Abbiamo visto insieme che una volta che si ha una base spettrale per l'endomorfismo f e la si sceglie come base di riferimento per il calcolo della matrice A associata a f, la matrice A <u>diviene</u> diagonale.

Sia B una base qualunque di V e B' una base spettrale di $f: V \to V$.

Allora $M_{B'B'}(f)$ è diagonale

Qual è la relazione tra $A = M_{BB}(f)$ e $A' = M_{B'B'}(f)$.

Se X' è la colonna delle coordinate di un autov. risp. a B.

$$\underline{A X' = \lambda X'}$$

dove λ è l'autovalore corrispondente.

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \underline{\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

autovalori: 1, 2

$$U_1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \{ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \end{cases}$$

$$U_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_1 = \langle (1,0) \rangle$$

$$U_2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_2 = \langle (1,1) \rangle$$

Una base spettrale B' è, pertanto,

$$B' = ((1,0),(1,1))$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \lambda_1 X_1, & \lambda_2 X_2 \end{pmatrix}}$$

$$f(v_1) \quad f(v_2)$$

$f(v_1) \quad f(v_2)$

Chiamiamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le coordinate di un generico vettore v rispetto a $B = (v_1, v_2)$ e chiamiamo $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ le coordinate di v rispetto a $B' = (v_1', v_2')$

$$\boxed{x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1' v_1' + x_2' v_2'}$$

vettori della base canonica $\qquad$ vettori della base spettrale

$$\boxed{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1' + 1x_2' \\ 0x_1' + 1x_2' \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Box & \Box & \cdots & \Box \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Box & \Box & \cdots & \Box \end{pmatrix}}_{M'} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = M'^{-1} M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} I \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

matrice del cambiamento di base da B a B'.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{M_{B'B'}(f)} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{= I}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Questo uguaglianza può essere scritto anche rispetto alla base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ciò implica che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}}_{B^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A'}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A = B^{-1} A' B$$

$$A = E\,A\,E$$

Quando si ha un'uguaglianza di questo tipo si dice che le matrici A e A' sono fra loro SIMILI.

Ripeto:

$$f : V \to V$$

$$\begin{array}{cc} B & B \\ B' & B' \end{array}$$

$$\underline{M_{BB}(f)} = \underline{E}^{-1}\ \underline{M_{B'B'}(f)}\ E$$

matrice del cambiamento di base da B a B'

$$\underline{E}\ \underline{M_{BB}(f)}\ \underline{E}^{-1} = \underline{M_{B'B'}(f)}$$

Il teorema che asserisce che la matrice dell'endomorfismo $f: V \to V$ rispetto a una base spettrale è diagonale si può in modo equivalente esprimere nel linguaggio delle matrici dicendo che la matrice $M_{BB}(f)$ è simile a una matrice diagonale (cioè, per definizione, è diagonalizzabile).

una matrice diagonale (cioè, per definizione, diagonalizzabile).

$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2)$

$$M_{B'B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}}_{B^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{B}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{E} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}}_{E^{-1}}$$

Esercizio. Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

Cioè, esiste una matrice E tale che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} E^{-1}$$

Ciò è del tutto equivalente a chiedere se l'endomorfismo descritto da chiedere se l'endomorfismo descritto da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ risp. alla base canonica ammette una base spettrale.

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}} = (1-\lambda)^2-2 = \lambda^2-2\lambda+1-2 = \lambda^2-2\lambda-1$$

$$\Delta = 4 + 4 > 0 \quad = 8$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Poiché abbiamo 2 autovalori distinti, esiste una base spettrale, dunque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} E^{-1}$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1' v_1' + x_2' v_2'$$

$$U_{1+\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} 1-(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 2 & 1-(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\, x_1 + 1\, x_2 = 0 \\ 2 x_1 - \sqrt{2}\, x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\, x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = \sqrt{2}\, s \end{cases}$$

$$\left\{ x_2 = \sqrt{2}\, s \right.$$

$$U_{1+\sqrt{2}} = \langle \underset{v_1'}{\underset{\shortparallel}{(1, \sqrt{2})}} \rangle$$

$$U_{1-\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} 1-(1-\sqrt{2}) & 1 \\ 2 & 1-(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + \sqrt{2}\, x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \sqrt{2}\, x_1 + x_2 = 0 \right.$$

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -\sqrt{2}\, s \end{cases}$$

$$U_{1-\sqrt{2}} = \langle \underset{v_2'}{\underset{\shortparallel}{(1, -\sqrt{2})}} \rangle$$

Qual è la matrice B del cambiamento di base dalla canonica B alla base di base dalla canonica B alla base spettrale B'?

$$B = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$$

$$B' = (v_1', v_2') = ((1,\sqrt{2}),(1,-\sqrt{2}))$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1'\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + x_2'\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1'+x_2'\\\sqrt{2}x_1'-\sqrt{2}x_2'\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1\\-\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}}{2\sqrt{\ }} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4}\\\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\quad 1}{-2\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}}_{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} E^{-1}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Prodotti scalari}}$

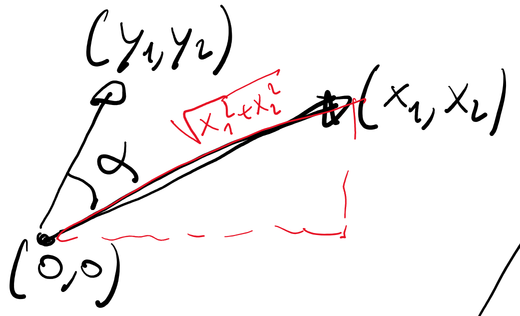
Prodotto scalare standard:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Su $\mathbb{R}^2$

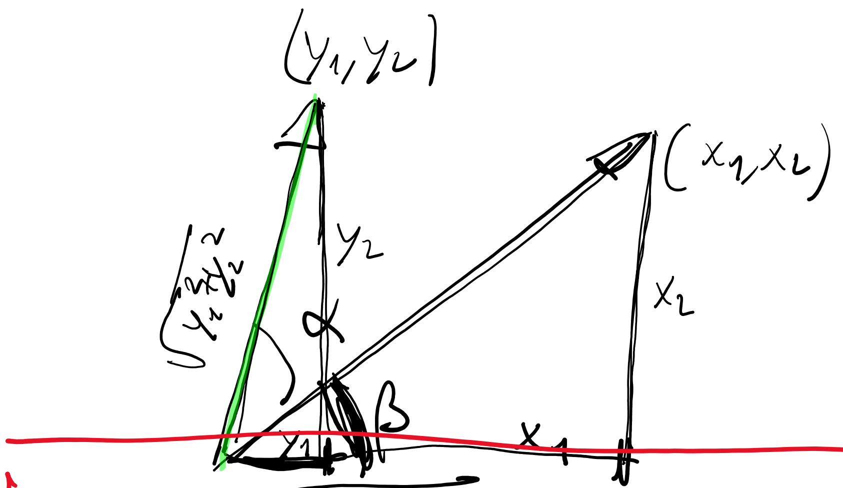
$$\underline{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2}$$



$$\underline{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\ \cos\alpha}$$

$$=$$

$$\boxed{x_1 y_1 + x_2 y_2}$$



$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{y_1^2+y_2^2}\,\cos(\alpha+\beta) \\ x_1 &= \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\cos\beta \\ y_2 &= \sqrt{y_1^2+y_2^2}\,\sin(\alpha+\beta) \\ x_2 &= \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sin\beta \end{aligned}}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 =$$

$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos\beta\sqrt{y_1^2+y_2^2}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right)$$

$$+ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sin\beta\sqrt{y_1^2+y_2^2}\left(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\right)$$

$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}\left(\cos\alpha\cos^2\beta - \cancel{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}\right.$$

$$\left. + \cancel{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta} + \sin^2\beta\cos\alpha\right)$$

$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}\cos\alpha\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right)$$

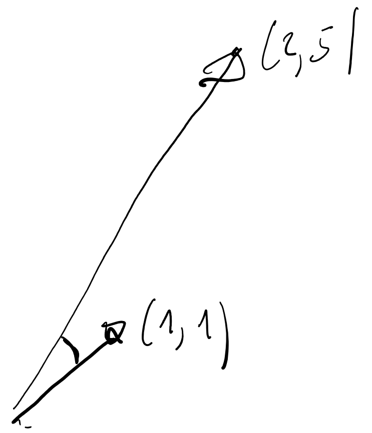
$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2}\,\cos\alpha\,(\cos\beta+\sin\beta)$$

$$=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2}\,\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 = $ (lunghezza primo vettore)$\cdot$(lungh. secondo vett.) $\cdot \cos\alpha$.

Calcolate il coseno dell'angolo fra i due vettori $(1,1)$ e $(2,5)$



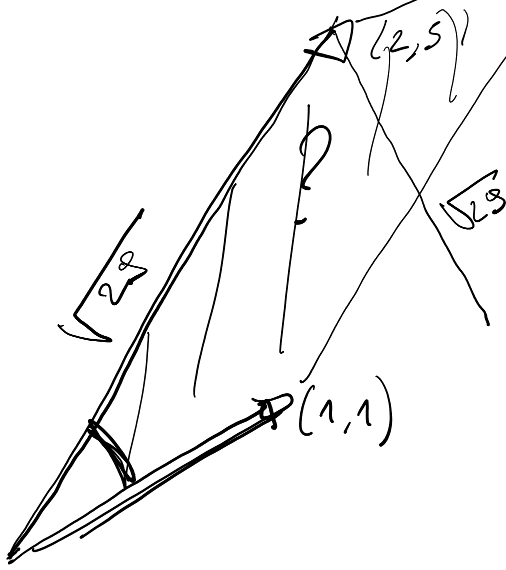
$$7 = (1,1)\cdot(2,5) = \sqrt{2}\,\sqrt{29}\,\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\;}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_2^2}\cos\alpha$$



$$\sqrt{29}\sin\alpha = \sqrt{29}\sqrt{\frac{9}{58}}$$

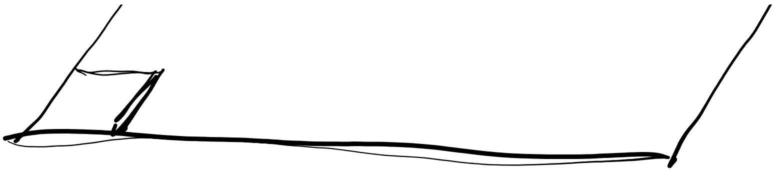
$$= \sqrt{29}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{29}}$$

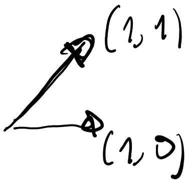
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{7^2}{58}}$$

$$= \sqrt{\frac{58-49}{58}} = \sqrt{\frac{9}{58}}$$

$$A_{\text{red}} = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} = 3$$





$$1 = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1\,\sqrt{2}\,\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$