Ivan Capponi – S4039927

Calcolo Numerico
Risoluzione prova scritta 15/09/2016

Esercizio 1:
Si supponga di dover calcolare $\boldsymbol{f(x)} = e^x - e^{-x}$ per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$.
Determinare:

- Il condizionamento del problema del calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$ e discuterlo;
- Determinare il condizionamento della funzione esponenziale;
- Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $\boldsymbol{f(x)}$:

$\boldsymbol{a_1}$: $g = e^x$; $y_1 = g - 1/g$;
$\boldsymbol{a_2}$: $g = e^x$; $f_1 = g + 1$; $f_2 = 1 - 1/g$; $y_2 = f_1 \cdot f_2$

a)
Il condizionamento di $\boldsymbol{f(x)}$ si ottiene mediante la formula: $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{xf'(x)}}{\boldsymbol{f(x)}}$, dove $\boldsymbol{f'(x)}$ è la derivata di $\boldsymbol{f(x)}$. Si ha quindi:

$$\boldsymbol{c} = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \frac{xe^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = \frac{x(1 + e^{-2x})}{(1 - e^{-2x})} = \frac{x(1 + e^{-2x})}{-(-1 + e^{-2x})}$$

$$= \frac{-x}{(-1 + e^{-2x})} \cdot (1 + e^{-2x}) = \frac{\boldsymbol{-2x}}{\boldsymbol{(-1 + e^{-2x})}} \cdot \frac{\boldsymbol{(1 + e^{-2x})}}{\boldsymbol{2}}$$

Per piccoli valori di $\boldsymbol{x}$ si ha:

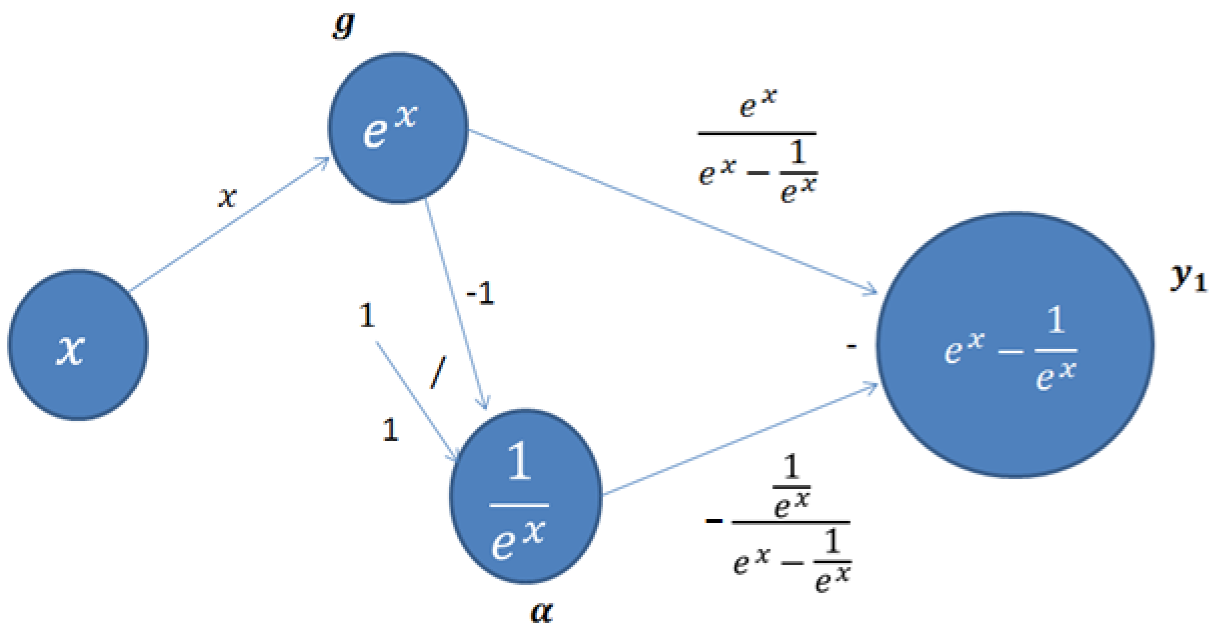
$$\lim_{\boldsymbol{x \to 0}} \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{-2x}}{\boldsymbol{(-1 + e^{-2x})}} \cdot \frac{\boldsymbol{(1 + e^{-2x})}}{\boldsymbol{2}} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$$

Dove, per $\boldsymbol{x \to 0}$, $\frac{\boldsymbol{-2x}}{\boldsymbol{(-1+e^{-2x})}}$ e' il reciproco del limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ col cambio di variabile $t = -2x$.
Il problema è ben condizionato: l'errore inerente in output è circa uguale all'errore in input.

b)
Il condizionamento di $\boldsymbol{g(x) = e^x}$ è calcolabile mediante la formula: $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{xg'(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}$, dove $g'(x)$ è la derivata di $g(x)$. Si ottiene:

$$\boldsymbol{c = \frac{xe^x}{e^x} = x}$$

c)
Si consideri il primo algoritmo: $\boldsymbol{a_1}$: $g = e^x$; $y_1 = g - 1/g$;
La rappresentazione grafica di questo è data da:



Etichettatura archi del grafo:

Operazione	Primo operando	Secondo operando	Risultato	Coefficiente primo operando	Coefficiente secondo operando
Sottrazione	a	b	$a - b = c$	a/c	$-b/c$
Divisione	a	b	a/b	1	-1

L'arco uscente da x riporta il condizionamento calcolato al punto b), ma non viene utilizzato per l'errore algoritmico.

$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_g\left(\frac{e^x}{e^x - \frac{1}{e^x}} - \frac{-\frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}}\right) + \varepsilon_\alpha\left(\frac{-\frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}}\right)$$

L'espressione che moltiplica ε_g discende dai due cammini uscenti da e^x: quello che passa da $\frac{1}{e^x}$ e quello che arriva direttamente al risultato.

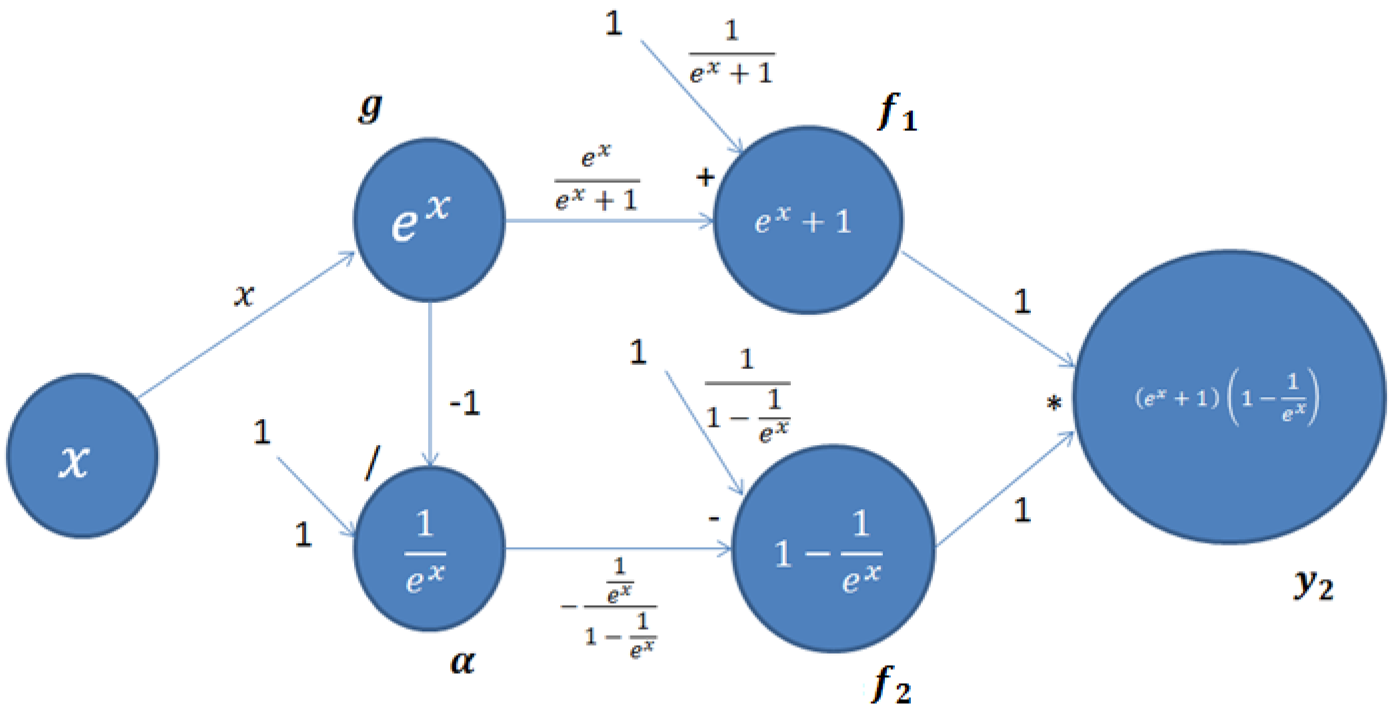
Per provare l'instabilità dell'algoritmo è sufficiente provare che il limite per $\boldsymbol{x \to 0}$ di uno dei coefficienti risulti tendere a $\pm\infty$.
L'algoritmo dato è instabile, infatti:

Ivan Capponi – S4039927

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}\right)=\infty$$

Si consideri il secondo algoritmo:
$\boldsymbol{a_2}$: $g = e^x;$ $f_1 = g + 1;$ $f_2 = 1 - 1/g;$ $y_2 = f_1 \cdot f_2$

La rappresentazione grafica di questo è la seguente:



Etichettatura archi del grafo:

Operazione	Primo operando	Secondo operando	Risultato	Coefficiente primo operando	Coefficiente secondo operando
Sottrazione	a	b	a − b = c	a/c	−b/c
Divisione	a	b	a/b	1	-1
Addizione	a	b	a + b = c	a/c	b/c
Moltiplicazione	a	b	a·b	1	1

Gli archi uscenti dalle costanti non vengono utilizzati per l'errore algoritmico.

$$\boldsymbol{\varepsilon_2} = \varepsilon_{y2} + \varepsilon_g\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right) + \varepsilon_\alpha\left(-\frac{\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right) + \varepsilon_{f1}(1) + \varepsilon_{f2}(1)$$

(anche qui da e^x escono due cammini).

L'algoritmo dato è instabile, basta osservare che:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right)=\infty$$

Esercizio 2:

Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$, $\delta \in \mathbb{R}$

Utilizzando come pivot il primo elemento del vettore dato si azzera il secondo:
La matrice di rotazione avrà seno negativo alla posizione $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, dove $\boldsymbol{i}$ è la riga del pivot, $\boldsymbol{j}$ la colonna relativa all'elemento da azzerare; in questo caso la posizione dell'elemento da azzerare è più grande rispetto alla posizione del pivot e quindi $-\boldsymbol{s}$ compare in alto a destra.

$$\boldsymbol{G(1,2,\theta)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G(1,2,\theta)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

Utilizzando come pivot il primo elemento del vettore risultante si azzera il terzo: si ha una situazione analoga alla precedente:

$$\boldsymbol{G(1,3,\theta')} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G(1,3,\theta')} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$

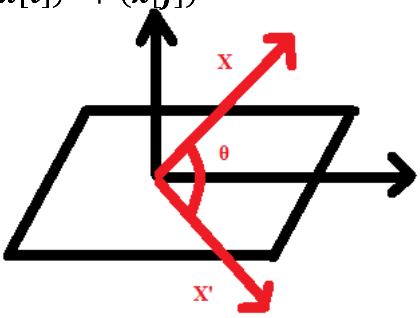
Utilizzando come pivot il primo elemento del vettore risultante si azzera il terzo: si ha una situazione analoga alla precedente:

$$\boldsymbol{G(1,4,\theta'')} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G(1,4,\theta'')} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{-\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}]}{\sqrt{(\boldsymbol{x}[\boldsymbol{i}])^2 + (\boldsymbol{x}[\boldsymbol{j}])^2}} = -\frac{1}{2}$$

Rappresentazione grafica:
La prima rotazione ha agito sul piano $\langle e_1, e_2 \rangle$;
La seconda rotazione ha agito sul piano $\langle e_1, e_3 \rangle$;
La terza rotazione ha agito sul piano $\langle e_1, e_4 \rangle$;



Esercizio 3:
Determinare la retta di regressione $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta}$
che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	-1	0	0	1	1	2
y	-1	-2	-1	0	0	1	1

Si consideri la matrice $\boldsymbol{A}$ dove:

- Sono presenti nella prima colonna i valori della variabile $\boldsymbol{x}$;
- La seconda colonna contiene la costante 1;

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si consideri il vettore i cui valori sono quelli acquisiti dalla variabile $\boldsymbol{y}$:
Si ha:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

Calcolo di: $\boldsymbol{A^tA}$:

$$\boldsymbol{A^tA} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

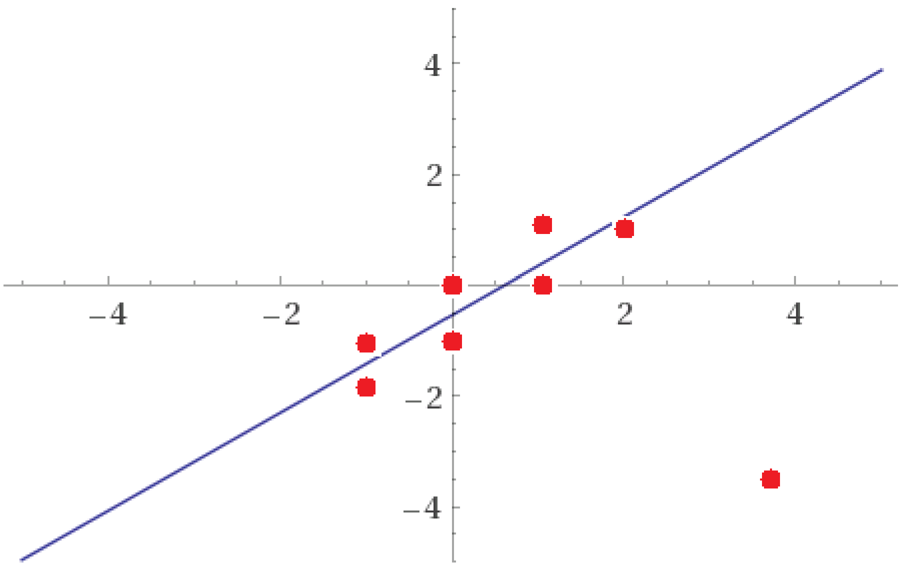
Calcolo di: $\boldsymbol{A^tY}$:

$$\boldsymbol{A^tY} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare $(\boldsymbol{A^tA})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^tY}$ si individuano i valori dei coefficienti $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{cases} 8\alpha + 2\beta = 6 \\ 2\alpha + 7\beta = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 23/26} \\ \boldsymbol{\beta = -7/13} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{23}\boldsymbol{x}}{\mathbf{26}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{13}}$$

La retta di regressione $\boldsymbol{f(x)}$ approssima ai minimi quadrati i dati in analisi, minimizza la somma dei quadrati degli scarti tra i suoi valori e i dati $\boldsymbol{y}$.
Si ha la seguente rappresentazione grafica:



Esercizio 4

Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice $\boldsymbol{6x6}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice $\boldsymbol{A}$.

a)

Suddividendo la matrice $\boldsymbol{A}$ a blocchi si ottengono le seguenti sottomatrici:

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori di $\boldsymbol{A_1}$ e dei suoi autovettori:

Determinazione del polinomio caratteristico: $\boldsymbol{P(\gamma_1)} = det\begin{bmatrix} \mathbf{1-\gamma} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1-\gamma} \end{bmatrix} = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\gamma})^2$

Gli autovalori della matrice in analisi si ricavano risolvendo l'equazione: $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\gamma})^2 = \mathbf{0}$

le cui soluzioni sono: $\boldsymbol{\gamma_{1,2} = 1}$.

Gli autovettori $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ di $\boldsymbol{A_1}$ sono determinabili dal seguente sistema lineare omogeneo con matrice $\boldsymbol{A_1 - \gamma_{1,2} I}$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v_{1,2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{(autovettore di } \boldsymbol{A}\text{)}$$

Calcolo degli autovalori di $\boldsymbol{A_2}$ e dei suoi autovettori:

Si ha: $\boldsymbol{P(\gamma_2)} = det\begin{bmatrix} \mathbf{-1-\gamma} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1-\gamma} \end{bmatrix} = (\mathbf{-1}-\boldsymbol{\gamma})^2$

Gli autovalori della matrice in analisi si ricavano risolvendo l'equazione: $(\mathbf{-1}-\boldsymbol{\gamma})^2 = \mathbf{0}$

le cui soluzioni sono: $\boldsymbol{\gamma_{3,4} = -1}$.

Gli autovettori $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ di $\boldsymbol{A_2}$ sono determinabili dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v_{3,4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori di $\boldsymbol{A_3}$ e dei suoi autovettori:
Determinazione del polinomio caratteristico:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\gamma_3}) = det\begin{bmatrix} \boldsymbol{1-\gamma} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1-\gamma} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{1-\gamma})(\boldsymbol{-1-\gamma})$$

Gli autovalori della matrice in analisi si ricavano risolvendo l'equazione:

$$(\boldsymbol{1-\gamma})(\boldsymbol{-1-\gamma}) = \boldsymbol{0}$$

le cui soluzioni sono: $\boldsymbol{\gamma_5 = 1}$, $\boldsymbol{\gamma_6 = -1}$.

Gli autovettori $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ di $\boldsymbol{A_3}$ sono determinabili dal seguente sistema lineare:
Per $\boldsymbol{\gamma = 1}$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v_5} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Per $\boldsymbol{\gamma = -1}$:
Risolvendo il sistema lineare in funzione di $\boldsymbol{x = 1}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v_6} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-2} \end{bmatrix}$$

Riepilogo:
La molteplicità algebrica di un autovalore rappresenta il numero di volte che esso annulla il polinomio caratteristico. $\boldsymbol{P(\gamma_1) = 0}$ ha due soluzioni identiche pari a $\boldsymbol{1}$. Si ottiene lo stesso valore da una delle due soluzioni di $\boldsymbol{P(\gamma_3) = 0}$, quindi la molteplicità algebrica di $\boldsymbol{\gamma = 1}$ è pari a $\boldsymbol{3}$. Lo stesso ragionamento vale per $\boldsymbol{\gamma = -1}$: questo ha molteplicità algebrica pari a $\boldsymbol{3}$ poiché $\boldsymbol{P(\gamma_2) = 0}$ ha due soluzioni coincidenti pari a $\boldsymbol{-1}$ e una delle soluzioni di $\boldsymbol{P(\gamma_3) = 0}$ e' $\boldsymbol{-1}$. La molteplicità geometrica associata ad un autovalore coincide con il numero di autovettori linearmente indipendenti associati ad esso. L'autovalore $\boldsymbol{\gamma = 1}$ ha due autovettori associati linearmente indipendenti: $\boldsymbol{v_{1,2}}$ e $\boldsymbol{v_5}$. Analogamente, $\boldsymbol{\gamma = -1}$ ha associati due autovettori linearmente indipendenti: $\boldsymbol{v_{3,4}}$ e $\boldsymbol{v_6}$.

Autovalore	Molteplicità algebrica	Molteplicità geometrica
$\boldsymbol{\gamma = 1}$	3	2
$\boldsymbol{\gamma = -1}$	3	2

Metodo delle potenze: La matrice data non è diagonalizzabile poiché la molteplicità algebrica degli autovalori non corrisponde alla relativa molteplicità geometrica, inoltre tutti gli autovalori hanno lo stesso modulo; allora il metodo delle potenze non converge.

Esercizio 5

Sia $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XVX^t}$, dove: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Dimostrare che $\boldsymbol{X}$ e' una matrice ortogonale;
- Determinare le matrici S, Z, D della decomposizione a valori singolari di $\boldsymbol{A}$, permutando e cambiando opportuni segni a $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{V}$.

a)

La matrice $\boldsymbol{X}$ è ortogonale se la sua trasposta coincide con la sua inversa. Si può facilmente notare che la matrice trasposta di $\boldsymbol{X}$ coincide con sé stessa. La matrice inversa di $\boldsymbol{X}$ coincide con la sua trasposta se il prodotto $\boldsymbol{XX^t} = \boldsymbol{I}$. Si ha infatti che:

$$\boldsymbol{XX^t} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{3x3}$$

Si è quindi dimostrato che la matrice $\boldsymbol{X}$ è ortogonale.

b)

Si è nel caso in cui $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^t}$, allora gli autovalori di $\boldsymbol{A^tA}$ sono quelli di $\boldsymbol{A^2}$.
Considerato un generico $\boldsymbol{\gamma_i}$ autovalore di $\boldsymbol{A}$, si avrà che $\boldsymbol{\gamma_i}^2$ è autovalore di $\boldsymbol{A^2}$. Il valore singolare associato della matrice $\boldsymbol{Z}$ si calcola mediante la formula: $\boldsymbol{\sigma_i} = \sqrt{\boldsymbol{\gamma_i}^2} = |\boldsymbol{\gamma_i}|$
Si determina quindi $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

I valori singolari, disposti sulla diagonale principale della matrice $\boldsymbol{Z}$, sono disposti in ordine decrescente, si dovrà quindi scambiare la posizione degli autovettori rispetto alle matrici $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{X^t}$ (rispettando lo stesso ordine usato per $\boldsymbol{Z}$) copiandoli **n**ella matrice dei vettori singolari sinistri $\boldsymbol{S}$ (e destri $\boldsymbol{D}$). Si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{S_{scambio}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D_{scambio}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bisogna infine apportare modifiche ai segni delle due matrici secondo una qualunque delle seguenti regole (che danno entrambe una soluzione corretta):

Prima regola

Matrice dei vettori singolari sinistri:
Se $\boldsymbol{\gamma_i \geq 0}$ preserva il segno;
Se $\boldsymbol{\gamma_i < 0}$ cambia il segno.

Matrice dei vettori singolari destri:
Se $\boldsymbol{\gamma_i \geq 0}$ preserva il segno;
Se $\boldsymbol{\gamma_i < 0}$ preserva il segno.

Seconda regola

Matrice dei vettori singolari sinistri:
Se $\boldsymbol{\gamma_i \geq 0}$ preserva il segno;
Se $\boldsymbol{\gamma_i < 0}$ preserva il segno.

Matrice dei vettori singolari destri:
Se $\boldsymbol{\gamma_i \geq 0}$ preserva il segno;
Se $\boldsymbol{\gamma_i < 0}$ cambia il segno.

Le possibili SVD che si ottengono con le diverse regole sono le seguenti:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t}$$

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t}$$