

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 13/1/2017

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \cos 2x - \cos^2 x$$

per piccoli valori di x .

- (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.
- (b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.
- (c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto c1 := \cos x, d := 2x \mapsto c2 := \cos d, q := c1^2 \mapsto y1 := c2 - q$

(a2): $x \mapsto c2 := \cos 2x \mapsto n := c2 - 1 \mapsto y2 := n/2$

(a3): $x \mapsto s := \sin x \mapsto y3 := -s^2$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ nella forma } \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \beta \text{ opportuno (esplicitare le matrici}$$

di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare la parabola di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	-1	0	1	1
y	$-1/2$	$1/2$	1	0	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 6×6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A .

5. Che relazione c'è tra la SVD di una matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ e le possibili soluzioni del problema ai minimi quadrati

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2 ?$$

Nel seguito, sia A una matrice 2×4 avente i valori singolari 1 e 10^{-8} .

- (a) Determinare la dimensione delle matrici U, Σ, V della SVD di A .
- (b) Qual è il rango (o caratteristica) di A ?
- (c) Quante soluzioni può avere il problema ai minimi quadrati

$$\min_{x \in \mathbf{R}^4} \|Ax - b\|_2$$

con $b \in \mathbf{R}^2$?

- (d) Dette v_2 e v_3 la seconda e terza colonna della matrice V della SVD di A , cosa si può dire sulle componenti di una soluzione del problema ai minimi quadrati lungo v_2 e v_3 ?