Esercizio 1

Consideriamo in $\mathbb{R}^5$ i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare data da

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \langle v, w_2 \rangle \end{pmatrix}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard.

$$\varphi((1,0,2,3,-1)) = (9, 6)$$

1) Calcolare $\dim \ker \varphi$ e trovare una base di $\ker \varphi$.
2) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali $(a, a+1)$ è contenuto in $\operatorname{im} \varphi$.

Scriviamo la matrice A associata a φ rispetto alle basi canoniche.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \varphi(e_4) & \varphi(e_5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$e_1 = (1,0,0,0,0)$
$e_2 = (0,1,0,0,0)$
$e_3 = (0,0,1,0,0)$
$e_4 = (0,0,0,1,0)$
$e_5 = (0,0,0,0,1)$

$$\ker \varphi : \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 12x_5 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$S: \left\{ 2x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 8x_5 = 0 \right.$$

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathrm{Sol}\ S = n - r(A)$$

$$= 5 - 1 = 4$$

Calcoliamo $r(A)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

$$\ker \varphi: \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3s - 4u \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque un sistema di generatori per $\ker\varphi$ è

$$\big((0,1,0,0,0),(-3,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(-4,0,0,0,1)\big)$$

Dato che $\dim\ker\varphi = 4$, questo è anche una base.

2) Scrivo le colonne di A come righe di una matrice.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 9 & 6 \\ 0 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \\ 9 & 6 \\ 0 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque una base per $\operatorname{im}\varphi$ è

$((1, 2/3))$ (Dunque $\dim \operatorname{im}\varphi = 1$)

Quando accade che $(a, a+1) \in \operatorname{im}\varphi$?

$\operatorname{im}\varphi = \underline{\operatorname{Span}((1, 2/3))}$

$$r\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2/3} \\ \boxed{a \quad a+1} \end{pmatrix} = 1$$

questo è la condizione che dice $(a, a+1) \in \operatorname{im}\varphi$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ a & a+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a + 1 - \frac{2}{3}a = 0$$

cioè $\frac{1}{3}a + 1 = 0$

cioè $\frac{1}{3}a = -1$

cioè $a = -3$

Quindi $(a, a+1) \in \operatorname{im}\varphi$ se e solo se

$a = -3$.

$$n = \dim \ker \varphi + \underset{\overset{\shortparallel}{r(A)}}{\dim \operatorname{im}\varphi}$$

$$\boxed{r(A) = n - \dim \ker \varphi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad r = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 9 & 6 \\ 0 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad r = 1$$

Esercizio 2

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di a la matrice A ha rango 3?

2) Per quali valori di a la matrice B ha un autovalore reale di molteplicità algebrica 3?

1) Deve essere $\det A = 0$

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \boxed{\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}}$$

$$\det A = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1\left(a^2 - a + 1 - 2a + 2 - a\right)$$

$$= -\left(a^2 - 4a + 3\right)$$

Troviamo le radici del polinomio $a^2 - 4a + 3$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Quindi gli unici casi in cui $r(A)$ potrebbe essere 3 sono $a = 3$ e $a = 1$.

Caso $a = 3$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}}$$

$$r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Caso $a = 1$

Caso $a=1$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=3$$

In conclusione A ha rango 3 se e solo se $a=3$ oppure $a=1$.

2) $$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-\lambda)\cdot(-\lambda)\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2\left((a-\lambda)^2-1\right)$$

$$= \lambda^2\left((a-\lambda)-1\right)\left((a-\lambda)+1\right)$$

$$\boxed{= \lambda^2\left((a-1)-\lambda\right)\left((a+1)-\lambda\right)}$$

autovalori: $0,\ a-1,\ a+1$

Se $a-1=0$ (cioè $a=1$)

il polinomio caratteristico diventa

$$\lambda^2(-\lambda)(2-\lambda)$$

cioè $-\lambda^3(2-\lambda)$ $\qquad \lambda^3=(\lambda-0)^3$

Se $a+1=0$ (cioè $a=-1$)

il polinomio caratteristico diventa

$$\lambda^2(-2-\lambda)(0-\lambda)$$

cioè $-\lambda^3(-2-\lambda)$

cioè $\lambda^3(\lambda+2) = (\lambda-0)^3(\lambda+3)$

Dunque esiste un autovalore di molteplicità algebrica 3 se e solo se $a=\pm 1$.

In tal caso l'autovalore in questione, di

In tal caso l'autovalore in questione, di molteplicità 3, è 0.

Esercizio 3

Determinare se esiste una trasf. lineare

$$f: \underline{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{tale che}$$

1) $f\left(\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$f\left(\underset{C}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f\left(\underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 3 \neq 4$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Non è a gradini!

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 4 & 10 & 10 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Questa matrice è a gradini!

Esiste una trasf. lineare che si comporta come richiesto nella prima parte dell'esercizio.

$v_1 \longmapsto w_1$ $\qquad f(v_1) = w_1$

$v_2 \longmapsto w_2$ $\qquad f(v_2) = w_2$

$v_3 \longmapsto w_3$ $\qquad f(v_3) = w_3$

$v_4 \longmapsto w_4$ $\qquad f(v_4) = w_4$

$v_1 \longmapsto w_1$ $\qquad f(v_1) = w_1$

$v_2 + v_1 \longmapsto w_2 + w_1$ $\qquad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$

$$v_2+v_1 \longmapsto w_2+w_1 \qquad f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=w_1+w_2$$

$$v_3 \longmapsto w_3 \qquad f(v_3)=w_3$$

$$v_4 \longmapsto w_4 \qquad f(v_4)=w_4$$

2) $$f\Big(\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}}\Big)=\overset{w_1}{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}},\quad f\Big(\overset{v_2}{\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}}\Big)=\overset{w_2}{\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}} \qquad V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$f\Big(\underset{v_3}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\Big)=\underset{w_3}{\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}},\quad f\Big(\underset{v_4}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}\Big)=\underset{w_4}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

$$r\begin{pmatrix}1&3&1&0\\2&-1&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=4\ ?$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&3&1&0\\2&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&3&1&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

SI, esiste una trasf. lineare f che ha le proprietà richieste.

Teor. fond. delle map. lineari:

Data una base dello spazio vettoriale finitamente generato V $(v_1, \dots, v_n)$ e dati n vettori dello spazio vettoriale W $w_1, \dots, w_n$, allora esiste un'unica mapp. lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $\dots$, $f(v_n) = w_n$.