Matricola: 4811831
HAIDER ALI

Esame Scritto 11/02/2021

1) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2}$

(a) Il condizionamento di f(x) è calcolabile mediante la formula:

$$C = \frac{x\, f'(x)}{f(x)}$$

$$C = \frac{x \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(4 \sin^2 x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(4 \sin^2 x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$

$$C_{\sin} = \frac{x \cos x}{\sin x} \qquad C_{\cos} = \frac{-x \sin x}{\cos x}$$

ESERCIZIO 2:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{cerco } G(2,1,\theta) \text{ t.c. } x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{4+1}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$s = \frac{-x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2}} = \frac{+1}{\sqrt{5}}$$

$$G(2,1,\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(2,1,\theta) \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

considero $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$ cerco $G(2,5,\theta)$ t.c. $\begin{bmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{\sqrt{5}} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sqrt{9}$

$$c = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} \qquad s = \frac{-2}{\sqrt{9}}$$

$$G(2,5,\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$G(2,5,\theta)\, G(2,1,\theta) \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isometria

Rappresentazione grafica:

La prima rotazione ha agito sul piano $\langle e_2, e_1 \rangle$

la seconda rotazione ha agito sul piano $<e_2, e_5>$

Esercizio 3:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A^T b$$ <u>equazione normale</u>

$$\begin{bmatrix} 22 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

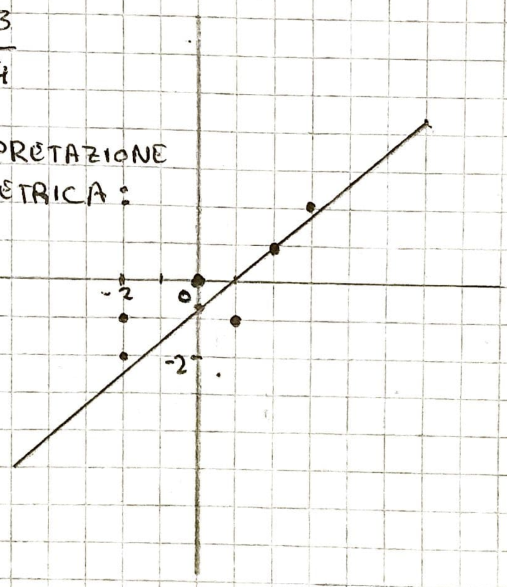
$$\begin{cases} 22p + 2q = 20 \\ 2p + 6q = 3 \end{cases} \longrightarrow q = \frac{20 - 22p}{2}$$

$$\begin{cases} q = 10 - 11p \\ 2p + 60 - 66p = 3 \end{cases} \longrightarrow p = \frac{57}{64}$$

$$\begin{cases} q = \frac{13}{64} \\ p = \frac{57}{64} \approx \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$y = \frac{57}{64}x + \frac{13}{64}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:



La retta di regressione minimizza lo scarto fra i valori che la retta assume sui punti delle ascisse e i valori y dei punti che sono ~~dat~~ stati dati.

ESERCIZIO 4:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema SPETTRALE

A è simmetrica $\Rightarrow$ Diagonalizzabile

$\exists$ autovalori reali, autovettori ortogonali tra loro.

- Calcolo gli autovalori attraverso il polinomi caratteristico:

$$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -2-\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)^2(2-\lambda) - (-2-\lambda) + 5 + \lambda + 3 - 18 + 9\lambda$$

$$= (-2-\lambda)^2(2-\lambda) - 8 + 11\lambda$$

$\lambda = 0$ si

- Auto vettori / autospazi

ESERCIZIO 5:

$A^{7\times4}$ e $\tilde{A}^{3\times5}$

(a) $A = U\ \Sigma\ V^T$ — U: 7×7, Σ: 7×4, V^T: 4×4

$\tilde{A} = \tilde{U}\ \tilde{\Sigma}\ \tilde{V}^T$ — $\tilde{U}$: 3×3, $\tilde{\Sigma}$: 3×5, $\tilde{V}^T$: 5×5

b)

① $A A^T u_i = \sigma_i^2 u_i$ $\Longrightarrow$ falso

② $\tilde{A}\tilde{v}_j = -\tilde{\lambda}_i \tilde{u}_i$ ~~quind~~. $\Longrightarrow$ vero

③ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$ $\quad \lambda_i \geq 0$, $\lambda_i < 0$ $\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_i = \lambda_i \\ \sigma_i = -\lambda_i \end{cases}$

④ - ③

se λ è un qualunque autovalore di A^TA

σ_i^2 sono autovalori di AA^T

$\Longrightarrow$ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$