

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Calcolo Numerico**  
**Esame del 9/2/2018**

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin 2x \cos x - 2 \sin x \cos 2x$$

per piccoli valori di  $x$ .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di  $f(x)$ .

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di  $f(x)$ :

$$(a1): x \mapsto c := \cos x, \quad c2 := \cos 2x, \quad s := \sin x, \quad s2 := \sin 2x$$

$$\mapsto p1 := s2 \cdot c, \quad p2 := s \cdot c2 \mapsto y1 := p1 - 2 \cdot p2$$

$$(a2): x \mapsto c := \cos x, \quad c2 := \cos 2x, \quad s := \sin x \mapsto f := c^2 - c2 \mapsto y2 := 2 \cdot s \cdot f$$

$$(a3): x \mapsto s := \sin x \mapsto ss := s^2 \mapsto y3 := 2 \cdot ss \cdot s$$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $s$  opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

$x$	-2	-1	-1	0	1	1	1
$y$	-2	-2	-3	-1	-1	0	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice  $6 \times 6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice  $A$  con shift  $p = -1/2$ .

5. Si considerino la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$  e i vettori  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$b = A \cdot x \text{ e } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 9.9 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/40 \\ 1/8 & 1/16 \end{pmatrix}$ .

(ii) Calcolare i condizionamenti  $\mu_1(A)$  e  $\mu_\infty(A)$  relativi alle norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  per ognuno dei vettori  $x$ ,  $b$  e  $\delta b = \tilde{b} - b$ .

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore  $\|\tilde{x} - x\|_1$  per la soluzione del sistema lineare perturbato  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ .