ESERCIZI SULLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

CALCULUS I, INFORMATICA 20/21

1. Funzioni trigonometriche

Risolvere le seguenti disequazioni scrivendo l'insieme di validità nei due modi seguenti:
1) come unione di condizioni, per esempio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \ \vee \ 2 < x < 4\}$.
2) come unione di intervalli, per esempio $(-\infty, 0] \cup (2, 4)$.

(1) $\sin(3x) > 0$

(2) $\cos(x) \leq 1/\sqrt{2}$

(3) $\sin(2x) \geq 1/2$

(4) $\tan(2x) \geq 1$

(5) $\tan(x) \geq 0$

(6) $\tan(-2x) > 1$

(7) $\arctan(x + 1) > 0$

(8) $\arccos(x) > \pi/4$

(9) $\arctan(x^2 + 1) \leq \pi/4$

(10) $\arcsin(x^2 + 1) \leq \pi/6$

(11) $\cos(x^2) \geq 0$

(12) $\cos(1/x) \geq 1/2$

Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $\arccos(x^2 - 1) \geq \arcsin \sqrt{|x|}$

(2) $1 + \arctan(x^2) \neq \sin x$

(3) $\tan(x)(1 - x) \neq 0$

(4) $\left(1 - 4x - x^2\right) \sin(x) > 0$

(5) $\ln\left(\arctan\left(x^2 - 1\right) + 1\right) \leq 0$

(6) $\arcsin\left(e^{x-1} - 1\right) + \ln x > 0$

Per ogni disequazione scritta sopra, scrivere una funzione per cui la disequazione rappresenti la condizione per trovare il dominio della funzione.

2. Dominio di funzioni

- Trovare il dominio delle seguenti funzioni

(1) $f(x) = \sqrt{x \arccos x}$

(2) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x-1}$

(3) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

(4) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x^2+1}$

(5) $f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{e^{x^2-1}-1}}$

(6) $f(x) = \cos \dfrac{1}{x^2+x+2}$

(7) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2-1}$

(8) $f(x) = \tan\left(\ln\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\right)$

(9) $f(x) = \arcsin(1 + \ln(x))$

(10) $f(x) = \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)$

(11) $f(x) = \ln \dfrac{\sin(x)}{x^2-1}$

(12) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x+4)^2}}{\ln x}$

3. Soluzione degli esercizi con funzioni trigonometriche

I primi esercizi su disequazioni con funzioni trigonometriche si risolvono disegnando e ragionando sul cerchio trigonometrico.

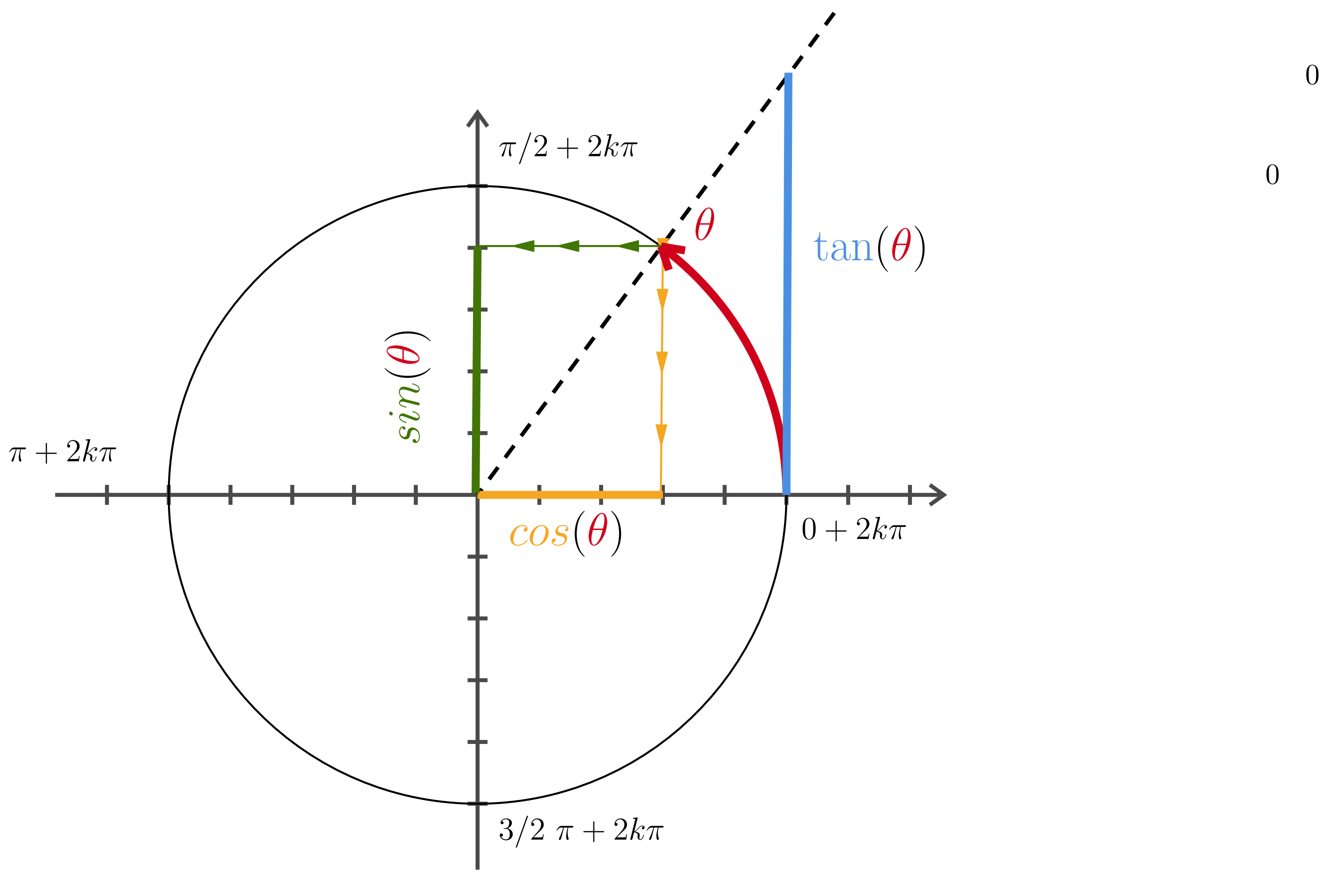

Figure 1. Uso del cerchio goniometrico

In alternativa (ma sconsigliato) si possono ricordare a memoria le condizioni per le funzioni sin, cos e tan.

3.1. **Esercizio 1.**

$$\sin(3x) > 0$$

Soluzione: il $\sin(\theta)$ è la lunghezza della linea verde del grafico che è la proiezione della linea rossa, la cui lunghezza è θ. $\sin(\theta)$ è maggiore di zero quando la linea verde sta sopra l'asse orizzontale (l'asse delle ascisse). Per avere la linea verde sopra l'asse, bisogna proiettare orizzontalmente i punti della linea rossa che stanno tra $0 + 2k\pi$ e $\pi + 2k\pi$.

!h

0

0

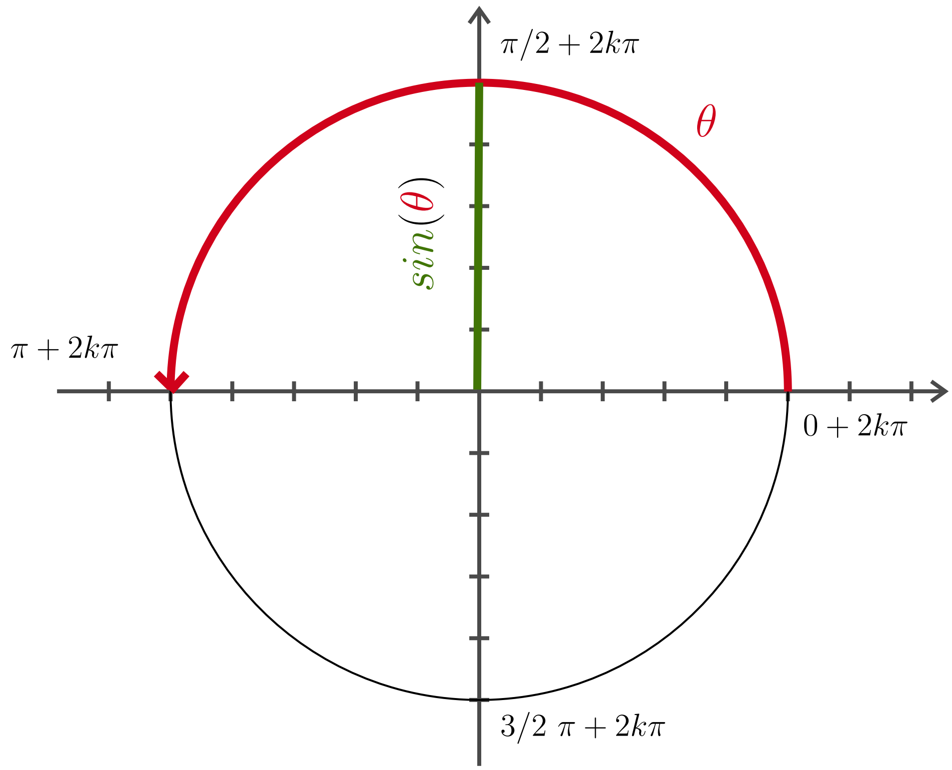

Figure 2. Svolgimento grafico dell'esercizio 1.

Abbiamo:

$$2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}$$

dove $\theta = 3x$ è l'argomento della funzione $\sin(3x)$. Quindi sostituiamo $3x$ a θ e otteniamo

$$2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui

$$2/3k\pi < x < (2k+1)/3\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2. **Esercizio 2.**

$$\cos(x) \leq 1/\sqrt{2}$$

Soluzione: il ragionamento è analogo a prima. Stavolta cambia la direzione di proiezione perchè abbiamo $\cos(\theta)$ invece di $\sin(\theta)$. Dobbiamo considerare la proiezione dai punti della circonferenza all'asse orizzontale. Questa proiezione deve essere minore di $1/\sqrt{2}$, come in

!h

0

0

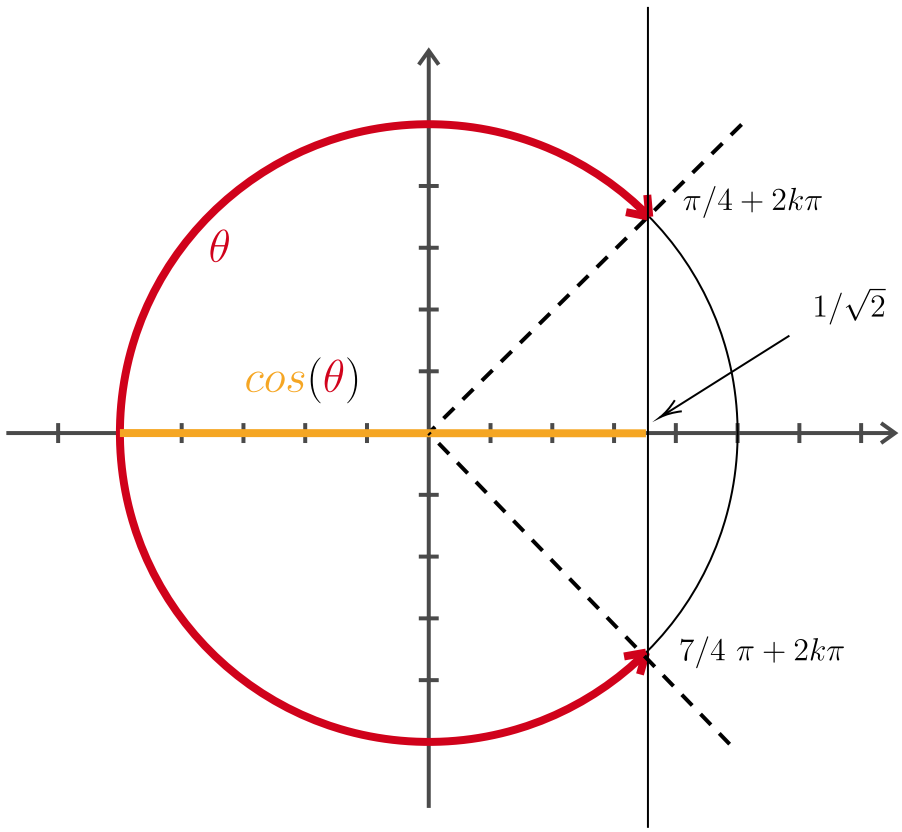

FIGURE 3. Svolgimento grafico dell'esercizio 2.

figura. I punti della circonferenza che vengono proiettati in punti della linea gialla (minori di $1/\sqrt{2}$) sono quelli in rosso. Abbiamo:

$$\pi/4 + 2k\pi < x < 7/4\pi + 2k\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}$$

.

3.3. **Esercizio 3.**

$$\sin(2x) \geq 1/2$$

Soluzione: analoga alla precedente.

3.4. **Esercizio 4.**

$$\tan(2x) \geq 1$$

Soluzione: la $\tan(\theta)$ maggiore o uguale a 1 corrisponde ai punti sulla linea blu. Questi punti sono la proiezione (nel senso della tangente, cioè radiale) dei punti rossi sulla circonferenza.

!h

0

0

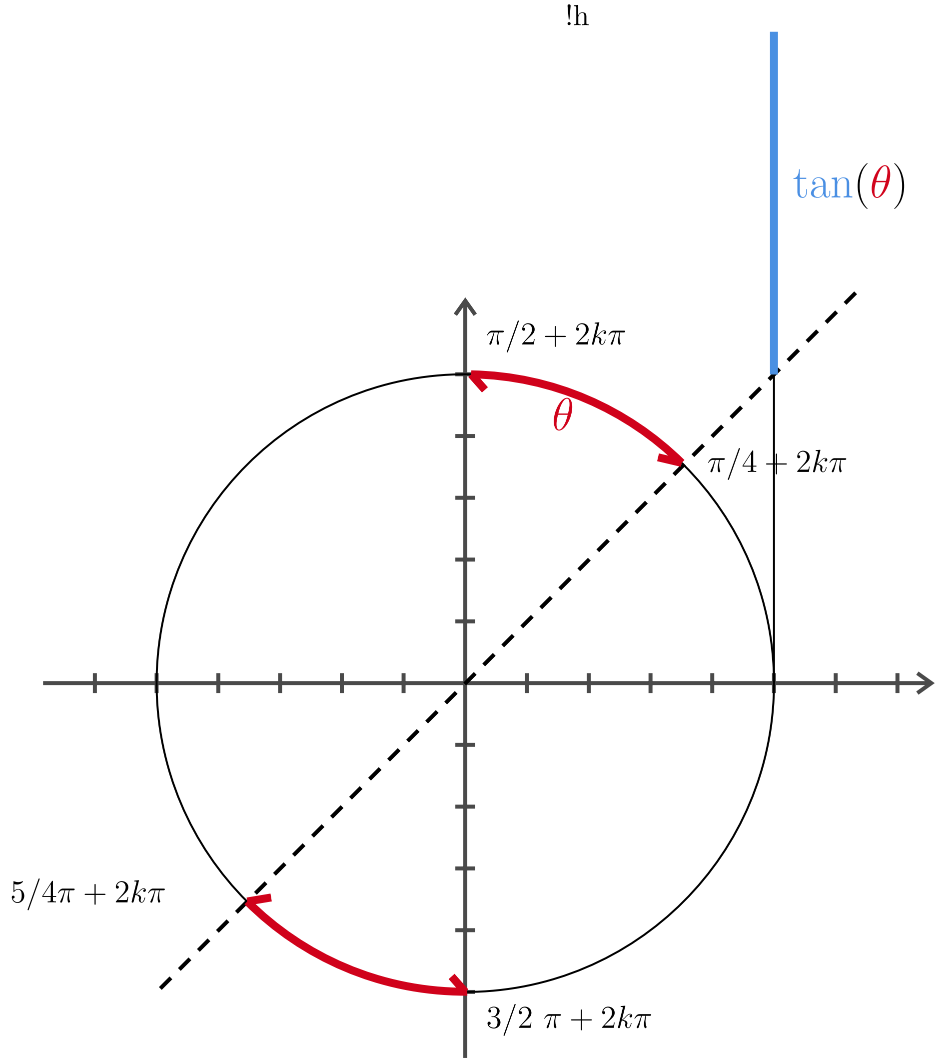

FIGURE 4. Svolgimento grafico dell'esercizio 4.

La periodicità della tangente è $k\pi$, cioè la tangente di θ assume lo stesso valore ogni "mezzo giro" della retta (tratteggiata nel grafico) uscente dall'origine e che interseca la verticale passante per $(1,0)$. Quindi l'arco rosso compreso tra $5/4\pi + 2k\pi$ e $3/2\pi + 2k\pi$ è l'arco compreso tra $\pi/4 + k\pi$ e $\pi/2 + k\pi$ traslato di π. Abbiamo

$$\pi/4 + k\pi \leq 2x < \pi/2 + k\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui

$$\pi/8 + k/2\pi \leq x < \pi/4 + k/2\pi \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

3.5. **Esercizi 5 e 6.**

$$\tan(x) \geq 0$$

$$\tan(-2x) > 1$$

Soluzioni : analoghe all'esercizio 4.

4. Soluzioni delle disequazioni con funzioni trigonometriche inverse

Soluzioni: Queste disequazioni che presentano funzioni trigonometriche inverse si risolvono applicando le loro rispettive funzioni inverse, ovvero le funzioni trigonometriche sin, cos e tan.

4.1. **Esercizio 7.** Consideriamo

$$\arctan(x+1) > 0$$

Non ha restrizioni sul dominio perchè l'arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione inversa della arctan è la tan. Applichiamo tan a entrambi i lati della disequazione. La disequazione rimane nello stesso verso perchè ciò che applichiamo, la funzione tan, è crescente tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Otteniamo:

$$\tan(\arctan(x+1)) > \tan(0)$$

da cui

$$x+1 > 0$$

quindi

$$x > -1$$

4.2. **Esercizio 8.** Consideriamo

$$\arccos(x) > \pi/4$$

Il dominio dell'arccos è $-1 \leq x \leq 1$. Applichiamo cos. Attenzione: il cos è decrscente, quindi cambia il verso della disequazione. Otteniamo:

$$\cos(\arccos(x)) < \cos(\pi/4)$$

da cui

$$x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, restringendosi al dominio:

$$-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4.3. **Esercizio 9.** Consideriamo

$$\arctan(x^2 + 1) \leq \pi/4$$

Applichiamo tan. Otteniamo:

$$\tan(\arctan(x^2 + 1)) \leq \tan(\pi/4)$$

da cui

$$x^2 + 1 \leq 1$$

Quindi:

$$x^2 \leq 0$$

ovvero

$$x = 0$$

4.4. **Esercizio 10.** Consideriamo

$$\arcsin(x^2 + 1) \leq \pi/6$$

Il dominio dell'arcsin è $-1 \leq x \leq 1$. Applichiamo sin. Otteniamo:

$$\sin(\arcsin(x^2 + 1)) \leq \sin(\pi/6)$$

da cui

$$x^2 + 1 \leq \frac{1}{2}$$

ovvero

$$x^2 \leq -\frac{1}{2}$$

e quindi non è mai verificata.

4.5. **Esercizio 11.** Consideriamo

$$\cos(x^2) \geq 0$$

In questo caso sappiamo che il $\cos(\theta) > 0$ quando

$$-\pi/2 + 2k\pi \leq \theta \leq \pi/2 + 2k\pi$$

Quindi

$$-\pi/2 + 2k\pi \leq x^2 \leq \pi/2 + 2k\pi$$

Dato che x^2 è sempre maggiore o uguale a zero, le diseguaglianze portano restrizioni ai valori di $x \in \mathbb{R}$ solo quando le costanti a destra e sinistra sono positive. Quindi dipende dai valori di k. Dobbiamo considerare solo i valori di k che rendono positivi i termini a destra o a sinistra. Quindi il k più piccolo che consideriamo è tale che

$$-\pi/2 + 2k\pi \geq 0$$

oppure

$$\pi/2 + 2k\pi \geq 0$$

cioè $k = 0$, che verifica la seconda e non la prima. Per $k \leq 1$ non troviamo soluzioni, perchè x^2 non è mai compreso tra due valori negativi.

Sia $k = 0$. Abbiamo:

$$x^2 \leq \pi/2$$

Quindi:

$$-\sqrt{\pi/2} \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$$

Fissato $k \geq 1$ abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 & \geq & -\pi/2 + 2k\pi & > & 0 \\ x^2 & \leq & \pi/2 + 2k\pi & > & 0 \end{cases}$$

Vediamo in figura le condizioni al variare di k. Abbiamo

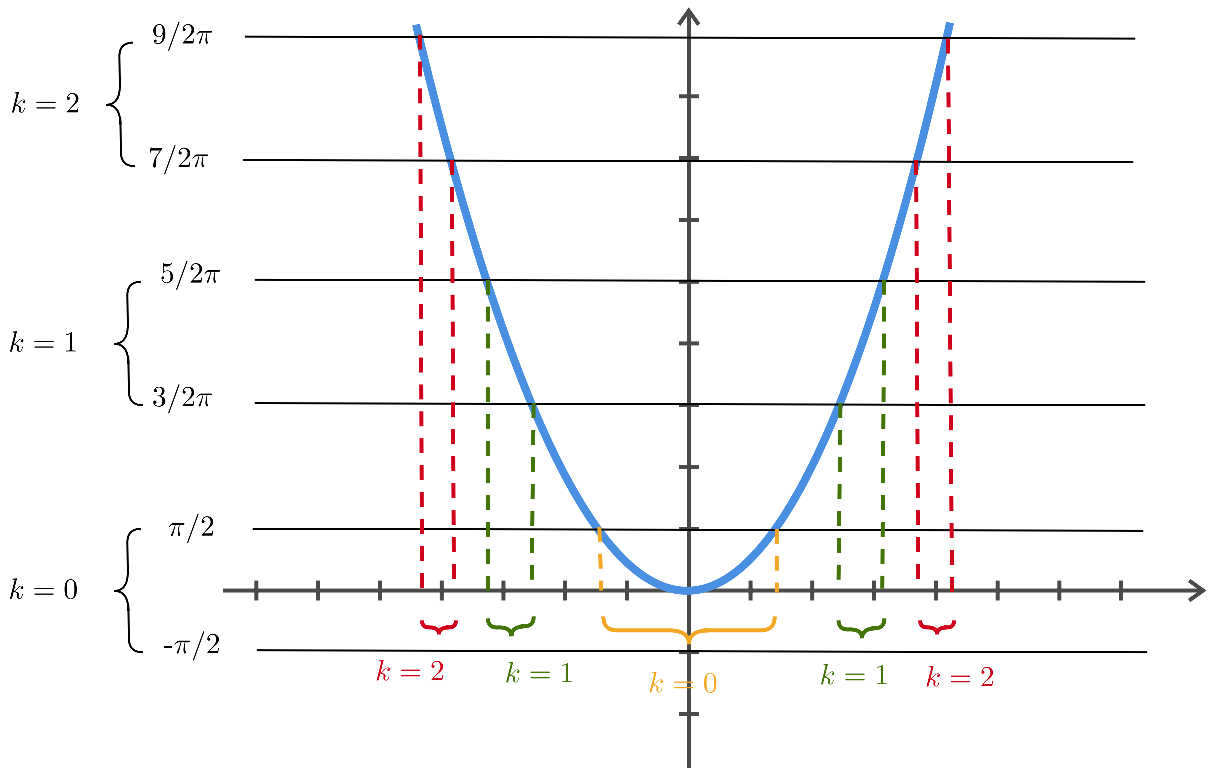

FIGURE 5. Parabola "tagliata" dalle rette orizzontali al variare di k positivo.

$$\sqrt{-\pi/2 + 2k\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi/2 + 2k\pi}$$

e

$$-\sqrt{\pi/2 + 2k\pi} \leq x \leq -\sqrt{-\pi/2 + 2k\pi}$$

L'insieme finale si scrive come:

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[-\sqrt{(2k+\frac{1}{2})\pi}, -\sqrt{(2k-\frac{1}{2})\pi} \right] \bigcup \left[\sqrt{(2k-\frac{1}{2})\pi}, \sqrt{(2k+\frac{1}{2})\pi} \right] \right) \bigcup \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right]$$

4.6. **Esercizio 12.**

$$\cos(1/x) \geq 1/2$$

Soluzione: Abbiamo che la disequazione è definita solo se $x \neq 0$. Dalle considerazioni sul cerchio trigonometrico abbiamo che:

$$-\pi/3 + 2k\pi \leq \frac{1}{x} \leq \pi/3 + 2k\pi$$

ovvero

$$\frac{6k-1}{3}\pi \leq \frac{1}{x} \leq \frac{6k+1}{3}\pi$$

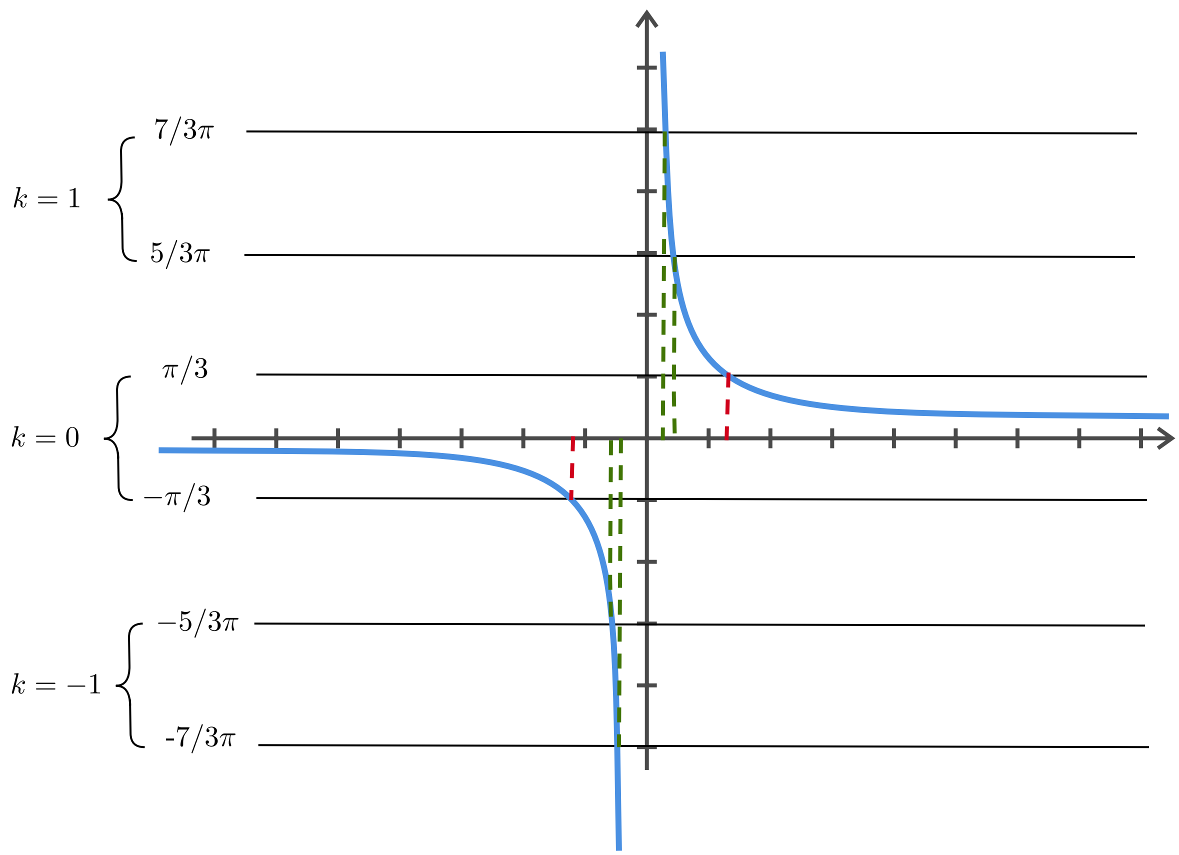

FIGURE 6. Iperbole "tagliata" dalle rette orizzontali al variare di k

Se k è 1 o maggiore, entrambe le costanti sono positive e quindi possiamo invertire la disequazione nel modo seguente

$$\frac{3}{(6k+1)\pi} \leq x \leq \frac{3}{(6k-1)\pi}$$

Se k è -1 o minore, entrambe le costanti sono negative e quindi possiamo invertire la disequazione come sopra (infatti $1/x$ e descrescente sia per $x < 0$ e per $x > 0$)

$$\frac{3}{(6k+1)\pi} \leq x \leq \frac{3}{(6k-1)\pi}$$

Però $1/x$ non e' decrescente se considerata "a cavallo" del valore 0 (dove non è definita). Infatti nel caso $k = 0$ abbiamo

$$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{3}$$

e quindi

$$x \geq \frac{3}{\pi}$$

e

$$x \leq -\frac{3}{\pi}$$

L'insieme finale si scrive come:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{\pi}\right] \bigcup \left[\frac{3}{\pi}, +\infty\right) \bigcup_{k\neq 0, k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3}{(6k+1)\pi}, \frac{3}{(6k-1)\pi}\right]$$

5. Altre disequazioni con funzioni trigonometriche inverse

5.1. **Esercizio 1.**

$$\arccos(x^2-1) \geq \arcsin\sqrt{|x|}$$

Soluzione: Dominio arcsin: la condizione $-1 \leq \sqrt{|x|} \leq 1$ implica $-1 \leq x \leq 1$. Dominio arccos: la condizione $-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$ implica $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Il dominio della disequazione è $-1 \leq x \leq 1$. Le funzioni arcsin e arccos descrivono l'arco di circonferenza dati i cateti del triangolo, e sono legate dalla relazione

$$\cos\arcsin(z) = \sqrt{1-z^2}$$

con $-1 \leq z \leq 1$. Quindi, applicando il cos a entrambi i membri otteniamo:

$$\cos\arccos(x^2-1) \leq \cos\arcsin\sqrt{|x|}$$

da cui

$$x^2 - 1 \leq \sqrt{1-|x|}$$

Il termine di sinistra è sempre minore o uguale a 0 quando $-1 \leq x \leq 1$. Il termine di destra è sempre maggiore o uguale a zero essendo una radice. Quindi la disuguaglianza è sempre verificata.

5.2. **Esercizio 2.** Consideriamo

$$1 + \arctan(x^2) \neq \sin x$$

Soluzione: $\sin x \leq 1$ per ogni x e $1 + \arctan(x^2) > 1$ per ogni $x \neq 0$. In $x = 0$ abbiamo $\sin x = 0$ e $1 + \arctan(x^2) = 1$, quindi la relazione è sempre verificata.

5.3. **Esercizio 3.** Consideriamo

$$\tan(x)(1 - x) \neq 0$$

Soluzione: il dominio della tangente (e quindi della disequazione) è $x \neq \pi/2 + k\pi$. Le condizioni sono $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ date dalla tangente posta diversa da zero, e $x \neq 1$ per il termine lineare.

5.4. **Esercizio 4.** Consideriamo

$$\left(1 - 4x - x^2\right)\sin(x) > 0$$

Soluzione: $\sin x > 0$ significa

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

Per il termine quadratico abbiamo:

$$-2 - \sqrt{5} < x < -2 + \sqrt{5}$$

Dobbiamo mettere a sistema queste condizioni.

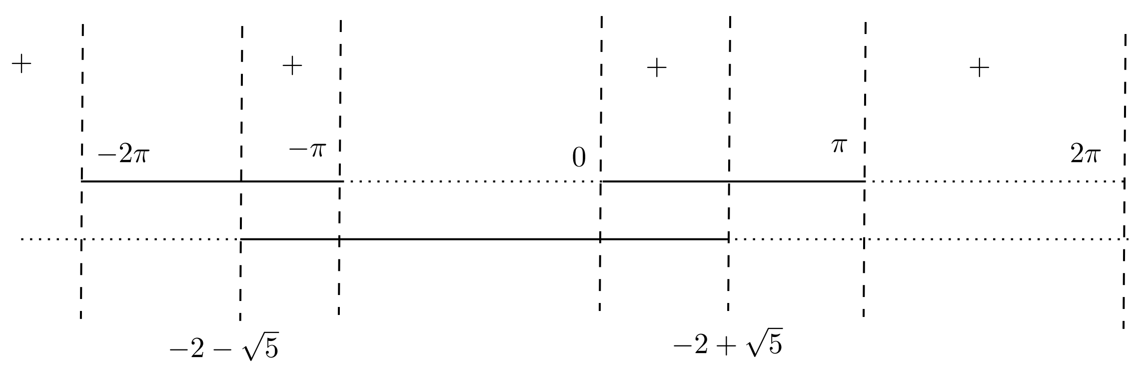

FIGURE 7. Positività della funzione sin e della parabola a sistema.

Per $k \neq 0$

$$(2k-1)\pi < x < 2k\pi$$

a cui dobbiamo aggiungere gli intervalli interni al dominio

$$-2 - \sqrt{5} < x < -\pi \quad \text{e} \quad 0 < x < -2 + \sqrt{5}$$

5.5. **Esercizio 5.** Consideriamo

$$\ln\left(\arctan\left(x^2-1\right)+1\right)\leq 0$$

Soluzione: Dominio $\arctan\left(x^2-1\right)+1>0$ ovvero $\arctan\left(x^2-1\right)>-1$ che è sempre verificata perchè il valore più piccolo di $\arctan\left(x^2-1\right)$ è assunto in $\arctan(-1)=-\pi/4$ che è maggiore di -1. Quindi il dominio è tutto $\mathbb{R}$. La condizione

$$\arctan\left(x^2-1\right)+1\leq 1$$

implica

$$\arctan\left(x^2-1\right)\leq 0$$

da cui

$$x^2-1\leq\tan(0)=0$$

e quindi

$$-1\leq x\leq 1$$

5.6. **Esercizio 6.** Consideriamo

$$\arcsin\left(e^{x-1}-1\right)+\ln x>0$$

Soluzione: Possiamo solo studiare separatamente i due termini. Dominio: dall'arcsin abbiamo $-1\leq e^{x-1}-1\leq 1$. Quindi

$$e^{x-1}\leq 2$$

per cui

$$\ln e^{x-1}\leq\ln 2$$

e

$$x-1\leq\ln 2$$

per cui

$$x\leq 1+\ln 2$$

Il dominio è quindi $0<x\leq 1+\ln 2$. La soluzione si trova notando che per $0<x<1$ sia l'arcsin che il ln assumono valori negativi, mentre per $x>1$ assumo entrambi valori positivi. Infatti

$$\arcsin\left(e^{x-1}-1\right)>0$$

implica

$$e^{x-1}-1>0$$

da cui

$$e^{x-1}>1$$

Applico il ln e ottengo

$$x-1>0$$

e trovo $x>1$.