

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame dell'11/9/2018

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \cos^2 x - \cos^2 2x$$

per piccoli valori di x .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto c1 := \cos x, c2 := \cos 2x \mapsto q1 := c1 \cdot c1, q2 := c2 \cdot c2 \mapsto y1 := q2 - q1$

(a2): $x \mapsto c1 := \cos x, c2 := \cos 2x \mapsto s := c2 + c1, d := c2 - c1 \mapsto y2 := s \cdot d$

(a3): $x \mapsto s := \sin x \mapsto s2 := s \cdot s \mapsto f1 := 4 \cdot s2 - 3 \mapsto y3 := f1 \cdot s2$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con m opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3.

4. Determinare i parametri α, β, γ della funzione scritta nella forma $g(x) = \alpha + \beta x + \frac{\gamma}{x}$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	$-1/2$	$1/2$	1
y	1	0	2	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

5. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 8×8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A .

6. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, il suo rango, il suo nucleo $\mathcal{N}(A)$ e la sua immagine $\mathcal{R}(A)$?

Nel seguito, sia A una matrice 9×4 di rango 2.

- (a) Determinare la dimensione delle matrici U, Σ, V della SVD di A .
- (b) Determinare in funzione di U, Σ, V la SVD di A^t .
- (c) Determinare il rango della matrice A^t .
- (d) Determinare in funzione delle colonne di U e V una base degli spazi $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^t)$ e $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^t)$.