

Corso di Laurea in Informatica
Calcolo Numerico
Esame del 4/7/2016

Cognome..... Nome..... Email.....

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \frac{2+x}{2-x} - \frac{4+x}{4-x^2}$$

per piccoli valori di x .

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto n1 := 2+x, d1 := 2-x, n2 := 4+x, d2 := 4-x^2 \mapsto y1 := \frac{n1}{d1} - \frac{n2}{d2}$

(a2): $x \mapsto f := x+3, n1 := 2+x, d1 := 2-x \mapsto n := x \cdot f, d := n1 \cdot d1 \mapsto y2 := \frac{n}{d}$

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno.

3. Risolvere nel senso dei minimi quadrati il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_2 = 1 \\ 2x_1 = -1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche della matrice 5×5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri il metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A ; per quali valori dello shift p il metodo converge all'autovalore 4?

5. Sia $A \in \mathbf{R}^{7 \times 3}$ e sia $A = U\Sigma V^t$ la sua SVD. Si assuma inoltre che i valori singolari di A siano

$$10, 1, 0.$$

- (a) Determinare la dimensione delle matrici U, Σ, V .
- (b) Determinare la dimensione delle matrici U_2, Σ_2, V_2 della SVD della matrice $A^t \cdot A$.
- (c) Determinare la dimensione delle matrici U_3, Σ_3, V_3 della SVD della matrice $A \cdot A^t$.
- (d) Che relazione c'è tra le matrici U_2, V_2 e le matrici U, V ?
- (e) Quanti sono i valori singolari nulli della matrice $A \cdot A^t$?