14 April 2025 08:48

Tre teoremi molto utili per gli esercizi.

1) $\boxed{1 \le \boxed{mg(\lambda) \le ma(\lambda)}}$

Ricordo che, dato un autovalore $\bar{\lambda}$ dell'endomorfismo $f: V \to V$ rappresentato, rispetto a una base B fissata in V, da una matrice A, la molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$ (in simboli, $mg(\bar{\lambda})$) è la dimensione dell'autospazio $U_{\bar{\lambda}}$ dell'autovalore $\bar{\lambda}$, e la molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$ (in simboli $ma(\bar{\lambda})$) è il massimo esponente k tale che il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda-\bar{\lambda})^k$.

Es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x+y, y)$$

B = base canonica

Allora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$$

autovalori: 1

$ma(1) = 2$

$mg(1) = \dim U_1$

$\lambda = 1$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A-1I) = 1$$

$$\dim U_1 = n - r(A-\lambda I) = 2-1 = 1$$

$\dim U_1 = n - r(A - \lambda I) = 2 - 1 = 1$

Quindi $mg(1) = 1$

Es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x, y) = (x, y)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$

autovalori: 1

$ma(1) = 2$

$mg(1) = \dim U_1 = n - r(A - 1I) = 2 - 0 = 2$

$r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$U_1: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad$ Sol S: $\begin{cases} x = r \\ y = s \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base spettrale è

$B = ((1,0), (0,1))$

NB. Se $\sum_{\lambda_i \text{ autovalore}} ma(\lambda_i) < n$, allora – per forza – anche $\sum_{\lambda_i \text{ autovalore}} mg(\lambda_i) < n$.

Per esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (-y, x)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

2) Se $f: V \to V$ con $n = \dim V$ e f ha $\underline{n}$ autovalori distinti, allora f è semplice.

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x+3y, 2y)$$

B = base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \underline{(1-\lambda)(2-\lambda)}$$

autovalori: $1, 2$

$$1 \leq \underset{\underset{1}{\parallel}}{mg(1)} \leq ma(1) = 1$$

$$1 \leq \underset{\underset{1}{\parallel}}{mg(2)} \leq ma(2) = 1$$

3) Teorema spettrale: se la matrice A che rappresenta l'endomorfismo f è SIMMETRICA, allora esiste sempre una base spettrale (ed è una base ortogonale).

Es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio. Consideriamo l'endomorfismo di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definito così:

$$f_k(A) = A + k\,{}^tA$$

Domanda: f è semplice?
Se f_k è semplice per qualche valore di k, scegliere un k a piacere e calcolare una base spettrale di f_k.

$$B = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}$$

$$E_{11} \longrightarrow E_{11} + k\,{}^tE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1+k)E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$E_{21} \longrightarrow E_{21} + k\,{}^tE_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \longrightarrow E_{12} + k\,{}^tE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} \to E_{22} + k^t(E_{22})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+k \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}}$$

Essendo A simmetrica per ogni k ammette una base spettrale (ortogonale)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1+k-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & k & 0 \\ 0 & k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1+k-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1+k-\lambda) \cdot (1+k-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - k^2\right)$$

$$= \underline{(1+k-\lambda)^2}\left(\underline{(1-\lambda)^2 - k^2}\right)$$

$$(1-\lambda)^2 - k^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

autovalori: $1+k$, $1-k$

$$\Updownarrow$$
$$(1-\lambda)^2 = k^2$$
$$\Updownarrow$$
$$1-\lambda = \pm k$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda = 1 \mp k$$

Scriviamo ora la fattorizzazione del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \big((1+k)-\lambda\big)^2 \big((1+k)-\lambda\big)\big((1-k)-\lambda\big)$$

$$= \big((1+k)-\lambda\big)^3 \big((1-k)-\lambda\big)^1$$

Allora

$$ma(1+k) = 3$$

$$ma(1-k) = 1$$

Quindi andiamo avanti.

Prendiamo $k=0$.

In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la risposta è banale: ogni base di $\mathbb{R}^4$ è spettrale.

Possiamo per esempio prendere la

Possiamo per esempio prendere la base canonica $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$ e perciò la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ è una base spettrale di f.

Se $k = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 (-\lambda)^{1}$$
$$= (\lambda-2)^3 \cdot \lambda$$

autovalori: $\underline{2}$, $\underline{0}$

Troviamo una base spettrale.

$$U_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim U_2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \underline{mg(2) = 3}$$

$$U_0 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim U_0 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \underline{mg(0) = 1}$$

Calcoliamo U_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_2 - x_3 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base di U_2: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Calcoliamo poi U_0

$$U_0: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ \cancel{x_2 + x_3 = 0} \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = r \\ x_3 = -r \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base per U_0: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Coordinate dei vettori della Base spettrale per f_1 è

$$\bar{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Base spettrale per f_1

$$\hat{B}: \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$M_{\hat{B}\hat{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix}2^{10}&0&0&0\\0&2^{10}&0&0\\0&0&2^{10}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Es. Consideriamo l'endomorfismo

$$f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

$$f_k(p) = \frac{dp}{dx} + k\,p$$

$$x + 3x^2 \longrightarrow 1 + 6x + k(x + 3x^2) = \dots$$

$$f_k(a + bx + cx^2) = b + 2cx + k(a + bx + cx^2)$$

$$= b + 2cx + ka + kbx + kcx^2$$

$$= (b + ka) + (2c + kb)x + (kc)x^2$$

Come base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ prendiamo

$$B = (1, x, x^2)$$

$$1 \to k$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

3×3

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} k-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & k-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (k-\lambda)^3$$

autovalori: k

$m_a(k) = 3$

$m_g(k) = ?$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A - kI) = 2$$

$$m_g(k) = 3 - 2 = 1$$

$$\sum_{\lambda_i \text{ autov.}} m_g(\lambda_i) = 1 < n = 3$$

Non ci sono basi spettrali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = (x + kz,\ 3y + kz,\ 0)$$

Per quali valori di k f è semplice?

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 3-\lambda & k \\ \boxed{0 \quad 0 \quad -\lambda} \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda (1-\lambda)(3-\lambda)$$

autovalori: $0, 1, 3$

Abbiamo dunque che f è semplice per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (2 + kz, y, x)$$

Vediamo per quali valori di k f è semplice.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & k \\ \boxed{0 \quad 1-\lambda \quad 0} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & k \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{(1-\lambda)}\left(\underline{(2-\lambda)(-\lambda) - k}\right)$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)}_{\substack{\downarrow \\ \text{autovalore} \\ 1}}\underline{\left(\lambda^2 - 2\lambda - k\right)}$$

$$\underline{\lambda^2 - 2\lambda - k = 0}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4k}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+k}}{2} = \underline{1 \pm \sqrt{1+k}} \quad \text{se } 4+4k \geq 0$$

Se $4 + 4k < 0$ cioè $k < -1$

Se $4+4k<0$ cioè $k<-1$
abbiamo che il nostro endomorfismo
non ammette basi spettrali (cioè non è
semplice).
In tal caso infatti il nostro polinomio
caratteristico si scrive così:

$$(1-\lambda)\underline{(\lambda^2-2\lambda-k)}$$

non ammette radici!

Quindi $p_A(\lambda)$ è divisibile per $(1-\lambda)^1$
ma non per $(1-\lambda)^2$. Perciò $\underline{m_a(1)=1}$
e dunque $\sum m_a(\lambda_i)<n$.

Se invece $4+4k\geq 0$ cioè $k\geq -1$
allora si hanno questi autovalori:

$$1,\ 1+\sqrt{1+k},\ 1-\sqrt{1+k}$$

Questi tre autovalori sono tutti
diversi fra loro se e solo se

$$1\neq 1+\sqrt{1+k}$$
e
$$1\neq 1-\sqrt{1+k}$$
e
$$1+\sqrt{1+k}\neq 1-\sqrt{1+k}$$

Vediamo per quali k si ha

Vediamo per quali k si ha

$$1 = 1 + \sqrt{1+k}$$

Succede se e solo se, oltre a essere $k \geq -1$, si ha $1+k=0$ (cioè $k=-1$)

Dovremo quindi esaminare a parte il caso $k=-1$.

Analogamente

$$1 = 1 - \sqrt{1+k}$$

se e solo se $k=-1$.

Analogamente

$$1+\sqrt{1+k} = 1 - \sqrt{1+k}$$

se e solo se $k=-1$.

Quindi f è semplice se $k \neq -1$ (perché ci sono tre autovalori distinti)

Se $k=-1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice è simmetrica e quindi, senza fare calcoli possiamo dire che senza fare calcoli possiamo dire che esiste una base spettrale.

Riassumendo: f ammette una base spettrale per ogni $k \geq -1$.