

TDII - Problema di Monty Hall

13 marzo 2022

Parte I

Introduzione

In un gioco televisivo a premi vi è un giocatore, un conduttore e 3 porte (A, B e C) che nascondono 3 premi, ossia 1 ferrari e 2 capre.

Il giocatore sceglie, per esempio, di aprire la porta A, dopodichè il conduttore sbircia dietro le porte e decide di aprire prima la porta C svelando una delle 2 capre, e chiede al giocatore se intende confermare o meno la sua scelta riguardo la porta A.

Calcolare la probabilità di vincere la ferrari in base alla scelta fatta.

Parte II

Svolgimento

Sia $P(A|R_c)$ la probabilità che la ferrari sia dietro la porta A DATA l'apertura della porta C (o meglio, la scelta del conduttore di aprire la porta C).

$$P(A|R_c) = \frac{P(R_c|A) * P(A)}{(P(R_c|A) * P(A)) + (P(R_c|B) * P(B)) + (P(R_c|C) * P(C))}$$

Non avendo ulteriori vincoli e informazioni sulle porte a inizio gioco, la prima scelta è equiprobabile, per cui:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|R_c) = \frac{(P(R_c|A) * \frac{1}{3})}{(P(R_c|A) * \frac{1}{3}) + (P(R_c|B) * \frac{1}{3}) + (P(R_c|C) * \frac{1}{3})}$$

Adesso si calcola $P(R_c|A)$, ossia la probabilità che il conduttore scelga la porta C se la porta A è quella vincente (tra B e C):

$$P(R_c|A) = [B, C] = \frac{1}{2}$$

$P(R_c|C)$, ossia la probabilità che il conduttore scelga la porta C se la porta C è quella vincente (banale):

$$P(R_c|C) = 0$$

$P(R_c|B)$, la meno ovvia, ossia la probabilità che il conduttore scelta la porta C se la porta B è quella vincente (tolta B viene tolta anche A perchè scelta dal giocatore):

$$P(R_c|B) = 1$$

A questo punto si ricompongono i pezzi del puzzle:

$$P(A|R_c) = \frac{(\frac{1}{2} * \frac{1}{3})}{(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}) + (1 * \frac{1}{3}) + (0 * \frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|R_c) = 1 - P(A|R_c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(C|R_c) = 0$$

Parte III

Conclusione

Se il giocatore confermasse la scelta e/o decidesse di aprire la porta A, avrebbe una probabilità di 1/3 di vincere la ferrari, invece scegliendo la porta B la probabilità si alzerebbe a 2/3.