

Esercizi sulla Lezione 6

E6.1 Data la v.a. continua X con pdf $f(x) = Cx^3$ definita nell'intervallo $0 \leq x \leq 3/2$, si chiede di:

- (a) Determinare il valore di C .
- (b) Usando il valore di C ottenuto in (a), determinare la probabilità $P\{1/2 \leq X \leq 3\}$.
- (c) Calcolare $E[X^2]$ e $Var(X)$.

E6.2 Mostra che, per a e b costanti, $E[aX + b] = aE[X] + b$, $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

E6.3 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcolare $E[2^X]$ e $Var[2^X]$.

E6.4 Un autobus passa ogni 15 minuti dalle 8 in poi. Calcola la probabilità di aspettarlo meno di 5 minuti e più di 10 minuti arrivando tra le 8 e le 9, considerando il tempo di arrivo alla fermata come una distribuzione uniforme tra le 8 e le 9.

6.1.

$$f(x) = Cx^3$$

$$0 < x < \frac{3}{2}$$

$$a) \int_0^{3/2} x^3 dx = \frac{1}{C} \quad C = \frac{64}{81}$$

$$b) \int_{1/2}^3 \frac{64}{81} x^3 dx = \int_{1/2}^{3/2} \frac{64}{81} x^3 dx = 0,9876$$

$$c) E[X^2] = \int_0^{3/2} x^2 f(x) dx = \int_0^{3/2} x^2 \cdot \frac{64}{81} x^3 dx = \frac{64}{81} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{6} = \frac{3}{2}$$

$$E[X] = \int_0^{3/2} x \cdot C dx = \frac{64}{81} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{3}{2} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{3}{50}$$

6.2.

$$E[aX+b] = \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i+b)P(X=x_i) = a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i) +$$

$$b \sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i) = aE[X] + b$$

$$\text{Var}(aX+b) = E[(aX+b - aE[X] - b)^2] = E[(aX - aE[X])^2] =$$

$$= a^2 \text{Var}[X]$$

6.3

$$E[2^x] = \int_0^2 \frac{2^x}{2} dx \approx 2,1640$$

$$E[2^{2x}] = \int_0^2 \frac{2^{2x}}{2} dx \approx 5,4101$$

$$V[2^x] = E[2^{2x}] - (E[2^x])^2 \approx 0,7270$$

6.4

60 min bus passa ogni 15 min
dalle 8 alle 9

$$8 < x < 9$$

aspettare il bus meno di 5 minuti

$$P(10 < X < 15) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

aspettare il bus più di 10 min

$$P(0 < X < 5) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$