Ivan Capponi – S4039927

Calcolo Numerico
Risoluzione prova scritta 26/01/2016

Esercizio 1:

Si supponga di dover calcolare $\boldsymbol{f(x)} = \frac{4}{x+2/x} - \frac{2}{x+1/x}$ per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$.

Determinare:

- Il condizionamento del problema del calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$ e discuterlo;
- Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$:

$\boldsymbol{a_1}$: $r_1 = \frac{1}{x}$; $r_2 = \frac{2}{x}$; $f_1 = \frac{2}{x+r_1}$; $f_2 = \frac{4}{x+r_2}$; $\boldsymbol{y_1 = f_2 - f_1}$;

$\boldsymbol{a_2}$: $q = x^2$; $n = 2q \cdot x$; $d = q^2 + 3q + 2$; $\boldsymbol{y_2 = \frac{n}{d}}$

a)

Utilizzando l'algoritmo $\boldsymbol{a_2}$, è possibile riscrivere $\boldsymbol{f(x)}$ come segue: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{2x^3}{x^4+3x^2+2}$

Il condizionamento del problema del calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$ è determinabile mediante la formula:

$$\boldsymbol{c = \frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

dove $\boldsymbol{f'(x)}$ è la derivata prima di $\boldsymbol{f(x)}$.
Svolgendo i calcoli relativi al condizionamento del problema si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{c} = \frac{x \cdot [-2x^6 + 6x^4 + 12x^2]}{(x^4 + 3x^2 + 2)^2} \cdot \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{2x^3} = \frac{-2x^6 + 6x^4 + 12x^2}{2x^2(x^4 + 3x^2 + 2)} = \frac{-x^4 + 3x^2 + 6}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

Studiando il condizionamento del problema per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$ si ha:

$$\lim_{\boldsymbol{x \to 0}}(\boldsymbol{c}) = \lim_{x \to 0} \frac{-x^4 + 3x^2 + 6}{x^4 + 3x^2 + 2} = \boldsymbol{3}$$

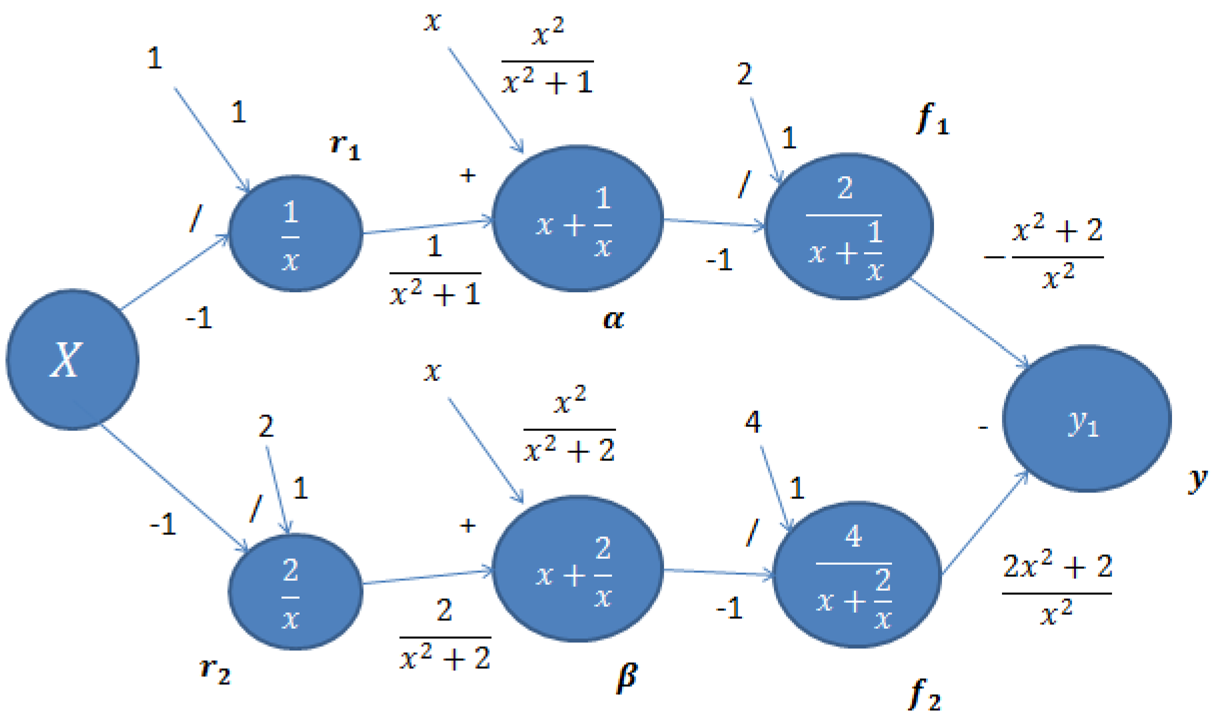
Il problema è debolmente mal condizionato: l'errore inerente in output è circa 3 volte l'errore in input.

b)

Si consideri il primo algoritmo:

$\boldsymbol{a_1}$: $r_1 = \frac{1}{x}$; $r_2 = \frac{2}{x}$; $f_1 = \frac{2}{x+r_1}$; $f_2 = \frac{4}{x+r_2}$; $\boldsymbol{y_1 = f_2 - f_1}$;

Interpretazione grafica:



Etichettatura archi:

Operazione	Primo operando	Secondo operando	Risultato	Coefficiente primo operando	Coefficiente secondo operando
Addizione	a	b	$a+b=c$	a/c	b/c
Sottrazione	a	b	$a-b=c$	a/c	$-$ b/c
Divisione	a	b	a/b	1	-1

Gli archi uscenti dall'input x e dalle costanti non verranno utilizzati.

Studio degli errori di arrotondamento:

L'errore algoritmico è il seguente:

$$\boldsymbol{a_1} = \varepsilon_y + \varepsilon_{f2}\left(\frac{2x^2+2}{x^2}\right) + \varepsilon_{f1}\left(-\frac{x^2+2}{x^2}\right) + \left[-1\cdot\left(-\frac{x^2+2}{x^2}\right)\right] + \varepsilon_\beta\left(-1\cdot\frac{2x^2+2}{x^2}\right)$$
$$+\,\varepsilon_{r1}\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{x^2+2}{x^2}\right)\right) + \varepsilon_{r2}\left[\frac{2}{x^2+2}\cdot\left(-1\cdot\frac{2x^2+2}{x^2}\right)\right]$$

Per provare che l'algoritmo è instabile è sufficiente calcolare il limite per $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ di un arbitrario coefficiente e verificare che risulti tendente a $\pm\infty$.
Basta quindi osservare che:

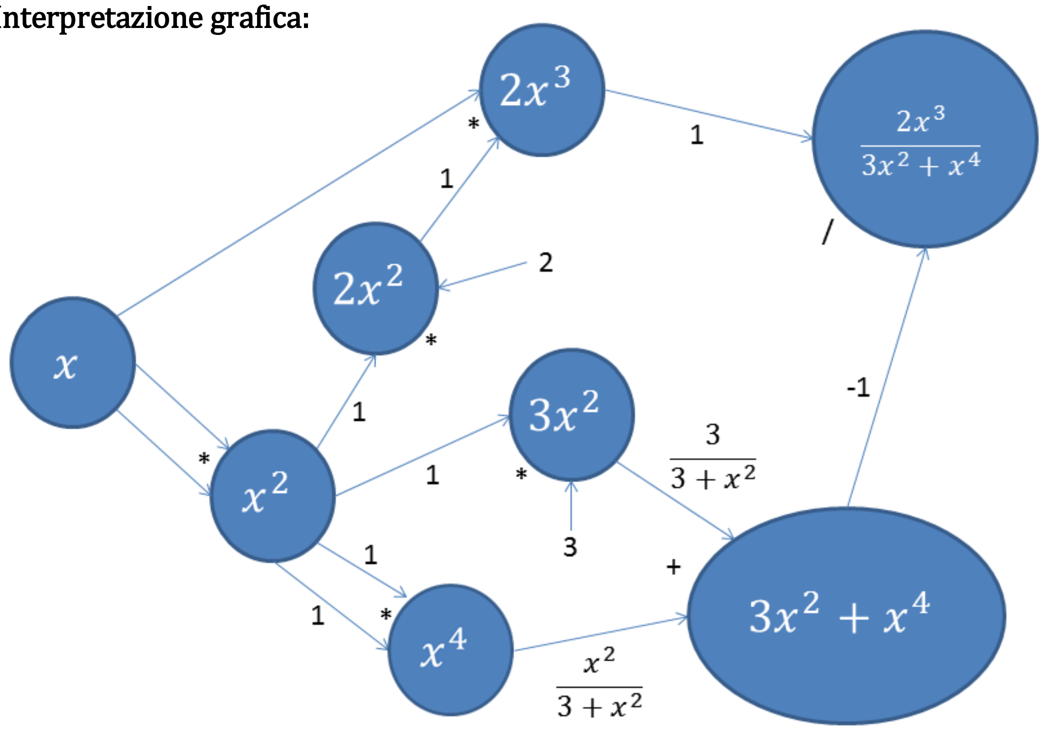
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+2}{x^2} = +\infty$$

L'algoritmo in analisi allora è instabile.

Si consideri il secondo algoritmo:

$\boldsymbol{a_2}$: $\quad q = x^2; \quad n = 2q \cdot x; \quad d = q^2 + 3q + 2; \quad \boldsymbol{y_2} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{d}}$

Interpretazione grafica:



Etichettatura archi:

Operazione	Primo operando	Secondo operando	Risultato	Coefficiente primo operando	Coefficiente secondo operando
Addizione	a	b	$a+b=c$	a/c	b/c
Sottrazione	a	b	$a-b=c$	a/c	– b/c
Moltiplicazione	a	b	a·b	1	1
Divisione	a	b	a/b	1	-1

L'algoritmo dato è stabile: ogni limite per $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ di un arbitrario coefficiente tende ad un valore costante.

Esercizio 2:

Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Utilizzando il terzo elemento del vettore come pivot, è possibile azzerare il quarto:
La matrice di rotazione avrà seno negativo alla posizione $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, dove $\boldsymbol{i}$ è la posizione del pivot, $\boldsymbol{j}$ quella relativa all'elemento da azzerare; in questo caso la posizione dell'elemento da azzerare è maggiore rispetto a quella del pivot e quindi $-\boldsymbol{s}$ compare in alto a destra.

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{3}, \mathbf{4}, \boldsymbol{\theta}): \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \;, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

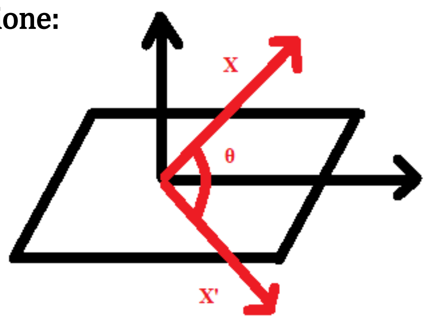
Utilizzando come pivot il terzo elemento del vettore risultante è possibile azzerare il secondo.
La matrice di rotazione avrà seno negativo alla posizione $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, dove $\boldsymbol{i}$ è la posizione del pivot, $\boldsymbol{j}$ quella relativa all'elemento da azzerare; in questo caso la posizione dell'elemento da azzerare è minore rispetto a quella del pivot, quindi $-\boldsymbol{s}$ compare in basso a sinistra.

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \boldsymbol{\theta}'): \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{6}}} \;, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

Rappresentazione grafica di una singola rotazione:



Sono state applicate in sequenza due rotazioni: la prima nel piano $\langle e_3, e_4 \rangle$, la seconda nel piano $\langle e_2, e_3 \rangle$.

Esercizio 3:

Determinare i parametri α, β, γ della funzione $\boldsymbol{g(x) = \alpha + \beta sin(x) + \gamma cos(2x)}$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y	1	-1	0	0

Si consideri la matrice $\boldsymbol{A}$ dove:

- La prima colonna contiene il valore del termine noto α;
- La seconda colonna contiene i valori di $\boldsymbol{sin(x)}$ sulle ascisse $\boldsymbol{x}$ dei dati;
- La terza colonna contiene i valori di $\boldsymbol{cos(2x)}$ sulle ascisse $\boldsymbol{x}$ dei dati.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si consideri il vettore i cui valori sono quelli acquisiti dalla variabile $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Calcolo di: $\boldsymbol{A^t A}$:

$$\boldsymbol{A^t A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Calcolo di: $\boldsymbol{A^t Y}$:

$$\boldsymbol{A^t Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Il valore dei coefficienti $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ è calcolabile mediante la risoluzione del seguente sistema lineare delle equazioni normali:

$$\begin{cases} 4\alpha = 0 \\ 2\beta = -1 \\ 4\gamma = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 0} \\ \boldsymbol{\beta = -1/2} \\ \boldsymbol{\gamma = -1/2} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{g(x) = -\frac{sin(x)}{2} - \frac{cos(2x)}{2}}$$

La curva di regressione approssima ai minimi quadrati i dati riportati, minimizzando la somma dei quadrati degli scarti tra i valori che assume sulle ascisse e i dati y.

Esercizio 4:

Sia $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5/3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$, calcolarne, se esiste, una diagonalizzazione e studiare il metodo delle potenze inverse applicato alla matrice con shift $\boldsymbol{p = -3/2}$.

La matrice data è diagonalizzabile infatti, per il teorema spettrale, essendo la sua matrice trasposta corrispondente a sé stessa, questa deve essere diagonalizzabile.
Il polinomio caratteristico della matrice (sviluppando il determinante sulla seconda riga) è dato da:

$$\boldsymbol{P(\gamma) = det} \begin{bmatrix} \mathbf{5/3} - \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} - \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} - \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = (-2-\gamma) \cdot det \begin{bmatrix} 5/3-\gamma & 1 \\ 1 & -1-\gamma \end{bmatrix} =$$
$$= (-2-\gamma)[(5/3-\gamma)(-1-\gamma)-1] = \boldsymbol{(-2-\gamma)(3\gamma^2-2\gamma-8)/3}$$

Gli autovalori della matrice non sono altro che le radici del polinomio caratteristico, cioè i $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{P(\gamma) = 0}$. Si ha quindi:

$$\boldsymbol{\gamma_1} = -2$$
$$\boldsymbol{\gamma_2} = -\frac{4}{3}$$
$$\boldsymbol{\gamma_3} = 2$$

Vi sono tre autovalori distinti la cui cardinalità è pari all'ordine della matrice data, questa è un'ulteriore condizione sufficiente per affermare che la matrice sia diagonalizzabile.
Calcolo degli autovettori risolvendo il sistema omogeneo con matrice $\boldsymbol{A - \gamma I}$:

Per $\boldsymbol{\gamma_1} = -2$:

$$\begin{cases} (11/3)x + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} (11/3)x + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \leftrightarrow x = z = 0$$

(non compare la seconda equazione, che è l'identità $0 = 0$).

Risolvendo il sistema in funzione di $\boldsymbol{y = 1}$ (unico grado di libertà) si ottiene: $\boldsymbol{v_1} \to \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Per $\boldsymbol{\gamma_2} = -\frac{4}{3}$:

$$\begin{cases} 3x + z = 0 \\ -2/3\, y = 0 \\ x + (1/3)z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x + z = 0 \\ y = 0 \\ x = -(1/3)z \end{cases}$$

Risolvendo il sistema il funzione di $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$ si ottiene: $\quad \boldsymbol{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{-1/3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Per $\quad \boldsymbol{\gamma}_3 = 2$:

$$\begin{cases} -(1/3)x + z = 0 \\ -4y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(1/3)x + z = 0 \\ y = 0 \\ x = 3z \end{cases}$$

Risolvendo il sistema il funzione di $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$ si ottiene: $\quad \boldsymbol{v}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

La diagonalizzazione di $\boldsymbol{A}$ è data da: $\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}^{-1}$

Dove V è la matrice avente gli autovalori precedentemente calcolati sulla diagonale principale, X è una matrice le cui colonne sono gli autovettori della matrice $\boldsymbol{A}$, disposti a seconda del relativo autovalore associato, X^{-1} è la matrice inversa di $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4/3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}} \\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \end{bmatrix}$$

Studio del metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse può essere applicato se la matrice data ha autovettori linearmente indipendenti.

Il metodo delle potenze inverse converge all'autovalore più vicino allo shift $\boldsymbol{p} = \mathbf{-3/2}$, che corrisponde all'autovalore $\boldsymbol{\mu}_1$ di $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{pI})^{-1}$ che ha modulo massimo.
Si ha:

$\boldsymbol{\mu}_1 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma}_j - \boldsymbol{p}}$, con γ_j tale che $|\gamma_j - p|$ è minimo.

Per $\gamma_j = \gamma_3$: $\quad |\gamma_j - p| = \left|-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right| = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

Per $\gamma_j = \gamma_1$: $\quad |\gamma_j - p| = \left|-2 + \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$

Per $\gamma_j = \gamma_2$: $\quad |\gamma_j - p| = \left|2 + \frac{2}{3}\right| = \frac{8}{3}$

Allora:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \frac{1}{\gamma_3 - p} = \frac{1}{-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

La velocità di convergenza è

$$\left|\frac{\boldsymbol{\gamma_3 - p}}{\boldsymbol{\gamma_1 - p}}\right|^k = \left(\frac{2/3}{4/3}\right)^k = 0.5^k.$$

Esercizio 5:

Si considerino la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{100} & \mathbf{102} \end{pmatrix}$ e i vettori $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{\delta b} = \begin{bmatrix} \mathbf{10^{-3}} \\ \mathbf{-10^{-3}} \end{bmatrix}$.

- Verificare che $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{51} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{-50} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$;
- Calcolare i condizionamenti $\boldsymbol{\mu_1(A)}$ e $\boldsymbol{\mu_\infty(A)}$ relativi alle norme $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_\infty$ rispettivamente;
- Calcolare le norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ per i vettori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{\delta b}$;
- Calcolare una maggiorazione dell'errore $||\,\tilde{x} - x\,||_1$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\delta b}$.

a)

$\exists A^{-1} \leftrightarrow \boldsymbol{det(A) \neq 0}$;

$\boldsymbol{det(A)} = 102 - 100 = 2$, allora la matrice $\boldsymbol{A}$ è invertibile.

Basta allora dimostrare che $\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = I}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{51} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{-50} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{100} & \mathbf{102} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{51 - \frac{100}{2}} & \mathbf{51 - \frac{102}{2}} \\ \mathbf{-50 + \frac{100}{2}} & \mathbf{-50 + \frac{102}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

b)

Si hanno:

$||\,A\,||_\infty = 202$ (massima somma dei moduli sulle righe),

$||\,A\,||_1 = 103$ (massima somma dei moduli sulle colonne).

Analogamente: $||\,A^{-1}\,||_\infty = 103/2$, $||\,A^{-1}\,||_1 = 101$

$$\boldsymbol{\mu_\infty(A)} = ||\,A\,||_\infty \cdot ||\,A^{-1}\,||_\infty = 10403$$
$$\boldsymbol{\mu_1(A)} = ||\,A\,||_1 \cdot ||\,A^{-1}\,||_1 = 10403$$

c)

Per definizione di norma uno: $\|\, x \,\|_1 = max \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 4$ **con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**

Per definizione di norma due: $\|\, x \,\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ **con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**

$$\|\, \delta b \,\|_1 = max \sum_{k=1}^{n} |\delta b_k| = \frac{1}{500} = 2\ 10^{-3}$$

$$\|\, \delta b \,\|_2 = \sqrt{10^{-6} + 10^{-6}} = \frac{1}{500\sqrt{2}} \approx 1.4\ 10^{-3}$$

$$b = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{100} & \mathbf{102} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$\|\, b \,\|_1 = max \sum_{k=1}^{n} |b_k| = 4$$

$$\|\, b \,\|_2 = \sqrt{0 + 16} = 4$$

d)

Per il teorema sull'errore inerente nei sistemi lineari si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon_x} \leq \boldsymbol{\mu_1(A)\varepsilon_b}$$

Dove $\boldsymbol{\varepsilon_x} = \frac{\|\, \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} \,\|_\mathbf{1}}{\|\, x \,\|_1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon_b} = \frac{\|\, \delta b \,\|_1}{\|\, b \,\|_1} = \frac{2\ 10^{-3}}{\mathbf{4}} = 0.5\ 10^{-3}$. Pertanto

Calcolo pertanto la maggiorazione dell'errore:

$$\|\, \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} \,\|_\mathbf{1} = \boldsymbol{\varepsilon_x} \|\, \boldsymbol{x} \,\|_\mathbf{1} \leq 10403 \cdot\ 0.5\ 10^{-3} \cdot 4 \approx 20.$$