

Figura 6.20 Esempio di albero 2-3. I nodi interni con due figli mantengono il massimo del sottoalbero sinistro (S); i nodi interni con tre figli mantengono il massimo del sottoalbero sinistro e di quello centrale (S ed M).

6.4 Alberi 2-3

Nei Paragrafi 6.2 e 6.3 abbiamo visto come usare rotazioni per implementare le operazioni su dizionari in tempo logaritmico (nel caso peggiore o ammortizzato). In questo paragrafo studieremo una tecnica alternativa alle rotazioni, basata sull'idea di permettere una maggiore flessibilità nel grado dei nodi. Se il grado non è vincolato ad essere 2, il bilanciamento può infatti essere mantenuto tramite opportune separazioni (*split*) e fusioni (*fuse*) di nodi.

Definizione 6.6 (Albero 2-3) *Un albero 2-3 è un albero che in cui ogni nodo interno ha 2 o 3 figli e tutti i cammini radice-foglia hanno la stessa lunghezza.*

Dimostriamo innanzitutto una limitazione sull'altezza degli alberi 2-3.

Lemma 6.5 *Sia T un albero 2-3 con n nodi, f foglie ed altezza h . Le seguenti disuaglianze sono soddisfatte da n , f e h : $2^{h+1} - 1 \leq n \leq (3^{h+1} - 1)/2$ e $2^h \leq f \leq 3^h$.*

Dimostrazione. Mostriamo la limitazione contemporaneamente usando induzione su h . Se $h = 0$, l'albero consiste di un singolo nodo, che è anche foglia, e le disuaglianze sono banalmente verificate. Supponiamo ora che l'ipotesi induttiva sia verificata sino ad altezza h e consideriamo un albero 2-3 T di altezza $h+1$. Sia T' ottenuto da T eliminando l'ultimo livello e siano n' e f' il numero di nodi e di foglie di T' , rispettivamente. Per ipotesi induttiva, $2^{h+1} - 1 \leq n' \leq (3^{h+1} - 1)/2$ e $2^h \leq f' \leq 3^h$. Poiché ogni foglia di T' ha almeno due ad al più tre figli in T , avremo $2 \cdot 2^h \leq f \leq 3 \cdot 3^h$, ovvero $2^{h+1} \leq f \leq 3^{h+1}$. Poiché $n = n' + f$, è facile completare la dimostrazione sfruttando l'ipotesi induttiva su n' . \square

Usando la limitazione sul numero di nodi dimostrata nel Lemma 6.5, e passando al logaritmo, otteniamo che l'altezza di un albero 2-3 è $\Theta(\log n)$.

Le chiavi e gli elementi del dizionario sono assegnati alle foglie dell'albero, in modo che le chiavi appaiano in ordine crescente da sinistra verso destra. Ogni nodo interno v mantiene invece due informazioni supplementari: $S[v]$ e $M[v]$. $S[v]$ è la massima chiave nel sottoalbero radicato nel figlio sinistro di v , e $M[v]$ è

```
algoritmo search(radice r di un albero 2-3, chiave x) → elem
1.   if (r è una foglia) then
2.     if (x = chiave(r)) then return elem(r)
3.     else return null
4.    $v_i \leftarrow i\text{-esimo figlio di } r$ 
5.   if (x ≤ S[r]) then return search(v1, x)
6.   else if (r ha due figli oppure x ≤ M[r]) then return search(v2, x)
7.   else return search(v3, x)
```

Figura 6.21 Implementazione dell'operazione `search` in un albero 2-3.

la massima chiave nel sottoalbero radicato nel figlio centrale di v . Un esempio è mostrato in Figura 6.20. Grazie alle informazioni S ed M , una ricerca può essere implementata in una maniera simile agli alberi binari di ricerca classici.

```
search(chiave k) → elem
```

Confrontiamo la chiave cercata k sia con $S[v]$ che con $M[v]$. Se $k \leq S[v]$ proseguiamo nel sottoalbero sinistro; se $S[v] < k \leq M[v]$ proseguiamo nel sottoalbero centrale; altrimenti proseguiamo nel sottoalbero destro. Lo pseudocodice è mostrato in Figura 6.21. Il tempo richiesto da `search` è proporzionale all'altezza dell'albero, che è $\Theta(\log n)$ per il Lemma 6.5.

6.4.1 Fusioni e separazioni di nodi

In questo paragrafo mostreremo come sfruttare le possibili variazioni di grado per aggiornare un albero 2-3 a fronte di inserimenti e cancellazioni di elementi.

```
insert(elem e, chiave k)
```

Creiamo un nuovo nodo u con elemento e e chiave k . Localizziamo la corretta posizione per l'inserimento di u ricercando la chiave k nell'albero. Identifichiamo così un nodo v , sul penultimo livello, che dovrebbe diventare genitore di u . Abbiamo ora due casi:

- v ha due figli: possiamo aggiungere u come nuovo figlio di v , inserendolo opportunamente come figlio sinistro, centrale, o destro in modo da mantenere l'ordinamento crescente delle chiavi. Questo può comportare dover aggiornare i valori S ed M del nodo v e dei suoi antenati.
- v ha tre figli: non potendo aggiungere un ulteriore figlio a v , separiamo il nodo in due, con un'operazione chiamata `split`. Creiamo un nuovo nodo w e calcoliamo la posizione corretta che u dovrebbe avere rispetto ai tre figli di v . Rendiamo le due foglie con chiavi minime figlie di w e le rimanenti due figlie di v . Attacchiamo poi w come figlio del padre di v immediatamente precedente a v . Se il padre di w aveva due figli, possiamo fermarci. Altrimenti, dobbiamo

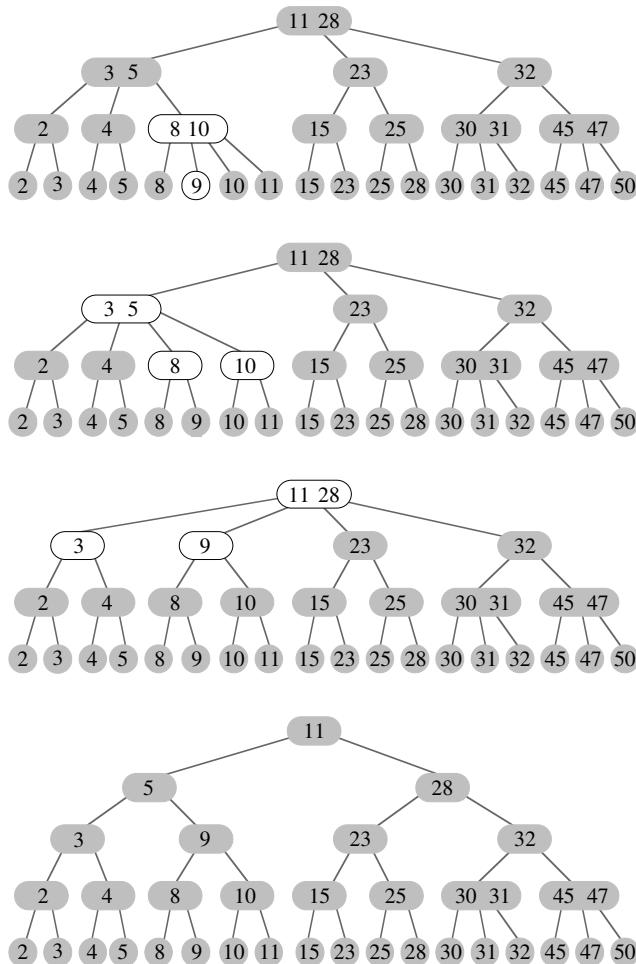


Figura 6.22 Inserimento del nodo con chiave 9 in un albero 2-3.

eseguire un nuovo `split` sul padre di v , procedendo nell’albero verso l’alto. Nel caso peggiore, quando tutti i nodi lungo il cammino avevano già tre figli, aggiungeremo all’albero una nuova radice. I valori S e M dei nodi incontrati lungo la risalita vanno anch’essi aggiornati opportunamente.

Un esempio di inserimento è illustrato in Figura 6.22. Lo pseudocodice della procedura `split`, richiamata su un nodo v con 4 figli, è inoltre mostrato in Figura 6.23 (lo pseudocodice non mostra come aggiornare i campi S ed M di ciascun nodo: aggiungere le opportune istruzioni può essere un utile esercizio). Poiché ciascuno `split` richiede tempo costante e l’altezza dell’albero è $\Theta(\log n)$, nel caso peggiore l’inserimento richiede tempo $O(\log n)$.

```

algoritmo split(nodo v)
1.   crea un nuovo nodo w
2.   sia  $v_i$  l'i-esimo figlio di v in  $T$ ,  $1 \leq i \leq 4$ 
3.   rendi  $v_1$  e  $v_2$  figli sinistro e destro di w
4.   if (parent[v] = null) then
5.     crea un nuovo nodo r
6.     rendi w e v figli sinistro e destro di r
7.   else
8.     aggiungi w come figlio di parent[v] immediatamente precedente a v
9.     if (parent[v] ha quattro figli) then split(parent[v])

```

Figura 6.23 Implementazione della procedura ausiliaria `split` usata per implementare l'inserimento in un albero 2-3.

`delete(elem e)`

L'operazione di cancellazione è simmetrica a quella di inserimento. Sia *v* il nodo contenente l'elemento *e* da eliminare. Abbiamo tre casi:

- *v* è la radice: basta rimuoverla ottenendo un albero vuoto.
- Il padre di *v* ha tre figli: è possibile rimuovere *v*, aggiornando eventualmente i campi *S* e *M* di *v* e dei suoi antenati (vedi Figura 6.24a).
- Il padre di *v* ha due figli: se il padre di *v* è la radice, basta eliminare *v* e suo padre, lasciando l'altro figlio come radice. Altrimenti, eseguiamo una operazione simmetrica allo `split`, che chiameremo `fuse`. Sia *w* il padre di *v*; assumiamo che *w* abbia un fratello *l* alla sua sinistra (nessun nodo può infatti essere figlio unico, e il caso in cui *w* abbia un unico fratello a destra viene trattato in modo

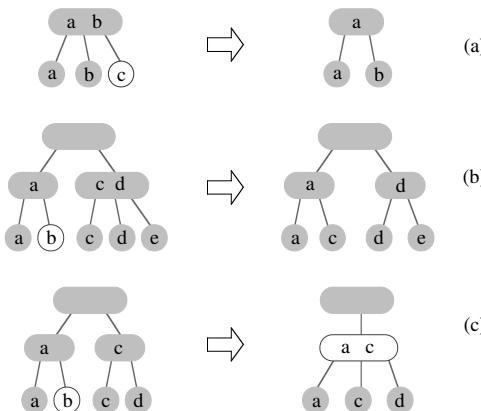


Figura 6.24 Cancellazione da un albero 2-3: vari casi.

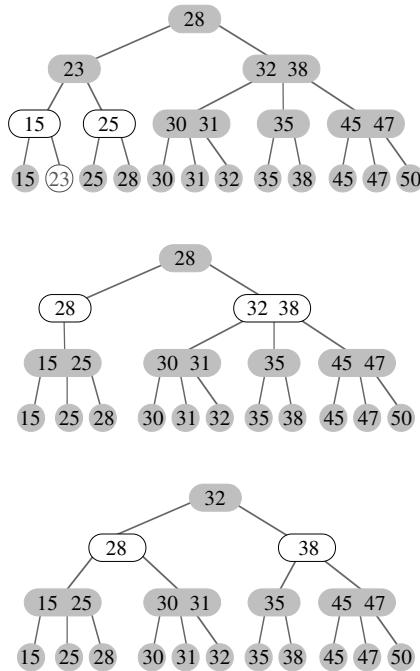


Figura 6.25 Cancellazione del nodo con chiave 23 da un albero 2-3.

simile). Se l ha tre figli, spostiamo il figlio destro di l come figlio sinistro di w e cancelliamo v (vedi Figura 6.24b). Altrimenti, dopo aver rimosso v , attacchiamo l'unico figlio rimanente di w come figlio destro di l e richiamiamo ricorsivamente la procedura per cancellare w (vedi Figura 6.24c).

Un esempio di cancellazione è mostrato in Figura 6.25. Anche in questo caso, poiché ciascuna fusione richiede tempo costante e l'altezza dell'albero è $\Theta(\log n)$, nel caso peggiore la cancellazione richiede tempo $O(\log n)$.

Riassumiamo i dettagli sull'implementazione della classe `Albero23` in Figura 6.26 e le prestazioni degli alberi 2-3 nel seguente teorema.

Teorema 6.5 *Un albero 2-3 con n nodi supporta operazioni `search`, `insert` e `delete` in tempo $O(\log n)$ nel caso peggiore.*

6.5 B-alberi

In questo paragrafo affronteremo il problema di come realizzare un dizionario in memoria secondaria. Come abbiamo visto nel Paragrafo 2.8 del Capitolo 2, la

classe Albero23 **implementa** Dizionario:

dati:

un albero 2-3 T con n nodi: le foglie mantengono le chiavi e gli elementi del dizionario, mentre i nodi interni mantengono le informazioni supplementari S e M .

operazioni:

`search(chiave k) → elem`

$T(n) = O(\log n)$

traccia un cammino nell'albero usando la proprietà di ricerca e le informazioni S e M per decidere se proseguire nel sottoalbero sinistro, centrale (se esiste) o destro.

`insert(elem e, chiave k)`

$T(n) = O(\log n)$

crea un nuovo nodo v con elemento e e chiave k , e lo aggiunge all'albero come foglia mantenendo la proprietà di ricerca. Se il padre di v aveva già tre figli, separa il nodo in due tramite uno `split` e propaga le separazioni verso l'alto, fino al primo nodo con due figli o fino alla creazione di una nuova radice.

`delete(elem e)`

$T(n) = O(\log n)$

elimina il nodo v con elemento e . Se il padre w di v aveva solo due figli, uniscilo al fratello tramite un'operazione `fuse` e propaga le fusioni verso l'alto, fino al primo nodo con tre figli o fino alla cancellazione della radice.

Figura 6.26 Dizionario realizzato mediante alberi 2-3.

memoria secondaria è tipicamente molto più grande di quella principale, ma accedervi è molto più costoso in termini di tempo. È quindi importante minimizzare il numero di letture e scritture su memoria esterna (I/O). Per ammortizzare il tempo speso in ogni accesso, i dati sono gestiti in blocchi di dimensione B : per poter sfruttare questo fatto, è importante che un algoritmo o una struttura dati esibisca località nell'accesso ai dati.

Le implementazioni dei dizionari proposte nei paragrafi precedenti non esibiscono buona località: intuitivamente, non offrono nessuna garanzia che i nodi su un certo cammino di ricerca risiedano nello stesso blocco, e quindi si potrebbero avere $\Theta(\log n)$ I/O nel caso peggiore. Come vedremo, è possibile fare molto meglio. L'idea è di aumentare l'informazione a carico di ciascun nodo ed il grado del nodo rendendoli proporzionali a B . In questo modo, potremo usare tutta l'informazione contenuta in ogni blocco che porteremo in memoria principale, e, poiché diminuiremo considerevolmente l'altezza dell'albero, avremo un numero minore di accessi a memoria secondaria. I B-alberi che presentiamo in questo paragrafo sono dovuti a Bayer e McCreight [4] e sono un'estensione naturale degli alberi 2-3 che abbiamo descritto nel Paragrafo 6.4.