FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 4

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Ricordiamo le definizioni induttive dell'insieme dei naturali sintattici $\mathcal{N}Term$ (a sinistra) e della funzione $add : \mathcal{N}Term \times \mathcal{N}Term \to \mathcal{N}Term$ (a destra).

[C.B.] $Z \in \mathcal{N}Term$;	[C.B.] $add(x, Z) = x$;
[C.I.] Se $x \in \mathcal{N}Term$ allora $S(x) \in \mathcal{N}Term$.	[C.I.] $add(x, S(y)) = S(add(x, y))$.

1. Sulla falsariga della definzione di *add* e utilizzando tale funzione, definire per induzione la funzione $mul : \mathcal{N}Term \times \mathcal{N}Term \to \mathcal{N}Term$ in modo tale che per ogni $x, y \in \mathcal{N}Term$ valga la proprietà $val(mul(x, y)) = val(x) \cdot val(y)$. Dimostrare tale proprietà per induzione strutturale.

2. Sulla falsariga della definzione di *add* e utilizzando la funzione *mul*, definire per induzione la funzione $exp : \mathcal{N}Term \times \mathcal{N}Term \to \mathcal{N}Term$ in modo tale che per ogni $x, y \in \mathcal{N}Term$ valga la proprietà $val(exp(x, y)) = val(x)^{val(y)}$. Dimostrare tale proprietà per induzione strutturale.

3. È vero che $0^0 \geq 0^1$? Quante sono le funzioni $f : \varnothing \to \varnothing$? Quante sono le funzioni $f : 1 \to \varnothing$? (Come al solito, l'insieme $1 = \{0\}$).

ESERCIZIO 2

Sia A un insieme e L_A l'insieme delle liste di elementi di A, e siano *app*, *len* e *rev* le funzioni su liste definite sulla dispensa. Dimostrare per induzione strutturale le seguenti uguaglianze

1. Per ogni $lst_1, lst_2 \in L_A$, $len(app(lst_1, lst_2)) = len(lst_1) + len(lst_2)$.

2. Per ogni $lst \in L_A$, $len(rev(lst)) = len(lst)$.

ESERCIZIO 3

Sia $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ esteso con un elemento ∞ che, intuitivamente, rappresenta un'entità più grande di tutti i numeri. Si consideri l'usuale relazione di ordinamento $\leq$ su $\mathbb{N}$ estesa a $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nel modo ovvio: per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \infty$. Si consideri l'insieme $BT_{\mathbb{N}}$ degli alberi binari etichettati con elementi di $\mathbb{N}$.

1. Definire per induzione su $BT_{\mathbb{N}}$ la funzione $max : BT_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ che restituisce l'etichetta di valore massimo tra tutte quelle che appaiono in un albero. (Suggerimento: $max(\lambda) = 0$, dove λ come al solito è l'albero vuoto.)

2. Definire per induzione su $BT_{\mathbb{N}}$ la funzione $min : BT_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ che restituisce l'etichetta di valore minimo tra tutte quelle che appaiono in un albero. (Suggerimento: $min(\lambda) = \infty$, dove λ è l'albero vuoto.)

Ad esempio sia t_1 l'albero in Figura 1.1: $min(t_1) = 1$, $max(t_1) = 15$.

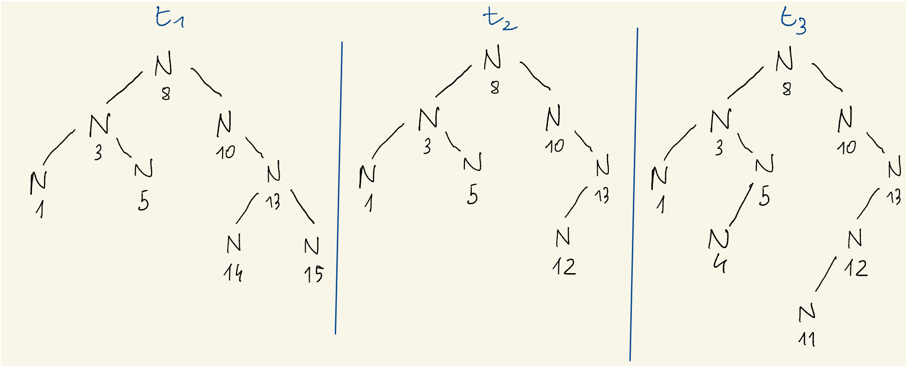

Figura 1.1: Tre alberi in $BT_{\mathbb{N}}$

<u>ESERCIZIO 4</u>

Si ricorda che l'insieme dei valori Booleani $Bool$ è $\{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}$ dove $\mathtt{t}$ sta per vero (true) e $\mathtt{f}$ sta per falso (false). Si consideri l'insieme $BT_{\mathbb{N}}$ e le funzioni $min, max \colon BT_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dell'Esercizio 3. Si consideri la funzione $ordinato \colon BT_{\mathbb{N}} \to Bool$ definita come segue:

[Cl. Base] $ordinato(\lambda) = \mathtt{t}$

[Cl. Induttiva] $ordinato(N(t_1, n, t_2)) = \begin{cases} \mathtt{f} & \text{se } n \not\geq max(t_1) \\ \mathtt{f} & \text{se } n \not\leq min(t_2) \\ ordinato(t_1) \wedge ordinato(t_2) & \text{altrimenti} \end{cases}$

Siano t_1, t_2, t_3 gli alberi in Figura 1.1. Calcolare $ordinato(t_1)$, $ordinato(t_2)$ e $ordinato(t_3)$.

<u>ESERCIZIO 5</u>

Si vuole definire una funzione $ins \colon \mathbb{N} \times BT_{\mathbb{N}} \to BT_{\mathbb{N}}$ che preso in input un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ ed un albero $t \in BT_{\mathbb{N}}$ aggiunge a t una foglia etichettata con n. La difficoltà sta nel fatto che vogliamo che questa operazione preservi la proprietà *ordinato* definita nell'Esercizio 4: cioè se $ordinto(t) = \mathtt{t}$, allora vogliamo che $ordinato(ins(n, t)) = \mathtt{t}$. Ad esempio, riferendosi agli alberi t_2 e t_3 in Figura 1.1, si ha che $ins(4, ins(11, t_2)) = t_3$ e $ins(11, ins(4, t_2)) = t_3$.

1. Definire per induzione su $BT_{\mathbb{N}}$ la funzione $ins \colon \mathbb{N} \times BT_{\mathbb{N}} \to BT_{\mathbb{N}}$.
2. Sia $t = N(N(\lambda.2, \lambda), 5, N(\lambda, 7, \lambda)) \in BT_{\mathbb{N}}$. Valutare esplicitamente, usando la funzione proposta, $ins(4, t)$, $ins(6, t)$ e $ins(9, t)$.

<u>ESERCIZIO 6</u>

Con riferimento alla funzione *ordinato* dell'Esercizio 4 e alla funzione *ins* dell'Esercizio 5, dimostrate per induzione strutturale che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e $t \in BT_{\mathbb{N}}$ vale che:

$$\text{Se } ordinato(t) = \mathtt{t}, \text{ allora } ordinato(ins(n, t)) = \mathtt{t}.$$

SOLUZIONI PROPOSTE

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Definiamo $mul : \mathcal{N}Term \times \mathcal{N}Term \to \mathcal{N}Term$ per induzione sul secondo argomento come segue:

   [CLAUSOLA BASE] $mul(x, Z) = Z$

   [CLAUSOLA INDUTTIVA] $mul(x, S(y)) = add(mul(x, y), x)$

   Per verificare che vale $val(mul(x, y)) = val(x) \cdot val(y)$ procediamo nuovamente per induzione sul secondo argomento:

   [PASSO BASE] $y = Z$

$$\begin{array}{rcll} val(mul(x,Z)) & = & val(Z) & \text{(Clausola base } mul\text{)} \\ & = & 0 & \text{(Clausola base } val\text{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} val(x) \cdot val(Z) & = & val(x) \cdot 0 & \text{(Clausola base } val\text{)} \\ & = & 0 & \text{(Calcolo)} \end{array}$$

   [PASSO INDUTTIVO] $y = S(z)$

$$\begin{array}{rcll} val(mul(x,S(z))) & = & val(add(mul(x,z),x)) & \text{(Clausola induttiva } mul\text{)} \\ & = & val(mul(x,z)) + val(x) & \text{(per Prop. 7.4.16)} \\ & = & val(x) \cdot val(z) + val(x) & \text{(Ipotesi induttiva)} \\ & = & val(x) \cdot (val(z) + 1) & \text{(Calcolo)} \\ & = & val(x) \cdot val(S(z)) & \text{(Clausola induttiva } val\text{)} \end{array}$$

2. Definiamo $exp : \mathcal{N}Term \times \mathcal{N}Term \to \mathcal{N}Term$ per induzione sul secondo argomento come segue:

   CLAUSOLA BASE $exp(x, Z) = S(Z)$

   CLAUSOLA INDUTTIVA $exp(x, S(y)) = mul(exp(x, y), x)$

   Mostriamo che vale $val(exp(x, y)) = val(x)^{val(y)}$ per induzione su $y \in \mathcal{N}Term$:

   [PASSO BASE] $y = Z$

$$\begin{array}{rcll} val(exp(x,Z)) & = & val(S(Z)) & \text{(Clausola base } exp\text{)} \\ & = & 1 & \text{(Clausola induttiva } val\text{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} val(x)^{val(Z)} & = & val(x)^0 & \text{(Clausola base} val\text{)} \\ & = & 1 & \text{(Calcolo)} \end{array}$$

   [PASSO INDUTTIVO] $y = S(z)$

$$\begin{array}{rcll} val(exp(x,S(z))) & = & val(mul(exp(x,z),x)) & \text{(Clausola induttiva } exp\text{)} \\ & = & val(exp(x,z)) \cdot val(x) & \text{(per punto 1)} \\ & = & val(x)^{val(z)} \cdot val(x) & \text{(Ipotesi induttiva)} \\ & = & val(x)^{(val(z)+1)} & \text{(Calcolo)} \\ & = & val(x)^{val(S(z))} & \text{(Clausola induttiva } val\text{)} \end{array}$$

3. Si ricorda che $Fun(A, B) = \{f : A \to B\}$ e che

$$|Fun(A, B)| = |B|^{|A|}.$$

   Poichè esiste un'unica funzione $f : \varnothing \to \varnothing$ ($id_\varnothing$) è ragionevole che $0^0 = 1$.
   Invece $0^1 = 0$, perché non esistono funzioni $f : 1 \to \varnothing$: dovrebbe infatti esistere $b \in \varnothing$ tale che $f(0) = b$, e questo è impossibile perché $\varnothing$ non ha elementi. In conclusione $0^0 \geq 0^1$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. Dimostriamo per induzione su lst_1 che $len(app(lst_1, lst_2)) = len(lst_1) + len(lst_2)$.

   [Passo base] $lst_1 = [\,]$.

$$\begin{array}{rcll} len(app([\,], lst_2)) & = & len(lst_2) & \text{(Clausola base } app\text{)} \\ & = & 0 + len(lst_2) & \\ & = & len([\,]) + len(lst_2) & \text{(Clausola base } len\text{)} \end{array}$$

   [Passo induttivo] $lst_1 = a\colon lst_1'$.
   Assumiamo che $len(app(lst_1', lst_2)) = len(lst_1') + len(lst_2)$, per dimostrare che $len(app(a\colon lst_1', lst_2)) = len(a\colon lst_1') + len(lst_2)$:

$$\begin{array}{rcll} len(app(a\colon lst_1', lst_2)) & = & len(a\colon app(lst_1', lst_2)) & \text{(Clausola induttiva } app\text{)} \\ & = & len(app(lst_1', lst_2)) + 1 & \text{(Clausola induttiva } len\text{)} \\ & = & len(lst_1') + len(lst_2) + 1 & \text{(Ipotesi induttiva)} \\ & = & len(lst_1') + 1 + len(lst_2) & \\ & = & len(a\colon lst_1') + len(lst_2) & \text{(Clausola induttiva } len\text{)} \end{array}$$

2. Dimostriamo per induzione su lst che $len(rev(lst)) = len(lst))$.

   [Passo base] $lst = [\,]$.

$$len(rev([\,])) \quad = \quad len([\,]) \quad \text{(Clausola base } rev\text{)}$$

   [Passo induttivo] $lst = a\colon lst'$.
   Assumiamo che $len(rev(lst')) = len(lst')$, per dimostrare che $len(rev(a\colon lst')) = len(a\colon lst')$:

$$\begin{array}{rcll} len(rev(a\colon lst')) & = & len(app(rev(lst), a\colon [\,])) & \text{(Clausola induttiva } rev\text{)} \\ & = & len(rev(lst')) + len(a\colon [\,]) & \text{(Per Es 2.1)} \\ & = & len(rev(lst')) + len([\,]) + 1 & \text{(Clausola induttiva } len\text{)} \\ & = & len(rev(lst')) + 0 + 1 & \text{(Clausola base } len\text{)} \\ & = & len(lst') + 1 & \text{(Ipotesi induttiva)} \\ & = & len(a\colon lst') & \text{(Clausola induttiva } len\text{)} \end{array}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Denotiamo con max e min (non in italico) le funzioni di massimo e minimo da $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})\times(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ a $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})$. Queste sono definite per ogni $x, y \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ come:

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq y \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Definiamo $max : BT_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ per induzione come segue:

   [Clausola Base] $max(\lambda) = 0$

   [Clausola Induttiva]

$$max(N(t_1, a, t_2)) = \begin{cases} a & \text{se } a \geq \max(max(t_1), max(t_2)) \\ \max(max(t_1), max(t_2)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. Definiamo $min : BT_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ per induzione come segue:

   [Clausola Base] $min(\lambda) = \infty$

[Clausola Induttiva]

$$min(N(t_1,a,t_2)) = \begin{cases} a & \text{se } a \leq \min(min(t_1), min(t_2)) \\ \min(min(t_1), min(t_2)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 4</u>
Per prima cosa osserviamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$ordinato(N(\lambda, m, \lambda)) = \mathtt{t} \tag{1.1}$$

infatti $0 = max(\lambda) \leq m \leq min(\lambda) = \infty$, da cui

$$ordinato(N(\lambda, m, \lambda)) = ordinato(\lambda) \wedge ordinato(\lambda) = \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} = \mathtt{t}$$

<u>Calcolo per t_1</u>: scriviamo

$$\begin{array}{rcl} t_1 &=& N(N(N(\lambda,1,\lambda),3,N(\lambda,5,\lambda)),8,N(\lambda,10,N(N(\lambda,14,\lambda),13,N(\lambda,15,\lambda)))) \\ &=& N(t_1^{(l)}, 8, t_1^{(r)}) \end{array}$$

Poichè $max(t_1^{(l)}) = 5$ e $min(t_1^{(r)}) = 10$, si ha che

$$ordinato(t_1) = ordinato(t_1^{(l)}) \wedge ordinato(t_1^{(r)})$$

Ora:

$$\begin{array}{rcll} ordinato(t_1^{(l)}) &=& ordinato(N(\lambda,1,\lambda)) \wedge ordinato(N(\lambda,5,\lambda)) & (1 \leq 3 \leq 5) \\ &=& \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \\ &=& \mathtt{t} & \end{array}$$

Mentre $0 \leq 10 \leq 13$, da cui

$$\begin{array}{rcll} ordinato(t_1^{(r)}) &=& ordinato(\lambda) \wedge ordinato(N(N(\lambda,14,\lambda),13,N(\lambda,15,\lambda))) & (0 \leq 10 \leq 13) \\ &=& \mathtt{t} \wedge ordinato(N(N(\lambda,14,\lambda),13,N(\lambda,15,\lambda))) & \\ &=& \mathtt{t} \wedge \mathtt{f} & (13 < 14) \\ &=& \mathtt{f} & \end{array}$$

Di conseguenza

$$ordinato(t_1) = \mathtt{t} \wedge \mathtt{f} = \mathtt{f}$$

<u>Calcolo per t_2</u>: scriviamo

$$\begin{array}{rcl} t_2 &=& N(N(N(\lambda,1,\lambda),3,N(\lambda,5,\lambda)),8,N(\lambda,10,N(N(\lambda,12,\lambda),13,\lambda))) \\ &=& N(t_2^{(l)}, 8, t_2^{(r)}) \end{array}$$

Poichè $max(t_2^{(l)}) = 5$ e $min(t_2^{(r)}) = 12$, vale

$$ordinato(t_2) = ordinato(t_2^{(l)}) \wedge ordinato(t_2^{(r)})$$

Inoltre $t_2^{(l)} = t_1^{(l)}$, quindi sappiamo giÃ che

$$ordinato(t_2^{(l)}) = \mathtt{t}$$

Invece

$$\begin{array}{rcll} ordinato(t_2^{(r)}) &=& \mathtt{t} \wedge ordinato(N(N(\lambda,12,\lambda),13,\lambda)) & (0 \leq 10 \leq 13) \\ &=& \mathtt{t} \wedge ordinato(N(\lambda,12,\lambda)) \wedge \mathtt{t} & (12 \leq 13 \leq \infty) \\ &=& \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \\ &=& \mathtt{t} & \end{array}$$

Da cui

$$ordinato(t_2) = ordinato(t_1^{(l)}) \wedge ordinato(t_2^{(r)}) = \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} = \mathtt{t}$$

Calcolo per t_3: scriviamo

$$\begin{array}{rcl} t_3 & = & N(N(N(\lambda,1,\lambda),3,N(N(\lambda,4,\lambda),5,\lambda)),8,N(\lambda,10,N(N(N(\lambda,11,\lambda),12,\lambda),13,\lambda))) \\ & = & N(t_3^{(l)},8,t_3^{(r)}) \end{array}$$

Poichè $5 = max(t_3^{(l)}) \leq 8 \leq min(t_3^{(r)}) = 11$, vale di nuovo

$$ordinato(t_3) = ordinato(t_3^{(l)}) \wedge ordinato(t_3^{(r)})$$

Calcoliamo i due termini separatamente:

$$\begin{array}{rcll} ordinato(t_3^{(l)}) & = & \mathtt{t} \wedge ordinato(N(N(\lambda,4,\lambda),5,\lambda)) & (1 \leq 3 \leq 4) \\ & = & \mathtt{t} \wedge ordinato(N(\lambda,4,\lambda)) \wedge \mathtt{t} & (4 \leq 5 \leq \infty) \\ & = & \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \\ & = & \mathtt{t} & \end{array}$$

mentre

$$\begin{array}{rcll} ordinato(t_3^{(r)}) & = & \mathtt{t} \wedge ordinato(N(N(N(\lambda,11,\lambda),12,\lambda),13,\lambda)) & (0 \leq 10 \leq 11) \\ & = & \mathtt{t} \wedge ordinato(N(N(\lambda,11,\lambda),12,\lambda)) \wedge \mathtt{t} & (12 \leq 13 \leq \infty) \\ & = & \mathtt{t} \wedge N(\lambda,11,\lambda) \wedge \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & (11 \leq 12 \leq \infty) \\ & = & \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \\ & = & \mathtt{t} & \end{array}$$

da cui

$$ordinato(t_3) = \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} = \mathtt{t}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

La funzione $ins : \mathbb{N} \times BT_{\mathbb{N}} \longrightarrow BT_{\mathbb{N}}$ è definita per induzione su $BT_{\mathbb{N}}$ nel modo seguente:

[Clausola Base] $ins(n,\lambda) = N(\lambda,n,\lambda)$

[Clausola Induttiva] $ins(n,N(t_1,m,t_2)) = \begin{cases} N(t_1,m,ins(n,t_2)) & \text{se } n \geq m \\ N(ins(n,t_1),m,t_2) & \text{altrimenti} \end{cases}$

L'idea che sta alla base della definizione di ins è la seguente: dati n e $N(t_1,m,t_2)$ confronto m ed n, se $n < m$ inserisco n in t_1 altrimenti lo inserisco in t_2.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Dimostriamo la correttezza della funzione ins definita nell'esercizio precedente. L'enunciato è:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in BT_{\mathbb{N}},\ \text{se } ordinato(t) = \mathtt{t},\ \text{allora } ordinato(ins(n,t)) = \mathtt{t}.$$

Procediamo per induzione su $BT_{\mathbb{N}}$.

[Passo Base] $t = \lambda$.
Per definizione $ins(n,\lambda) = N(\lambda,n,\lambda)$ che risulta essere, per (1.1), ordinato per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[Passo Induttivo]
Sia $t = N(t_1,m,t_2)$ ordinato, cioè $ordinato(t) = \mathtt{t}$. Segue immediatamente dalla definizione di $ordinato$ che

$$ordinato(t_1) = \mathtt{t} \wedge ordinato(t_2) = \mathtt{t} \tag{1.2}$$

dunque, per ipotesi induttiva, si ha che

$$ordinato(ins(n,t_1)) = \mathtt{t} \wedge ordinato(ins(n,t_2)) = \mathtt{t}. \tag{1.3}$$

Se $n \geq m$ allora:

$$\begin{array}{rcll}
ordinato(ins(n,t)) & = & ordinato(ins(n, N(t_1, m, t_2)) & \\
 & = & odinato(N(t_1, m, ins(n, t_2))) & \text{(definizione di } ins\text{)} \\
 & = & ordinato(t_1) \wedge ordinato(ins(n, t_2)) & \text{(definizione di } ordinato\text{)} \\
 & = & \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \text{(da (2) e (3))} \\
 & = & \mathtt{t} &
\end{array}$$

Altrimenti ($n < m$):

$$\begin{array}{rcll}
ordinato(ins(n,t)) & = & ordinato(ins(n, N(t_1, m, t_2)) & \\
 & = & odinato(N(ins(n, t_1), m, t_2)) & \text{(definizione di } ins\text{)} \\
 & = & ordinato(ins(n, t_1)) \wedge ordinato(t_2) & \text{(definizione di } ordinato\text{)} \\
 & = & \mathtt{t} \wedge \mathtt{t} & \text{(da (2) e (3))} \\
 & = & \mathtt{t} &
\end{array}$$

E questo conclude la dimostrazione.