Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 9/1/2020

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

per piccoli valori positivi di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \ \mapsto p := \frac{\pi}{4} + x,\ m := \frac{\pi}{4} - x \ \mapsto\ s1 := \sin p,\ s2 := \sin m \ \mapsto\ y1 := s1 - s2$
(a2): $x \ \mapsto s := \sin x \ \mapsto\ y2 := \sqrt{2} \cdot s$
(a3): $x \ \mapsto\ p := \frac{\pi}{4} + x,\ m := \frac{\pi}{4} - x \ \mapsto\ c1 := \cos p,\ c2 := \cos m \mapsto\ y3 := c2 - c1$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con s opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione scritta nella forma

$$g(x) = \alpha + \beta \sin(x/2) + \gamma \sin x$$

che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y	0	-1	1	0

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A nei due casi in cui vengono usati rispettivamente gli shift $p = -3$ e $p = 1/2$.

5. Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} -\alpha x^3 + 3(\alpha+1)x^2 - 3(\alpha-1)x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \alpha x^3 - 3(\alpha-1)x^2 + 3(\alpha+1)x - \alpha & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che S è una spline per ogni valore del parametro α.

(b) Determinare i valori del parametro α tali che S sia anche naturale.