| DOM | Determinare il dominio di f e scriverlo come unione di Intervalli: **dom(f)** **= (-∞ , -2) U (-2 , +2) U (+2 , +∞)** |
|---|---|

DEVO STARE ATTENTO A 4 COSE

1) DENOMINATORI $\Rightarrow$ SE CE NE SONO, VANNO POSTI DIVERSI DA 0

ESEMPIO: $y = \frac{x}{x^2-4}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2\}$

2) RADICI DI INDICE PARI $\Rightarrow$ I LORO ARGOMENTI VANNO POSTI $\geq 0$

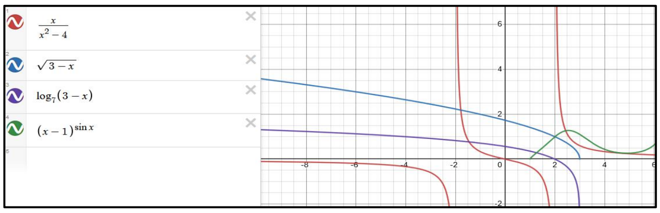
ESEMPIO: $y = \sqrt[4]{3-x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$

3) LOGARITMI $\Rightarrow$ I LORO ARGOMENTI VANNO POSTI $> 0$

ESEMPIO: $y = \log_7(3-x)$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

4) $[f(x)]^{g(x)}$ $\Rightarrow$ LA FUNZIONE $f(x)$ VA IMPOSTA $> 0$

ESEMPIO: $y = (x-1)^{\sin x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$




$\rightarrow$ GLI ARGOMENTI DI ARCOSENO E ARCOCOSENO DEVONO ESSERE COMPRESI TRA -1 E 1

UNA VOLTA DETERMINATO IL DOMINIO, CONVIENE ELIMINARE DAL PIANO CARTESIANO LE ZONE IN CUI LA FUNZIONE NON È DEFINITA

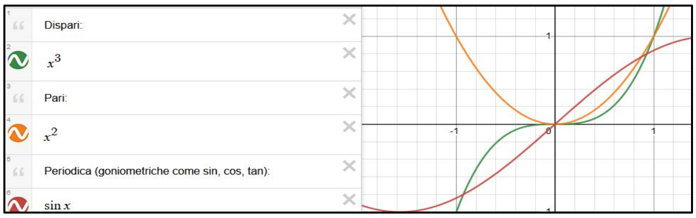
| SIMMETRIE E PERIODICITÀ | Verificare simmetrie trovando parità e disparità (facoltativo) |
|---|---|

$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{LA FUNZIONE È PARI (GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y)} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{LA FUNZIONE È DISPARI (GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE)} \\ \neq & \Rightarrow \text{LA FUNZIONE NON È NÉ PARI NÉ DISPARI} \end{cases}$

L'ANALISI DELLE SIMMETRIE È FACOLTATIVA MA MOLTO UTILE PER FARE DEI CONTROLLI DI COERENZA NEI PASSAGGI SUCCESSIVI

LE UNICHE FUNZIONI PERIODICHE MOLTO RICORRENTI SONO QUELLE GONIOMETRICHE

L'EVENTUALE PERIODICITÀ CONSENTE DI LIMITARE LO STUDIO DELLA FUNZIONE AD UN SOLO PERIODO




| SEGNO E INTERSEZIONI | Determinare (se possibile) il segno della funzione e eventuali intersezioni con gli assi *(ponendo la funzione ≥ 0 per vedere dov'è positiva, dov'è negativa e per trovare i suoi 0 "zeri")* |
|---|---|

OPERATIVAMENTE, SI TRATTA DI RISOLVERE $f(x) \geq 0$ (OPPURE $f(x) \leq 0$, NON IMPORTA)

GLI EVENTUALI VALORI DI X PER CUI $f(x) = 0$ SONO LE ASCISSE DEI PUNTI DEL PIANO IN CUI IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTERSECA L'ASSE X

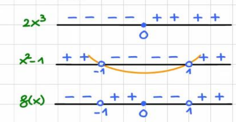
PER TROVARE L'EVENTUALE INTERSEZIONE CON L'ASSE Y BASTA CALCOLARE $f(0)$: IL PUNTO DI COORDINATE $(0, f(0))$ È L'INTERSEZIONE CERCATA

NATURALMENTE CERCO L'INTERSEZIONE CON L'ASSE Y SOLO SE X=0 FA PARTE DEL DOMINIO TROVATO AL PUNTO 1

STUDIARE LA FUNZIONE $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$

IL DENOMINATORE $x^2-1$ SI ANNULLA IN $\pm 1$ $\longrightarrow$ $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$

$f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-2x^3}{x^2-1} = -f(x)$ $\Rightarrow$ LA FUNZIONE È DISPARI, OVVERO HA IL GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE



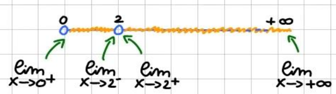

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTERSECA L'ASSE DELLE ASCISSE IN X=0

(0,0) È ANCHE L'INTERSEZIONE CON L'ASSE Y

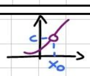
| LIMITI E ASINTOTI | Trovare i Limiti nei punti che abbiamo eliminato ma che creano degli intervalli oltre che agli estremi del dominio stesso |
|---|---|

VANNO CALCOLATI I LIMITI NEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DEL DOMINIO CHE NON APPARTENGONO AL DOMINIO E AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

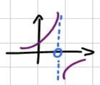
AD ESEMPIO, NEL CASO DELLA FUNZIONE $y = \frac{\ln x}{x-2}$, AVENTE COME INSIEME DI DEFINIZIONE $\{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge x \neq 2\}$, DOVRÒ CALCOLARE



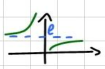

SE $x_0 \notin$ DOMINIO E $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ $\Rightarrow$ IL GRAFICO DELLA FUNZIONE HA UN "BUCO" IN $(x_0, c)$ (PUNTO ESCLUSO/DISCONTINUITÀ ELIMINABILE)




SE $x_0 \notin$ DOMINIO E ALMENO UNO TRA I LIMITI DESTRO E SINISTRO IN $x_0$ FA $+\infty$ O $-\infty$ $\Rightarrow$ LA RETTA $x = x_0$ È ASINTOTO VERTICALE



SE $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ E/O $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ LA RETTA $y = l$ È UN ASINTOTO ORIZZONTALE (SINISTRO E/O DESTRO)




SE $f(x)$ HA ASINTOTI ORIZZONTALI O OBLIQUI, VALE LA PENA VERIFICARE SE ESSI INTERSECANO IL GRAFICO DELLA FUNZIONE. PER TROVARE LE EVENTUALI INTERSEZIONI BASTA METTERE A SISTEMA $y = f(x)$ CON L'EQUAZIONE DELL'ASINTOTO

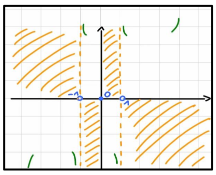
$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{2x^{\cancel{3}}}}{\cancel{x^2}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$

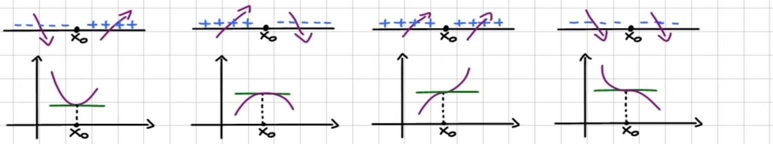
LA RETTA DI EQUAZIONE X=1 È ASINTOTO VERTICALE



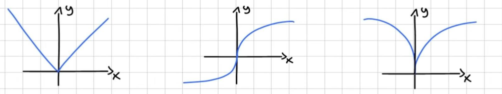
| **DERIVATA PRIMA** | Studio di crescenza, decrescenza, monotonia, massimi e minimi |
|---|---|

NEGLI INTERVALLI IN CUI LA DERIVATA PRIMA E' POSITIVA, $f(x)$ E' CRESCENTE
" " " " " E' NEGATIVA, $f(x)$ E' DECRESCENTE

SE LA DERIVATA PRIMA SI ANNULLA IN $x_0$, OVVERO $f'(x_0)=0$, CI SONO 4 POSSIBILITA':




SE LA DERIVATA PRIMA NON E' DEFINITA IN $x_0$, OVVERO $\nexists f'(x_0)$, CI SONO 3 POSSIBILITA':




PUNTI ANGOLOSI

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

FLESSI A TG. VERTICALE

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ E $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ SONO ENTRAMBI UGUALI A $+\infty$ O A $-\infty$

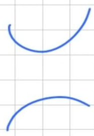
CUSPIDI

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ E $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ FANNO UNO $+\infty$ E L'ALTRO $-\infty$ OPPURE VICEVERSA

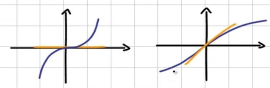
| **DERIVATA SECONDA** | Studio del segno della concavità |
|---|---|

NEGLI INTERVALLI IN CUI LA DERIVATA SECONDA E' POSITIVA $f(x)$ E' CONVESSA (CONCAVITA' VERSO L'ALTO)

NEGLI INTERVALLI IN CUI LA DERIVATA SECONDA E' NEGATIVA $f(x)$ E' CONCAVA (CONCAVITA' VERSO IL BASSO)



SE A CAVALLO DI UN CERTO PUNTO $x_0$ SI ANNULLA E CAMBIA DI SEGNO LA DERIVATA SECONDA

| **CALCOLARE LA DERIVATA** | Regole per calcolare la derivata n-esima di una qualunque funzione |
|---|---|

**Funzioni costanti, potenze (con esponente naturale o reale) e radici**

| **Funzione** $f(x)$ | **Derivata** $f'(x)$ |
|---|---|
| costante | $y' = 0$ |
| $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ | $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ |
| $y = \sqrt[n]{x}$ con $n > 0$ | $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |

**Funzioni esponenziali e logaritmi**

| **Funzione** $f(x)$ | **Derivata** $f'(x)$ |
|---|---|
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |

| **Funzione** $g(x)$ | **Derivata** $g'(x)$ |
|---|---|
| $g(x) = f(x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ | $g'(x) = \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \sin f(x)$ | $g'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \cos f(x)$ | $g'(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \tan f(x)$ | $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x) = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \cot f(x)$ | $g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(f(x))} \cdot f'(x) = -(1 + \cot^2 f(x)) \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \arcsin f(x)$ | $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \arccos f(x)$ | $g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \arctan f(x)$ | $g'(x) = \dfrac{1}{1 + f(x)^2} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \text{arccot}\, f(x)$ | $g'(x) = -\dfrac{1}{1 + f(x)^2} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = a^{f(x)}$ | $g'(x) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = e^{f(x)}$ | $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ |
| $g(x) = \log_a f(x)$ | $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$ |
| $g(x) = \ln f(x)$ | $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ |

**Funzioni goniometriche**

| **Funzione** $f(x)$ | **Derivata** $f'(x)$ |
|---|---|
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = \tan x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |
| $y = \cot x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ |
| $y = \arcsin x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $y = \arctan x$ | $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ |
| $y = \text{arccot}\, x$ | $y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ |

| regole di derivazione | |
|---|---|
| $D\, k \cdot f(x) = k \cdot f'(x)$ | prodotto di una **costante** k per una funzione |
| $D\, f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$ | **somma** di due o più funzioni |
| $D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ | **prodotto** di due funzioni |
| $D\, f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ | **prodotto** di tre funzioni |
| $D\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ | **rapporto** di due funzioni |
| $Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ | funzione **composta** |
| $Df(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x) \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$ | funzione **elevata** ad una funzione |

## Esempi:

**Derivata del prodotto di due funzioni** $\boldsymbol{D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

$D\,(x^2\, tgx) = 2x \cdot tgx + x^2 \cdot \dfrac{1}{cos^2 x}$

$D\,(7lnx \cdot e^x) = 7\, \dfrac{1}{x} \cdot e^x + 7lnx \cdot e^x = 7e^x\left(\dfrac{1}{x} + lnx\right)$

**Derivata del rapporto di due funzioni** $\boldsymbol{D\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$

$D\left(\dfrac{2+x}{3x}\right) = \dfrac{(1) \cdot 3x - (2+x) \cdot 3}{(3x)^2} = \dfrac{3x - 3(2+x)}{(3x)^2} = \dfrac{x - 2 - x}{3x^2} = -\dfrac{2}{3\,x^2}$

| CALCOLARE IL LIMITE | Per risolvere un limite basta sostituire a meno che non si trovi una forma indeterminata |
|---|---|

**Forme Indeterminate:**

| | | |
|---|---|---|
| $+\infty-\infty$ | $0\cdot\infty$ | $1^{\infty}$ |
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $0^{0}$ |
| $\infty^{0}$ | | |

**De L'Hopital:**

**TEOREMA DI DE L'HOPITAL** Siano $f,g:[a,b]\to R$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$ . Sia $x_0\in]a,b[$ tale che $f(x_0)=g(x_0)=0$, e sia $g'(x)\neq 0$ per $x\neq x_0$. Allora se esiste il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, e i due limiti coincidono

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

| Limiti Fondamentali | $\lim_{x\to a} f(x)=L$ |
|---|---|
| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ | $1$ |
| $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ | $e$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ | $\log(a)$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ | $1$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$ | $0$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\tan(x)}$ | $1$ |
| $\lim_{x\to\infty}\log(x)$ | $\infty$ |
| $a>1\land\lim_{x\to-\infty}a^x$ | $0$ |
| $a>1\bigwedge\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x$ | $\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+}\log(x)$ | $-\infty$ |
| $\{m,\,n\}\in\mathbb{N}\bigwedge\lim_{x\to\infty}\frac{\log^m(x)}{x^n}$ | $0$ |
| $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ | $0$ |
| $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ | $\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ | $-\infty$ |
| $n\in\mathbb{N}\land\lim_{x\to\infty}x^n$ | $\infty$ |

| Limiti Fondamentali | $\lim_{x\to a} f(x)=L$ |
|---|---|
| $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ | $1$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\lim_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos(x)}$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ |
| $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$ | $\frac{1}{e}$ |
| $\lim_{x\to+\infty}x^4\left(\log(4+x^4)-4\log(x)\right)$ | $4$ |
| con $n\in\mathbb{Z},\ n>0$<br>$\lim_{x\to+\infty}x^n\left(\log(n+x^n)-n\log(x)\right)$ | $n$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x}-1)}$ | $-1$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{2x}-1}{\sin(x^2)}$ | $6$ |
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+x^3+5x}{5x^4+2x^2+x}$ | $\frac{3}{5}$ |
| $\lim_{x\to 0}\frac{3x^4+x^3+5x}{5x^4+2x^2+x}$ | $5$ |
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+x\log(x)+\sin(x^2)}{x+x\log(x)+4^{-x}}$ | $\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+}x\log(x)$ | $0$ |
| $\lim_{x\to 0^+}x^x$ | $1$ |
| $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}$ | $-\infty$ |

## LOGARITMI

### Regole dei logaritmi e risultati di logaritmi comuni

| definizione | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{log_b\, a = x}$ | $b =$ base  $b > 0\ \ b \neq 1$<br>$a =$argomento  $a > 0$<br>$x\ =$logaritmo in base $b$ di $a$  $x \in \mathbb{R}$ | il logaritmo di un numero è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento cioè: $\boldsymbol{b^x = a}$<br><br>esempio: $log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$ |

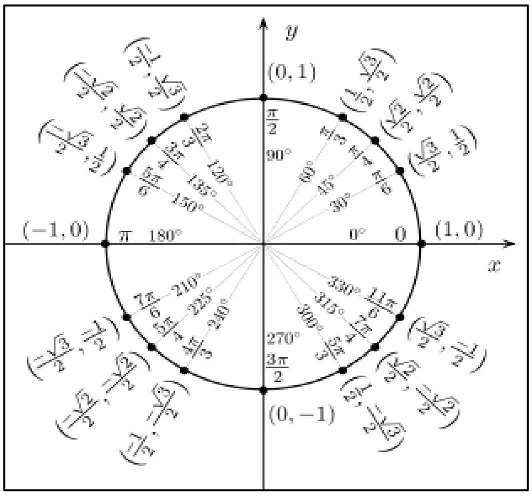
| teoremi principali | |
|---|---|
| $log_b\, a + log_b\, c = log_b(a \cdot c)$ | teorema del prodotto |
| $log_b\, a - log_b\, c = log_b\left(\frac{a}{c}\right)$ | teorema del rapporto |
| $c\ log_b\, a = log_b\, a^c$ | teorema della potenza |

| proprietà derivate dai teoremi principali | |
|---|---|
| $log_{b^n}\, a^m = log_b a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} log_b\, a$ | potenza ad esponente frazionario |
| $log_{\frac{1}{b}}\, a = -\,log_b\, a$ | invertire la base |
| $log_b \frac{1}{a} = -\,log_b\, a$ | invertire l'argomento |
| $log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a} = log_b\, a$ | invertire la base con l'argomento |
| $log_b\, a = \frac{1}{log_a\, b}$ | scambiare di base ed argomento |
| $log_n\, a = \frac{log_v\, a}{log_v\, n}$  $v = vecchia\ base$  $n = nuova\ base$ | cambio di base |
| $n = log_b\, b^n$ oppure $n = b^{log_b n}$ | trasformare un numero n in **logaritmo** o in **potenza** |
| $log_b\, b = 1$  $log_b\, 1 = 0$  $b^x > 0$ | casi particolari |

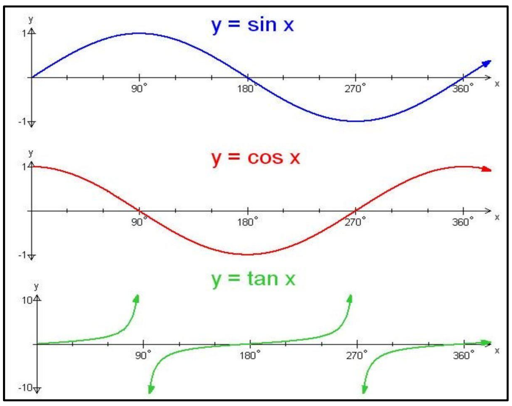
## TRIGONOMETRIA

### Cerchio trigonometrico e tabella di conversione

( cos(ϑ), sin(ϑ) )




| quadrante | rad + | deg + | seno | coseno | tangente | cotangente | rad − | deg − |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| primo quadrante | $0$ | 0° | $0$ | $1$ | $0$ | $\infty$ | $-2\pi$ | −360° |
| | $\frac{\pi}{6}$ | 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $-\frac{11}{6}\pi$ | −330° |
| | $\frac{\pi}{4}$ | 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ | $-\frac{7}{4}\pi$ | −315° |
| | $\frac{\pi}{3}$ | 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{5}{3}\pi$ | −300° |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 90° | $1$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | $-\frac{3}{2}\pi$ | −270° |
| secondo quadrante | $\frac{2}{3}\pi$ | 120° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{4}{3}\pi$ | −240° |
| | $\frac{3}{4}\pi$ | 135° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ | $-\frac{5}{4}\pi$ | −225 |
| | $\frac{5}{6}\pi$ | 150° | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{7}{6}\pi$ | −210° |
| | $\pi$ | 180° | $0$ | $-1$ | $0$ | $\infty$ | $-\pi$ | −180° |
| terzo quadrante | $\frac{7}{6}\pi$ | 210° | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $-\frac{5}{6}\pi$ | −150° |
| | $\frac{5}{4}\pi$ | 225° | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ | $-\frac{3}{4}\pi$ | −135° |
| | $\frac{4}{3}\pi$ | 240° | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | −120° |
| | $\frac{3}{2}\pi$ | 270° | $-1$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | $-\frac{\pi}{2}$ | −90° |
| quarto quadrante | $\frac{5}{3}\pi$ | 300° | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | −60° |
| | $\frac{7}{4}\pi$ | 315° | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ | $-\frac{\pi}{4}$ | −45° |
| | $\frac{11}{6}\pi$ | 330° | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | −30° |
| | $2\pi$ | 360° | $0$ | $1$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | 0° |




$$y = \sin^{-1}(x) \quad \text{or} \quad y = \arcsin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(y) = x$$

$$y = \tan^{-1}(x) \quad \text{or} \quad y = \arctan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \tan(y) = x$$

$$y = \cos^{-1}(x) \quad \text{or} \quad y = \arccos(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

| DIVISIONE TRA POLINOMI | Divisione per semplificare i polinomi, utile per derivate e primitive |
|---|---|

SVOLGERE LA DIVISIONE TRA IL POLINOMIO $A(x)$ E IL POLINOMIO $B(x)$ (DI GRADO $\leq$ DEL PRECEDENTE) SIGNIFICA TROVARE DUE POLINOMI $Q(x)$ E $R(x)$ TALI CHE

$$\underbrace{A(x)}_{\text{DIVIDENDO}} = \underbrace{B(x)}_{\text{DIVISORE}} \cdot \overbrace{Q(x)}^{\text{QUOZIENTE}} + \underbrace{R(x)}_{\text{RESTO}}$$

SI PUO' DIMOSTRARE CHE
- IL GRADO DI $Q(x)$ E' LA DIFFERENZA TRA IL GRADO DI $A(x)$ E QUELLO DI $B(x)$
- IL GRADO DI $R(x)$ E' MINORE DEL GRADO DI $B(x)$

**Procedimento:**

SVOLGERE LA DIVISIONE TRA $x^3-2x^2+x-3$ E $x^2+1$

1) dividere la x con esponente maggiore del dividendo (in questo caso x^3) con la x maggiore del divisore (x^2) poi incolonnare il risultato (x) a destra, sotto il dividendo

2) moltiplicare il risultato per il divisore e inserire i risultati in colonna sotto il dividendo cambiati di segno (-x^3, -x), in corrispondenza dei valori del dividendo con lo stesso esponente

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+x-3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad -x & x \end{array}$$

3) sommare i valori incolonnati a sinistra e riportare sotto il risultato, ripetere dal passaggio 1 finchè l'esponente maggiore del divisore non è minore di quello del dividendo

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+x-3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad -x & \underbrace{x-2}_{\text{QUOZIENTE}} \\ \hline \qquad -2x^2 \quad -3 & \\ \qquad\ \ 2x^2 \quad +2 & \\ \hline \qquad\qquad\quad \underbrace{-1}_{\text{RESTO}} & \end{array}$$

$$\underbrace{x^3-2x^2+x-3}_{\text{DIVIDENDO}} = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{DIVISORE}}\overbrace{(x-2)}^{\text{QUOZIENTE}}+\overbrace{(-1)}^{\text{RESTO}}$$

| CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ | Regole per trovare la continuità e la derivabilità di una funzione definita a tratti (e non) |
|---|---|

| f(x) non a tratti | f(x) a tratti |
|---|---|
| CONTINUITÀ<br>per determinare la continuità nella funzione data, basta trovarne il dominio<br>DERIVABILITÀ<br>per la derivabilità della funzione data, serve trovare il "dominio" del risultato del seguente limite | TROVARE DISCONTINUITÀ E PUNTI DI NON DERIVABILITÀ TRA I RACCORDI - ESEMPIO: |

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ESEMPIO f(x)=sqrt(x+2)

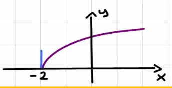
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h\cancel{+2}\cancel{-x}\cancel{-2}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2})}$$

$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2})} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$f(x)$ E' CONTINUA IN $[-2,+\infty)$ E DERIVABILE IN $(-2,+\infty)$




$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq -2 \\ x^2-4 & -2<x<2 \\ \sqrt{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

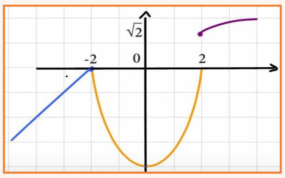
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} (x+2) = 0 \\ \lim_{x\to -2^+} (x^2-4) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{array}\right\} \text{ } f(x) \text{ È CONTINUA IN } x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} (x^2-4) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$f(x)$ NON E' CONTINUA IN $x=2$ DOVE PRESENTA UNA DISCONTINUITA' DI I° SPECIE (SALTO)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} 1 = 1 \\ \lim_{x\to -2^+} 2x = -4 \end{array}\right\}$$

$f(x)$ NON È DERIVABILE IN $x=-2$ DOVE PRESENTA UN PUNTO ANGOLOSO



| INTEGRALI INDEFINITI | Metodi per risolvere integrali indefiniti, per i definiti basta sostituire e sottrarre i valori dati (sopra - sotto) |
|---|---|

## INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$f = x$ $\quad f' = 1$

$g' = \cos x$ $\quad g = \sin x$

## INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

$$\int \cos x \cdot \sin(\sin x)\,dx = \int \sin y\,dy = -\cos y + c = -\cos(\sin x) + c$$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

## INTEGRAZIONE PER FRATTI SEMPLICI

$y = \dfrac{m(x)}{d(x)}$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE $\leadsto$ se grd $d(x) >$ grd $m(x)$ salto questo passaggio
2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE, ovvero scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado e/o di secondo grado non ulteriormente scomponibili
3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI
4. INTEGRAZIONE DEI VARI PEZZETTINI :)

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

1. $$\begin{array}{r|l} x^3-3x-1 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2+2x & x+1 \\ \cline{1-1} // \ +x^2-x-1 & \\ -x^2+x+2 & \\ \cline{1-1} // \ // \ 1 & \end{array}$$ $$\frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{1}{x^2-x-2}$$
2. $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$
3. $$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$ $$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \leadsto \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \leadsto \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$ $$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}$$
4. $$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \left[x+1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right]dx$$ $$= \int x\,dx + \int dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$ $$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + c = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$$

## INTEGRALI FONDAMENTALI

| | |
|---|---|
| $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$ | $\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$ |
| $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$ | $\int f(x)^{-1} \cdot f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$ |
| $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ | $\int \sin[f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + c$ |
| $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ | $\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \sin[f(x)] + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2[f(x)]} \cdot f'(x)\,dx = \tan[f(x)] + c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2[f(x)]} \cdot f'(x)\,dx = -\cot[f(x)] + c$ |
| $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ |
| $\int e^x\,dx = e^x + c$ | $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)\,dx = \arcsin[f(x)] + c$ |
| $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)\,dx = \arccos[f(x)] + c$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$ | $\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)\,dx = \arctan[f(x)] + c$ |