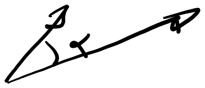


$$\cos\alpha = \frac{\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle}{\|(x_1,x_2)\|\ \|(y_1,y_2)\|}$$

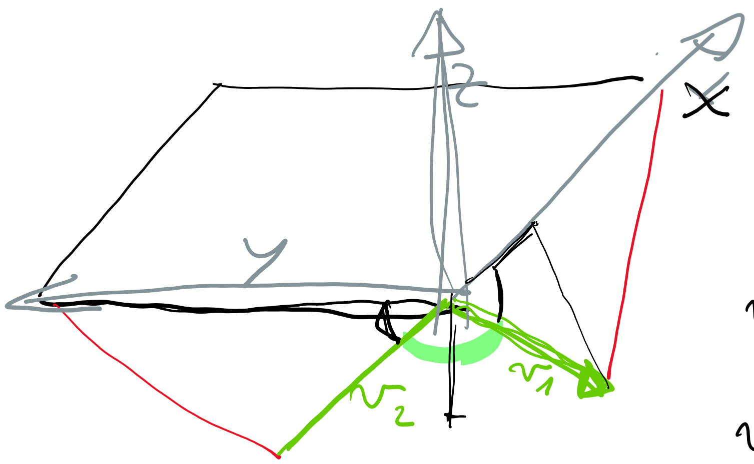
$\mathbb{R}^2$
$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}\cos\alpha$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \|(x_1,x_2)\| \qquad \sqrt{y_1^2+y_2^2} = \|(y_1,y_2)\|$$

$\mathbb{R}^3$
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\ \cos\alpha$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \|(x_1,x_2,x_3)\| \qquad \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} = \|(y_1,y_2,y_3)\|$$

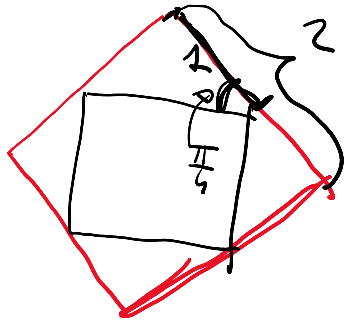


$\|v_1\| = 1$

$\|v_2\| = 1$

$v_1 = \left(\frac{\sqrt2}{2}, 0, -\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$v_2 = \left(0, \frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)$



$$v_1 = \left(\frac{\sqrt2}{2}, 0, -\frac{\sqrt2}{2}\right) \qquad v_2 = \left(0, \frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

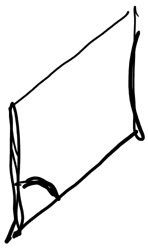
$$\cos\widehat{v_1v_2} = \frac{\left\langle \left(\frac{\sqrt2}{2}, 0, -\frac{\sqrt2}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)\right\rangle}{\left\|\left(\frac{\sqrt2}{2}, 0, -\frac{\sqrt2}{2}\right)\right\|\ \left\|\left(0, \frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)\right\|}$$

$$\|(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})\| \, \|(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})\|$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}\,\sqrt{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Prodotti scalari



Come possiamo generalizzare il concetto di prodotto scalare standard?

Def. Si dice <u>prodotto scalare</u> una <u>forma bilineare</u> <u>simmetrica</u> <u>definita positiva</u>.

Forma bilineare: $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Se fissi la prima variabile la f è lineare nella seconda. Se fissi la seconda, f è nella seconda. Se fissi la seconda, f è lineare nella prima,

$$f(\bar{v}, \alpha v_1+\beta v_2) = \alpha f(\bar{v}, v_1) + \beta f(\bar{v}, v_2)$$

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$f\big((a,b),(y_1,y_2)\big) = a y_1 + b y_2$$

$$f\Big((a,b), \underbrace{\alpha(y_1,y_2)+\beta(y_1',y_2')}_{(\alpha y_1+\beta y_1',\ \alpha y_2+\beta y_2')}\Big) = \boxed{a(\alpha y_1+\beta y_1') + b(\alpha y_2+\beta y_2')}$$

$$\alpha f\big((a,b),(y_1,y_2)\big) + \beta f\big((a,b),(y_1',y_2')\big) =$$

$$= \boxed{\alpha(a y_1 + b y_2) + \beta(a y_1' + b y_2')}$$

$$= \alpha a y_1 + \alpha b y_2 + \beta a y_1' + \beta b y_2'$$

$$a\alpha y_1 + a\beta y_1' + b\alpha y_2 + b\beta y_2' =$$

$$f\big(\alpha(x_1,x_2)+\beta(y_1,y_2),(a,b)\big) =$$

$$= \alpha f((x_1, x_2), (a, b)) + \beta f((y_1, y_2), (a, b))$$

NB: il prodotto scalare standard

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \underline{x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

è bilineare, <u>non</u> lineare.

Def. La forma bilineare $f: V \times V \to \mathbb{R}$ si dice simmetrica se

$$f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1) \quad \text{per ogni}$$

coppia $(v_1, v_2) \in V \times V$.

NB: $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$$\langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2$$

Def. Una forma bilineare simmetrica si dice <u>definita positiva</u> se

$\underline{f(v, v) > 0}$ per ogni vettore non nullo.

Es. $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2$

Come si fa a ottenere un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$?

1) Prendi una matrice simmetrica $A_{n\times n}$.

Per esempio, per $n=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Definisci questa funzione $f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \to \underline{\mathbb{R}}$

$$f\Big(\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{X},\underbrace{(y_1,\dots,y_n)}_{Y}\Big) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x_1 \dots x_n)}_{1\times n}\underbrace{A}_{n\times n}}_{1\times n}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}}_{1\times 1}$$

Osserviamo che f è una forma bilineare simmetrica.

Forma bilineare:

$$f(X,Y) \overset{def}{=} X A \, {}^tY$$

$$f(X_1+X_2,Y) = (X_1+X_2)A \, {}^tY =$$

$$= X_1 A \, {}^tY + X_2 A \, {}^tY$$

$$= X_1 A\,{}^tY + X_2 A\,{}^tY$$

$$= f(X_1, Y) + f(X_2, Y)$$

$$f(\alpha X, Y) = (\alpha X) A\,{}^tY =$$

$$= \alpha \left(X A\,{}^tY\right)$$

$$= \alpha f(X, Y)$$

Analogamente si vede che f è lineare nella seconda variabile fissata la prima.

Quindi f è una forma bilineare.

Ma f è anche simmetrica:

$$f(X,Y) = \underline{X A\,{}^tY} = {}^t\left(X A\,{}^tY\right) =$$

$$= {}^t\left({}^tY\right)\,{}^tA\,{}^tX = Y\,{}^tA\,{}^tX =$$

$$= Y A\,{}^tX$$

$$= f(Y, X)$$

$$f(X,Y) = X A\,{}^tY$$

simmetrica

T
simmetrico

$$(x_1\ \ x_2)\underline{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}} = \underset{1\times 2}{(x_1\ \ x_2)}\ \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}y_1+2y_2\\ 2y_1+y_2\end{pmatrix}} =$$

forma bilineare simmetrica

$$= \underset{1\times 1}{x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2}$$

Per vedere se questa forma bilineare simmetrica è definita positiva prendo $(y_1,y_2)=(x_1,x_2)$

Ottengo $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + x_2^2$

cioè $\underline{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2}$

Proviamo con $x_1=-1 \quad x_2=1$

$$1-4+1=-2<0$$

Proposizione. Sia f la forma bilineare simmetrica sull'$\mathbb{R}^n$ associata alla matrice simmetrica A

$$f(x,y) = xA\,{}^t y$$

Allora f è definita positiva se e solo se

Allora f è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.

Torniamo all'esempio appena visto.

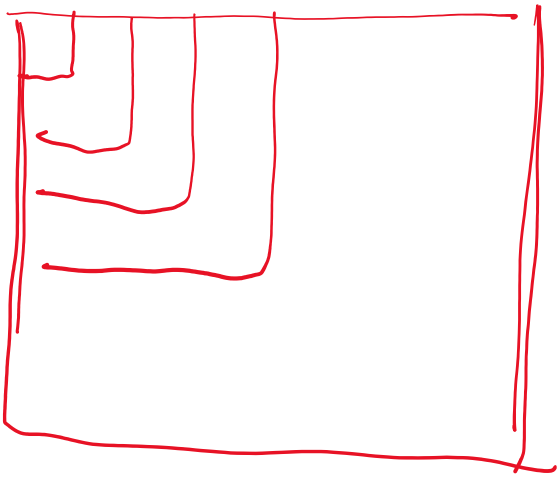
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$(1-\lambda)^2 = 4 \iff 1-\lambda = \pm 2 \quad \begin{matrix} \lambda = 1+2 = 3 \\ \lambda = 1-2 = -1 \end{matrix}$$

C'è un teorema che permette di capire se tutti gli autovalori di A sono positivi senza calcolare il polinomio caratteristico e le sue radici.

Teorema. f_A è def. pos. se e solo se i determinanti di tutti i minori principali sono positivi.



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nel caso della matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i minori

principali sono (1) e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(1) = 1 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1-4 = -3 < 0$

Attenzione: Se A è simmetrica, per il teorema spettrale esiste una base di autovettori.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 & \cdots & \lambda_n c_n \end{pmatrix} = A \overbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}}^{E}$$

autovettori

$$\| $$

$$ED \qquad \text{dove } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}} & 2 \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$ED = AE$$

matrice diagonale

diagonale
degli autovalori

Moltiplicando questa uguaglianza per E^{-1} a sinistra si ottiene questa relazione:

$$\boxed{D = E^{-1} A E} \iff \boxed{E D E^{-1} = A}$$

Dunque la matrice A è simile alla matrice diagonale D.

Il problema che avevamo nell'esercizio sulla forma bilineare simmetrica era il segno di $f(X,X) = X A {}^tX = X E D E^{-1} {}^tX$

NB si può supporre che la matrice E usata nel teorema spettrale abbia questa proprietà:

$$E^{-1} = {}^tE$$

(si dice che E è ortogonale)

ortogonale)

Quindi

$$f(X,X) = XED{}^tE{}^tX$$

$$= (XE)D{}^t(XE)$$

Ponendo $\underline{XE} = Y \quad D{}^tY$

$$(y_1, \dots, y_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \alpha_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2 \overset{?}{>} 0$$

Esercizio :

$$f(X,Y) = (x_1, \cancel{x_2}, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

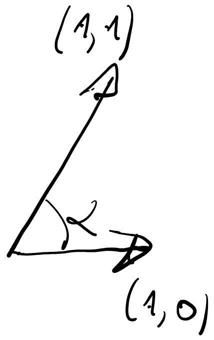
è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$?

Esempio di un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 5 x_2 y_2$$



$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2}\,\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ risp. al prod. scalare standard

dunque $\alpha = 45^\circ$

Norma di un vettore $(x_1, \dots, x_n)$ risp. a un prod. scalare $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$$\sqrt{\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle}$$

$\forall \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle$

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a \cdot a + b \cdot b} = \sqrt{\langle (a,b),(a,b) \rangle}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 0$

$$\underline{x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 5 x_2 y_2}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{\langle (1,1),(1,1) \rangle}\sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle}}$$

$$\underset{\sqrt{10}}{\shortparallel} \qquad \underset{1}{}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$