Ivan Capponi – S4039927

Calcolo Numerico
Risoluzione prova scritta 06/06/2016

Esercizio 1:
Si supponga di dover calcolare $\boldsymbol{f(x)} = 2sinx - sin(2x)$ per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$.
Determinare:

- Il condizionamento del problema del calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$ e discuterlo;
- Determinare il condizionamento della funzione seno;
- Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$:

$\boldsymbol{a_1}$: $s = sin(x)$; $s_2 = sin(2x)$; $y_1 = 2s - s_2$;
$\boldsymbol{a_2}$: $s = sin(x)$; $s_h = sin(\frac{x}{2})$; $y_2 = 4s \cdot {s_h}^2$;

a)
Utilizzando l'algoritmo $\boldsymbol{a_2}$, è possibile ottenere una differente formulazione analitica della funzione. Si ha:

$$f(x) = y_2 = 4s \cdot {s_h}^2 \rightarrow \boldsymbol{f(x) = (4sinx)\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

Il condizionamento di $f(x)$ è calcolabile mediante la formula: $\boldsymbol{c = \frac{xf'(x)}{f(x)}}$, dove $f'(x)$ è la derivata di $f(x)$. Si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{c} = \frac{x\left(4\,sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(cosx\ sin\left(\frac{x}{2}\right) + sinx\ cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}{(4sinx)\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{x\left(cosx\ sin\left(\frac{x}{2}\right) + sinx\ cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{sinx\ sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$= \frac{x}{sinx}\left(cosx + \frac{sinx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}(c) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx} \cdot \left(\lim_{x\to 0} cosx + \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to 0} cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx} = 1$ è il reciproco del limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, mentre $\lim_{x\to 0} cosx = \lim_{x\to 0} cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$.
Allora:

$$\lim_{x\to 0}(c) = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

Applicando ad esempio l'Hopital, $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{cosx}{\frac{1}{2}cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2$ e quindi $\lim_{x\to 0}(c) = 3$.

Il problema è debolmente mal condizionato: l'errore inerente in output è circa 3 volte l'errore in input.

b)

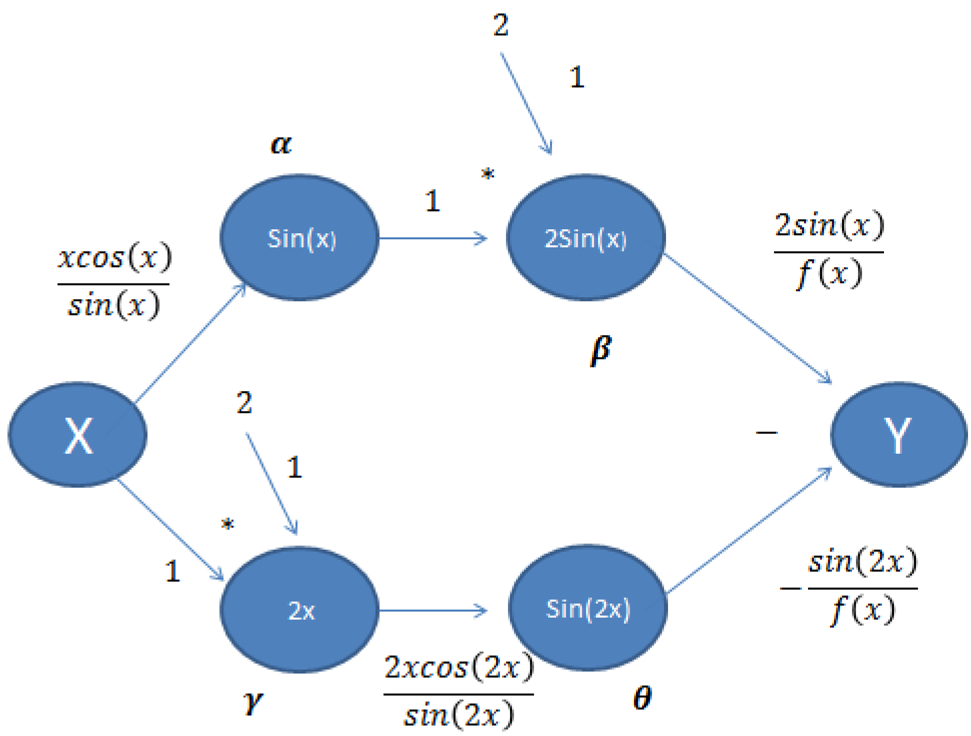
Il condizionamento di $g(x)$ è calcolabile mediante la formula: $\boldsymbol{c} = \frac{xg'(x)}{g(x)}$, dove $g'(x)$ è la derivata di $g(x)$. Si ottiene:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{xcosx}}{\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})}$$

c)

Si consideri il primo algoritmo: $\boldsymbol{a_1}$: $s = sin(x)$; $s_2 = sin(2x)$; $y_1 = 2s - s_2$;

Il grafo dell'algoritmo è:



Ogni arco del grafo è etichettato con il rispettivo condizionamento; gli archi uscenti da $\boldsymbol{x}$ non andranno considerati per l'errore algoritmico.

L'etichettatura relativa alla moltiplicazione è $\boldsymbol{+1}$ sia per il moltiplicando sia per il moltiplicatore; quella relativa alla funzione $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x})$ è stata calcolata nel punto b. Considerando invece $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{2x})$, si ha un'etichettatura pari a $\frac{2xcos(2x)}{sin(2x)}$. L'etichettatura relativa alla sottrazione,

per un'espressione del tipo $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$, è pari a $\frac{a}{y}$ per l'arco del minuendo, $-\frac{b}{y}$ per l'arco del sottraendo.
Studio dell'errore algoritmico:

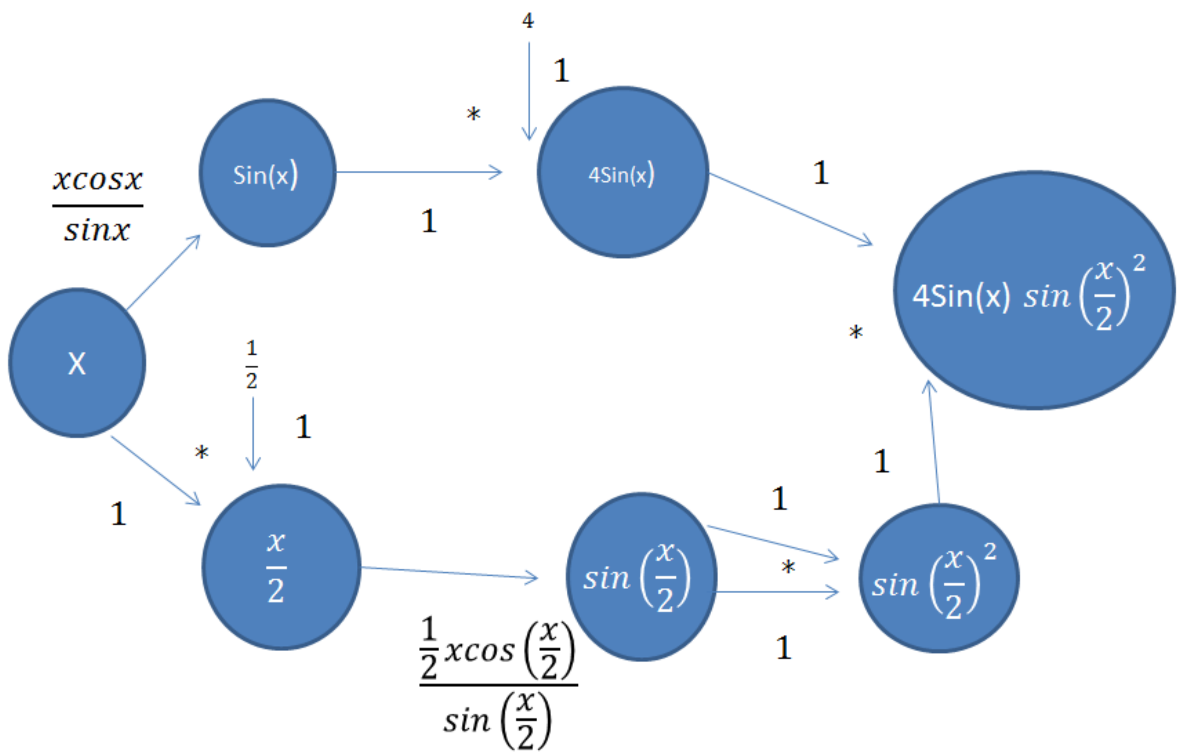
$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = \varepsilon_Y + \varepsilon_\beta\left(\frac{2sinx}{f(x)}\right) + \varepsilon_\theta\left(-\frac{\sin(2x)}{f(x)}\right) + \varepsilon_\alpha\left(1\cdot\frac{2sinx}{f(x)}\right) + \varepsilon_\gamma\left(1\cdot\left(-\frac{\sin(2x)}{f(x)}\right)\left(\frac{2xcos(2x)}{sin(2x)}\right)\right)$$

L'algoritmo dato è instabile, basta osservare che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sinx}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \infty,$$

avendo usato per $f(x)$ l'espressione alternativa.

Si consideri il secondo algoritmo: $\boldsymbol{a_2}$: $s = sin(x)$; $s_h = sin(\frac{x}{2})$; $y_2 = 4s\cdot {s_h}^2$;
Il grafo dell'algoritmo è:



Non è necessario studiare l'errore algoritmico del problema per dimostrarne la stabilità: ogni arco è etichettato da una costante ad eccezione di due funzioni che, per $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}$, sono limiti notevoli pari a **1**.

Esercizio 2:

Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$

Utilizzando come pivot il secondo elemento del vettore dato è possibile azzerare il quarto:
La posizione dell'elemento da azzerare è più grande rispetto alla posizione del pivot, quindi la matrice di rotazione avrà seno negativo alla posizione $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, dove $\boldsymbol{i}$ è la posizione del pivot, $\boldsymbol{j}$ quella relativa all'elemento da azzerare.

$$\boldsymbol{G(2,4,\theta)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-s} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \qquad G(2,4,\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\sqrt{\boldsymbol{5}}}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{5}}}$$

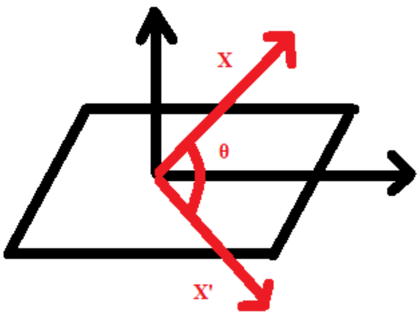
Utilizzando come pivot il secondo elemento del vettore risultante è possibile azzerare il quinto: si ha una situazione analoga alla precedente:

$$\boldsymbol{G(2,5,\theta')} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-s} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}, \qquad G(2,5,\theta') \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{5}}}{\boldsymbol{3}}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

Rappresentazione grafica:



Sono state applicate in sequenza due rotazioni: la prima nel piano $\langle e_2, e_4 \rangle$, la seconda nel piano $\langle e_2, e_5 \rangle$.

Ivan Capponi – S4039927

Esercizio 3:

Determinare la parabola di regressione $\boldsymbol{g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$
che approssima ai minimi quadrati i seguenti risultati:

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
y	1	$1/2$	0	$1/2$	1

Si consideri la matrice $\boldsymbol{A}$ dove:

- Sono presenti nella prima colonna i valori della variabile $\boldsymbol{x}$ elevati alla seconda;
- La seconda colonna contiene i valori della variabile $\boldsymbol{x}$;
- La terza colonna contiene il valore della costante 1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Si consideri il vettore i cui valori sono quelli acquisiti dalla variabile $\boldsymbol{y}$. Si ha:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Calcolo di: $\boldsymbol{A^t A}$:

$$\boldsymbol{A^t A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Calcolo di: $\boldsymbol{A^t Y}$:

$$\boldsymbol{A^t Y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

E’ quindi possibile determinare il valore dei coefficienti $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 10\alpha + 6\gamma = 5 \\ 6\beta = 0 \\ 6\alpha + 5\gamma = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 1/2} \\ \boldsymbol{\beta = 0} \\ \boldsymbol{\gamma = 0} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{g(x) = \frac{x^2}{2}}$$

Interpretazione geometrica:

La parabola $\boldsymbol{g(x)}$ minimizza la somma dei quadrati degli scarti tra i suoi valori e i dati $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 4:

Sia $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, calcolarne, se esiste, una diagonalizzazione. Studiare inoltre la convergenza del metodo delle potenze inverse con shift $p = -4$.

La matrice data è sicuramente diagonalizzabile per il teorema spettrale, infatti la sua matrice trasposta corrisponde ad $\boldsymbol{A}$ stessa. Il polinomio caratteristico della matrice è dato da:

$$\boldsymbol{det} \begin{bmatrix} \boldsymbol{3-\gamma} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-3-\gamma} \end{bmatrix} = (3-\gamma)(-3-\gamma) - 9 = \boldsymbol{\gamma^2 - 18}$$

Gli autovalori della matrice si ottengono risolvendo: $\boldsymbol{\gamma^2 - 18 = 0}$, le cui soluzioni sono:

$$\boldsymbol{\gamma_1} = -3\sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{\gamma_2} = 3\sqrt{2}$$

Gli autovalori della matrice sono distinti, la loro cardinalità è quindi pari all'ordine della matrice data, questa è un'ulteriore condizione sufficiente per affermare che la matrice sia diagonalizzabile.
Se ne calcolano gli autovettori:

Per $\quad \boldsymbol{\gamma_1} = -3\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \left(3+3\sqrt{2}\right)x + 3y = 0 \\ 3x + \left(-3+3\sqrt{2}\right)y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema il funzione di $\boldsymbol{y = 1}$ si ottiene: $\quad \boldsymbol{x = 1 - \sqrt{2}} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{1-\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$

Per $\quad \boldsymbol{\gamma_2} = 3\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \left(3-3\sqrt{2}\right)x + 3y = 0 \\ 3x + \left(-3-3\sqrt{2}\right)y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema il funzione di $\boldsymbol{y = 1}$ si ottiene: $\quad \boldsymbol{x = 1 + \sqrt{2}} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{1+\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$

La diagonalizzazione di $\boldsymbol{A}$ è data da:

$$A = XVX^{-1}$$

Dove V è la matrice avente gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sulla diagonale principale in ordine crescente, X è una matrice le cui colonne sono gli autovettori della matrice $\boldsymbol{A}$, disposti a seconda del relativo autovalore associato, X^{-1} non è altro che l'inversa della matrice $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} \end{bmatrix}$$

Il metodo delle potenze inverse converge a $\boldsymbol{\gamma_1} = -3\sqrt{2}$ perché è l'autovalore più vicino allo shift $p = -4$. La velocità di convergenza è

$$\left|\frac{\boldsymbol{\gamma_1}-\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\gamma_2}-\boldsymbol{p}}\right|^k = \left(\frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4}\right)^k \approx \left(\frac{0.2}{8.2}\right)^k \approx 0.024^k.$$

Esercizio 5:
Si consideri, al variare del parametro $\boldsymbol{k}$, la funzione:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} kx - x^3/2 & \text{se } x \in [0,1] \\ x^3/2 - kx & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

- Determinare per quali valori di $\boldsymbol{k}$ la funzione **S** è una spline sui nodi $\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$;
- Per tali valori di $\boldsymbol{k}$, la spline $\boldsymbol{S}$ è anche naturale?
- Per tali valori di $\boldsymbol{k}$, calcolare la curvatura media nell'intervallo ~~[0, 1]~~.

a)
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ è una spline sui nodi dati se è un polinomio a tratti di grado ≤ 3 e se è continua in $\mathbf{0}$ fino alla sua derivata seconda: la prima condizione è chiaramente verificata. Per definizione di continuità, una funzione è continua in un generico punto x_0 se e solo se $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ tale che $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x_0})$.
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$, quindi:

$$\lim_{x\to 0^-} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^3/2 - kx\right) = \mathbf{0}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to 0^+} \left(kx - x^3/2\right) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} k - 3x^2/2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 3x^2/2 - k & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to 0^-} \left(3x^2/2 - k\right) = -\boldsymbol{k}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to 0^+} \left(k - 3x^2/2\right) = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{S}''(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -3x & \text{se } x \in [0,1] \\ 3x & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \boldsymbol{S''(x)} = \lim_{x \to 0^-} (-3x) = \mathbf{0}$$
$$\lim_{x \to 0^+} \boldsymbol{S''(x)} = \lim_{x \to 0^+} (3x) = \mathbf{0}$$

La funzione in analisi è sempre continua in $\mathbf{0}$, così come la sua derivata seconda. Per definizione di continuità, la sua derivata prima è continua in $\mathbf{0}$ se e solo se – $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$, e questo avviene quando $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$.

b)
Per $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, $S(x)$ è una spline naturale se $S''(a) = S''(b) = 0$.

$$\boldsymbol{S''(x)} = \begin{cases} -3x & \text{se } x \in [0,1] \\ 3x & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$S''(1) = -3$$
$$S''(-1) = -3$$

Allora la spline in analisi non è naturale.

c)
Per $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, la curvatura media è data da:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} [\boldsymbol{S''(x)}]^{\mathbf{2}} \boldsymbol{dx} = \int_{-1}^{0} 9x^2 dx + \int_{0}^{1} 9x^2 dx = [3x^3]_{-1}^{0} + [3x^3]_{0}^{1} = 3 + 3 = \mathbf{6}$$