

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 5/6/2018

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{3 + x} - \frac{3 - 2\sqrt{x}}{3 - x}$$

per piccoli valori di x .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{(a1):} \quad x &\mapsto r := \sqrt{x} &\mapsto n1 &:= 3 + 2r, \ d1 := 3 + x, \ n2 := 3 - 2r, \ d2 := 3 - x \\ & &&\mapsto f1 := n1/d1, \ f2 := n2/d2 &\mapsto y1 := f1 - f2 \\ \text{(a2):} \quad x &\mapsto r := \sqrt{x} &\mapsto n &:= 12r - 6x, \ q := x^2 &\mapsto y2 := n/(9 - q) \\ \text{(a3):} \quad x &\mapsto r := \sqrt{x} &\mapsto s &:= 2 - r, \ d1 := 3 + x, \ d2 := 3 - x \\ & &&\mapsto p1 := 6 \cdot r \cdot s, \ p2 := d1 \cdot d2 &\mapsto y3 := p1/p2 \end{aligned}$$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno.

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione scritta nella forma $g(x) = \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin(x/2)$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	0	π	2π	3π
y	-1	0	1	2

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A . Calcolare inoltre 3 iterazioni del metodo a partire dal vettore iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5.

6. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, il suo nucleo $\mathcal{N}(A)$ e la sua immagine $\mathcal{R}(A)$?

Nel seguito, sia A una matrice 8×5 avente i valori singolari 10, 4, 10^{-3} , 0, 0.

- (a) Determinare la dimensione delle matrici U, Σ, V della SVD di A .
- (b) Determinare la dimensione di $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$.
- (c) Determinare i valori singolari della matrice $B = AA^t$.
- (d) Determinare la dimensione di $\mathcal{N}(B)$ e $\mathcal{R}(B)$.