

Calculus 1

Prova scritta del 30 giugno 2021

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x}{2}.$$

- (a) Determinare dom f , calcolare i limiti di f agli estremi di dom f e determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali.
- (b) Studiare la monotonia di f , determinando eventuali punti di minimo/massimo assoluti e relativi.
- (c) Determinare l'immagine di f e disegnare un grafico qualitativo di f .

2. Siano

$$f(t) = t \sin t + \frac{t+2}{t^2-1}, \quad F(x) = \int_{\pi}^x f(t) dt.$$

- (a) Determinare $\int f(t) dt$ e $F'(x)$.
- (b) Calcolare, se esistono, $F(0)$, $F(\pi)$ e $F(2\pi)$.

3. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f_{\alpha}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 2x & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1 , f_2 e f_3 .
- (b) Stabilire per quali valori di α la funzione f_{α} è continua.
- (c) Stabilire per quali valori di α la funzione f_{α} è invertibile.
- (d) Determinare $(f_1^{-1})'(3)$.