

Esame scritto ALAN 21-01-2022, prima parte.

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\text{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del

sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.

b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.

c) $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^3 ,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di \mathbb{R}^3 ?

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\text{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del

sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk}(A) = 2$

③ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + x_4 \\ x_4 = -3x_2 + 2x_3 \\ -2x_2 - 4x_3 - 3x_2 + 2x_3 + x_2 + x_3 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -7x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -7x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{esistono } \infty \text{ soluzioni}$

↳ credo si risolve così

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

① $\det A = -\lambda + \lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^2 = \lambda^2$ e invertibile per $\lambda \neq 0$

② $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x - \lambda y + z = 1 \\ 3x - \lambda y + \lambda z = 6 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2z \\ 4 - 2\lambda z - \lambda y + z = 1 \quad y = \frac{-z + 2\lambda z - 3}{-\lambda} \\ 6 - 3\lambda z - z + 2\lambda z - 3 + \lambda z = 6 - \lambda \\ -z = 3 - \lambda \quad z = \lambda - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - \lambda^2 + 3\lambda \\ y = \frac{-\lambda + 5 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 3}{\lambda} = \frac{2\lambda^2 - 7\lambda - 2}{\lambda} = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases} \quad \text{il sistema ammette sempre soluzione}$

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \|A \cdot B\| = \sqrt{49 + 64 + 100} = \sqrt{213}$

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.

b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.

c) $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

① $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ per di fare con $M_2(\mathbb{R})$ me il concetto è questo

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^3 ,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di \mathbb{R}^3 ?

② $rk M$ deve essere $= 3$ ed essere composta da 3 vettori

$$v_1 = -v_3 = v_2 + v_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad rk=3 \quad \langle v_1, v_4, v_5 \rangle \text{ è base di } \mathbb{R}^3$$

v_5 deve per forza
essere parte della B

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad rk=3 \quad \langle v_3, v_4, v_5 \rangle \text{ è base di } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad rk=3 \quad \langle v_2, v_4, v_5 \rangle \text{ è base di } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad rk=3 \quad \langle v_1, v_2, v_5 \rangle \dots$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad rk=3 \quad \langle v_2, v_3, v_5 \rangle \dots$$

i sottoinsiemi $\{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \dots$

⑥ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_2 \cdot v_5 = 0 \\ v_1 \cdot v_5 = 0 \end{matrix}}$

$$v_1 \cdot v_2 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$v_2 \cdot v_5 = 0 + 0 - 3 = -3$$

non è una base ortogonale di \mathbb{R}^3