Nell'ultima lezione vi ho detto come rappresentare un sistema lineare mediante una matrice (detta matrice completa).

Esempio: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ matrice completa

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice incompleta

Mondo dei sistemi lineari

$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ Gauss ⇒

$\begin{cases} \equiv \\ \equiv \end{cases}$ sistema incompatibile (ritorna vuoto)

Mondo delle matrici

$C \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⋮

C' matrice completa ridotta

$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\downarrow R_2 \leftarrow R_1 - R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$

$\begin{cases} x+y \quad = \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Prima di come invogliere (e quindi mantenere a sinistra nel sistema) le variabili immaginate di si pivot. Poiché come pivoteché le altre variabili.

$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ Sistema risolto

Per esempio $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$

matrice ridotta

$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

matrice non compl. ridotta

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Metodo di Gauss-Jordan

(x, y, z, w, v)

$\begin{cases} x+y-z-4v+v=1 \\ 2x+y+z+2w \quad = 0 \\ x-y \quad +v=2 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & -4 & -2 \end{array}\right)$ $R_1 \leftrightarrow R_3$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$ $R_1 \leftarrow -\frac{1}{3} R_2$, $R_3 \leftarrow -\frac{1}{2} R_3$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$ $R_2 \leftarrow R_1 + \frac{1}{3} R_3$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$ $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$ $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$

Matrice in forma completamente ridotta

x, y, z sono incognite

w, v sono parametri

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} s \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} s \\ z = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} t - \frac{2}{3} s \\ w, v \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} s, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} s, -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} t + \frac{2}{3} s\right)$

$\begin{cases} x+2y-z-w=1 \\ 3x-y \quad +z+2w=2 \\ 5x+3y \quad -z \quad =8 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 8 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ → $r(A) = 2 \neq 3 = r(C)$ → $\begin{cases} \equiv \\ \equiv \\ 0x+0y+0z+0w=4 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

in incognite: x, y, ...

NON FUNZIONA!

Osservazione: il metodo risolutivo funziona se e solo se non ci sono pivot nell'ultima colonna (stiamo partendo dalla matrice compl. ridotta)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & a \end{array}\right)$ ⇒ $a \neq 0$, $0 = a$

Il numero di pivot in una matrice ridotta A si dice

RANGO di A

$r(A)$

$rk(A)$

$rank(A)$

$\rho(A)$

Teorema di Rouché-Capelli:

Un sistema lineare è risolvibile (cioè ammette soluzioni) se e solo se $r(A) = r(C)$ dove C è la matrice completa della sistema compl. ridotta e A è la matrice incompleta " " " "

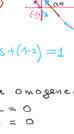
$S \begin{cases} x+y=1 \\ \equiv \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \end{cases}$

$Sol_S = \{(-t+1, t) : t \in \mathbb{R}\}$

$\begin{pmatrix} -t+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = s \\ y = 1-s \end{cases}$

$\rightarrow s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x+y = s+(1-s) = 1$

Sistema lineare omogeneo

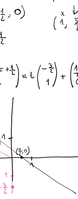
$\begin{cases} \equiv 0 \\ \equiv 0 \\ \vdots \\ \equiv 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ← $(0,0,0)$

Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono soluzioni.

$\{ax+by=c$

$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ (0, \frac{1}{3}) \quad (\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$ $\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$

$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = t \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$