

Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame del 21/1/2022 (6 CFU + seconda parte per 9 CFU)

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{x-2}{x+2}$ per valori di x *molto grandi*.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

$$(b1): \quad x \mapsto f1 := \frac{2x-1}{2x+1}, \quad f2 := \frac{x-2}{x+2} \mapsto y1 := f1 - f2$$

$$(b2): \quad x \mapsto n := 6x, \quad d := 2x^2 + 5x + 2 \mapsto y2 := n/d$$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con γ opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri a, b, c della funzione scritta nella forma

$$g(x) = a |x| + b x + c$$

che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 6 |
| y | 1 | 5 | 3 | -5 | -2 |

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Verificare che $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità 2 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di A .

Calcolare le prime 3 iterazioni del metodo delle potenze a partire dal vettore iniziale $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dire se il metodo delle potenze è convergente.

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -100 & 0 & 101 \end{pmatrix}$ e i vettori

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = A \cdot x \text{ e } \delta b = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ -10^{-2} \\ 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 101 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ per ognuno dei vettori x , b e δb .

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = b + \delta b$.