Esame scritto ALAN 21-01-2022, prima parte.

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare rk(A).

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6-\lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.

b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.

c) det$A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?