

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame dell'8/7/2015

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{2x}$$

per piccoli valori di x .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Supponendo che le funzioni seno e coseno possano essere calcolate con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina, studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto s := \sin x, s2 := \sin 2x \mapsto t1 := s/x, t2 := s2/(2x) \mapsto y1 := t1 - t2$

(a2): $x \mapsto d := 1 + \cos x, s := \sin x \mapsto p1 := s^3, p2 := x \cdot d \mapsto y2 := p1/p2$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno. Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione $g(x) = \alpha + \beta \sin x + \gamma \sin 2x$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
y	$-1/2$	0	1	1	-1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A .

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e i vettori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$b = A \cdot x \text{ e } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 9.9 \\ 10.1 \\ 10.1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.

(iii) Calcolare la norma $\|\cdot\|_1$ per ognuno dei vettori x , b e $\tilde{b} - b$.

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_1$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = \tilde{b}$.