

# Calculus 1

Prova scritta del 19 luglio 2021

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \ln \left( \frac{3x+1}{x+3} \right).$$

- (a) Determinare  $\text{dom } f$ , calcolare i limiti di  $f$  agli estremi di  $\text{dom } f$  e determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali.
- (b) Studiare il segno e la monotonia di  $f$ , determinando eventuali punti di minimo/massimo assoluti e relativi.
- (c) Determinare l'immagine di  $f$  e disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

2. Sia  $f(x) = x^2 \ln(x^2 - 1)$ .

- (a) Determinare, utilizzando la formula di integrazione per parti,  $\int f(x) dx$ .
- (b) Trovare, se esistono,  $a, b \in \text{dom } f$  tali che  $\int_a^b f(x) dx < 0$ .
- (c) Trovare, se esistono,  $c, d \in \text{dom } f \setminus \{a, b\}$  tali che  $\int_c^d f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

3. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = e^{-x^2}$ .

- (a) Stabilire se  $f$  è iniettiva e/o surgettiva.
- (b) Determinare la retta tangente a  $f$  in 1.
- (c) Determinare un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $1 \in I$  e  $f|_I$  sia invertibile.
- (d) Determinare la retta tangente a  $(f|_I)^{-1}$  in  $\frac{1}{e}$ .