

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Calcolo Numerico**  
**Esame del 5/7/2017**

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

per piccoli valori di  $x$ .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di  $f(x)$ .

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di  $f(x)$ :

(a1):  $x \mapsto p := \frac{\pi}{4} + x, m := \frac{\pi}{4} - x \mapsto s1 := \sin p, s2 := \sin m \mapsto y1 := s1 - s2$

(a2):  $x \mapsto p := \frac{\pi}{4} + x, m := \frac{\pi}{4} - x \mapsto c1 := \cos p, c2 := \cos m \mapsto y2 := c2 - c1$

(a3):  $x \mapsto s := \sin x \mapsto y3 := \sqrt{2} \cdot s$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  opportuno.

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

$x$	$-1$	$-1$	$0$	$1/2$	$1/2$	$1$
$y$	$2$	$3/2$	$1$	$0$	$1$	$0$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice  $5 \times 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice  $A$ .

5. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , il suo nucleo  $\mathcal{N}(A)$  e la sua immagine  $\mathcal{R}(A)$ ?

Nel seguito, sia  $A$  una matrice  $3 \times 6$  avente i valori singolari 100, 1 e 0.

- (a) Determinare la dimensione delle matrici  $U, \Sigma, V$  della SVD di  $A$ .
- (b) Determinare la dimensione di  $\mathcal{N}(A)$  e  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Trovare, se esiste, un esempio di matrice  $B \in \mathbf{R}^{3 \times 6}$  tale che  $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ .