Vettori

lunghezza $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Somma $v + w = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ regola parallelogramma

pr. scalare $v \cdot w = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1)$

- $=0 \quad v \perp w$
- $>0 \quad \theta < \frac{\pi}{2}$
- $<0 \quad \theta > \frac{\pi}{2}$

pr. ortogonale $p = \frac{v \cdot w}{\|w\|} \cdot \frac{w}{\|w\|}$ $\quad \|p\| = \frac{v \cdot w}{\|w\|}$

disuguaglianza triangolare

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Spazi Vettoriali

pr. vettoriale $v \wedge w = \begin{pmatrix} \det R_2 R_3 \\ \det R_1 R_3 \\ \det R_1 R_2 \end{pmatrix}$

$(v \wedge w) \cdot v = 0 \quad (v \wedge w) \cdot w = 0$

$\|v \wedge w\| = 0$ sse $v // w$

area triangolo ABC $= \frac{\|AC \wedge AB\|}{2}$

vettore $u \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\|u\| = 1$ e ortogonale a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

consideriamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ si ha $v \wedge w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in cui $\left\| \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{12 \lambda^2} = 1$

quindi $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$ e $u = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dipendenza Lineare

$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a\lambda_1 + c\lambda_2 \\ b\lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2 : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \overset{A}{\begin{pmatrix} a\lambda_1 + c\lambda_2 \\ b\lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$? se $\det A \neq 0$ per Cramer $\exists!$ soluzione, quindi $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$

i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono l.i.? $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \xrightarrow{\text{Cramer}} \exists!$ soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono l.i.

$v_1 \dots v_r \in K^n$ son l.i. $\Leftrightarrow$ la matrice $(v_1 \dots v_r) \in M_{nr}(K)$ ha rango r

- se $r > n \Rightarrow$ sono l.d.
- $|v_1 \dots v_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ sono l.i

Base

K^n ha n vettori, come la base canonica $\Rightarrow \dim_K V = n$

ORTOGONALE se il prodotto scalare $v_i \cdot v_j = 0$ per tutti i vettori della base

ORTONORMALE se è ortonormale e $v_i \cdot v_i = 1$ per tutti i vettori della base

Co $v \cdot v = \|v\|^2$ è una base di vettori di lunghezza 1

Matrici

determinante $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23}$

$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$

Rango

$AX = B$ ammette soluzione $\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B)$

e queste saranno $\infty^{n - rk(A)}$ $\quad (A \in M_{mn}(K)$ e $B \in M_{m1}(K)$

Invertibilità

$\det \neq 0 \Rightarrow$ è invertibile

complemento algebrico di a_{ij}: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ $\quad$ es: $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$

$A_{ij} = A$ senza R_i e C_j

$c_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -16$

$c_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12$

$c_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -16 \\ 0 & -3 & 12 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $rk(A)$.

b) determinare, se esiste, una soluzione di lunghezza $\sqrt{6}$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rango = 3

(b) $AX = 0 \quad \|X\| = \sqrt{6} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \rightsquigarrow x_2 = 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \rightsquigarrow x_1 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_3^2 + 4x_3^2 + x_3^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = -1 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\|X\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Se esiste, esibire $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$ sia 3.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = \lambda^2 - \lambda + 1$ $\Delta < 0$ λ^2 positivo $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$(\det(A) > 0)$

la matrice é invertibile per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(b) $$\begin{cases} x_1 + \lambda x_3 = 0 \\ x_2 - \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\lambda x_3 \\ 1 + \lambda x_3 - \lambda - \lambda^2 x_3 = 1 \rightsquigarrow x_3(-\lambda^2 + \lambda) = \lambda \\ x_2 = +1 + \lambda x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{1-\lambda} \\ x_3 = \frac{1}{1-\lambda} \\ x_2 = 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzioni se $\lambda = 1$

(c) $\|A \cdot B\| = 3$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1-\lambda-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A \cdot B\| = 3 \rightsquigarrow \lambda^2 + \lambda^2 + 1 = 9$$
$$2\lambda^2 = 8$$
$$\lambda^2 = 4$$
$$\boxed{\lambda = 2}$$

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(A) = 2$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + x_4 \\ x_4 = -3x_2 + 2x_3 \\ -2x_2 - \cancel{4x_3} - 3x_2 + \cancel{2x_3} + x_2 + x_3 - 3x_2 + \cancel{2x_3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ -7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

esistono ∞ soluzioni

credo si risolve così

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6-\lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

a) $\det A = -\lambda + \lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^2 = \lambda^2$ é invertibile per $\lambda \neq 0$

b)

$$\begin{cases} x + \lambda z = 2 \\ 2x - \lambda y + z = 1 \\ 3x - \lambda y + \lambda z = 6 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - \lambda z \\ 4 - 2\lambda z - \lambda y + z = 1 \qquad y = \dfrac{-z + 2\lambda z - 3}{-\lambda} \\ \cancel{6} - \cancel{3\lambda z} - z + \cancel{2\lambda z} - 3 + \cancel{\lambda z} = \cancel{6} - \lambda \end{cases}$$

$-z = 3 - \lambda \qquad z = \lambda - 3$

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda^2 + 3\lambda \\ y = \dfrac{-\lambda + \cancel{3} + 2\lambda^2 - 6\lambda - \cancel{3}}{\lambda} = \dfrac{2\lambda^2 - 7\lambda}{\lambda} = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$$

il sistema ammette sempre soluzione

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \|A \cdot B\| = \sqrt{49 + 64 + 100} = \sqrt{213}$$

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.

b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.

c) $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

era da fare con $M_3(\mathbb{R})$
ma il concetto é questo

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

ⓐ rk M deve essere $= 3$ ed essere composta da 3 vettori

$v_1 = -v_3 = v_2 + v_4$

$\Downarrow$

v_5 deve per forza fare parte della B

$\begin{pmatrix}1&0&3\\1&3&0\\1&0&-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&0&-6\end{pmatrix}$ rk $= 3$ $\langle v_1, v_4, v_5\rangle$ è base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}-1&0&3\\-1&3&0\\-1&0&-3\end{pmatrix} \longrightarrow \dots$ rk $= 3$ $\langle v_3, v_4, v_5\rangle$ è base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&3&0\\1&0&-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&6\\0&0&-6\end{pmatrix}$ rk $= 3$ $\langle v_2, v_4, v_5\rangle$ è base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-2&0\\1&1&-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&3\\0&-3&-3\\0&0&-6\end{pmatrix}$ rk $= 3$ $\langle v_1, v_2, v_5\rangle \dots$

$\begin{pmatrix}-1&1&3\\-1&-2&0\\-1&1&-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1&1&3\\0&-3&-3\\0&0&-6\end{pmatrix}$ rk $= 3$ $\langle v_2, v_3, v_5\rangle \dots$

i sottoinsiemi $\{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}$ ....

ⓑ $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $v_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= 0\\ v_2 \cdot v_5 &= 0\\ v_1 \cdot v_5 &= 0\end{aligned}}$

$v_1 \cdot v_2 = 1 - 2 + 1 = 0$

$v_2 \cdot v_5 = 0 + 0 - 3 = -3$ non è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$