03/20/20

ESTENSIONE E_i $i = 1 \dots N$ $E_i E_j \neq \emptyset$ $\cup E_i F = F$

$\longrightarrow$ 2' $$P(F) = \sum_{i=1}^{N} P(F|E_i)\, P(E_i)$$

$\longrightarrow$ 3' $$P(E|F) = \frac{P(F|E)\, P(E)}{\sum_{i=1}^{N} P(F|E_i)\, P(E_i)}$$

EVENTI INDIPENDENTI

$$P(EF) = P(E)\,P(F)$$

CONFRONTA CON

$$P(EF) = P(E)\,P(F|E)$$

OVVERO PER EVENTI INDIPENDENTI $P(F|E)$

VARIABILI CASUALI DISCRETE

$$X : S \to \mathbb{R}$$

VALORI POSSIBILI DI X SONO SOGGETTI A PROBABILITÀ

$$(S, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \_)$$

DEF VARIABILE CASUALE (ALEATORIA)

DISCRETA $X : S \to \{a_1, \dots, a_N\}$ $a_i \in \mathbb{R}$
$i = 1 \dots N$

ESERCIZIO lancio di 3 monete, x # di teste

- $S = \{$ risultati possibili del lancio di 3 monete $\}$
- $x : S \to \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(x=0) = P(\{C,C,C\}) = 1/8$$
$$P(x=1) = P(\{T,C,C\}, \{C,T,C\}, \{C,C,T\}) = 3/8$$
$$P(x=2) = P(\{T,T,C\}, \{C,T,T\}, \{T,C,T\}) = 3/8$$
$$P(x=3) = P(\{T,T,T\}) = 1/8$$

OSS semplifico notazione

"$a_i = i$"

"$P(\{a_i\}) = P(i)$"

DEF $P(i)$ FUNZIONE DI PROBABILITÀ DI MASSA

$$0 \le P(i) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$$

ES

• SPAZIO CAMPIONARIO:

ESTRAZIONI DI 3 PALLINE DA 20
(NUMERATE DA 1 A 20)

X IL NUMERO ESATTO PIÙ GRANDE

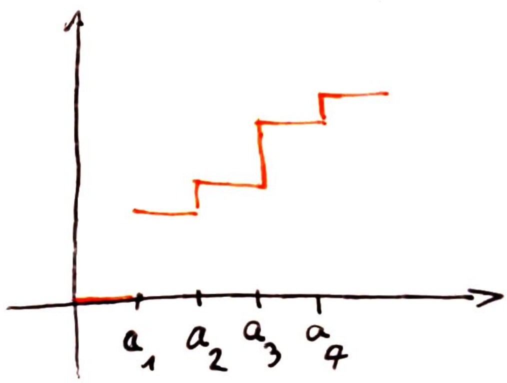
$$X : S \to \{3, 4, \dots 20\}$$

$$p(i) = P(\{X = i\}) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{(i-1)!}{(i-1-2)!\,2!}}{\frac{20!}{(20-3)!\,3!}}$$

FUNZIONE DI PROBABILITÀ COMULATA

$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ $\qquad a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_N$

$$a \in \mathbb{R},\quad F(a) = \sum_{a_i < a} p(a_i)$$



N = 4

VALORE ATTESO

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} a_i P(i)$$

ES.

$5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \qquad a_i$

$0.48 \quad 0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}48$

$5 \cdot 0{,}48 + 3 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}48$

- FUNZIONE DI VARIABILE ALEATORIA E VALORE ATTESO ASSOCIATO

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g \circ X$

$g(X)$

ES $\quad g(x) = x^2 \qquad X, \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 1$

$p_1 = .2 \quad p_2 = .5 \quad p_3 = .3$

$g(a_1) = 1$

$g(a_2) = 0 \qquad \{0, 1\}$

$g(a_3) = 1$

$P(g(X) = 0) = .5$

$P(g(X) = 1) = .5$

- VALORE ATTESO DI $g \circ X$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(a_i) P(i)$$

- ESERCIZIO X, $g(X) = aX + b \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$E[g(x)] = E[aX + b] = a\,E[x] + b$$

$$E[aX+b] = \sum_{i=1}^{N} (a \cdot a_i + b)\, p(i) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} a \cdot a_i\, p(i)}\; + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} b\, p(i)}$$

$$= a \underbrace{\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot p(i)} + b =$$

$$= a\,E[x] + b$$

IL VALORE SI "COMPORTA BENE" RISPETTO A TRASFORMAZIONE LINEARE

- VARIANZA

$$Var(X) = (X - E[X])^2$$

OVVERO

$$\underbrace{Var(X) = \sum_{i=1}^{N} p(i)\,(a_i - E(X))^2}_{\text{SOMMA PESATA DEGLI SCOSTAMENTI}}$$

ES. I) $\text{Var}(x) = E[x^2] - (E[x])^2$

$$\sum_{i=1}^{N} p(i)\left(a_i^2 - 2a_i E[x] + (E[x])^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p(i)\, a_i^2 - \sum_{i=1}^{N} p(i)\, 2a_i E(x) + \sum_{i=1}^{N} p(i)(E[x])^2 =$$

$$= E[x^2] - 2E[x] \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p(i) a_i}_{E[x]} + (E[x])^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p(i)}_{1} =$$

$$= E[x^2] - 2(E[x])^2 + (E[x])^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

II) $\text{Var}(aX+b) \neq a\,\text{Var}(x) + b$

$\text{Var}(aX+b) = a^2\,\text{Var}(x)$

$$\text{Var}(aX+b) = E[(aX+b-E[aX+b])^2] =$$

$$= E[(aX \cancel{+b} - (aE[x] \cancel{+b}))^2] =$$

$$= E[(a(x-Ex))^2] = E[a^2(x-Ex)^2] =$$

$$= a^2\, E[\underbrace{(x-Ex)^2}_{\text{Var}(x)}]$$

DEVIAZIONI STANDARD

$$DS(x) = \sqrt{Var(x)}$$