Esercizi di ricapitolazione - probabilità

1 Condizionata

1. Abbiamo 3 scatole 1,2,3 contenenti la prima due monete da 50 centesimi, la seconda una da 50 centesimi e una da 1 euro, la terza due monete da 1 euro. Si scelga a caso una delle tre scatole, e da questa si estragga una moneta (con probabilità uguale per le 2 monete). La moneta estratta è da 50 centesimi.
   (a) Qual è la probabilità che la seconda moneta nella scatola sia anch'essa da 50 centesimi?
   (b) Rimettiamo nella scatola la moneta estratta e estraiamo a caso una moneta che risulta ancora da 50 centesimi. Qual è la probabilità che si tratti della prima scatola?
2. Un'urna contiene 6 palline di cui 3 Bianche, 2 Rosse ed 1 Nera. Si estraggono *senza reimmissione* tre palline e si vince se una delle tre è nera.
   (a) Qual è la probabilità di vincere ?
   (b) Qual è la probabilità di vincere sapendo che la pallina Nera non è uscita nelle prime due estrazioni?
   (c) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina Nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?

2 Variabili aleatorie

1. Una fabbrica produce dei bulloni. Il macchinario utilizzato produce un pezzo difettoso nel 2% dei casi. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 bulloni difettosi.
   (a) Qual è una variabile aleatoria X appropriata per contare il numero di pezzi difettosi in una confezione?
   (b) Qual è la probabilità di dover sostituire una data confezione?
   (c) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna variabile di Poisson.
2. Il peso del bagaglio di un passeggero che fa il check-in all'aeroporto di Venezia è una variabile aleatoria di media 15 kg e varianza 4 Kg. In un volo per Parigi salgono a bordo 144 persone. Utilizzando il Teorema del limite centrale, dare un'approssimazione della probabilità che il peso totale dei loro bagagli superi 2130 kg.
3. Sia F_X la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X, definita da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 6x^4 - 8x^3 + 3x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (a) Determinare la densità di X;
   (b) Determinare il valore atteso di X.
4. Il diametro interno medio delle guarnizioni prodotte da una macchina è dato da una variabile normale di media $0,502$ cm e deviazione standard $0,005$ cm. Per gli scopi per cui sono prodotte la tolleranza massima è tra $0,495$ cm e $0,508$ cm. In caso contrario sono difettose. Si calcoli la percentuale di quelle per cui il diametro è maggiore di 0,510cm.
5. Dei pezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20 cm; sono accettabili pezzi entro i limiti di tolleranza da 19.5 a 20.5 cm. La lunghezza reale dei pezzi prodotti è data da una variabile normale di media 20 cm, e deviazione standard 0.25 cm.
   (a) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza dati?
   (b) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la deviazione standard se vogliamo che il 99% dei pezzi rispettino i limiti di tolleranza?
6. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1000, p)$, dove $p \in [0, 1]$.

(a) Determinare p sapendo che la distribuzione di X si approssima con quella di una variabile di Poisson di parametro 2;

(b) Approssimando ora la variabile X con una opportuna variabile normale, fornire un risultato approssimato di $P(X \leq 3)$. (esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione della normale standard sui positivi).

7. Una moneta dà Testa con probabilità $1/4$, Croce con probabilità $3/4$. Ad ogni lancio si vince 1 euro se esce Testa, si perde $1/2$ euro se esce Croce. Si effettuano 16 lanci della moneta. Determinare, utilizzando il Teorema del limite centrale, la probabilità che alla fine dei 16 giochi un giocatore intaschi almeno 1 euro.

8. Nel correggere gli esercizi di una prova scritta incerta, un docente dichiara erroneamente sufficiente una prova con probabilità $1/5$.

   (a) Se nel primo appello vi erano 37 prove incerte, qual è la probabilità che vengano ingiustamente promosse almeno 5 persone (5 incluso)?

   (b) Approssimare il risultato precedente utilizzando prima una variabile di Poisson, poi una variabile normale.

9. Vi è una probabilità pari al 3% che una macchina fotografica ordinata via internet sia difettosa.

   (a) Determinare la probabilità che, su 1000 macchine fotografiche spedite ve ne siano al più 20 (≤ 20) difettose. Quale variabile aleatoria state considerando?

   (b) Approssimare il risultato precedente attraverso un'altra variabile aleatoria *discreta*.

   (c) Approssimare il risultato trovato in a) attraverso un'opportuna variabile aleatoria *continua*.

10. Il numero di chiamate ad un centralino in una data ora è una variabile di Poisson di media 250.

    (a) Qual è la probabilità che chiamino in quell'ora più di 260 persone?

    (b) Approssimare la probabilità precedente utilizzando la variabile normale, motivandone la ragione. Esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione Φ sui reali positivi.

11. Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo che è una variabile aleatoria continua T di densità

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

    (a) Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T;

    (b) siano T_1 la durata della prima pila sostituita, T_2 la durata della seconda pila sostituita,..., T_m la durata dell'm-esima batteria sostituita,...; descrivere a parole l'evento $T_1 + ... + T_{72} > 250$;

    (c) Approssimare la probabilità $P(T_1 + ... + T_{72} > 250)$: semplificare le espressioni trovate ed esprimere il risultato con un numero esplicito. [Utilizzando la tabella dei valori della distribuzione della normale standard].

12. Il 35% dell'elettorato è a favore di Pinco Pallino. In una sezione elettorale votano 200 persone (scelte a caso") e X è il numero di quelle che sono a suo favore.

    (a) Determinare la probabilità che $X \geq 75$;

    (b) Fornire il risultato approssimato utilizzando il teorema centrale del limite;

13. Il numero di errori tipografici di ogni pagina di un libro è una variabile di media $1/2$ e varianza $1/9$. Supponiamo che il numero di errori in una pagina sia indipendente dal numero di errori presenti in ogni altra pagina. Il libro ha 400 pagine.

    (a) Determinare media e varianza della variabile che conta il numero complessivo di errori tipografici nel libro.

    (b) Fornire una formula approssimata per la probabilità che il libro contenga meno di 180 errori tipografici.

3 Congiunte

3.1 Congiunte discrete

1. Abbiamo tre dadi, uno rosso, uno verde ed uno bianco. Il dado rosso ha le facce numerate da 1 a 6; in quello verde compaiono solo i numeri 1, 2, 3 ciascuno ripetuto due volte; in quello bianco compaiono solo i numeri 1, 2 ciascuno ripetuto tre volte. Lancio il dado rosso; se esce un numero pari lancio il dado verde, altrimenti quello bianco. Indico con X ed Y le variabili aleatorie che registrano rispettivamente l'esito del primo lancio e del secondo lancio dei dadi. Determinare la densità congiunta di X ed Y; sono X ed Y indipendenti? Calcolare $P(X \leq Y)$.

2. Siano X_i, $i = 1, 2, 3$, variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametro $1/(i+1)$. Si considerino le variabili discrete $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_2 + X_3$.

   (a) Si calcoli la densità discreta di X.

   (b) Si calcoli la densità congiunta di (X, Y) in $(0, 2)$, $(1, 2)$ e in $(2, 2)$.

   (c) Usare (b) per determinare la densità discreta di Y in 2.

   (d) X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti?

3. Sia Ω uno spazio campionario e X, Y due variabili aleatorie su Ω che assumono rispettivamente i valori $\{7, 8, 16\}$ e $\{4, 2\}$. Sono conosciute le probabilità congiunte $p(a, b)$ cioè la probabilità che X assuma valore a e che Y assuma valore b.

$$p(7,4) = 0.1; p(7,2) = 0.1; p(8,4) = 0.2; p(8,2) = 0.3; p(16,4) = 0.2; p(16,2) = 0.1$$

   (a) Calcolare le densità di X e Y, cioè le densità marginali.

   (b) Le due variabili aleatorie sono indipendenti?

   (c) Calcolare il valore atteso delle v.a. X e Y.

   (d) Si consideri la variabile aleatoria data dal prodotto XY, trovare i valori assunti. Tra i valori assunti vi è 32: calcolare $P(XY = 32)$.

4. Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti con legge uniforme su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; si può pensare a due lanci indipendenti di un dado regolare. poniamo $M = \max\{X, Y\}$.

   (a) Determinare $P(M = j | X = i)$ per i valori di i e j per i quali tale probabilità non è nulla (conviene distinguere i casi $i = j$ e $i \neq j$);

   (b) dedurre dal punto precedente la densità discreta di M.

5. Siano X, Y due variabili discrete con legge congiunta

$$p(0,0) = 1/7, \quad p(0,1) = 3/7, \quad p(1,0) = 2/7, \quad p(1,1) = 1/7.$$

   Si dica se X, Y sono indipendenti motivando la risposta.

3.2 Congiunte continue

1. Sia (X, Y) una variabile congiunta continua uniforme sul quadrato di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ (cioè la cui densità è costantemente uguale a $1/2$ sul quadrato). Calcolare le densità marginali.

2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 5ye^{-y(x+5)} & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y).

(a) Determinare le densità marginali di X e Y.

3. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y). Determinare le densità marginali di X e di Y;

4. Supponiamo che la densità congiunta di due v.a. X ed Y sia

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (a) Determinare la densità marginale di X e di Y;

   (b) Sono le v.a. X ed Y indipendenti?

5. Siano X e Y due variabili indipendenti e uniformi su $[0, 1]$. Calcolare $P(X + Y > 1/2)$ e $P(XY > 1/2)$.

6. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X, Y).

   X, Y sono indipendenti?