Formulario di Algebra Lineare - Formato Tabellare

1. VETTORI E SPAZI VETTORIALI

Concetto	**Definizione/Formula**	**Proprietà/Note**
Vettore in $\mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$	n -upla ordinata di numeri reali
Somma vettoriale	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$	Operazione componente per componente
Prodotto per scalare	$\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$	Moltiplicazione di ogni componente per λ
Prodotto scalare euclideo	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n$	Risultato: numero reale
Norma	$\\|\mathbf{v}\\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$	Lunghezza del vettore
Ortogonalità	$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$	Due vettori sono perpendicolari
Angolo tra vettori	$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\\|\mathbf{v}\\|\\|\mathbf{w}\\|}$	Per vettori non nulli
Verifica sottospazio	$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W, \forall \lambda \in K : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ e $\lambda\mathbf{u} \in W$	W sottospazio di V

2. INDIPENDENZA LINEARE E BASI

Concetto	**Definizione/Criterio**	**Proprietà**
Indipendenza lineare	$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$	Unica soluzione triviale
Dipendenza lineare	$\exists \lambda_i \neq 0$ tale che $\sum \lambda_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$	Almeno un vettore è combinazione degli altri
Base	Insieme di vettori linearmente indipendenti che genera V	Massimale indipendente, minimale generatore
Dimensione	$\dim(V)$ = numero di vettori in una base	Invariante per ogni base
Teorema estensione	Ogni insieme l.i. può essere esteso a base	Aggiungendo vettori opportuni
Teorema riduzione	Da ogni insieme di generatori si estrae una base	Eliminando vettori superflui

3. MATRICI E OPERAZIONI

Operazione	**Formula**	**Condizioni/Proprietà**
Somma matrici	$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	Stesse dimensioni $m \times n$
Prodotto matrici	$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$	$A : m \times p$, $B : p \times n \to AB : m \times n$
Trasposta	$(A^T)_{ij} = a_{ji}$	$(AB)^T = B^T A^T$
Matrice simmetrica	$A = A^T$	$a_{ij} = a_{ji}$
Matrice antisimmetrica	$A = -A^T$	$a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$
Matrice ortogonale	$AA^T = A^T A = I$	Colonne = base ortonormale
Determinante 2×2	$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	Area del parallelogramma
Determinante $n \times n$	$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$	Sviluppo di Laplace

4. SISTEMI LINEARI

Teorema/Metodo	**Formula/Criterio**	**Risultato**
Teorema Rouché-Capelli	$\text{rango}(A) = \text{rango}([A\|b]) = n$	Soluzione unica
	$\text{rango}(A) = \text{rango}([A\|b]) < n$	Infinite soluzioni
	$\text{rango}(A) < \text{rango}([A\|b])$	Nessuna soluzione
Regola di Cramer	$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$	Solo se $\det(A) \neq 0$
Eliminazione di Gauss	Operazioni elementari sulle righe	Forma a scala ridotta
Matrice inversa	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$	Esiste $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

5. AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Concetto	**Formula/Definizione**	**Calcolo/Proprietà**
Equazione caratteristica	$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$	$\mathbf{v}$ autovettore, λ autovalore
Polinomio caratteristico	$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$	Grado n per matrice $n \times n$
Autospazio	$V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$	Sottospazio vettoriale
Molteplicità algebrica	$m_a(\lambda) =$ molteplicità di λ in $p(\lambda)$	$m_a(\lambda) \geq 1$
Molteplicità geometrica	$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$	$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$
Diagonalizzabilità	$A = PDP^{-1}$	$\Leftrightarrow \sum m_g(\lambda_i) = n$
Matrice diagonale D	$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$	$P = [\mathbf{v}_1 \| \mathbf{v}_2 \| \cdots \| \mathbf{v}_n]$

6. ORTOGONALITÀ E PROIEZIONI

Processo/Formula	**Definizione**	**Applicazione**
Gram-Schmidt	$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$	Base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \to$
	$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{u}_j$	Base ortonormale $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$
	$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|}$	
Proiezione ortogonale	$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$	$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ base ortonormale di W
Distanza da sottospazio	$d(\mathbf{v}, W) = \|\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})\|$	Minima distanza
Matrice di proiezione	$P = UU^T$	U matrice con colonne base ortonormale

8. TRASFORMAZIONI LINEARI

Proprietà	**Formula/Definizione**	**Caratterizzazione**
Linearità	$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$	$T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$
Nucleo	$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$	Sottospazio di V
Immagine	$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$	Sottospazio di W
Teorema dimensione	$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$	Teorema del rango
Iniettività	T iniettiva $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$	$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$
Suriettività	T suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = W$	$\forall \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$
Matrice associata	$[T(\mathbf{v})]_C = A[\mathbf{v}]_B$	A rispetto basi B di V, C di W
Cambio base	$A' = Q^{-1}AP$	P, Q matrici cambio base