Esame scritto ALAN 10-02-2022, prima parte.

1) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \lambda \\ \lambda & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 9 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) stabillre il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ dire se esiste, ed eventualmente determinarne uno, un vettore dei termini noti $B \in \mathbb{R}^3$ tale che il sistema $AX = B$ non abbia soluzioni.

2) Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa verificando il risultato.

b) stabilire se esiste un vettore $X \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza 2 tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Se una matrice invertibile $A \in M_n(\mathbb{R})$ è tale che $A^2 = A$, allora $\det A = 1$.

b) Esistono 5 vettori di $\mathbb{R}^4$ che formano una base di $\mathbb{R}^4$.

c) Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $a_{ij} = 0 \ \forall i \geq j$ è nilpotente (cioè esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$).

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$: $\quad \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) stabilire se $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 3\pi \\ \frac{7\pi}{2} \end{pmatrix}$ appartiene a $\langle v_1, v_3 \rangle$.

b) trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonale sia a v_1 che a v_2. I vettori v_1, v_2, v formano una base di $\mathbb{R}^3$? Se si, si tratta di una base ortogonale?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2h & 2 \\ 1 & h & -1 & 2h \\ 1 & -h & h+1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_1C_2C_3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2h \\ 1 & h & -1 \\ 1 & -h & h+1 \end{vmatrix} = h^2 + \cancel{h} - \cancel{h} - (-h-1+2h^2) - h - 1 + 2h^2 =$$

$$= h^2 \cancel{+h} \cancel{+1} - \cancel{2h^2} \cancel{-h} \cancel{-1} + \cancel{2h^2}$$

$$h^2 + \cancel{h} - \cancel{h} + h + 1 + 1 - 2h^2 - 2h^2 = -3h^2 + h + 2 \rightsquigarrow \det = 0 \text{ se } \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-6} \begin{cases} 1 & x = 1 \\ -\frac{2}{3} & x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{2}{3}\}$ $rk(A) = 3$ e quindi si hanno ∞^1 soluzioni

se $h = 1$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad R_1 = R_3 \Rightarrow rkA \leq 2$$

$\det(R_1R_2 | C_1C_2) = 2 \Rightarrow rkA = 2 \rightsquigarrow h = 1$ si hanno ∞^2 soluzioni

se $h = -\frac{2}{3}$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4/3 & 2 \\ 1 & -2/3 & -1 & -4/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(C_1C_3C_4) \neq 0 \Rightarrow rk = 3 \Rightarrow \exists\, \infty^1 \text{ soluzioni}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 9 & -1 \end{matrix}$$

1) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \lambda \\ \lambda & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 9 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) stabillre il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ dire se esiste, ed eventualmente determinarne uno, un vettore dei termini noti $B \in \mathbb{R}^3$ tale che il sistema $AX = B$ non abbia soluzioni.

$$\det(C_1C_2C_3) : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 4 & 6 \\ 0 & 5\lambda & 9 \end{vmatrix} = 36 - 30 + 6\lambda - 18\lambda + 15\lambda - 3\lambda^2 = -3\lambda^2 + 3\lambda + 6$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{-6} = \frac{-3 \pm 9}{-6} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ si ha $rkA = 3$ ed ∞^1 soluzioni

se $\lambda = -1$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3 = R_2 + R_1 \Rightarrow rkA \leq 2 \quad \det(R_1R_2 | C_1C_2) \neq 0 \Rightarrow rkA = 2$$

se $\lambda = -1$ $rkA = 2$ e si hanno ∞^2 soluzioni

se $\lambda = 2$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \quad \det(C_1C_2C_4) = -4 + 4 + 6 = 6 \Rightarrow rkA = 3 \text{ e si hanno } \infty^1 \text{ soluzioni}$$

2) Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa verificando il risultato.

b) stabilire se esiste un vettore $X \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza 2 tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1} \qquad \det A = 2 - 1 = 1$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ verificata}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|X\| = 2 \leadsto \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$$

$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

$$\begin{aligned} & x - y = 1 \\ & 2x + z = 1 \\ & 3x - 2y + z = 1 \\ & x^2+y^2+z^2 = 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x = 1 + y \quad x = 2 \\ & z = 1 - 2x = 1 - 2(1+y) = 1 - 2 - 2y = -2y - 1 \quad z = -3 \\ & 3 + 3y - 2y - 2y - 1 = 1 \\ & -y = -1 \quad y = 1 \end{aligned}$$

NON PUÒ AVERE lunghezza = 2

3) Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Se una matrice invertibile $A \in M_n(\mathbb{R})$ è tale che $A^2 = A$, allora $\det A = 1$. Vero

b) Esistono 5 vettori di $\mathbb{R}^4$ che formano una base di $\mathbb{R}^4$.

c) Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $a_{ij} = 0 \ \forall i \geq j$ è nilpotente (cioè esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$).