Esercizi esame ALAN

2 novembre 2021

1 Esercizio 1: Errori

1.1 Condizionamento

Il condizionamento é dato dalla formula:

$$Cf = \frac{x(f'(x))}{f(x)}$$

L'esercizio da due o piú algoritmi, per facilitare i calcoli si puo'scegliere il piú "facile" per andare avanti con i calcoli.
Per discutere il risultato di Cf , ne calcoliamo il limite; se l'esercizio specifica "per piccoli valori di x" calcoliamo il limite che tende a 0, "per piccoli valori positivi di x" calcoliamo il limite che tende a 0+ e per "grandi valori di x" calcoliamo il limite che tende a $+\infty$.

Il risultato del limite serve per calcolare l'errore inerente:

$$Err.Inerente = Cf \times Err.Input$$

Puo'essere ben condizionato o mal condizionato: Se Cf tende ad un numero allora é ben condizionato, se invece tende a ∞ allora é mal condizionato

1.2 Errori negli algoritmi

Si disegna il grafo del primo algoritmo partendo da x e ogni nodo sará composto da un'operazione elementare. Si assegna ad ogni nodo un nome ed a ogni arco la costante moltiplicativa dell'errore, tranne agli input e alle costanti. Per calcolare l'errore di ogni operazione si usano le seguenti formule:

$$\varepsilon a \pm b = \frac{a}{a \pm b}\varepsilon a + \frac{b}{a \pm b}\varepsilon b$$

$$\varepsilon a \times b = \varepsilon a + \varepsilon b$$

$$\varepsilon a/b = \varepsilon a - \varepsilon b$$

$$\varepsilon g(x) = Cg(x) \times \varepsilon x$$

Si calcola l'errore algoritmico sommando tutti gli errori partendo dal nodo etichettato con quell'errore moltiplicando le costanti moltiplicative fino al nodo finale, in caso di piú cammini vengono sommate le varie parti (ovvero le moltiplicazioni)

Per verificare che l'algoritmo é stabile si calcola il limite che tende al valore dato nel testo (vedi 1.a) di ogni errore (ovvero quello dentro le parentesi); se il limite viene ∞ allora l'algoritmo non é stabile (basta che ci sia solo una parte che tende ad infinito per poter dire che l'algoritmo non é stabile) se invece il riultato del limite é diverso da ∞ per tutti i casi, allora l'algoritmo é stabile (bisogna calcolare tutti i limiti per poterlo dire)

2 Esercizio 2: Rotazioni/Riflessioni

Possono esserci due esercizi diversi; una rotazione di Givens o una riflessione di Householder

2.1 Rotazioni di Givens

Si indica una rotazione di givens con:

$$G(i, j, \theta)$$

dove i rappresenta la posizione del perno all'interno della matrice, j la posizione dell'elemento da azzerare e θ l'angolo di rotazione (che ignoreremo per l'esercizio) Ogni rotazione azzera un elemento (j) e cambia il valore del perno (i) (0 non puo'essere perno)

si calcola il valore di c e s(ad ogni passaggio):

$$c = cos(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$s = sin(x) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Si costruisce la matrice inserendo c e s:
in posizione (i, i) e (j, j) si mette c mentre se $(i < j)$ in posizione (j, i) si metterá -s e in posizione (i, j) s, invece se $(i > j)$ in posizione (j, i) si metterá -s e in posizione (i, j).
Esempio:
$G(1, 5, \theta)$ quindi $i < j$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$G(3, 1, \theta)$ quindi $i > j$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore che si ottiene dalla rotazione sará come il precedente ma con 0 al posto del valore da azzerare e il perno avrá come valore $\sqrt{x_i^2 + x_j^2}$
Si continuano ad applicare rotazioni (cambiano perno ed elemento da azzerare) finché si arriva al risultato richiesto.
Come prova si puo' fare $||x||_2$ del vettore di partenza e verificare che il risultato sia uguale ad α (ovvero il valore dell'ultimo perno).

2.1.1 Interpretazione geometrica

Per ogni rotazione, scriver su che piano é stata fatta, ad esempio con la rotazione $G(2, 1, \theta)$ si puo' dire: "si tratta di una rotazione nel piano $< e_2, e_1 >$".
Visto che sono tutte isometrie: $||vettore\ iniziale|| = ||vettore\ finale||$ (si puo'usare come prova).

2.2 Householder

N.B: abbiamo visto solo come ottenere una riflessione di Householder nel caso in cui α sia il primo elemento del vettore risultante.

a. si calcola $\alpha = ||x||_2$

b. si calcola $u = x - \alpha_{e_1}$ (dove α_{e_1} é il vettore con al primo posto il valore di α e i restanti valori a 0)

c. si calcola $u^t u$

d. si calcola uu^t

e. infine si calcola P:

$$P = I2ww^t = I - 2\frac{uu^t}{u^t u} = I - \frac{2}{u^t u} \cdot uu^t$$

2.2.1 Verifiche

a. P é ortogonale: colonne perpendicolari, prodotto scalare =0,colonne normalizzate($||colonna||_2 = 1$)

b. $P \cdot x = \alpha e_1$

2.2.2 Interpretazione geometrica

si scrive: $P = (\dots)$ riflette x$\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ rispetto al piano $\perp$ ($\perp$ *al vettore* w)

3 Esercizio 3:Minimi quadrati

Dati i valori di x e y

a. Si disegna il grafico con i valori di x e y

b. Si costruisce la matrice A:

   (a) se nel testo ci sono parametri (puo' anche essere semplicemente l'equazione della parabola) ogni colonna di A contiene i valori usando le x, se c'é un parametro che non moltiplica si mette la colonna tutta a 1

   (b) se non ci sono parametri (caso della retta) si mettono le x nella prima colonna e nella seconda tutti 1

c. Si costruisce il vettore b con tutti i valori di y

d. Si calcola A^TA e A^Tb

e. Si risolve il sistema:

   (a) Senza parametri (caso della retta) $A^TA \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A^Tb$

   (b) Con i parametri $A^TA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{bmatrix} = A^Tb$

Infine, scrivere la funzione risultate con i valori trovati.

3.1 Interpretazione geometrica

Disegnare il grafico con i punti e la funzione ricavata, evidenziando le distanze tra i punti dati e il grafico. In piú si puo' scrivere:
la retta di regeressione minimizza la somma degli scarti tra i valori y dei punti ed i valori (equazione del grafico) del* (nome funzione) calcolat* nelle ascisse x dei punti dati

4 Esercizio4: Diagonalizzazione

a. Controllare se A é simmetrica, se lo é, allora é diagonalizzabile

b. trovare gli autovalori risolvendo:
$$det(A - \lambda I) = 0$$
   e riordinandoli per il massimo modulo (non strettamente necessario ?)

c. Verificare la cardinalitá degli autovalori (uguale all'ordine della matrice)

d. Per ogni autovalore trovare gli autovettori usando la matrice $A - \lambda I$ (sostituendo a λ l'autovalore) e risolvere il sistema $[A - \lambda I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}$

e. Creare la matrice V composta dagli autovettori e la sua inversa

f. Creare la matrice D usando gli autovalori nello stesso ordine degli autovettori Si otterrá la diagonalizzazione della matrice di partenza composta nel seguente modo:
$$A = VDV^{-1}$$

4.1 Metodo delle potenze inverse

a. Dato uno shift p, bisogna trovare l'autovalore piú vicino a p (λ_1) ed il secondo piu vicino a p (λ_2)

b. si calcola:

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - p}$$

Per ogni lambda.

c. μ_1 sarà quello di massimo modulo tra tutti i μ calcolati, mentre μ_2 sarà quello subito piú piccolo.

d. La velocità di convergenza si calcola:

$$V = (\frac{\mu_2}{\mu_1})^k$$

Se si hanno due autovalori con lo stesso modulo massimo, allora non converge.

4.2 Metodo delle potenze

Converge all'autovalore di massimo modulo

a. Si riordinano gli autovalori in base alla massimo modulo, ottenendo λ_1,λ_2,λ_3,[...],λ_n dove λ_1 é l'autovalore di massimo modulo

b. Converge se $\lambda_1 > \lambda_2$

c. Si trova la velocitá di convergenza con

$$V = (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k$$

5 Esercizio 5: Spline

Si ha una spline se:

a. S é composta da polinomi di grado $\leq$ n, dove n è il grado della spline (ad esempio, una spline di grado 3 sarà composta da soli polinomi di grado $\leq$ 3)

b. S é continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S(x) = \lim_{x\to n^+} S(x)$$

c. $S'(x)$ é continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S'(x) = \lim_{x\to n^+} S'(x)$$

d. $S''(x)$ é continua negli estremi interni dei vari intervalli facendo:

$$\lim_{x\to n^-} S''(x) = \lim_{x\to n^+} S''(x)$$

5.1 Calcolo momenti

Dato un nodo K, si calcola $S''(K)$

5.2 Periodicitá di una spline

Una spline e'periodica se:

$$\lim_{x\to e_1^-} S(x) = \lim_{x\to e_2^+} S(x)$$

$$\lim_{x\to e_1^-} S'(x) = \lim_{x\to e_2^+} S'(x)$$

$$\lim_{x\to e_1^-} S''(x) = \lim_{x\to e_2^+} S''(x)$$

Dove e_1 rappresenta l'estremo sinistro e e_2 l'estremo destro

6 Esercizio 5: Condizionamento matrice e di una norma

Per verificare se la matrice A^{-1} é l'inversa bisogna vedere se $det(A) \neq 0$ e se $A^{-1}A = I$. Per calcolare il condizionamento relativo ad una norma, bisogna fare:
$||A||_{nm}$ & $||A^{-1}||_{nm}$ (dove nm indica la norma in questione)
Poi: $M(A) = ||A||_{nm} \cdot ||A^{-1}||_{nm}$

Per calcolare la maggiorazione dell'errore:

$$\epsilon_x = \frac{||\tilde{x} - x||_{nm}}{||x||_{nm}}$$

$$\epsilon_b = \frac{||\delta b||_{nm}}{||b||_{nm}}$$

$$\epsilon_x \leq u(A)\epsilon_b$$

Quindi se l'esercizio chiede di calcolare una maggiorazione, basta calcolarsi $u(A)$ e ϵ_b

6.1 Norme

6.1.1 Norme vettori

$||x||_1 = |x_1| + |x_n| + ... + |x_n|$ (Somma dei valori assoluti del vettore)
$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$ (Pitagora su tutti gli elementi)
$||x||_\infty = max_{i=1,...,n}|x_i|$ (Elemento di massimo modulo nel vettore)

6.1.2 Norme matrici

$||x||_1 = max|x_1| + |x_n| + ... + |x_n|$ (somma di tutti gli elementi in modulo di una colonna, ripetere per tutte e prendere la colonna con la somma massima)
$||x||_2$(esiste, ma non calcolabile esplicitamente)
$||x||_\infty$(stessa cosa della norma 1 ma con le righe)

7 Esercizio 5:SVD

Una SVD viene utilizza per trovare una diagonalizzazione di una marice non simmetrica scritta nella seguente forma:

$$A = U\Sigma V^T$$

7.1 Esercizio 5:Proprietà delle SVD

(semplificati dagli appunti su aulaweb)
Data una matrice $A \in R^{m \times n}$ Immagine: trovare il valore singolare r-esimo, ovvero il più piccolo elemento strettamente maggiore di 0.
Per trovare l'immagine scriveremo tutti vettori u da 1 a r:

$$R(A) =< u_1, u_2, ..., u_r >$$

Nucleo: indichiamo con v i vettori che lo compongono, partiranno da r+1 fino a n:

$$N(A) =< v_{r+1}, ..., v_n >$$

Certi esercizi potrebbero chiedere di determinare i valori singolari delle matrici A^tA, AA^t e A^t: esistono proprietá specifiche per questi casi (si rimanda al paragrafo 6.1 di "appunti_autov")

7.1.1 Pseudoinversa

Dimensione: $\forall A \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m \times n}} : \exists \mathrm{A^t} \in \mathrm{IR}^{\mathrm{n \times m}}$