Esercizi sulle Lezioni 8 - 9 - 10

E 1 Siano X_1, X_2, X_3 e X_4 variabili aleatorie indipendenti a coppie, ciascuna con media 0 e varianza 1. Definiamo $Y_1 = (X_1 + X_3)$, $Y_2 = (X_3 + X_4)$ e $Y_3 = (X_2 + X_4)$. Calcola la correlazione tra:

(a) Y_1 e Y_2;

(b) Y_1 e Y_3.

E 2 Siano X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X = 1, Y = 3) = 1/5, P(X = 3, Y = 3) = 1/20, P(X = 3, Y = 4) = 1/2$ e $P(X = 1, Y = 4) = 1/4$. Calcola $E[X \cdot Y]$ e le probabilità marginali.

E 3 Siano $X_1, \ldots, X_n$ misure dell'altezza μ di una persona (in centimetri). Assumiamo che le X_i siano indipendenti e identicamente distribuite con media μ e deviazione standard $\sigma = 1$ cm. La media delle misure $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ costituisce una stima dell'altezza μ. Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, calcola il numero di misure n necessarie per determinare μ con una precisione di 0.5 cm e con una confidenza pari al 90%.

homework_08_09_10 ##   Niccolò Parodi   4668271

1. $Y_1 = (X_1 + X_3)$ $\quad Y_2 = (X_3 + X_4)$ $\quad Y_3 = (X_2 + X_4)$

media = 0 e varianza = 1 per ciascuna X

correlazione?

a) Y_1 e Y_2

$$E[Y_1 Y_2] = E[(X_1 + X_3)(X_3 + X_4)] =$$

$$= E[X_1 X_3 + X_3^2 + X_1 X_4 + X_3 X_4] = E[X_3^2] = 1$$

b) Y_1 e Y_3

$$E[Y_1 Y_3] = E[(X_1 + X_3)(X_2 + X_4)] =$$

$$= E[X_1 X_3 + X_3 X_2 + X_1 X_4 + X_3 X_4] = 0$$

2.

$P(X=1, Y=3) = \frac{1}{5}$ $P(X=3, Y=3) = \frac{1}{20}$

$P(X=3, Y=4) = \frac{1}{2}$ $P(X=1, Y=4) = \frac{1}{4}$

$X = \{1, 3\}$ $Y = \{3, 4\}$

$p_X(X=1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$

$p_X(X=3) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$

$p_Y(Y=3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$

$p_Y(Y=4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$E[XY] = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{20} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{161}{20}$

3. μ! con precisione 0,5 cm e confidenza al 90%

$\sigma = 1$ cm

$$P\left\{ \left| \sum_i \frac{X_i}{n} - \mu \right| \geq 0,5 \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\, 0,25} = \frac{4\sigma^2}{n}$$

il numero di misure necessarie è $n = 40\sigma^2$