

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) + \frac{1}{x},$$

- a) determinate il dominio di definizione e calcolate la derivata prima f'
- b) calcolate i limiti agli estremi del dominio di definizione e l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (1, f(1))$
- c) stabilite gli intervalli di monotonia di f determinando, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi
- d) disegnate il grafico di f stabilendo se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluto, e determinate quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -3$
- e) determinate, se esistono, le intersezioni con gli assi e gli intervalli dove $f(x)$ è maggiore di zero
- f) denotata con g la restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$, stabilite se g è invertibile, determinate il dominio di g^{-1} e posto $y_0 = g(1) = f(1)$, calcolate

$$g^{-1}(y_0) \quad (g^{-1})'(y_0)$$

(non si può calcolare esplicitamente g^{-1}).

Esercizio 2. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 1} \quad g(x) = 3x \ln x - x$$

a) calcolate

$$\int f(x) dx \quad \int g(x) dx$$

b) calcolate la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x (f(t) + g(t)) dt,$$

e la derivata prima $F'(x)$.

Esercizio 3. Calcolate, se esistono, i seguenti limiti

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + x^5 - x^2}{5x^2 - 3x^5 + 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \cos(\pi x) \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\ln(1 - 2 \sin x)}$$