

ESERCIZI SU LIMITI E CONTINUITÀ TRAMITE DEFINIZIONE

CALCULUS I, INFORMATICA 20/21

1. LIMITI

1.1. **Esercizio.** Risolvere i seguenti limiti

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 5}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\arctan x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - x^3 - x$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x 2^x$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2}$

(9) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2}$

(10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{1}{\cos x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \frac{1}{1-x^2}$

(12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-x})$

(13) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \tan(x^2 + \pi/2)$

(14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

1.2. **Esercizio.** Trovare delle funzioni che abbiano i seguenti limiti

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

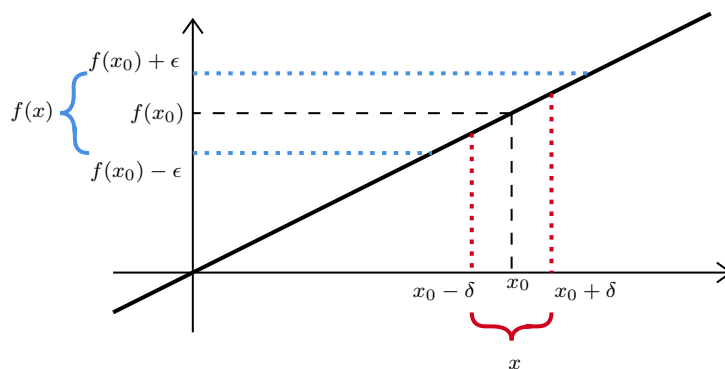
2. CONTINUITÀ TRAMITE DEFINIZIONE

Quando si vuole provare la continuità di una funzione per mezzo della definizione bisogna fare riferimento alla definizione:

$$\boxed{\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste un } \delta > 0 \text{ tale che : } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

L'obiettivo è trovare un $\delta > 0$ per ogni $\epsilon > 0$. Il criterio di scelta di δ e ϵ è contenuto nella condizione espressa dopo il "tale che" nella definizione: la condizione ci dice che δ e ϵ dovranno avere la proprietà di essere maggioranti delle quantità $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Attenzione: queste due disequazioni sono collegate tra loro perchè contengono la stessa x .

Facciamo un esempio: prendiamo la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x$ e consideriamo il punto $x_0 = 10$.



Adesso scegliamo un valore per ϵ , per esempio $\epsilon = 2$. Quindi $f(x_0) - \epsilon = 5 - 2 = 3$ e $f(x_0) + \epsilon = 5 + 2 = 7$. La controimmagine di $f(x) = 3$ è $x = 6$, mentre la contro immagine di $f(x) = 7$ è $x = 14$. Possiamo associare un qualsiasi $\delta < 4$ e tutte le immagini $f(x)$ di punti $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ saranno contenute in $f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$.

Se ripetiamo l'esperimento per vari valori di ϵ abbiamo una tabella, ad esempio:

ϵ	2	1	1/2	1/4	...
δ	4	2	1	1/2	...

In pratica questa tabella è una funzione definita per punti: quindi quello che ci serve per dimostrare la continuità è una funzione (che chiamiamo h)

$$\delta = h(\epsilon)$$

che associa a ogni $\epsilon > 0$ un $\delta > 0$ per cui siano verificate le disuguaglianze

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Come troviamo questa funzione h ? Un modo per trovarla è mettere in relazione $|x - x_0|$ e $|f(x) - f(x_0)|$, ovvero scrivere una equazione che coinvolga questi due termini e a partire da questa equazione troviamo h . Scrivere questa relazione è la parte difficile dell'esercizio, perchè dipende tutto della forma di $f(x)$ e non c'è una regola fissa per ogni forma. Vediamo un paio di casi concreti.

2.1. Esercizio. Verificare che la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}$$

è continua in $x_0 = 2$.

Soluzione: In questo caso abbiamo:

$$|x - 2| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \epsilon$$

Possiamo rileggere la condizione della definizione come

$$|x - 2| < \delta(\epsilon) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \epsilon$$

Per trovare questa funzione $\delta(\epsilon)$ dobbiamo pensare a che cosa serve questa funzione: serve come maggiorante della quantità $|x - 2|$, mentre ϵ è un maggiorante di $|\sqrt{x} - \sqrt{2}|$.

Che relazione c'è tra le due quantità che vengono maggiorate?

$$|x - 2| = |\sqrt{x} - \sqrt{2}| |\sqrt{x} + \sqrt{2}|$$

Quindi: se $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \epsilon$ allora $|\sqrt{x} + \sqrt{2}| < \epsilon + 2\sqrt{2}$ e

$$|x - 2| < \epsilon(\epsilon + 2\sqrt{2})$$

Quindi

$$\delta(\epsilon) = \epsilon(\epsilon + 2\sqrt{2}) > 0$$

per $\epsilon > 0$. Questo equivale a dire - nel senso della definizione di continuità - che comunque preso $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ per cui quando $|x - 2| < \delta$, si ha $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \epsilon$. Questo δ è $\epsilon(\epsilon + 2\sqrt{2})$.

2.2. Esercizio. Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

è continua in $x_0 = 1$.

Soluzione: seguendo l'idea dell'esercizio precedente, dobbiamo mettere in relazione $|x - x_0|$ e $|f(x) - f(x_0)|$ che in questo caso sono $|x - 1|$ e $|1/x - 1|$. Osserviamo quindi che:

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1 - x}{x} \right| = \frac{|x - 1|}{|x|}$$

Prendiamo un valore x vicino a $x_0 = 1$ usando il parametro δ per definire questa "vicinanza". Sia $\delta > 0$ e supponiamo di prendere x vicino a 1 in modo che

$$|x - 1| < \delta$$

Per non incappare in $x = 0$ che è fuori dal dominio, possiamo supporre $\delta < 1$, tanto l'importante (per la definizione) è che δ sia positivo ed esista. Cosa possiamo dire su $|x|$? Per maggiorare il termine $\left| \frac{1}{x} - 1 \right|$ dobbiamo prendere un minorante di $|x|$ dato che $|x|$ sta al denominatore. Da $|x - 1| < \delta$ si ha

$$1 - \delta < |x|$$

Quindi, mettiamo tutto insieme

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1 - x}{x} \right| = \frac{|x - 1|}{|x|} < \frac{\delta}{1 - \delta}$$

Chiamiamo $\epsilon := \frac{\delta}{1 - \delta}$. Invertiamo la relazione e otteniamo

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} > 0$$

per $\epsilon > 0$ (e otteniamo anche $\delta < 1$ in accordo con l'ipotesi). In altre parole, abbiamo mostrato che, comunque preso $\epsilon > 0$ quando

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$$

si ha

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$$

Questo equivale a dire - nel senso della definizione di continuità - che comunque preso $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ per cui quando $|x - 1| < \delta$, si ha $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \epsilon$. Questo δ è $\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$.

2.3. **Esercizio.** Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

è continua in $x_0 = 1$.

2.4. **Esercizio.** Sapendo che $|\arctan \theta| \leq |\theta|$, verificare che la funzione

$$f(x) = \arctan x$$

è continua in $x_0 = 0$.

2.5. **Esercizio.** Sapendo che $|\sin \theta| \leq |\theta|$, verificare che la funzione

$$f(x) = \sin x$$

è continua in $x_0 = \pi$.