Esame scritto ALAN 10-02-2022, prima parte.

1) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \lambda \\ \lambda & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 9 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) stabillre il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ dire se esiste, ed eventualmente determinarne uno, un vettore dei termini noti $B \in \mathbb{R}^3$ tale che il sistema $AX = B$ non abbia soluzioni.

2) Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa verificando il risultato.

b) stabilire se esiste un vettore $X \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza 2 tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Se una matrice invertibile $A \in M_n(\mathbb{R})$ è tale che $A^2 = A$, allora $\det A = 1$.

b) Esistono 5 vettori di $\mathbb{R}^4$ che formano una base di $\mathbb{R}^4$.

c) Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $a_{ij} = 0\ \forall i \geq j$ è nilpotente (cioè esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$).

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

a) stabilire se $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 3\pi \\ \frac{7\pi}{2} \end{pmatrix}$ appartiene a $\langle v_1, v_3 \rangle$.

b) trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonale sia a v_1 che a v_2. I vettori v_1, v_2, v formano una base di $\mathbb{R}^3$? Se si, si tratta di una base ortogonale?