Prop. Se $S: V \to W$ e $T: W \to U$ sono trasf. lineari, allora anche $T \circ S: V \to U$ è una trasf. lineare.

Dim.
$$T \circ S(v_1 + v_2) =$$
$$= T(S(v_1 + v_2)) =$$
$$= T(S(v_1) + S(v_2))$$
$$= T(S(v_1)) + T(S(v_2))$$
$$= T \circ S(v_1) + T \circ S(v_2)$$

$$T \circ S(\lambda v) =$$
$$= T(S(\lambda v))$$
$$= T(\lambda S(v))$$
$$= \lambda T(S(v))$$
$$= \lambda T \circ S(v)$$

T $\qquad\qquad$ S

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$B \qquad A$$

$$T \circ S$$

$$\Downarrow$$

$$BA$$

Se $\underset{B_V}{T : V} \to \underset{B_W}{W}$ è un isomorfismo (cioè T è biiettiva) abbiamo che $T^{-1} : \underset{B_W}{W} \to \underset{B_V}{V}$ è anch'essa lineare e la sua matrice associata rispetto alle basi date è l'inversa della matrice associata a T rispetto alle basi date.

Dim.

$w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2)$

$$\boxed{T^{-1}(w_1 + w_2)} =$$

$$= T^{-1}(T(v_1) + T(v_2))$$

$$= T^{-1}(T(v_1+v_2))$$

$$= v_1 + v_2$$

$$= \boxed{T^{-1}(w_1) + T^{-1}(v_2)}$$

$$\boxed{T^{-1}(\lambda w)}$$

$$w = T(v)$$
$$\Updownarrow$$
$$T^{-1}(w) = v$$

$$= T^{-1}(\lambda T(v))$$

$$= T^{-1}(T(\lambda v))$$

$$= \lambda v$$

$$= \boxed{\lambda T^{-1}(w)}$$

$$\begin{array}{cc} T & T^{-1} \\ \downarrow & \downarrow \\ A & B \end{array}$$

$$T^{-1} \circ T = id$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$

$$BA = I$$

$$\underline{T} \circ \underline{T}^{-1} = id$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = I$$

Prop. La matrice associata a T^{-1} rispetto alle basi date è l'inversa della matrice associata a T.

Nota: Le matrici non invertibili sono quelle associate a trasformazioni lineari non invertibili.

$$(A \mid I)$$

$$\downarrow$$

$$(I \mid A^{-1})$$

Questo è possibile se e solo se $\operatorname{rk} A = n$.

$\operatorname{rk} A = n$.

Prop. Una matrice A $n \times n$ è invertibile se e solo se $\operatorname{rk} A = n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$\exists A^{-1}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < n = 3$$

A non è invertibile.

$\nexists A^{-1}$!

$$f : \mathbb{R}^2_{B_\mathcal{E}} \to \mathbb{R}^2_{B_\mathcal{E}}$$

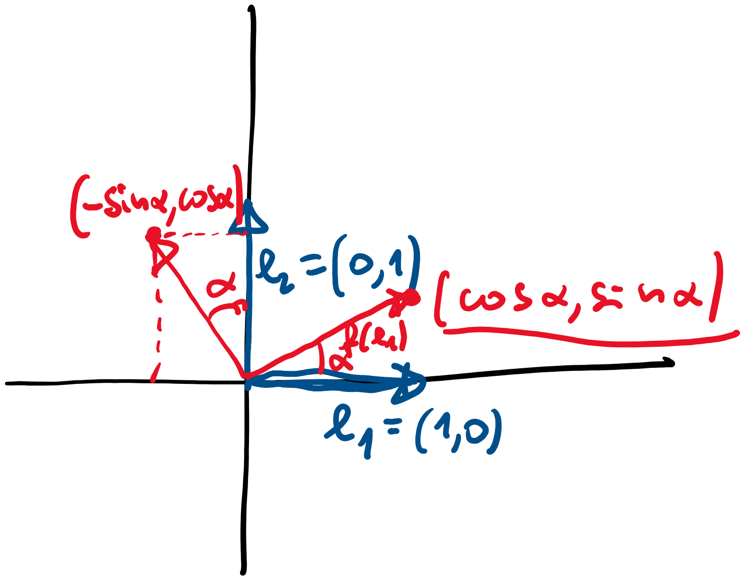
$$f((x,y)) = (-x, y)$$

$$f^2 = f \circ f$$

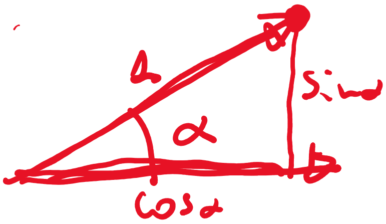
$$f^2 = f \circ f$$

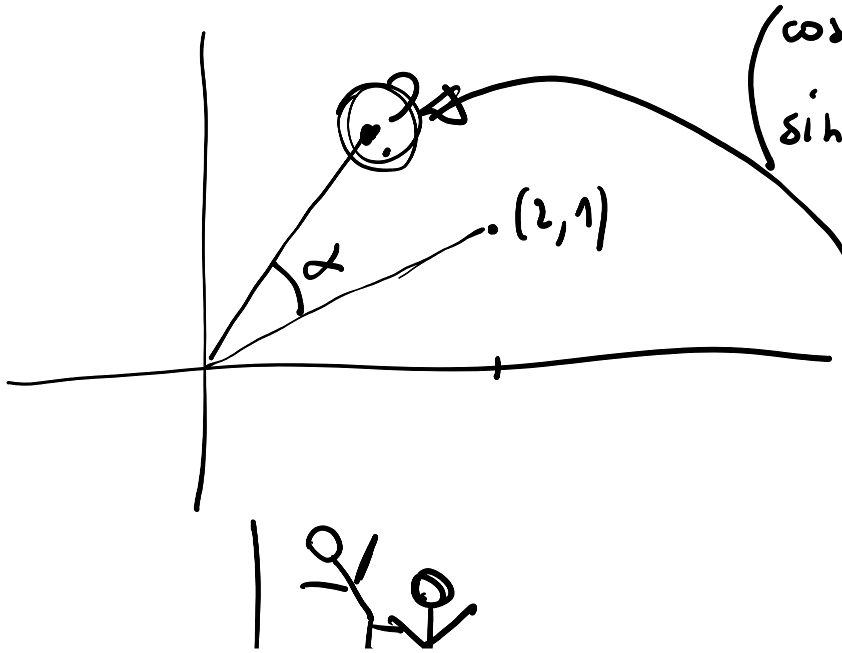
$$M_{B_{\mathcal{E}} B_{\mathcal{E}}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_{\mathcal{E}} B_{\mathcal{E}}}(f^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I}$$

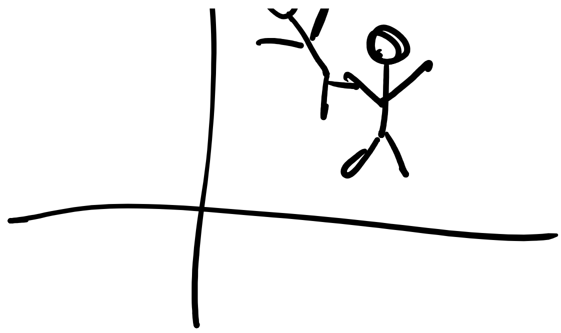


$$M_{B_{\mathcal{E}} B_{\mathcal{E}}}(R) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha - \sin\alpha \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha \end{pmatrix}$$



Nota: Se una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile, la sua inversa è

$$\frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$

$\leftarrow$ determinante della matrice 2×2

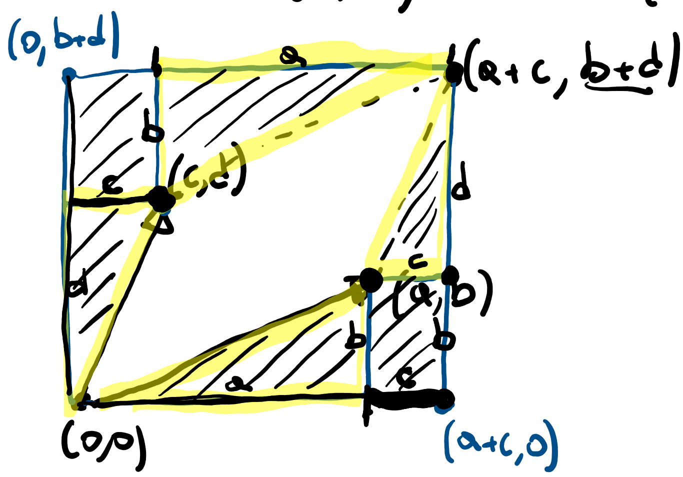
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{7} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc} = \frac{\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}}{ad-bc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare l'area del parallelogramma P che ha i lati determinati nel piano dai due vettori $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.



L'area del parallelogramma P è

$$(a+c)(b+d) - 2bc - ab - cd =$$

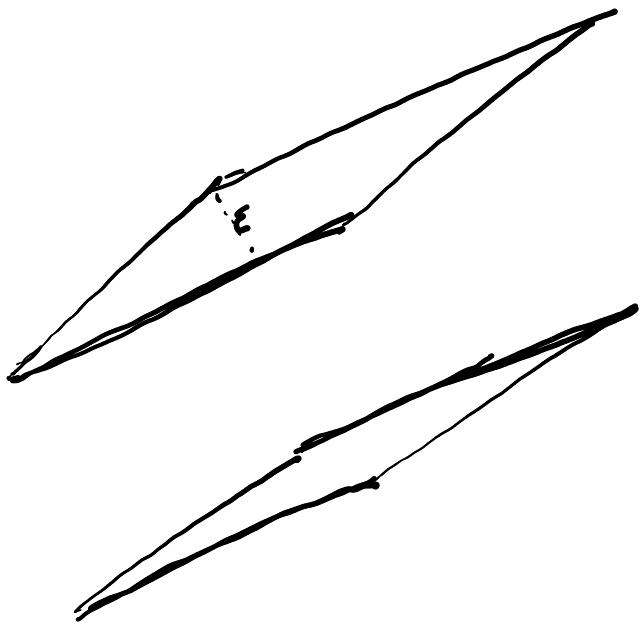
$$= \cancel{ab} + ad + \underline{bc} + \cancel{cd} - \underline{2bc} - \cancel{ab} - \cancel{cd}$$

$$= \cancel{ab} + ad + \underline{bc} + \cancel{cd} - \underline{\underline{2bc}} - \cancel{ab} - \cancel{cd}$$

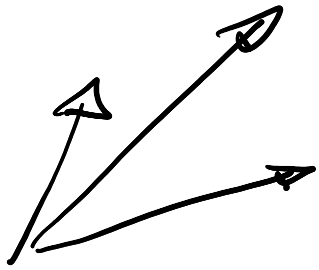
$$= ad - bc$$

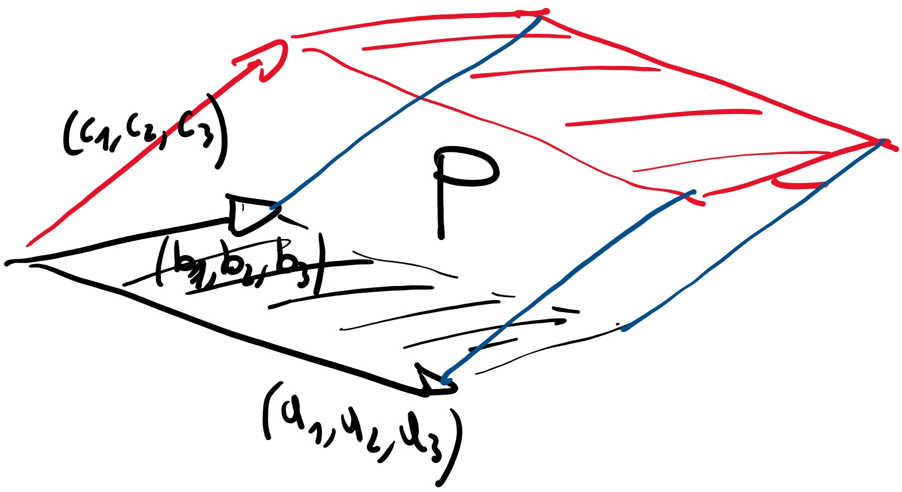
Quindi l'area del parallelogramma P è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$



Quindi i due vettori (a,b) e (c,d) sono linearmente dipendenti se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$.





$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{a_{11}a_{22}}a_{33} + \underline{a_{21}a_{32}}a_{13} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}}$$

$$- \underline{a_{13}a_{22}}a_{31} - \underline{a_{12}a_{21}}a_{33} - \underline{a_{23}a_{32}a_{11}}$$

$$n! \overset{\text{def}}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$$

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$

Segno di una permutazione

Cos'è una permutazione sull'insieme $\{1,\ldots,n\}$?

È semplicemente una funzione biunivoca da $\{1,\ldots,n\}$ in $\{1,\ldots,n\}$.

$$\underset{\mathbb{N}_n}{\overset{\shortparallel}{\{1,\ldots,n\}}} \quad \text{in} \quad \underset{\mathbb{N}_n}{\overset{\shortparallel}{\{1,\ldots,n\}}}$$

Le permutazioni si indicano usualmente

così:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ f(1) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$f(1) = 3$
$f(2) = 1$
$f(3) = 5$
$f(4) = 4$
$f(5) = 2$

Def. Sia p una permutazione di $\{1, \dots, n\}$.

$$\operatorname{sign} p = \begin{cases} +1 & \text{se } p \text{ si può ottenere come un numero pari di inversioni} \\ -1 & \text{se } p \text{ si può ottenere come un numero dispari di inversioni.} \end{cases}$$

Es. $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1 2 3 4 5

$$\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 1 & 2\ 1\ 3\ 4\ 5 \\ 2 & 5\ 1\ 3\ 4\ 2 \\ 3 & 3\ 1\ 5\ 4\ 2 \end{array}$$

$\text{sign}\, p = -1$

Es:

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1 & 2\ 1\ 3\ 4 \\ 2 & 2\ 1\ 4\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1 & 4\ 2\ 3\ 1 \\ 2 & 4\ 3\ 2\ 1 \\ 3 & 2\ 3\ 4\ 1 \\ 4 & 2\ 1\ 4\ 3 \end{array}$$

$\text{sign}\, q = +1$

Ora possiamo definire il det $\underset{(a_{ij})}{\overset{}{A}}$ per una matrice $n \times n$.

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \text{sign}\, p \; a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

S_n è l'insieme di TUTTE le permutazioni

S_n è l'insieme di TUTTE le permutazioni di $\{1, \dots, n\}$.

Es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \sum_{p \in S_2} \underline{\operatorname{sign} p} \; a_{1\,p(1)} \, a_{2\,p(2)}$$

$$\operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det A = 1 \, a_{11} a_{22} + (-1) \, a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es. $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \left\{ \underset{\text{sign} = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{\text{sign} = -1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{\text{sign} = -1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{\text{sign} = -1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\text{sign} = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\text{sign} = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$a_{11}a_{22}a_{33}$

$$+a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Sarrus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

NB: Le permutazioni su $\mathbb{N}_n$ sono $n!$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p(1) & \cdots & & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$$

$$n \cdot (n-1)(n-2) \cdots \cdot 1 = n!$$

Cioè $|S_n| = n!$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 4 + 30 - 28 - 12 - 14 + 20 = 54 - 54 = 0$$

Prop.

$\det A = 0 \iff$ Le righe di A sono lin. dipendenti.

$\iff$ Le colonne di A sono lin. dipendenti.
