La Corte, Scarrà, Coronati

Analisi Numerica e Algebra Lineare

Di Benedetto:

Lezione 1 (21/09/2020):

Dati

I dati richiedono, al fine di essere immagazzinati, **Tempo** e **Memoria.**
Nella misurazione ed elaborazione di essi vi è un alto **rischio di errore**, ovvero un pericolo che essi vengano distorti durante uno dei passaggi che implica la loro elaborazione.

Tempo

Il tempo di elaborazione dei dati dipende strettamente dalla loro **quantità**.
In particolare, se si effettuano operazioni sui dati, si va ad analizzare quante **operazioni moltiplicativi** sono eseguite al fine di arrivare al risultato.
In un sistema lineare, ad esempio, il tempo dipenderà dal numero di incognite *n*, e il tempo per arrivare ad un risultato dipenderà dal **metodo** che vogliamo usare per risolverlo;

$$T(n) = \#OperazioniMoltiplicative$$

Se ad esempio utilizzo il *metodo di Gauss*, il tempo necessario a risolvere il sistema sarà:

$$T(n) = n^3/3 + O(n^2) \text{ con } O(n^2) \text{trascurabile}$$

Se ad esempio utilizzo il *metodo di Cramer*, il tempo necessario a risolvere il sistema sarà:

$$T(n) = n!$$

Notiamo quindi come questa analisi sia fondamentale per capire quale metodo usare per implementare un algoritmo che lavora con *n* molto grandi: in questo caso il *metodo di Cramer* risulta molto svantaggioso a questo proposito.

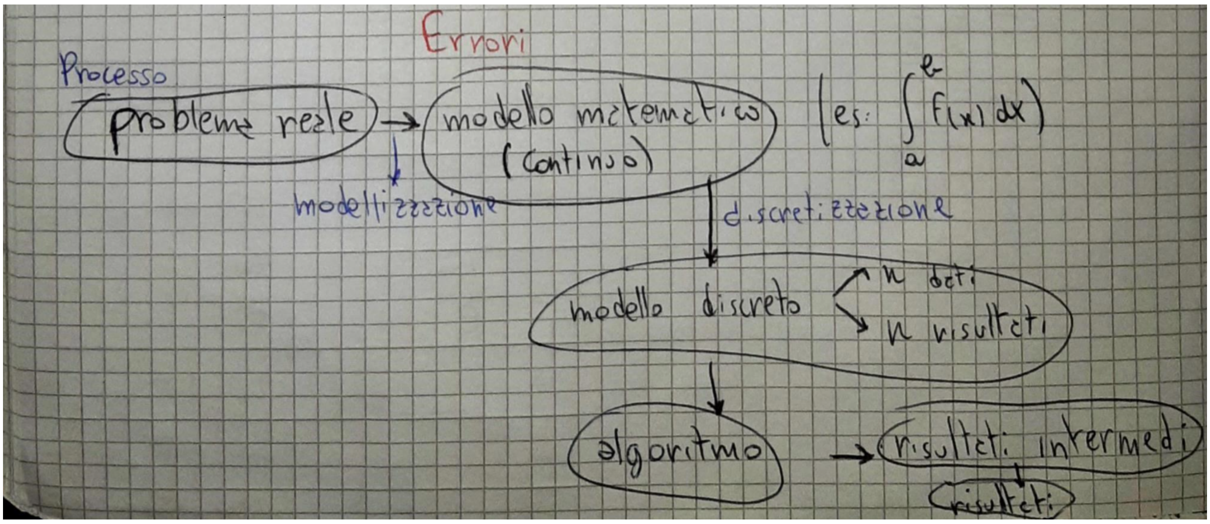
Errore

Vi sono varie fasi nel passaggio da dati a risultati che possono distorcere i dati di partenza e di conseguenza anche il risultato.
Per evitare questi errori devo inizialmente studiare le cause per cui essi avvengono e di conseguenza il processo atto a passare da dati a risultati.

Se ho un **problema reale** lo devo necessariamente analizzare attraverso un **modello matematico continuo**, in un processo detto **modellizzazione**.
Questo tipo di modello lavora con dati e risultati ***non*** necessariamente ***finiti***.

Siccome un calcolatore non può lavorare con dati non finiti, allora devo passare ad un **modello matematico discreto**, che usa solo dati e risultati finiti: questo processo è detto **discretizzazione.**

Da un modello matematico discreto si può procedere alla realizzazione di un **algoritmo**.
Esso elabora i **dati** per arrivare ad uno o più **risultati.**
Mentre i modelli matematici erano generalmente stilati da chi analizza il problema (fisici e matematici), l'algoritmo viene implementato da un informatico.



In questo processo, che implica nei suoi vari passaggi approssimazioni, è molto probabile che si vadano a creare degli **errori.**

Essi possono essere classificati in 3 tipi, in base alla loro provenienza:

Errore Analitico

Errore dovuto alle approssimazioni nei passaggi di modellizzazione e discretizzazione.

Errore Inerente

Errore dovuto ad un'errata misurazione del dato.

Errore Algoritmico

Errore nell'algoritmo.

Bisogna assicurarsi che questi 3 tipi di errori non vadano ad incidere troppo sul risultato finale.

Gli errori possono essere anche classificati in base a come sono espressi; in particolare ne distinguiamo due:

Errore Assoluto

Espressione dell'errore in sé e per sé.
Poniamo:

x dato esatto
$\bar{x}$ dato perturbato

Errore Assoluto:

$$\delta = \bar{x} - x \text{ rappresentazione con segno}$$
$$\delta = |\bar{x} - x| \text{ rappresentazione senza segno}$$

Errore Relativo

Espressione dell'errore in relazione al dato esatto.

Poniamo:

x dato esatto
$\bar{x}$ dato perturbato

Errore Relativo:

$$\xi = \frac{|\bar{x} - x|}{x} \text{ e quindi}$$

$$\bar{x} = x(1 + \xi)$$

Errore Inerente

Andiamo ad analizzare questo tipo di errore:

Poniamo:

$x_1, \dots, x_n$ dati
$y_1, \dots, y_n$ risultati

Andiamo a calcolare il **condizionamento,** ovvero il rapporto tra l'errore relativo dei risultati e l'errore relativo dei dati:

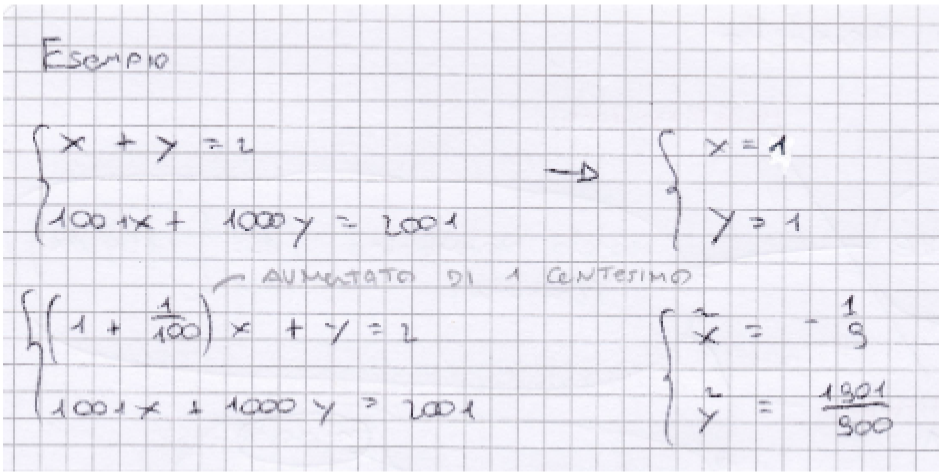
$$r_j = \frac{|\bar{y}_j - y_j|}{y_j}$$

$$\xi_i = \frac{|\bar{x}_i - x_i|}{x_i}$$

$$condizionamento = \frac{r_j}{\xi_i}$$

Più è alto il condizionamento, più il problema amplifica gli errori.

Poniamo in esempio questo sistema:



Notiamo che ad una piccolissima perturbazione di un dato (x aumenta di 1/100) abbiamo una grande perturbazione nei risultati: questo vuol dire che il condizionamento è alto.

Lezione 4 (28/09/2020):

input x → Ẋ perturbato
output y = F(x) → ȳ=F(Ẋ) (errore dovuto dalla funzione con variabile perturbata Ẋ)

Condizionamento: $\dfrac{\frac{\frac{(\bar{y}-y)}{y}}{(\dot{X}-x)}}{x} = \dfrac{F(\dot{X}) - F(x)}{F(X)} \cdot \dfrac{x}{\dot{X}-x}$

Coefficiente di Amplificazione (misura gli errori inerenti):

$$\lim_{x \to x_0} cond = \frac{xF'(X)}{F(x)} = C_f$$

con $x_0 = valore\ critico$

Il C_f stima il rapporto tra l'errore in input e quello in output.

Esempi:

1) $f(x) = x^2 - 7x \longrightarrow C_f$ (coeff. di amplificazione) : $\dfrac{x f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x(2x-7)}{x^2-7x}$

$x \neq 0 \rightarrow C_f \; \dfrac{2x-7}{x-7}$ $\quad x$ molto vicino a $7 \Rightarrow C_f \approx \dfrac{7}{x-7}$ più x è vicino a 7 più il risultato tende a ∞

$\Rightarrow C_f \approx \dfrac{7}{x-7} \longrightarrow \infty$

2) $f(x) = 1 - \cos x \qquad f'(x) = + \sin x$

$C_f = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$ quando C_f può essere molto grande? quando il denom. è piccolo ovvero se x è vicino a 0

$$\lim_{x \to 0} C_f = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{x \sin x (1+\cos x)}{1-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{x \sin x (1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

quindi anche per le x piccole il C_f non è grande.

Esercizi:

coefficiente di amplificazione (C_f):

$\lim_{\tilde{x} \to x} \text{cond} \; \dfrac{x f'(x)}{f(x)}$

1) $f(x) = \sqrt{x} \qquad C_f = \dfrac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

2) $f(x) = e^x \qquad C_f = \dfrac{x \cdot e^x}{e^x} = x$

3) $f(x) = \sin x \qquad C_f = \dfrac{x \cos x}{\sin x}$ valori critici: $x \approx 0 \Rightarrow x \approx \pi$ (→ vicino a)

$\lim_{x \to \pi} C_f = \dfrac{\pi(-1)}{0} \rightarrow \pm\infty$ mal condizionato

$\lim_{x \to 0} C_f = \lim_{x \to 0} \dfrac{x \cos x}{\sin x} = \dfrac{0 \cdot 1}{0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot 1 = 1$ ben condizion.

4) $f(x) = \cos x \qquad C_f = \dfrac{x(-\sin x)}{\cos x} = - \dfrac{x \sin x}{\cos x}$

valori critici (dove il den. si annulla) $x \approx \frac{\pi}{2}$, $x \approx \frac{3}{2}\pi \rightarrow \lim C_f = \infty$

5) $f(x) = \log x \qquad C_f = \dfrac{x \cdot 1/x}{\log x} = \dfrac{1}{\log x} \qquad x \approx 1 \Rightarrow C_f \rightarrow \infty$

input: $x_1 \dots x_n$

output: $y_1 \dots y_m$

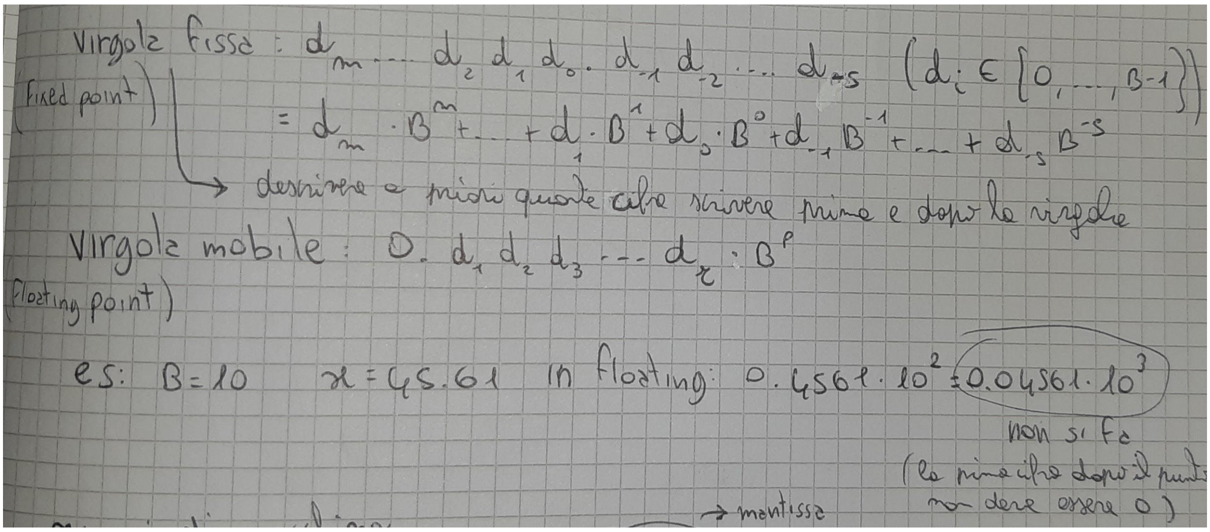
$\text{cond}_{x_i, y_j} \approx \dfrac{x_i \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}}{f_j(x_1, \dots, x_n)}$ (→ derivate parziale)

$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$

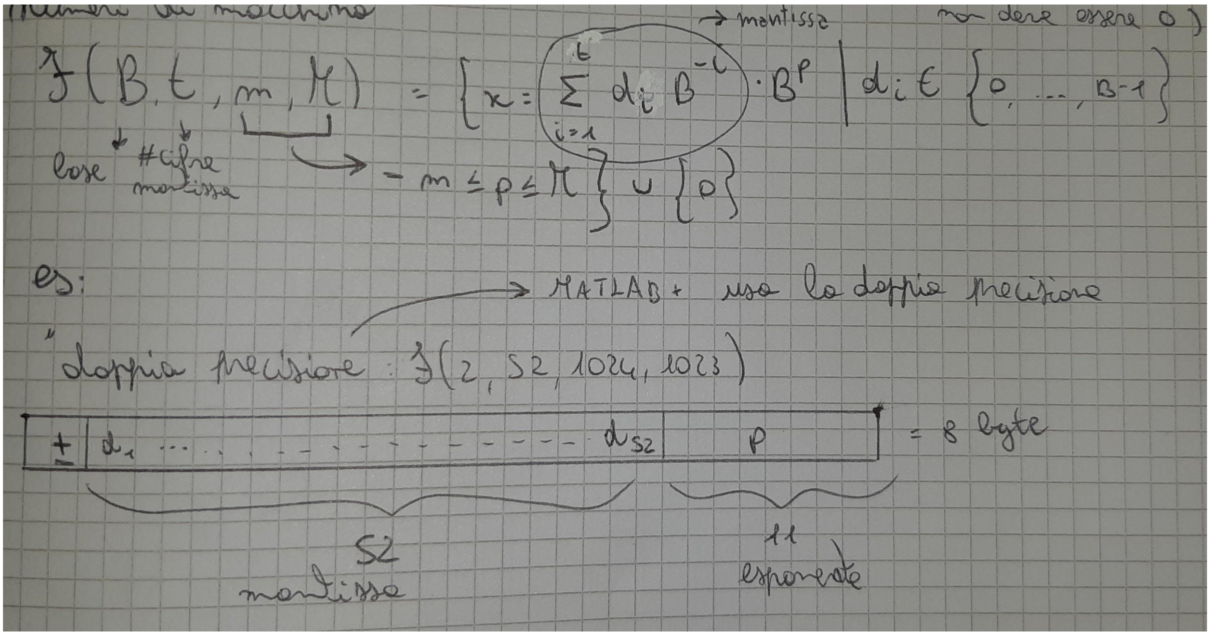
Numeri macchina:

x = 45.61 = $4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2}$ qua B (base) = 10
B = 2 → cifre: 0, 1
B = 16 → cifre: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Virgola fissa e virgola mobile:


Virgola fissa: $d_m \dots d_2\, d_1\, d_0 .\, d_{-1}\, d_{-2} \dots d_{-s}$ $\quad (d_i \in \{0, \dots, B-1\})$
(Fixed point)
$= d_m \cdot B^m + \dots + d_1 \cdot B^1 + d_0 \cdot B^0 + d_{-1} B^{-1} + \dots + d_{-s} B^{-s}$
→ descrivere a priori quante cifre scrivere prima e dopo la virgola
Virgola mobile: $0.d_1 d_2 d_3 \dots d_t \cdot B^p$
(Floating point)
es: B = 10 $\quad x = 45.61$ in floating: $0.4561 \cdot 10^2 \neq 0.04561 \cdot 10^3$
non si fa
(la prima cifra dopo il punto non deve essere 0)
→ mantissa

Rappresentazione in binario:


→ mantissa
non deve essere 0)
$\mathcal{F}(B, t, m, M) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i} \cdot B^p \;\middle|\; d_i \in \{0, \dots, B-1\},\ -m \le p \le M \right\} \cup \{0\}$
base, #cifre mantissa
es:
"doppia precisione": $\mathcal{F}(2, 52, 1024, 1023)$ → MATLAB usa la doppia precisione
| ± | d_1 … d_{52} | p | = 8 byte
52 mantissa
11 esponente

La singola precisione invece è: (2, 23, 128, 127)
Se p > M abbiamo un overflow se invece p < m abbiamo un underflow.
Due metodi per correggere underflow o overflow:

- Troncamento
- arrotondamento

Troncamento: semplicemente togliamo le cifre decimali "di troppo".
Arrotondamento: se l'ultima cifra decimale è ≥ 5 allora la cifra prima verrà aumentata di uno, se invece l'ultima cifra decimale è < 5 agisco come nel troncamento.

Es:
F = 0.995   vogliamo levare l'ultima cifra decimale
con arrotondamento: F = 1
con troncamento: F = 0.99

Lezione 7 (05/10/2020):

Precisione di Macchina

Consideriamo:

x dato esatto
$\bar{x}$ dato perturbato

$$x = \pm f \cdot B^P$$

$$x = \pm \bar{f} \cdot B^P$$

Quanto può essere lo scarto tra le due mantisse?

$$|\bar{f} - f| \le \frac{B}{2} \cdot B^{-(t+1)} \Rightarrow |\bar{f} - f| \le \frac{1}{2} \cdot B^{-t}$$

Quindi, se vado a calcolare l'errore relativo:

$$\frac{|\bar{x} - x|}{|x|} = \frac{|\pm \bar{f} \cdot B^p - (\pm f \cdot B^p)|}{|\pm f \cdot B^p|} = \frac{\cancel{B^p}\, |\bar{f} - f|}{\cancel{B^p} \cdot f}$$

Vado a vedere la mantissa *f* al minimo quanto può essere:

→ DEVE AVERE ALMENO 1 CIFRA => 0,1 => $f \ge B^{-1}$

Unendo le tre formule posso ottenere la **precisione di macchina**:

$$\frac{|\bar{f} - f|}{f} < \frac{\frac{1}{2} B^{-t}}{B^{-1}} \Rightarrow \frac{|\bar{f} - f|}{f} \le \frac{1}{2} B^{-t+1}$$

PRECISIONE DI MACCHINA

Questa è la precisione di macchina nel linguaggio Doodle C:

$$\underline{ex}\ \text{doodle C} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{-52+1} = 2^{-52} \Rightarrow \text{PRECISIONE DI MACCHINA} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$$

N.B.: Se sommo o sottraggo valori inferiori alla precisione di macchina l'operazione non viene considerata dal calcolatore.

Errore Algoritmico

Dipende dalle operazioni che effettuo nell'algoritmo.

Ad esempio se uso una di queste operazioni:

$$\sqrt{\ },\ \log,\ \sin,\ \dots$$

So già che ottengo un risultato intermedio con un errore pari a:

$$g(v) = \varepsilon_{OUT} = c_g \cdot \varepsilon_v$$

Ovvero il coefficiente dell'operazione che sto applicando moltiplicato per l'errore già presente prima dell'operazione.

Coefficienti di Amplificazione delle Operazioni Elementari

$$Somma\ e\ Differenza\ =\ \varepsilon_a \frac{a}{a \pm b} \pm \varepsilon_b \frac{b}{a \pm b} + \varepsilon$$

$$Moltiplicazione\ =\ \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon$$

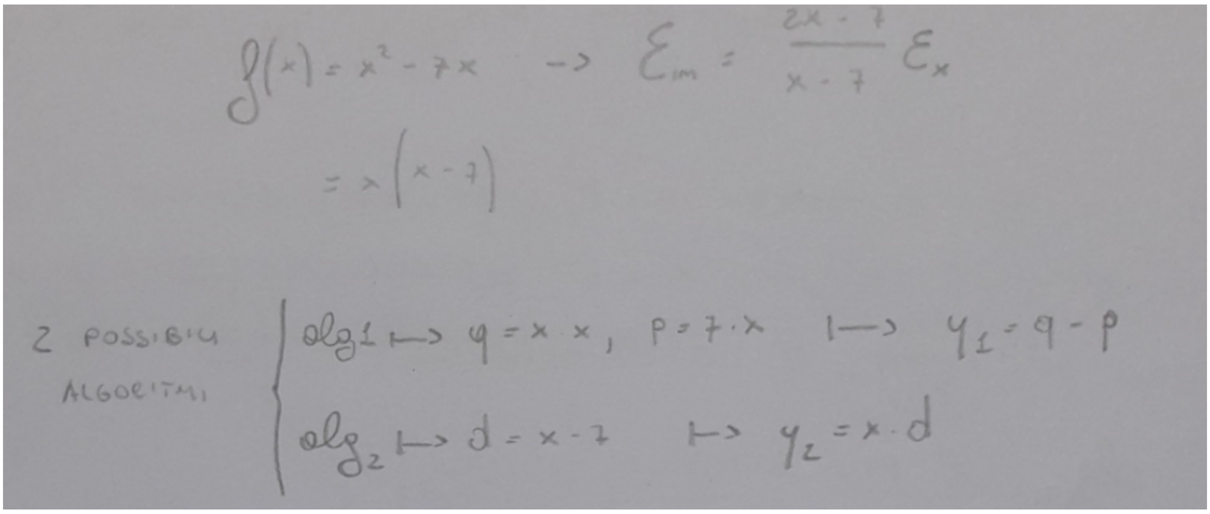
$$Divisione\ =\ \varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon$$

Lezione 11 (14/10/2020):

Analisi dell’Errore Algoritmico:

Andiamo ad effettuare un tipo di analisi detta **in avanti:** consiste nel calcolare l’errore relativo sul risultato finale in termine degli errori introdotti dalle singole operazioni, trascurando i termini in cui compaiono prodotti di errori.

Partendo da una funzione si possono trovare più algoritmi che la descrivono; ecco un esempio:



L’analisi algoritmica serve proprio a capire quale algoritmo sia il migliore.

Il **valore critico** di questa funzione è 7; infatti per le x che si avvicinano a questo numero vi è il rischio di **cancellazione**, ciò che più dobbiamo cercare di evitare.

Andiamo ad analizzare i due algoritmi;
Analizziamo l’algoritmo 1:

$\underline{alg_1}$, STUDIO L'ERRORE ALGORITMICO:

$$q = x \cdot x \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{q_{TOT}} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_q = \cancel{2\mathcal{E}_x} + \mathcal{E}_q$$

$$p = 7 \cdot x \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{p_{TOT}} = \cancel{\mathcal{E}_7} + \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_p = \cancel{\mathcal{E}_x} + \mathcal{E}_p$$

$$y_1 = q - p \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{alg_1} = \frac{q}{q-p}\mathcal{E}_q - \frac{p}{q-p}\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{y_1}$$

$$= \frac{x^2}{7-x^2}\mathcal{E}_q - \frac{7x}{x^2-7x}\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{y_1}$$

$$\text{ERRORE ALGORITMICO} = \mathcal{E}_{alg_1} = \frac{x}{x-7}\mathcal{E}_q - \frac{7}{x-7}\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{y_1}$$

Durante i passaggi semplifico tutti i termini che non c'entrano con le nostre 3 variabili *q, p e* y_1 .

Il risultato finale ci dimostra che questo algoritmo è ancora suscettibile alla cancellazione per le *x* che si avvicinano a 7.

Non ha migliorato la situazione rispetto all'errore inerente, che già soffriva di questo rischio.

Andiamo ad analizzare il secondo algoritmo:

$$alg_2: \quad d = x - 7 \Rightarrow \mathcal{E}_{d_{TOT}} = \frac{x}{x-7}\mathcal{E}_x - \frac{7}{x-7}\mathcal{E}_7 + \mathcal{E}_d$$

$$y_2 = x \cdot d \Rightarrow \mathcal{E}_{alg_2} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_{d_{TOT}} + \mathcal{E}_{y_2} = \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_{y_2}$$

Notiamo come questo algoritmo sia molto più vantaggioso del primo, perché non è più suscettibile alla cancellazione.

Va quindi detto che esso migliora l'errore inerente.

Stabilità

Se un algoritmo ha un errore algoritmico che non peggiora l'errore inerente, esso viene detto **stabile.**

ex. nel caso precedenze alg1 non peggiora l'errore inerente, può essere quindi detto stabile.

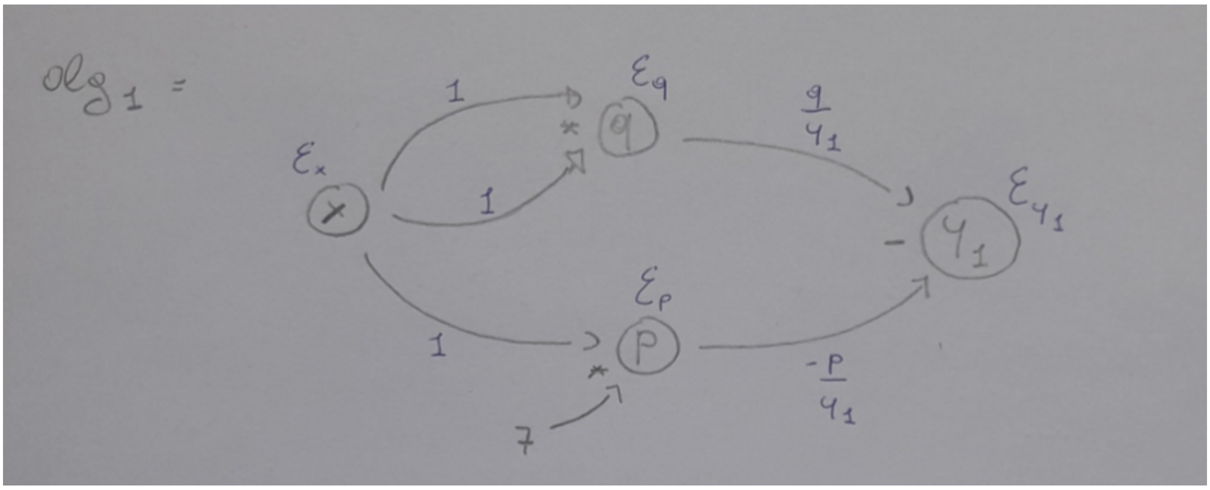
alg2 addirittura, migliora l'errore inerente, può essere quindi definito più stabile di alg1.

Quindi:
- se $\xi_{alg} > \xi_{in}$ algoritmo instabile
- se $\xi_{alg} \approx \xi_{in}$ algoritmo stabile
- se $\xi_{alg} < \xi_{in}$ algoritmo molto stabile

Visualizzazione dell'Algoritmo

Uso dei Grafi:
- Nodi: uno per ogni variabile
- Archi: operazioni tra le variabili

I grafi sono anche **etichettati**:
- I nodi sono etichettati con gli errori locali
- Gli archi sono etichettati con i coefficienti di amplificazione delle operazione



Calcolo dell'Errore Algoritmico dal Grafo:

Ogni errore algoritmico è dato da tutti i contributi degli errori locali sommati fra di loro; ogni errore locale è amplificato dal prodotto delle etichette degli archi che seguono il nodo in un cammino. Se ci sono due o più diramazioni, una volta moltiplicati i contribuiti di esse, devo sommare i totali delle diramazioni tra di loro.

$$\xi_{alg} = \Sigma_{cammini}\Pi_{archi\ seguenti}\, etichette$$

ex

$$\varepsilon_{alg_1} = \varepsilon_q \frac{q}{y_1} + \varepsilon_p \left(-\frac{p}{y_1}\right) + \varepsilon_{y_1} \cdot 1$$

Verificare la Stabilità

- Per verificare che un algoritmo sia stabile devo verificare che per tutti i coefficienti esso non esploda.
- Per verificare che un algoritmo sia instabile basta trovare un coefficiente per cui esso esploda.

Lezione 13 (19/10/2020):

Sistemi Lineari

Matrice indicata con A $\in \mathbb{R}^{m\,x\,n}$, ha *m* righe e *n* colonne.

Studiamo le matrici quadrate $AX = B$;
Esse sono **singolari**, ovvero **non invertibili**, se hanno:

$$det|A| \neq 0$$

Metodo (algoritmo) per Verificare se una Matrice è Invertibile:

Partendo da un sistema $AX = B$ cerchiamo di arrivare, **tramite la riduzione di Gauss,** ad un sistema perturbato $\overline{A}X = \overline{B}$, ovvero una **matrice ridotta** ("a scalini"), anche detta **triangolare superiore,** che equivale al sistema:

$$= \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots = b_1 \\ \quad a_{22} x_2 + \dots = b_2 \\ \quad\quad a_{mm} x_m + \dots = b_m \end{cases}$$

Ottengo quindi un sistema molto semplice, risolvibile con il **metodo di risoluzione all'indietro,** che può essere anche implementato in un calcolatore.

Metodo di Risoluzione all'Indietro

Passo Base: $x_n = \frac{b_n}{a_{mn}}$

Passo Induttivo: $for\ i = n-1,\ n-2,\ ...,\ 2,\ 1$

considero la i-esima equazione $a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i$

con le x *note grazie ai passi precedenti.*

da cui deriva la formula $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ con $a_{ii} \neq 0$

Costo del Metodo

In un calcolatore il costo dell'algoritmo che segue il metodo è il seguente:

$$\forall i\ nel\ ciclo\text{: } n-1\ operazioni,\ quindi\ il\ costo\ \text{è: } \frac{n(n+1)}{2}$$

$$approssimabile\ asintoticamente\ a\text{: } \frac{n^2}{2}$$

Eliminazione Gaussiana

Risoluzione di un sistema con operazioni prestabilite sulla matrice.

Azzera elementi sotto il pivot:

Denotiamo con A^K la matrice A con le colonne indicate con $k-1,\ k-2,\ k-n$, <u>che hanno elementi sotto il pivot.</u>

Per passare da $A_K\ ad\ A_{k+1}$ bisogna prima azzerare gli elementi sotto il pivot di A_k, denominato con a_{kk} e necessariamente diverso da 0.

Per farlo bisogna trovare il **coefficiente**:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

e poi usarlo per **azzerare le righe sottostanti**:

$$R_i = R_i - m_{ik}R_k$$

Implementazione dell'Algoritmo:

Ciclo sulle colonne: $for\ k = (1,.., n)$: $A^K -> A^{K+1}$

Per eseguire l'operazione $A^K -> A^{K+1}$:

- Scelgo un **perno** $a_{kk} \neq 0$

- **Ciclo** sulle colonne antecedenti a *k*: $for\ i = k + 1,\ ...,\ n$
  - **calcolo** $m_{ik} = \frac{a_{jn}}{a_{kk}}$

    e **trasformo** $b_i = b_i - m_{ik}b_k$

  - ciclo sulle colonne antecedenti a *k*: $for\ j = k + 1,\ ...,\ n$
  - e **trasformo** $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik}a_{ij}$

Lezione 15 (27/10/2020)

Costo dell'Algoritmo di Riduzione

Conto il numero di operazioni di moltiplicazione e divisione:

$k = 1,..., n - 1$

$i = k + 1,..., n$ $\quad$ $trovare\ m_{ij}:\ costo\ 1$

$trovare\ b_i: costo\ 1$

$j = k + 1,..., n$ $\quad$ $trovare\ a_{ij}: costo\ i \quad per\ n - k\ volte$

Quindi $\quad \forall i\ n - k + 2\ operazioni$

Costo totale: $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 2)\ (n - k)$

che dopo una serie di semplificazioni si approssima a: $O = n^3/3$

Stabilità di Gauss

Gauss è stabile se gli elementi delle matrici intermedie nel processo non sono troppo piu grande degli elementi di partenza:

$$A^{(k)}\ con\ k = 2, 3,..., n - 1 \qquad non\ ha\ elementi\ >>\ di\ quelli\ di \qquad A^1$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

CON $\varepsilon < |M|$ PRECISIONE DI MACCHINA

L'ALGORITMO INVECE FA

(1) METTE ε COME PIVOT

(2) CALCOLA $m_{21} = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

PASSA ALLA SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

CANCELLAZIONE

$$x_2 = \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon}}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} \approx 1 \Rightarrow \varepsilon x_1 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1-1}{\varepsilon} = 0$$

IL RISULTATO È $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ MOLTO DIVERSO DAL RISULTATO CORRETTO

Contenere la Grandezza degli Elementi

- Scegliere dei buoni pivot
- Scambiando righe quando necessario
- Ridurre $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

L'obiettivo principale è quello di porre come a_{ik} sempre l'elemento più grande.

Pivoting Parziale

Rendere a_{kk} più grande possibile in rapporto ad ogni altro $a_{ik}^{(k)}$.

1) $i_0 = \ indice \quad tale\ che \qquad \left|a_{i_0k}\right| = \ max \left|a_{ik}^{(k)}\right| \quad con\ i\ =\ k,...,\ n$

2) Scambio la riga *k* con la riga i_o sia in A che in b

3) Procedo con l'algoritmo:

   Siccome $\left|m_{ik}\right| = \frac{\left|a_{ik}^{(k)}\right|}{\left|a_{kk}^{(k)}\right|} \leq 1$ allora Gauss con il pivoting parziale **è sempre stabile;** inoltre **il costo non varia.**

nota: in Matlab il pivoting parziale con sostituzione all'indietro si applica con l'istruzione:

A \ b

Variante Gauss-Jordan

Per trovare *x* si puo' usare anche la Variante di Gauss-Jordan, che consite prima nel trovare l'inversa attraverso l'applicazione di Gauss alla matrice composta da A e dalla matrice identica di stesse dimensioni; una volta trovata la matrice inversa la usa nella formula inversa di $Ax\ =\ b$:

$$(A|I) \ \ --\ Gauss\ -> \ (I|A^{-1})$$ e quindi
$$x\ =\ A^{-1}b$$

Questo algoritmo ha un costo finale di n^3 e risulta quindi **svantaggioso** rispetto al pivoting parziale con sostituzione all'indietro, che ha costo $n^3/3$.

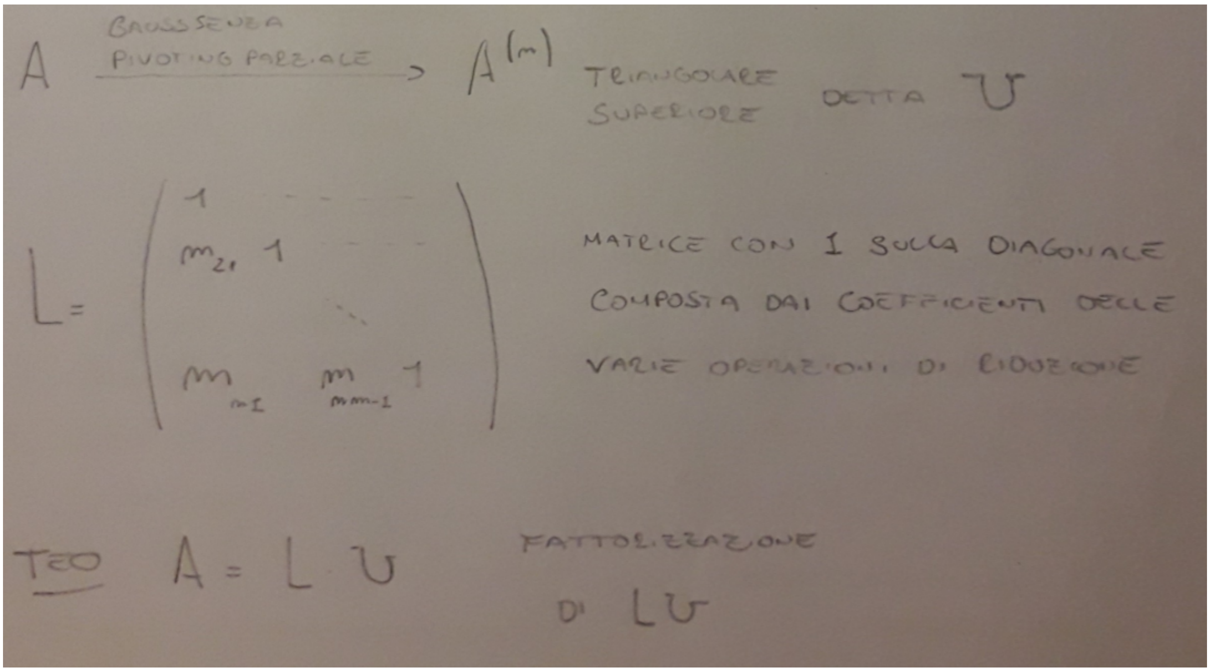
Applicazioni della Sostituzione all'Indietro

1) Se $Ax_1 =\ b_1,\ Ax_2 = b_2,\ Ax_3 = b_3$ con A invariata

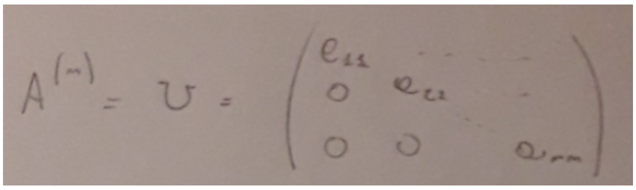
   posso ridurre tutto insieme:
   $(A|b_1|b_2|b_3) \ \ --\ Gauss\ -> \ (A_{ridotta}^{(n)}|\ b_1^{(n)}|\ b_2^{(n)}|\ b_3^{(n)})$

   e andare poi ad effettuare le rispettive 3 sostituzioni all'indietro:
   $(A_{ridotta}^{(n)}|\ b_1^{(n)}|\ b_2^{(n)}|\ b_3^{(n)}) \ \ --\ Sost.\ all'indietro\ -> \ x_1,\ x_2,\ x_3$

2) $A\ \ --\ Gauss\ senza\ pivoting\ parziale\ ->A^{(n)}$ matrice ridotta (triangolare superiore)



3) A $--$ $Gauss\ senza\ pivoting\ parziale$ $->A^{(n)}$



il determinante di A è uguale alla moltiplicazione degli elementi sulla diagonale:
$det(A) = det(U) = a_{11}^{(n)} \cdot a_{22}^{(n)} \cdot ... \cdot a_{mn}^{(n)}$

n.b.: avrei potuto anche usare Gauss con pivoting parziali ma ad ogni scambio di riga avrei dovuto cambiare il segno del determinante.

Condizionamento del Problema: Norme

Le norme **condensano informazioni molto grandi in un numero molto piccolo.**
Esistono 2 tipi di norme:

- **Vettoriali** $v \rightarrow ||v||$
- **Matriciali** $A \rightarrow ||A||$

Norme Vettoriali

Le norme vettoriali sono identificate dalle doppie sbarre verticali e da un pedice che indica il modo con cui stiamo stiamo identificando il vettore.

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$ esempio di norma

Per essere definite tali, le norme vettoriali devono soddisfare delle **proprietà,** ovvero:

1) Devono compattare informazioni molto grandi in un piccolo valore positivo.

$$\forall x \in \Re^n:\ ||x|| > 0 \quad \text{e se } ||x|| = 0 \text{ allora } x = 0$$

2) La norma deve essere **omogenea:**

$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$$

3) La norma deve rispettare la regola della **disuguaglianza triangolare:**

$$||x + y|| < ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in \Re$$

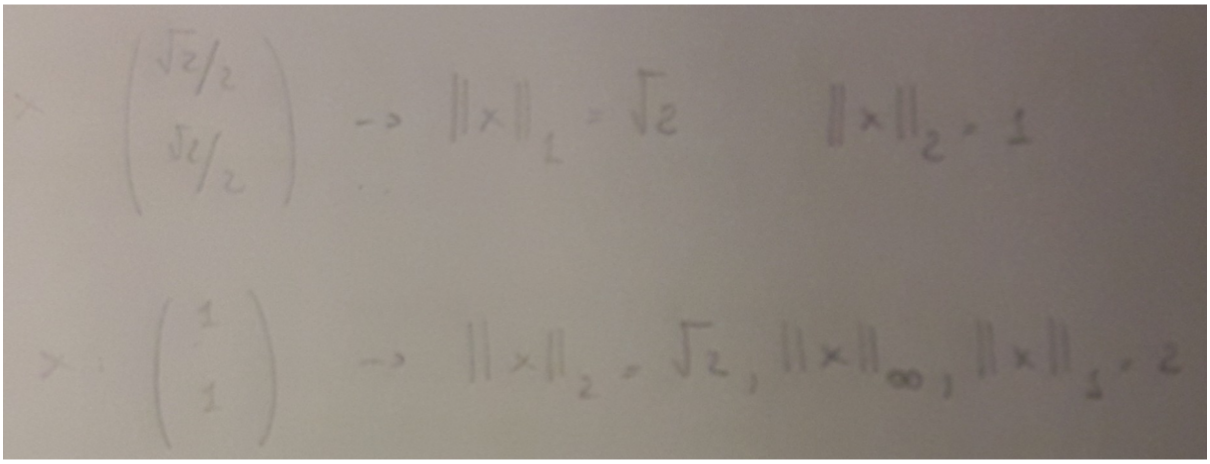
Lezione 19 (03/11/2020)

Ancora sulle Norme Vettoriali

Date $||\ ||^I$ e $||x||^{II}$ norme vettoriali, che rispettano le 3 regole fondamentali;
allora si verifica il seguente assioma:

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ \ tali\ che\ \forall x \in \Re: \alpha ||x||^{II} \leq ||x||^I \leq \beta ||x||^{II}$$

esempio:



Norme Matriciali

Associano ad una matrice A^{mn} arbitraria tantissimi numeri reali.

$$||\ ||: \quad A \in A^{mn}\Re^{mn} \rightarrow \Re$$

Proprietà:

1. I valori di una norma matriciale devono essere **positivi.**

$$\forall A \in \Re^n: \; ||A|| > 0 \qquad \text{e se } ||A|| = 0 \text{ allora } A = 0$$

2. La norma deve essere **omogenea:**

$$||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A|| \qquad \forall A, \alpha \in \Re^{mn}$$

3. La norma deve rispettare la regola della **disuguaglianza triangolare:**

$$||A + B|| < ||A|| + ||B|| \qquad \forall A, B \in \Re^{mn}$$

Norma di Frobenius:

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^{\;2}}$$

Simile alla norma vettoriale $||\,||_2$, seguono entrambe il teorema di pitagora.

E' una norma poco usata perché non verifica la proprietà induttiva (5), che invece è verificata dalle norme matriciali induttive.

Norme Matriciali Induttive

<u>Provengono da norme vettoriali</u>, più in particolare dalla moltiplicazione della matrice per il vettore.

$$A \cdot x \in \Re^n$$

Fissata una norma vettoriale, la norma matriciale indotta è il massimo tra tutti i possibile output, restringendomi ai vettori in input che hanno norma 1.

$$||A|| = max_{||x||=1} \, ||Ax||$$

Ogni norma matriciale indotta verifica una **quinta proprietà**:

$$||Av|| \le ||A|| \cdot ||v|| \qquad \forall A \in \Re^{mxn} \forall I \in \Re^n$$

Inoltre, come per le norme vettoriali, è vero che:

$$\exists \alpha, \beta > 0 \;\; tali\, che \, \forall A \in \Re^{mxn}: \qquad \alpha||A||^{II} \le \; ||A||^{I} \le \; \beta||A||^{II}$$

Errore Inerente nei Sistemi Lineari

E' l'errore che commetto quando i dati sono sbagliati.

$$Ax = b: \qquad input: A \in \Re^{mxn},\ det(A) \neq 0,\ b \in \Re^{n} \qquad output: x \in \Re$$

Studio il caso $A\overline{x} = \overline{b}$ con $\overline{b} \neq b$:

definiamo:

$\delta b = \overline{b} - b \in \Re^{n}$ vettore di errori in input
$\delta x = \overline{x} - x \in \Re^{n}$ vettore di errori in output

Input:

$$||\delta b||\ errore\ assoluto\ in\ input$$
$$\xi_b = \frac{||\delta b||}{||b||}\ errore\ relativo\ in\ input$$

Output:

$$||\delta x||\ errore\ assoluto\ in\ output$$
$$\xi_x = \frac{||\delta x||}{||x||}\ errore\ relativo\ in\ output$$

Errore Inerente:

Data una norma indotta || || $\quad \forall A \in \Re^{mxn}\ \forall b \in \Re^{n}$

$$\xi_x \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \xi_b$$ con $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ condizionamento della matrice

Lezione 20 (04/11/2020):

Dimostrazione

Teoria:

$$data\ ||\cdot||\ indotta,\ \forall A \in \mathbb{R}^{nxn}\ e\ \forall b \in \mathbb{R}^{nxn} \rightarrow \varepsilon_x \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \varepsilon_b$$

Dichiara: $\varepsilon_x = \frac{||\delta_x||}{||x||}$, $\varepsilon_b = \frac{||\delta_b||}{||b||}$

$$||x|| \geq ...\ ? \qquad \delta b = \overline{b} \rightarrow \overline{b} = b + \delta b$$
$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = \overline{x} - x \rightarrow \overline{x} = x + \delta x$$

$$Ax + A \cdot \delta x = b + \delta b$$

$$A \cdot \delta x = \delta b \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \delta x = A^{-1} \cdot \delta b \rightarrow ||\delta x|| = ||A^{-1} \cdot \delta b|| \leq ||A^{-1}||$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{||A^{-1}||\cdot||\delta b||}{||b|| \,/\, ||A||} = ||A^{-1}|| \cdot ||\delta b|| \cdot \frac{||A||}{||b||}$$

Esempio

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 1001x + 1000y = 2001 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1001 & 1000 \end{pmatrix}$$

$||A||_\infty = 2001$ [sommare righe e prende num max]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ 1001 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ||A^{-1}||_\infty = 1002$$

$$\Rightarrow K_\infty(A) = 2001 \cdot 1002 \simeq 2 \cdot 10^6$$

La matrice risulta mal condizionata (poiché sia la matrice che l'inversa sono molto grandi)

Matrici test (MatLab)

Hilbert

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \\ 1/3 & 1/4 & & \\ 1/4 & & & \end{pmatrix}$$

Wilkinson

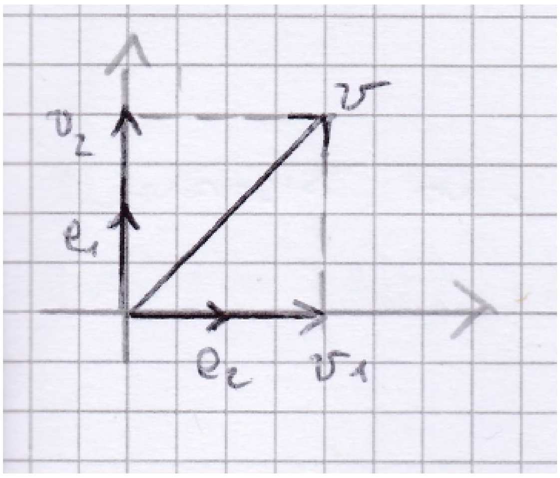
$$W_{7\times 7} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lehmer

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} i/j & j \geq i \\ j/i & j \leq i \end{cases}$$

Lezione 24 (13/11/20):

Vettori



$v = v_1 e_1 + v_2 e_2$

$Dim\ del\ teorema\ \ R(A) = \ < Ae_1, \dots, A_{en} >$

$x \in \mathbb{R}^n \to A_x \in R(A)$

$\downarrow$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow A_x = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) =$

$= x_1 (Ae_1) + x_2 (Ae_2) + \dots + x_n (Ae_n)$

Corollario:

$R(A) \subseteq \mathbb{R}^n,\ R(A)$ è $generata\ da\ n\ colonne\ di\ A \Rightarrow rk(A) = dim\ R(A) \ \leq\ MIN\ (m, n)$

Es.1:

$A = 0\ \ (x \to \forall x)\ \Rightarrow N(A) = \mathbb{R}^n,\ R(A) = \{0\} \quad (rk(A) = 0)$

Es.2:

$A = I \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}\ \ (x \to x) \Rightarrow N(A) = \{0\},\ R(A) = R^n \qquad (rk(A) = n)$

Teoria:

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\,x\,n}\ :\ dim\ N(A) + rk(A) = n$

Corollario 1:

$A\ iniettiva\ \Leftrightarrow N(A) = \{0\} \Leftrightarrow rk(A) = n$

Corollario 2:

$m < n\ \Rightarrow rk(A) \leq min\ (m, n) = m < n \Rightarrow A\ \ non\ iniettiva$

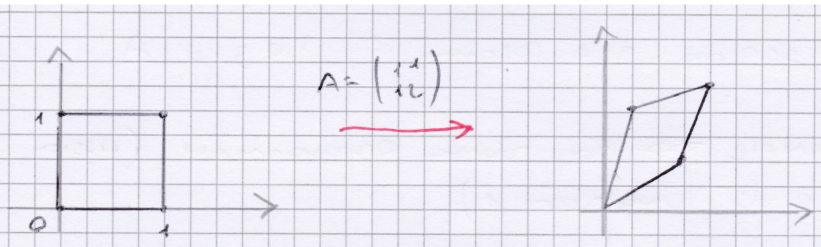
Corollario 3:

$m = n:\ A\ \ iniettiva \Leftrightarrow N(A) = \{0\} \Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow A\ \ surgettiva \Leftrightarrow A\ \ bigettiva\ \Leftrightarrow A\ inv$

$\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

Trasformazioni geometriche con matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



NON CONSERVA ANGOLI E DISTANZE

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

CONSERVATI ANGOLI, NO DISTANZE

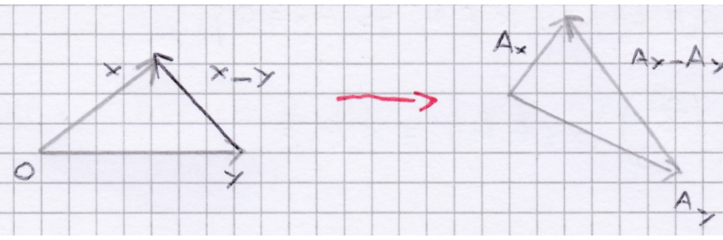
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ISOMETRIA

CONSERVA ANGOLI E DISTANZE

Isometrie in $\mathbb{R}^{n\,x\,n}$

$x\,,\ y\ \epsilon\ \mathbb{R}^n\ \rightarrow distanza\ ||x\ -\ y||_{\ 2}\ (input)\ \rightarrow A_{\ x}\,,\ A_{\ y}\ \epsilon\ \mathbb{R}^n$



$\|Ax - Ay\|_2 = \|A(x-y)\|_2$

$A\ \ isometria\ \ \Leftrightarrow Av\,\epsilon\,\mathbb{R}^n:\ ||Av||_{\ 2} = ||v||_{\ 2}$

Matrici ortogonali

Definizione: $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ $ortogonale\ se\ A^T A = AA^T = I = (\Leftrightarrow A^{-1} = A^T)$

Osservazione: $Considero\ i - esima\ riga\ e\ j - esima\, colonna\ di\ A^T A = I \rightarrow$

$\rightarrow (i - esima\ riga\ di\, A^T)\ \times\ (j - esima\ colonna\ di\ A) = (I)_{i\,j}$

Quindi A è ortogonale ⇔ ha colonne ortonormali (ossia colonne ortogonali e di lunghezza 1)

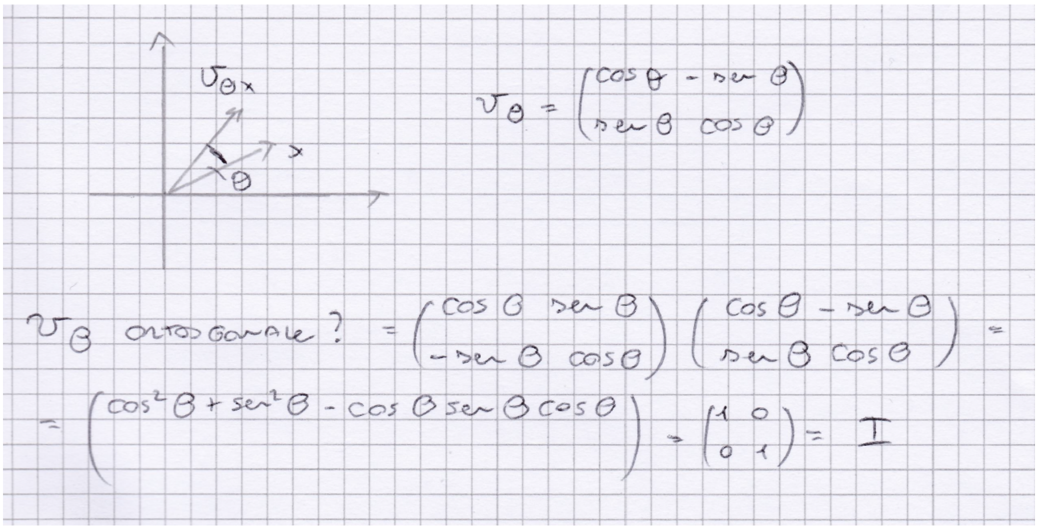
Teoria:

$A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ $ortogonale\ (A^T A = 1) \Leftrightarrow isometrica\, (Av \in \mathbb{R}^n = ||Av|| = ||v||)$

Dimostrazione: $Hp\colon A^T A = I,\ Th\colon\ ||Av||^2 = ||v||^2 \forall v \rightarrow$

$\rightarrow ||Av||^2 = (Av)^T (Av) = v^T (A^T A)v = v^T I v = v^T v = ||v||^2$

Rotazioni in $\mathbb{R}^2$



Lezione 25 (18/11/20):

Rotazioni di Givens in $\mathbb{R}^2$

$G\,(i\,,\,j\,,\,\theta\,)\ \equiv U_{\theta}\ \ nel\ "piano"\ \ < e_{i}, e_{j} >$

$G_{ii} = G_{jj} = \cos\theta = c$

$G_{ij} = \;\; - s$

$G_{ij} = sen\,\theta = s$

Es: $(i < j)$ $G(i, j, \theta) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boxed{c} & & \boxed{-s} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \boxed{s} & & \boxed{c} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad \uparrow i \quad\quad\quad \uparrow j \end{array}$

" " $(i > j)$ $= \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \boxed{c} & & \boxed{s} & \\ & & \ddots & & \\ & \boxed{-s} & & \boxed{c} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$G(i, j, \theta) \cdot x = \begin{pmatrix} x \\ x_{i-1} \\ c x_i - s x_j \\ x_{j+1} \\ x_{j-1} \\ s x_i + c x_j \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow i \\ \\ \\ \rightarrow j \end{array}$

scelgo $\theta = (c \text{ e } s)$

$G(i, j, \theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}$

x_i = pivot (l'unica componente cambiata)

x_j = elemento da alterare

$c = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$; $s = \dfrac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$

$\Rightarrow G(i, j, \theta) \cdot x = \begin{pmatrix} \square \\ \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \square \\ 0 \end{pmatrix}$

Costi fattorizzazione

$Fattorizzazione\ LU\ (\equiv\ Gauss) \rightarrow costo\ per\ nxn\ = \frac{1}{2}n^2\,(m - \frac{n}{3})$

$Fattorizzazione\ QR\ (\equiv\ Givens) \rightarrow costo\ per\ nxn\ = 2n^2\,(m - \frac{n}{3})$ *costa 4 volte gauss*

Proprietà della fattorizzazione QR

Teorema 1: $A \in \mathbb{R}^{m\,x\,n}$, $m \geq n$, $rk(A) = n$ $\quad$ ("$Rango\ massimo$") $\Rightarrow det(R) \neq 0$
Teorema 2:
$\backslash\backslash\ \backslash\backslash\ \Rightarrow Q_{m\,x\,n} = (\,Q\,|\ *\ )\,e\ t.c.\ a\ R(R_0) = R(A)\quad <colonne\ di\ A>$

Riflessioni di Householder

$P = I - 2\,w\,w^t$ dove $w \in \mathbb{R}^m$, $\|w\|_2 = 1$

colonna $\qquad$ stessa colonna messa in riga

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

dato $x \in \mathbb{R}^m$, STUDIO $P \cdot x = (I - 2ww^t)\cdot x = I \cdot x - 2w(w^t \cdot x) \dots$

$\dots \Rightarrow \in \mathbb{R} = x - 2(w^t x)\,w$

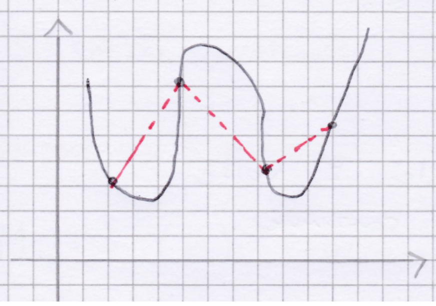
Benvenuto:

Lezione 28 (24/11/20):

Interpolazione

$Punti$: $\{(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\}$

$P_0 = (x_0, y_0), \dots, P_n = (x_n, y_n)$



$$y(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

GRADI DI LIBERTÀ

$a_0, \dots, a_m \qquad m+1$

Si può sempre trovare un polinomio di grado al più n che interpola n+1 punti

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \\
y_2 &= a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 \\
y_3 &= a_3 x_3^3 + a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 \\
y_4 &= a_3 x_4^3 + a_2 x_4^2 + a_2 x_4 + a_0
\end{aligned}$$

4 INCOGNITE

4 equazioni

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x_1 \le x \le x_2 \\ S_2(x) & x_2 \le x \le x_3 \\ S_3(x) & x_3 \le x \le x_4 \end{cases}$$

Def. $Spline\ interpolante\ in\ [a,b]$, $S_i\ [a,b] \to \mathbb{R}$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$

1. $S_{[x_{i-1}, x_i]}$ è $polinomio\ di\ grado\ \le 3$
2. $S \in C^2[a,b]$
   $ovvero$: S è $continua,\ derivabile\ 2\ volte$
3. $S(x_i) = y_i \quad interpolare$

Per il calcolo delle spline

$Calcolare$: $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$Controllare\ il\ numero\ di\ vincoli$

Condizioni di interpolazione

$$S(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (n+1 \text{ condizioni})$$

$$4n - (n+1) = 3n+1$$

$$\lim_{x \to x_i} (\underbrace{S_{i-1}(x)}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(i-1)}) = \lim_{x \to x_i^+} \underbrace{S_i(x)}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(i)}$$

$S \to S'$ derivata

$$\lim_{x \to x_i^-} S'(x) = \lim_{x \to x_i^+} S'(x)$$

$S' \to S''$ derivata seconda

$$\lim_{x \to x_i^-} S''(x) = \lim_{x \to x_i^+} S''(x)$$

Tipi di spline

1. $Spline\ completa: S''(a) = y'\alpha S'(b) = y'b$
2. $Spline\ periodica: S''(a) = S''(b),\ S'(a) = S'(b)$
3. $Spline\ naturale: S''(a) = S''(b) = 0$

Metodo dei momenti

$M_i = S''(x_i) \quad i = 0, \dots, m \qquad m+1$ incognite

S'' ha un grafico che è una spezzata

$$S''_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$S''_{i-1}(x_i) = M_i$, $S''_{i-1}(x_{i-1}) = M_{i-1}$

$S''_{i-1}(x)$ è il pezzo di retta $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$S'_{i-1}(x) = \int S''_{i-1}(x)\,dx = f(x; x_i; x_{i-1}; M_i, M_{i-1}, C_i)$$

$$S_{i-1}(x) = \int S'_{i-1}(x)\,dx = g(x, x_i, x_{i-1}, M_i, M_{i-1}, C_i, D_i)$$

C_i e D_i sono costanti di integrazione

Imponendo le condizioni di interpolazione otteniamo un sistema:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

x_i $\qquad\qquad$ y_i, x_i

La complessità per risolvere il sistema è O(n) con n equazioni, ciascuna che coinvolge 3 soli valori delle incognite.

Proprietà di minima curvatura

$g \in C^2\,[a, b]$

Curvatura media è data da:

$$\int_a^b | g^m(x) |^2 dx$$

Proprietà delle spline

$$x = \{g \in C^2 [a, b]: g (x_i) - y_i\}$$

La spline naturale ha la curvatura più bassa tra tutte le g e x.

Lezione 29 (26/11/20)

Diagonalizzazione

Autovalori e Autovettori:

Sia A una matrice A$\in R^{nxn}$: un vettore v ≠ 0 $\in R^n$ e uno scalare λ$\in R$si dicono rispettivamente autovettore e autovalore quando:

Av=λv

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{bmatrix}$$ prima idea di semplificazione

$(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ coppia autocoppia

Esempi:

Esempi:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ simmetrica $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Ae_1 = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{3}_{\lambda}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}$$

(λ, v) autocoppia $\quad \left(3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1$$

$\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

2. Una matrice si dice stocastica per righe se la somma degli A_{ij} di ogni riga è 1.

2) Matrice stocastica per righe se la somma degli A_{ij} di ogni riga è 1

es: $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha sempre $\lambda = 1$

$v = (1, \dots, 1)^T$ autocoppia

3) $A = \lambda I \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda \neq 0$

$Av = \lambda I v = \lambda v \qquad \forall v \qquad (\lambda, v)$ autocoppie

4. A matrice di Householder se:

4) A mat. di Householder $\quad A = I - 2ww^T$

v sta sul piano (specchio) $Av = v \qquad \lambda = 1 \qquad \forall \perp w$

$Aw = -w \qquad \lambda^2 = 1 \qquad$ w autovettore $\qquad$ 1 solo vettore w

Definizione: Autospazio relativo all'autovalore λ:

$$V_\lambda := \text{span}(V_1, \dots, V_k)$$

$V_1, \dots, V_k$ sono vettori indipendenti di autovalore λ

Consideriamo: v_1 e v_2 t.c. $Av_1 = \lambda v_1$ e $Av_2 = \lambda v_2$

$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $A(\alpha v_1) = \alpha A v_1 = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1)$ (unito il vettore nullo)

Gli autovettori associati allo stesso autovalore formano un autospazio

Def: molteplicità geometrica di un autovalore λ.

$V_\lambda \longrightarrow \dim(V_\lambda)$

Osservazione: la molteplicità geometrica corrisponde al numero di generatori indipendenti di Vλ.

Osservazione: A, A^2, A^3, …, A^k hanno gli stessi autovettori di A

V autovettore di A. $A^2 v = AAv = A\lambda v = \lambda A v = \lambda\lambda v = \underbrace{\lambda^2}_{\text{autovalore di } A^2} v$

αA, $A + \alpha I$, A^{-1} (se esiste) hanno gli stessi autovettori

Calcolo di autovalori e autovettori:

Procedura di calcolo generale:

Osservazione: se conosciamo V autovettore possiamo trovare λ autovalore.

$$Av = \lambda v \qquad v^T A v = v^T \lambda v$$

$$v^T A v = \lambda v^T v \iff \lambda = \underbrace{\frac{v^T A v}{v^T v}}_{\text{quoziente di Raylighh}}$$

Ma in generale non abbiamo né autovettore né autovalore quindi:

$Av = \lambda v$ λ scalare, v vettore

$Av - \lambda v = 0$

$Av - \lambda I v = 0$

$(A - \lambda I)v = 0$

λ è tale che $\exists\, v \neq 0$ che annulli $(A-\lambda I)$ dentro nel $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

$A-\lambda I$ (matrice quadrata) non è invertibile

In pratica stiamo chiedendo che esista una combinazione lineare

$v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$$v_1 \left[A-\lambda I\right]_{i1} + v_2 \left[A-\lambda I\right]_{i2} + \dots + v_m \left[A-\lambda I\right]_{im} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

le colonne di $A-\lambda I$ sono dipendenti

$\Rightarrow A-\lambda I$ non invertibile

$\Leftrightarrow \boxed{\det(A-\lambda I)=0}$ formula per determinare gli autovalori

Quindi la formula per determinare gli autovalori è:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Teorema: λ è autovalore di a se e solo se $\det(A-\lambda I))=0$

Esempi:

Esempi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

la possibilità di decomporre il polinomio in fattori ci restituisce gli autovalori

$\lambda=3$ e $\lambda=1$ sono autovalori.

Calcolo degli autovalori e autospazi:

$\lambda = 3 \quad (A - 3I)\,v = 0 \qquad \exists\, v \neq 0$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$ Esprimono la stessa condizione $x = y$

$v = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ al variare di $x \neq 0$ sono autovettori di autovalore 3

$$\lambda = 1 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A - \lambda I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$v' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x$ al variare di $x \neq 0$ sono autovettori

Autospazi $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Definizione: det(A-λ I) è detto polinomio caratteristico della matrice A.

Osservazione: il polinomio caratteristico ha grado n dove $A \in R^{nxn}$

Corollario: le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori della matrice A.

Teorema fondamentale dell'algebra:

Ogni polinomio di grado n ha n radici complesse ciascuna con la propria molteplicità.

Esempio:

Es: $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$ → $\lambda = 1$ con molteplicità 2

$\lambda''' = 3$ → molteplicità 1

Per avere molteplicità 2 $p(\lambda) = \ldots (\lambda - 1)^2$

Definizione: la molteplicità delle radici del polinomio caratteristico è detta molteplicità algebrica degli autovalori.

Teorema: la molteplicità geometrica è sempre minore o uguale della molteplicità algebrica:

$$\dim(V_{\bar{\lambda}}) \leq \quad p(\lambda) = \dots (\lambda - \bar{\lambda})^q$$

Lezione 31 (01/12/2020):

Autovalori complessi

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \text{ è un angolo fisso}$$

$$\det(A - \lambda I) \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} \cos - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$$

$det\ (A - \lambda I) = (cos\,\theta - \lambda^2) + sin\,\theta = 0$

$(cos\,\theta\ - \lambda^2) = \ - sin^2\,\theta$

$cos\,\theta - \lambda = \pm\, i\ sen\,\theta \rightarrow \lambda = cos\,\theta \pm i\ sen\,\theta$

$$A = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) I = \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \sin\theta & -i\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sin\theta \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

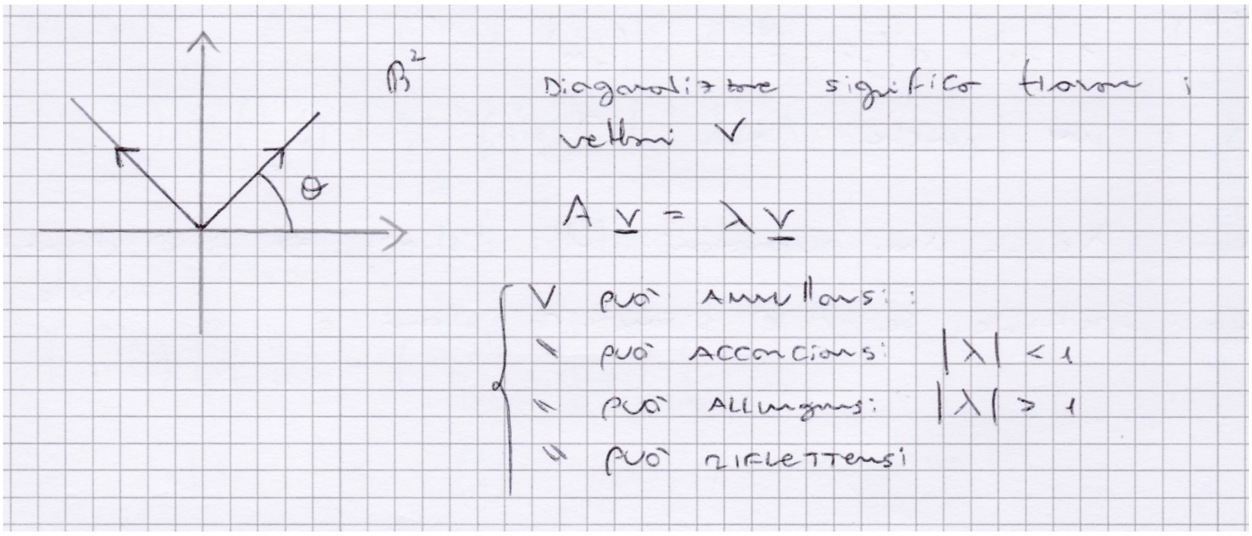
$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -ix - y = 0 & (1) \\ x - iy & (2) \end{cases}$$

La prima molteplicità è uguale alla seconda

$$x = 1 \qquad y = -i \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Autospazio

$i\,(V(cos\,\theta\,+\,sin\,\theta))\,=\quad<\,(\frac{1}{-i})\,>$



Teoria: $A\,=\,A^T\,\Rightarrow\,\lambda\,\epsilon\,\mathbb{R}$ ci sono solo autovalori reali

Dimostrazione : $r\,(V)\quad=\frac{V^TAV}{V^TV}$ *quoziente di Reyleigh*

$V^T\rightarrow V^*\qquad V(\frac{V_1}{V_n})\qquad\qquad V^T\,=\,(V_1\,,\,...\,,\,V_n)$

$V^*=(V_1\,,\,...\,,\,V_n)$ *dove Vi è il complesso coniugato*

$Vi\,=\,ai\,+\,ibi\,Vi\,=\,ai\,-\,ibi$

$V^TV\,=V^2i\,+...+V^2n\,=\,||V||^2\,\geq\,0$

$V\,=\,(a\,+\,ib\,,\,c\,+\,id)$

$V\,=\,(a\,+\,ib\,,\,c\,+\,id)\,(\frac{a+ib}{c+id})\,=\,(a\,+\,ib)^2\,+\,(c\,+\,id)^2\,=$

$=\,Re\,+\,i\,Im\,\notin\,\mathbb{R}$

$V^*V\,=\,(a\,+\,ib\,,\,c\,-\,id)(\frac{a+ib}{c+id})\,=a^2\,+b^2\,+c^2\,+d^2\,\geq\,0$

$r\,(v)\,=\frac{V^*AV}{V*V}=\frac{V^*\lambda V}{V^*V}=\,\lambda\frac{V^*V}{V*V}$

$\lambda^*\,=\,(\frac{V^*AV}{V*V})^*\,=\frac{VAV}{VV^*}=\frac{V^*A^TV}{V^*V}=\frac{\lambda V^*V}{V^*}$

Il complesso coniugato di λ é λ

λ è reale $(\lambda\,\epsilon\,\mathbb{R})$

Teoria: $A = A^T \Rightarrow \exists\, V \;\; ortogonale\text{:} \;\; V \Lambda V^{-1} = A$

Dimostrazione: $A = V \Lambda V^{-1}$ dobbiamo dimostrare:

1. λ ha molteplicità geometrica ≥ 2
   Autospazio è generato da almeno 2 vettori (scegliendo una base ortogonale)

2. λ ha molteplicità 1

Supponiamo $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\qquad A v_i = \lambda_i \cdot v_i \qquad \|v_i\| = 1$

$$A v_j = \lambda_j \cdot v_j \qquad \|v_j\| = 1$$

$$v_i^T A v_j = v_i^T \lambda_j v_j = \lambda_i v_i^T v_j \qquad v_i^T v_j \in \mathbb{R}$$

$$v_j^T A v_i = v_j^T \lambda_i v_i = \lambda_i v_j^T v_i \qquad v_j^T v_i \in \mathbb{R}$$

$$(v_i^T A v_j)^T = v_j^T A^T v_i = v_j^T A v_i$$

$$\lambda_j v_i^T v_j = \lambda_i v_j^T v_i \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$$

Ma $\lambda_i \neq \lambda_j$ diversi $v_i^T v_j = 0$

Lezione 34 (10/12/2020):

Rango numerico

$$A = U \begin{pmatrix} 100 &&&&& \\ & 50 &&&& \\ && 10 &&& \\ &&& \frac{1}{100} && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} V^T \qquad \#\{\sigma_i > 0\} = 4$$

$$\hat{A} = U \begin{pmatrix} 100 &&&&& \\ & 50 &&&& \\ && 10 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} V^T$$

RANGO ALGEBRICO

$$\#\{\sigma_i > 0\} = 3$$

$$\| A - \hat{A} \| = \frac{1}{100}$$

$$A - \hat{A} = U \left[\begin{pmatrix} 100 &&&&& \\ & 50 &&&& \\ && 10 &&& \\ &&& \frac{1}{100} && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 &&&&& \\ & 50 &&&& \\ && 10 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} \right] V^T$$

$$= U \begin{bmatrix} 0 &&&&& \\ & 0 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& \frac{1}{100} && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{bmatrix} V^T$$

Diadi: strumento per la definizione di un rango numerico

$$A = U \Sigma V^T = (u_1 | \dots | u_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 && \\ & \ddots & \\ && \sigma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \; v_1^T \; \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \; v_n^T \; \text{---} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1 | \quad | u_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot v_1^T \\ \sigma_2 \cdot v_2^T \\ \vdots \\ \sigma_p \cdot v_p^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[(u_1 | 0 \dots 0) + (0 | u_2 | 0 \dots 0) + \dots + (0 \dots 0 | u_m) \right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hline \sigma_2 v_2^T \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \sigma_p v_p^T \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$= \delta_1 \omega_1 V_1 T + \delta_2 \omega_2 V_2 T + \dots + \delta_p \omega_p V_p T$

Lezione 36 (15/12/2020):

Metodo delle potenze

1. Converge all'autovalore di massimo modulo
2. Converge se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$
3. La velocità è uguale a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

Per S circonferenza:

$$Vo = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

$$Vo \quad AVo = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \lambda_2 \alpha_2 x_2 + ... + \lambda_n \alpha_n x_n$$

$$A^2 Vo = \lambda_1^2 \alpha_1 x_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 x_2 + ... + \lambda_n^2 \alpha_n x_n$$

$$Vk = A^k Vo = \lambda_1^k \alpha_1 x_1 + \lambda_2^k \alpha_2 x_2 + ... + \lambda_n^k \alpha_n x_n$$

$$Vk = \lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k \alpha_2 x_2 + ... + (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k \alpha_n x_n)$$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} Vk =$$

$$\alpha_1 x_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k \alpha_2 x_2 + (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k \alpha_3 x_3 + ... + (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k \alpha_n x_n$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n| \geq 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} Vn = \alpha_1 x_1$$

$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ è il più lento ad andare a 0

La velocità di congruenza del metodo delle potenze è $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$

Metodo delle potenze inverse

Calcolare autovalori e autovettori non di massimo modulo *(eh?)(lo ho copiato dagli appunti del prof)*
Supponiamo di prendere $p \in \mathbb{R}$ t.c. p non è autovalore di A diagonalizzabile

$det\,(A - pI) \neq 0 \;\; A - pI$ è invertibile

$(A - pI)^{-1}$ esiste

$(A - pI)v = \lambda v - pv$

$= (\lambda - p)v$

$(A - pI)^{-1}(A - pI) = I$

$(A - pI)^{-1}(A - pI)\, n = n \qquad \forall n \in \mathbb{R}^n$

$(A - pI)^{-1}(A - pI)v = (A - pI)^{-1}(\lambda - p)v$

$(\lambda - p)(A - pI)^{-1}v = v$

$(A - pI)^{-1}v = \frac{1}{\lambda - p}v$

$(A - pI)^{-1}$ha autovalore $(\lambda - p)^{-1}$e autovettore v

Supponiamo A con (λ_1, v) autocoppia

Trovare $(A - pI)^{-1}$ $(\frac{1}{\lambda - p}, v)$ autocoppia, dove p non è autovalore di A

Applichiamo il metodo delle potenze a $(A - pI)^{-1}$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ saranno gli autovalori di $(A - pI)^{-1}$

Troviamo μ_1

$\mu_1 = \frac{1}{\lambda - p}$

$\lambda = p + \frac{1}{\mu_1}$

$|\lambda - p| = \left|\frac{1}{\mu_1}\right| < \left|\frac{1}{\mu_2}\right| \leq \left|\frac{1}{\mu_3}\right| \leq \dots$

λ è l'autovalore più vicino a p

Rossi:

Lezione 2 (23/09/2020):

Matrici e le loro operazioni

K può essere = Q, R, C (reali, razionali e complessi)

Matrice M con entrate in K

$$m \times n \qquad\qquad a_{ij} \in K$$

- **m** : numero righe
- **n** : numero colonne
- **i** : posizione riga
- **j** : posizione colonna

$$M \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

es.

$$M \quad 2 \times 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L’insieme delle matrici di taglia $m \times n$ in K si indica come

$$M_{mn}(K) \quad \text{oppure} \quad K^{m\,x\,n}$$

La diagonale della matrice è a_{11}, a_{12}, a_{13} ...

Matrici particolari

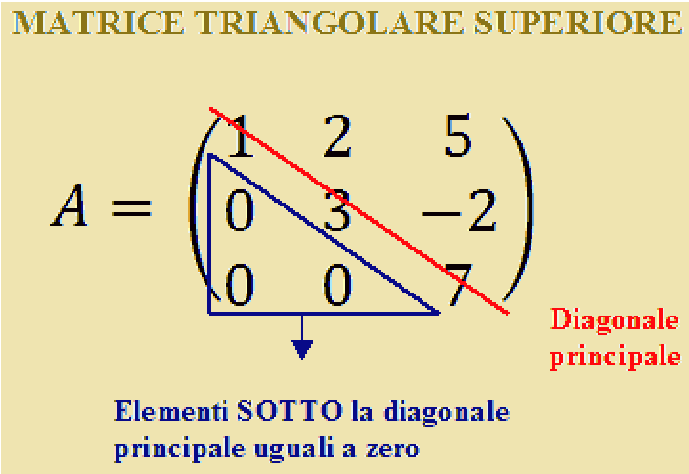
1. Matrice **nulla** (ha tutti i numeri = 0)
2. Matrici **quadrate** (n = m) $M_n(K)$
3. Matrici **riga** o **colonna**

$R_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$

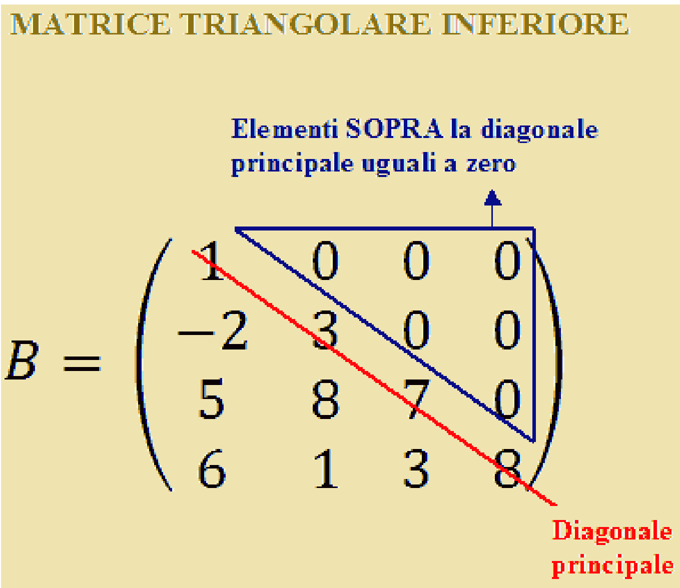
$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

4. Matrici **triangolari**

Triangolari superiori



Triangolari inferiori



5. Matrici **diagonali** *(solo quadrate)*
   Ha tutti zero sopra e sotto la diagonale (la diagonale può avere numeri diversi da 0)

6. Matrice **identica** (I_n)
   Ha solo numeri 1 sulla diagonale tutti gli altri sono = 0

7. Matrice **trasposta**
   E' una matrice $m \times n$ ottenuta invertendo le righe con le colonne

8. Matrice **simmetrica**

Si dice simmetrica se ribaltando si ottiene la stessa matrice
$A = A^T$

Operazioni tra matrici

Somma

$$A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$$
$$B = (b_{ij}) \in M_{mn}(K)$$

Devono avere lo stesso numero di righe e di colonne

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{mn}(K)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & --- & a_{12}+b_{12} & --- & a_{1n}+b_{1n} \\ | & & & & | \\ a_{m1}+b_{m1} & --- & a_{m2}+b_{m2} & --- & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Proprietà:

- Commutativa - $A + B = B + A$
- Associativa - $A + B + C \rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

Moltiplicazione per scalare

$\lambda \in K$ $\quad\quad A \in M_{mn}(K)$

$\lambda A := (\lambda a_{ij})$ *Tutte le entrate sono moltiplicate per* λ

Moltiplicazione righe x colonne

n = m, prendo 2 stringhe (1 riga e 1 colonna) della stessa lunghezza

$R_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

$C_j = (b_{1j})$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Si moltiplicano gli elementi di posto corrispondente

$R_i C_j = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}$

Lezione 3 (25/09/2020):

Prodotto di Matrici

Se moltiplico 2 matrici A e B, **il numero di colonne della prima deve equivalere al numero di righe della seconda:**

$$A = m \times n \qquad\qquad B = n \times p$$

La matrice risultante C avrà come numero di righe, quello della prima e come numero di colonne, quello della seconda:

$$C = m \times p$$

E i risultati della matrice saranno frutto di una moltiplicazione righe x colonne:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{con } c_{ij} = R_i^A \cdot C_j^B$$

Ecco un esempio:

ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \in M_{22} : \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$c_{11} = R_1^A \cdot C_1^B = -1 - 1 + 4 = 2$$
$$c_{12} = R_1^A \cdot C_2^B = 0 - 1 + 2 = 1$$
$$c_{21} = R_2^A \cdot C_1^B = 0 + 1 + 6 = 7$$
$$c_{22} = R_2^A \cdot C_2^B = 0 + 1 + 3 = 4$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Proprietà del Prodotto

1) Il prodotto non è commutativo:
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2) Il prodotto è associativo:
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3) Il prodotto è distributivo:
$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$
$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

4) Il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale.

5) Il prodotto di due matrici simmetriche **non** è (in generale) una matrice simmetrica.

6) La matrice identica (I_n) è l'**elemento neutro**:
$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Proprietà della Matrice Trasposta (A^T) rispetto alle operazioni di somma e prodotto

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Matrici Invertibili

In K = (Q, R, C) ogni elemento non nullo è invertibile, questo perché la moltiplicazione di ogni elemento non nullo per il suo reciproco fa 1, che è l'elemento neutro.

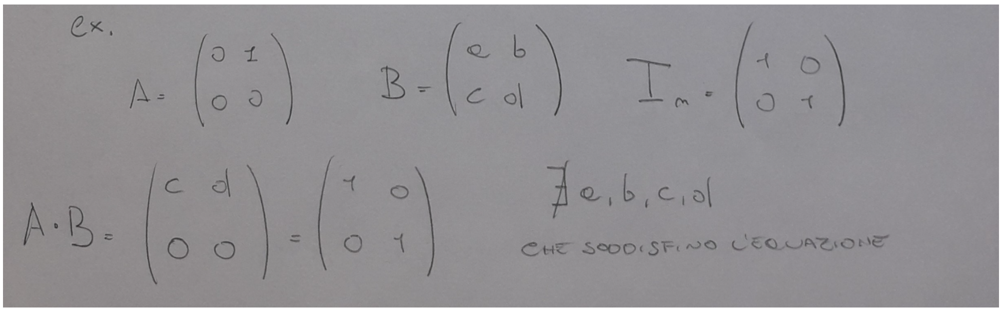
Con le matrici funziona più o meno allo stesso modo, con la differenza che:
- **Non tutte le matrici sono invertibili.**
- **La matrice deve essere quadrata**
- **L'elemento neutro è la matrice identica**

Quindi, una matrice quadrata A è detta invertibile se esiste una matrice B **della stessa taglia** tale che:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

La matrice inversa B è detta **inversa** ed è anche indicata con il simbolo A^{-1}

Non tutte le matrici sono invertibili, eccone un esempio:



Proprietà delle Matrici Invertibili

Definiamo con A e B due matrici invertibili:

1) A^{-1} è invertibile ed $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A \cdot B)$ è invertibile e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{cases} (A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = I_m \\ A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A = I_m \\ A \cdot I_m \cdot A^{-1} = I_m \Rightarrow I_m = I_m \end{cases}$$

NOTAZIONE

INDICHEREMO CON

$$Gl_m(k) = \{A \in M_m(k) \mid A \text{ È INVERTIBILE}\}$$

Matrici Elementari

Le Matrici Elementari sono matrici **invertibili per definizione.**

1) Matrice Identica I_n

2) Matrice E_{ij} ottenuta da I_n scambiando $R_i\ con\ R_j$ con $i \neq j$

$$ex.\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 \leftarrow R_3 \Rightarrow E_{23}$$

3) Matrice $E_i(\lambda)$ ottenuta moltiplicando $R_i\ con\ \lambda$

$$E_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Matrice $E_{ij}(\lambda)$ ottenuta eseguendo la seguente trasformazione: $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$

ex. $E_{23}(2) \Rightarrow R_2 \to R_2 + 2R_3$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lezione 5 (30/09/2020):

Operazioni elementari su $A \in M_{mn}(K)$

- $E_{ij} \cdot A \to$ si ottiene una matrice B, ottenuta da A scambiando $R_i \leftrightarrow R_j$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} \cdot A$$

- $E_{ij}(\lambda) \cdot A \to$ si ottiene una matrice B partendo da A $(R_i \to R_i + \lambda R_j)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + 2R_1$$

- $E_i(\lambda) \cdot A \to$Si ottiene una matrice B dove la riga R_i è moltiplicata per λ

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

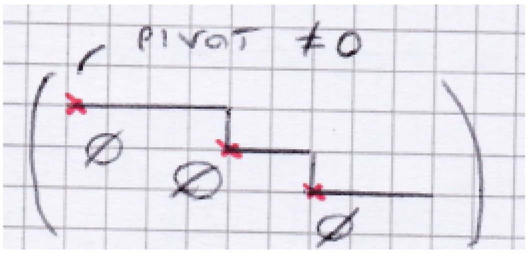
$$R_2 \to 2R_2 \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = E_2(2) \cdot A$$

Operazioni elementari

- $R_i \leftrightarrow R_j$
- $R_i \leftrightarrow \lambda R_i$
- $R_i \to R_i + \lambda R_j$

Riduzione di Gauss

Scopo: Data $A \in M_{mn}(K)$ e usando solo matrici elementari, ridurre A ad una matrice a "scalini".



La matrice a "scalini" (o ridotta per righe) è una matrice dove il primo elemento della riga (non nullo) si trova a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga i-esima.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

devono diventare $= \emptyset$

Pertanto: $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{6} & 2 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2$

Algoritmo di Gauss

Sia $A_{m\,n}$ supponiamo che la prima colonna di A non sia nulla, in caso contrario iniziare l'algoritmo dalla prima colonna non nulla.

Passo 1 - Possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$, altrimenti operiamo uno scambio di riga

es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} \neq 0$ PIVOT

Passo 2 - Usando il pivot della colonna otteniamo tutti "0" sotto di esso.

- $R_i \leftrightarrow \lambda R_i$
- $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$

Passo 3 - Trascurare prima riga e prima colonna e ripetere la procedura (passo 1,2) per la sottomatrice rimanente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$
$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 + R_2$
$R_4 \rightarrow R_4 - R_2$

trascurabile perché ha tutti zeri

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot (< n° di righe)

La matrice a scalini non è univoca, ma il numero dei pivot non cambia.

Matrice totalmente ridotta

Come la ridotta a “scalini” solo che in questo caso tutti i pivot devono essere = 1 e **sopra e sotto** i pivot devono esserci zeri.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad R_2 \to \frac{1}{3} R_2 \qquad R_3 \to \frac{1}{2} R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{9}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 \to R_2 + \frac{9}{3} R_3 \qquad R_1 \to R_1 - 3 R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_1 \to R_1 + 2 R_2$$

Utilizza riga

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \text{MATRICE TOTALMENTE RIDOTTA}$$

Lezione 6 (2/10/20)

A ∈ $M_{mn}(k)$ ➝ B ➝ Matrice a scalini (ridotta) ➝ totalmente ridotta

Ovvero partendo da una matrice attraverso operazioni elementari la si può trasformare in una matrice totalmente ridotta ovvero una matrice a scalini avente tutti 0 nella colonna dei pivot.

Le operazioni elementari sono:

$R_i \leftrightarrow R_j$	Scambio la riga i con la riga j
$R_i \to \lambda R_j$	Rimpiazzo la riga i con la riga j moltiplicata per λ≠0

$R_i \to R_i + \lambda R_j$ Sommo alla riga i la riga j moltiplicata per λ

Sia A ∈ $M_n(k)$, come può essere la sua totalmente ridotta?

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{ridotta} \\ \times \text{ righe,} \\ 2 \text{ pivot}}}$ ma io voglio la tot ridotta.

parto dall'ultima riga

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{5} R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ questa è la tot. ridotta, 1 pivot

In generale la risposta

$A_{m \times m}$ <
- I_m (matrice identica) se n° pivot = n° righe
- $(0 \dots 0)$ n° pivot < n° righe

Una matrice $A_{m \times n}$ è invertibile se esiste una matrice B, che chiameremo A^{-1}, tale che:

$$B \times A = I \text{ e } A \times B = I$$

Teorema:

Sia A una matrice quadrata, sono equivalenti:

- A è invertibile
- La totalmente ridotta di A è la matrice identica

Spiegazione:

La totalmente ridotta di una matrice quadrata è una matrice identica, se sulla matrice identica facciamo le stesse operazioni che abbiamo fatto su A per trovare la sua totalmente ridotta otteniamo A^{-1}.

Nell' es. precedente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ determiniamo A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow R_2 \to R_2 + R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{5} R_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Risoluzione dei sistemi lineari con l'algoritmo di Gauss:

Un sistema lineare con n incognite $x_1, \dots, x_n$ e m equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Con $a_{ij}, b_i \in$ k

Possiamo associare la matrice:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice dei coeff. delle incognite}}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{colonna dei termini noti}$$

Se B = $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema si dice omogeneo

Esempio:

es: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \quad 0 \end{cases}$

$n = 4 \qquad m = 2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il sistema lineare nella forma “matriciale”:

$$A \times X = B$$

<u>Osservazione:</u> se A è una matrice quadrata il numero di incognite è uguale al numero delle equazioni.

Se A è invertibile, $X = A^{-1}B$ non ha soluzioni.

Esercizio:

es: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ ← é invertibile $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\exists! \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 26 \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 9 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 26 \end{matrix}$

Cramer ……

Le soluzioni del sistema non cambiano se:

1) Invertiamo l'ordine di due equazioni $R_i \leftrightarrow R_j$
2) moltiplichiamo una o due equazioni per λ $R_i \rightarrow \lambda R_j$
3) Operiamo algebricamente (con somme e differenze) sulle equazioni $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$

Dato $AX = B$

$\uparrow$ matrice dei coefficienti

$(A|B) = \left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$ matrice completa del sistema.

$$\Downarrow$$

le soluzioni del sistema non cambiano se operiamo la riduzione di Gauss sulle righe.

Lezione 8 (07/10/20)

Osservazioni

- Se scambiamo due equazioni del sistema le soluzioni non cambiano.
  $R_i \leftrightarrow R_j$ su (A | B)
- Se moltiplichiamo un'equazione per $\lambda \neq 0$, le soluzioni non cambiano.
  $R_i \leftrightarrow \lambda R_j \quad \lambda \neq 0$
- Analogamente per $R_i \leftrightarrow R_i + \lambda R_j \qquad \lambda \in R$

Esempio

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$(A|B) =$ (ordine $x_1, x_2, x_3, \dots$)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ridotta}]{\text{matrice}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \text{ — INCOGNITE PIVOTALI} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad \cdot \quad - x_4 = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad x_3 - 3x_4 = 3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 4x_4 = -2 \end{cases}$$

partire dal fondo

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 + 1 = -x_2 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 3 + 3x_4 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$S = \{(-x^{2} + \frac{1}{2}, x_2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) / x_2 \in R\}$ *Insieme delle soluzioni*

∞^1 soluzioni (a causa della variabile libera x_2)

L'esponente "1" dell'infinito è dato da: n°incognite - n°pivot (4-3)

Teorema

$Ax = B$ Ammette soluzioni (compatibile) ⇔nell'ultima matrice ridotta di (A | B) non esistono pivot nell'ultima colonna.

Sia Ax=B un sistema compatibile, allora:
Se p= n°pivot (≤n)
n= n° incognite

- p=n ∃! Soluzione (esiste una sola soluzione)
- p<n ∃ ∞^{n-p} soluzioni

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$Ax = 0$ è sempre compatibile

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 3x_3 = 3x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$S = \{(-3x_4, 3x_3 + 3x_4, x_3, x_4) / x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$\exists\ \infty^2$ soluzioni

Sistema con parametro

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ a x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + a x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Q: Discutere l'esistenza delle soluzioni al variare di $a \in R$ e determinare nel caso esistano.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 4-a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} a \neq 1 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a & -a^2-a+6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{array}$$

n° pivot = 3
n° incognite = 3

Non esistono pivot nell'ultima colonna quindi il sistema ammette una sola soluzione ($n = p \rightarrow \exists!$)

Discussione casi particolari

• Si sostituisce $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right)$$

Se $a = 1$ $\nexists$ soluz.

Se $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\exists$ ∞^1 soluzioni

<u>Riepilogo:</u>

$a \neq 1, 2 \qquad \exists!\ Sol.$

$a = 1 \qquad \notin\ Sol.$

$a = 2 \qquad \exists\ \infty^1\ Sol.$

Determiniamo le soluzioni
Si reimposta il sistema partendo dalla matrice iniziale

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ (1-a)x_2 + (2-a)x_3 = 2-a^2 \\ (2-a)x_3 = 6-a-a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a - \frac{a-4}{1-a} - a - 3 + a \ \ldots \\ (1-a)x_2 + (6 - a - a^2) = 2 - a^2 \qquad x_2 = \frac{-4+a}{1-a} \\ x_3 = \frac{6-a-a^2}{2-a} = \frac{(2-a)(a+3)}{2-a} = a+3 \end{cases}$$

$S = (\ldots, \frac{-4+a}{1-a}, a + 3) \qquad \forall a \neq 1, 2$

Reimposta il sistema sulla matrice per a = 2

Sia $a = 2$ $\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \, x_3 = 2 \\ -x_2 \cdot = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -2 - x_3 + 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$S = \{(-x_3, 2, x_3) / x_3 \in R\} \quad \infty^1 \, Soluzioni$

Lezione 9 (9/10/20)

Determinante:
è un numero associato a una matrice quadrata e ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche. Si indica con |A| e si calcola in modi diversi in base alla dimensione della matrice A.

2x2
si moltiplicano le diagonali e si sottraggono tra di loro
es.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = (1\cdot 5)-(3\cdot 4) = 5-12 = -7$$

$$\det\begin{pmatrix}6 & 12\\ 3 & 6\end{pmatrix} = (6\cdot 6)-(12\cdot 3) = 36-36 = 0$$

3x3 o superiori
si utilizzano diverse regole:

<u>regola di Sarius</u>

Regola di Sarrius

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})$$

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}$$

<u>regola di Laplace</u>

Regola di Laplace

per ogni i tra 1 e n, $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, |A_{ij}|$

Il determinante di una matrice quadrata A di ordine n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi a_{ij} di una riga (o colonna) qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici A_{ij}.

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \cancel{0 \cdot A_{21}} + 1 \cdot A_{22} + \cancel{0 \cdot A_{23}} + \cancel{0 \cdot A_{24}}$$

$$\rightarrow \det A = A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lezione 12 (16/10/20)

Complemento algebrico

- Sia A una matrice quadrata:
  A è invertibile $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

- Sia A matrice quadrata, diciamo complemento algebrico dell'elemento:
  $C_{ij} = (-1)^{1+j} |A_{ij}|$
  Sottomatrice n-1 x n-1, ottenuta cancellando una riga e una colonna

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

complemento algebrico

Matrice aggiunta di A

$A^* = (C_{ij})^T$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(LAPLACE) = $A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot I_n$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 I_3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

Rango (o caratteristica) di una matrice A mxn

Sia A m x n, un minore di ordine r è una sottomatrice di A r x r (ottenuta da A considerando r righe e r colonne)

Es.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Minore di ordine 2

$\binom{4}{2}$ $\binom{3}{2}$

- Minore di ordine 3

$\binom{4}{3}$ $\binom{3}{3} = 4$

$\exists$ minori di ordine 4 ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Minori di ordine 1 : 9
- Minori di ordine 2 :

$\binom{3}{2}$ $\binom{3}{2}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Minori di ordine 3 :

In questo caso essendo $|A| \neq 0$

Il rango di A è 3

DEF. Sia A una matrice m x n, diciamo rango e lo denotiamo con rk(A) (o ρ(A)) l'operatore minore di A con determinante non nullo.

$$rk(A) \leq mn(m, n)$$

Osservazione: A matrice quadrata n x n

$$rk(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \text{ (rango max)}$$

Dalla definizione A m x n:

$$rk(A) = r \quad se$$

- $\exists$ un minore di ordine r di A con determinante $\neq 0$
- Ogni minore di A di origine $\geq r + 1$ (se $\exists$) ha determinante nullo
  per la regola di laplace basta che abbiano det.= 0 quelli di ordine = r +1

Teorema di Kronecker

$rk(A) = r$ *se*

- $\exists$ un minore di ordine r di A con determinante $\neq 0$
- Ogni minore di r +1 che è ottenuto orlando il minore di ordine r che avete scelto che ha det. nullo

Rango di una matrice a scalini

Es.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A) = 3 = n° \, pivot$

$rk(A) < 4 \quad \nexists \, minori \, di \, ordine \, 4 \, con \, det \neq 0$

Considerando il minore ottenuto con le righe e le colonne contenenti i pivot:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Lezione 14 (21/10/20)

Recap rango

$A \ m \, x \, n \ \rightarrow rk(A) \ \leq \ MIN(m, n)$

- Come si calcola $rk(A)$?

- **Riduzione di Gauss**
  - $rk(A)$ = n° pivot
  - $rk(A)$ = r *se*
    - Esiste un minore di ordine **r** con determinante non nullo
    - Tutti i minori di ordine **r+1** contenenti il minore di ordine scelto hanno determinante = 0

Sistemi lineari

$A \, x \ = \ B \qquad A \, m \, x \, n$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad$ Se $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema si dice omogeneo

Teorema di Cramer *(solo sistemi quadrati, num eq. = num incognite)*

$A \, x \ = \ B \; ammette \; una \; soluzione \ \Leftrightarrow \ |A| \ \neq \ 0$

Se $|A| \ \neq \ 0$ allora A è invertibile

$$A \, x \ = \ B \quad \Rightarrow \quad x \ = A^{-1} \cdot B$$

$$x \ = \frac{1}{|A|} A^{*} \cdot B$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

L'unica soluzione è $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

i-esima colonna di a

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

3 incognite, 3 equazioni $\rightarrow$ Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$$

Per il teorema di Cramer $\exists!$ soluzione

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{5}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{5}$$

Q: se $|A| = 0$?

- $\nexists$ sol.
- $\exists\, \infty$ sol.

Nel caso generale: $m \times n$

Teorema di Rouché - Capelli

$Il\ sistema\ \ A\,x\ =\ B\ \ ha\ soluzioni\ \ \Leftrightarrow\ \ rk(A)\ \ =\ \ rk(A|B)$

La dimostrazione cambia:

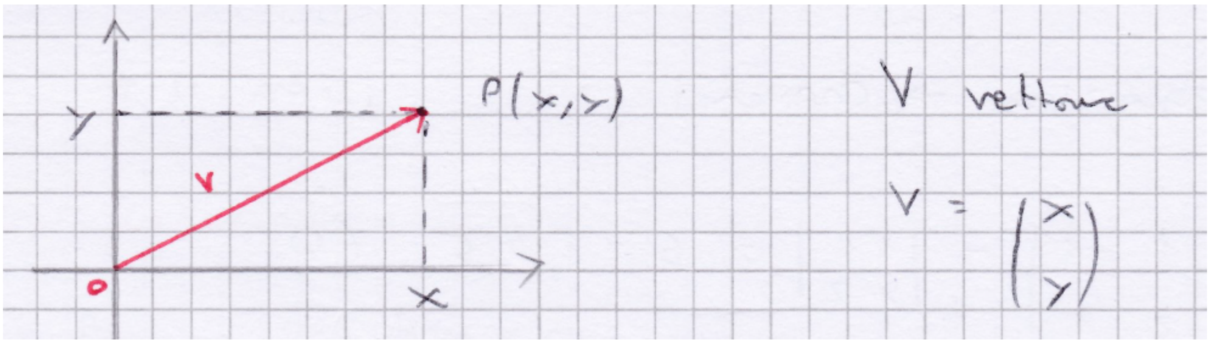
- $rk(\,)\ \ =\ \ n°\ pivot\ della\ ridotta$
- $A\,x\ \ =\ \ B\ ha\ soluzione\ \ \Leftrightarrow \nexists\ pivot\ nell'ultima\ colonna\ della\ riduzione\ di\ (A|B)$

$$rk(A|B)\ \ \geq rk(A) \qquad > \quad se\ \ \exists\ \ pivot\ nell'ultima\ colonna$$

Lezione 16 (27/10/20)

Vettori (matrice colonna)

$In\ \mathbb{R}^2\ consideriamo\ un\ sistema\ di\ coordinate\ cartesiane\ ortogonale$

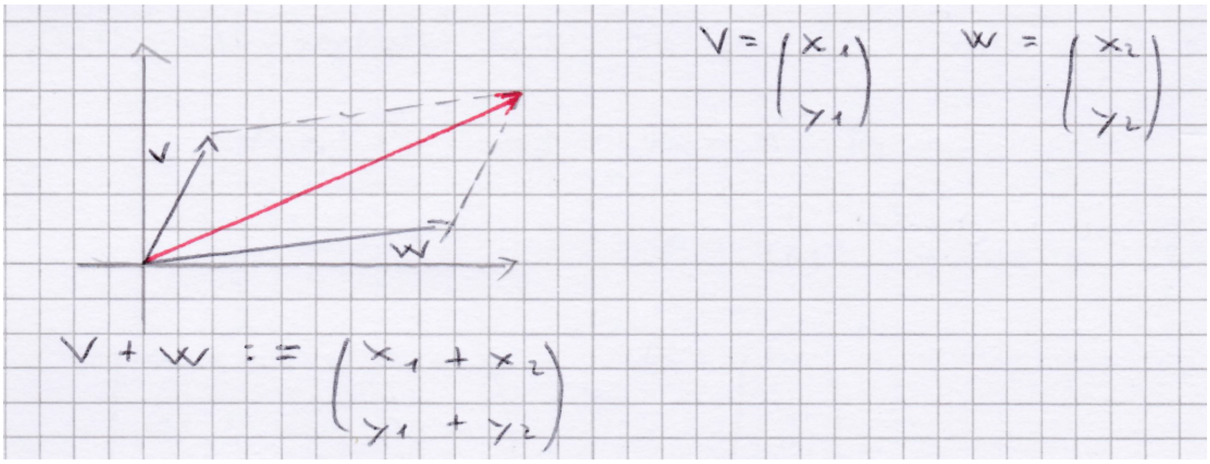


V è applicata in O, è un segmento orientato, caratterizzato da:

- $Lunghezza:\ \overline{OP}$
- $Direzione:\ retta\ per\ o,\ p$
- $Verso$

$||V|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad (\ ||V||\ _2)$

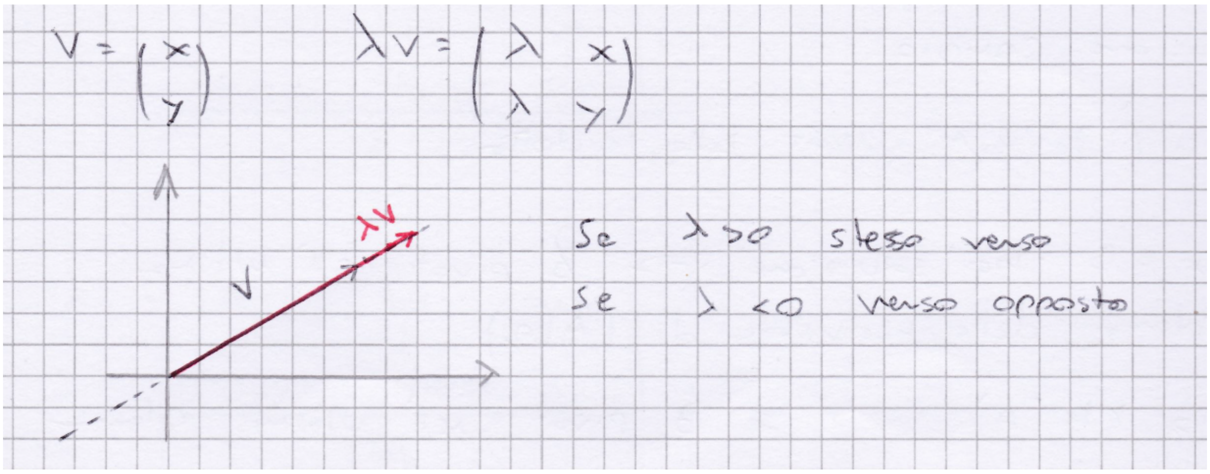
Somma



Disuguaglianza triangolare

$||V + W|| \ \leq ||V|| + ||W||$

Moltiplicazione di un vettore per λ ∈ ℝ



Osservazione

1. $-v = (-1)\,v$
2. $Differenza \rightarrow w - v = w + (-v)$

Prodotto scalare

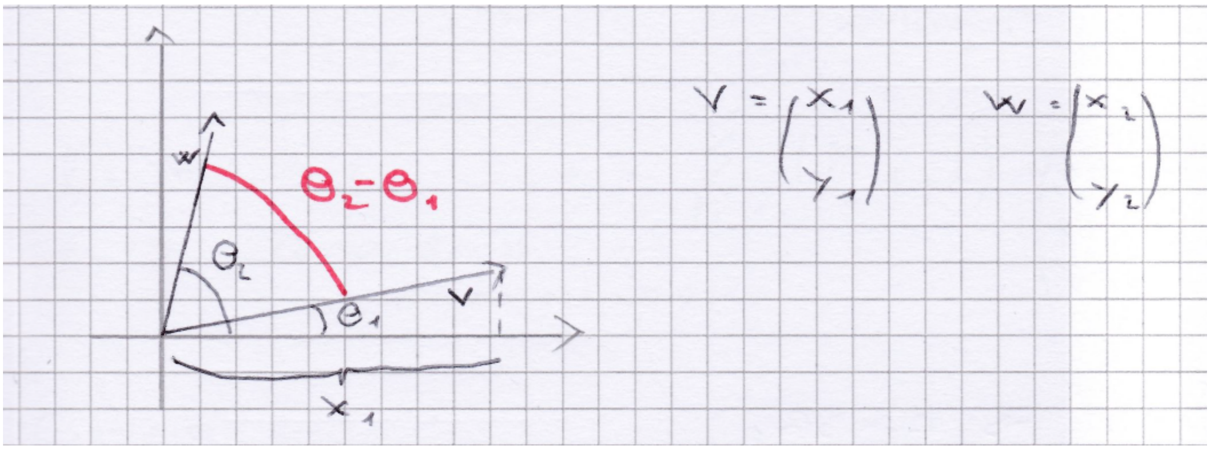
$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$V^T \cdot W = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 \end{pmatrix}$

$V \cdot W = V^T \cdot W$

Prodotto scalare — prodotto righe x colonne

$V \cdot W := x_1x_2 + y_1y_2$



$x_1 = ||V||\,cos\,\theta_1 \qquad y_1 = ||V||\,sen\,\theta_1$

$x_2 = ||W||\,cos\theta_2 \qquad y_2 = ||W||\,sen\,\theta_2$

$$V \cdot W = x_1 x_2 + y_1 y_2 = ||V||\ ||W|| \left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + sen\,\theta_1\, sen\,\theta_2 \right)$$

$$V \cdot W = ||V||\ ||W||\ \cos\theta_2 - \theta_1$$

$$\Rightarrow V \cdot W = V^T \cdot W = 0$$

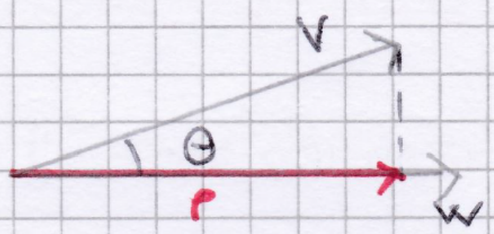
$$\Updownarrow$$

$$(V = 0 \text{ oppure } W = 0)$$

$V \neq 0$, $W \neq 0$

$$V \cdot W \begin{cases} = 0 & \text{se } V \perp W \\ > 0 & \text{se } \theta < \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{se } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Proiezione ortogonale di V su W



$$V \cdot W = ||V||\ ||W||\ \cos\theta$$

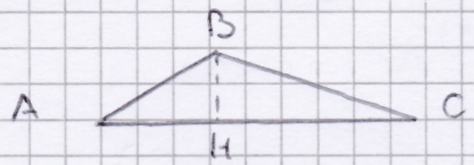
$$||P|| = ||V|| \cos\theta = \frac{V \cdot W}{||W||}$$

$$P = ||P|| \text{ verso } (W) = ||P|| \frac{W}{||W||}$$

$$\Rightarrow \frac{V \cdot W}{||W||^2}$$

Lezione 18 (30/10/20)

Applicazione: Area del triangolo



$$\text{Area} = \frac{AC \cdot B}{2}$$

$$V = \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \quad \text{In } \mathbb{R}^2 \text{ è } \emptyset$$

$$h = \|\vec{BA}\| \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Area} = \frac{\|AC\| \ \|BA\| \operatorname{sen} \theta}{2}$$

Vettori linearmente dipendenti o indipendenti

$In\ R^n\ (operazione:\ +\ \lambda)$

Definizione:

$V_1, \ldots, V_r \in \mathbb{R}^n$ *diremo combinazione lineare di* $V_1, \ldots, V_r$ *con coefficienti* $\lambda_{1, \ldots,} \lambda_r \in \mathbb{R}$ *il vettore* $\lambda_1 V_1, \ldots, \lambda_r V_r$

Ad esempio:

$$2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} - 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = w$$

W è combinazione lineare di V_1 e V_2

Definizione:

Dati $V_1, \ldots, V_2 \in \mathbb{R}^n$, *diremo SPAZIO VETTORIALE generato da* $V_1, \ldots, V_r$

$\{\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_r V_r \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_r \in \mathbb{R}\}$

Viene indicato con $< V_1, \ldots, V_r >$

In $\mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$<v_1, v_2> = \left\{\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} / \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} / \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$$

Definizione:

I vettori $V_1, \ldots, V_r \in \mathbb{R}^2$ *sono linearmente dipendenti se esistono* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *non tutti nulli tali che*: $\lambda_1 V_1, \ldots, \lambda_r V_r = 0$

Ad esempio:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Rightarrow V_1, V_2, V_3$$

Definizione:

Diremo che $V_1, \dots, V_r$ *sono una base di* V *se sono linearmente indipendenti*

Dall'esempio precedente:

$\mathbb{R}^3 = \ < V_1, V_2, V_3 >$

Se V_1, V_2, V_3 *sono linearmente indipendenti saranno una base*

Proviamo che $v_1 \quad v_2 \quad v_3$ sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Basi canoniche

$\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 : \underbrace{< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >}_{l.i.}$

$\mathbb{R}^3 : \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

Lezione 21 (06/11/2020):

Vettori

In $\mathbb{R}^n$ $v_1, \dots, v_r$ *sono linearmente dipendenti se* $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *non tutti null* *tali che* $\lambda_1 V_1 + \lambda_r V_r = 0$

Come prevedere se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti?

1. $V \neq 0$ *linearmente indipendente*
   $(\lambda V = 0 \Rightarrow \lambda = 0)$

2. $V_1, V_2 \ (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0)$

   V_1, V_2 *sono linearmente dipendenti* $\Leftrightarrow$ *sono proporzionali* $(\lambda_1 \neq 0,\ V_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \cdot V_2$

3. $v_1, \dots, v_r$ *sono linearmente indipendenti* $\Leftrightarrow$

$$rk \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & & & v_r \end{pmatrix} = r$$

RANGO/ caratteristica

Esempio:

Questi vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti?

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{L.D. o L.I. ?}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 0 - 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\exists!\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \iff \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

sono l.i. $\iff rk \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3$

in questo caso $|\,| = 0$
e $rk(\,) = 2$

Completamento ed estrazione di basi

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Provare che $\{V_1, \dots, V_4\}$ *non sono una base di* $\mathbb{R}^3$, *e estrarre da* $\{V_1, \dots, V_4\}$ *una base di* $\mathbb{R}^3$

$\{V_1, \dots, V_4\}$ *non sono una base di* $\mathbb{R}^3$ *perché la sua* $DIM\ \mathbb{R}^3 = 3$ *e quindi ogni base è fatta da* 3 *elementi*.

Si può estrarre un base di $\mathbb{R}^3$ se $rk\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_4 \end{pmatrix} = 3$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \geq 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow rk(\quad) = 2$$

Non si può estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ *perché il max n° di vettori indipendenti* è 2

Basi ortogonali e ortonormali (in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$)

Definizione: $V_1, \dots, V_n$ è *una base ortogonale di* $\mathbb{R}^n$ *se* $vi \times vj = 0 \ \forall i \neq j$

Ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortogonale

$$\mathbb{R}^3 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è base ortonormale se vi$\times$ vj $= 0 \ \forall i \neq j$ e vi$\times$ vj $= 1 \ \forall i = j$

Lezione 26 (11/11/20)

11/11/20

Trasformazioni

$x \mapsto A \cdot x$

$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^m$

es: 1) $A = 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \mapsto A \cdot x = 0 \cdot x = 0 \in \mathbb{R}^m$

matrice tutti 0

vettore

("collassamento" sull' origine)

es: 2) $A = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \mapsto A \cdot x = I \cdot x = x \in \mathbb{R}$ — la matrice identità si comporta come elem. neutro

(trasformazione identica: lascia tutto fermo)

es: 3) $A = 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $x \in \mathbb{R}^n \mapsto A \cdot x = 2Ix = 2x \in \mathbb{R}^n$

"omotetia" (dilatazione)

es: 4) $A = \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 1/2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/2 \end{pmatrix}$: $x \in \mathbb{R}^n \mapsto A \cdot x = \frac{1}{2} I x = \frac{1}{2} x \in \mathbb{R}^n$

(contrazione)

es: 5) $A = -I = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \mapsto -I \cdot x = -x \in \mathbb{R}^n$

(simmetria rispetto a 0)

es: 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (colon. → righe)

$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto A \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ("foto dall'alto")

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

es: 7) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (colon. → righe)

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto B \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ("foglio appoggiato sul pavimento")

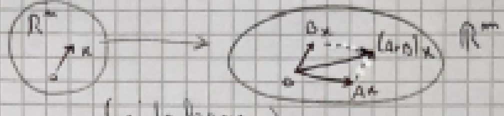
IMMERSIONE

Proprietà geometriche da studiare

- Surgettività: Tutti i vettori di $\mathbb{R}^m$ sono output di qualche vettore in $\mathbb{R}^n$
- Iniettività: A input diversi corrispondono output diversi

Interpretazione delle operazioni

- $\overbrace{A+B}^{\mathbb{R}^{m\times n}} \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}^n \mapsto (A+B)\cdot x = Ax + Bx$ (somma degli effetti)



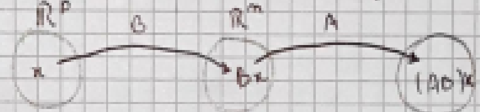
(interferenza)

- $\lambda \cdot A \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\lambda A)\cdot x = \lambda (Ax) \in \mathbb{R}^m$ (scalatura degli effetti)
- $A \cdot B \rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p}$

  $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad B: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \quad A\cdot B: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$

  $A\cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$

  $x \in \mathbb{R}^p \mapsto (A\cdot B)\cdot x = A\cdot(Bx)$



COMPOSIZIONE (di B e poi A)

Es. $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \to A\cdot B,\ B\cdot A$

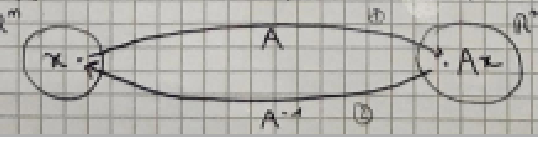
(foto dall'alto) (immersione) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A\cdot B \rightsquigarrow$ immersione $\mapsto$ foto dall'alto $\to$ "identità" in $\mathbb{R}^2$

$B\cdot A \rightsquigarrow$ foto dall'alto $\mapsto$ immersione $\to$ proiezione sulla altezza nulla (piano del tavolo) in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$$

- $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è t.c. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$ (Trasformazione inversa: output di A $\mapsto$ input)



Oss. $\exists A^{-1} \iff$ A bigettiva (surgettiva + iniettiva)
$\iff \det(A) \neq 0$

Nucleo e immagine di $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

• Def 1: Nucleo $N(A)$ / $\ker(A)$ $= \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \in \mathbb{R}^m \} \subseteq \mathbb{R}^n$

• Def 2: Immagine $R(A)$ / $Im(A)$ $= \{ y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \; y = Ax \} \subseteq \mathbb{R}^m$

* Prop: $N(A)$, $R(A)$ sono sottospazi ($v, w \in N(A) \Rightarrow v+w, \lambda v \in N(A)$; $R(A)$)
($\rightarrow N(A), R(A)$ hanno una base e una dimensione)

▫ Oss 1: A surgettiva $\iff R(A) = \mathbb{R}^m$

* Teor: A iniettiva $\iff N(A) = \{0\}$ ("nucleo banale")

▯ Dim: ($\Rightarrow$) A iniettiva: considero $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ output
distinti: $Ax \neq A \cdot 0 = 0$ $\quad (x \notin N(A))$
$\Rightarrow N(A) = \{0\}$

($\Leftarrow$) Hp: $N(A) = \{0\}$ Th: A iniettiva ($v \neq w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Av \neq Aw \in \mathbb{R}^m$)

Per assurdo: $Av = Aw$ con $v \neq w \Rightarrow Av - Aw = 0 \Rightarrow A(v-w) = 0$
$\Rightarrow v - w \in N(A) = \{0\} \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$, assurdo

A surgettiva $\iff \dim R(A) = m$, A iniettiva $\iff \dim N(A) = 0$

• Def 3: RANGO o CARATTERISTICA di A $\quad rk(A) = \dim R(A)$
A surgettiva $\iff rk(A) = m$

* Teor: $R(A) = \langle \overbrace{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n}^{\text{colonne di } A} \rangle$ $\quad e_j = j \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vettore canonico)

▯ Oss: $Ae_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (colonna j-esima)

$e_i^t A$ = riga i-esima di A
$(0 \; \underset{i}{1} \; 0) \in \mathbb{R}^n$

Little homework's shit (very shitty)

Matrice Inversa e Trasposta

- $A \cdot A^{-1} = I.$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^{-1})^{T} \cdot A^{T} = (A^{-1} \cdot A)^{T} = I^{T} = I$
- $(A^{T})^{T} = A$
- $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$
- $(A \cdot B)^{T} = B^{T} \cdot A^{T}$
- Il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale.
- Il prodotto di due matrici simmetriche **non** è (in generale) una matrice simmetrica.

1. Si costruisce la matrice dei complementi algebrici di A, cioè la matrice che ha per elemento di posto (i, j) il complemento algebrico A_{ij} ricavato a partire da A.
2. Si scrive la **matrice aggiunta** A^* di A, che per definizione è la trasposta della matrice dei complementi algebrici individuati al punto1.
3. Si moltiplica la matrice aggiunta A^* per l'inverso del valore del determinante di A (o equivalentemente, si divide per il valore del determinante di A).

Se il determinante di una matrice è 0 il rango è il numero di righe (o colonne essendo quadrata)
Il determinante di -I è -1 solo se il numero di righe o colonne è dispari

Sistemi Lineari

$Ax = B$ Ammette soluzioni (compatibile) ⇔nell'ultima matrice ridotta di (A | B) non esistono pivot nell'ultima colonna.
Sia Ax=B un sistema compatibile, allora:
Se p= n°pivot (≤n)
n= n° incognite

- p=n ∃! Soluzione (esiste una sola soluzione)
- p<n ∃ ∞^{n-p}soluzioni

Teorema di Cramer *(solo sistemi quadrati, num eq. = num incognite)*

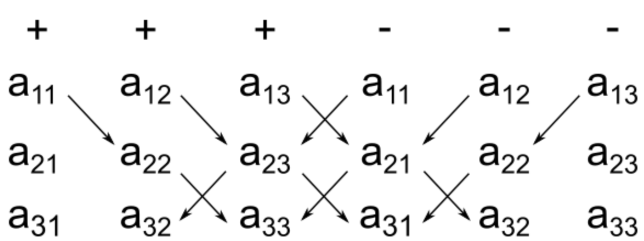
$Ax = B$ *ammette una soluzione* $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Se $|A| \neq 0$ allora A è invertibile

$$Ax = B \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot B$$

$$x = \frac{1}{|A|} A^{*} \cdot B$$

REGOLA DI SARRUS-per calcolare il determinante (3x3)



Det =
$a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3}$

Rango

$A \; m \, x \, n \; \rightarrow rk(A) \; \leq MIN(m, n)$
- Come si calcola $rk(A)$?

Rouchè-Capelli

- se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa il sistema non ammette soluzioni
- se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa il sistema ammette una o infinite soluzioni
- se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa ed è uguale al numero di incognite c'è una sola soluzione

Riduzione di Gauss

- $rk(A)$ = n° pivot
- $rk(A)$ = r *se*
  - Esiste un minore di ordine **r** con determinante non nullo
  - Tutti i minori di ordine **r+1** contenenti il minore di ordine scelto hanno determinante = 0

Kronecker

$rk(A) \; = \; r$ *se*

- $\exists$ un minore di ordine r di A con determinante $\neq 0$
- Ogni minore di r +1 che è ottenuto orlando il minore di ordine r che avete scelto che ha det. nullo

Note

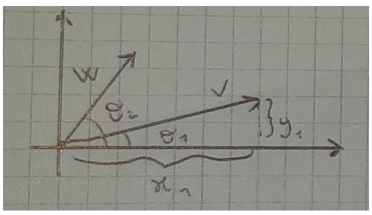
$$rk(A) \; = \; n \; \Leftrightarrow |A| \neq 0 \text{ (rango max)}$$

Vettori

Consideriamo un insieme di vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ appartenenti a uno spazio vettoriale V. Moltiplichiamo ogni vettore $\vec{v_i}$ per uno scalare a_i, e calcoliamo la somma complessiva dei vettori ottenuti: $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n}$. La somma è detta **combinazione lineare** dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ con gli scalari $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La somma è stata ottenuta attraverso **operazioni lineari**, cioè l'**addizione tra due o più vettori** e la **moltiplicazione di un vettore per uno scalare**. Per definizione

Dato un insieme di vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ in uno spazio vettoriale V, essi si dicono **linearmente indipendenti** se l'uguaglianza $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = 0$ è soddisfatta se e solo se tutti gli scalari sono uguali a zero. Dato lo stesso insieme di vettori, essi si dicono invece **linearmente dipendenti** se esiste almeno una n-upla di scalari non tutti nulli che annulla la suddetta combinazione lineare. Valgono poi i seguenti teoremi, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio:

Prodotto Scalare



$x_1 = ||V|| \cos \theta_1 \qquad y_1 = ||V|| \, sen \, \theta_1$

$x_2 = ||W|| \cos\theta_2 \qquad y_2 = ||W|| \, sen \, \theta_2$

$V \cdot W = x_1 x_2 + y_1 y_2 = ||V|| \; ||W|| \, (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + sen \, \theta_1 \, sen \, \theta_2)$

$V \cdot W = ||V|| \; ||W|| \; \cos \theta_2 - \theta_1$

$\Rightarrow V \cdot W = V^T \cdot W = 0$

$$\Updownarrow$$
$$(V = 0 \text{ oppure } W = 0)$$

Big homework's sheet

Matrice:

- Nulla: solo zeri.
- Quadrata: righe = colonne.
- Riga: solo 1 riga, Colonna: solo 1 colonna.
- Triangolare: elementi non nulli solo sopra (sup.) o sotto (inf.) la diagonale
- Diagonale: solo elementi nulli fuori dalla diagonale
- Identica: tutti 1 sulla diagonale e zeri altrove
- Trasposta: ottenuta invertendo righe e colonne.
- Simmetrica: è uguale alla sua trasposta.

Somma:

- Le matrici devono avere la stessa taglia.
- Commutativa: A + B = B + A
- Associativa: (A+B)+C = A+(B+C)
- La matrice nulla è l'elemento neutro: A+0 = A -> A - A = 0
- La somma di due matrici diagonali è una matrice diagonale
- La somma di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica
- La somma di due matrici triang. sup. è una matrice triang. sup.
- La somma di due matrici triang. inf. è una matrice triang. inf.

Prodotto:

- Si può fare solo se le colonne del primo sono uguali alle righe del secondo:
$$A \in M_{mn}, \quad A \in M_{np} \Rightarrow \quad A \cdot B = M_{mp}$$
- Generalmente, NON è commutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- E' associativo: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Una matrice si dice nilpotente se moltiplicata *r* volte con se stessa (con *r* arbitrario) diventa nulla:
$$A^r = 0$$
- Il prodotto è distributivo: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ e $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale

Matrice Inversa:

- Una matrice A si dice invertibile se esiste una matrice A^{-1} tale che:
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$
- Se A è nilpotente allora non è invertibile

Gauss:

- Se A è invertibile e $A \cdot X = B$ allora $X = A^{-1} \cdot B$
- A·X = B ha soluzione se e solo se la matrice ridotta di (A | B) non ha pivot nell'ultima colonna. Se A·X = B ha soluzioni è detto compatibile.
- Se A·X = B è compatibile e *p=numero pivot* e *n=numero di incognite*, allora:
$$\exists!\ Soluzione \qquad se\ p = n$$
$$\exists \infty^{n-p}\ Soluzioni \qquad se\ p < n$$

Determinante:

- Binet: siano A e B matrici quadrate della stessa taglia, allora:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$
$$|B \cdot A| = |B| \cdot |A|$$
$$|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$$

- Operazioni Elementari:

$R_i \leftrightarrow R_j$	$\Leftrightarrow$	$-|A|$	cambia il segno
$R_i \rightarrow \lambda R_i$	$\Leftrightarrow$	$\lambda|A|$	moltiplica per lambda
$R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$	$\Leftrightarrow$	$|A|$	non cambia

- Una matrice A è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$ e $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- Laplace: sia A una matrice, possiamo calcolare il suo *det* in base ad una riga o una colonna:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij}|A_{ij}|$$

- Per definizione: $|A^T| = |A|$
- **Teorema di Cramer** *(solo sistemi quadrati, num equazione = num incognite)*

  $A x = B \text{ ammette una soluzione} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

  Se $|A| \neq 0$ allora A è invertibile

  $A x = B \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot B$

  $x = \frac{1}{|A|} A^{*} \cdot B$

Rango:

- sia A una matrice nxn, il suo rango *rk(A)* è l'ordine massimo di un minore di A con determinante non nullo.
- se A nxn, il rango è n (massimo) se e solo se la matrice ha $|A| \neq 0$
- Per definizione: *rk(A) = r* se e solo se:
  - Esiste un minore di ordine *r* con $det \neq 0$
  - Ogni minore di A di ordine $r + 1$ ha determinante nullo.

- Kronecker: *rk(A) = r* se e solo se:
  - Esiste un minore di ordine *r* con $det \neq 0$
  - Ogni minore di A di ordine $r + 1$ ottenuto orlando il minore di *r* scelto ha determinante nullo.

- Gauss: *rk(A) = numero di pivot della matrice ridotta*
  - *A: m x n,* *B: m x m* invertibile, *C: n x n* invertibile, allora:

    $rk(B \cdot A) = rk(A)$ e $rk(A \cdot C) = rk(A)$

- se B matrice ridotta per righe, allora:

$$rk(A) = rk(B) = numero\ di\ pivot$$

- Rouché-Capelli:

$$Il\ sistema\ \ A\,x = B,\ non\ per\ forza\ quadrato,\ ha\ soluzioni\ \Leftrightarrow\ rk(A) = rk(A|B)$$

$$rk(A|B) \geq rk(A) \quad se\ \exists\ pivot\ nell'ultima\ colonna$$

Proprietà di Matrici inverse e trasposte:

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^{-1})^{T} \cdot A^{T} = (A^{-1} \cdot A)^{T} = I^{T} = I$
- $(A^{T})^{T} = A$
- $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$
- $(A \cdot B)^{T} = B^{T} \cdot A^{T}$

Vettori:

- Il prodotto vettoriale tra due vettori *v* e *w*

$$v = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} \quad v|w = \begin{pmatrix} x1 & x2 \\ y1 & y2 \\ z1 & z2 \end{pmatrix}$$

$$v \wedge w = \left(\begin{vmatrix} y1 & y2 \\ z1 & z2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x1 & x2 \\ z1 & z2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} y1 & y2 \\ z1 & z2 \end{vmatrix} \right)$$

da come risultato un vettore ottenuto prendendo i vari minori di ordine 2 di *v*|*w* e facendone il determinante.

- Combinazione Lineare:

Siano $v_1, \dots, v_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ diremo combinazione lineare di essi il vettore:

$$\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_r v_n$$

- Spazio Vettoriale:

Diremo spazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_r$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari al variare di $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Lo indicheremo con $< v_1, \dots, v_r >$

- Linearmente Dipendenti:

I vettori $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente dipendenti se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ **non tutti nulli**, tali che:

$$\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_r v_r = 0$$

I vettori $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente **dipendenti** se:

- risolviamo il sistema lineare e risultano esserci **infinite soluzioni**.
- il **determinante** della matrice creata affiancandoli è **0**.

- il **rango non è massimo**.

- Linearmente Indipendenti:

I vettori $v_1, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti se gli unici $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ **possibili** tali che:

$\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_r v_r = 0$ **siano tutti nulli**

I vettori $v_1, \ldots, v_r$ sono linearmente **indipendenti** se:
- risolviamo il sistema lineare e risulta esserci **una sola soluzione**.
- il **determinante** della matrice creata affiancandoli è **diverso da 0**.
- il **rango** è **massimo**.

- Base: I vettori $v_1, \ldots, v_r$ si dicono base di v se sono linearmente indipendenti.

- Base Canonica: Base minima di $\mathfrak{R}^n$; esempio, base di $\mathfrak{R}^2$: < (1, 0), (0, 1) >

- Basi e Dimensione:
  Si dimostra che:
  - ogni $V = \ < v_1, \ldots, v_r > \ \neq \ 0$ ammette una base
  - le basi sono equipotenti e infinite (hanno lo stesso numero di elementi)

Definiamo dimensione di V il numero di elementi di una base:

$$dimV = n° \ elementi \ di \ una \ base$$

- Completamento ed Estrazione di Basi:

$v_1, \ldots, v_4$ non sono una base di $\mathfrak{R}^3$.

Posso **estrarre** da essi una base di $\mathfrak{R}^3$ se e solo se il rango è 3.

Se ho v_1, v_2 ed essi sono linearmente indipendenti posso ottenere una base in $\mathfrak{R}^3$ completandoli con un terzo vettore linearmente indipendente.

- Base Ortogonale e Ortonormale:

$v_1, \ldots, v_n$ è una base **ortogonale** in $\mathfrak{R}^n$ se $V_i \cdot V_j$(prodotto scalare) $= 0$
$v_1, \ldots, v_n$ è base ortonormale se è ortogonale e i vettori hanno tutti norma 1

$(A+B)^T = A^T + B^T$ se hanno la stessa taglia
$(A*B)^T = A^T * B^T$ se numero colonne A = numero righe B

- Il prodotto tra matrici simmetriche non è una matrice simmetrica
- Il prodotto tra matrici diagonali è una matrice diagonale

- $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$
- Se A è invertibile allora lo è anche A^t e anche A^n,con n>0
- Un sistema si dice omogeneo se ha la colonna dei termini noti di tutti 0
- Se A è invertibile sistema Ax=B ha una sola soluzione
- Se il sistema è omogeneo esiste almeno una soluzione
- det(A*B) = det(A)*det(B)
- Se A è invertibile det(A^{-1}) = $\frac{1}{det(A)}$
- Il determinante di una matrice nilpotente è 0
- Se A e B sono invertibili allora lo sono anche A*B, A^T e B^T
- Se in una matrice vi è una riga o una colonna nulla o queste sono proporzionali o uguali il determinante è 0
- L'aggiunta di A è la trasposta del complemento algebrico di A e trasp(A)*A = $\mathbb{I}$ *det(A)
- Se det(A) è diverso da 0 il rango è il numero di righe o colonne (essendo quadrata)
- Il determinante di -$\mathbb{I}$ = -1 solo se il numero delle righe è dispari
- Se A è invertibile rk(A^n) con n>0 è uguale al rk(A)
- Se in un sistema il determinante è 0 vi sono 0 o ∞ soluzioni
- Per Rouché Capelli il sistema Ax=B ha soluzione solo se rk(A) = rk(A|B)
- Se B è invertibile rk(B*A) = rk(A*B) = A
- In un sistema che ha il numero di incognite uguale al numero di equazioni: se il determinante è uguale a 0 ha una sola soluzione altrimento o non ne ha o ne ha infinite. Se u8n problema chiede di calcolare il numero di soluzioni al variare di un parametro devo calcolare il determinante e vedo per quale valore del parametro è diverso da 0 e poi pongo il parametro = a quei valori e guardo quali sono le soluzioni del sistema
- V1...Vr in R^n sono una base di R^n se e solo se V1...Vr sono linearmente indipendenti
- I vettori V1...Vr sono linearmente indipendenti se e solo se il loro rango è uguale a r
- V1...Vr in R^n e r > n quindi sono linearmente dipendenti
- 4 vettori non possono base in R^3ma posso estrarne una se il loro rango è uguale a 3
- V1...Vn è una base **ortogonale** in R^n se Vi*Vj (prodotto scalare) =0
- V1...Vn è base ortonormale se è ortogonale e i vettori hanno tutti norma 1