$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{}} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

A B

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato una base spettrale B per l'endomorfismo f che manda

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ in } \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix}}$$

$$B = \underline{((2,3),(1,-1))}$$

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Lavorando con le coordinate rispetto alla base spettrale B si ottiene che

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(v) \underset{B}{=} \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\text{NB} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$X = A\,Y \qquad\qquad A^{-1}X = Y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A^{-1}X=\underbrace{A^{-1}A}_{I}Y=Y}$$

Se tu parti dalla distribuzione delle persone $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ in coordinate rispetto alla base spettrale (cioè la distribuzione numerica $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$) arrivi dopo un "tempo infinito" alla distribuzione $\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}$ in coordinate rispetto alla base spettrale (cioè la distribuzione numerica

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\ 3a\end{pmatrix} \qquad = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ \end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}2 & 1\\ & \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2a + b \\ x_2 = 3a - b \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} \boxed{a = \frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2} \\ b = \frac{3}{5} x_1 - \frac{2}{5} x_2 \end{cases}}$$

Nota: Le matrici (che permettono di passare dalle coordinate rispetto a una base alle coordinate rispetto all'altra) si chiamano

MATRICI DEL CAMBIAMENTO DI BASE

Nel nostro esempio sono

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice del passaggio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$)

$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ (matrice del passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$)

Dunque la distribuzione finale delle persone è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \\ \frac{3}{5} x \quad + \frac{3}{5} x \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \end{pmatrix} = \boxed{(x_1+x_2)\begin{pmatrix} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underline{\frac{1}{5}(x_1+x_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \end{pmatrix}}$$

Quindi abbiamo fatto vedere che nel nostro caso la distribuzione "finale" degli utenti nei due siti A e B è

$$(x_1+x_2)\boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$ PAGE RANK

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Quindi il pagerank è un autovettore dell'endomorfismo descritto da $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Come si calcola la matrice del cambiamento di base da

$$B_1 = ((1,1),(1,-1)) \quad a$$

$$B_2 = ((1,2),(2,1))$$

$$\boxed{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Prendiamo $v \underset{B_1}{\equiv} (5, 7)$

$v \underset{B_2}{\equiv} \left(-\frac{16}{3}, \frac{26}{3}\right)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{26}{\ } \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{\ } & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \frac{26}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ \end{pmatrix}$$

$$D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$D(e^{2x}) = 2e^{2x}$$

$$D^2(\sin x) = -1 \sin x$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (x+y,\ y)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow$ c'è un solo autovalore ed è 1.

$$\underline{U_1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r = 1 \qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\dim \mathrm{Sol}\, S_0 = \dim U_1 = n - r = 2 - 1 = 1$$

rango della matrice caratteristica calcolata per $\lambda = 1$

Dunque f non ammette basi spettrali.
In modo equivalente, si dice che non è semplice.

Teorema. $f: V \to V$ è semplice (cioè ammette una base spettrale) se e solo se la somma una base spettrale se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $n = \dim V$.

Ex: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$

Dire se f è semplice. $\quad f(1,0,0) = (1,\ 0,\ 1)$

Svolgimento:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$$

$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1$$

$$= (1-\lambda)^3 + 1$$

$$(1-\lambda)^3 + 1 = 0$$

$$(1-\lambda)^3 = -1$$

$$(1-\lambda) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$1+1 = \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = 2$$

$$r \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{\underset{}{\shortparallel}} \quad \dim U_2 = \underset{\shortparallel}{n} - r = 3-2=1$$

$$\dim U_2 = \underset{\substack{\parallel \\ 3}}{n} - r = 3-2=1$$

$$r\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad mg(2) = 1$$

$$mg(2) := \dim U_2$$

Quindi f non è semplice.

La dimensione dell'autospazio U_λ viene detta molteplicità geometrica dell'autovalore λ,

$$mg(\lambda) := \dim U_\lambda$$

Un altro modo per enunciare il teorema precedente è quindi questo:

Teor. $f: V \to V$ è semplice se e solo se $\displaystyle\sum_{\lambda \text{ autovalore}} mg(\lambda) = \dim V$

Es. Dire se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

Una radice è $\lambda = -1$

$$(-1)^3 - 3(-1) - 2$$

$$-1 + 3 - 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

radici: -1

$$= (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

radici di $\lambda^2 - \lambda - 2$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 \qquad -3\lambda - 2 & \lambda + 1 \\ \hline \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 2 \\ \hline // \quad -\lambda^2 - 3\lambda - 2 & \\ \quad -\lambda^2 - \lambda & \\ \hline \quad // \quad -2\lambda - 2 & \\ \qquad -2\lambda - 2 & \\ \hline \qquad // \quad // & \end{array}$$

Autovalori: $-1, 2$

$$p_A(\lambda) = \underline{\underline{(\lambda+1)^2(\lambda-2)^1}} \Rightarrow ma(-1) = 2, \; ma(2) = 1$$

$$mg(-1) = ? \qquad mg(2) = ?$$

$ma(-1) = 2 \qquad ma(2) = 1$ molteplicità algebrica degli autovalori

(La molteplicità algebrica dell'autovalore $\bar{\lambda}$ è il massimo valore k tale che il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda-\bar{\lambda})^k$ ma non divisibile per $(\lambda-\bar{\lambda})^{k+1}$)

Per decidere se f è semplice dobbiamo calcolare la somma $\sum_{\lambda \text{ autovalore}} mg(\lambda)$ e vedere se è uguale a 3,

$$U_{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Quindi $mg(-1) = \dim U_{-1} = \underset{n}{\overset{\shortparallel}{3}} - \underset{r}{\overset{\shortparallel}{1}} = 2$

Per l'altro autovalore (cioè 2) otteniamo

$$r\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2$$

$$mg(2) = \dim U_2 = 3 - 2 = 1$$

$$\sum mg(\lambda) = \underset{\substack{\| \\ mg(-1)}}{2} + \underset{\substack{\| \\ mg(2)}}{1} = 3 = \dim V$$
