Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame del 9/1/2020 — Seconda parte

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

per piccoli valori positivi di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

$$\text{(a1): } x \mapsto p := \frac{\pi}{4} + x,\ m := \frac{\pi}{4} - x \ \mapsto\ s1 := \sin p,\ s2 := \sin m \ \mapsto\ y1 := s1 - s2$$
$$\text{(a2): } x \mapsto s := \sin x \ \mapsto\ y2 := \sqrt{2} \cdot s$$

ⓐ $C_f = \dfrac{x\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$\hookrightarrow 2\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}\cdot 2}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{2x}{2}\right)$

$\hookrightarrow 2\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,x$

$\simeq \dfrac{x\,(\ldots)^{2/\sqrt{2}}}{2\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,x} = 1 \leftarrow n^{\circ}$ finito $\Rightarrow$ ben condizionato

ⓑ $C_{\text{sen}\,x} = \dfrac{x\cos x}{\text{sen}\,x}$ $\qquad$ $C_{\cos x} = \dfrac{-x\,\text{sen}\,x}{\cos x}$

ⓒ

Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame del 9/1/2020 — Seconda parte

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

per piccoli valori positivi di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

(a1): $x \mapsto p := \frac{\pi}{4}+x,\ m := \frac{\pi}{4}-x \ \mapsto\ s1 := \sin p,\ s2 := \sin m \ \mapsto\ y1 := s1 - s2$
(a2): $x \mapsto s := \sin x \ \mapsto\ y2 := \sqrt{2}\cdot s$

c

$$\varepsilon a \pm b = \frac{a}{a \pm b}\varepsilon a + \frac{b}{a\pm b}\varepsilon b$$

$$\varepsilon a \times b = \varepsilon a + \varepsilon b$$

$$\varepsilon a/b = \varepsilon a - \varepsilon b$$

$$\varepsilon g(x) = Cg(x) \times \varepsilon x$$

a1 $\varepsilon_p = \frac{x}{x+\frac{\pi}{4}}\varepsilon_x$ $\qquad$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_p \cdot \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\varepsilon_{-x} = \varepsilon_x$

$\varepsilon_m = \frac{-x}{-x+\frac{\pi}{4}}\varepsilon_x$ $\qquad$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_m \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\to \varepsilon_{y_1} = \frac{s_1}{s_1-s_2}\varepsilon_1 + \frac{s_2}{s_1-s_2}\varepsilon_2$

$$\varepsilon_{y_1} = \frac{\cancel{x}}{x+\frac{\pi}{4}}\varepsilon_x \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)}{\underbrace{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)}_{\frac{2}{\sqrt{2}}\cancel{\operatorname{sen} x}}} + \frac{-\cancel{x}}{-x+\frac{\pi}{4}}\varepsilon_x \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)}{\cancel{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)}\ \frac{2}{\sqrt{2}}}$$

$$\sim \varepsilon_x \frac{\cos x\,\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)}{\frac{\pi}{4}+x}\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon_x \frac{\cos x\,\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)}{x-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \to \varepsilon_x \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon_x \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\pi}{4}} = 0?$$

a2 $\varepsilon = \varepsilon_x \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\sqrt{2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \varepsilon_x \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}\,\varepsilon_x$

NOTA: solo il punteggio più alto tra gli esercizi 2 e 3 concorre al voto dell'esame!

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con s opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

NOTA: solo il punteggio più alto tra gli esercizi 2 e 3 concorre al voto dell'esame!

3. Determinare i parametri α, β, γ della funzione scritta nella forma

$$g(x) = \alpha + \beta \sin(x/2) + \gamma \sin x$$

che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y	0	-1	1	0

$\text{sen}(-\frac{\pi}{2}:2)$

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$\begin{array}{cccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ A = & 1 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A^T b \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}}$$

$$A^T b = \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\beta = -4\alpha$

$4\alpha + \beta = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{\sqrt{2}}{2} R_3]{R_2 - \frac{1}{4} R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - \frac{7}{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{7}{4}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

ecc — — — — —

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A nei due casi in cui vengono usati rispettivamente gli shift $p = -3$ e $p = 1/2$.

1. Calcoliamo autovalori

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - (-3\cdot 1)$$
$$= \cancel{-3} - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 \cancel{+3} =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2)$$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -2$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\exists$ diagonalizz.

2 radici di cardinalità 1 $\rightarrow$ tot $= 2 =$ dim matrice

$V = ?$ cerco autovet. $\rightarrow$ Sostituendo le λ coi EV

$\boxed{\lambda = 0}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow x - 3y = 0$ $\quad x = 3y$ $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ scelgo io :)

$\boxed{\lambda = -2}$ $\begin{pmatrix} 1+2 & -3 \\ 1 & -3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = y$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

controllo: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \checkmark \end{cases}$

$VD = AV$ $\boxed{\text{ok}}$

$A = \underline{VDV^{-1}}$

non simm
ma diagonalizz.

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze inverse applicato alla matrice A nei due casi in cui vengono usati rispettivamente gli shift $p = -3$ e $p = 1/2$.

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -2$

$p = -3 \qquad \mu_2 = \frac{1}{0-(-3)} = \frac{1}{3} \qquad V = \left(\frac{1/3}{1}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\mu_1 = \frac{1}{-2-(-3)} = 1$

perché ha modulo max

$p = \frac{1}{2} \qquad \mu_1 = \frac{1}{0-\frac{1}{2}} = -2 \qquad V = \left(\frac{-2/3}{-2}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\mu_2 = \frac{1}{-2-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$

$\mu_2 \neq \mu_1 \Rightarrow$ conv?

5. Si consideri la funzione

$$S(x) = \begin{cases} -\alpha x^3 + 3(\alpha+1)x^2 - 3(\alpha-1)x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \alpha x^3 - 3(\alpha-1)x^2 + 3(\alpha+1)x - \alpha & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che S è una spline per ogni valore del parametro α.

(b) Determinare i valori del parametro α tali che S sia anche naturale.

Spline grado 3?

a

$$\lim_{x\to 1^-} -\alpha x^3 + 3(\alpha+1)x^2 - 3(\alpha-1)x + \alpha = -\alpha + 3(\alpha+1) - 3(\alpha-1) + \alpha$$
$$= \cancel{-\alpha} + \cancel{3\alpha} + 3 - \cancel{3\alpha} + 3 + \cancel{\alpha} = 6$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ldots = \alpha - 3(\alpha-1) + 3\alpha + 3 - \alpha = \cancel{\alpha} - \cancel{3\alpha} + 3 + \cancel{3\alpha} + 3 - \cancel{\alpha} = 6$$

sono uguali $\forall \alpha$ ok

poi controllo che valga anche per deriv 1ª e 2ª

b naturale se $S_1''(0) = S_2''(2) = 0$

$$S_1''(x) = -6\alpha x + 6(\alpha+1) \to S_1''(0) = 6\alpha + 6 = 0 \iff \alpha = -1$$

$$S_2''(x) = 6\alpha x - 6(\alpha-1) \to S_2''(2) = 12\alpha - 6\alpha + 6$$
$$= 6\alpha + 6 = 0 \iff \alpha = -1$$

✓

per $\alpha = -1$ è naturale

Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame del 12/2/2020 — Seconda parte

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = \dfrac{2}{4x-1} + \dfrac{4}{x+2}$ per piccoli valori di x.

   (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

   (b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

   (b1): $\quad x \mapsto f1 := \dfrac{2}{4x-1},\ f2 := \dfrac{4}{x+2} \ \mapsto\ y1 := f1 + f2$

   (b2): $\quad x \mapsto n := 18x,\ d := 4x^2 + 7x - 2 \ \mapsto\ y2 := n/d$

NOTA: solo il punteggio più alto tra gli esercizi 2 e 3 concorre al voto dell'esame!

2. Determinare una riflessione di Householder che porti il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con α opportuno. Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$\alpha = \|x\|_2 = \sqrt{9+16} = 5$$

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$u^t u = (-8, 0, -4) \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 64 + 16 = 80$$

$$u u^t = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} (-8, 0, -4) = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2\frac{u u^t}{u^t u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{8}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 - \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

NOTA: solo il punteggio più alto tra gli esercizi 2 e 3 concorre al voto dell'esame!

3. Determinare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-1	0	0	1	1	2
y	-1	0	-2	0	-1	1

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

$$y = mx + q$$

$$\begin{array}{cc} m & q \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{11}{7} & -\frac{9}{7} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{cases} m + \frac{3}{7}\left(-\frac{9}{11}\right) = \frac{2}{7} \\ 11q = -9 \to q = -\frac{9}{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} m = \frac{2}{7} + \frac{27}{77} = \cancel{\frac{49}{77}}^{\,7}_{\,11} \\ q = -\frac{9}{11} \end{cases}$$

$$y = \cancel{\frac{49}{77}}^{\,7}_{\,11} x - \frac{9}{11} = \frac{7}{11}x - \frac{9}{11}$$

4. Calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze applicato alla matrice A.

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (+2+\lambda)(+1+\lambda)(-2-\lambda) + 9(+1+\lambda) =$$

$$= (1+\lambda)[-(2+\lambda)^2+9] = (1+\lambda)[-4-4\lambda-\lambda^2+9]$$

$$= -(1+\lambda)[+\lambda^2+4\lambda-5]$$

$$[\lambda+5][\lambda-1]$$

$\lambda_1 = -5$
$\lambda_2 = -1$
$\lambda_3 = 1$

$V = \left(\frac{-1}{-5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^k$ converge

$\|A\|_\infty = 4$ massima riga in mod

$\|A^{-1}\|_\infty = 3$

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e i vettori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = A \cdot x$ e $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 0.001 \\ 1.002 \end{pmatrix}$.

(a) Sapendo che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare il condizionamento $\mu_\infty(A)$ relativo alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Calcolare le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ per ognuno dei vettori x, b e $\delta b = \tilde{b} - b$.

(c) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = \tilde{b}$.

(a) $\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4 \cdot 3 = 12$

(b) ...

(c) $\|\tilde{x} - x\|_\infty$

$A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 12 \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq 12 \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \|x\|_\infty$$

Corso di Laurea in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica
Esame dell'11/2/2021 (6 CFU + seconda parte per 9 CFU)

Cognome................................ Nome................................ Email................................

1. Si supponga di dover calcolare
$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2}$$
per piccoli valori positivi di x.

(a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

(b) Determinare il condizionamento delle funzioni seno e coseno.

(c) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

$$\text{(c1): } x \mapsto s := \sin x,\ s2 := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mapsto y1 := s2 - s/2$$
$$\text{(c2): } x \mapsto s := \sin x,\ s2 := \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mapsto q := s^2 \mapsto y2 := 4 \cdot q \cdot s2$$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con k opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Calcolare la retta di regressione che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

x	-2	-2	0	1	2	3
y	-1	-2	0	-1	1	2

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

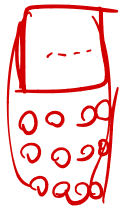
simmetrica ⇓ diag?

4. Verificare che $\lambda = 0$ è un autovalore della matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di A.

Studiare la convergenza del metodo delle potenze.

U e V sono ortog

$\Sigma =$  $A = U\Sigma V^t$

esponde diagonalizz.

5. Nel seguito, siano A e $\tilde{A}$ due matrici con dimensioni 7×4 e 3×5 rispettivamente.

   (a) Determinare le dimensioni delle matrici $\overset{7\times7}{U}, \overset{7\times4}{\Sigma}, \overset{4\times4}{V}$ (rispettivamente $\tilde{U}, \tilde{\Sigma}, \tilde{V}$) della SVD di A (rispettivamente $\tilde{A}$).

   (b) Si indichi rispettivamente con $u_i, v_i, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ la i-esima colonna delle matrici $U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:

   (b1) Il vettore Au_i è multiplo di v_i per ogni i. per $i = 1, \dots, m$, U è 7×7, quindi

   (b2) Il vettore $\tilde{A}\tilde{v}_i$ è multiplo di $\tilde{u}_i$ per ogni i. $\tilde{U}$ è 3×3 vero!

   Se λ è un *qualunque* autovalore di $\underbrace{A^tA}_{4\times4}$, allora

   (b3) $\sigma = \sqrt{\lambda}$ è valore singolare di A. VERA?

   Se $\tilde{\lambda}$ è un *qualunque* autovalore di $\underbrace{\tilde{A}^t\tilde{A}}_{5\times5}$, allora

   (b4) $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\lambda}}$ è valore singolare di $\tilde{A}$. $\tilde{A}$ avrà altri $5-3$ autov. nulli $\Rightarrow$ FALSA?

colonne di U = vet sing sx = autovet AA^t

〃 〃 V = 〃 dx = 〃 A^tA

I valori sing (σ) non nulli sono $= \sqrt{\lambda}$ dove $\lambda \neq 0$ autov di AA^t e A^tA

se $m \geq n$