ESAME ALAN - PARTE 1

1) $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3:\, R_1 + R_3]{R_2:\, R_1 - R_2} *$

a) $rk(A) = rk(A^t) = n°$ pivot $= 3$

$*: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3:\, 3R_2 - R_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ y + z + 3w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \longrightarrow =$

$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - y + 0 = 0 \\ y = -z \\ w = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -y \rightarrow x = z \\ y = -z \\ w = 0 \end{cases}$

$z \rightarrow$ variabile libera

$\cdot\ S: \{(z, -z, z, 0)\}$

c) $B_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \cdot\ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \rightarrow rk(A) = 2$

$\neq$

$\cdot\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rk(AB) = 1$

d-1) Falso, la trasposta di una matrice ha rango uguale alla matrice di partenza

d-2) VEDI SOPRA

d-3) VEDI SOPRA

d = 4) VERA SOPRA

d = 5) Il sistema di $Ax=0$ ammette sicuramente soluzioni, ma non per forza infinite se $rk(A) = \text{colonne}(A)$

d = 6 = 7) VEDI SOPRA

d = 8) FALSO, la soluzione nulla non è mai soluzione

2) $A_h = \begin{pmatrix} h & 2 & -1 \\ 1 & h-1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = 2(4 - (-1(h-1))) - 2(2h+1) = 2(4+h-1) +$

$-4h - 2 = 2h - 4h + 8 - 2 - 2 = -2h + 4$

A_h invertibile per $h \neq 2$ $\left(\begin{array}{l} -2h = -4 \\ -h = -2 \\ h = 2 \end{array}\right)$

b) 1 soluz. se $rk(A_h) = rk(A|B)$

$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} h & 2 & -1 & 1 \\ 1 & h-1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 2 & 2 \\ h & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\xrightarrow[R_3 : 2R_1 - R_3]{R_2 : hR_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 2 & 2 \\ 0 & h^2-h-2 & 2h-1 & \\ 0 & 2h-4 & & \end{pmatrix}$ ....

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ h-1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-2-2) \neq 0$ & $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$,

(1 soluzione)

quindi, Kroneker: $rk(A_h) = rk(A|B)$ se $h \neq 2$

c) Un sistema omogeneo ammette sempre soluzioni

3) a) Vero, per la matrice nilpotente $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $(0 \cdot 0) - (1 \cdot 0) = 0$

b) Falso, perché se con l'aggiunta di b la matrice presenta poi un pivot nell'ultima riga il suo rango è 3 ($\neq 2$), e perciò non esisterebbero soluzioni. D'altro canto, anche $rk(A)$ non può essere > 2 dato il suo numero di colonne

4) a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x = 2 \\ y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \longrightarrow$ IMPOSSIBILE

b) $V = \langle v_1, v_3 \rangle$:

$V_1 = V_1$ & $V_3 \subseteq V_2$

$V \neq \langle v_1, v_4 \rangle$ perché v_4 ha uno 0 dove v_2 non ce l'ha (poco tempo, scusi la giustific. superficiale)

c) $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_5 \rangle \in \mathbb{R}^4$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$