09 March 2025 10:14

Applicazioni lineari
(cioè omomorfismi di spazi vettoriali)

$f: V \to W$

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \quad (*)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall v_1, v_2 \in V$

Gli omomorfismi biettivi si chiamano isomorfismi.

$$\begin{cases} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ \text{e} \\ f(\alpha v) = \alpha f(v) \end{cases} \quad (\boxtimes)$$

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha v_1) + f(\beta v_2) =$$

$$= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$$

Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari.

Sia $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ una base dello spazio vettoriale V di dimensione n. Siano $w_1, \ldots, w_n$ vettori di uno spazio vettoriale W.

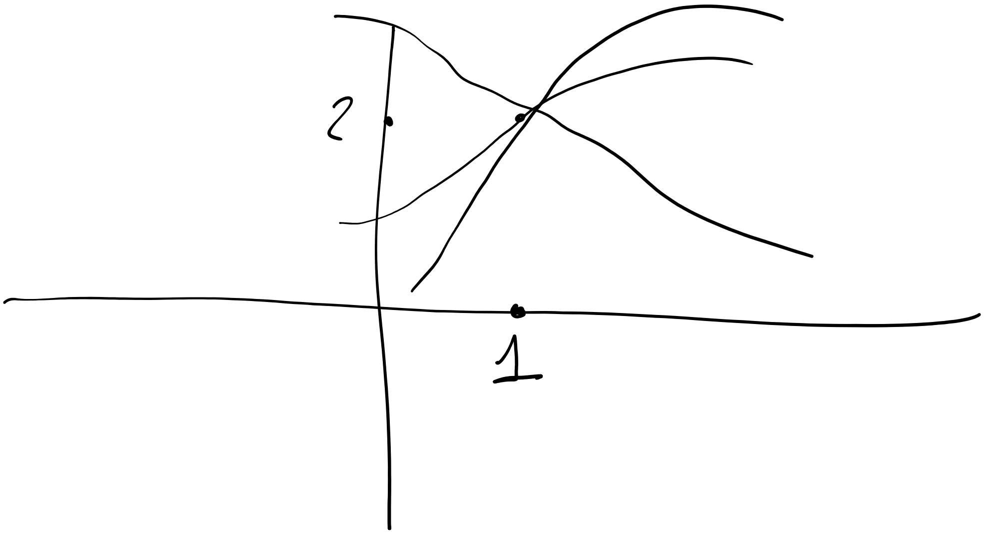
Allora esiste ed è unica la trasformazione lineare $f: V \to W$ che manda ogni vettore v_i in w_i.

$$f(v_1) = w_1$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = w_n$$

$V = \mathbb{R}$ $\qquad B = (1)$



$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \qquad v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$

$v_1 \underset{B}{=} (1, 0, \dots, 0)$

$f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$

$= x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)$

$= x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$

$f(v) = \boxed{x_1 w_1 + \dots + x_n w_n}$

$v_1 \underset{B}{=} (1, 0, \dots, 0) \qquad f(v_1) = 1 w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_n$

$= w.$

$v_1 \underset{B}{\equiv} (1, 0, \dots, 0) \qquad f(v_1) = 1w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_n$
$= w_1$

Teor. Gli $\boxed{\text{isomorfismi}}$ conservano le dipendenze lineari (e le indipendenze) e la proprietà di essere un sistema di generatori.
Quindi mandano basi in basi.

$$f : V \longrightarrow W$$

Dim.

Supponiamo che $\boxed{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

Supponiamo $x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = 0_W$

$$\| $$

$$f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$$

Ma $f(0_V) = 0_W$

NB $f(0 \cdot v) = 0\, f(v) = 0_W$

$\quad \| $

$f(0_V)$

$$\underbrace{f(0_V)} = f(0_V + 0_V) = \underbrace{f(0_V) + f(0_V)}$$

$$\Downarrow$$

$$0_W = f(0_V)$$

$$f(x_1 v_1 + \dots x_n v_n) = 0_W$$

$$f(0_V) = 0_W$$

Dato che f è biunivoca,

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V$$

Allora $\underline{x_1 = \dots = x_n = 0}$

Quindi la lineare indipendenza di $v_1, \dots, v_n$ implica la lineare indipendenza di $\underline{f(v_1), \dots, f(v_n)}$.

Se $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ con $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$

Se $\underline{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V}$ con $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$

allora $\underline{x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = 0_W}$ con " "

Dim:

$$f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = 0_W$$

$$\|$$

$$x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)$$

Prendiamo ora un sistema di generatori di V: $\{v_1, \dots, v_k\}$

Voglio far vedere che $\{\underline{f(v_1), \dots, f(v_k)}\}$ è un sistema di generatori per W.

Prendiamo un vettore $w \in W$.

So $\underline{w = f(v)}$ (perché f è suriettiva)

Scriviamo v come comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$.

$$\underline{v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_k}$$

Quindi $f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = w$

$$\|$$

$$\underline{x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)}$$

Nucleo di una map. lineare $f: V \to W$

Immagine " " " " "

$$\boxed{\ker f = \{ v \in V : f(v) = 0_W \}}$$

$$D : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$D(x^2 + 3x) = 2x + 3$$

$$D(f_1 + f_2) = D(f_1) + D(f_2)$$

$$D(\alpha f) = \alpha D(f)$$

$$F(f) = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad F : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$$

$$F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$$

$$F(\alpha f) = \alpha F(f)$$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad F(x) = \sin x$

F non lineare

$$F(x) = x^2$$

non lineare

$$F(x) = 2x$$

$$F(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = F(x_1) + F(x_2)$$

$$F(\alpha x) = 2(\alpha x)$$

$$\parallel$$

$$\alpha F(x) = \alpha(2x)$$

$$F(x) = 2x + 1$$

$F(x) = kx$ è lineare

$$F(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = k x_1 + k x_2 =$$

$$= F(x_1) + F(x_2)$$

$$= F(x_1) + F(x_2)$$

inoltre

$$F(\alpha x) = K(\alpha x)$$

$$\alpha F(x) = \alpha (K x)$$

Si può dimostrare che $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se $F(x) = kx$.

$$\ker D = \{ f \text{ costante} \}$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x$$

$$\ker f = \{ 0 \}$$

$$f(x) = 0$$

$$\ker f = \mathbb{R}$$

$$\boxed{F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$$

$$F((x_1, x_2)) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\underline{A(X_1 + X_2) = A X_1 + A X_2}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \underset{\overset{\shortparallel}{\alpha X}}{\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}} = \alpha \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$A(\alpha X) = \alpha(A X)$$

Cerchiamo il nucleo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

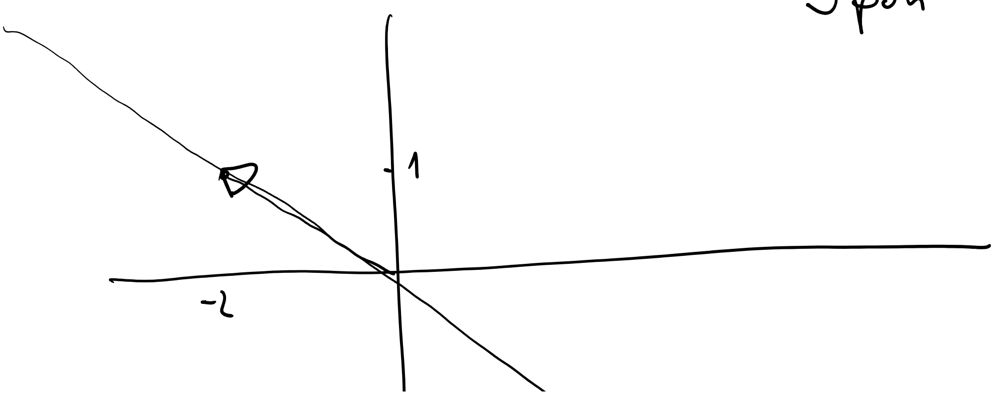
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

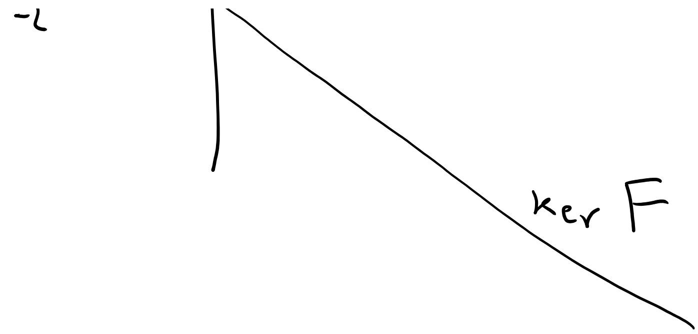
$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$t(-2, 1)$$

$$\operatorname{Ker} F = \{(-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{Span}$$





Proposizione. Sia $f : V \to W$ lineare. Allora $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim. Siano $v_1, v_2 \in \ker f$.

Quindi $f(v_1) = f(v_2) = 0_W$

Quanto vale $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$$= 0_W + 0_W = 0_W$$

Perciò $v_1 + v_2 \in \ker f$.

Sia ora $v \in \ker f$ e sia $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot 0_W = 0_W$$

Quindi $\alpha v \in \ker f$.

Dunque $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V.

$$\alpha \, 0_W = \alpha (0_W + 0_W) = \alpha 0_W + \alpha 0_W$$

$$\Downarrow$$

$$0_W = \alpha\, 0_W$$

$$\operatorname{Im} f = \{ w \in W : \underline{\exists\, v \in V}\ (\underline{f(v) = w}) \}$$

Prop. $\operatorname{Im} f$ è un sottosp. vett. di W.

Dim. Siano $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$

$\exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.

$$\underline{w_1 + w_2} = f(v_1) + f(v_2) = f(\underline{v_1 + v_2})$$

Dunque $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$

Sia $w \in \operatorname{Im} f$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$$w = f(v)$$

Dico che $\underline{\alpha w = f(\alpha v)}$

Facciamo il calcolo:

$$\underline{f(\alpha v)} = \alpha f(v) = \underline{\alpha w}$$

Teorema: $\underline{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f} = \underline{\dim V}$

Dim. Prendiamo una base B_1 di $\ker f$.

$B_1 = (v_1, \dots, v_k)$.

Usiamo ora il teorema del completamento a una base.

Teorema del completamento a una base: se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori linearmente indipendenti di V, possiamo aggiungere $n-k$ vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ e ottenere una base di V.

Ora ho una base

$\boxed{B_1 = (v_1, \dots, v_k)}$ per $\underline{\ker f}$

e una base

$\underline{B_2 = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)}$ per $\underline{V}$.

Affermo che $\underline{(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))}$

è una base per $\operatorname{Im} f$.

Prendiamo un vettore $w \in \operatorname{Im} f$

Prendiamo un vettore $w \in \operatorname{Im} f$

Posso scrivere $w = f(v) =$

$$= f(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n)$$

$$= \cancel{\underbrace{x_1 f(v_1)}_{= 0_W} + \dots + \underbrace{x_k f(v_k)}_{= 0_W}} + x_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + x_n f(v_n)$$

$$= x_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + x_n f(v_n)$$

Quindi $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$

è un sistema di generatori per $\operatorname{Im} f$.

$$x_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + x_n f(v_n) = 0_W$$

$$\| $$

$$f(x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n)$$

Dunque

$x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n \in \ker f$

Perciò posso scrivere

$$\underline{x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n} = \underline{y_1 v_1 + \dots + y_k v_k}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_1}} v_1 - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_2}} v_2 - \dots - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_k}} v_k + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_{k+1}}} v_{k+1} + \dots + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_n}} v_n = 0_V}}$$

In particolare, abbiamo dimostrato che $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$

Abbiamo dunque potuto vedere che i vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono lin. indip.

In conclusione, abbiamo dimostrato che $\underline{(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))}$ è una base per $\operatorname{Im} f$.

$$\dim \operatorname{Im} f = n - k$$

$$\dim \operatorname{Im} f = n - k$$

$$\dim \ker f = k$$

$$\dim V = n$$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

$$= \dim V.$$