
4. trovare una base $\mathcal{B}$ del sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ dato da $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$;
5. scrivere la matrice di $f_{|U} : U \to \mathrm{Im}(f)$, la restrizione di f al sottospazio U a valori nell'immagine di f, rispetto alla base $\mathcal{B}$ di U trovata nel punto 4 e alla base di $\mathrm{Im}(f)$ trovata nel punto 3.

Soluzione.

1. La matrice desiderata è quella che ha per colonne le immagini tramite f dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ (immagini rappresentate a loro volta tramite la base canonica di $\mathbb{R}^4$). Calcoliamo allora

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice voluta è quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Riducendo a scala per righe la matrice trovata al punto precedente otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1],[3]-3[1],[4]+[1]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}[2],[3]-\frac{5}{3}[2],[4]+\frac{2}{3}[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2, da cui deduciamo che il nucleo di f ha dimensione $3-2=1$. Inoltre, il nucleo di f è descritto dal sistema lineare

$$\begin{cases} x-y-2z=0 \\ y+z=0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ($y = -z$, $x = y + 2z = z$) otteniamo che i vettori di $\ker f$ sono della forma $\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quindi che una base di $\ker f$ è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. L'immagine di f è generata dalle colonne della sua matrice in base canonica, calcolata al punto 1. Si tratta quindi di estrarre una base dello spazio delle colonne. L'eliminazione di Gauss già effettuata ci dice (dato che abbiamo trovato due pivot non nulli sulla prima e seconda colonna) che le prime due colonne della matrice di f formano una base di $\operatorname{Imm} f$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\dim \operatorname{Imm} f = 2$ (risultato che si può ottenere anche dal teorema fondamentale: $\dim \operatorname{Imm} f = 3 - \dim \ker f$).

4. Il sottospazio U è un (iper)piano in $\mathbb{R}^3$, quindi ha dimensione 2. Basta allora esibire due vettori di U fra loro non proporzionali, ad esempio

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Si tratta di calcolare $f(u_1), f(u_2)$ e di esprimere il risultato nella base v_1, v_2. Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e osserviamo che $v_1 = f(e_1), v_2 = f(e_2)$. Abbiamo

$$f(u_1) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = v_1 - v_2,$$

$$f(u_2) = f(e_2 - e_3) = f(e_2) - f(e_3) = v_2 - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rappresentiamo ora il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, ovvero troviamo coefficienti α, β tali che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Questo si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} -1 = 2\alpha + \beta \\ -2 = \alpha - \beta \\ -1 = 3\alpha + 2\beta \\ 0 = -\alpha - \beta. \end{cases}$$

L'ultima equazione fornisce $\beta = -\alpha$; sostituendo nella prima otteniamo allora $\alpha = -1, \beta = 1$ (si può verificare che anche le altre due equazioni sono allora soddisfatte, ma questo è in realtà garantito a priori dal fatto che v_1, v_2 siano una base dell'immagine di f). In conclusione, abbiamo trovato

$$f(u_1) = v_1 - v_2, \quad f(u_2) = v_2 - (-v_1 + v_2) = v_1,$$

risultato che si sarebbe potuto trovare anche più facilmente calcolando direttamente $f(u_2)$ usando la formula del testo e constatando che il risultato è uguale a v_1.

La matrice desiderata è quella che ha per colonne le coordinate di $f(u_1), f(u_2)$ nella base v_1, v_2 e quindi, alla luce dei calcoli precedenti, è

$$[f_{|U}]^{\mathcal{B}}_{\{v_1,v_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ vettori linearmente indipendenti. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1)$ appartiene allo span di v_2, $f(v_2)$ appartiene allo span di v_3, ..., $f(v_{n-1})$ appartiene allo span di v_n, e $f(v_n)$ appartiene allo span di v_1.

1. Dimostrare che f^n (la composizione di f con se stessa n volte) è un multiplo dell'applicazione lineare identità.
2. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $f(v_i) \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

D'ora in poi supponiamo $n = 4$ e $f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, f(v_3) = 2v_4, f(v_4) = \frac{1}{2}v_1$.

3. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Dire se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = v$.

Soluzione:

1. Poniamo $f(v_i) = \lambda_i v_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$, $f(v_n) = \lambda_n v_1$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono elementi di $\mathbb{R}$. Ne segue che per ogni $i = 1, \dots, n$ abbiamo
$$f^n(v_i) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n v_i$$
pertanto f coincide con la moltiplicazione per
$$\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

2. Se $\lambda_i \neq 0$ per ogni indice i allora si ha anche che $\Lambda \neq 0$ e dunque f è iniettiva (in effetti, la composizione di f con se stessa n volte dà la moltiplicazione per Λ, che è una funzione iniettiva: questo implica che f stessa debba essere iniettiva). Viceversa, se f non è iniettiva allora anche f^n non è iniettiva, il che è possibile solo per $\Lambda = 0$. Pertanto esiste un indice i per cui $\lambda_i = 0$, ovvero $f(v_i) = 0$.

3. È sufficiente considerare la base $\mathcal{B} = \{w_1 = v_1, w_2 = v_2, w_3 = v_3, w_4 = 2v_4\}$. Tale insieme è effettivamente una base in quanto è un insieme di quattro vettori in $\mathbb{R}^4$ che sono linearmente indipendenti per ipotesi.

4. Possiamo studiare $\ker(f - \mathrm{Id})$ e notare che è generato da $w = (1, 1, 1, 2)$, cioè $f(w) - w = 0$. Equivalentemente, si vede che poiché f permuta tra loro i vettori w_i, il vettore $w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ viene mandato da f in se stesso.

   In alternativa possiamo procedere come segue. Sia $v \in \mathbb{R}^4$ e siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ le sue coordinate in base $\mathcal{B}$. In coordinate, la condizione $f(v) = v$ diventa
$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo esplicitamente il prodotto matriciale troviamo

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

equazione che è soddisfatta se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Un vettore con le caratteristiche desiderate è quindi quello che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$, ovvero il vettore $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$.

7.2 Compitino del 02/03/2024

Test.

1. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si consideri il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere la matrice M associata a ϕ rispetto alla base canonica.

   (b) Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio W ortogonale rispetto a ϕ al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Scrivere una base del sottospazio W trovato nel punto precedente.

   (d) Scrivere qual è il risultato che si ottiene applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt per il prodotto scalare ϕ alla base canonica.

   ☐ Non si ottiene una base ortogonale.

   ☐ Il risultato è la seguente base ortogonale: ....

   Soluzione.

   (a) La matrice di cambio di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ovvero $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice M è data da $M = {}^tPAP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -11 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (b) Usando la matrice M trovata nel punto precedente abbiamo che la relazione $\phi(v, e_1) = 0$ equivale all'equazione

   $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

   da cui moltiplicando per 3 otteniamo l'equzione per W: $-11x + 4y - z = 0$.

(c) I due vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e soddisfano l'equazione di W. Poiché $\dim W = 2$ i due vettori v_1, v_2 sono una base.

(d) Partendo dalla base canonica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ otteniamo la nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$ così fatta:

$v_1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$v_2 := e_2 - \frac{\phi(v_1,e_2)}{\phi(v_1,v_1)} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$v_3 := e_3 - \frac{\phi(v_1,e_3)}{\phi(v_1,v_1)} v_1 - -\frac{\phi(v_2,e_3)}{\phi(v_2,v_2)} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Consideriamo l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \to & V \\ & A & \mapsto & {}^tA + BA, \end{array}$$

dove B è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare il determinante di T.

Soluzione. L'applicazione T è definita da

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(A) = {}^tA + BA = \begin{pmatrix} a+c & c+d \\ b-a & d-b \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice associata a T rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché la terza colonna di M è pari alla somma delle altre 3, la matrice M ha determinante 0, e dunque $\det T = 0$.

3. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Sviluppando rispetto alla prima riga e poi rispetto alla prima colonna otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 - 8 = -10.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Consideriamo l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice in base canonica è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare gli autovalori di T e le rispettive molteplicità algebriche.
2. Determinare una base per l'autospazio di T corrispndente all'autovalore di molteplicità algebrica massima.
3. Dire se T è diagonalizzabile. Se sì, esibire una base che lo diagonalizza; in caso contrario, esibire una base rispetto alla quale la matrice di T è triangolare superiore.
4. Dire se $(T - \mathrm{Id})^2$ è diagonalizzabile. Se lo è, esibire una base che lo diagonalizza, altrimenti esibire una base per ciascun autospazio di $(T - \mathrm{Id})^2$.

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det(t\,\mathrm{Id} - T) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & t-2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)\det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 0 \\ 3 & t-2 & 1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$
$$= (t-1)(t+1)\det \begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)(t+1)(t^2-2t+1) = (t-1)^3(t+1),$$

dove la seconda e terza uguaglianza seguono da uno sviluppo di Laplace rispetto alla terza e prima riga, rispettivamente. Gli autovalori sono quindi 1, di molteplicità algebrica 3, e -1, di molteplicità algebrica 1.

2. Calcoliamo una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1. Si ha

$$\ker(T - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si nota facilmente che questa matrice ha rango 2 (la prima e terza colonna sono opposte, così come la seconda e la quarta, mentre le prime due sono fra loro non proporzionali), quindi il nucleo ha dimensione 2. Dal momento che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono nel nucleo e sono linearmente indipendenti per verifica diretta, ne formano una base.

3. Abbiamo calcolato al punto precedente che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2 ed è quindi inferiore alla molteplicità algebrica di tale autovalore. Concludiamo che T non è diagonalizzabile.

   Calcoliamo ora una base dell'autospazio relativo a -1: si ha

$$\ker(T + \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla teoria sappiamo che la dimensione di tale nucleo è pari a 1 (uguale alla molteplicità algebrica, dal momento che questa è 1). Siccome il vettore Span $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartiene al nucleo (la somma delle prime due colonne è nulla), tale vettore ne è una base.
Consideriamo infine la base di $\mathbb{R}^4$ data da

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(che sia una base si verifica facilmente con un'eliminazione di Gauss). Scriviamo la matrice di T rispetto a tale base. I vettori w_1, w_2, w_3 sono autovettori di T, per cui le prime 3 colonne di $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ hanno coefficienti non nulli solo lungo la diagonale, dati dagli autovalori $-1, 1, 1$. Questo mostra già che la matrice di T in base $\mathcal{B}$ è triangolare superiore. Possiamo comunque essere più espliciti e calcolare la quarta colonna usando la procedura abituale: calcoliamo $Tw_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ed esprimiamo questo vettore come combinazione dei vettori della base w_1, w_2, w_3, w_4, ottenendo $Tw_4 = w_4 - w_3$. Si ha perciò

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

4. Osserviamo che

$$[(T-\mathrm{Id})^2]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1\end{pmatrix} - \mathrm{Id}\right)^2 = \begin{pmatrix}-2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

è diagonale. L'endomorfismo $(T-\mathrm{Id})^2$ è quindi diagonalizzabile; una base diagonalizzante è la base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e φ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$ che, in base canonica, ha A come matrice associata.

1. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a φ.
2. Calcolare la segnatura di φ.
3. Trovare un sottospazio isotropo (ovvero un sottospazio sul quale la restrizione di φ sia nulla) di dimensione 2, fornendone una base.
4. Detto W l'iperpiano di equazione $x_4 = 0$, calcolare la proiezione ortogonale (rispetto a φ) su W del vettore $(2, 1, -1, -2)$.
5. Dire per quali valori del parametro reale k la matrice $\begin{pmatrix}2 & k & k & 1\\ k & -1 & 1 & k\\ k & 1 & -2 & k\\ 1 & k & k & 1\end{pmatrix}$ e la matrice A hanno la stessa segnatura.

Soluzione.

1. Sia $e_1, \ldots, e_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Osserviamo intanto che la forma della matrice mostra che i sottospazi $U_1 = \operatorname{Span}(e_1, e_4)$ e $U_2 = \operatorname{Span}(e_2, e_3)$ sono fra loro ortogonali (infatti ciascuno dei vettori e_1, e_4 è ortogonale a ciascuno dei vettori e_2, e_3). È quindi sufficiente trovare basi ortogonali di questi sottospazi. Per far questo è sufficiente applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori e_1, e_4 e e_2, e_3: nei due casi si ottengono le basi
$$e_1, e_4 - \frac{\varphi(e_1, e_4)}{\varphi(e_1, e_1)} e_1 = e_4 - \frac{1}{2} e_1$$
$$e_2, e_3 - \frac{\varphi(e_2, e_3)}{\varphi(e_2, e_2)} e_2 = e_3 - \frac{1}{-1} e_2 = e_3 + e_2.$$
Una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a φ è quindi data dai quattro vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Dal momento che U_1, U_2 sono sottospazi ortogonali rispetto a φ e si ha $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, la segnatura di φ è la somma delle segnature delle sue restrizioni a U_1, U_2 (questo fatto segue dall'osservazione che l'unione di una base ortogonale di U_1 e una base ortogonale di U_2 è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$). La segnatura delle due restrizioni è immediata da calcolare: le matrici delle restrizioni ad U_1, U_2 rispetto alle base $\{e_1, e_4\}$ e $\{e_2, e_3\}$ sono rispettivamente
$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Siccome $\det M_1 = 1 > 0$ e il coefficiente in alto a sinistra di M_1 è positivo, la restrizione di φ a U_1 è definita positiva. Similmente, siccome $\det M_2 = 1 > 0$ e il coefficiente in alto a sinistra di M_2 è negativo, la restrizione di φ a U_2 è definita negativa. Otteniamo quindi che la segnatura di φ è $(n_+, n_-, n_0) = (2, 2, 0)$.

3. Consideriamo i vettori $v_1 = e_1 + e_3$ e $v_2 = e_2 - e_4$ e il sottospazio $W = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$. Si ha
$$\varphi(v_1, v_1) = \varphi(e_1, e_1) + 2\varphi(e_1, e_3) + \varphi(e_3, e_3) = 2 + 2 \cdot 0 + (-2) = 0,$$
$$\varphi(v_2, v_2) = \varphi(e_2, e_2) - 2\varphi(e_2, e_4) + \varphi(e_4, e_4) = -1 - 2 \cdot 0 + 1 = 0,$$
$$\varphi(v_1, v_2) = \varphi(e_1, e_2) - \varphi(e_1, e_4) + \varphi(e_3, e_2) - \varphi(e_3, e_4) = 0 - 1 + 1 - 0 = 0.$$
Ne segue che la matrice di $\varphi|_W$ rispetto alla base v_1, v_2 è la matrice nulla, ovvero che W è un sottospazio isotropo di dimensione 2. Mostriamo che non esiste un sottospazio isotropo Z di dimensione 3 o più. Ricordiamo che la restrizione di φ ad U_1 è definita positiva. Se esistesse un sottospazio isotropo Z di dimensione almeno 3, dalla formula di Grassmann si avrebbe $\dim(Z \cap U_1) = \dim(Z) + \dim(U_1) - \dim(Z + U_1) \geq 3 + 2 - 4 = 1$. In particolare, Z conterrebbe un vettore non nullo $u \in U_1$. Siccome la restrizione di φ a U_1 è definita positiva si dovrebbe avere $\varphi(u, u) > 0$, il che contraddice il fatto che $\varphi|_Z$ è nullo e che u appartiene a Z.

4. Dal punto 1 otteniamo facilmente che una base di W ortogonale rispetto a φ è data da
$$w_1 = e_1, w_2 = e_2, w_3 = e_2 + e_3.$$
Detto $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e usando una formula nota otteniamo allora che la proiezione voluta è data da
$$\frac{\varphi(v, w_1)}{\varphi(w_1, w_1)} w_1 + \frac{\varphi(v, w_2)}{\varphi(w_2, w_2)} w_2 + \frac{\varphi(v, w_3)}{\varphi(w_3, w_3)} w_3.$$

Calcoliamo
$$\varphi(w_1, w_1) = 2, \quad \varphi(w_2, w_2) = -1, \quad \varphi(w_3, w_3) = -1$$
e
$$\varphi(v, w_1) = (2, 1, -1, -2)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, -1, -2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\varphi(v, w_2) = (2, 1, -1, -2)A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, -1, -2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2,$$
$$\varphi(v, w_3) = (2, 1, -1, -2)A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 1, -1, -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$
Otteniamo perciò la proiezione voluta
$$\frac{2}{2}w_1 + \frac{-2}{-1}w_2 + \frac{1}{-1}w_3 = w_1 + 2w_2 - w_3 = e_1 + 2e_2 - e_2 - e_3 = e_1 + e_2 - e_3.$$

5. Data una matrice simmetrica M, corrispondente ad un prodotto scalare φ, la formula ${}^tPMP$ (dove P è una matrice invertibile) rappresenta la matrice di φ in un'altra base. Al variare di P, si ottengono quindi tutte le possibili rappresentazioni in base di φ. A meno di un cambio di base, sappiamo che φ si rappresenta tramite la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. Similmente, a meno di un cambio base, la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 2 & k & k & 1 \\ k & -1 & 1 & k \\ k & 1 & -2 & k \\ 1 & k & k & 1 \end{pmatrix}$ può essere portata in forma diagonale con coefficienti $1, -1, 0$ sulla diagonale. La domanda diventa quindi per quali valori di k la matrice M_k rappresenti un prodotto scalare con segnatura $(2, 2, 0)$. Per determinare la segnatura procediamo con mosse di Gauss simmetriche:
$$\begin{pmatrix} 2 & k & k & 1 \\ k & -1 & 1 & k \\ k & 1 & -2 & k \\ 1 & k & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -2 & k \\ 0 & k & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k \\ 0 & 0 & -1 & 2k \\ 0 & k & 2k & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{[4]+k[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2k \\ 0 & 0 & 2k & 1+k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]+2k[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+5k^2 \end{pmatrix}.$$
Siccome $1 + 5k^2$ è sempre positivo, la segnatura è $(2, 2, 0)$ indipendentemente da k. La risposta è quindi che la matrice P esiste per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione alternativa. Come sopra, basta mostrare che la segnatura della matrice M_k è $(2, 2, 0)$. È facile verificare che le restrizioni ai sottospazi $\mathrm{Span}(e_1, e_4)$ e $\mathrm{Span}(e_2, e_3)$ sono rispettivamente definita positiva e definita negativa. Questo implica $n_+ \geq 2, n_- \geq 2$, e quindi $(n_+, n_-, n_0) = (2, 2, 0)$.

7.3 Compitino del 23/03/2024

Test.

1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e siano ϕ e ψ i prodotti scalari su V le cui matrci associate rispetto alla base standard $\mathcal{C}$ sono rispettivamente $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dato l'endomorfismo $f : V \to V$ con $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$ dire se f^{-1} è uguale all'aggiunto di f rispetto a ϕ oppure all'aggiunto di f rispetto a ψ o a entrambi o a nessuno dei due.

   (b) Dato l'endomorfismo $g : V \to V$ con $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x + y \\ x + \sqrt{2}y \end{pmatrix}$ dire se g^{-1} è uguale all'aggiunto di g rispetto a ϕ oppure all'aggiunto di g rispetto a ψ o a entrambi o a nessuno dei due.

   Soluzione.

   (a) La matrice associata a f rispetto alla base canonica è $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Quindi per ϕ in coordinate abbiamo:

$$^{T}MA = {}^{T}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = AM^{-1}$$

   che è vero. Invece per ψ:

$$\begin{aligned} ^{T}MB &= {}^{T}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = BM^{-1}. \end{aligned}$$

   Dunque la risposta è "solo rispetto a ϕ".

   (b) La matrice associata a g rispetto alla base canonica è $N = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Quindi per ϕ in coordinate abbiamo:

$$\begin{aligned} ^{T}NA &= {}^{T}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = AN^{-1}. \end{aligned}$$

   Invece per ψ:

$$^{T}NB = {}^{T}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = BN^{-1}$$

   La risposta è quindi "solo rispetto a ψ".

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trovare matrici $P, D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che ${}^{t}PP = I$, D sia diagonale e $P^{-1}AP = D$.

   Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 7t + 6 = (t-1)(t-6)$. Abbiamo dunque due autovalori, ciascuno con molteplicità algebrica 1. Una base di autovalori è data da $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che genera il nucleo di $A - I$, e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che genera il nucleo di $A - 6I$. La matrice D è dunque una matrice diagonale che ha come elementi diagonali i due autovalori, mentre le colonne di P sono dati dagli elementi normalizzati della base di autovettori. Una possibile risposta è quindi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e φ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ che, in base canonica, ha A come matrice associata. Sia poi f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, in base canonica, ha matrice associata $F = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1. Determinare la segnatura di φ.
2. Detto f^* l'operatore aggiunto di f rispetto a φ, calcolare $\varphi\big(\underline{e}_1, f^*(\underline{e}_1)\big)$.
3. Dire se f è autoaggiunto[5] e/o ortogonale rispetto al prodotto φ, calcolando la matrice associata ad f rispetto ad una base ortonormale per φ.
4. Usare il Teorema Spettrale per mostrare che, per ogni prodotto scalare ψ di $\mathbb{R}^3$, si può trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da vettori ortogonali rispetto a φ e ψ contemporaneamente.

Soluzione.

1. La base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale per il prodotto φ e $\varphi(v_1, v_1) > 0$ per $i = 1, 2, 3$. Dunque la segnatura di φ è $(3, 0, 0)$.
2. Per definizione $\varphi(e_1, f^*(e_1)) = \varphi(f(e_1), e_1) = \varphi(1/2e_1 - 1/2e_3, e_1) = 0$.
3. Una base ortonormale per φ è $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \frac{1}{2}v_3\}$. Calcoliamo $f(v_1) = \frac{1}{2}v_3$, $f(v_2) = -v_2, f(\frac{1}{2}v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$, pertanto la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Poiché la matrice trovata è simmetrica possiamo concludere che f è simmetrico. Inoltre poiché f manda una base ortonormale in una base ortonormale possiamo concludere anche che f è un operatore ortogonale rispetto a φ.
4. Sia M la matrice associata al prodotto scalare ψ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ortonormale per φ. Nella base $\mathcal{B}$ possiamo esprimere il prodotto
$$\psi(v, w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} M [w]_{\mathcal{B}}.$$
Notiamo che M è simmetrica. Se indichiamo con $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata, rispetto alla base $\mathcal{B}$, è proprio M, abbiamo che
$$\psi(v, w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} M [w]_{\mathcal{B}} = \varphi(v, g(w))$$
e poiché M è simmetrica, anche l'operatore g è simmetrico per il prodotto scalare φ. Dunque per il teorema spettrale g è associato ad una matrice diagonale D rispetto ad una base φ-ortonormale $\mathcal{B}'$, ovvero $D = P^{-1}MP$ con ${}^tPP = I$ e dunque rispetto alla base $\mathcal{B}'$ abbiamo
$$\psi(v, w) = \varphi(v, g(w)) = {}^t[v]_{\mathcal{B}'} D [w]_{\mathcal{B}'}$$
e pertanto la base $\mathcal{B}'$ diagonalizza simultaneamente φ e ψ.

[5] Nel canale A al posto di *autoaggiunto* è stato usato il termine *simmetrico*

Esercizio 2.

Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare il polinomio carateristico di A e i suoi autovalori.
2. Determinare il polinomio minimo di A e stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
3. Sia $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che vale la relazione
$$B^2 + 3B + 2I = A. \tag{$\star$}$$
Dimostrare che le matrici A e B commutano.
4. Dimostrare che se $W \subset V$ è un autospazio di A e B soddisfa la relazione ($\star$) allora $BW \subset W$.
5. Dimostrare che se B soddisfa la relazione ($\star$) allora B è diagonalizzabile.
6. Elencare quali sono le possibili tracce delle matrici $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $B^2+3B+2I = A$.

Soluzione.

1. Abbiamo che $\det(A - tI) = -t^3 + 4t^2 - 4t = -t(t-2)^2$. Dunque A ha autovalori 0 e 2.
2. La molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è pari alla sua molteplicità algebrica, che è 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a $\dim\ker(A-2I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$. Dunque la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e il suo polinomio minimo è $t(t-2)$.
3. Abbiamo le seguenti uguaglianze: $AB = (B^2+3B+I)B = B^3+3B^2+B = B(B^2+3B+I) = BA$.
4. Supponiamo che W sia un autospazio di A per l'autovalore λ. Per $v \in W$ abbiamo $ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$. Dunque $A(Bv) = \lambda(Bv)$, ovvero Bv è ancora un λ-autovettore di A, ovvero $Bv \in W$. Quindi possiamo concludere che $BW \subset W$.
5. Poiché sappiamo già che B preserva gli autospazi di A, ci basta mostrare che la restrizione di B agli autospazi di A V_0 e V_2 è diagonalizzabile. Sia dunque P tale che $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, abbiamo che $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ e se chiamiamo $B_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B_0 = \begin{pmatrix} e \end{pmatrix}$, su ciascun autospazio la relazione ($\star$) diventa:
$$\begin{aligned} &\text{in } V_0: && B_0^2 + 3B_0 + 2I = 0I \\ &\text{in } V_2: && B_2^2 + 3B_2 + 2I = 2I. \end{aligned}$$
Quindi B_0 annulla il polinomio $p(t) = t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2)$ e B_2 annulla il polinomio $q(t) = t^2 + 3t = t(t+3)$. Dunque in particolare il polinomio minimo di B_2 ha radici semplici e quindi B_2 è diagonalizzabile. Ne segue che B è diagonalizzabile.
6. Per quanto visto B_2 si diagonalizza in una delle seguenti forme: $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e la matrice B_0 è pari a $E_1 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ oppure $E_2 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$.

Sia dunque $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\}$ una opportuna base che diagonalizza A, con $\{v_1, v_2\}$ base di $V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 | y = z\}$ e v_3 un generatore di $V_0 = \ker A = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, se poniamo $Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ abbiamo che B è della forma

$$B = Q \begin{pmatrix} \begin{matrix} & D & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & E \end{pmatrix} Q^{-1}$$

dove D è una tra D_1, D_2, D_3 e E è una tra E_1, E_2. Ricordiamo che la traccia è invariante per coniugio, pertanto le possibili tracce sono:

$$-1, -2, -4, -5, -7, -8.$$

7.4 Compito del 17/05/2024

Test.

1. Determinare i polinomi minimi delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & 0 & -\sin(\pi/5) & 0 \\ 0 & \cos(9\pi/5) & 0 & -\sin(9\pi/5) \\ \sin(\pi/5) & 0 & \cos(\pi/5) & 0 \\ 0 & \sin(9\pi/5) & 0 & \cos(9\pi/5) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Polinomio minimo di A_1: ....
   Potete indicare il risultato in funzione di $\cos(\pi/5)$ *e* $\sin(\pi/5)$.

   (b) Polinomio minimo di A_2: ....

Soluzione.

(a) A meno di un cambio base (che scambia il secondo e terzo vettore di base), che non altera il polinomio minimo, la matrice A_1 si può riscrivere come

$$A_1' = \begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & -\sin(\pi/5) & & \\ \sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) & & \\ & & \cos(9\pi/5) & -\sin(9\pi/5) \\ & & \sin(9\pi/5) & \cos(9\pi/5) \end{pmatrix}.$$

Il primo blocco ha polinomio caratteristico $t^2 - 2\cos(\pi/5)t + 1$ e il secondo $t^2 - 2\cos(9\pi/5)t + 1$. Semplici manipolazioni trigonometriche ($\cos(9\pi/5) = \cos(9\pi/5 - 2\pi) = \cos(-\pi/5) = \cos(\pi/5)$) mostrano che questi due polinomi sono uguali. Affermiamo che allora anche il polinomio minimo di A_1 è $p(t) := t^2 - 2\cos(\pi/5)t + 1$: in effetti, per tale polinomio si ha

$$\begin{aligned} p(A_1') &= \begin{pmatrix} p\begin{pmatrix} \cos(\pi/5) & -\sin(\pi/5) \\ \sin(\pi/5) & \cos(\pi/5) \end{pmatrix} & \\ & p\begin{pmatrix} \cos(9\pi/5) & -\sin(9\pi/5) \\ \sin(9\pi/5) & \cos(9\pi/5) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema di Cayley-Hamilton applicato a ciascuno dei due blocchi. Da questo otteniamo che il polinomio minimo *divide* $p(t)$ e quindi è di grado al massimo 2. D'altro canto, è anche chiaro che il polinomio minimo non può essere di grado 1, perché se il polinomio minimo fosse $t+k$, allora la matrice A_1 dovrebbe soddisfare $A_1 + k\,\mathrm{Id} = 0$, cioè $A_1 = -k\,\mathrm{Id}$, il che ovviamente non è soddisfatto per alcun valore di k. Il polinomio minimo ha quindi grado *almeno* due, dunque esattamente due, e perciò deve coincidere con $p(t)$.

(b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_2:

$$\begin{aligned}
\det(t\,\mathrm{Id} - A_2) &= \det\begin{pmatrix} t-3 & 6 & -2 \\ -2 & t+5 & -2 \\ -2 & 6 & t-3 \end{pmatrix} \overset{[1]-[3]}{=} \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 1-t \\ -2 & t+5 & -2 \\ -2 & 6 & t-3 \end{pmatrix} \\
&= (t-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & t+5 & -2 \\ -2 & 6 & t-3 \end{pmatrix} \overset{[3]+[1]}{=} (t-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & t+5 & -4 \\ -2 & 6 & t-5 \end{pmatrix} \\
&= (t-1)((t+5)(t-5)+24) = (t-1)(t^2-1) \\
&= (t-1)^2(t+1).
\end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo allora che il polinomio minimo è un divisore di $(t-1)^2(t+1)$ e che entrambe le radici $1, -1$ del polinomio caratteristico sono anche radici del polinomio minimo. In altre parole, il polinomio minimo è uno fra $(t-1)(t+1)$ e $(t-1)^2(t+1)$. Sempre dalla teoria, sappiamo che il primo caso si verifica se e solo se A_2 è diagonalizzabile; per il criterio di diagonalizzabilità in termini di molteplicità algebriche e geometriche, questo accade se e solo se la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità algebrica (come noto, questo è automatico per l'autovalore -1, di molteplicità algebrica 1). Controlliamo allora la dimensione dell'autospazio relativo a 1: si ha

$$\dim\ker(A_2 - \mathrm{Id}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

in quanto la matrice scritta qui sopra ha manifestamente rango 1 (le tre colonne sono tutte proporzionali). Ne segue che A_2 è diagonalizzabile e che quindi il suo polinomio minimo è $t^2 - 1$.

Nota. Sarebbe naturalmente anche stato possibile calcolare $A_2^2 = \mathrm{Id}$ per concludere che in effetti il polinomio minimo è $t^2 - 1$.

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Sia $\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale della base canonica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Sia $f : V \to \mathbb{R}$ data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z$. Scrivere le coordinate di f rispetto alla base $\mathcal{C}^*$.

(b) Sia $T : V \to V$ l'endomorfismo dato da $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ y \end{pmatrix}$. Descrivere l'aggiunto di T:

Soluzione.

(a) Come noto, le funzioni coordinate sono esattamente la base duale della base canonica. Si ha quindi $f = e_1^* + e_2^* - e_3^*$, e cioè le coordinate di f in base $\mathcal{C}^*$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice di T in base canonica è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque la matrice associata a T^* è ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ovvero $T^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+z \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano $x - 2y - z = 0$.

   (a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (in partenza ed in arrivo):

   (b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Soluzione.

   (a) Un vettore ortogonale al piano assegnato è dato da $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (vettori dei coefficienti dell'equazione di definizione). Per una nota formula, la proiezione ortogonale è allora data da
$$f(v) = v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$
Calcoliamo una volta per tutte $\langle w, w \rangle = 6$. Si ha poi
$$f(e_1) = e_1 - \frac{\langle e_1, w \rangle}{6} w = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = e_2 - \frac{\langle e_2, w \rangle}{6} w = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$
$$f(e_3) = e_3 - \frac{\langle w, e_3 \rangle}{6} w = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 5/6 \end{pmatrix}.$$
La matrice richiesta è quindi
$$[f]_{\mathrm{can}}^{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Notiamo che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono vettori che generano il piano di equazione $x - 2y - z = 0$ e se consideriamo il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ che è ortogonale al piano abbiamo che
$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + w.$$
Abbiamo quindi che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_1$ e dunque la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 \\ k-1 & k & k \\ 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

1. Trovare gli autovalori e molteplicità di A_0.
2. Dire per quali valori del parametro reale k la matrice A_k risulta diagonalizzabile.
3. Trovare, se esistono, un numero k e dei vettori v_1, v_2 e v_3 tali che A_k rappresenti (in base canonica) la proiezione su $\operatorname{Span}\{v_1\}$, secondo la decomposizione $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{v_1\} \oplus \operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$; altrimenti mostrare che tali k, v_1, v_2, v_3 non esistono.
4. Trovare, se esistono, un numero k e dei vettori v_1, v_2 e v_3 tali che A_k rappresenti (in base canonica) la proiezione su $\operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$, secondo la decomposizione $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{v_1\} \oplus \operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$; altrimenti mostrare che tali k, v_1, v_2, v_3 non esistono.

Soluzione.

1. La matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1, quindi la dimensione del nucleo è 2 (ovvero 0 ha m.g. pari a 2). Il nucleo di A_0 è generato dai vettori e_2, e_3. Inoltre $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_0 di autovalore 1 (e necessariamente 1 ha m.g. pari a 1). La somma delle molteplicità geometriche è $2 + 1 = 3$ e quindi ciascuna molteplicità geometrica è uguale alla corrispondente molteplicità algebrica. Concludiamo che A_0 ha 2 autovalori: l'autovalore 0, di molteplicità algebrica e geometrica 2 e l'autovalore 1 di molteplicità algebrica e geometrica 1.

2. Il polinomio caratteristico di A_k è
$$\det(A_k - tI) = \det \begin{pmatrix} 1+k-t & 0 & 0 \\ k-1 & k-t & k \\ 1-k & 0 & -t \end{pmatrix} = t(t-1-k)(t-k)$$
che ha radici $0, k, k+1$.
Per $k \neq 0, -1$ le tre radici sono distinte e dunque A_k è diagonalizzabile.
Per $k = 0$ abbiamo già osservato nel punto precedente che le due radici $0, 1$ hanno molteplicità geometrica pari a quella algebrica, e dunque la matrice è diagonalizzabile.
Per $k = -1$ abbiamo $A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2, per cui $m.g.(0) = \dim\ker A_{-1} = 3 - 2 = 1 \neq 2 = m.a.(0)$. Dunque per $k = -1$ la matrice A_k non è diagonalizzabile.

3. La richiesta è equivalente a chiedere che
   - A_k sia diagonalizzabile, e quindi per il punto precedente $k \neq -1$

   e che
   - il polinomio caratteristico di A_k sia $t^2(t-1)$, e questo succede per $k = 0$, $k = -1$.

   In effetti scegliendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = e_2, v_3 = e_3$ si ha che A_0 si diagonalizza rispetto alla base v_1, v_2, v_3 nella forma
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$
e dunque A_0 è la proiezione su $\operatorname{Span}\{v_1\}$, secondo la decomposizione $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{v_1\} \oplus \operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$

4. La proiezione richiesta si diagonalizza, rispetto alla base v_1, v_2, v_3nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque A_k deve avere autovalori 0 e 1, con molteplicità (sia algebrica che geometrica) rispettivamente 1 e 2. Questo non si verifica mai perché abbiamo visto nel punto 2. che il polinomio caratteristico di A_k ha sempre la radice 0 e altre due radici distinte tra loro, dunque non può mai essere uguale a $t(t-1)^2$.

Esercizio 2. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Siano A_k i minori $k \times k$ di A ottenuti con le prime k righe e le prime k colonne di A, per $k = 1, \dots, n$. Sia $a_k = \det A_k$, per $k = 1, \dots, n$. Sia (n_+, n_-, n_0) la segnatura di A (ovvero la segnatura del prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^n$ la cui matrice in base canonica è A).

1. Fare un esempio di una matrice simmetrica 3×3 con segnatura $(2, 1, 0)$ e con almeno uno fra a_1, a_2, a_3 uguale a 0.

Per quanto segue supponiamo che $a_k \neq 0$ per ogni k.

2. Mostrare che $n_0 = 0$.
3. Mostrare che $a_k > 0$ se e solo se A_k ha segnatura (n'_+, n'_-, n'_0) con n'_- pari.
4. ($\star$) Sia (n'_+, n'_-, n'_0) la segnatura di A_k e (n''_+, n''_-, n''_0) la segnatura di A_{k+1}. Mostrare che vale una delle seguenti due possibilità:
   (a) $(n''_+, n''_-, n''_0) = (n'_+ + 1, n'_-, n'_0)$;
   (b) $(n''_+, n''_-, n''_0) = (n'_+, n'_- + 1, n'_0)$.
5. Mostrare che la condizione (a) del punto 4) vale se e solo se $a_k a_{k+1} > 0$.
6. Concludere che n_+ è il numero di elementi positivi nella lista

$$a_1,\ a_1a_2,\ a_2a_3,\ \dots,\ a_{n-1}a_n.$$

Soluzione.

1. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Chiaramente $a_1 = \det(0) = 0$. Inoltre, siccome i sottospazi $\operatorname{Span}(e_1, e_2)$ e $\operatorname{Span}(e_3)$ sono fra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare definito da A, la segnatura di A è la somma delle segnature di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (che è ben nota essere $(1, 1, 0)$) e $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ (che ha chiaramente segnatura $(1, 0, 0)$), cioè è $(2, 1, 0)$ come voluto.

2. È noto che $n_0 = \dim \ker A$; d'altro canto, per ipotesi abbiamo $a_n = \det(A) \neq 0$, cioè A è invertibile, e quindi il suo nucleo è banale. Ne segue che $n_0 = \dim\{0\} = 0$, come voluto.

3. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori della matrice simmetrica A_k (ciascuno ripetuto con la rispettiva molteplicità algebrica). Come conseguenza del teorema spettrale, sappiamo che i λ_i sono tutti numeri reali e che la segnatura di A_k è data da (n'_+, n'_-, n'_0), dove n'_+ (rispettivamente n'_-, n_0) è il numero di autovalori positivi (rispettivamente negativi, nulli). Ricordiamo inoltre l'identità $\det(A_k) = \lambda_1 \cdots \lambda_k$ e che per ipotesi $\det(A_k) \neq 0$ (che implica in particolare $\lambda_i \neq 0$ per ogni i).

   Consideriamo allora il segno di $\det(A_k)$: siccome $\det(A_k) = \lambda_1 \cdots \lambda_k$, tale segno è il prodotto dei segni degli autovalori λ_i, e quindi è pari a $(-1)^{n'_-}$. Abbiamo allora $\det(A_k) > 0$ se e solo se $(-1)^{n'_-} = +1$, cioè se e solo se n'_- è pari.

4. Chiamiamo come nel testo φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ la cui matrice in base canonica è A. Osserviamo che A_k è la matrice della restrizione del prodotto scalare definito da A al sottospazio $W_k = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k)$, dove $e_1, \ldots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo per semplicità φ_k la restrizione di φ a W_k.

   Siccome per ipotesi $\det(A_k) \neq 0$ e $\det(A_{k+1}) \neq 0$ abbiamo $n'_0 = n''_0 = 0$. Da una possibile caratterizzazione della segnatura (di φ_k), sappiamo che esiste un sottospazio $W_k^+ \subseteq W_k$ di dimensione n'_+ tale che la restrizione di φ_k a W_k^+ sia definita positiva. Si noti che la restrizione di φ_k a W_k è la stessa cosa della restrizione di φ a W_k^+, e quindi coincide anche con la restrizione di φ_{k+1} a W_k^+ (si noti che W_k^+ è contenuto anche in W_{k+1}). Dalla medesima caratterizzazione della segnatura si ottiene allora che – siccome W_{k+1} contiene un sottospazio di dimensione n'_+ su cui la restrizione di φ_{k+1} è definita positiva (ovvero il sottospazio W_k^+) – si ha $n''_+ \geq n'_+$. Allo stesso modo si ottiene che $n''_- \geq n'_-$, e quindi, visto che $n''_+ + n''_- = n'_+ + n''_+ + 1$, le uniche possibilità per la segnatura sono

$$(n''_+, n''_-, 0) = (n'_+ + 1, n'_-, n'_0) \quad \text{o} \quad (n''_+, n''_-, 0) = (n'_+, n'_- + 1, n'_0).$$

5. Sappiamo che il segno di a_k è $(-1)^{n'_-}$ e quello di a_{k+1} è $(-1)^{n''_-}$. Il segno di $a_k a_{k+1}$ è quindi $(-1)^{n'_- + n''_-}$, e sappiamo che $n''_- = n'_-$ oppure $n''_- = n'_- + 1$. Nel primo caso, il segno di $a_k a_{k+1}$ è $(-1)^{2n'_-} = +1$, e nel secondo caso è $(-1)^{2n'_- + 1} = -1$, come voluto.

6. Il punto 5 implica che se $a_i a_{i+1} > 0$ (dove $a_0 = 1$ per convenzione), allora l'indice di positività di A_{i+1} cresce di 1 rispetto a quello di A_i, e viceversa, se $a_i a_{i+1} < 0$ allora l'indice di positività di A_{i+1} è uguale a quello di A_i (e nuovamente abbiamo posto per convenzione che l'indice di positività sia 0 per $i = 0$). L'indice di positività di A_n si ottiene allora da 0 aggiungendo 1 esattamente quegli indici per cui $a_i a_{i+1} > 0$, ovvero n_+ è il numero di indici tali che $a_i a_{i+1} > 0$, come voluto.

7.5 Compito del 07/06/2024

Test.

1. Si considerino i sottospazi di $V = \mathbb{R}^3$ dati da

$$U = \{(x, y, z) \in V \mid x = y + z\}, \quad W = \{(x, y, z) \in V \mid z = 0\}.$$

   Siano S_U e S_W le riflessioni ortogonali rispetto a U e W rispettivamente. Sia infine $R = S_U S_W$.

   (a) Scrivere la matrice M di R in base canonica: $M = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

   (b) Determinare l'asse fisso ℓ della rotazione R scrivendone un generatore:

$$\ell = \mathrm{Span}(\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots).$$

   (c) Determinare $\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo della rotazione R.

$$\cos(\theta) = \ldots\ldots\ldots$$

   Soluzione.

(a) Cominciamo scrivendo separatamente le matrici di S_U e S_W. Per quanto riguarda S_W, è chiaro che $S_W(x,y,z) = (x,y,-z)$, e quindi la matrice di S_W in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Per scrivere la matrice di S_U osserviamo dapprima che U è il piano ortogonale al vettore $w = (1,-1,-1)$, e quindi per una nota formula si ha

$$S_W(v) = v - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

Usando $\langle e_1, w\rangle = 1, \langle e_2, w\rangle = \langle e_3, w\rangle = -1$ e $\langle w, w\rangle = 3$ troviamo allora facilmente che la matrice di S_U in base canonica è

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal teorema di composizione otteniamo infine che la matrice di R è il prodotto delle matrici corrispondenti: svolgendo direttamente il calcolo troviamo

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) L'asse fisso della rotazione è il suo autospazio di autovalore 1. È allora sufficiente calcolare

$$\ker(M - \mathrm{Id}) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che l'asse fisso può anche essere determinato geometricamente come l'intersezione dei piani U e W: è infatti chiaro che sia S_U che S_W lasciano fissa tale retta, e perciò anche la loro composizione R lo fa.

(c) Per una nota formula, siccome R è una rotazione in $\mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos\theta;$$

usando la matrice M per calcolare $\mathrm{tr}(R) = \frac{1}{3}$, otteniamo $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare che rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ha matrice associata $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Detta e_1, e_2, e_3 la base canonica, calcolare il prodotto scalare $\varphi(e_1, e_2) = \ldots\ldots$

(b) Calcolare la segnatura del prodotto scalare φ.

$$(n_+, n_-, n_0) = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots).$$

(c) Scrivere una base del radicale di φ (esprimere la risposta in base canonica).

Soluzione.

(a) Siano v_1, v_2, v_3 i vettori della base $\mathcal{B}$. La matrice data nel testo determina i prodotti scalari fra vettori scritti in base $\mathcal{B}$. Rappresentiamo allora e_1, e_2 in tale base. Si trova facilmente $e_1 = v_2 - v_3$ e $e_2 = v_2 - 2v_1$, e cioè le coordinate di e_1, e_2 in base $\mathcal{B}$ sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Possiamo allora calcolare

$$\varphi(e_1, e_2) = (0, 1, -1)M \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

(b) È facile verificare che M è di rango 2: in effetti, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un vettore non banale nel nucleo, per cui il rango di M non è massimo, e d'altro canto le prime due colonne di M non sono proporzionali, per cui il suo rango è almeno due. Ne segue che la dimensione del nucleo di M è 1 e perciò $n_0 = 1$. D'altro canto, la restrizione di φ allo span di v_1, v_2 ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, di determinante -1, e come noto questo implica che la segnatura di tale restrizione sia $(1, 1, 0)$. Abbiamo allora $n_+(\varphi) \geq 1$, $n_-(\varphi) \geq 1$ e $n_0(\varphi) = 1$, il che, combinato con $n_+(\varphi) + n_-(\varphi) + n_0(\varphi) = 3$, implica che la segnatura di φ sia $(1, 1, 1)$.

(c) Abbiamo già osservato sopra che il nucleo di M è generato da $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Questo significa che il radicale di φ è generato dal vettore le cui coordinate in base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, cioè dal vettore che in base canonica si scrive

$$-v_1 + 2v_2 - v_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1.

Sia $A_t = \begin{pmatrix} t+2 & 2 & -t-1 \\ -t+3 & 1 & t-3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, dove t è un parametro reale.

1. Trovare l'inversa di A_t per $t = 1$.
2. Trovare per quali valori di t il rango di A_t è massimo.
3. Posto $t = 2$, trovare una base per $\ker(a)$ ed equazioni cartesiane per $\operatorname{Im}(a)$ (nelle variabili x_1, x_2, x_3), quando $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione definita da $a(v) = A_t \cdot v$.
4. Con t e a come nel punto precedente, mostrare che $\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \operatorname{Im}(a)$ e far vedere che $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(a^2)$.
5. Mostrare in generale che, se $f : V \to V$ è un'applicazione lineare, si ha $V = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ se e solo se $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.

Soluzione.

1. Si ha $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Per calcolare l'inversa, effettuiamo un'eliminazione di Gauss per righe:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[2],-[1]+2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{[1]+2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2[1]+2[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Otteniamo quindi $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il determinante di A_t è $t-2$. Pertanto la matrice A_t ha rango massimo se e solo se $t \neq 2$.

3. Si ha $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e chiaramente $\mathrm{rk}(a) = 2$ perché prima e ultima riga sono uguali, ma non proporzionali alla seconda, pertanto $\dim \ker a = 1$ ed è immediato notare che $v = e_1 + e_2 + 2e_3$ è un generatore di $\ker(a)$ dunque costituisce una base di $\ker(a)$. L'immagine di a ha dimensione 2 e dunque è determinata da un'equazione lineare. Visto che prima e ultima coordinata sono uguali in tutti i vettori che generano l'immagine abbiamo che un'equazione di $\mathrm{Im}(a)$ è $x_1 = x_3$.

4. Nel punto precedente abbiamo visto che $\ker(a) = \mathrm{Span}(v)$. Poichè $v \notin \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_3\}$, abbiamo che $\mathrm{Span}(v) \cap \mathrm{Im}(a) = \{0\}$. Poiché i due sottospazi hanno rispettivamente dimensione 1 e 2, possiamo concludere che $\ker(a) \oplus \mathrm{Im}(a) = \mathbb{R}^3$.

   Inoltre, calcolando la matrice di A_2^2 otteniamo:
$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
   e dunque, poiché prima e ultima riga di A_2^2 sono uguali abbiamo che $\mathrm{Im}(a^2)$ ha equazione $x_1 = x_3$, ovvero $\mathrm{Im}(a^2) = \mathrm{Im}(a)$.

5. Per il teorema della dimensione vale sempre che $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$. Pertanto, poiché f è un endomorfismo di V, la condizione
$$\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$$
   è equivalente a
$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}.$$
   Questa seconda condizione è equivalente a dire che f ristretta a $\mathrm{Im}(f)$ è iniettiva e dunque che $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(f(\mathrm{Im}(f))) = \dim \mathrm{Im}(f^2)$.

   Poiché è sempre vero che $\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, l'uguaglianza
$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^2)$$
   è equivalente a
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$
   e dunque abbiamo mostrato quanto richiesto.

Esercizio 2. Sia k un intero positivo e sia $V = M_{k \times k}(\mathbb{R})$ e data $M \in V$ sia $f_M : V \to V$ l'applicazione lineare definita da
$$f_M(A) = AM + MA.$$

1. Per $k = 3$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare gli autovalori di f_M e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

2. Per $k = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare gli autovalori di f_M e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

3. Per $k = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ scegliere il maggior numero possibile di autovettori di f_M linearmente indipendenti e completarli ad una base $\mathcal{B}$ di V.

   Scrivere la matrice associata a f_M rispetto alla base $\mathcal{B}$, sia in partenza che in arrivo.

4. Sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da
$$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^t AB).$$
   Per k qualsiasi, dimostare che se M è simmetrica allora f_M è autoaggiunto[6], ovvero
$$\varphi(f_M A, B) = \varphi(A, f_M B).$$

5. Per k qualsiasi e M simmetrica dimostrare che f_M è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono tutti e soli i numeri della forma $\lambda_i + \lambda_j$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di M.

Soluzione.

1. Sia E_{ij} la matrice 3×3 che ha un 1 in posizione (i, j) e 0 altrove. Abbiamo
$$f_M(E_{ij}) = E_{ij}M + ME_{ij} = M_{jj}E_{ij} + M_{ii}E_{ij} = (M_{ii} + M_{jj})E_{ij}.$$
   Questo mostra che tutte le matrici E_{ij} sono autovettori di f_M. L'autovalore di E_{ij} è $M_{ii} + M_{jj} = i + j$.

   Siccome le E_{ij} formano una base di V, troviamo che f_M è diagonalizzabile, quindi le molteplicità algebriche e geometriche dei suoi autovalori coincidono. Nella base data dalle E_{ij} (in ordine opportuno), la matrice di f_M è diagonale; il coefficiente diagonale corrispondente a E_{ij} è $i + j$, e quindi i coefficienti diagonali sono $2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6$. Questi sono quindi gli autovalori di f_M, ciascuno elencato con la corrispondente molteplicità algebrica.

2. Siano $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ matrici 2×2 definite come nel punto precedente. Tali matrici formano una base di V. Calcoliamo la matrice di f_M in questa base:
$$f_M(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + E_{12}, \quad f_M(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12}$$
$$f_M(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = E_{11} + 2E_{21} + E_{22}, \quad f_M(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = E_{12} + 2E_{22}.$$
   La matrice di f_M risulta quindi
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[6]Nel canale A si è usato il termine “simmetrico” invece di “autoaggiunto”.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di f_M: sviluppando ripetutamente con Laplace (rispetto all'ultima riga due volte, poi rispetto all'ultima colonna) esso risulta

$$\begin{aligned}\det(t\,\mathrm{Id}-[f_M]) &= \det\begin{pmatrix} t-2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)\det\begin{pmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)^2\det\begin{pmatrix} t-2 & 0 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t-2)^4.\end{aligned}$$

L'unico autovalore è quindi 2, di molteplicità algebrica 4. Per determinarne la molteplicità geometrica, calcoliamo $\ker([f_M]-2\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. La dimensione di questo nucleo, e di conseguenza la molteplicità geometrica dell'autovalore 2, è quindi pari a 2.

3. Alla fine del punto precedente abbiamo determinato generatori dell'autospazio relativo all'autovalore 2, scritti in base $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Rappresentando tali vettori come elementi di V (ovvero prendendo le opportune combinazioni lineari di $E_{11}, \dots, E_{22}$) otteniamo allora gli autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Possiamo completare tali vettori ad una base di v aggiungendo $v_3 = E_{11}$ e $v_4 = E_{21}$. Per costruzione abbiamo $f_M(v_1) = 2v_1, f_M(v_2) = 2v_2$. Si ha inoltre
$$f_M(v_3) = f_M(E_{11}) = 2E_{11} + E_{12} = 2v_3 + v_1,$$
$$f_M(v_4) = f_M(E_{21}) = E_{11} + 2E_{21} + E_{22} = v_3 + 2v_4 + (v_3 - v_2) = -v_2 + 2v_3 + 2v_4.$$
La matrice di f_M in questa base è quindi
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Calcoliamo
$$\begin{aligned}\varphi(f_M A, B) &= \mathrm{tr}\left({}^t(AM+MA)B\right) = \mathrm{tr}\left({}^tM{}^tAB + {}^tA{}^tMB\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(M({}^tAB) + {}^tAMB\right) = \mathrm{tr}\left(M({}^tAB)\right) + \mathrm{tr}\left({}^tAMB\right),\end{aligned}$$
dove si noti che nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo sostituito ${}^tM$ con M, e
$$\varphi(A, f_M B) = \mathrm{tr}\left({}^tA(BM+MB)\right) = \mathrm{tr}\left({}^tABM + {}^tAMB\right) = \mathrm{tr}\left(({}^tAB)M\right) + \mathrm{tr}\left({}^tAMB\right).$$
Confrontando tali espressioni vediamo che la tesi è equivalente all'uguaglianza
$$\mathrm{tr}\left(M({}^tAB)\right) = \mathrm{tr}\left(({}^tAB)M\right),$$
che segue applicando la nota proprietà della traccia $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$ alle matrici $C = M$ e $D = {}^tAB$.

5. La diagonalizzabilità segue dal teorema spettrale: in effetti, abbiamo visto a lezione che il prodotto scalare φ è definito positivo, e abbiamo verificato al punto precedente che f_M è autoaggiunta rispetto a tale prodotto scalare. Il teorema spettrale implica la diagonalizzabilità voluta. Ridimostreremo comunque questo fatto anche direttamente nel resto della soluzione.

Se M è diagonale, con coefficienti diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, procedendo come nel primo punto troviamo che E_{ij} è un autovettore di f_M con autovalore $\lambda_i + \lambda_j$. Siccome le matrici E_{ij} formano una base di V, concludiamo nuovamente che f_M è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono proprio i numeri della forma $\lambda_i+\lambda_j$. Se M è simmetrica (non necessariamente diagonale), allora per il teorema spettrale esistono una matrice invertibile P e una matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tali che $M = P^{-1}DP$. Consideriamo le matrici $F_{ij} = P^{-1}E_{ij}P$. Si ha

$$\begin{aligned}
f_M(F_{ij}) = F_{ij}M + MF_{ij} &= (P^{-1}E_{ij}P)(P^{-1}DP) + (P^{-1}E_{ij}P)(P^{-1}DP) \\
&= P^{-1}E_{ij}DP + P^{-1}E_{ij}DP \\
&= P^{-1}(E_{ij}D + E_{ij}D)P \\
&= P^{-1}((\lambda_i + \lambda_j)E_{ij})P = (\lambda_i + \lambda_j)F_{ij}.
\end{aligned}$$

Dal momento che l'applicazione lineare $X \mapsto P^{-1}XP$ è una bigezione di V in sé (l'inversa è semplicemente $X \mapsto PXP^{-1}$), e visto che le matrici E_{ij} formano una base di V, otteniamo che le matrici F_{ij} formano una base di V. A questo punto la dimostrazione procede come prima: rispetto a tale base, la matrice di f_M è diagonale, e come abbiamo appena calcolato i suoi elementi diagonali sono dati da $\lambda_i + \lambda_j$ al variare di λ_i, λ_j fra gli autovalori di M, come voluto.

7.6 Compito del 05/07/2024

Test.

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $V_1 = \operatorname{Im}(A)$, $V_2 = \ker(B)$, $W_1 = \operatorname{Im}(BA)$, $W_2 = \ker(BA)$.

(a) Calcolare $\dim(V_1)$, $\dim(V_2)$, $\dim(W_1)$ e $\dim(W_2)$.

$\dim(V_1) = \dots\dots$, $\qquad \dim(V_2) = \dots\dots$, $\qquad \dim(W_1) = \dots\dots$, $\qquad \dim(W_2) = \dots\dots$.

(b) Scrivere equazioni cartesiane per V_1.

V_1 : ....

(c) Scrivere una base $\mathcal{B}$ di $V_1 \cap V_2$.

$\mathcal{B}$: ....

Soluzione.

(a) La dimensione di V_1 è il rango della matrice A. Con un'eliminazione di Gauss per colonne, e in vista anche della domanda (b), troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-1/2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & -1/2 & x_3 \\ 1 & 0 & 2 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-x_1[1]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & -1/2 & x_3+x_1 \\ 1 & 0 & 2 & x_4-x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-x_2/2[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/2 & x_3+x_1-x_2/2 \\ 1 & 0 & 2 & x_4-x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+2(x_3+x_1-x_2/2)[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & x_4-x_1+4(x_3+x_1-x_2/2) \end{pmatrix}$$

da cui il rango di A è 3, e un'equazione per l'immagine è $x_4-x_1+4(x_3+x_1-x_2/2)=0$, cioè $3x_1-2x_2+4x_3+x_4=0$.
La dimensione di V_2 è $4-\mathrm{rk}(B)$. Con un'eliminazione di Gauss per righe troviamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2[1]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che il rango di B è 2 e che la dimensione del nucleo è $4-2=2$.
Calcoliamo

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che il rango di questa matrice è 1 e quindi la dimensione del suo nucleo è 2.
In conclusione,

$$\dim(V_1)=3, \qquad \dim(V_2)=2, \qquad \dim(W_1)=1, \qquad \dim(W_2)=2.$$

(b) Abbiamo determinato sopra l'equazione $3x_1-2x_2+4x_3+x_4=0$.

(c) Per intersecare V_1 e V_2 mettiamo a sistema l'equazione di V_1 e quelle di V_2. Dall'eliminazione per righe svolta sulla matrice B sappiamo che V_2 è uguale al nucleo di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ovvero è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_3+x_4=0. \end{cases}$$

L'intersezione $V_1 \cap V_2$ è allora descritta dal sistema

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_3+x_4=0. \end{cases}$$

La matrice di questo sistema è $\begin{pmatrix}3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Procediamo ad un'eliminazione di Gauss per righe (che non cambia le soluzioni del sistema associato):

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-3[3]} \begin{pmatrix}0 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+2[2]} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Ci siamo quindi ricondotti al sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Troviamo ora una base. Risolvendo otteniamo $x_1 = -2x_3 - x_4$ e $x_2 = -x_3 - x_4$, per cui lo spazio delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

I due vettori appena trovati sono chiaramente linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base di $V_1 \cap V_2$.

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Elencare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

λ	$\mathrm{m.a.}(\lambda)$	$\mathrm{m.g.}(\lambda)$

(b) Determinare una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori di A che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

$\mathcal{F}$: ....

(c) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Sia W il sottospazio di V dato da $W = \{M \in V \mid AM = MA\}$. Calcolare

$$\dim W = \ldots\ldots$$

Soluzione.

(a) La matrice A è simmetrica, quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale. Le molteplicità algebriche e geometriche sono quindi uguali per ogni autovalore. Per determinare gli autovalori calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det(t\,\mathrm{Id} - A) = \det\begin{pmatrix} t-8 & -3 & -9 \\ -3 & t & -3 \\ -9 & -3 & t-8 \end{pmatrix} \overset{[3]-[1]}{=} \det\begin{pmatrix} t-8 & -3 & -t-1 \\ -3 & t & 0 \\ -9 & -3 & t+1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{[3]-[1]}{=} \det\begin{pmatrix} t-8 & -3 & -t-1 \\ -3 & t & 0 \\ -t-1 & 0 & 2(t+1) \end{pmatrix} \overset{[1]+1/2[3]}{=} \det\begin{pmatrix} t/2-17/2 & -3 & 0 \\ -3 & t & 0 \\ -t-1 & 0 & 2(t+1) \end{pmatrix}$$
$$= 2(t+1)\left(t^2/2 - 17/2t - 9\right) = (t+1)\left(t^2 - 17t - 18\right) = (t+1)^2(t-18).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = -1$, di molteplicità (algebrica e geometrica) 2 e $\lambda = 18$, di molteplicità (algebrica e geometrica) 1.

(b) Calcoliamo intanto delle basi per gli autospazi di A. Per $\lambda = -1$, l'autospazio è

$$\ker(A + \mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $\lambda = 18$, l'autospazio è

$$\ker(A - 18\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -10 & 3 & 9 \\ 3 & -18 & 3 \\ 9 & 3 & -10 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}(v_3), \quad \text{con } v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si può facilmente verificare (ed è garantito dal teorema spettrale) che i primi due vettori sono ortogonali al terzo. Possiamo allora ortogonalizzare i primi due, trovando

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_2 - \frac{1}{2} v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dividendo ogni vettore per la sua norma troviamo la possibile risposta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Interpretiamo le matrici 3×3 come le matrici di applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alla base canonica). Stiamo allora studiando lo spazio degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che commutano con l'endomorfismo $L_A : v \mapsto Av$. La condizione di commutare con L_A è indipendente dalla scelta di una base, quindi possiamo scrivere tutto in una base che diagonalizza A. Il problema si riduce allora a calcolare $\dim\{M \in V \mid DM = MD\}$, dove $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$ è la forma diagonale di A. È facile verificare che una matrice M commuta con D se e solo se è della forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{33}$ numeri reali qualunque. In effetti, posto genericamente $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, si ha

$$DM = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 18a_{31} & 18a_{32} & 18a_{33} \end{pmatrix}$$

e

$$MD = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 18a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & 18a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 18a_{33} \end{pmatrix}.$$

È immediato vedere che l'equazione $DM = MD$ impone $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, mentre le rimanenti cinque variabili restano libere. Concludiamo quindi che $\dim W = 5$.

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare dato da

$$\varphi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx - p(0)q(0).$$

1. Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ per φ.
2. Calcolare la segnatura di φ.

Consideriamo l'endomorfismo T di V dato da

$$T(p)(x) = p(-x).$$

3. Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto 1.
4. Dire se l'operatore T è autoaggiunto e in caso negativo calcolare l'aggiunto di T, esprimendolo tramite la sua matrice rispetto alla base trovata al punto 1.
5. Un endomorfismo $S : V \to V$ è un'*isometria* se vale $\varphi(Sp(x), Sq(x)) = \varphi(p(x), q(x))$ per ogni $p(x), q(x) \in V$. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $T + \lambda\,\mathrm{Id}$ è un'isometria.

Soluzione.

1. Osserviamo intanto che
$$\varphi(x, x^2) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx - 0 = 0,$$
per cui $p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ sono ortogonali. Cerchiamo di completare questi due vettori ad una base ortogonale. Il terzo elemento di base deve essere un polinomio con termine noto non nullo (altrimenti sarebbe linearmente dipendente dai due già trovati); a meno di moltiplicarlo per uno scalare, possiamo quindi supporre che sia della forma $p_3(x) = 1 + ax + bx^2$. Calcoliamo
$$\varphi(p_3(x), p_1(x)) = \varphi(1, x) + a\varphi(x, x) + b\varphi(x, x^2).$$
Abbiamo già calcolato $\varphi(x, x^2) = 0$. Si ha poi
$$\varphi(1, x) = \int_{-1}^{1} x\, dx - 0 = 0$$
e
$$\varphi(x, x) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx - 0 = \frac{2}{3}.$$
Imponendo $\varphi(p_3(x), p_1(x)) = 0$ troviamo l'equazione $0 + \frac{2}{3}a + 0 = 0$, cioè $a = 0$. Imponiamo ora
$$0 = \varphi(p_3(x), x^2) = \varphi(1, x^2) + a\varphi(x, x^2) + b\varphi(x^2, x^2).$$
Si ha
$$\varphi(1, x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx - 0 = \frac{2}{3}$$
e
$$\varphi(x^2, x^2) = \int_{-1}^{1} x^4\, dx - 0 = \frac{2}{5},$$
da cui $0 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}b$. Questo fornisce $b = -5/3$, da cui infine $p_3(x) = 1 - \frac{5}{3}x^2$.

2. Per definizione è sufficiente calcolare i segni di $\varphi(p_j(x), p_j(x))$ per $j = 1, 2, 3$. Abbiamo già calcolato
$$\varphi(p_1(x), p_1(x)) = \frac{2}{3} > 0, \qquad \varphi(p_2(x), p_2(x)) = \frac{2}{5} > 0,$$
quindi ci resta solo da determinare il segno di
$$\varphi\left(1 - \frac{5}{3}x^2, 1 - \frac{5}{3}x^2\right) = \varphi(1,1) - \frac{10}{3}\varphi(1, x^2) + \frac{25}{9}\varphi(x^2, x^2).$$
Calcolando $\varphi(1,1) = \int_{-1}^{1} 1\, dx - 1 = 1$ e sostituendo i valori noti degli altri prodotti scalari otteniamo
$$\varphi(p_3(x), p_3(x)) = 1 - \frac{10}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{25}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9 - 20 + 10}{9} = -\frac{1}{9}.$$
La segnatura è quindi $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

3. È chiaro per definizione che $T(x) = -x = -p_1(x)$, mentre $T(p_2(x)) = (-x)^2 = p_2(x)$ e $T(p_3(x)) = 1 - \frac{5}{3}(-x)^2 = p_3(x)$. La matrice di T in base $\mathcal{B}$ è quindi
$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

4. La risposta è affermativa: T è autoaggiunto. Questo si può vedere in almeno due modi:

   (a) o usando il cambio di variabili $y = -x$ per calcolare
$$\begin{aligned}\varphi(Tp(x), q(x)) &= \int_{-1}^{1} p(-x)q(x)\, dx - p(-0)q(0) \\ &= \int_{-1}^{1} p(y)q(-y)\, d(y) - p(0)q(-0) = \varphi(p(x), Tq(x));\end{aligned}$$

   (b) oppure osservando che in base $\mathcal{B}$ la condizione di essere autoaggiunto si scrive matricialmente come
$${}^t[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}.$$
   Siccome $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ e $[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/3 & & \\ & 2/5 & \\ & & -1/9 \end{pmatrix}$, questa condizione è chiaramente verificata.

5. Scriviamo esplicitamente la condizione: si deve avere
$$\varphi(Tp(x) + \lambda p(x), Tq(x) + \lambda q(x)) = \varphi(p(x), q(x))$$
per ogni coppia di polinomi $p(x), q(x) \in V$. Sviluppando il prodotto sulla sinistra troviamo la condizione equivalente
$$\varphi(Tp(x), Tq(x)) + \lambda\varphi(p(x), Tq(x)) + \lambda\varphi(Tp(x), q(x)) + \lambda^2\varphi(p(x), q(x)) = \varphi(p(x), q(x)).$$
Usiamo ora la proprietà di auto-aggiunzione di T per riscrivere questa condizione nella forma
$$\varphi(p(x), T^2q(x)) + \lambda\varphi(p(x), Tq(x)) + \lambda\varphi(p(x), Tq(x)) + \lambda^2\varphi(p(x), q(x)) = \varphi(p(x), q(x)).$$
Osserviamo ora che per definizione si ha $T^2 = \mathrm{Id}$, e quindi la condizione si può ulteriormente riscrivere nella forma
$$\varphi(p(x), q(x)) + 2\lambda\varphi(p(x), Tq(x)) + \lambda^2\varphi(p(x), q(x)) = \varphi(p(x), q(x)).$$
Semplificando l'addendo $\varphi(p(x), q(x))$ sui due lati ci siamo allora ridotti a
$$\varphi(p(x), (2\lambda T + \lambda^2)q(x)) = 0.$$

Dal momento che questa condizione vale per ogni $p(x)$ e il prodotto φ è non-degenere (in quanto $n_0 = 0$, come calcolato al punto 2), otteniamo che deve valere $(2\lambda T + \lambda^2)q(x) = 0$ per ogni $q(x)$. Tale condizione è certamente soddisfatta per $\lambda = 0$, che è quindi una soluzione. Se invece valesse $\lambda \neq 0$, dividendo per λ otterremmo

$$(2T + \lambda)q(x) = 0 \quad \forall q(x) \in V,$$

che fornirebbe $Tq(x) = -\frac{\lambda}{2}q(x)$ per ogni $q(x)$, cioè $T = -\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Id}$. Siccome T non è di questa forma per alcun valore di λ (si veda ad esempio la matrice di T calcolata sopra), otteniamo che nessun valore $\lambda \neq 0$ rispetta la condizione.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo. Supponiamo che la matrice A di f in base canonica sia triangolare superiore con coefficienti diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a due a due distinti.

1. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rispetto alla quale f è rappresentata dalla matrice diagonale B i cui coefficienti lungo la diagonale sono (nell'ordine) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Detta $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica, si dimostri che per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$.
3. Sia $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo tale che $g \circ g = f$. Dimostrare che $C = [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale.
4. Sia g come al punto precedente. Mostrare che la matrice di g in base canonica è triangolare superiore. Dedurre che tutte le soluzioni N dell'equazione $N^2 = A$ sono triangolari superiori.
5. Dare un esempio di una matrice triangolare superiore $M \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e di una matrice **non** triangolare $N \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $N^2 = M$.

Soluzione.

1. È ben noto che il polinomio caratteristico di una matrice triangolare con coefficienti diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ è $(t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$. Questo mostra che gli autovalori di f sono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ciascuno di molteplicità algebrica 1. Le molteplicità geometriche sono quindi tutte uguali da 1, il che implica che f è diagonalizzabile. Questo vuol dire esattamente che esiste una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ rispetto alla quale la matrice di f è la matrice diagonale con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Consideriamo la restrizione di f al sottospazio f-invariante dato da $W_i := \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i)$. La matrice di tale restrizione è il blocco $i \times i$ in alto a sinistra di A, e quindi è triangolare con coefficienti diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Come al punto precedente, la restrizione di f a W_i è diagonalizzabile, con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Sia $w_1, \ldots, w_i$ una base diagonalizzante per $f|_{W_i}$: si ha allora $W_i = \mathrm{Span}(w_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}(w_i)$. D'altro canto, per ogni $j = 1, \ldots, i$, il vettore w_j è un autovettore di f di autovalore λ_j, e quindi è proporzionale a v_j, perché l'autospazio di f di autovalore λ_j è 1-dimensionale. Si ha perciò
$$\begin{aligned}\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i) = W_i &= \mathrm{Span}(w_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}(w_i)\\ &= \mathrm{Span}(v_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}(v_i) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i),\end{aligned}$$
come voluto.
3. Chiaramente g commuta con f, perché $g \circ f = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = f \circ g$. Ne segue che g preserva gli autospazi di f, cioè manda $\mathrm{Span}(v_i)$ in sé per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per definizione, questo vuol dire che i v_i sono anche autovettori di g, e perciò la base $\mathcal{B}$ diagonalizza anche g.
4. La matrice di un endomorfismo in base canonica è triangolare superiore se e solo se i sottospazi $W_i = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i)$ sono invarianti per ogni $i = 1, \ldots, n$. Siccome abbiamo già osservato che ogni v_i è anche autovettore di g, otteniamo che il sottospazio $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ è g-invariante. D'altro canto, per il punto 2 si ha $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i) = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i)$, e la tesi segue.

L'ultima affermazione segue semplicemente scrivendo l'equazione $f = g \circ g$ in base canonica: essa diventa $A = ([g]_{\text{can}}^{\text{can}})^2$, in cui $[g]_{\text{can}}^{\text{can}}$ gioca il ruolo di N. Abbiamo appena dimostrato che per ogni soluzione di questa equazione la matrice $[g]_{\text{can}}^{\text{can}}$ è triangolare superiore, cioè che N è triangolare superiore, come voluto.

5. Un semplice esempio è dato da $M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.