APA Modulo 1 Lezione 13

Elena Zucca

3 aprile 2020

Dimostrazioni di NP-completezza

- come visto, in genere le dimostrazioni di NP-completezza non si fanno in modo diretto, ma trovando un altro problema NP-completo che si riduca a quello da provare
- vediamo un primo esempio: *3SAT*
- come *SAT* ma ristretto alle formule in $3\mathrm{CNF}$:

$$\begin{array}{llll} l & ::= & x \mid \overline{x} & \textit{literal} \\ c & ::= & l_1 \vee l_2 \vee l_3 & \textit{clausola} \\ \phi_{3CNF} & ::= & c_1 \wedge \ldots \wedge c_n & \textit{formula in } 3\mathrm{CNF} \end{array}$$

- esempio: $(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee w \vee \overline{z}) \wedge (\overline{w} \vee x \vee y)$
- il problema rimane NP-completo
- utile perché più facile da ridurre in un altro rispetto alla forma generale

Teorema

3SAT è NP-completo.

Dimostrazione.

- L'appartenenza a NP è ovvia essendo un caso particolare di *SAT*.
- Per dimostrare che è NP-arduo, diamo una riduzione di *SAT* in *3SAT*, ossia mostriamo che ogni formula ϕ in CNF può essere trasformata in una formula $f(\phi)$ in $3\mathrm{CNF}$ in modo che ϕ soddisfacibile se e solo se $f(\phi)$ soddisfacibile.

$\square$

La riduzione in dettaglio

- anzitutto, scegliamo tre variabili nuove y_1, y_2, y_3 e aggiungiamo alla formula ϕ in CNF sette nuove clausole
- tutte le possibili combinazioni dei literal tranne $\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3}$
- in modo tale che l'unica assegnazione di valori a queste variabili che rende vera la loro congiunzione sia $y_1 = y_2 = y_3 = T$
- ossia:

$$
\begin{array}{lll}
y_1 \vee y_2 \vee y_3 & y_1 \vee y_2 \vee \overline{y_3} & \\
y_1 \vee \overline{y_2} \vee y_3 & y_1 \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3} & \\
\overline{y_1} \vee y_2 \vee y_3 & \overline{y_1} \vee y_2 \vee \overline{y_3} & \overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee y_3
\end{array}
$$

ora trasformiamo ogni clausola c nella formula in una congiunzione di esattamente tre literal

- se $c = l$, si sostituisce c con $l \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}$
- se $c = l_1 \vee l_2$, si sostituisce c con $l_1 \vee l_2 \vee \overline{y_1}$
- se $c = l_1 \vee l_2 \vee c'$ con c' disgiunzione di almeno un literal:
  - se c' è un solo literal non si fa nulla
  - altrimenti, si introduce una nuova variabile y_c, e si sostituisce c con

$$\begin{array}{lll} y_c \vee c' & & \\ l_1 \vee l_2 \vee \overline{y_c} & \overline{l_1} \vee y_c \vee \overline{y_1} & \overline{l_2} \vee y_c \vee \overline{y_1} \end{array}$$

  - le ultime tre clausole implicano $l_1 \vee l_2$ equivalente a y_c
    quindi c equivalente a $y_c \vee c'$
  - si riapplica induttivamente il procedimento a $y_c \vee c'$

Quindi abbiamo:

- funzione di riduzione f : $\{\text{formule in } \mathrm{CNF}\} \rightarrow \{\text{formule in } 3\mathrm{CNF}\}$
- dato input ϕ, si ottiene una formula soddisfacibile se e solo ϕ è soddisfacibile
- la trasformazione può essere effettuata in tempo polinomiale

Esempio

$$x \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee w \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{w} \vee x)$$

$$(x \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee w \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{w} \vee x)$$

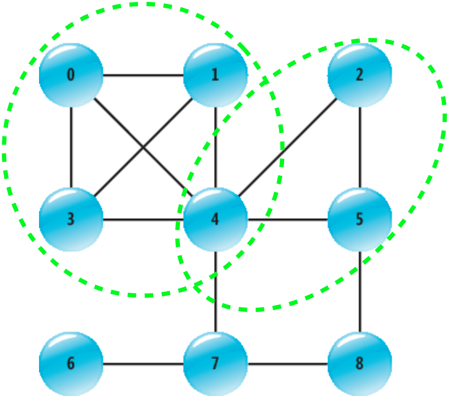
$$(x \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{y_1}) \wedge (\overline{x} \vee w \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{w} \vee x)$$

$$(x \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{y_1}) \wedge (y_3 \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee w \vee \overline{y_3}) \wedge$$
$$(x \vee y_3 \vee \overline{y_1}) \wedge (\overline{w} \vee y_3 \vee \overline{y_1}) \wedge (\overline{w} \vee x)$$

$$(x \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{y_1}) \wedge (y_3 \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee w \vee \overline{y_3}) \wedge$$
$$(x \vee y_3 \vee \overline{y_1}) \wedge (\overline{w} \vee y_3 \vee \overline{y_1}) \wedge (\overline{w} \vee x \wedge \overline{y_1})$$

Un altro esempio di riduzione polinomiale

Una clique o cricca in un grafo non orientato $G = (V, E)$ è un insieme di nodi $V' \subseteq V$ tale che per ogni $u, v \in V'$ esiste l'arco che li collega, ossia il sottografo indotto da V' è completo.



Problema della clique

- la dimensione di una clique è il numero dei suoi nodi
- il problema della clique richiede di trovare una clique di dimensione massima in un grafo
- il corrispondente problema di decisione richiede di determinare se nel grafo esiste una clique di dimensione k
- l'algoritmo banale (esponenziale) consiste nell'esaminare tutti i possibili sottoinsiemi di nodi di dimensione k

Teorema

Il problema della clique è NP-completo.

Dimostrazione.

- un certificato per il problema della clique è un sottoinsieme dei nodi di dimensione k
- è facile verificare polinomialmente se il sottoinsieme è una clique, e questo prova che il problema è in NP
- per dimostrare che il problema è NP-arduo, diamo una riduzione di *3SAT* in questo problema

□

La riduzione in dettaglio

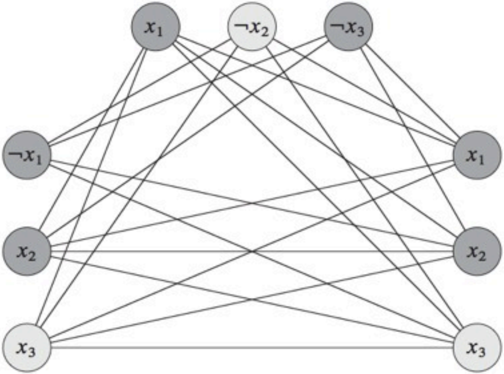
Data una formula ϕ in $3\mathrm{CNF}$ formata di k clausole, costruiamo il grafo G_ϕ nel modo seguente:

- un nodo per ogni occorrenza di literal in una clausola, quindi $3k$ nodi
- un arco tra due occorrenze di literal se sono in due clausole diverse e non sono uno la negazione dell'altro

Esempio

$C_1 = x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_3$

$C_2 = \neg x_1 \lor x_2 \lor x_3$



$C_3 = x_1 \lor x_2 \lor x_3$

ϕ soddisfacibile $\Rightarrow$ G_ϕ ha clique di k nodi

- se ϕ è soddisfacibile esiste un'assegnazione di valori alle variabili tale che almeno un literal per ogni clausola risulta vero
- consideriamo i nodi di G_ϕ corrispondenti ai literal scelti
- esiste un arco che collega ogni coppia di questi nodi, perché sono in clausole diverse e non sono uno la negazione dell'altro, altrimenti non potrebbero essere contemporaneamente veri
- abbiamo quindi trovato una clique di dimensione k

G_ϕ ha clique di k nodi $\Rightarrow$ ϕ soddisfacibile

- se G_ϕ ha clique di k nodi, dato che non vi sono archi tra nodi che rappresentano literal nella stessa clausola
- la clique ha esattamente un nodo per ogni clausola, siano $l_1, \ldots, l_k$ i corrispondenti literal
- scegliamo un'assegnazione di valori alle variabili tale che $l_1, \ldots, l_k$ risultino veri
- possibile perché tra di essi non vi sono due literal che sono uno la negazione dell'altro, altrimenti non vi sarebbe un arco
- con questa assegnazione ogni clausola è soddisfatta, e quindi l'intera formula

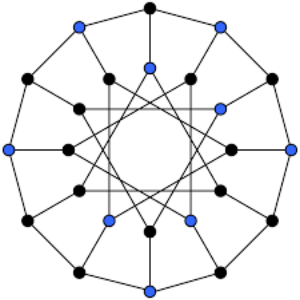
Quindi abbiamo:

- funzione di riduzione $f : \{\text{formule in } 3\mathrm{CNF}\} \rightarrow \{\text{grafi non orientati}\}$
- dato input ϕ con k clausole, si ottiene un grafo con clique di dimensione k se e solo ϕ è soddisfacibile
- la trasformazione può essere effettuata in tempo polinomiale

Un altro esempio di riduzione polinomiale

Definizione

Un insieme indipendente in un grafo $G = (V, E)$ è un insieme $V' \subseteq V$ di nodi tale che per ogni coppia di essi non esiste l'arco che li collega, ossia il sottografo indotto da V' non ha archi.



Problema dell'insieme indipendente

- la dimensione di un insieme indipendente è il numero dei suoi nodi
- il problema dell'insieme indipendente richiede di trovare un insieme indipendente di dimensione massima in un grafo
- il corrispondente problema di decisione richiede di determinare se nel grafo esiste un insieme indipendente di dimensione k
- l'algoritmo banale (esponenziale) consiste nell'esaminare tutti i possibili sottoinsiemi di nodi di dimensione k

Teorema

Il problema dell'insieme indipendente è NP-completo.

Dimostrazione.

- un certificato per il problema dell'insieme indipendente è un sottoinsieme dei nodi di dimensione k
- è facile verificare polinomialmente se il sottoinsieme è un insieme indipendente, e questo prova che il problema è in NP
- per dimostrare che il problema è NP-arduo, definiamo una riduzione dal problema della clique nel modo seguente:
  - dato G consideriamo $\overline{G}$ che ha stesso insieme di nodi e per ogni coppia di nodi u, v, c'è l'arco (u, v) se e solo se in G non c'è
  - è immediato vedere che un insieme di nodi definisce una clique in G se e solo se definisce un insieme indipendente in G'

$\square$

Altri problemi NP-completi

- commesso viaggiatore: dato un grafo non orientato completo pesato, trovare un ciclo hamiltoniano di costo minimo
  nella versione di decisione stabilire se esiste un ciclo hamiltoniano di costo al più k
- zaino: dato uno "zaino" con una certa capacità ed n oggetti a cui sono associati dei pesi e dei profitti, trovare il sottoinsieme di profitto massimo che sia possibile mettere nello zaino
  nella versione di decisione stabilire se esiste un sottoinsieme di profitto $\geq k$

Altri problemi NP-completi

- vertex cover: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ trovare una copertura di vertici di dimensione minima per G, ossia un insieme $V' \subseteq V$ di nodi tale che per ogni $(u, v) \in E$ in G almeno un estremo appartenga a V'
  nella versione di decisione stabilire se esiste un vertex cover di dimensione k
- colorazione: dato un grafo $G = (V, E)$ trovare il minimo k per cui esiste una k-colorazione dei nodi di G, ossia una funzione $c\colon V \to 1..k$ tale che $c(u) \neq c(v)$ se $(u, v) \in E$
  nella versione di decisione stabilire se esiste una k-colorazione