Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 12/2/2020

Cognome................................ Nome................................. Email.................................

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = \dfrac{2}{4x-1} + \dfrac{4}{x+2}$ per piccoli valori di x.

   (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

   (b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

   (b1): $\quad x \mapsto f1 := \dfrac{2}{4x-1},\ f2 := \dfrac{4}{x+2} \ \mapsto\ y1 := f1 + f2$

   (b2): $\quad x \mapsto n := 18x,\ d := 4x^2 + 7x - 2 \ \mapsto\ y2 := n/d$

   (b3): $\quad x \mapsto\ r := 1/x \ \mapsto\ t1 := \dfrac{2r}{4-r},\ t2 := \dfrac{2r}{1/2+r} \ \mapsto\ y3 := t1 + t2$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno. Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	0	0	1	1	2
y	-1	0	-2	0	-1	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A.

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e i vettori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = A \cdot x$ e $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 0.001 \\ 1.002 \end{pmatrix}$.

(a) Sapendo che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare il condizionamento $\mu_\infty(A)$ relativo alla norma $\| \cdot \|_\infty$.

(b) Calcolare le norme $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ per ognuno dei vettori x, b e $\delta b = \tilde{b} - b$.

(c) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = \tilde{b}$.