1) Tre pesate sono sufficienti poiché $3^3 = 27$ che è esattamente il nostro numero di palline. Quindi dividiamo le 27 palline in 3 gruppi da 9 palline ciascuno. Confrontiamo i primi due gruppi, possiamo avere tre possibili risultati: il primo è il più leggero, il secondo è il più leggero oppure sono uguali. Nel primo e nel secondo caso andiamo a dividere il gruppo più leggero in ulteriori tre gruppi da 3 palline ciascuno e andiamo a pesare i primi due. Abbiamo di nuovo 3 casi possibili: il primo è il più leggero, il secondo è il più leggero oppure sono uguali. Nel primo e nel secondo caso prendiamo il gruppo più leggero e lo dividiamo in tre gruppi da una pallina ciascuno e andandoli a pesare le prime due sappiamo quale è la più leggera (se sono uguali sarà la terza). Tornando indietro siamo

il caso in cui i primi due gruppi da tre palline ciascuno pesano uguali quindi sappiamo che la pallina è nel terzo gruppo, quindi lo dividiamo in tre gruppi da una pallina ciascuno e ripetiamo il procedimento di prima. L'unico caso che ci rimane ora è se i primi due gruppi da nove palline ciascuno pesano uguali. In questo caso sappiamo che la pallina più leggera sta nel terzo gruppo quindi lo dividiamo in tre gruppi da tre palline e ripetiamo il procedimento di prima.

2) La lunghezza attesa di una codifica è:

$$\sum_{x \in X} p(x) L_c(x)$$

$$L(C_1, X) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{4}$$

$$L(C_2, X) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 2$$

$$L(C_3, X) = 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2$$

Per trovare la decifrabilità univoca e l'istantaneità vado ad utilizzare Kraft-McMillan che dice che univocamente decifrabile e quindi istantanea solo se

$$\sum_{x \in X} 2^{-L_c(x)} \leq 1$$

Quindi per C_1: $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$

$C_2: 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$

$C_3: 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Quindi C_1 non è univocamente decifrabile e quindi non è neanche istantanea.

C_2 e C_3 sono univocamente decifrabili e dal momento che nessuna codifica è prefisso di un'altra sono anche istantanee

3) Anche qua andiamo ad utilizzare Kraft - McMillan

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} > 1$$

Quindi non può esistere una codifica istantanea con tali lunghezze.

4) La lunghezza di una codifica ottenuta tramite codifica binaria è data dalla formula

$$L = \log_2 \frac{1}{A}$$

dove A è l'intervallo d'ampiezza.
È facile vedere che maggiore è l'intervallo minore è la lunghezza.
Così come nella lingua italiana le configurazioni, che sono le parti di una frase che capitano con maggior frequenza, contengono meno caratteri delle altre parole.

5) $H(X,Y)$ non può essere 8 poiché

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$$

e sappiamo che essendo $H(X|Y)$ un'entropia condizionata questa è $\leq H(X)$ quindi $H(X,Y)$ può essere al più $3+4=7$

$H(X,Y)=7$ solo nel caso in cui X e Y siano indipendenti

6) Non esistono compressori in grado di comprimere tutti i possibili file di n bit in file di dimensione strettamente minore di n. Questo perché i possibili file di n bit sono 2^n. Tutti i file di dimensione $< n$ sono dati dalla somma

$$S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

Poiché $2S = 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$ abbiamo:

$$S = 2S - S = 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n - (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 2^n - 2 < 2^n$$

Pertanto non abbiamo abbastanza file per comprimere tutti i file di dimensione n bit in file di dimensione al più $n-1$. Concludendo la richiesta del brevetto andrà rifiutata.