

# Calculus 1

Prova scritta del 10 gennaio 2022

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3}.$$

- (a) Determinare  $\text{dom } f$ , calcolare i limiti di  $f$  agli estremi di  $\text{dom } f$  e determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali.
- (b) Studiare il segno, la monotonia e la concavità convessità di  $f$ , determinando eventuali punti di minimo/massimo assoluti e relativi.
- (c) Determinare l'immagine di  $f$  e disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

2. Siano

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = x \cos x.$$

Per ciascuna funzione:

- (a) dire con quale tecnica, se “per sostituzione” o “per parti”, si calcola una primitiva, e calcolare l'integrale indefinito
- (b) dire quanto valgono, se esistono, gli integrali definiti fra  $-\frac{\pi}{n}$  e  $\frac{\pi}{n}$ , con  $n = 1, 2, 4$

3. Per  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sia  $f_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\log x - 1 + x}{x - 1} & \text{se } 0 < x < 1, \\ \sin(\pi x) + \alpha \cos(\pi x) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $f_\alpha$  è continua.
- (b) Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $f_\alpha$  è derivabile.