Riassunto Lezioni Calculus

Insiemi

- $\emptyset$ vuoto
- $\mathbb{N}$ naturali $\{0 \dots\}$ n
- $\mathbb{Z}$ interi z
- $\mathbb{Q}$ razionali $q = \frac{z}{n}$
- $\mathbb{R}$ reali (totalmente ordinato)

Intervalli

- limitato aperto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ sono segmenti aperti
- limitato chiuso $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ... chiusi
- limitato semiaperto $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ... semiaperti
- illimitato aperto $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ sono semirette aperte
- illimitato chiuso $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ... chiuse
- illimitato $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ retta

Operazioni tra insiemi

Lemma

Densità di $\mathbb{Q}$

per ogni $x,y \in \mathbb{R}$, con $x<y$, esiste sempre $q \in \mathbb{Q} \mid x < q < y$

Funzioni: Dominio e Codominio

Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni elemento $x \in A$ un unico valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$, l'insieme A è dominio di f ($\mathrm{dom} f$)

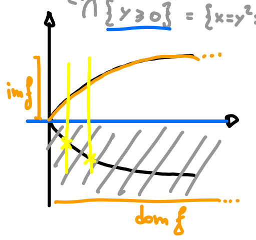
associazione univoca

ove non lo fosse si può limitare la f affinché lo diventi

Si chiama immagine della funzione $f: A \to \mathbb{R}$ l'insieme dei valori presi dalla funzione ($\mathrm{Im} f$)

$\mathrm{Im} f = f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$

$\Gamma = \{$parabola $F:(1,0)$ e dir $x=-1\} \cap \{y \geq 0\} = \{x = y^2 : y \geq 0\}$



Si chiama grafico di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ il sottoinsieme del piano cartesiano

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in A\}$ dispense

$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ lezione

Iniettiva: $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette al più una soluzione

e quindi sse $\forall x_1, x_2 \in A \mid f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$

e quindi sse $\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall$ retta $y = y_0$ // ascisse interseca il graph(f) in al più un punto

Surgettiva: $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette almeno una soluzione

e quindi sse $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$\forall$ retta $y = y_0$ // ascisse interseca il graph(f) in almeno un punto

Biettiva: $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione

e quindi $\exists!\, x \in A \mid f(x) = y \Rightarrow$ sse f è sia iniettiva che surgettiva

Operazioni tra funzioni

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$f \cdot g\,(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

con $h \in \mathbb{R}$ $(hf)(x) = hf(x)$

$f \circ g\,(x) = f(g(x)) \neq g \circ f$

Funzione inversa

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è iniettiva $\exists$ la sua funzione inversa $f^{-1}: B \to \mathbb{R}$ $x = f^{-1}(y) \mid B = \mathrm{Im} f$

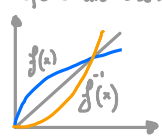
ovvero la legge che assegna ad ogni $y \in \mathrm{Im} f$ l'unica soluzione $x \in A$ di $f(x) = y$

proprietà: $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f$ $\quad$ $\mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f$

$f^{-1}(f(x)) = x \mid x \in \mathrm{dom} f$ $\quad$ $f(f^{-1}(y)) = y \mid y \in \mathrm{dom} f^{-1}$

f^{-1} è iniettiva e $(f^{-1})^{-1} = f$

il suo grafico è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante



Monotonia

monotona crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A$ (strettamente $<$)

monotona decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A$ (strettamente $>$)

se strettamente monotona $\Rightarrow$ iniettiva

si possono definire degli intervalli di monotonia

proprietà: se $f(x)$ e $g(x)$ entrambe crescenti (vale anche per decrescenti e strettamente cr/dec)

$f(x) + g(x)$ è funzione crescente

$h \cdot f(x)$ è $\begin{cases} \text{crescente} & h > 0 \\ \text{decrescente} & h < 0 \end{cases}$

$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \Rightarrow f(x) g(x)$ crescente

f e g monotone $\Rightarrow f \circ g$ è monotona

Trasformazioni geometriche

Traslazione verticale $f(x) + a$ $(a>0 \uparrow, a<0 \downarrow)$

orizzontale $f(x+a)$ $(a>0 \leftarrow, a<0 \rightarrow)$

Dilatazioni o Contrazioni verticale $h f(x)$ $\begin{cases} 0<h<1 & \text{contrazione} \\ h>1 & \text{dilatazione} \end{cases}$

orizzontale $f(hx)$ $\begin{cases} 0<h<1 & \text{dilatazione} \\ h>1 & \text{contrazione} \end{cases}$

simmetria rispetto asse x $\quad y = -f(x)$

rispetto asse y $\quad y = f(-x)$

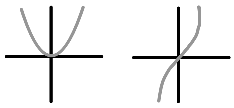
FUNZIONE PARI $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)\ \forall x$ (simm. rispetto y)

DISPARI $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)\ \forall x$ (simm. rispetto x-y)

Potenze

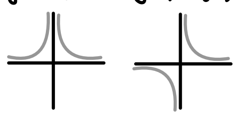
Intere x^n $n \in \mathbb{N}$

	n pari	n dispari
dom f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
im f	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$
↗	$[0,+\infty)$	strettamente
↘	$(-\infty,0]$	NO → iniettiva
	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$



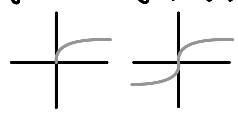
negative x^{-n} $n \in \mathbb{N}$

	n pari	n dispari
dom f	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
im f	$(0,+\infty)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
↗	$(-\infty,0)$	NO
↘	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$



reciproco $x^{1/n}$ $n \in \mathbb{N}$

	n pari	n dispari
dom f	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$
im f	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$
↗	strettamente	strettamente
↘	NO	NO
	$f(-x)=$ IMP	$f(-x)=-f(x)$



razionale $x^{m/n}$ $m,n \in \mathbb{Z}$

$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

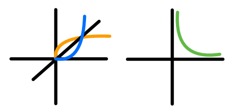
$\operatorname{dom} f = (0,+\infty)$

$\operatorname{Im} f = (0,+\infty)$

— $y = x^{3/2} \approx x^n$

— $y = x^{2/3} \approx x^{1/n}$

— $y = x^{-3/2} \approx x^{-n}$



reale x^a $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sup\{x^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\leq a\} & x\geq 1 \\ \inf\{x^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\leq a\} & 0<x<1 \end{cases}$$

$\operatorname{dom} f = (0,+\infty)$

$\operatorname{Im} f = (0,+\infty)$

props: se $a>0$ $f\uparrow$ su $(0,+\infty)$

se $a<0$ $f\downarrow$ su $(0,+\infty)$

se $a<b$ $\begin{cases} x^a<x^b & \text{se } x>1 \\ x^a>x^b & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$

Funzioni Polinomiali

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\quad n\in\mathbb{N}$ $\quad a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$

n = grado della funzione $<$ grado pari: dom $f=\mathbb{R}$, Im $f\neq\mathbb{R}$; grado dispari: dom $f=\mathbb{R}$, Im $f=\mathbb{R}$

se solo n Pari → f é pari

se solo n Dispari → f é dispari

Esponenziale

$f(x) = a^x$ $\quad a>0 \wedge a\neq 1$

$f(x) = e^x = \exp x$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Im} f = (0,+\infty)$

— $a>1 \Rightarrow a^x \uparrow$

— $0<a<1 \Rightarrow a^x \downarrow$

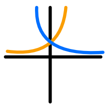
$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$

$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

$(a^x)^b = a^{bx}$



Logaritmo (inversa esponenziale)

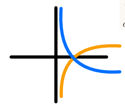
$f(x) = \log_a x$ $\quad a>0 \wedge a\neq 1$

$f(x) = \log_e x = \log x = \ln x$

$\operatorname{dom} f = (0,+\infty)$ $\quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

— $a>1 \Rightarrow a^x \uparrow$

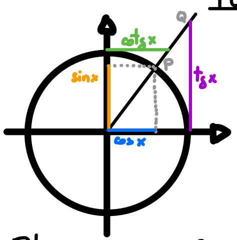
— $0<a<1 \Rightarrow a^x \downarrow$



$\log_a a^x = x$	$x\in\mathbb{R}$
$a^{\log_a x} = x$	$x>0$
$\log_a 1 = 0$	
$\log_a a = 1$	
$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$	$x_1,x_2>0$
$\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$	$x_1,x_2>0$
$\log_a x^b = b\log_a x$	$x>0,\ b\in\mathbb{R}$
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$	$x>0$ e $b>0$ $b\neq 1$
$a^x = e^{(\ln a)x}$	$x\in\mathbb{R}$ e $a>0$ $a\neq 1$

cambio base $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$

Funzioni Trigonometriche (foglio trigonometria)



$\dfrac{\theta \text{ radianti}}{2\pi} = \dfrac{\theta \text{ gradi}}{360}$

$P = (\cos x, \sin x)$

$Q = (1, \operatorname{tg} x)$

Pitagora $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

$\operatorname{cotg} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<0 \end{cases}$

	sin x	cos x	tg x	arcsin	arccos	arctg
dom f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi\ k\in\mathbb{Z}\}$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$
Im f	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$\mathbb{R}$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
periodo	$2k\pi$	$2k\pi$	π	–	–	–
parité	$\sin(-x)=-\sin x$	$\cos(-x)=\cos x$	$\tan(-x)=-\tan x$	$\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$	$\arccos(-x)=\arccos(-x)$	$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}(x)$
zeri	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$x=k\pi$	$x=0$	$x=1$	$x=0$
monotonie	(see below)			↗	↘	↗

i) la funzione $\sin x$ è crescente su $[-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi]$
ii) la funzione $\sin x$ è decrescente su $[\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi]$
iii) la funzione $\cos x$ è crescente su $[-\pi+2k\pi, 0+2k\pi]$
iv) la funzione $\cos x$ è decrescente su $[0+2k\pi, \pi+2k\pi]$
v) la funzionetan x è crescente su $(-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi)$

inverse

FORMULARIO di TRIGONOMETRIA

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall\, x\in\mathbf{R};$

$\sin 0 = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$\sin\pi = 0$	$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 0 = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos\pi = -1$	$\cos\frac{3}{2}\pi = 0$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

seno è funzione **dispari**: $\quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall\, x\in\mathbf{R};$

coseno è funzione **pari**: $\quad \cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x\in\mathbf{R}.$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$	$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$	$\sin(\pi-x) = \sin x$	$\sin(\pi+x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$	$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$	$\cos(\pi-x) = -\cos x$	$\cos(\pi+x) = -\cos x$

Formule di addizione e sottrazione

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}$

Formule di duplicazione

$\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

dalla precedente si ottiene:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

Formule di prostaferesi

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Formule di Werner

$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

Formule parametriche

Posto $t = \tan\frac{x}{2}$ si ha:

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Formule di bisezione

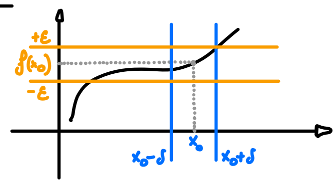
$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad x\in(0,2\pi)$

$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad x\in(-\pi,\pi)$

$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}, \quad x\in(0,\pi)$

Continuità

$f: A \to \mathbb{R}$
$x_0 \in A$



f risulta continua in x_0 se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\forall x \in A$ $\begin{cases} f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \\ x_0-\delta < x < x_0+\delta \end{cases}$

f è detta continua se è continua in x_0 $\forall x_0 \in A$

NB: è necessario assumere che $x_0 \in \mathrm{dom} f$ per poter calcolare $f(x_0)$. $f(x)$ è arbitrariamente vicino a $f(x_0)$ se x è sufficientemente vicino a x_0

I) $\alpha f + \beta g$ continua
II) fg è continua
III) f/g è continua
IV) $1/g$ è continua
V) $g \circ f$ è continua

Punto di Accumulazione

$x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per A se $\forall \delta>0\ \exists x \in A$ $x_0-\delta < x < x_0+\delta \wedge x \neq x_0$

- $+\infty$ è pda per A se $\forall M>0\ \exists x \in A \mid x > M$
- $-\infty$ è pda per A se $\forall M>0\ \exists x \in A \mid x < -M$

Intorno: $I(x_0)$
- bucato $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ ⤳ non disturba dato $x \neq x_0$
- destro $[x_0, x_0+\delta)$ ⤳ $\lim_{x\to x_0^+} = \ell^+$
- sinistro $(x_0-\delta, x_0]$ ⤳ $\lim_{x\to x_0^-} = \ell^-$

Limiti

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 pda per A, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ⟶ f è continua in x_0 sse $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

I) $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \mid \forall x \in A, x>\delta \Rightarrow \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$
II) $+\infty$ se $\forall M>0\ \exists \delta>0 \mid \forall x \in A, x>\delta \Rightarrow f(x) > M$
III) $-\infty$ se $\forall M>0\ \exists \delta>0 \mid \forall x \in A, x>\delta \Rightarrow f(x) < -M$
IV) NON ESISTE se la funzione oscilla

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \exists \begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} = \ell \\ \lim_{x\to x_0^-} = \ell \end{cases}$

Continuità: controlla il comportamento di f vicino $x_0 \in \mathrm{dom} f$ e confronta con $f(x_0)$

Limiti: controlla il comportamento di f vicino ad un punto x_0 che sia pda per $\mathrm{dom} f$ ⤷ MAI $x_0 = x$

Limite di $f \circ g$

$f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x) \mid \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$g: B \to \mathbb{R}$, $z = g(y) \mid \lim_{y\to y_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$

almeno una delle condizioni deve essere soddisfatta
C1) il punto $y_0 \notin \mathrm{dom}\, g$
C2) g è continua in y_0
C3) $\exists \delta>0 \mid f(x) \neq y_0$

Forme Indeterminate

$\infty - \infty$
$0 \cdot \infty$ $\quad 0/0$
∞/∞

gerarchia degli infiniti
$1 < \log n < n < 2^n < n!$

Limiti Fondamentali

Forme indeterminate del tipo 0/0: limiti fondamentali, figli e nipoti.

genitori: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

figli: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad a>0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad a>0,\ a\neq 1$

nipoti: $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ $\quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

T. Confronto

$g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \to x_0$
$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$

Corollario: se $\underbrace{|f(x)| \le M}_{f \text{ limitata}} \wedge \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x) = 0}_{\text{infinitesimo}} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ × T. confronto

es: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ ⤳ $-1 \le \sin x \le 1$
$-\left|\frac{1}{x}\right| \le \frac{\sin x}{x} \le \left|\frac{1}{x}\right|$
$0 \Rightarrow 0 \Leftarrow 0$

es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+\sin(x)}{x^2-x\cos(x)+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{\cos(x)}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = 1$

limitata

Teoria Permanenza del Segno

i) $\ell>0 \vee \ell=+\infty \Rightarrow \exists I(x_0)$ t.c. $f(x)>0\ \forall x \in I \cap \mathrm{dom} f, x\neq x_0$
ii) $f(x) \ge 0$ in $I(x_0)$, $x \neq x_0 \Rightarrow \ell \ge 0 \vee \ell = \pm\infty$

Estremo sup, Inf, max, min

- f si dice sup limitata su A se $\exists M>0 \mid f(x) \le M\ \forall x \in A$ ⤳ se sup lim $\Rightarrow \exists \sup f \in \mathbb{R}$
- f si dice inf limitata su A se $\exists M>0 \mid f(x) \ge -M\ \forall x \in A$ ⤳ se inf lim $\Rightarrow \exists \inf f \in \mathbb{R}$

- $x_M \in A$ si dice punto di massimo di f in A se $f(x) \le f(x_M)\ \forall x \in A$ ⤳ massimo assoluto: $\max f = \sup f$
- $x_m \in A$ si dice punto di minimo di f in A se $f(x_m) \le f(x)\ \forall x \in A$ ⤳ minimo assoluto: $\min f = \inf f$

- $M \in \mathbb{R}$ è estremo sup di f in A se $f(x) \le M\ \forall x \in A \wedge \forall \varepsilon>0\ \exists x \in A \mid f(x) > M-\varepsilon \Rightarrow M = \sup(f)$
- $m \in \mathbb{R}$ è estremo inf di f in A se $f(x) \ge m\ \forall x \in A \wedge \forall \varepsilon>0\ \exists x \in A \mid f(x) < m+\varepsilon \Rightarrow m = \inf(f)$

- **Teorema di Weierstrass**
sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \exists x_M, x_m \in [a,b]$
(int chiuso, limitato)

- **Teorema del valore Medio**
sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (chiuso, limitato)
sia $f(a) \le c \le f(b)$ $\Big\} \Rightarrow \exists x \in [a,b]$ t.c. $f(x) = c$

- **Teorema degli zeri**
sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\mid f(a)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid f(c) = 0$

- Corollario: sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \mathrm{Im} f = [\inf f, \sup f]$

Derivata

- è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$

  retta tangente: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

- $f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = limite del rapporto incrementale

  se $x = x_0 + h$ $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\rightsquigarrow$ con $h \to 0$

- f è derivabile in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$
- se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

Miglior approssimazione: f lineare che approx meglio $f(x)$ intorno x_0 $\rightsquigarrow$ calcolo f non polinomi o rapp. di polinomi

$\hookrightarrow$ $f_m(x) - f(x)$ = il più vicino possibile a x_0

$\Rightarrow$ miglior polinomio che approx $f(x)$? $f_{a,b,c,\dots}(x) = ax^n, bx^{n-1}, cx^{n-2}, \dots$ Polinomio di Taylor

Algebra derivate

- $h(x) = f(x) + g(x)$ derivabile $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ derivabile $h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ derivabile $h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
- $h = f\circ g \Rightarrow h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Teorema di de l'Hôpital

(calcolo $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$)

$f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, I aperto, f, g derivabili in $I\setminus\{x_0\}$

1. $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I, x \neq x_0$
2. forma $\frac{0}{0}$ v forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
3. $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

teorema derivazione funzione inversa

$(f^{-1})'(x)$ è correlato con $f'(f^{-1}(x))$ $\rightsquigarrow 1 = m'\cdot m \Rightarrow (f^{-1})'(x)\cdot f'(f^{-1}(x)) = 1$

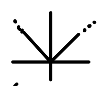
c.a. della t_g in $(x, f^{-1}(x))$ al grafico di $f^{-1}(x)$ | c.a. della t_g in $(f^{-1}(x), x)$ al grafico di $f(x)$

$\rightsquigarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Derivata dx e sx

dx: $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow = f'(x_0)$

sx: $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \Rightarrow \nexists f'(x_0) \wedge x_0$ è un punto angoloso



Estremi relativi (locali) e globali

Locali:

$f: I \to \mathbb{R} \wedge x \in I \Rightarrow$
- (i) x_0 min loc se $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I \Rightarrow f(x) \leq f(x)$
- (ii) x_0 max loc se $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

se < si dice stretto

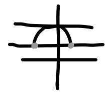
globale: è un estremo locale

teorema di Lagrange

sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in (a,b). Allora $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$

$\exists$ una retta tangente al grafico // alla retta passante per $(a, f(a)), (b, f(b))$

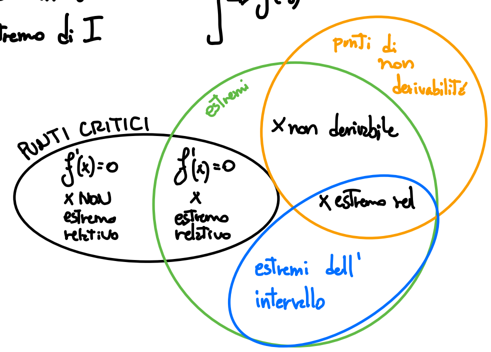
teorema di Rolle $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$



Teorema Fermat

sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ estremo loc
- $f(x)$ è continua in un intorno di x_0
- $f(x)$ è derivabile in x_0
- $f(x)$ è un estremo di I

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ — non vale il contrario $\hookrightarrow$ possono essere dei punti critici



Caratterizzazione della monotonia tramite segno della derivata

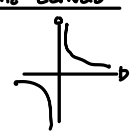
sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $I = (a,b)$

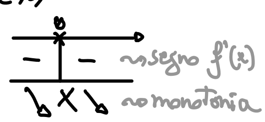
i) f debolmente crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$

ii) f debolmente decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$

iii) $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è crescente

iv) $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è decrescente





Derivata seconda

se $f'(x)$ è derivabile su $I \Rightarrow f'' = (f')'$
- $f(x)$ è l'altezza del grafico
- $f'(x)$ è la grandezza della retta tangente
- $f''(x)$ è una misura della concavità / convessità del grafico

Convesso

- $f''(x)$ cresce
- $\forall$ segmento che unisce due P resta sopra $f(x)$
- $\forall x, y \in I \wedge \forall t \in (0,1) \Rightarrow (1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$

Concavo

- $f''(x)$ decresce
- $\forall$ segmento che unisce due P resta sotto $f(x)$
- $\forall x, y \in I \wedge \forall t \in (0,1) \Rightarrow (1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$

Caratterizzazione Convessità/Concavità

equivalenti

i) $\frac{f(x) + f(h)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\forall x, y \in I$ e f continua

ii) f derivabile e $\forall x_0, x \Rightarrow \underbrace{f(x_0) + f'(x)(x-x_0)}_{\text{retta tangente in } x_0} \leq f(x)$

iii) f derivabile due volte e $f''(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$

iv) f derivabile e $f'(x)$ è una funzione crescente (decrescente)

Integrali

$f: I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I si dice primitiva di f se $F: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

$$\int f(x)\,dx = \{ F: I \to \mathbb{R} : F' = f \text{ su } I \}$$

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \,;\, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\operatorname{dom} f = I_1 \cup I_2 \Rightarrow \int f(x)\,dx = \begin{cases} F(x) + c_1 & \text{su } I_1 \\ F(x) + c_2 & \text{su } I_2 \end{cases}$$

Esistenza primitiva

se f è continua $\Rightarrow \exists$ una primitiva

(potrebbe non potersi scrivere esplicitamente)

es: $\int x e^{2x}\,dx$

CASO 1: $f(x) = x$, $g(x) = e^{2x}$; $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $g'(x) = 2e^{2x}$

caso 2: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x$; $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$, $g'(x) = 1$ ✓

$$\int x e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 1\,dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

Proprietà

- $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \rightsquigarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$
- $\int f'(x) g(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx \rightsquigarrow F(x) g(x) - \int F(x) g'(x)\,dx$

scegliere attentamente cosa usare come $g(x)$ così da poter rendere l'integrale esplicito

Integrali per sostituzione

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ due funzioni con:

- I, J sono intervalli
- f è continua su I
- g è derivabile su J, g' continua e $g(x) \in I \ \forall x \in J$

$$\Rightarrow \int f(\overbrace{g(x)}^{t}) \cdot \overbrace{g'(x)\,dx}^{dt} = \left(\int f(t)\,dt \right) \Big|_{t = g(x)}$$

$$t = g(x) \to \frac{dt}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x) \to dt = g'(x)\,dx$$

ES:

$$\int x \sin x^2\,dx = \int \sin(t) \frac{dt}{2} \Big|_{t=x^2} = \left(\frac{1}{2} \int \sin(t)\,dt \right) \Big|_{t=x^2} = \left(-\frac{\cos(t)}{2} + c \right) \Big|_{t=x^2} = -\frac{\cos(x^2)}{2} + c$$

$g'(x)\,dx$ — $f(g(x))$ — $g(x)$

Integrali di funzioni razionali

rapporto di polinomi $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (focalizziamo al caso $q(x)$ con grado ≤ 2)

1) riduzione del numeratore (se $\deg p \geq \deg q$)
2) trovare le radici di $q(x)$ (analisi del Δ)
3) Sistema lineare
4) Integrazione finale

$$\int \frac{-3}{x-1}\,dx \underset{y=x-1}{=} -\int \frac{3}{y}\,dy = -3 \ln(x-1)$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)^2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2}{2} - x - \ln(x-1) + c$$

es: $$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2 - 2x}{x-1}\,dx - \int \frac{3}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x - 4 \ln(x-1) + c$$

① $m/n = q$ con resto r $\longleftrightarrow$ $m = nq + r \ \wedge\ 0 \leq r < n$

$p(x)/q(x) = Q(x)$ con resto $r(x)$ $\longleftrightarrow$ $p(x) = Q(x) q(x) + r(x) \ \wedge$ grado $r(x) <$ grado $q(x)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)\,Q(x) + r(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

es:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 2x - 3 & x - 1 \\ \hline x^2 - x & x - 1 \ \to Q(x) \\ // \ -x - 3 & \\ \ \ \ -x - 1 & \\ \ \ \ // \ -4 \ \to r(x) & \end{array}$$

$\to x^2 - 2x - 3 = (x-1)(x-1) - 4$

$= x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$ ✓

verifica

②+③ dopo il passo ① si ha

grado 1: $\frac{q}{ax+b} \to \int \frac{q}{ax+b}\,dx = \frac{q}{a} \ln|ax+b| + c$

grado 2: $\frac{mx+q}{ax^2+bx+c}$

$\Delta > 0$: $$\frac{1}{a} \frac{mx+q}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a} \left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right] = \frac{A(x-x_2) + B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\to mx + q = A(x - x_2) + B(x - x_1) = \underbrace{(A+B)}_{m} x \underbrace{- Ax_2 - Bx_1}_{q} \longrightarrow \begin{cases} m = A + B \\ q = -Ax_2 - Bx_1 \end{cases}$$

ES: $$\frac{x + 3}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x + 2B - A}{(x+2)(x-1)}$$

$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2B - A = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -1/3 \\ B = 4/3 \end{cases}$

$$\frac{x+3}{(x+2)(x-1)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x+2} + \frac{4}{3} \frac{1}{x-1} = \text{verifica}$$

$\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ ≈ sopra → es $\frac{2x+3}{2(x+2)^2}$

$\Delta < 0$: $$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = A \cdot \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + B \frac{1}{ax^2+bx+c}$$ ≈ sopra es: $\frac{x+1}{x^2+x+1}$

④ ci rimangono solo da integrare situazioni come:

$$\frac{1}{x-x_1}, \quad \frac{1}{(x-x_1)^2}, \quad \frac{2ax}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

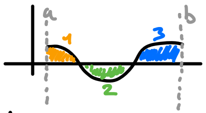
grado superiore

③ scompongo $q(x)$ in termini di grado ≤ 2

④ per ognuno dei termini di grado ≤ 2 considero le relative somme considerate prima e sommo tutto insieme

Integrali definiti

$\int_a^b f(x)\,dx$ é l'area con segno dell'area sottesa alla curva



$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 - 2 + 3$$

$= F(b)$

limite di somme sup o inf (area)

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = F(b) + c = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

generica primitiva

Cond di integrabilitá

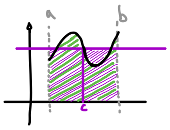
$f(x)$ é integrabile se soddisfa almeno una:

1) f é continua

2) f é continua a tratti, con un numero finito di salti

Teorema della media integrale

$$\exists c \in [a,b] \mid \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

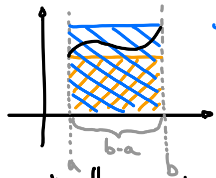


propietá

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $= F(a) = 0$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \forall a,b,c$
- $\int_a^b |f(x)|\,dx = 1 + 2 + 3$

- F é continua su $[a,b]$
- F é derivabile $\forall y \in [a,b]$
- $F'(y) = f(y)$ F é primitiva di f
- se $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow F(b) \geq G(b)$ ⇝ monotonia
- se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow F(b) \geq 0$ ⇝ positivitá

Somme sup ed inf



$$S_0^- = (b-a)\cdot \sup_{[a,b]} f(x) \qquad S_0^+ = (b-a) \inf_{[a,b]} f(x)$$

$$S_n = \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{2^n-1} \inf_{\left[a+i\frac{b-a}{2^n},\, a+(i+n\frac{b-a}{n})\right]} f(x)$$

intervalli piú piccoli es: $\frac{b-a}{4}$ o i-esimi

sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $S^+ = S^- \Rightarrow f$ é integrabile in $[a,b]$

nota, $\exists$ funzioni per le quali $S^+ \neq S^-$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $S_n = 0$ $S_n = 1$

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c \qquad \text{con } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c \qquad a > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{|x-\sqrt{a}|}{|x+\sqrt{a}|} + c \qquad a > 0$$

$$\int \frac{x}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+a| + c \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c \qquad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + c \qquad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{a}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{a-x^2}\right) + c \qquad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right) + c \qquad a \in \mathbb{R}$$

Studio di funzioni

① determinare il dom f e scriverlo come unione di intervalli: dom $f = I_I \cup I_{II} \cup I_{III} \dots$
② determinare (se poss) il segno di f ed eventuali intersezioni con gli assi, det se pari, dispari, periodica
③ determinare gli eventuali asintoti (orizzontali o verticali) = [fare i lim agli estremi degli intervalli del dom]
④ calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia
⑤ (a volte facoltativo) calcolare f'' e det gli intervalli di concavità/convessità di f ed i suoi FLESSI (cambi di concavità)
⑥ ricerca di max e min rel e assoluti, trovare inf f e sup f e se sono raggiunti ($\in \mathrm{Im} f$)
⑦ tracciare il grafico "qualitativo" di f ⊩
⑧ det Im f

- potenze con esponente intero $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \qquad n \text{ pari}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \qquad n \text{ dispari}$$

- potenze con esponente intero negativo $b = -n$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0 \qquad n > 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^{-n} = +\infty \qquad n \text{ pari}$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} x^{-n} = \pm\infty \qquad n \text{ dispari}$$

- radici n-esime $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} = 0 \qquad n \text{ pari}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{n}} = -\infty \qquad n \text{ dispari}$$

- potenze con esponente reale $b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty \qquad b > 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^b = 0 \qquad b < 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^b = 0 \qquad b > 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^b = +\infty \qquad b < 0$$

- esponenziale e logaritmo in base natuarle

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

- esponenziali e logaritmi

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty \qquad 0 < a < 1$$

- funzioni trigonometriche ed inverse

$$\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \sin x$$
$$\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$
$$\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \tan x$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Forme indeterminate del tipo ∞/∞ o $0 \cdot \infty$; ordini di infinto.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$
$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \qquad a > 1,\ b > 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = +\infty \qquad a > 1,\ b > 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b a^x = 0 \qquad a > 1,\ b > 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^b \log_a x = 0 \qquad a, b > 0,\ a \neq 1.$$

Forme indeterminate del tipo $0/0$: limiti fondamentali, figli e nipoti.

genitori: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

figli: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad a > 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad a > 0,\ a \neq 1$

nipoti: $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

$f(x)$		$f'(x)$	I
1		0	$\mathbb{R}$
x^n	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	n pari $(0, +\infty)$, n dispari $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
x^b	$b \in \mathbb{R}$	bx^{b-1}	$(0, +\infty)$
e^x		e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$a > 0$	$\log a\ a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\log_a x$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{d}{dx}|g(x)| = \frac{|g(x)|}{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c \qquad \text{con } a \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x(\log x - 1) + c$$
$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$$
$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c \qquad a > 0$$
$$\int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{|x-\sqrt{a}|}{|x+\sqrt{a}|} + c \qquad a > 0$$
$$\int \frac{x}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+a| + c \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c \qquad a > 0$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + c \qquad a \neq 0$$
$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{a}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{a-x^2}\right) + c \qquad a > 0$$
$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)\right) + c \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$$