c = num. di conigli
p = num. di polli

$$\begin{cases} c+p=5 \\ 4c+2p=14 \end{cases} \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+4z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x-2y+4z=1 \\ 1x+1y+1z=0 \end{cases}$$

$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ b_1$
$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ b_2$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f(j)$$

$$\cancel{\begin{cases} x+2xy+\sin x=7 \\ x^2-y+\cos xy=0 \end{cases}}$$

Come si può risolvere un sistema lineare S?

NO $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow |Sol\ S| = \infty$

$$\begin{cases} x+(y-z)=0 \\ x-(y-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

Osserviamo che se un sistema lineare S viene trasformato in un sistema lineare S' con una delle seguenti operazioni, allora Sol S = Sol S':

1) Moltiplicare un'equazione di S per $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 4x+4y+8z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 2x+2y+4z=5 \end{cases}$$

2) Aggiungere a un'equazione un multiplo di un'altra equazione

$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 3y+z=4 \end{cases}$$

$$(2x+2y+4z)-(2x-y+3z)=(5)-1$$

$p_1 = b_1$
$p_1 - p_2 = b_1 - b_2 \Rightarrow -p_2 = -b_2$
$p_2 = b_2$

3) Cambiare l'ordine delle equazioni.

$$\begin{cases} x+y-2z=7 \\ y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3z=1 \\ x+y-2z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-2z+u=0 \\ x-z-2u=1 \\ x+y+z-u=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ matrice incompleta di S

matrice 3x4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$ matrice completa di S

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$-1-2(-3)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$ matrici a gradini!

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un altro esempio di matrice a gradini

pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 4

Teorema. Ogni matrice A di numeri può essere trasformata in una matrice B di numeri a gradini usando le 3 operazioni viste.

Vale anche per le matrici complesse ridotte

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -y+3z+4t=1 \\ 3x+4z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y-3z-4t=-1 \\ z-\frac{15}{7}t=-\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$

pivot

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 15 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$-4+3\cdot\frac{15}{8} = \frac{-32+45}{8}$$

$$-1-\frac{3}{8} = -\frac{8}{8}-\frac{3}{8}$$

Una matrice A ridotta a gradini si dice COMPLETAMENTE RIDOTTA se sopra ogni PIVOT abbiamo solo degli 0 e ogni PIVOT è uguale a 1.

$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$ $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$

$$\frac{8}{8} - \frac{15}{8}$$

$$1 + \frac{1}{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$ $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{20}{8} & \frac{20}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Ora il sistema è risolto!

$$\begin{cases} x & -\frac{20}{8}t = \frac{20}{8} \\ y & +\frac{13}{8}t = -\frac{11}{8} \\ z & +\frac{15}{8}t = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20t+20}{8} \\ y = \frac{13t-11}{8} \\ z = \frac{-15t-1}{8} \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del sistema S sono

$$\left(\frac{20}{8}t+\frac{20}{8}, \frac{13}{8}t-\frac{11}{8}, -\frac{15}{8}t-\frac{1}{8}, t\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0=0$