Spazio vettoriale <u>reale</u>

$(\mathbb{R}, V, +, \cdot)$

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(V, +)$ gruppo abeliano (commutativo)

a) associatività di $+$: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

b) $\exists$ unità $\mathbf{0}$: $\forall v \in V$ $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$

c) Ogni vettore $v \in V$ ammette opposto : $\forall v \in V$ $\exists w$ t.c.

$v + w = w + v = \mathbf{0}$

d) somma $+$ è commutativa

---

1) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \beta) \cdot v$

2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

3) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha v_2$

4) $1 \cdot v = v$

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}\ \mathbb{R}^n\ +\ \cdot)$

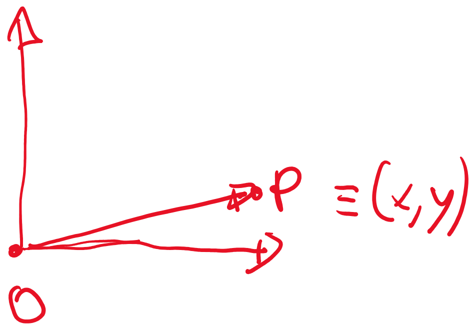
$$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot)$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(1, 7, 4) + (0, 1, 2) := (0, 8, 6)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$(-3) \cdot (1, 4, -1) = (-3, -12, 3)$$



$$\vec{OP} \leftrightarrow (x, y)$$

$$(\mathbb{R}, \{0\}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{R}, M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

$$(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \cdot)$$

$$\pi x^2 - x + e$$

$$(\mathbb{R}, C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$$

$$(\mathbb{R}, C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$$

$(\mathbb{R}, C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$\frac{1}{n+1}$

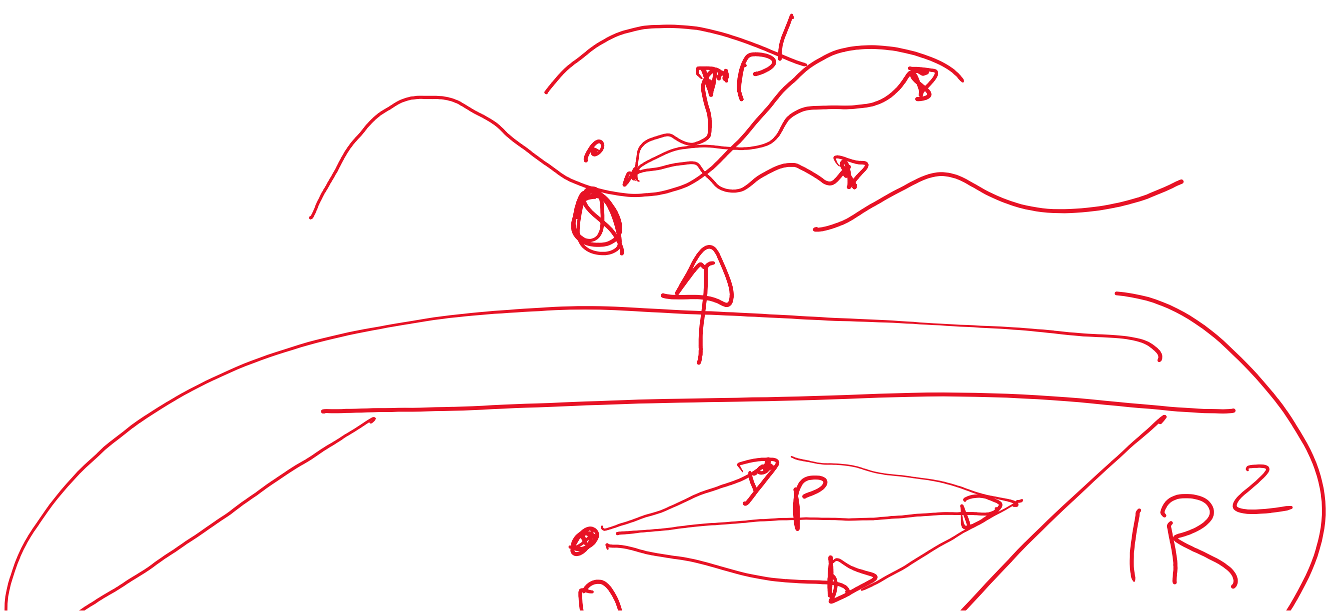
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

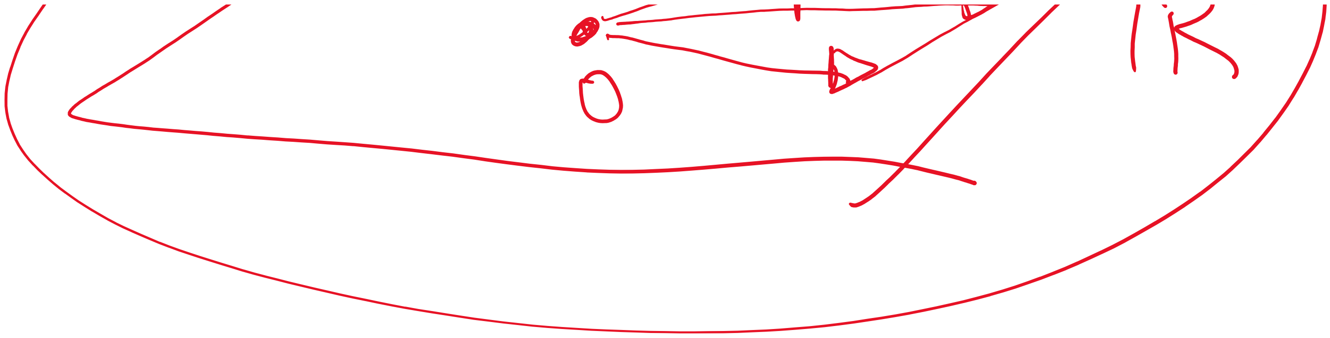
$(-1)^n$

$1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$

$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $\qquad (a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$

$\alpha \cdot (a_i) = (\alpha a_i)$





Sottospazio vettoriale reale:

è un sottoinsieme di uno s.v. reale che è a sua volta uno s.v. reale per le operazioni indotte, supponendo che siano definite.

Es. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\qquad \mathbb{R}^3$

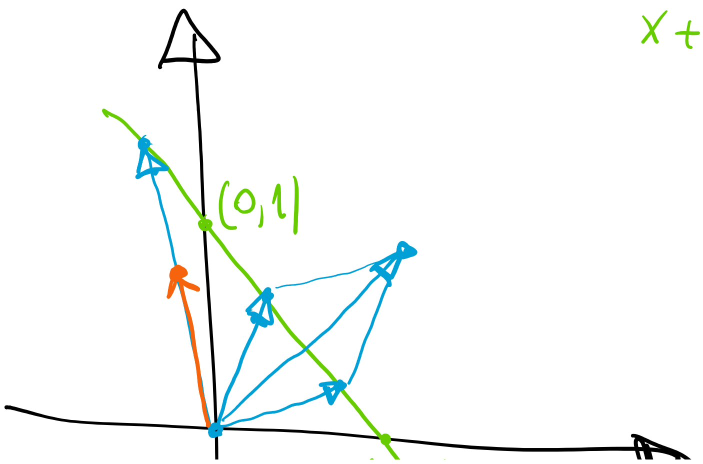
$$x+y+z=0$$

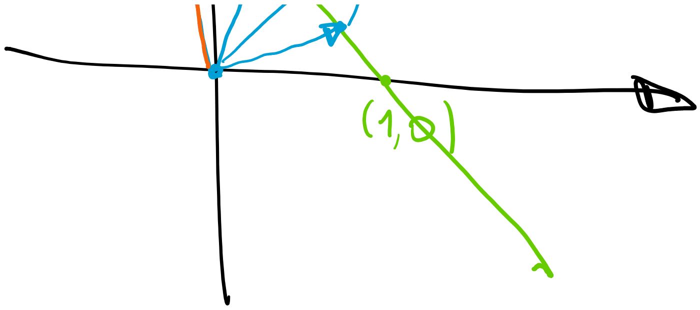
$$x_1+y_1+z_1=0 \Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0$$

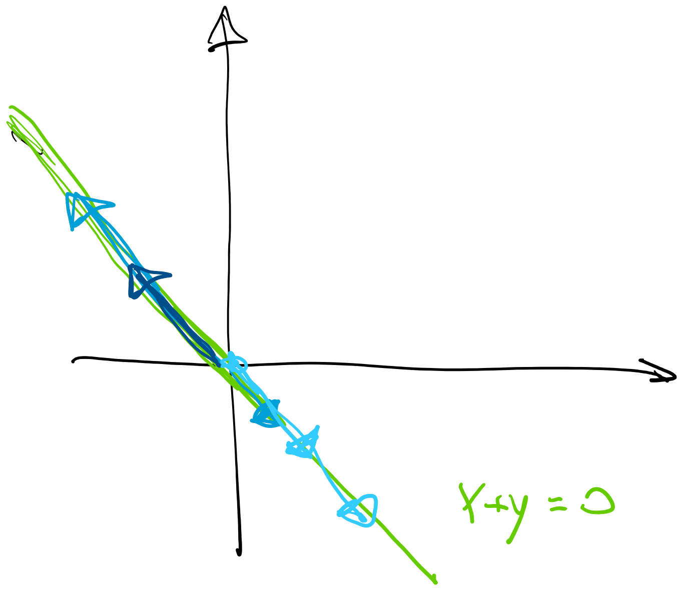
$$x_2+y_2+z_2=0$$

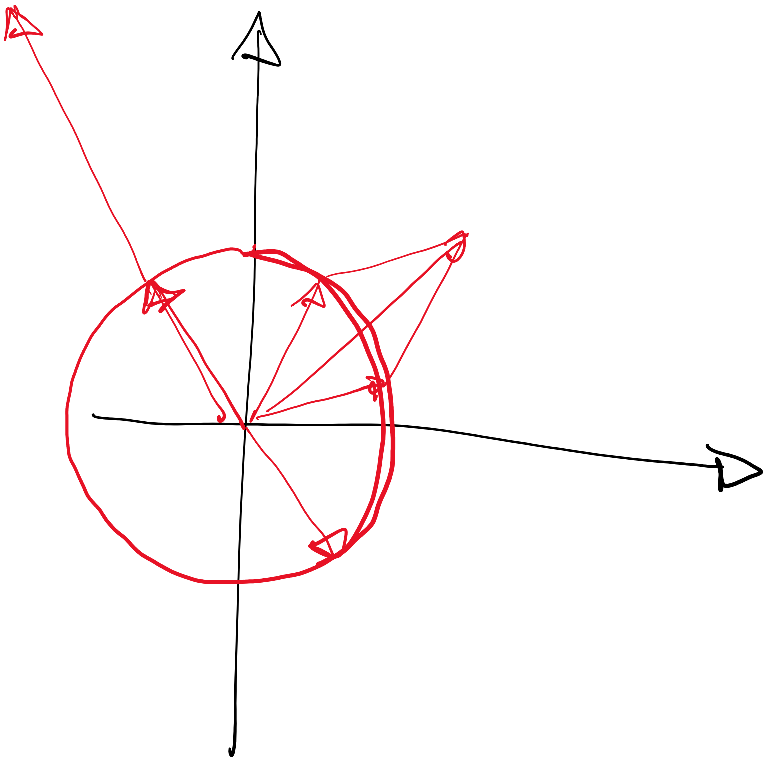
$\mathbb{R}^2$

$x+y=1$




(1, 0)


x+y = 0

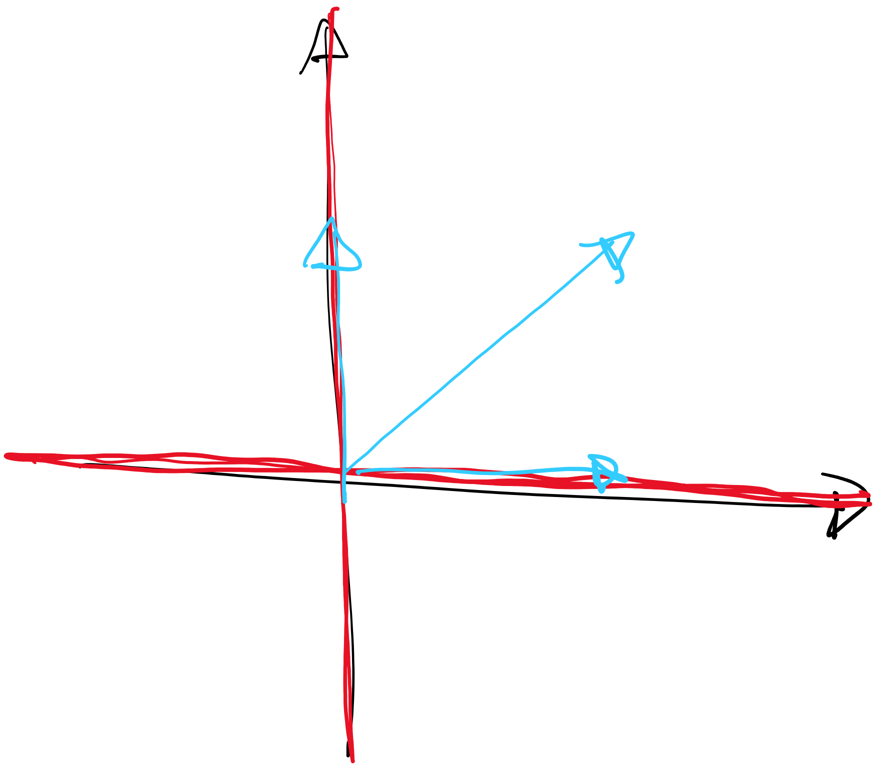


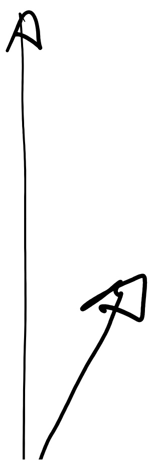
$S \subseteq V$

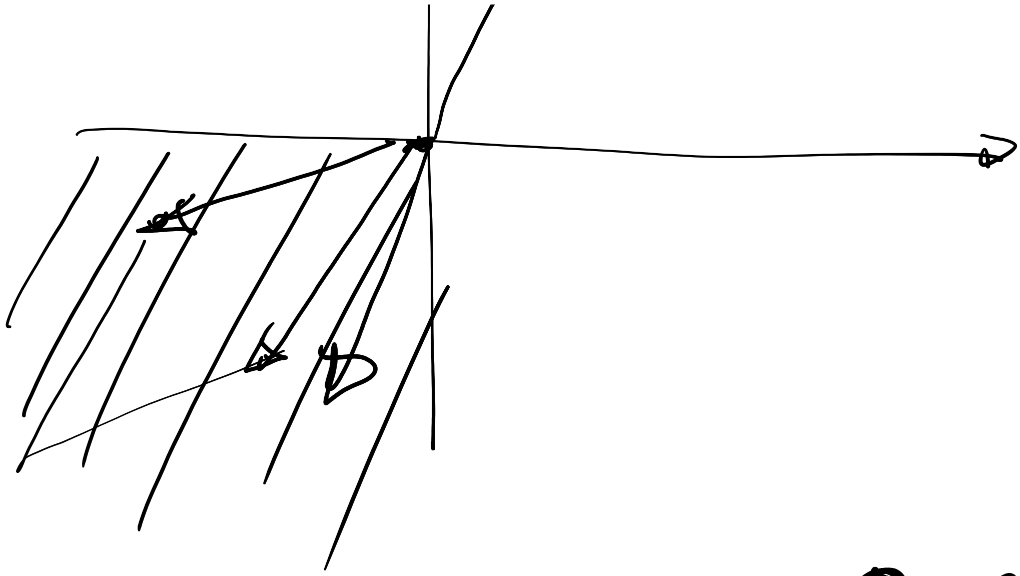
$+|_S (v_1, v_2) \in S \qquad +|_S : S \times S \to S$

$v_1, v_2 \in S$

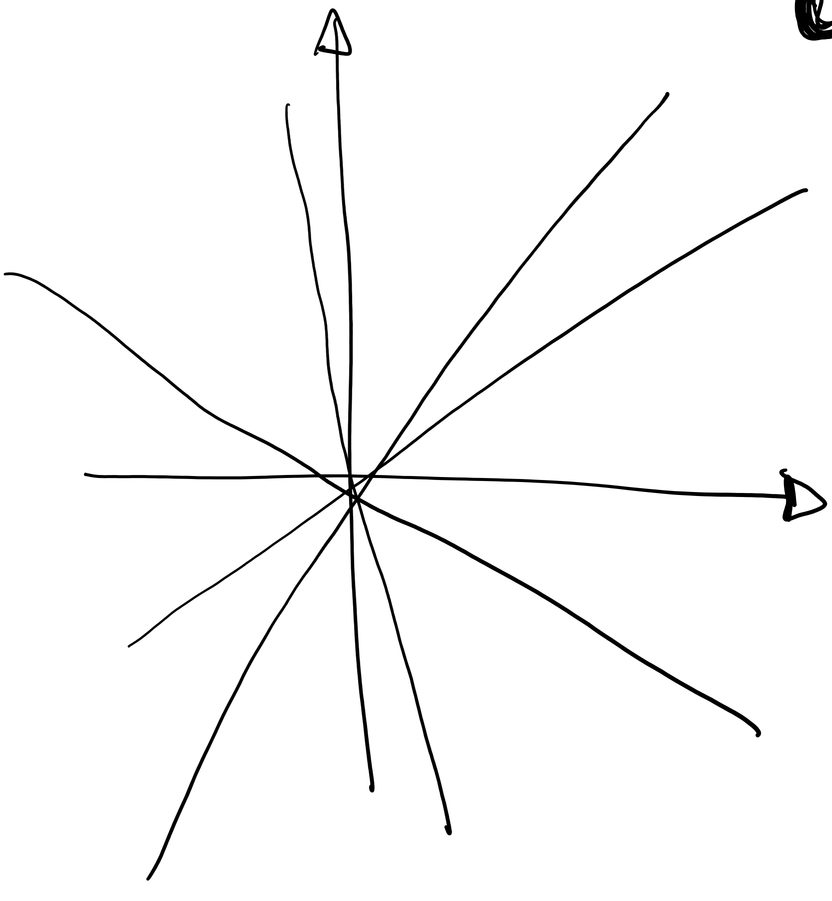
$\cdot|_{\mathbb{R} \times S} : \mathbb{R} \times S \to S$





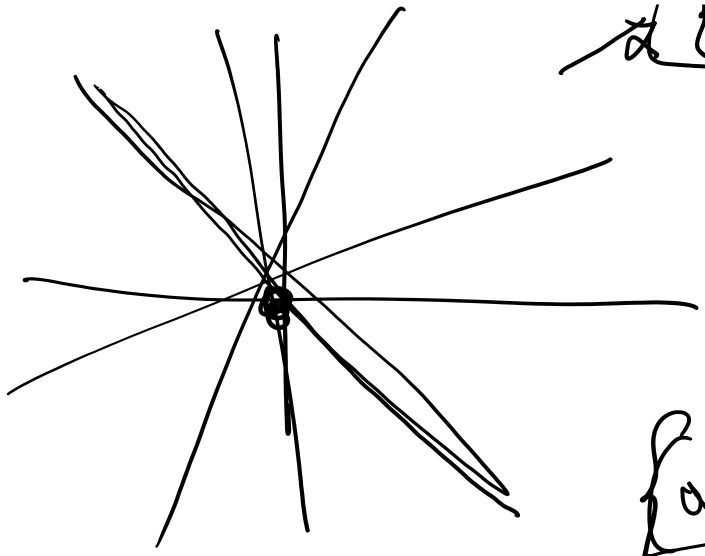


0, $\mathbb{R}^2$



L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\{x+y=0}$

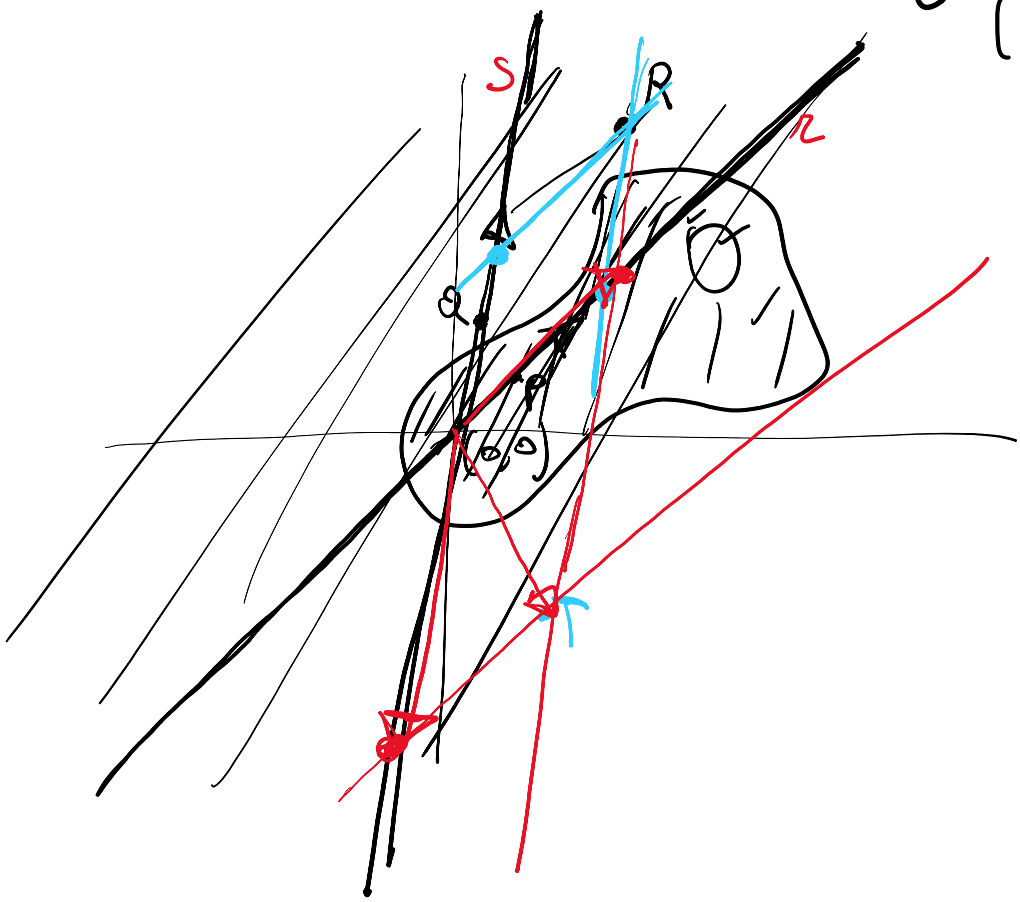


$$\{x+y=0$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\{0=0$$

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ (a,b)=(0,0) \end{cases}$$



Quale potrebbe essere un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[x]$.

$$(x^8 + x^5 + 1) + (-x^8 + 3x^3) = x^5 + 3x^3 + 1$$

$$(x^8 + 3x^4 + 3) + (x^6 - 7x^4 + 3x^2) =$$
$$= x^8 + x^6 - 4x^4 + 3x^2 + 3$$

$$\{\underline{a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots}\}$$

$\{0\} \cup \{$ insieme dei polinomi in cui tutti i monomi hanno grado $\geq 7\}$

$$3x^7 + 10x^{10} + x^{1000}$$

Qual è un sottoinsieme di $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ che sia un sottospazio vettoriale.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} k\lambda & 0 & 0 \\ 0 & k\lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a+b+c+d+e+f=0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : \underline{a \geq 7} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \cancel{1} & -3 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{|a| \geq 7}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

V

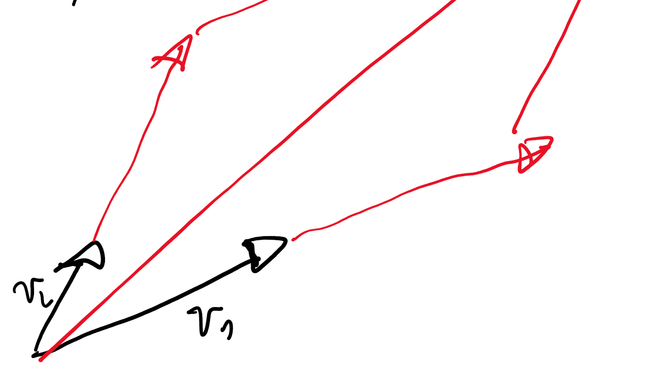
Combinazione lineare dei vettori

$v_1, \dots, v_k$

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot v_1}_{\in V} + \underbrace{\alpha_2 \cdot v_2}_{\in V} + \dots + \underbrace{\alpha_k \cdot v_k}_{\in V} \in V$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$2v_1 + 3v_2$



Sistema di generatori per uno spazio vettoriale V.

Si dice che $(v_1, \dots, v_k)$ è un sistema

Si dice che $(v_1, \dots, v_k)$ è un sistema di generatori per V se ogni elemento di V si può scrivere in almeno un modo come comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$

e $(v_1, v_2) = ((1,0,0),(0,1,0))$

Domanda: (v_1, v_2) è un sistema di generatori per V?

NO!

Perché non posso scrivere, p.es., $(1,1,1)$ come comb. lineare dei due vettori dati.

$((1,0,0),(0,1,0),\underline{(0,0,1)})$ è un s. di gen per $V = \mathbb{R}^3$?

$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$\underbrace{(x,0,0) \quad (0,y,0) \quad (0,0,z)}_{(x,y,z)}$$

$((1,7,3),(5,1,2),(6,8,5))$ è un sist. di gen per $V = \mathbb{R}^3$?

$$\underline{(b_1, b_2, b_3)} = x(1,7,3) + y(5,1,2) + z(6,8,5)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 5y + 6z \\ 7x + 1y + 8z \\ 3x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 5y + 6z = b_1 \\ 7x + y + 8z = b_2 \\ 3x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

$$\left\lfloor\ 3x + 2y + 5z = \boxed{b_3}\right.$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & b_1 \\ 7 & 1 & 8 & b_2 \\ 3 & 2 & 5 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & b_1 \\ 0 & -34 & -34 & b_2 - 7b_1 \\ 0 & -13 & -13 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b_2 - 7b_1}{-34} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b_3 - 3b_1}{-13} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b_2 - 7b_1}{-34} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{C} \end{array}\right)$$

$$C \neq 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{b_2 - 7b_1}{34} + \frac{b_3 - 3b_1}{13}$$

p.c. $b_1 = 0$

$b_3 = 0$

$b_2 = 34$