

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 10/2/2017

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

per piccoli valori positivi di x .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto p3 := \frac{\pi}{3} + x, m3 := \frac{\pi}{3} - x \mapsto c1 := \cos p3, c2 := \cos m3 \mapsto y1 := c1 - c2$

(a2): $x \mapsto p6 := \frac{\pi}{6} + x, m6 := \frac{\pi}{6} - x \mapsto s1 := \sin p6, s2 := \cos m6 \mapsto y2 := s2 - s1$

(a3): $x \mapsto s := \sin x \mapsto y3 := -\sqrt{3} \cdot s$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-2	-2	-1	0	1	1	2
y	-2	-1	-1	-1	-1	0	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A nei due casi in cui vengono usati rispettivamente gli shift $p = 1$ e $p = -1$.

5. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, il suo nucleo $\mathcal{N}(A)$ e la sua immagine $\mathcal{R}(A)$?

Nel seguito, sia A una matrice 4×7 avente i valori singolari 25, 2, 10^{-2} e 0.

- (a) Determinare la dimensione delle matrici U, Σ, V della SVD di A .
- (b) Determinare la dimensione di $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$.
- (c) Le trasformazioni lineari associate alle matrici A e A^t sono surgettive?