Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 26/7/2012

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = e^{(1+x)^2-(1-x)^2}$ per piccoli valori di x.

   (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

   (b) Determinare il condizionamento della funzione esponenziale.

   (c) Supponendo che la funzione esponenziale possa essere calcolata con un errore relativo maggiorato dalla precisione di macchina, studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

   (c1): $x \mapsto t1 := (1+x)^2,\ t2 := (1-x)^2 \mapsto s := t1 - t2 \mapsto y1 := e^s$

   (c2): $x \mapsto p := e^x \mapsto y2 := p^4$

   (c3): $x \mapsto t1 := (1+x)^2,\ t2 := (1-x)^2 \mapsto n := e^{t1},\ d := e^{t2} \mapsto y3 := n/d$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con q opportuno.

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione $g(x) = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	0	1	$\sqrt{2}$
y	1	1	0	0

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A.

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4/3 & 3 \end{pmatrix}$ e il vettore $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Sapendo che $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare i condizionamenti di A rispetto alle norme $\| \cdot \|_\infty$ e $\| \cdot \|_1$.

(b) Considerare le soluzioni dei sistemi lineari $Ax = b$ e $A\tilde{x} = \tilde{b}$, dove $\tilde{b}$ è tale che $\|\tilde{b} - b\|_1 \leq 10^{-3}$. Calcolare una maggiorazione per l'errore $\|\tilde{x} - x\|_1$.