Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 15/9/2015

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \frac{-2+x^2}{-2-x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

per piccoli valori di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto q := x^2 \mapsto r1 := \dfrac{-2+q}{-2-q},\ r2 := \dfrac{1-q}{1+q} \mapsto y1 := r1 - r2$

(a2): $x \mapsto q := x^2 \mapsto n := 2q,\ d := q^2 + 3q + 2 \mapsto y2 := n/d$

(a3): $x \mapsto q := x^2 \mapsto f1 := 1/(1+q),\ f2 := 1/(2+q) \mapsto y3 := 2q \cdot (f1 - f2)$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con ϵ opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1
y	1	0	1	$-1/2$	0	-2	-1	-2

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quali valori dello shift p possono essere scelti affinché il metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A converga all'autovalore 1?

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1000 \\ 0 & -1 & 1001 \end{pmatrix}$ e i vettori $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = A \cdot x$ e $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-2} \\ 10^{-2} \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1001 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ per ognuno dei vettori x, b e δb.

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = b + \delta b$.