2) $P\{X=2, Y=3\} = 1/3$ $\quad P\{X=3, Y=3\} = 1/4$

$P\{X=3, Y=4\} = 1/4$ $\quad P\{X=2, Y=1\} = 1/6$

a)

X \ Y	1	3	4	Marg x
2	1/6	1/3	0	1/2
3	0	1/4	1/4	1/2
Marg y	1/6	7/12	1/4	

$P(X=2) = 1/2$
$P(X=3) = 1/2$
$P(Y=1) = 1/6$
$P(Y=3) = 7/12$
$P(Y=4) = 1/4$

b) $E[X] = 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/2 = 1 + 3/2 = \frac{5}{2}$

$E[Y] = 1 \cdot 1/6 + 3 \cdot 7/12 + 4 \cdot 1/4 = 1/6 + \frac{21}{12} + 1 = \frac{2+21+12}{12} = \frac{35}{12}$

c) $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)p(x,y) = 2 \cdot 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 3 \cdot 1/4 + 3 \cdot 4 \cdot 1/4 +$
$+ 2 \cdot 1 \cdot 1/6 = \frac{91}{12}$

d) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{91}{12} - \frac{5}{2} \cdot \frac{35}{12} = \frac{91}{12} - \frac{175}{24} = \frac{7}{24}$

e) Le variabili sono dipendenti poiché se fossero indipendenti la covarianza sarebbe 0 e inoltre le marginali non sono uguali

f) $P\{X \leq 3, Y \leq 3\}$ = vado a vedere le prob. dei casi in cui quella condizione risulta vera e le sommo:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$

3) Se X e Y sono indipendenti, $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ infatti

$E[g(X)h(Y)] = \sum_x \sum_y g(x)h(y)p(x,y) = \sum_x \sum_y g(x)h(y)p(x)p(y)$

$= \sum_x g(x)p(x) \sum_y h(y)p(y) = E[g(X)]E[h(Y)]$

Quindi essendo la covarianza definita come

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

sostituendo risulta

$Cov(X,Y) = E[X]E[Y] - E[X]E[Y]$ che fa 0

4) X_1, X_2, X_3, X_4 variabili casuali indipendenti

$$E[X_1]=E[X_2]=E[X_3]=E[X_4]=0$$

$$Var(X_1)=Var(X_2)=Var(X_3)=Var(X_4)=1$$

$$Y_1=X_1+X_2 \qquad Y_2=X_2+X_3 \qquad Y_3=X_3+X_4$$

a) $$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$\rho(Y_1,Y_2)=\frac{E[(x_1+x_2)(x_2+x_3)]-E[x_1+x_2]E[x_2+x_3]}{\sqrt{Var(x_1+x_2)Var(x_2+x_3)}}=$$

$$=\frac{E[x_1x_2+x_1x_3+x_2x_2+x_2x_3]-\overset{=0}{E[x_1]}\,\overset{=0}{E[x_2]}\,\overset{=0}{E[x_2]}\,\overset{=0}{E[x_3]}}{\sqrt{1+1}\,\sqrt{1+1}}=$$

questo è possibile essendo indipendenti

$$=\frac{\overset{=0}{E[x_1]}\,\overset{=0}{E[x_2]}+\overset{=0}{E[x_1]}\,\overset{=0}{E[x_3]}+\overset{*}{E[x_2^2]}+\overset{=0}{E[x_2]}\,\overset{=0}{E[x_3]}}{2}=$$

$$= * \quad Var\,x_2=E[x_2^2]-(\overset{\text{so che è 0 per ip}}{E[x_2]})^2=1$$

$$E[x_2^2]=1$$

$$=\frac{1}{2}$$

b) Y_1 e Y_3 sono indipendenti infatti non hanno nessun x_n in comune (nel punto a) Y_1 e Y_2 avevano X_2 in comune) pertanto la covarianza sarà 0.

$$\rho(Y_1,Y_3)=\frac{0}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_3)}}=0$$

5) μ = { altezza di una persona }

$x_1 \dots x_n$ = { misurazioni in cm }

σ = { derivazione standard = 1 cm }

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \mu$$

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}$$

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - d\right| \geq 0.5\right\} \leq \frac{1}{0.25n} = \frac{4}{n}$$

Ponendo $\frac{4}{n} = 10\%$ otteniamo che per ottenere una confidenza del 90% ci servono:

$\frac{4}{n} = \frac{1}{10}$ $\quad n = 40$ misurazioni.

6) Sappiamo che $Z_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nd\right) / (2\sqrt{n})$

al crescere di n tende alla distribuzione normale standard perché:

$$P\left\{-0.5 \leq \left(\frac{\sum_i x_i}{n} - d\right) \leq 0.5\right\} = P\left\{-0.5\frac{\sqrt{n}}{1} \leq Z_n \leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{1}\right\}$$

$$P\left\{-0.5\frac{\sqrt{n}}{1} \leq Z_n \leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{1}\right\} \approx \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1$$

Ponendo $2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 = 90\%$ otteniamo che per ottenere una confidenza del 95% abbiamo bisogno di

$2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 1.90$

$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.95$ $\qquad z = \phi^{-1} 0.95 = 1.645$ valore ottenuto dalla tabella della funzione di ripartizione della variabile casuale normale.

$\frac{\sqrt{n}}{2} = 1.645$ $\qquad n = 10.82 \approx 11$

misurazioni

1) $x = \{$ variabile casuale continua con pdf $f_x(x)$

$Y = |x|$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{|x| < y\} = \begin{cases} P\{x < y\} \\ P\{x > -y\} \end{cases}$$

derivando:

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \frac{d\,F_x(y)}{dy} = f_x(y) \cdot 1 \quad \text{oppure } -f_x(y) \cdot 1$$

3) b)

$$P\{X=2, Y=3\} = 1/2$$
$$P\{X=2, Y=-3\} = 1/2$$

Cerco di trovare una X e una Y per le quali $E[X,Y]=0$ e $E[X]E[Y]=0$

$P(X=2)=1$

$P(X=-3)=1/2$

$P(X=3)=1/2$

$X \backslash Y$	-3	$+3$	Marg X
2	$1/2$	$1/2$	1
Marg y	$1/2$	$1/2$	

$$E[X] = 2 \cdot 1 = 2$$

$$E[Y] = -3 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/2 = 0$$

$$E[XY] = 2 \cdot 3 \cdot 1/2 + 2 \cdot (-3) \cdot 1/2 = 0$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 0 = 0$$