Esame scritto ALAN 21-07-2022, prima parte.

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare, se esiste, una soluzione di lunghezza $\sqrt{6}$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Se esiste, esibire $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$ sia 3.

3) Siano v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ e $A \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ la matrice che ha i v_i come colonne. Giustificando la risposta, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Se $v_1 = 2v_2$, allora $\langle v_1, v_3, v_5 \rangle = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle$.

b) Se $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$, allora v_1, v_2, v_5 formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se v_1, v_3, v_5 formano una base di $\mathbb{R}^3$.

c) Se la terza riga di A è la somma delle prime due, allora non esiste alcun $U \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tale che i vettori v_i con $i \in U$ formino una base di $\mathbb{R}^3$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

a) stabilire se $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiene a $\langle v_1, v_2 \rangle$.

b) trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonale sia a v_1 che a v_2. I vettori v_1, v_2, v formano una base di $\mathbb{R}^3$? Se si, si tratta di una base ortogonale?