Esame scritto ALAN 21-01-2022, prima parte.

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6-\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?

c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.

b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.

c) $\det A = a_{11} a_{22} a_{33}$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rk}(A) = 2$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + x_4 \\ x_4 = -3x_2 + 2x_3 \\ -2x_2 - \cancel{4x_3} - 3x_2 + \cancel{2x_3} + x_2 + x_3 - 3x_2 + \cancel{2x_3} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \\ -7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ esistono ∞ soluzioni

credo si risolve così

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.
b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?
c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

a) $\det A = -\lambda + \lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^2 = \lambda^2$ è invertibile per $\lambda \neq 0$

b) $\begin{cases} x + \lambda z = 2 \\ 2x - \lambda y + z = 1 \\ 3x - \lambda y + \lambda z = 6 - \lambda \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 2 - \lambda z \\ 4 - 2\lambda z - \lambda y + z = 1 \quad y = \dfrac{-2 + 2\lambda z - 3}{-\lambda} \\ \cancel{6} - \cancel{3\lambda z} - z + \cancel{2\lambda z} - 3 + \cancel{\lambda z} = \cancel{6} - \lambda \end{cases}$
$-z = 3 - \lambda \quad z = \lambda - 3$

$\begin{cases} x = 2 - \lambda^2 + 3\lambda \\ y = \dfrac{-\lambda + \cancel{5} + 2\lambda^2 - 6\lambda - \cancel{3}}{\lambda} = \dfrac{2\lambda^2 - 7\lambda}{\lambda} = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 7 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$ il sistema ammette sempre soluzione

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \|A \cdot B\| = \sqrt{49 + 64 + 100} = \sqrt{213}$

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:

a) $A + B$ è triangolare superiore.
b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.
c) $\det A = a_{11} a_{22} a_{33}$.

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ $\quad$ era da fare con $M_3(\mathbb{R})$ ma il concetto è questo

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tali che i vettori v_i con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) v_1, v_2, v_5 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

(a) rk M deve essere = 3 ed essere composta da 3 vettori

$v_1 = -v_3 = v_2 + v_4$

$\Downarrow$

v_5 deve per forza fare parte della B

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rk = 3 $\langle v_1, v_4, v_5 \rangle$ é base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots$ rk = 3 $\langle v_3, v_4, v_5 \rangle$ é base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rk = 3 $\langle v_2, v_4, v_5 \rangle$ é base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rk = 3 $\langle v_1, v_2, v_5 \rangle \dots$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rk = 3 $\langle v_2, v_3, v_5 \rangle \dots$

i sottoinsiemi $\{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\} \dots$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_2 \cdot v_5 = 0 \\ v_1 \cdot v_5 = 0 \end{matrix}}$

$v_1 \cdot v_2 = 1 - 2 + 1 = 0$
$v_2 \cdot v_5 = 0 + 0 - 3 = -3$ non é una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$