Relazione laboratorio sugli autovalori

Esercizi facoltativi da svolgere in Matlab

Pezzano Enrico (S4825087)

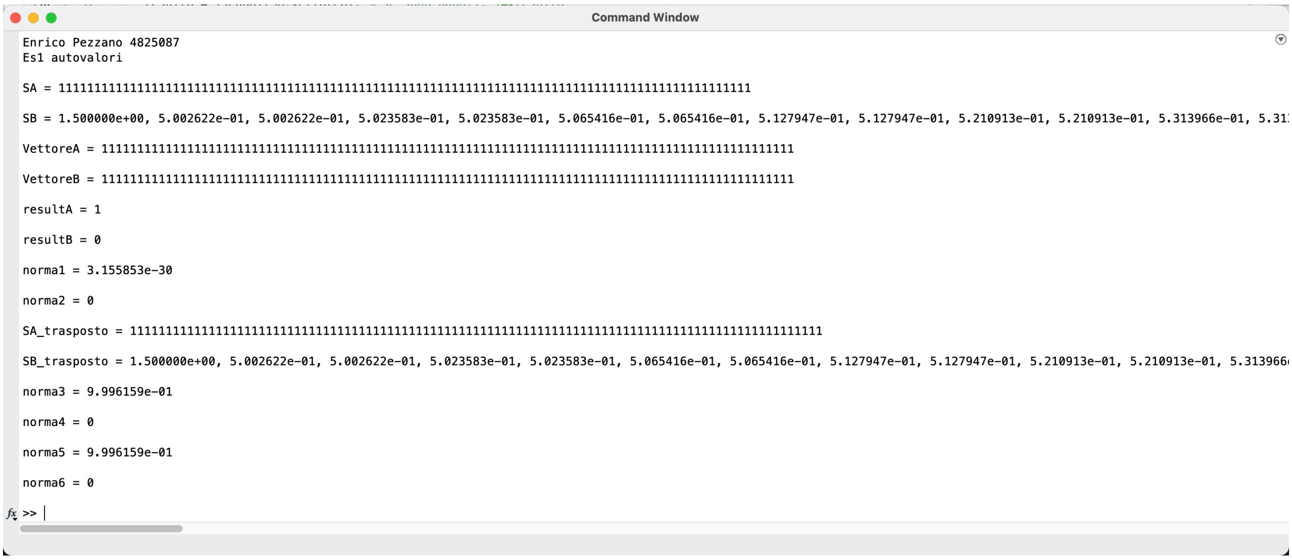
ESERCIZIO 1
Come da consegna per il primo esercizio, calcolo gli autovalori delle matrici A e B, per poi confrontarli mediante i seguenti comandi:

- *V A = eig(A)* (per estrarre *vettori di autovalori)*
- *V B = eig(B)* (per estrarre *vettori di autovalori)*
- *norm(B − A)/norm(A)*
- *norm(V B − V A)/norm(V A)*.

Successivamente ripeto l'esercizio per le matrici A^t A e B^tB.
Di seguito il procedimento (algoritmo):

- creazione matrici A e B, tramite comando consigliato *diag(ones(1,n−1),1)+eye(n)*. Nel nostro caso *n=10(8+1)+7*. B è perturbata, infatti *B=A+E*, con E matrice di elementi nulli escluso $E(n,1)=2^{-n}$.
- calcolo autovalori di A e B coi comandi elencati come scritto sopra
- ripeto per A^t A e B^tB.

Output programma:



OSSERVAZIONE OUTPUT:
Per motivi di spazio, copio ed incollo di seguito soltanto l'output che "sfora dai limiti":
SB = 1.500000e+00, 5.002622e-01, 5.002622e-01, 5.023583e-01, 5.023583e-01, 5.065416e-01, 5.065416e-01, 5.127947e-01, 5.127947e-01, 5.210913e-01, 5.210913e-01, 5.313966e-01, 5.313966e-01, 5.436674e-01, 5.436674e-01, 5.578523e-01, 5.578523e-01, 5.738916e-01, 5.738916e-01, 5.917182e-01, 5.917182e-01, 6.112572e-01, 6.112572e-01, 6.324268e-01, 6.324268e-01, 6.551381e-01, 6.551381e-01, 6.792959e-01, 6.792959e-01,

7.047988e-01, 7.047988e-01, 7.315399e-01, 7.315399e-01, 7.594070e-01, 7.594070e-01, 7.882833e-01, 7.882833e-01, 8.180475e-01, 8.180475e-01, 8.485750e-01, 8.485750e-01, 8.797375e-01, 8.797375e-01, 9.114045e-01, 9.114045e-01, 9.434431e-01, 9.434431e-01, 9.757189e-01, 9.757189e-01, 1.008097e+00, 1.008097e+00, 1.040440e+00, 1.040440e+00, 1.072614e+00, 1.072614e+00, 1.104484e+00, 1.104484e+00, 1.135915e+00, 1.135915e+00, 1.166776e+00, 1.166776e+00, 1.196938e+00, 1.196938e+00, 1.226274e+00, 1.226274e+00, 1.254660e+00, 1.254660e+00, 1.281979e+00, 1.281979e+00, 1.308114e+00, 1.308114e+00, 1.332958e+00, 1.332958e+00, 1.356404e+00, 1.356404e+00, 1.378356e+00, 1.378356e+00, 1.398721e+00, 1.398721e+00, 1.417414e+00, 1.417414e+00, 1.434356e+00, 1.434356e+00, 1.449476e+00, 1.449476e+00, 1.462711e+00, 1.462711e+00, 1.474005e+00, 1.474005e+00, 1.483310e+00, 1.483310e+00, 1.490589e+00, 1.490589e+00, 1.495810e+00, 1.495810e+00, 1.498951e+00, 1.498951e+00

SB_trasposto = 1.500000e+00, 5.002622e-01, 5.002622e-01, 5.023583e-01, 5.023583e-01, 5.065416e-01, 5.065416e-01, 5.127947e-01, 5.127947e-01, 5.210913e-01, 5.210913e-01, 5.313966e-01, 5.313966e-01, 5.436674e-01, 5.436674e-01, 5.578523e-01, 5.578523e-01, 5.738916e-01, 5.738916e-01, 5.917182e-01, 5.917182e-01, 6.112572e-01, 6.112572e-01, 6.324268e-01, 6.324268e-01, 6.551381e-01, 6.551381e-01, 6.792959e-01, 6.792959e-01, 7.047988e-01, 7.047988e-01, 7.315399e-01, 7.315399e-01, 7.594070e-01, 7.594070e-01, 7.882833e-01, 7.882833e-01, 8.180475e-01, 8.180475e-01, 8.485750e-01, 8.485750e-01, 8.797375e-01, 8.797375e-01, 9.114045e-01, 9.114045e-01, 9.434431e-01, 9.434431e-01, 9.757189e-01, 9.757189e-01, 1.008097e+00, 1.008097e+00, 1.040440e+00, 1.040440e+00, 1.072614e+00, 1.072614e+00, 1.104484e+00, 1.104484e+00, 1.135915e+00, 1.135915e+00, 1.166776e+00, 1.166776e+00, 1.196938e+00, 1.196938e+00, 1.226274e+00, 1.226274e+00, 1.254660e+00, 1.254660e+00, 1.281979e+00, 1.281979e+00, 1.308114e+00, 1.308114e+00, 1.332958e+00, 1.332958e+00, 1.356404e+00, 1.356404e+00, 1.378356e+00, 1.378356e+00, 1.398721e+00, 1.398721e+00, 1.417414e+00, 1.417414e+00, 1.434356e+00, 1.434356e+00, 1.449476e+00, 1.449476e+00, 1.462711e+00, 1.462711e+00, 1.474005e+00, 1.474005e+00, 1.483310e+00, 1.483310e+00, 1.490589e+00, 1.490589e+00, 1.495810e+00, 1.495810e+00, 1.498951e+00, 1.498951e+00

Una volta ripetuto il procedimento anche per le matrici A^tA e B^tB, si nota una differenza tra gli autovalori della coppia di matrici B^tB e non per la coppia A^tA.

ESERCIZIO 2
Nel secondo esercizio, prima di tutto si costruiscono due vettori *s* e *t* con le stesse dimensioni (rappresentano i nodi della mappa e le coppie ordinate una connessione tra due nodi); utilizzando la funzione *graph()* di Matlab si può costruire un grafo (preso in input dal *adjacency()*) che creerà una matrice di adiacenza.
All'inizio c'è bisogno di un grafo di *n* nodi e di una matrice A *nxn,* tale che $A_{ij}=1$ se il nodo *j* è connesso al nodo *i*, oppure $A_{ij=0}$ se il nodo *j* non è connesso al nodo *i*. Di seguito il procedimento (algoritmo):

- costruzione matrice *A* di adiacenza del grafo stampato in figura
- calcolo di *D* con $diag(g_1,\dots g_n)$ dove g_i sta per il numero degli archi uscenti dal nodo j e calcolo di *G* $(G=AD^{-1})$, dei relativi autovalori e autovettori
- tramite riferimento dell'output del punto *b*, si verifica che un autovalore di *G* sia uguale a 1 ed il resto degli elementi abbia *modulo<1*; esiste un autovettore *x* relativo a 1 con componenti comprese nell'intervallo *[0,1]* (per ogni autovalore, il suo corrispondente ha componenti positive e negative].

Output programma:

```
Command Window

Enrico Pezzano 4825087
Es2 autovalori
A =
     0     1     1     1     1     1     1     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
     1     0     0     0     1     0     0     0     0     1     0
     1     0     0     1     0     1     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     1     0     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     1     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     1     1     0     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0

D =
     6     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     2     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     3     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     4     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     3     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     3     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     3     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1

G =
         0    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.3333    1.0000         0         0         0         0
    0.1667         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
    0.1667         0         0         0         0         0         0         0         0    0.3333         0
    0.1667         0         0         0    0.2500         0         0         0         0    0.3333         0
    0.1667         0         0    0.3333         0    0.3333         0    0.3333         0         0         0
    0.1667         0         0         0    0.2500         0         0    0.3333         0         0         0
    0.1667         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.2500    0.3333         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.3333         0         0         0
         0         0    0.5000    0.3333         0         0         0         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.3333         0
```

```
Command Window

autovalori =
    1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0    0.7640         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.5774         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.2241         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0   -0.8824         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0   -0.7255         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0   -0.5774         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0   -0.3802         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0   -0.0000         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0   -0.0000         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000

autovettori =
   -0.6124   -0.0521   -0.7385   -0.2314    0.6272    0.3765    0.7385    0.0708    0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.1021   -0.0114   -0.2132   -0.1721   -0.1185   -0.0865   -0.2132   -0.0310   -0.2120    0.4263    0.6423
   -0.2041   -0.2634   -0.0000   -0.2283   -0.3212    0.0441   -0.0000   -0.1304    0.5553    0.3463   -0.2214
   -0.3062   -0.1727   -0.0000    0.4857   -0.3307    0.1606   -0.0000    0.3644   -0.5477    0.3478   -0.3149
   -0.4082    0.2772    0.0000    0.6400    0.0335   -0.3382   -0.0000   -0.7525   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.3062    0.3086    0.0000    0.2539   -0.1622   -0.2735   -0.0000    0.5011    0.5477   -0.3478    0.3149
   -0.1021   -0.0114   -0.2132   -0.1721   -0.1185   -0.0865   -0.2132   -0.0310   -0.0656   -0.5995   -0.5315
   -0.3062    0.5255    0.3693   -0.1936    0.0905    0.6606   -0.3693   -0.0425   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.1021    0.2293    0.2132   -0.2880   -0.0342   -0.3036    0.2132    0.0373   -0.1826    0.1159   -0.1050
   -0.3062   -0.5776    0.3693   -0.0378    0.5367   -0.2842   -0.3693    0.1133   -0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.1021   -0.2520    0.2132   -0.0562   -0.2028    0.1306    0.2132   -0.0994   -0.0951   -0.2891    0.2157

>>
```

OSSERVAZIONE OUTPUT:

Riguardo all'"importanza" delle stazioni, tramite *G* analizziamo il grafo (le sue colonne mostrano quanta "importanza" un nodo dà agli altri mentre dalle righe si vede quella che un nodo riceve dagli altri).
Di conseguenza, Milano (la stazione numero 1) è quella che ha più "importanza", invece Pavia e Lecco (stazioni numero 2 e 8) ne hanno di meno.

ESERCIZIO 3
Infine, nel terzo esercizio, data la matrice *A* vi applico il *metodo delle potenze* (per calcolare l'autovalore di massimo modulo di una matrice e il corrispondente autovettore) utilizzando $(1,1,1)^t$ e $(3,10,4)^t$ come vettori iniziali. Successivamente approssimo l'autovalore di massimo modulo anche con il *metodo delle potenze inverse* e confronto la *velocità di convergenza* con l'esercizio precedente.

Output programma:

```
Command Window

Enrico Pezzano 4825087
Es3 autovalori

A =
     1    -1     2
    -2     0     5
     6    -3     6

Applico metodo delle potenze...test con (1, 1, 1) trasposto
y = 2.032789e-01 6.504925e-01 7.318041e-01
lambda1 = 5.000000e+00
i = 46

Test con (3, 10, 4) trasposto
y = 1.373606e-01 8.241634e-01 5.494423e-01
lambda2 = 3.000000e+00
i = 23

Applico metodo delle potenze inverse...primo test con p=4
y = 1.373606e-01 8.241634e-01 5.494423e-01
lambda3 = 4.060377e+00
i = 1001

Secondo test con p=4.5
y = 1.373606e-01 8.241634e-01 5.494423e-01
lambda4 = 5.000000e+00
fx i = 57 >>
```

OSSERVAZIONE OUTPUT:
Studiando la convergenza, mi accorgo che:

- A è diagonalizzabile
- Il vettore iniziale ha una componente non nulla lungo l'autovettore v_1 corrispondente a λ_1
- L'autovettore di modulo massimo è separato dagli altri, ovvero $|\lambda_1| > |\lambda i|$, i = 2,...,n

In **conclusione**, noto che, a parità di *k*, il metodo delle potenze inverse converge più lentamente rispetto al metodo delle potenze.