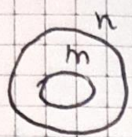
Primo compitino

1) Casi totali: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$

Casi favorevoli: $\binom{6}{1}\binom{4}{2} = \frac{6!}{1!\,5!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!} = 6\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 36$

Probabilità: $\frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

2) n = biglietti tot m = biglietti vincenti r = posseduti



$$P = \frac{\overbrace{\binom{m}{r}}^{\text{casi favorevoli}}}{\underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{casi totali}}}$$

3) Consideriamo $n=1$ e consideriamo l'evento complementare, i casi favorevoli sono 365. Con $n=2$, perché il secondo individuo non sia nato lo stesso giorno del primo abbiamo 364 casi favorevoli. Perché anche per l'n-esimo individuo sia così avremo $365-n+1$ casi favorevoli. Applicando il principio base, considerando che per ogni individuo abbiamo 365 casi favorevoli otteniamo:

$$P = (365-1)(365-2)\dots(365-n+1)\Big/365^{n-1}$$

Di conseguenza la probabilità che due individui siano nati lo stesso giorno è:

$$P_{fin} = 1-P = 1-\left[(365-1)(365-2)\dots(365-n+1)\Big/365^{n-1}\right]$$

Per quale valore di n la prob. è maggiore del 50%?
Le coppie possibili di n individui dovrebbero superare almeno la metà dei giorni di un anno e questo si ha con:

$$\frac{23\cdot 22}{2} = 253$$

Quindi la risposta è $n = 23$

4)

Studenti preparati che passano l'esame: $\frac{70 \cdot 90}{100} = 63\%$

Studenti impreparati che passano l'esame: $\frac{30 \cdot 2}{100} = 0.6\%$

a) $63\% + 0.6\% = 63.6\%$

b) $\frac{63.6 \cdot 0.6}{100} = 0.38\%$

studenti impreparati che passano l'esame

studenti che passano l'esame

5) Il problema si risolve utilizzando il teorema di Bayes essendo probabilità condizionata

$$P(F|E) = \frac{P(F)\,P(E|F)}{P(F)\cdot P(E|F) + P(F^c)\,P(E|F^c)}$$

$\frac{2}{3}$ delle monete sono di tipo A e hanno $\frac{2}{5}$ di probabilità di ottenere testa $\frac{1}{3}$ delle monete sono di tipo B e hanno $\frac{4}{5}$ di probabilità di ottenere testa.

$P(F) = \frac{2}{3}$ $\quad P(E|F) = \frac{2}{5}$ $\quad P(F^c) = \frac{1}{3}$ $\quad P(E|F^c) = \frac{4}{5}$

$$P(F|E) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

Quindi la probabilità che la moneta con cui si è ottenuto testa sia di tipo A è del 50%

6) Se due eventi sono indipendenti per esempio E e F allora

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

ovvero $P(E|F) = P(E)$, $P(F|E) = P(F)$ che significa che la probabilità che accada E dato F dipende solo dalla probabilità che accada E. Stessa cosa per la probabilità che accada F dato E la quale dipende solo dalla probabilità che si verifichi F. Pertanto, non influendo l'uno sull'altro non possono essere mutuamente esclusivi tranne che nel caso in cui uno abbia lo 0% di probabilità di accadere implicando una probabilità del $100\% - 0\% = 100\%$ che accada l'altro.

8)

giocatori	probabilità
0.1	0.8
0.3	0.5
0.6	0.2

Valore atteso $= \sum_i x_i \, p(x_i) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2 =$

$= 0.08 + 0.15 + 0.12 = 0.35$

Varianza $= E[(X-\mu)^2] = (0.1 - 0.35)^2 \cdot 0.8 + (0.3 - 0.35)^2 \cdot 0.5 +$
$+ (0.6 - 0.35)^2 \cdot 0.2 = 0.05 + 0.00125 + 0.0125 = 0.06375 =$

$= 6.38 \cdot 10^{-2}$ *

9) Sappiamo che $P\{X = c\} = 1$ e possiamo calcolare il valore atteso:

$\sum_i g(x_i) \, p(x_i) = c \cdot 1 = c$

La probabilità che accada c è di 1 e quindi il valore atteso sarà c.
La varianza quindi sarà: $E[(X-\mu)^2] = (X - c)^2 = 0$

* Valore atteso vincite = (Probabilità vittoria)(somma che si vincerebbe) -
- (Probabilità di perdita)(somma che si perderebbe) =
$= (0.35 \cdot 4) - (0.65 \cdot 1) = 0.75$€

Varianza vincite $= (0.1 - 0.75)^2 \cdot 0.8 + (0.3 - 0.75)^2 \cdot 0.5 + (0.6 - 0.75)^2 \cdot 0.2 =$
$= 0.338 + 0.101 + 0.0045 = 0.443 = 4.4 \cdot 10^{-1}$ €