$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Osservazione importante: nella matrice associata a una trasformazione lineare $f: V \to W$ si leggono, colonna per colonna, le coordinate dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ rispetto alla base $B_W = (w_1, \dots, w_m)$ di W (qui $(v_1, \dots, v_n)$ è la base B_V scelta per V).

$$A = M_{B_V B_W}(f)$$

Quando $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e si usano le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le colonne di $M_{B_V B_W}(f)$ sono esattamente i vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad B_{\mathbb{R}^2} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_{\mathbb{R}^2} B_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = ?$

$\underline{\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(e_1), \dots, f(e_n))}$ Sì

Infatti, se $v \in V$, allora

$$\underline{v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(v) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

$$\cap$$

$$\operatorname{Im} f$$

Ciò ci dice che, nel nostro esempio, $\operatorname{Im} f$ è generato dalle colonne della matrice associata.

Nel nostro esempio

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(\underline{(4,-1),(-8,2)})$$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ (x,y) : \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(\left(1, -\frac{1}{4}\right)\right)$$

Per ottenere una rappresentazione

Per ottenere una rappresentazione cartesiana di Im f si eliminano i parametri dalla rappr. parametrica.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = -\frac{1}{4} s \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} x + y = 0$$

$$\boxed{x - 4y = 0}$$

Altro esempio.

Consideriamo $f : \underset{V}{\mathbb{R}^{\leq 2}[x]} \to \underset{W}{\mathbb{R}^3}$

$$\boxed{f(\underbrace{a + bx + cx^2}_{p}) = (p(0), p(1), p(2))}$$

$$\boxed{B_V = (2x^2 + x + 1, 3x - 1, 5)} \qquad B = (\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{x}, \overset{v_3}{x^2})$$

$B_{\mathbb{R}^3} = ((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1))$

$\underline{2x^2 + x + 1} = 1 v_1 + 1 v_2 + 2 v_3 \underset{B}{\equiv} \underline{(1, 1, 2)}$

$\underline{3x - 1} = -1 v_1 + 3 v_2 \underset{B}{\equiv} \underline{(-1, 3, 0)}$

$\underline{5} = 5 v_1 \underset{B}{\equiv} \underline{(5, 0, 0)}$

$$|1 \quad 1 \quad 2| \qquad (1 \quad 1 \quad 2) \qquad (1 \quad 0 \quad 0|$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$f\left(2x^2 + x + 1\right) = \boxed{(1, 4, 11)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 4 \\ x + y + z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$M_{B_V B_W}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$f\left((3x - 1)\right) = \boxed{(-1, 2, 5)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{f(5) = (5, 5, 5)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$v \longmapsto w = f(\;)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \underline{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} = M_{B_V B_W}(f) \underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{f(v) = 0_W}$$

$$\boxed{A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Equazione cartesiana del ker f:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\\7\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\3\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}5\\0\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

Come usare l'equazione dimensionale

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\substack{\parallel \\ n}}{\dim V}$$

per calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\dim \operatorname{Sol}(S) = 3$$

Dall'eq. dimensionale ricaviamo che

$$\underline{\dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f}$$

Osserviamo che il nostro sistema S si può ~~scrivere~~ così..

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ la trasf. lineare descritta dalla matrice A rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$.

Allora $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{sol } S$

Nel nostro esempio $n = 5$.

Per calcolare $\dim \operatorname{Im} f$, scriviamo una matrice le cui righe siano le colonne di A.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Riduciamo completamente la matrice H

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$

Perciò $\dim \text{Sol } S = \dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f$
$= 5 - 2 = 3$

A fianco delle "operazioni riga" ci sono le analoghe "operazioni colonna".
Accanto alle "matrici completamente ridotte per riga" ci sono le "matrici compl. ridotte per colonna".
Accanto ai "pivot per riga" ci sono i "pivot per colonna".
Accanto al "rango per righe" (cioè il numero di pivot per riga) c'è il "rango per colonna" (cioè il numero di "pivot per colonna".

Teorema: Il rango per righe coincide col rango per colonne.

Dim. La dimostrazione è basata su questo fatto:
Le trasformazioni riga non cambiano queste due cose:
1) Lo spazio generato dalle righe

1) Lo spazio generato dalle righe
2) La dimensione dello spazio generato dalle colonne.

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Immaginiamo ora di eseguire op. riga e op. colonna fino ad arrivare, una matrice che sia allo stesso tempo ridotta per righe e per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

Per la matrice che otteniamo è ovvio che il rango per righe è uguale al rango per colonne.

Es: Riduciamo questa matrice per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$