FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 5

ESERCIZIO 1

Sia $A = \{a, c, g, t\}$ l'alfabeto del DNA. Sia $L \subseteq A^\star$ il linguaggio di tutte e sole le stringhe in cui ogni occorrenza del simbolo a è seguita da cg. Ad esempio, ε, cc, $ccacgt$, $tacggacgt$ appartengono ad L, mentre a, $acc\ ccagct$, $acgctact$ non appartengono ad L.

- Progettare un automa a stati finiti in cui uno stato accetta esattamente il linguaggio L;
- Progettare una grammatica libera da contesto in cui un simbolo non terminale (o categoria sintattica) genera esattamente il linguaggio L.

ESERCIZIO 2

Utilizzando i seguenti quattro simboli proposizionali **A** per "Angela viene alla festa", **B** per "Bruno viene alla festa", **C** per "Carla viene alla festa" e **D** per "Davide viene alla festa", si formalizzino le seguenti proposizioni:

1. "Angela viene alla festa, ma Bruno no"
2. "Carla viene alla festa se non vengono Angela e Bruno"
3. "Carla viene alla festa solo se viene Davide, ma se viene Davide allora Bruno non viene"

ESERCIZIO 3

Dimostrare **per sostituzione** che le seguenti proposizioni sono tautologie. Si ricorda che P è una tautologia se e solo se $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$ è una tautologia.

1. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
2. $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$
3. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

ESERCIZIO 4

Dimostrare che per ogni alfabeto A, per ogni automa $\mathcal{A} = (S, T, F)$ sull'alfabeto A, per ogni stato $x \in S$, simbolo $a \in A$ e stringa $w \in A^\star$ vale che:

1. $\varepsilon \in \langle\langle x \rangle\rangle$ se e solo se $x \in F$;
2. $aw \in \langle\langle x \rangle\rangle$ se e solo se esiste $y \in S$ tale che $(x, y) \in T_a$ e $w \in \langle\langle y \rangle\rangle$.

ESERCIZIO 5

Per ognuna delle seguenti proposizioni dire se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di nessuna delle due. Motivare la risposta, mostrando un controesempio se non è una tautologia o una contraddizione, e una dimostrazione per sostituzione se lo è. In particolare, si ricorda che P è una tautologia sse $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$ è una tautologia, mentre P è una contraddizione se e solo se $P \Leftrightarrow \mathsf{F}$ è una tautologia.

1. $P \Rightarrow P \wedge Q$
2. $(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \Rightarrow R)$
3. $(\neg Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$

ESERCIZIO 6

Si ricordi la definizione di grammatica corrispondente ad un automa (Definizione 8.4.1 nelle dispense). e si osservi che per qualsiasi grammatica $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (S_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}})$ corrispondente ad un automa $\mathcal{A}$ vale che per tutti gli $\langle x\rangle \in S_{\mathcal{A}}$, $a \in A$ e $w \in A^\star$:

(O1) $\varepsilon \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle$ se e solo se $\langle x\rangle \rightsquigarrow \varepsilon \quad \in P_{\mathcal{A}}$;

(O2) $aw \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle$ se e solo se esiste $\langle y\rangle \in S_{\mathcal{A}}$ tale che $\langle x\rangle \rightsquigarrow a\langle y\rangle \quad \in P_{\mathcal{A}}$ e $w \in \langle\!\langle \langle y\rangle \rangle\!\rangle$.

Utilizzando i due punti di tale osservazione ed i due punti dell'Esercizio 4, dimostrare per induzione il Teorema 8.4.4 delle dispense, cioè che per tutti gli automi $\mathcal{A} = (S, T, F)$, gli stati $x \in S$ e tutti le parole $w \in A^\star$ vale che

$$w \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle \text{ se e solo se } w \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle.$$