

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 22/7/2014

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ per valori di x molto grandi.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento della radice quadrata.

(c) Supponendo che la radice quadrata possa essere calcolata con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina, studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto q := x^2 \mapsto r1 := \sqrt{q+1}, r2 := \sqrt{q-1} \mapsto y1 := x \cdot (r1 - r2)$

(a2): $x \mapsto q := x^2 \mapsto p1 := x\sqrt{q+1}, p2 := x\sqrt{q-1} \mapsto y2 := p1 - p2$

(a3): $x \mapsto q := x^2 \mapsto n := 2x, r1 := \sqrt{q+1}, r2 := \sqrt{q-1} \mapsto y3 := n/(r1 + r2)$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con β opportuno (esplicitare le matrici di rotazione).

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione $g(x) = \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y	1	0	-1	1

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 6×6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quali valori dello shift p possono essere scelti affinché il metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A converga all'autovalore 2?

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e i vettori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $b = A \cdot x$ e $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-3} \\ -10^{-6} \end{pmatrix}$.
- (i) Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- (ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.
- (iii) Calcolare le norme $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_1$ per ognuno dei vettori x , b e δb .
- (iv) Considerare il termine noto perturbato $\tilde{b} = b + \delta b$ e la soluzione del sistema lineare $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Calcolare una maggiorazione per l'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$.