Combinazioni lineari
Sistemi di generatori
Chiusura lineare
Dipendenza e indipendenza lineare
BASE
Dimensione di uno spazio vettoriale

$V \qquad v_1, \dots, v_k \in V$

Un vettore del tipo

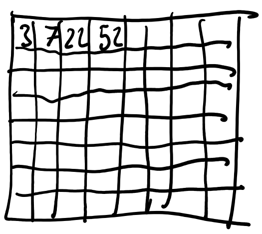
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \quad \left(\text{ovvero } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right)$$

con ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}$

si dice <u>combinazione lineare</u> dei vettori $v_1, \dots, v_k$.

Def. Si dice che $(v_1, \dots, v_k)$ è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere (non necessariamente in modo unico) come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_k$:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$



256^{64}

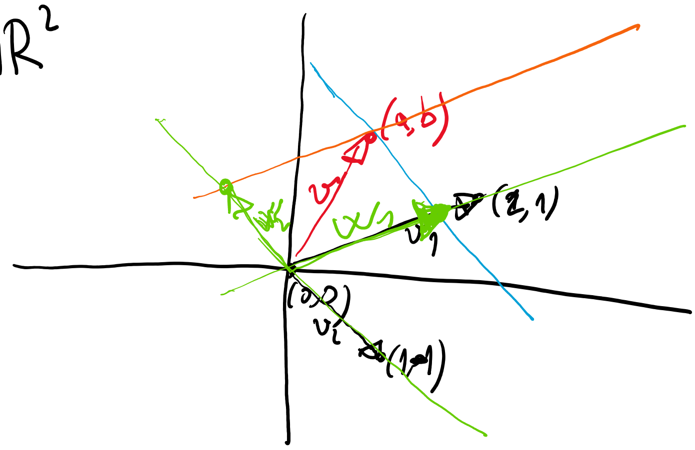
Def. Si dice chiusura lineare dei vettori $v_1, \dots, v_k$ (e si indica usualmente con uno di questi simboli:

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle\ )$$

l'insieme di tutti i vettori che sono combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Quindi, in particolare, $(v_1, \dots, v_k)$ è un sistema di generatori per V se e solo se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$.

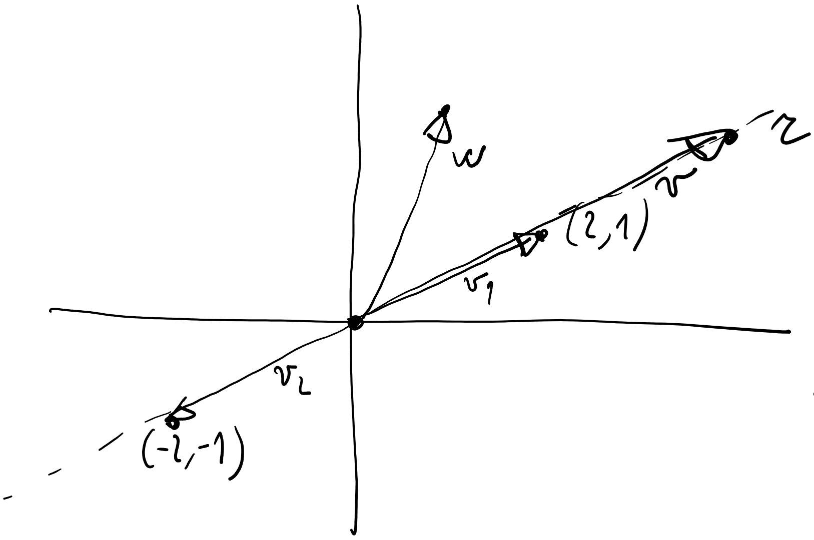
$V = \mathbb{R}^2$



$\{ x v_1 + y v_2 : x, y \in \mathbb{R} \}$

$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$

È ovvio che $v = w_1 + w_2 = x v_1 + y v_2$



$w \neq x v_1 + y v_2$

$v = x v_1 + 0 v_2$

$v = 0 v_1 + y v_2$

$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = r$

INDIPENDENZA LINEARE

Def 1. I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ si dicono linearmente dipendenti se esiste una k-upla $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ <u>diverso da $(0, \dots, 0)$</u> tale che $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0_V$

$(\text{NB: } 0 v_1 + \dots + 0 v_k = 0_V)$

Def. 2. I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono linearmente dipendenti se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei vettori rimanenti.

di essi si può scrivere come combinazione lineare dei vettori rimanenti.

$V = \mathbb{R}^2 \qquad v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ v_3 = (2,3)$

$-2 \cdot v_1 - 3 v_2 + 1 \cdot v_3 =$

$= -2(1,0) - 3(0,1) + 1(2,3)$

$= (-2,0) + (0,-3) + (2,3) = \boxed{(0,0)}$

Quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

$v_3 = 2v_1 + 3v_2$

$(2,3) = 2\underbrace{(1,0)}_{(2,0)} + 3\underbrace{(0,1)}_{(0,3)}$

$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)$

I due vettori sono linearmente indipendenti

$x(1,0) + y(0,1) = (0,0)$

$\| \qquad (x,0) + (0,y) \qquad \| \qquad (x,y)$

$\Rightarrow \quad x = 0,\ y = 0$

v_1 non è multiplo di v_2!

$$(1,0) = x(0,2) \implies \cancel{1=0},\ \underline{0=2x}$$
$$(0,2x)$$

Prop. Def. 1 è equivalente a Def. 2.

Dim. Supponiamo che i vettori $v_1, \dots, v_k$ siano lin. dipendenti per la Def. 1. Facciamo vedere che sono lin. dip. anche per la Def. 2.

Allora $\exists\ \underline{(x_1, \dots, x_k) \neq (0, \dots, 0)}$ tale che

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \mathbf{0}_V$$

Esisterà un $x_i \neq 0$. Non è restrittivo supporre che $\underline{\text{sia } x_1 \neq 0.}$

In questo caso

$$x_1 v_1 = -x_2 v_2 - \dots - x_k v_k$$

$$\Downarrow\ x_1 \neq 0$$

$$v_1 = \left(-\frac{x_2}{x_1}\right) v_2 - \dots - \frac{x_k}{x_1} v_k$$

Supponiamo ora che $v_1, \dots, v_k$ siano <u>linearmente dipendenti per la Def. 2.</u>

Ciò significa che esiste un vettore v_i che si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti vettori.

P... supponiamo che tale vettore sia v_1.

lineare dei rimanenti vettori.

Possiamo supporre che tale vettore sia v_1.

Quindi avremo $v_1 = y_2 v_2 + \dots + y_k v_k$

Perciò $1 \cdot v_1 - y_2 v_2 - \dots - y_k v_k = 0_V$ ($1 \neq 0$)

Dunque esiste una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei vettori $v_1, \dots, v_k$ che dà il vettore nullo.

Se $v_1, \dots, v_k$ è lin. dipendente e uno dei vettori (p.e. v_1) si può scrivere come comb. lineare degli altri vettori allora $\underline{\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_2, \dots, v_k)}$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k =$$
$$= x_1(y_2 v_2 + \dots + y_k v_k) + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$$
$$= (x_1 y_2) v_2 + (x_1 y_3) v_3 + \dots + (x_1 y_k) v_k + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_k v_k$$
$$= \underline{(x_1 y_2 + x_2) v_2 + (x_1 y_3 + x_3) v_3 + \dots + (x_1 y_k + x_k) v_k}$$

Prop. La chiusura lineare $\underline{S = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim. $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \in S$

$y_1 v_1 + \dots + y_k v_k \in S$

$$\underbrace{(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k)}_{= \sum_{i=1}^{k} x_i v_i} + \underbrace{(y_1 v_1 + \dots + y_k v_k)}_{= \sum_{i=1}^{k} y_i v_i} =$$

$$= (x_1 v_1 + y_1 v_1) + \dots + (x_k v_k + y_k v_k) =$$

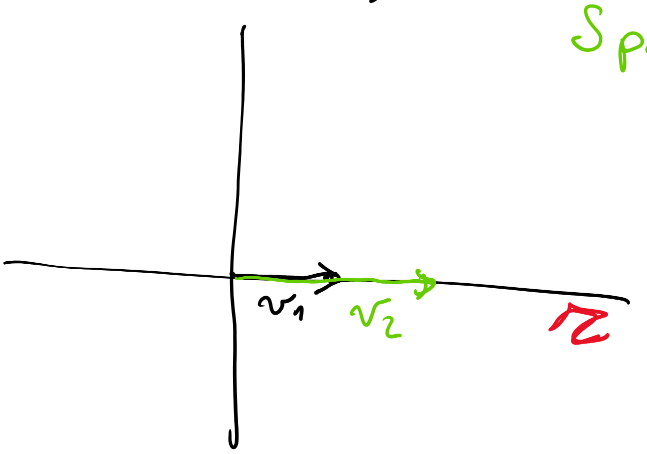
$$= (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_k + y_k) v_k$$

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i + y_i) v_i \in S$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{k} x_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha x_i) v_i \in S$$

$v_1 = (1,0) \quad v_2 = (2,0)$

$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = r$



Def. Una base di V è un suo sistema di generatori che sia anche linearmente indipendente.

Esempio

$\mathbb{R}^2$

Esempio

$$B = \big(\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\big) \text{ è una base per } \mathbb{R}^2.$$

$$(a,b) = \underbrace{a(1,0)}_{(a,0)} + \underbrace{b(0,1)}_{(0,b)}$$

Base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$B = \big(\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,\dots,0)}_{e_2}, \dots, \underbrace{(0,\dots,1)}_{e_n}\big)$$

$$(a_1,\dots,a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$(1,0,\dots,0) \neq \underline{x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,\dots,1)}$$

Base standard per $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$B = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$A = (a_{ij}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij} E_{ij}$$

$V = \mathbb{R}^2 \qquad B = ((1,2),(3,7))$

È vero che ogni vettore (a,b) si può scrivere nella forma

$$(a,b) = \underline{x(1,2) + y(3,7)} \; ?$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ 2x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y\\ 7y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y\\ 2x+7y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+3y = a \\ 2x+7y = b \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 7 & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-3(b-2a) \\ 0 & 1 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = a-3(b-2a) \\ y = b-2a \end{cases}$$

Def. Si chiama dimensione di uno spazio vettoriale V la cardinalità di una sua base qualunque.

dim V

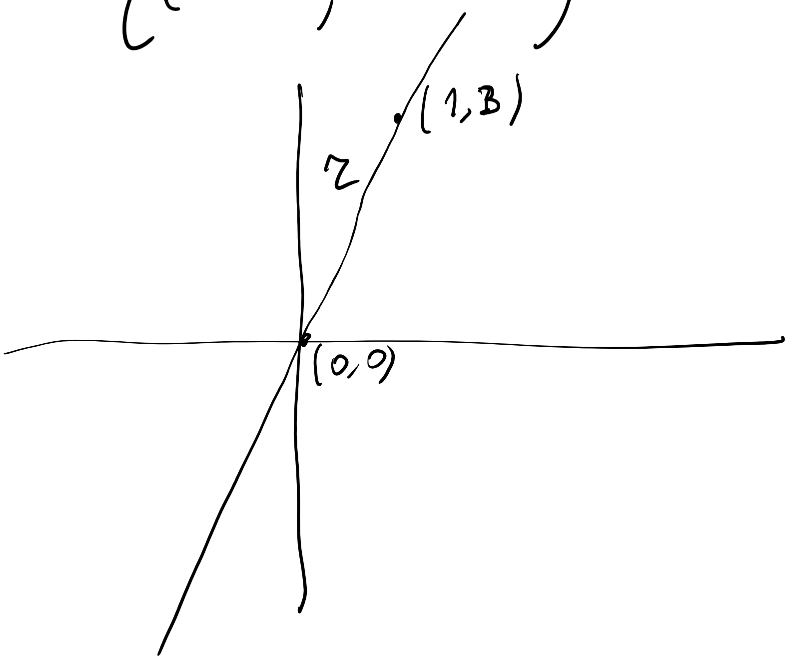
Per esempio: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

NB

Teorema. Ogni base di V ha la stessa cardinalità.

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 3s + 6t \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = r \\ y = 3r \end{cases}$$

$$U = \{(s+2t, 3s+6t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$



$B = ((1,3))$