Abbiamo dotato gli spazi vettoriali di prodotti scalari, così ottenendo degli

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

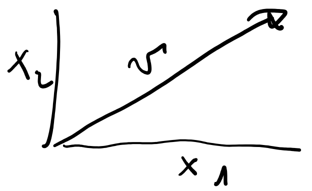
Quando si ha un prodotto scalare $<\cdot,\cdot>$ $(\cdot)$ si ha automaticamente una "norma indotta":

$$\underline{\underline{\|v\| = \sqrt{v\cdot v}}}$$

p.e., in $\mathbb{R}^2$, col prodotto scalare standard si ha che

se $v=(x_1,x_2)$, $\|v\| := \sqrt{v\cdot v} = \sqrt{x_1x_1+x_2x_2} =$

$$= \underline{\underline{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}$$



$$\boxed{(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{Tr A} + \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det A}$$

Quando la matrice simmetrica A viene diagonalizzata $\left(A = E D \, {}^t E \right)$ si ottiene che $Tr A = Tr (E D \, {}^t E)$.

Una proprietà della traccia, che non dimostro, dice che $Tr(BC) = Tr(CB)$.

Dunque

$$Tr(A) = Tr(E D \, {}^t E) = Tr(\underbrace{E \, {}^t E}_{= E^{-1}} D)$$

$$= Tr (D) \leftarrow \text{ha sulla diagonale gli autovalori di } A$$

Questo ci dice che la $Tr(A)$ è la somma degli autovalori di A.

Osserviamo ora che

$$\det A = \det (E D \, {}^t E) =$$

$$= \det(E) \det(D) \det({}^t E)$$

$$= \underline{\det(E) \det({}^t E)} \det(D)$$

$$= \det(E \, {}^t E) \det(D)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad = \underbrace{\det I}_{=1} \det D$$

$$= \det D = \text{prodotto degli autovalori di } A$$

NB: Abbiamo potuto vedere che se A è una matrice simmetrica 2×2, allora i suoi due autovalori sono entrambi positivi se e solo se $Tr(A) > 0$ e $\det(A) > 0$.

$$\sqrt{(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2}$$

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \, \|v_2\| \underline{\cos \widehat{v_1 v_2}}$$

$$\cos \widehat{v_1 v_2} = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \, \|v_2\|}$$

Le norme associate a prodotti scalari godono di queste proprietà:

1) $\|v\| \geq 0$

2) $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{v \cdot v} = 0 \Rightarrow v \cdot v = 0$$

3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

4) $|v_1 \cdot v_2| \leq \|v_1\| \, \|v_2\|$

5) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

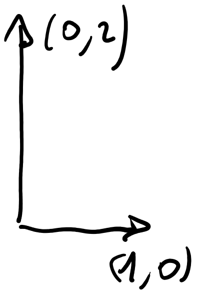
Base ortogonale = base di V fatta

$$\underset{\shortparallel}{(v_1, \ldots, v_n)}$$

Base ortogonale = base di V fatta di vettori a due a due ortogonali

($v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$)

Es.



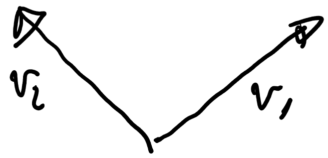
Base ortonormale = base ortogonale i cui vettori hanno tutti norma 1.

$$\mathbb{R}^2 \quad , \quad B = \Bigg(\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}_{v_1} , \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}_{v_2} \Bigg)$$

$$v_1 \cdot v_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\|v_1\| = 1$$

$$\|v_2\| = 1$$

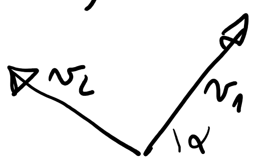


$$B' = \Big(\underbrace{(\cos\alpha, \sin\alpha)}_{v_1'} , \underbrace{(-\sin\alpha, \cos\alpha)}_{v_2'} \Big)$$

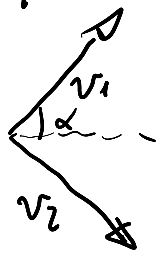
$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

$$\|v_1'\| = 1$$

$$\|v_2'\| = 1$$



$$B'' = \big((\cos\alpha, \sin\alpha), (\sin\alpha, -\cos\alpha) \big)$$



Le coordinate rispetto a una base ortonormale $B = (v_1, \dots, v_n)$ si calcolano molto facilmente.

$$\underline{v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}$$

$$v \cdot v_1 = x_1 v_1 \cdot v_1 + \cancel{x_2 v_2 \cdot v_1} + \cancel{x_3 v_3 \cdot v_1} + \dots + \cancel{x_n v_n \cdot v_1}$$

$$= x_1 v_1 \cdot v_1$$

$$= x_1$$

$$\Downarrow$$

$$x_i = v \cdot v_i$$

$\mathbb{R}^2$

$$B = \Big(\underbrace{\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{v_1}, \underbrace{\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{v_2} \Big)$$

calcolare le coordinate di $(1,5)$ risp. a B.

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x_1 v_1 + x_2 v_2 = v \end{cases}$$

Per calcolare le basi ortonormali si usa il "procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt"

$$B = (v_1, v_2)$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow \|w_1\| = 1$$

$$\|v_2\| \cos\alpha \, w_1$$

$$(v_2 \cdot w_1) w_1$$

$$\hat{w}_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1) w_1$$

$$w_2 = \frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$w_2 = \frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} \quad \text{con} \quad \hat{w}_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1)\, w_1$$

La base (w_1, w_2) è ortonormale

Esempio. Calcolare una base ortonormale per il sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x+y+z=0$.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -s-t \end{cases}$$

Base per U: $\Big(\underset{v_1}{(1,0,-1)}, \underset{v_2}{(0,1,-1)}\Big)$

$v_1 \cdot v_2 = 1 \neq 0$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{w_1}$$

$$\hat{w}_2 = v_2 - \underline{(v_2 \cdot w_1)}\, w_1$$

$$= (0,1,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0,1,-1) + \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}_{\hat{w}_2} \qquad \|\hat{w}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$w_2 = \frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} =$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}_{w_2} \perp \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{w_1}$$

Nel caso generale si ha

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$w_2 = \frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} \quad \text{con } \hat{w}_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1)\, w_1$$

$$w_3 = \frac{\hat{w}_3}{\|\hat{w}_3\|} \quad \text{con } \hat{w}_3 = v_3 \underline{- (v_3 \cdot w_1) w_1 - (v_3 \cdot w_2) w_2}$$

$$\vdots$$

$$w_h = \frac{\hat{w}_h}{\|\hat{w}_h\|} \quad \text{con} \quad \hat{w}_h = v_h - \underline{(v_h \cdot w_1)} w_1 - \dots - \underline{(v_h \cdot w_{h-1})} w_{h-1}$$

Osservazione. Come "dicevo" il prodotto scalare quando si esprimono i vettori mediante una base ortonormale $(v_1, \dots, v_n)$.

$$v' = x_1' v_1 + \dots + x_n' v_n$$

$$v'' = x_1'' v_1 + \dots + x_n'' v_n$$

Quanto vale $v' \cdot v''$?

$$v' \cdot v'' = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' v_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j'' v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i' x_j'' v_i \cdot v_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i' x_i'' \cdot \underset{v_i \cdot v_i}{\overset{\|}{1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i' x_i''$$

$n=1$

Cioè ogni prodotto scalare "diventa" il prodotto scalare standard quando si usa una base ortonormale.

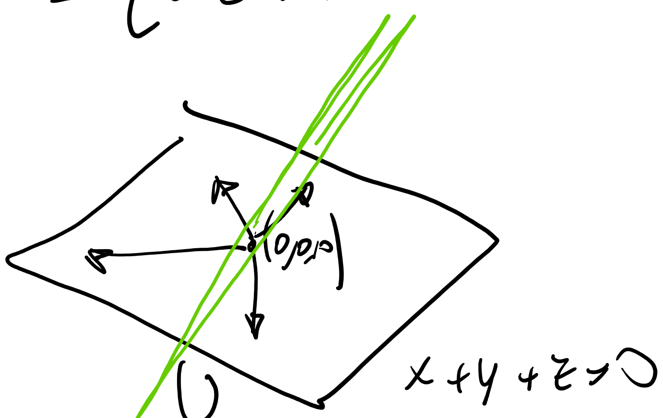
COMPLEMENTI ORTOGONALI

Sia U un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale euclideo V.

Def. Si dice complemento ortogonale di U (e si indica con $U^{\perp}$) l'insieme

$$U^{\perp} = \{ v \in V : v \cdot u \ \forall u \in U \}$$

Es. $\mathbb{R}^3$



U:

$$\left\{ x+y+z=0 \right. \iff \left\{ (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0 \right.$$

È molto facile, apportando di

trovare con una base ortonormale di V che completi una base ortonormale di U, scrivere un'equazione cartesiana di $U^\perp$.

Basta prendere la base ortonormale B_U di U $B_U = (v_1, \dots, v_k)$ e scrivere:

$$\begin{cases} v \cdot v_1 = 0 \\ v \cdot v_2 = 0 \\ \vdots \\ v \cdot v_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v \in U^\perp$$

$U: x + y + z = 0$

$B_U = \underline{((1, 0, -1), (0, 1, -1))}$ $\qquad v = (x, y, z)$

$U^\perp$:

$$\begin{cases} v \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ v \cdot (0, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$U^\perp : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ numero r di equazioni lin. indip. è $\dim U$

$$\dim U^\perp = \dim Sol\, S = \dim V - \underset{\dim U}{\underset{\shortparallel}{r}}$$

Quindi

$$\underline{\dim U^\perp = \dim V - \dim U}$$

Notare che $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

MATRICI ORTOGONALI

Def. Una matrice E si dice ortogonale se $E\,{}^tE = I = {}^tE\,E$

$$\underset{E}{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} \underset{{}^tE}{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se E è ortogonale

$$1 = \det I = \det({}^tE\,E) =$$

$$= \det E \det {}^tE$$

$$= \det E \det E$$

$$= (\det E)^2$$

Quindi le matrici ortogonali hanno determinante ± 1,

A che serve questo concetto?

Prendiamo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Consideriamo la trasf. lineare associata a una matrice ortogonale E.

Prima della trasformazione lineare

il prodotto scalare è

$$\boxed{{}^tX\,Y} \qquad (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$${}^t(EX)(EY)$$

$$= ({}^tX\,{}^tE)(E\,Y)$$

$$= {}^tX({}^tE\,E)\,Y$$

$$= {}^tX\underbrace{({}^tE\,E)}_{=I}Y$$

$$= {}^tX\, I\, Y$$

$$= {}^tX\, Y$$

Cioè le matrici ortogonali descrivono le trasformazioni lineari che non cambiano i prodotti scalari (e quindi non cambiano neppure le norme indotte e gli angoli)

RELAZIONE DI GRASSMANN

Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V.
Allora vale questa uguaglianza:

$$\underbrace{\dim U+W}_{3} = \underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} - \underbrace{\dim U\cap W}_{1}$$

Esempio in $\mathbb{R}^3$

$U=\pi_1 : \{ x+y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=-s-t \end{cases}$ $B_{\pi_1}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

$W=\pi_2 : \{ x-y-2z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=s \\ y=s-2t \\ z=t \end{cases}$ $B_{\pi_2}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

Un sistema di generatori per $U+W$ è dunque: $S=\left((1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,0),(0,-2,1)\right)$

dunque: $S = ((1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,0),(0,-2,1))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi una base per $V+W$ è ~~la~~ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\dim V+W = 3$.

$$U \cap W : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \qquad r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim U \cap W = 3 - 2 = 1$$

Numeri complessi

I numeri complessi sono i numeri del tipo

$$a + ib$$

$$a + i b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

e $i^2 = -1$

Le somme e i prodotti si eseguono come con i polinomi, però sostituendo i^2 con -1.

$$(3+2i)\cdot(1+i) = 3+3i+2i+2i^2 =$$

$$= 3+5i-2$$

$$= 1+5i$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rotazione di $90°$ nel piano reale

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2+1$$

$$(1-\lambda)^2+1 \iff (1-\lambda)^2 = -1 \iff 1-\lambda = \pm i$$

$$\lambda = 1 \mp i$$

$$i^2 = -1$$

$\lambda = 1 \mp i$

$i^2 = -1$

$(-i)^2 = -1$

A si può diagonalizzare sui $\mathbb{C}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

Regola di Cramer

È un modo alternativo di risolvere i sistemi lineari di n equazioni in n incognite

$$AX = B$$

con $\det A \neq 0$.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

$$x = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \frac{3}{8}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}{8} = \frac{23}{8}$$

$$3x + y = \frac{9}{8} + \frac{23}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$-2x + 2y = -\frac{6}{8} + \frac{46}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

ORIENTAZIONE DI UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -6 < 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Teor. Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$, allora 1 è autovalore di A.

$$\det {}^tA = \det A = 1$$

Binet

$$\det(A - I) = \underbrace{\det {}^tA}_{1} \det(A - I) =$$

$$\det({}^tA(A - I)) \quad \det({}^tA\,A - {}^tA)$$

A è ortogonale

$$= \det\left({}^tA(A - I)\right) = \det\left({}^tAA - {}^tA\right) =$$ A è ortogonale

$$= \det(I - {}^tA) = \det({}^tI - {}^tA) = \det({}^t(I - A))$$

$$= \det(I - A) = \det(-(A - I)) = -\det(A - I)$$

$$\Downarrow$$

$$\det A - I = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A - 1I) = 0$$

cioè 1 è autovalore di A,