2. Grafico, funzione composta, funzione inversa

In questi esercizi è spesso richiesto di disegnare il grafico di funzioni o di equazioni. Questi vanno fatti con carta e penna, partendo dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari (mai "per punti"). Suggeriamo tuttavia di acquisire familiarità con strumenti e software grafici e utilizzarli frequentemente.

2.1 Per ognuna delle equazioni [a],[b],[c],[d],[e],[f] nelle variabili x e y più sotto

[i] disegnarne il grafico e precisare in quali casi esse definiscono una funzione della variabile y rispetto alla variabile x.

[ii] in caso positivo scrivere il dominio della funzione

[iii] in caso negativo spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano ciascuno il grafico di una funzione e scrivere l'espressione di queste funzioni.

[a] $(x-1)^2 + y^2 = 1$ [b] $(x-1)^2 = 0$,

[c] $y = |\sin(x)|$, [d] $y = x^2$,

[e] $y^2 = x$, [f] $y^3 + 1 = x$.

2.2 Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \Big|1 - |x+1|\Big|$ e stabilire se è monotona. In caso negativo trovare gli intervalli in cui lo è, specificando se è crescente, decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente.

2.3 Dire se sono vere le affermazioni in [i] e [ii]; se sono vere, provare, se sono false, fare un controesempio.

[i] il prodotto di una funzione crescente e di una decrescente è una funzione crescente.

[ii] il prodotto di una funzione crescente e di una decrescente è una funzione decrescente.

Sugg: Si consideri $f(x) = x^2$ in $(0, \infty)$ e la si moltiplichi prima per $g(x) = \frac{1}{x}$ poi per $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

2.4 Sian $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Tracciare il grafico di f e di

$$-f(x); \qquad f(-x); \qquad |f(x)|; \qquad f(|x|); \qquad f(x)+1; \qquad f(x-1); \qquad f(2x).$$

2.5 È data la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Disegnare il grafico di f e delle seguenti funzioni

a) $f(x-1)$; b) $f(2x)$; c) $f(-x)$;

d) $|f(x)|$; e) $f(|x|)$

2.6 È data la funzione $f(x) = (x-3)^2$.
Eseguire, analiticamente e graficamente, le seguenti operazioni nell'ordine assegnato, cioè in modo che ogni operazione agisca sul risultato della precedente:

1) traslare di 1 nella direzione e verso del semiasse positivo delle ascisse
2) operare una riflessione rispetto all'asse delle ordinate
3) operare una traslazione di 1 nella direzione e verso del semiasse negativo delle ordinate.
4) dilatare di un fattore 3.

2.7 Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$a)\ f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-5x+6}}; \qquad\qquad b)\ g(x) = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x+1}$$

2.8 Trovare dominio e immagine della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$ e tracciarne il grafico.

2.9 Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{4-x}$.

I seguenti tre esercizi sono sulla soluzione di disequazioni irrazionali. Si suggerisce di consultare lo schema riassuntivo nelll'Appendice.

2.10 Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x^2+2x} \geq x$.

Sol: La radice dispari è definita su tutto $\mathbb{R}$ quindi il primo membro è definito ovunque. Poichè la funzione potenza dispari è crescente, elevando alla terza si conserva il verso della disuguaglianza. Si ottiene:

$$x^2+2x \geq x^3 \qquad \text{cioè} \qquad x(x^2-x-2) \leq 0 \qquad \text{cioè} \qquad x \in (-\infty,-1] \cup [0,2].$$

2.11 Risolvere la disequazione $\sqrt[2]{x^2-16} > x$.

Sol: La radice pari è definita su $[0,+\infty)$; quindi il primo membro è definito solo se $x \in (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$ Distinguiamo ora i casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Nel primo caso, elevando al quadrato si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-16 \geq 0 \\ x^2-16 > x^2 \end{cases}$$

Nel secondo caso la disequazione è soddisfatta, quindi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2-16 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione è l'unione delle soluzioni dei due sistemi. Un semplice calcolo porta all'insieme -soluzione

$$(-\infty,-4] \cup (\frac{8}{\sqrt{3}},+\infty).$$

2.11bis Siano $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ e $g(x) = 1+x$. Risolvere la disequazione $f(x) \geq g(x)$. Disegnare i grafici di f e g.

Sol: La disequazione è soddisfatta per i valori di $x \in U \cup V$ dove U e V sono gli insiemi - soluzione soluzioni dei due sistemi

$$U: \quad \begin{cases} x^2 - 2x \geq 1 + x^2 + 2x \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad V: \quad \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 1 + x < 0 \end{cases}$$

E si ha $U = [-1, -\frac{1}{4}]$ e $V = (-\infty, -1]$. Quindi la disequazione assegnata è soddisfatta per $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

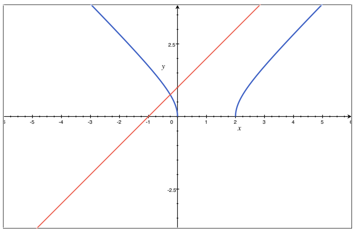

Figure 3: Funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ e $g(x) = 1 + x$. .

2.12 Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni risolvere la disequazione $f(x) \leq g(x)$ e disegnare i grafici di f e g.

$$f(x) = \sqrt{6\,x - 5}, \qquad g(x) = -x\,; \qquad\qquad f(x) = \sqrt[5]{x - 1}, \qquad g(x) = 1\,;$$

2.13 Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni risolvere la disequazione $f(x) \leq g(x)$ e disegnare i grafici di f e g.

$$f(x) = x - 2 \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 4\,x};; \qquad\qquad f(x) = 2x \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 24}\,;$$

2.11bis Siano $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ $g(x) = 1 + x$.
Risolvere la disequazione $f(x) \geq g(x)$. Disegnare i grafici di f e g.

Sol: La disequazione è soddisfatta per i valori di $x \in U \cup V$ dove U e V sono gli insiemi - soluzione dei due sistemi

$$U: \quad \begin{cases} x^2 - 2x \geq 1 + x^2 + 2x \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad V: \quad \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 1 + x < 0 \end{cases}$$

rispettivamente. Si ha $U = [-1, -\frac{1}{4}]$ e $V = (-\infty, -1]$. Quindi la disequazione assegnata è soddisfatta per $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

2.14 Stabilire in quali intervalli la funzione $f(x) = 1 + (x - 2)^2$ è invertibile. Determinare, se possibile, le eventuali funzioni inverse precisandone per ciascuna l'insieme di definizione. Disegnare il grafico delle inverse.

2.15 Siano $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Dire dove è definita la funzione $g \circ f$.

2.16 Dimostrare che nell'intervallo $(0,1]$ la funzione $f(x) = (1-x^n)^{\frac{1}{n}}$, $n > 0$, è inversa di se stessa verificando che

$$\big(f \circ f\big)(x) = f(f(x)) = x.$$

2.17 Dimostrare che ciascuna delle funzioni

$$f(x) = x, \qquad g(x) = -x, \qquad h(x) = \frac{1}{x}, \qquad s(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \neq -1$$

è inversa di se stessa.

2.18 Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log(x^2 - 1); \qquad\qquad d)\ g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 1 \\ \log(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

2.19 Stabilire in quali intervalli la funzione $f(x) = 2^{(x-1)} + 3.$ è invertibile. Determinare, se possibile, le eventuali funzioni inverse precisandone per ciascuna l'insieme di definizione. Disegnare il grafico delle inverse.

2.20 Disegnare il grafico della funzione $\sin(3x)$ e quello di $\sin(\frac{x}{3})$.

2.21 Trovare il dominio delle seguenti funzioni:

$$h(x) = \sqrt{\sin(x) - 1/2}; \qquad g(x) = \frac{1}{3 - \sin(2x)}$$

Sol: Poichè $sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ la disequazione assegnata è soddisfatta negli intervalli

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

La seconda funzione è definita dappertutto in quanto la funzione seno ha immagine in $[-1,1]$.

2.22 Trovare il dominio delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \log(|x-2|); \qquad g(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)}$$
$$h(x) = \sqrt{1/2 - \cos x}; \qquad \ell(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sol: Poichè il logaritmo è definito solo per valori positivi del suo argomento, il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il dominio di g è: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Troviamo il dominio di h. Poichè la radice pari è definita per valori non negativi del suo argomento, deve essere

$$\cos(x) \leq 1/2.$$

Risolviamo questa disequazione limitandoci prima ad un intervallo di ampiezza uguale ad 2π. È conveniente scegliere l'intervallo $[-\pi,\pi]$; I valori di x in questo intervallo per cui $\cos(x) = 1/2$ sono $x = \pm\frac{\pi}{4}$, quindi $\cos(x) \le 1/2$ per $-\pi \le |x| \le \pi/3$ cioè in $[-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \pi]$. L'insieme di definizione di h è dunque

$$[-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

È consigliabile disegnare anche i grafici della funzione coseno e della retta $y = 1/2$.
La funzione ℓ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2.23 Trovare il dominio delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \arccos(x-1); \qquad g(x) = \log_2|x+1|$$
$$h(x) = \arcsin(\log_2 x); \qquad \ell(x) = \frac{1}{\log(|x|)}.$$

Sol: La funzione $y = \arccos$ è definita in $[-1,1]$, quindi f è definita in $[0,2]$. La funzione g è definita per $x \ne 1$.
L'insieme di definizione di h è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$-1 \le \log_2(x) \le 1 \qquad\qquad x > 0.$$

Ma

$$-1 \le \log_2(x) \quad x > 0 \iff 2^{-1} \le x \qquad \text{e} \qquad \log_2(x) \le 2, \quad x > 0 \iff 0 < x \le 4.$$

Quindi l'insieme di definizione di h è $[\frac{1}{2}, 4]$.
L'insieme di definizione di ℓ è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; l'argomento del logaritmo deve essere positivo, quindi deve essere $x \ne 0$ inoltre deve essere $\log(x) \ne 0$ e quindi $|x| \ne 1$.

2.24 Disegnare il grafico di $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ e quello di $\sin(x) - \frac{\pi}{4}$.

2.25 Disegnare la funzione periodica di periodo minimo 2 che nell'intervallo $[-1,1]$ è uguale a $1 - |x|$.

2.26 Disegnare la funzione periodica di periodo minimo 1 che in $(0,1]$ è uguale a: x^2.

2.27 Per ciascuna delle due coppie di funzioni in $[a]$ e $[b]$ dire se esistono le funzioni $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ e in caso positivo precisarne il dominio

[a] $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 1 - \sqrt{x}$;

[b] $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $g(x) = x + 1$.

2.28 Siano $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = \cos x$; dire se esistono le funzioni $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$; e in caso positivo precisarne il dominio.

2.29 Per ciascuna delle due coppie di funzioni in $[a]$ e $[b]$ dire se esistono le funzioni $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$; in caso positivo precisarne il dominio.

$$f(x) = \cos(x), \quad g(x) = 1 - x^2; \qquad\qquad f(x) = |x|, \quad g(x) = x^3.$$