

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Algebra Lineare e Analisi Numerica**  
**Esame dell'11/2/2021 (6 CFU + seconda parte per 9 CFU)**

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2}$$

per piccoli valori positivi di  $x$ .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di  $f(x)$ .

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di  $f(x)$ :

$$(c1): x \mapsto s := \sin x, \quad s2 := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mapsto y1 := s2 - s/2$$

$$(c2): x \mapsto s := \sin x, \quad s2 := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mapsto q := s^2 \mapsto y2 := 4 \cdot q \cdot s2$$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  nella forma  $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $k$  opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Calcolare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i

seguenti dati: 

$x$	$-2$	$-2$	$0$	$1$	$2$	$3$
$y$	$-1$	$-2$	$0$	$-1$	$1$	$2$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Verificare che  $\lambda = 0$  è un autovalore della matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$   
e calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di  $A$ .  
Studiare la convergenza del metodo delle potenze.

5. Nel seguito, siano  $A$  e  $\tilde{A}$  due matrici con dimensioni  $7 \times 4$  e  $3 \times 5$  rispettivamente.
- (a) Determinare le dimensioni delle matrici  $U, \Sigma, V$  (rispettivamente  $\tilde{U}, \tilde{\Sigma}, \tilde{V}$ ) della SVD di  $A$  (rispettivamente  $\tilde{A}$ ).
- (b) Si indichi rispettivamente con  $u_i, v_i, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i$  la  $i$ -esima colonna delle matrici  $U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$ . Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:
- (b1) Il vettore  $Au_i$  è multiplo di  $v_i$  per ogni  $i$ .
- (b2) Il vettore  $\tilde{A}\tilde{v}_i$  è multiplo di  $\tilde{u}_i$  per ogni  $i$ .
- Se  $\lambda$  è un *qualunque* autovalore di  $A^t A$ , allora
- (b3)  $\sigma = \sqrt{\lambda}$  è valore singolare di  $A$ .
- Se  $\tilde{\lambda}$  è un *qualunque* autovalore di  $\tilde{A}^t \tilde{A}$ , allora
- (b4)  $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\lambda}}$  è valore singolare di  $\tilde{A}$ .