

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Calcolo Numerico**  
**Esame dell'11/1/2019**

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}$$

per piccoli valori positivi di  $x$ .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di  $f(x)$ .

(b) Determinare il condizionamento della funzione radice quadrata.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di  $f(x)$ :

$$(a1): x \mapsto s := 1 + 3x, d := 1 - 3x \mapsto r1 := \sqrt{s}, r2 := \sqrt{d} \mapsto y1 := r1 - r2$$

$$(a2): x \mapsto r1 := \sqrt{1+3x}, r2 := \sqrt{1-3x} \mapsto n := 6x, dd := r1 + r2 \mapsto y2 := n/dd$$

$$(a3): x \mapsto r := \frac{1}{x}, rx := \sqrt{x} \mapsto rr1 := \sqrt{r+3}, rr2 := \sqrt{r-3} \mapsto y3 := rx \cdot (rr1 - rr2)$$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $\gamma$  opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  della funzione scritta nella forma  $g(x) = \alpha + \beta \sin x + \gamma \cos x$  che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$y$	$1$	$0$	$-1$	$-1$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice  $6 \times 6$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice  $A$ .

5. Si considerino la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  e i vettori  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$b = A \cdot x \text{ e } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.6 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/24 & 1/24 \\ 1/24 & 5/24 \end{pmatrix}$ .

(ii) Calcolare i condizionamenti  $\mu_1(A)$  e  $\mu_\infty(A)$  relativi alle norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  per ognuno dei vettori  $x$ ,  $b$  e  $\delta b = \tilde{b} - b$ .

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore  $\|\tilde{x} - x\|_1$  per la soluzione del sistema lineare perturbato  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ .