

# Calculus 1

Prova scritta del 7 giugno 2021

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) - x.$$

- (a) Determinare  $\text{dom } f$ , calcolare i limiti di  $f$  agli estremi di  $\text{dom } f$  e determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali.
- (b) Studiare la monotonia di  $f$ , determinando eventuali punti di minimo/massimo assoluti e relativi.
- (c) Determinare l'immagine di  $f$  e disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

2. Determinare una primitiva della funzione

$$g(x) = x \sqrt{1 + x^2} + \frac{x + 1}{x - 1}$$

e calcolare, se esiste, il valore di ciascuno dei seguenti integrali definiti

$$\int_{-1}^0 g(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^2 g(x) \, dx.$$

3. Per  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sia  $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ x^2 + \alpha x + \alpha^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $f_\alpha$  è continua.
- (b) Stabilire per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $f_\alpha$  è derivabile.