Teorema. La forma completamente ridotta di una matrice è unica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dim. Sia M una matrice $m \times n$

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{R_1} \\ \vdots \\ \boxed{R_m} \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} \boxed{R_1'} \\ \vdots \\ \boxed{R_m'} \end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{pmatrix} \boxed{R_1''} \\ \vdots \\ \boxed{R_m''} \end{pmatrix}$$

matrici completamente ridotte

La prima cosa da osservare è che ogni riga di M' si può scrivere come comb. lineare delle righe di M'' e viceversa, delle righe di M'' e viceversa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1' \\ R_2' \end{matrix}$$

$$R_1' = 1\,R_1 + 0\,R_2$$

$$R_2' = 1\,R_1 + 1\,R_2$$

$$R_1 = 1\,R_1' + 0\,R_2'$$

$$R_2 = -1\,R_1' + 1\,R_2'$$

Supponiamo per assurdo che $M' \neq M''$

$$M' = \begin{array}{c} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & \\ \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(1, p_1), (2, p_2), \ldots\ldots, (r, p_r)} \qquad \boxed{(1, q_1), \ldots, (1, q_s)}$$

(eventualmente $r \neq s$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{p_1}{(1,1)} \quad \underset{p_2}{(2,2)} \quad \underset{p_3}{(3,4)} \qquad\qquad \underset{q_1}{(1,2)} \quad \underset{q_2}{(2,4)}$$

Facciamo vedere che i due insiemi di posizioni dei pivot coincidono. Supponiamo infatti, per assurdo, che non sia così.

NB Potremmo avere

$\underline{(1,3)}\ \underline{(2,5)}\ (3,10)$ $\qquad$ $\underline{(1,3)}\ \underline{(2,5)}\ (3,12)$

$\underline{(1,3)}\ \underline{(2,5)}\ (3,10)$ $\qquad$ $(1,3)\ (2,5)$

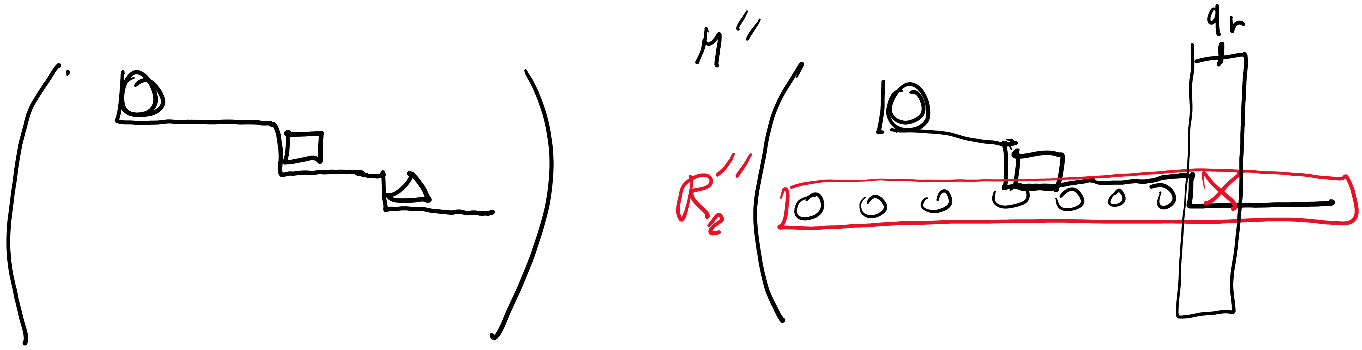
Allora, formalmente, si deve verificare una di queste due cose:

uno di questi due casi:

1) Le posizioni $(1,p_1),(2,p_2),\dots,(r-1,p_{r-1})$ coincidono con le posizioni $(1,q_1),(2,q_2)\dots,(r-1,q_{r-1})$ ma $(r,p_r)\neq(r,q_r)$

2) Le posizioni $(1,p_1),\dots,(r-1,p_{r-1})$ coincidono con le posizioni $(1,q_1)\dots,(r-1,q_{r-1})$ ma una delle coppie (r,p_r) (r,q_r) non è definita.

Caso 1) Possiamo supporre $p_r<q_r$



$p_1=q_1 \quad p_2=q_2 \qquad q_3<p_3$

Sappiamo che R''_r si deve poter scrivere come $\underline{x_1R'_1+\dots+x_mR'_m}$

$$\underline{R''_r}=\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_1}}R'_1+\dots+\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_{r-1}}}R'_r+\underline{x_r}R'_r+\underline{x_{r+1}}R'_{r+1}+\dots+x_mR'_m$$

Se fosse $x_1\neq0$ nella $\underline{q_1\text{-esima}}$ colonna di R''_r avremmo $x_1\neq0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} R'_1$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 3 & -1 & 0 & 5 & 4 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \\ R_4' \end{array}
\end{array}
$$

$$R_2'' = \overset{0}{\overset{\parallel}{x_1}} R_1' + \underbrace{\overset{0}{\overset{\parallel}{x_2}} R_2' + x_3 R_3' + x_4 R_4'}$$

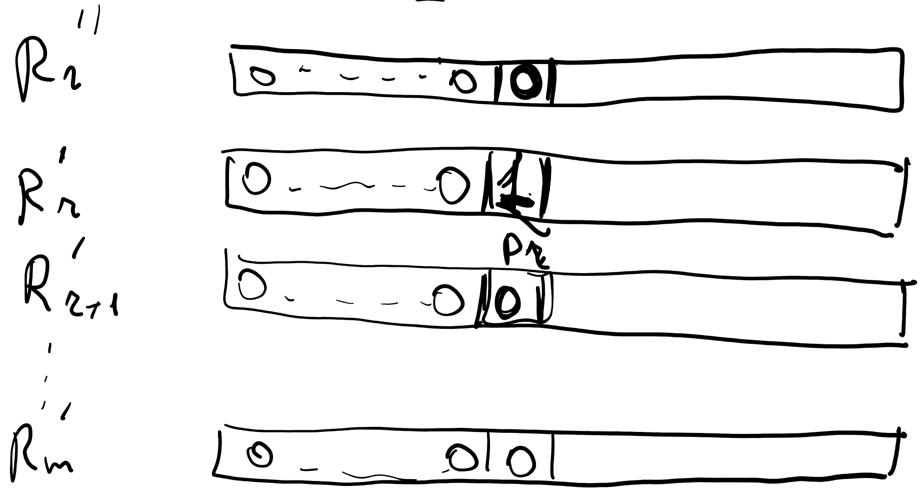
$$(x_1, \dots \dots)$$

$$R_r'' = x_r R_r' + x_{r+1} \underline{R_{r+1}'} + \dots + x_m \underline{R_m'}$$

p_r = indice di colonna del pivot presente nella riga R_r'

q_r = " " " " " R_r''

$$\boxed{p_r < q_r}$$



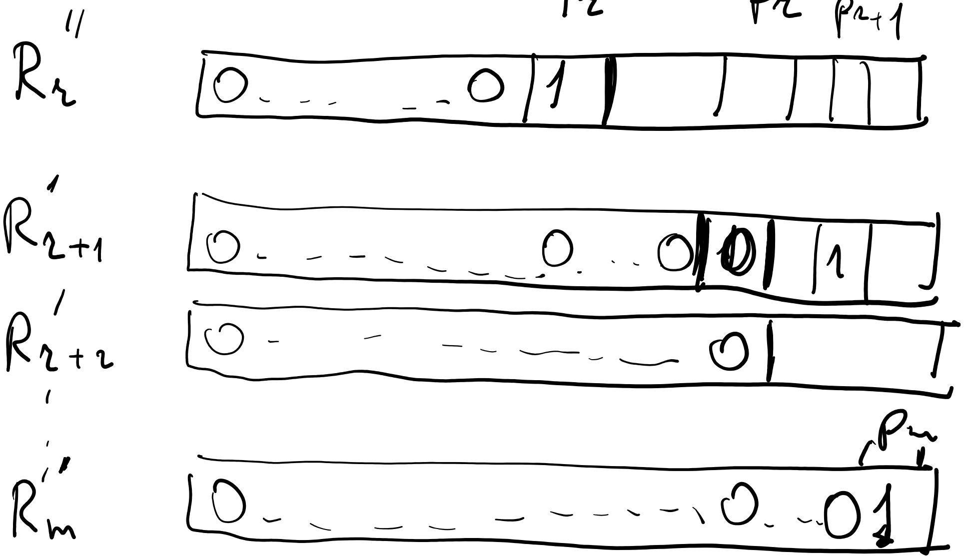
$q_r < p_r$

Quindi la nostra combinazione lineare deve essere fatta così:

$$R_r'' = x_{r+1} R_{r+1}' + \dots + x_m R_m'$$

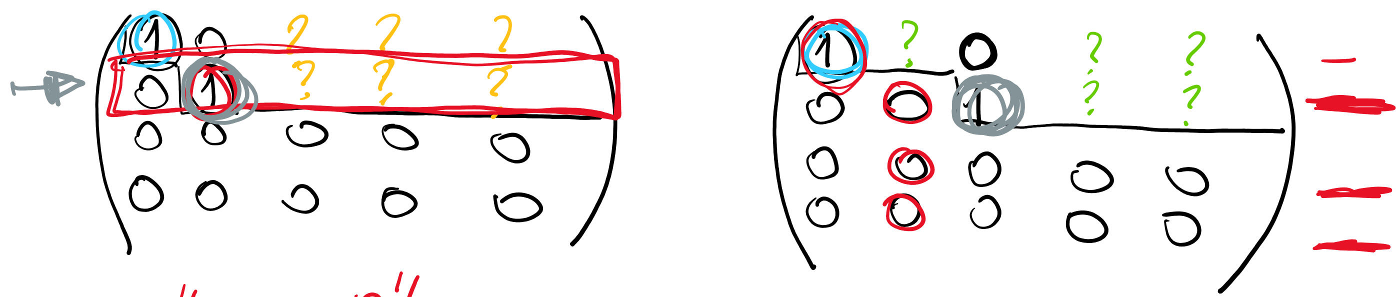
Questo è una contraddizione perché nessuna delle righe R_{r+1} ha valori diversi da 0 nella colonna q_r.

colonna q_r.



Quindi <u>NON</u> si può ottenere la riga R_r'' come comb. lineare delle righe $R'_{r+1}, \dots, R'_m$.

Quindi abbiamo dimostrato che la forma completamente ridotta è unica.



$R_r'' = R_r''$

Se abbiamo
$$R_2'' = x_1 R_1' + x_2 R_2' + x_3 R_3' + x_4 R_4'$$

Una volta dimostrato che i due insiemi di posizioni dei pivot in M' e M'' coincidono, possiamo mostrare anche che $M' = M''$

possiamo mostrare anche che $M' = M''$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R'_1 = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_1}} R''_1 + x_2 R''_2 + \dots \overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_i}} R''_i + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_n}} R''_n$$

Se $x_j \neq 0$ per $j \neq i$ non si può avere $R'_i = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_1}} R''_1 + x_2 R''_2 + \dots + x_i R''_i + \dots + x_n R''_n$

$$R'_i = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{x_i}} R''_i \qquad\qquad R'_i = 1\, R''_i \quad \text{sì}$$

Questo significa che $R'_i = R''_i$ $\square$

Teorema. Due basi di un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ hanno sempre la stessa cardinalità.

Dim. Siano $B_1 = (v_1, \dots, v_k)$, $B_2 = (v'_1, \dots, v'_k)$ due basi per $\underline{U}$. Costruiamo le due matrici C e D che hanno rispettivamente i vettori v_i e v'_i come righe.

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\quad v_1 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad v_n \quad} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \boxed{\quad v_1' \quad} \\ \\ \boxed{\quad v_r' \quad} \\ 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 \ \cdots \ 0 \end{pmatrix}$$

$$m \times n \qquad\qquad\qquad m \times n$$

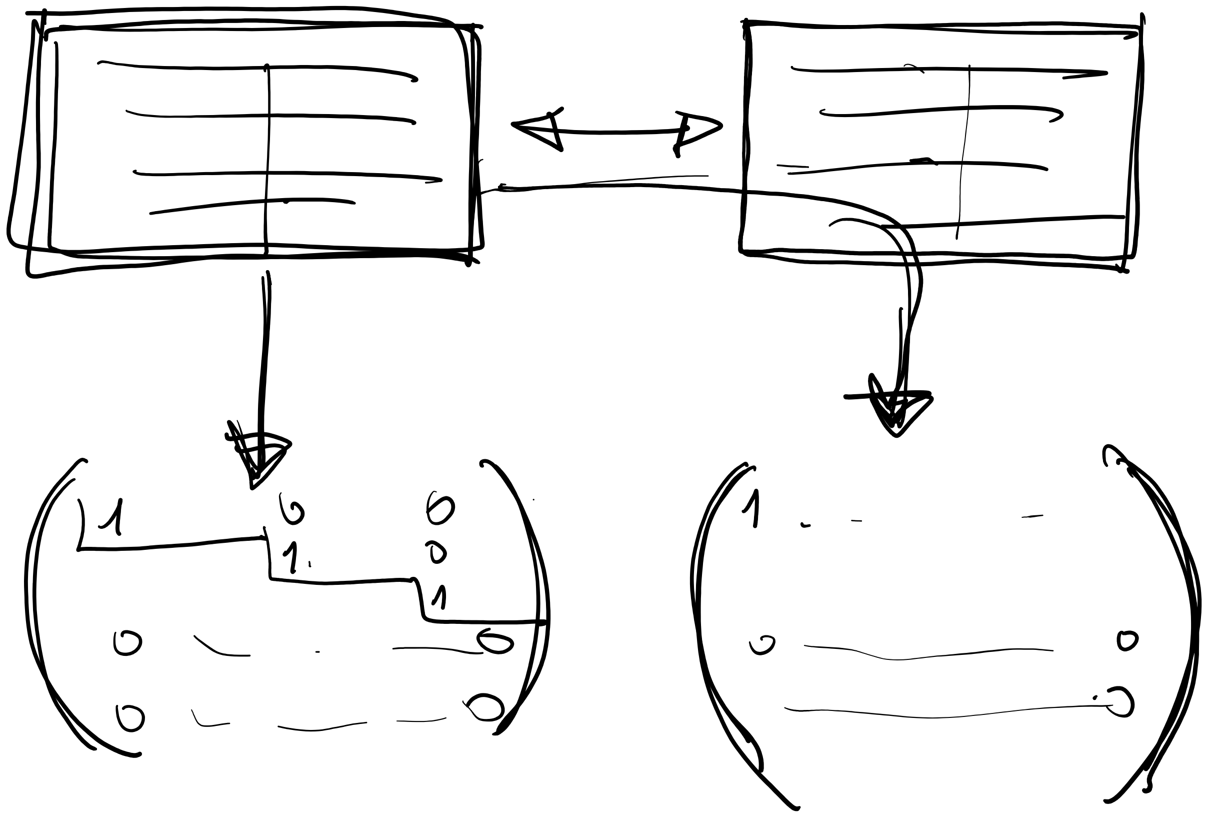
È chiaro, dato che le due basi generano entrambe lo spazio vettoriale V, ogni riga di C si può esprimere come comb. lineare delle righe di D e viceversa.

Che succederebbe se una delle due matrici avesse righe nulle.

In tal caso potremmo considerare le forme completamente ridotte di C e D (risp. M' e M'') e ci sarebbe almeno una riga r-esima di M' che contiene un pivot mentre la riga r-esima di M'' è nulla.

Il fatto che il numero di pivot di M' è diverso dal numero di pivot di M'' implica che gli spazi generati dalle due basi non coincidono.

Questo significa che le due basi hanno la stessa cardinalità.



n-upla delle coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto a una base data per V.

Supponiamo che $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una base per V.

Allora ogni vettore $v \in V$ si può scrivere <u>IN MODO UNICO</u> come comb. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\boxed{v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}$$

$$v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$\boxed{v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{0} = \underline{(x_1 - y_1)}\underline{v_1} + \dots + \underline{(x_n - y_n)}\underline{v_n}$$

Dato che B è lin. indipendente, deve essere $x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$

Cioè $\underline{x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n}$.

Quindi l'uso di una base ci permette di associare a ogni vettore v di V un'n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ detta n-upla delle coordinate del vettore v rispetto alla base $B = (v_1, \dots, v_n)$.

In simboli

$$v \underset{B}{\equiv} (x_1, \dots, x_n)$$