

Funzioni elementari

Es. 1. Calcolate tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{lll} a) & \cos x = \frac{2}{3} & b) \quad \cos x = 2 \\ d) & \tan x = 2 & e) \quad \sin x = -\frac{1}{3} \\ & & f) \quad \cos x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Es. 2. Data la funzione

$$f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x)$$

con dominio $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$,

- a) disegnate il grafico $y = f(x)$ determinandone l'immagine;
- b) usando le formule di somma, dimostrate che

$$(*) \quad f(x) = \sin(\pi - x);$$

- c) se x varia nell'intervallo A , in quale intervallo varia $\pi - x$? Interpretate graficamente, l'equazione (*);
- d) stabilite se f sia invertibile ed in caso affermativo calcolate la funzione inversa usando la relazione (*).

Es. 3. Data la funzione

$$f : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(x)$$

con dominio $A = [-\pi, 0]$,

- a) disegnate il grafico $y = f(x)$ determinandone l'immagine;
- b) usando le proprietà del coseno, dimostrate che

$$(**) \quad f(x) = \cos(-x);$$

- c) se x varia nell'intervallo A , in quale intervallo varia $-x$? Interpretate graficamente, l'equazione (**);
- d) stabilite se f sia invertibile ed in caso affermativo calcolate la funzione inversa usando la relazione (**).

Es. 4. Data la funzione

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \tan(x)$$

con dominio $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

- a) stabilite il dominio della funzione

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$$

- e disegnate il grafico;
- b) confrontate il risultato ottenuto con il grafico della funzione

$$h(x) = \arctan(x) = f^{-1}(x).$$

Es. 5. Dite quali delle seguenti uguaglianze siano vere o false:

- a) $\ln(x^2 - 4) = \ln(x - 2) + \ln(x + 2)$ b) $\ln(x^2 - 4) = |\ln(x - 2)| + |\ln(x + 2)|$
 c) $\ln \frac{x - 1}{x + 2} = \ln(x - 1) - \ln(x + 2)$ d) $\ln \frac{x - 1}{x + 2} = \ln(x - 1) - \ln(x + 2)$ se $x > 1$

Es. 6. Date le funzioni

$$f(x) = \ln \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right) \quad g(x) = \log_{1/3} \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)$$

- a) determinate il dominio di f ;
 b) trovate le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$;
 c) determinate per quali $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$;
 d) rispondete alle stesse domande per la funzione g ;
 e) usando le proprietà dei logaritmi, trovate $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) = cf(x).$$