Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 10/2/2017

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$$

per piccoli valori positivi di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento della funzione radice quadrata.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto s := 3 + x,\ d := 3 - x \mapsto r1 := \sqrt{s},\ r2 := \sqrt{d} \ \mapsto\ y1 := r1 - r2$

(a2): $x \mapsto r1 := \sqrt{3+x},\ r2 := \sqrt{3-x} \ \mapsto\ n := 2x,\ dd := r1 + r2 \ \mapsto\ y2 := n/dd$

(a3): $x \mapsto r := \dfrac{3}{x},\ rx := \sqrt{x} \ \mapsto\ rr1 := \sqrt{r+1},\ rr2 := \sqrt{r-1} \ \mapsto\ y3 := rx \cdot (rr1 - rr2)$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con γ opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	0	0	0	1	1	2
y	0	$1/2$	$-1/2$	1	1	0	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A nei due casi in cui vengono usati rispettivamente gli shift $p = 1$ e $p = 2$.

5. Si consideri, al variare del parametro α, la funzione

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x^3 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \alpha x^2 - x^3 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

(i) Determinare per quali valori di α la funzione S è una spline sui nodi $-1, 0, 1$.

(ii) Determinare per quali valori di α la funzione S interpola sui nodi $-1, 0, 1$ la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$.

(iii) Determinare per quali valori di α, tra quelli determinati al punto (i), la spline S è anche naturale.