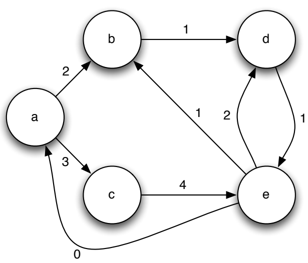
Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2022/23)

Prova scritta 6 luglio 2023

Esercizio 1 Si esegua l'algoritmo di Floyd-Warshall sul seguente grafo pesato:



Più precisamente:

- Si scrivano sei matrici con righe e colonne indiciate `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, corrispondenti a considerare come nodi intermedi nei cammini: nessun nodo, solo `a`, anche `b`, anche `c`, anche `d`, anche `e`. Per semplicità scrivete per ogni iterazione un'unica matrice le cui caselle contengono sia la distanza (matrice $\mathtt{D}^k$ nelle note) sia il predecessore (matrice Π^k nelle note). Per scrivere meno, potete indicare in ogni matrice solo le caselle modificate rispetto alla precedente.
- Si disegni il sottografo dei cammini minimi determinato dalla matrice.
- Si disegni l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo `a`.

Soluzione

- Matrici (n sta per "nessun predecessore" e gli elementi cambiati sono evidenziati, nella casella in alto a sinistra è indicato l'insieme di nodi intermedi utilizzato):

$\emptyset$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	∞ n	∞ n
b	∞ n	0 n	∞ n	1 b	∞ n
c	∞ n	∞ n	0 n	∞ n	4 c
d	∞ n	∞ n	∞ n	0 n	1 d
e	0 e	1 e	∞ n	2 e	0 n

$\{a\}$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	∞ n	∞ n
b	∞ n	0 n	∞ n	1 b	∞ n
c	∞ n	∞ n	0 n	∞ n	4 c
d	∞ n	∞ n	∞ n	0 n	1 d
e	0 e	1 e	**3 a**	2 e	0 n

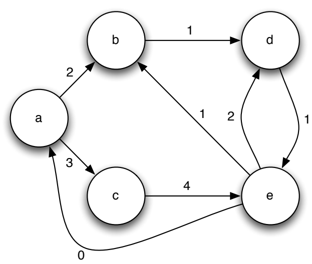
$\{a,b\}$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	**3 b**	∞ n
b	∞ n	0 n	∞ n	1 b	∞ n
c	∞ n	∞ n	0 n	∞ n	4 c
d	∞ n	∞ n	∞ n	0 n	1 d
e	0 e	1 e	3 a	2 e	0 n

$\{a,b,c\}$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	3 b	**7 c**
b	∞ n	0 n	∞ n	1 b	∞ n
c	∞ n	∞ n	0 n	∞ n	4 c
d	∞ n	∞ n	∞ n	0 n	1 d
e	0 e	1 e	3 a	2 e	0 n

$\{a,b,c,d\}$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	3 b	**4 d**
b	∞ n	0 n	∞ n	1 b	**2 d**
c	∞ n	∞ n	0 n	∞ n	4 c
d	∞ n	∞ n	∞ n	0 n	1 d
e	0 e	1 e	3 a	2 e	0 n

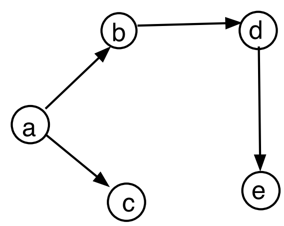
$\{a,b,c,d,e\}$	a	b	c	d	e
a	0 n	2 a	3 a	3 b	4 d
b	**2 e**	0 n	**5 a**	1 b	2 d
c	**4 e**	**5 e**	0 n	**6 e**	4 c
d	**1 e**	**2 e**	**4 a**	0 n	1 d
e	0 e	1 e	3 a	2 e	0 n

- Sottografo dei cammini minimi determinato dalla matrice:



(coincide con tutto il grafo di partenza)

- Albero dei cammini minimi a partire dal nodo `a`:



Esercizio 2 Rispondere alle seguenti domande.

1. Si dia un esempio di grafo orientato pesato con nodi A, B, C, D, E tale che, nell'algoritmo di Dijkstra, il nodo E cambi distanza provvisoria quattro volte.
2. Si dia un esempio di grafo non orientato con nodi A, B, C, D, E e sette archi tale che l'algoritmo di Kruskal debba necessariamente esaminare tutti gli archi.
3. Quanti archi può avere al massimo un grafo orientato aciclico con nodi A, B, C, D, E tale che ogni nodo sia una componente fortemente connessa?
4. Si descriva il problema di decisione corrispondente al problema di trovare il minimo albero ricoprente di un grafo non orientato pesato G.

Soluzione

1. Archi (A, B), (B, C), $C, D)$ tutti con peso 0, arco (A, E) con peso 3, (B, E) con peso 2, (C, E) con peso 1, (D, E) con peso 0.
2. Arco (A, B) con peso 1, (B, C) con peso 2, (C, D) con peso 3, (A, C) con peso 4, (A, D) con peso 5, (B, D) con peso 6, (A, E) con peso 7.
3. Dieci: infatti dal nodo A posso avere archi in tutti gli altri nodi (4), dal nodo B in tutti gli altri meno A (3), dal nodo C in D ed E (2) e dal nodo D solo in E (1).
4. Il problema di decisione corrispondente (vedi note pag.30) è stabilire, dato un grafo non orientato pesato G e un peso k, se esiste un albero ricoprente con somma dei pesi degli archi minore o uguale a k.

Esercizio 3 Si considerino due *file* a e b di 8 bit con $a = 11101101$ e $b = 11010111$. Si supponga di aver campionato il numero primo 7 e si confrontino le due *fingerprint* ottenute. Nel caso le *fingerprint* fossero diverse si determini il numero primo dispari più piccolo rispetto al quale risulterebbero uguali.

Soluzione Il numero a in notazione decimale è $2^7+2^6+2^5+2^3+2^2+2^0 = 128+64+32+8+4+1 = 237$, il numero b invece $2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 215$. Per le *fingerprint* abbiamo

$$f_7(237) : 237 \pmod 7 = 6 \quad \text{e} \quad f_7(215) : 215 \pmod 7 = 5$$

$$f_3(237) : 237 \pmod 3 = 0 \quad \text{e} \quad f_3(215) : 215 \pmod 3 = 2$$

$$f_5(237) : 237 \pmod 5 = 2 \quad \text{e} \quad f_5(215) : 215 \pmod 5 = 0$$

$$f_{11}(237) : 237 \pmod{11} = 6 \quad \text{e} \quad f_{11}(215) : 215 \pmod{11} = 6$$