

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Calcolo Numerico**  
**Esame del 6/6/2017**

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \frac{4+x^2}{4-x^2} - \frac{4-x^2}{4+x^2}$$

per piccoli valori di  $x$ .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di  $f(x)$ .

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di  $f(x)$ :

- (a1):  $x \mapsto q := x^2 \mapsto p := 4 + q, m := 4 - q \mapsto r1 := p/m, r2 := m/p \mapsto y1 := r1 - r2$   
(a2):  $x \mapsto r := 2/x, pp := r^2 + 1, mm := r^2 - 1 \mapsto y2 := (pp/mm) - (mm/pp)$   
(a3):  $x \mapsto q := x^2 \mapsto n := 16q, d := 16 - q^2 \mapsto y3 := n/d$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $\beta$  opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  della funzione scritta nella forma  $g(x) = \alpha + \beta \cos(x/2) + \gamma \cos x$  che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

$x$	$-\pi$	$0$	$\pi$	$2\pi$
$y$	$-1$	$0$	$1$	$-1/2$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si consideri il metodo delle potenze inverse applicato alla matrice  $A$ ; per quali valori dello shift  $p$  il metodo converge all'autovalore  $\lambda = 1$ ?

5. Si considerino la matrice  $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$  e i vettori  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$$b = A \cdot x \text{ e } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ -9.1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/99 & -1/99 \\ -1/99 & 10/99 \end{pmatrix}$ .

(ii) Calcolare i condizionamenti  $\mu_1(A)$  e  $\mu_\infty(A)$  relativi alle norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_2$  per ognuno dei vettori  $x$ ,  $b$  e  $\delta b = \tilde{b} - b$ .

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore  $\|\tilde{x} - x\|_\infty$  per la soluzione del sistema lineare perturbato  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ .