PRODOTTO TRA MATRICI SIMMETRICHE NON È SIMMETRICO × K NON COMMUTATIVO

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI:
- non è commutativa
- è associativa →
- è distributiva →

matrice nilpotente se elevata a $m>0$ restituisce una matrix nulla

INVERTIBILITÀ	LA TRASPOSTA:
$A\cdot B = B\cdot A = I_n$	$(A^T)^T = A$
$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$	$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

SISTEMI LINEARI

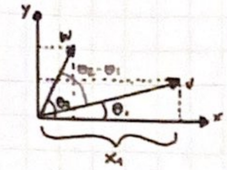
- soluzioni di un sistema lineare omogeneo: $\infty^{(n^o \text{ inc} - \text{rango})}$ → se ∞^0 allora esiste solo 1 soluzione
- se è omogeneo c'è sempre almeno una soluzione
- $Ax = B$ ammette soluzione se nell'ultima colonna non ci sono pivot

BINET
$|AB| = |BA| = |A|\cdot|B|$

SIMMETRIA:
- se è simmetrica allora $A = A^T$
- il prodotto di due matrici simm. non da una matrice simm.

PRODOTTO SCALARE

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\quad v\cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 = \|v\|\cdot\|w\| \cos(\theta_2 - \theta_1)$



$x_1 = \|v\|\cos\theta_1$
$x_2 = \|w\|\cos\theta_2$
$y_1 = \|v\|\sin\theta_1$
$y_2 = \|w\|\sin\theta_2$

$v\cdot w = 0$ se $v \perp w$
$v\cdot w = +x$ se $\theta < \frac{\pi}{2}$
$v\cdot w = -x$ se $\theta > \frac{\pi}{2}$

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

PRODOTTO VETTORIALE (in $\mathbb{R}^3$)

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\quad v\wedge w = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

$v \perp v\wedge w$
$w \perp v\wedge w$
$v\cdot(v\wedge w) = 0$

Prodotto vet definito solo tridimensionalmente

$\text{Area} = \frac{\|v\wedge w\|}{2}$

$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$
$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$
quindi in generale $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ non vale, vale $\Leftrightarrow AB = BA$

CALCOLO DEL DETERMINANTE - REGOLA DI LAPLACE -

$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$

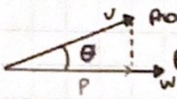
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 0\cdot A_{21} + 1\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 0\cdot A_{24}$
$\Rightarrow |A| = A_{22}$

REGOLA DI SARRUS

$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})$



Proiezione ortogonale di v su w

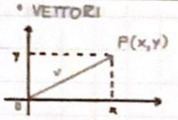
$P = \frac{v\cdot w}{\|w\|^2} w = \|P\| \frac{w}{\|w\|}$ ← versore di w

TEOREMA DI KRONECKER $\rho(A) = n$ se
∃ un minore di ordine n con $\det \neq 0$
ogni minore di ordine $n+1$ che contiene il minore di ordine n scelto orlando ha det nullo

disuguaglianza triangolare: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Determinare base ortogonale
$w = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 \qquad w\cdot v_1 = 0$
se $= 0$ abbiamo trovato $\quad \|v_1\|\,\|v_2\|$

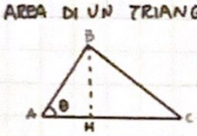
- VETTORI



$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

somma di vett: $v+w = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

AREA DI UN TRIANGOLO



$\text{Area} = \frac{\overbrace{\|AC\|}^{b}\cdot\overbrace{\|AB\|\sin\theta}^{h}}{2}$

TEOREMA ROUCHÉ CAPELLI - se $rk(A) < rk(A|B)$ allora il sistema non ∄
se $rk(A) = rk(A|B)$ sistema ammette solo soluzioni
se $rk(A) = rk(A|B) = n$ ∃!
se $rk(A) = rk(A|B) < n$ $\exists^{n - rk(A)}$

RANGO $rk(A)$
l'ordine massimo di un minore di A con determinante non nullo
$rk(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
$rk(A) =$ n° pivot

se B è invertibile $rk(A\cdot B) = rk(A)$
$rk(A) = rk(2A)$
Un sistema che ha n inc = n equaz non ha sempre soluzioni

B è invertibile → $rk(A\cdot B) = rk(A)$ ≠ $rk(B\cdot A)$
B non invertibile → $rk(A\cdot B) < rk(A)$

$AX = 0$ con A invert, solo sol nulla

Provare che A invert allora A^m invert $\quad A^2 = A\cdot A\cdot A^{-1}\cdot A^{-1} = I_m$

Vettori linearmente dipendenti se esiste un λ per ogni vettore tali che: $\lambda_1 v_1 + \lambda_r v_r = 0$

- COME CALCOLARLO:
1) v_1, v_2 $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0)$ sono lin. dipendenti se e solo se sono proporzionali $(\lambda_1 \neq 0, v_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v_2)$
2) $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indipendenti se il rango coincide con l'ordine della matrice $\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_r \right)$ → se sono linearmente indipendenti essi costituiscono una base di vettori

se A ha tutte righe uguali e $|A| \neq 0$ $rk(1)$

Se A e B sono invertibili le trasposte sono invertibili

$|A| = |A^T|$

COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, \dots, v_r$ con coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ il vettore $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_r v_r$

$2\cdot\underset{v_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} - 3\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{w}{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $\Rightarrow w$ è comb. lin. di v_1 e v_2

banale ∃!
non banale +sol

Prodotto di matrici simmetriche non è simmetrico

BASI ORTOGONALI una base ortog è ortnorm
$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^m$ se $v_i \times v_j = 0 \; \forall i \neq j$
esempio: Base canonica è ortogonale: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
BASI ORTONORMALI se $v_i\cdot v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ è una base ortonormale se $v_i \times v_j \; \forall i \neq j$ e $v_i \times v_j = 1 \; \forall i = j$

Il prod di matrici diagonali è diagonale

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle 2v_1, 3v_2 \rangle$
$v_1 = \frac{1}{2}(2v_1) \quad v_2 = \frac{1}{3}(3v_2)$

$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & + & & \\ 1 & & 1\cdot 1 = 1 & 1\cdot 1 = 1 & 1\cdot 3 = 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 - 3 = 0 \end{array}$

$(x-1)(x^2 + x + 3)$

Per estrarre una base di $\mathbb{R}^m$ da $\langle v_1, \dots, v_{m+r} \rangle$ bisogna trovare m-vettori linearmente dipendenti compresi tra v_1 e v_{m+r}, quindi dobbiamo trovare che $rk\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_m \right) = m$

una base è base di $\mathbb{R}^n$ se $| \; | \neq 0$

sono una base l.i. $\quad$ vettori con $\begin{cases} +\text{sol} & \text{dip } \mathbb{R}^1 \\ 1 \text{ sol} = \text{indip} & \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $= AB = B$