# Esercizi sulla Lezione 7

**E7.1** Data la v.a. continua con distribuzione normale $X \sim \mathcal{N}(3, 16)$, si chiede di determinare i valori reali di $a$ e $b$ tali per cui la trasformazione $Y = aX + b$ risulta avere una distribuzione del tipo $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

**E7.2** Dimostra che per una variabile casuale esponenziale $X$ si ha $Var(X) = 1/\lambda^2$.

**E7.3** Sia data la v.a. continua $X$ con pdf:

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove C è una costante positiva. Si chiede di:

(a) Mostrare che $C = 6$.

(b) Calcolare il valore medio di $X$.

Si consideri inoltre la seguente trasformazione:

$$Y = g(X) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\pi & x < 0 \end{cases}$$

(c) Calcolare la pdf di $Y$, $f_Y(y)$ (tramite il metodo della trasformazione di pdf).

**E7.4** Data una v.a. continua $X$ con pdf $f_X(x)$, si determini la pdf $f_Y(y)$ della v.a. continua $Y$, definita come $Y = g(X) = |X|$, lasciandola espressa in funzione di $f_X(x)$ (tramite il metodo del passaggio per la cdf).

## homework_7 ##

Niccoló Parodi 4668271

7.1

$$X \sim N \ (3; 16)$$

$$a = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{\mu}{\sigma} = -\frac{3}{4}$$

7.2

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

conoscendo:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - 2 \int x (-e^{-\lambda x}) dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \int \lambda x (-e^{-\lambda x}) dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

7.3 $\qquad f(x) = \begin{cases} Cx(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

a) $$\int f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} Cx(1-x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\int_0^1 x - x^2 \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{6} \rightarrow C = 6$$

b) $$E[X] = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $$F_Y(x) = P\{Y < y\} = P\{\sqrt{X} < y\} = P\{X < y^2\} \rightarrow F_x(x^2)$$

$$f_y(x) = \frac{dF_y(x)}{dx} = \frac{dF_x(x^2)}{dx} = \begin{cases} \frac{F_x(x^2)}{2x} & x \geq 0 \\ -\pi & x < 0 \end{cases}$$

7.4

$f_x(x) \rightarrow X$

$f_y(y) \rightarrow Y = g(x) = |X|$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(x) \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{X \leq |y|\} =$$

$$= F_x(|X|)$$

$$f_Y(|y|) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_x(|x|)}{dx} = \begin{cases} f_x(x) & x > 0 \\ -f(x) & x < 0 \end{cases}$$