

1.1 (2 punti) Quanti sono le possibili combinazioni di 3 cifre di un lucchetto con e senza ripetizioni?

1.2 (3 punti) Se  $X$  e  $Y$  sono due variabili casuali discrete con

$$\begin{aligned} p(\underline{\underline{X = 1}}, \underline{\underline{Y = 2}}) &= p(\underline{\underline{X = 2}}, \underline{\underline{Y = 3}}) = p(\underline{\underline{X = 3}}, \underline{\underline{Y = 4}}) = \frac{1}{27} \\ p(\underline{\underline{X = 1}}, \underline{\underline{Y = 3}}) &= p(\underline{\underline{X = 2}}, \underline{\underline{Y = 2}}) = p(\underline{\underline{X = 3}}, \underline{\underline{Y = 1}}) = \frac{1}{9} \\ p(\underline{\underline{X = 1}}, \underline{\underline{Y = 4}}) &= p(\underline{\underline{X = 2}}, \underline{\underline{Y = 1}}) = p(\underline{\underline{X = 3}}, \underline{\underline{Y = 2}}) = \frac{5}{27} \end{aligned}$$

calcola  $p_Y(4)$ ,  $p_X(1)$ ,  $p(X = 1|Y = 4)$  e  $p(Y = 4|X = 1)$ . Le due variabili casuali sono indipendenti? Motiva la tua risposta.

1.3 (3 punti) Determina il valore di  $a$  per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{a}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico della *cdf* della variabile casuale continua  $X$  sottostante.

1.4\* (3 punti) Dimostra che per  $a$  e  $b$  costanti reali,  $\underline{\underline{\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X]+b}}$  e  $\underline{\underline{Var(aX+b) = a^2Var(x)}}$ .

2.1 (3 punti) Se  $H(X) = 3$  e  $H(X, Y) = 5$  che cosa si può dire di  $H(Y)$  e  $H(Y|X)$  in generale? E se  $X$  e  $Y$  fossero indipendenti?

2.2 (2 punti) Dato un alfabeto di 6 simboli, può esistere una codifica univocamente decifrabile tale per cui le lunghezze sono 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

2.3 (3 punti) Date le equazioni di parità

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \\ y_2[n] &= x[n] + x[n-1] \\ y_3[n] &= x[n] + x[n-2] \end{aligned}$$

se  $x[3] = 0$  e  $x[4] = 1$  con quale tripletta di bit è codificato il bit  $x[5] = 1$ ?

2.4 \* (3 punti) Spiega a parole per quale motivo la codifica di Huffman per simbolo non può essere utilizzata per la compressione di un file binario e come si potrebbe ovviare a questo inconveniente.

- 3.1 (2 punti) Se  $p$  è la probabilità di ottenere *testa* nel lancio di una moneta, calcola la verosimiglianza di  $p = 1/3$  e  $p = 2/3$  per una moneta che, lanciata 4 volte, produce 1 volta *testa* e 3 *croce*.

~~3.2~~ (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che restituiscono *testa* con probabilità  $1/8$  e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità  $1/2$ . Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere *testa* al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

- 3.3 (3 punti) Nel caso in cui esistano, determina la distribuzione limite e quella stazionaria per la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- ~~3.4~~ \* (3 punti) Scrivi le condizioni per cui una matrice di transizione è irriducibile e quelle per cui è regolare. Produc un esempio di matrice irriducibile ma non regolare.