# Derivación de Simetrías Cumpliendo el Teorema del Conjunto de Operadores de Observables Compatibles de la Ecuación de Klein-Gordon desde la Incertidumbre de Heinsenberg como Axioma Mínimo y Obtención de Potenciales Conservativos por Ordenes Superior

Enrique Casanova [1] Melvin Arias [1]

[1]Universidad Autonoma de Santo Domingo

## Resumen

En una ecuación de movimiento de un sistema cuántico, la cual está expresada como un operador hermítico con un observable medible, podemos encontrar el conjunto de operadores diferenciales de Observables Compatibles los cuales generan un conjunto extendido de soluciones relevantes extraídas de la conmutación con la ecuación de Klein-Gordon (Hamiltoneano del sistema) de una partícula libre en el espacio pseudo-Riemanniano de Minkowski (curvatura nula). Adicionalmente, las simetrías generan una base (vectorial) de los operadores diferenciales compatibles, cuya operación interna es cerrada y cumple el álgebra de Lie y crean el grupo de los Generadores de Simetría del sistema (Grupo de Poincare). Esta teoría va de acorde con la (super-)integrabilidad en 4 dimensiones (que es lo mismo que decir que es Liovilliana en mecánica clásica), al mismo tiempo que vincula con el espacio de fase en donde las variables conjugadas cumplen la tan conocida "incertidumbre de Heisenberg" en el espacio-momento y tiempo-energía, y las simetrías del sistema. Por último se expresa la obtención de potenciales polinómicos que conmutan con nuestro hamiltoniano y por tanto son conservativos.

## Ecuación de Klein Gordon

La ecuación de Klein-Gordon, nombrada por los trabajos de Oskar Klein y Walter Gordon en 1926, para partículas libres (sin potencial) relativistas en el espacio-tiempo plano de Minkowski es relevante para los campos escalares en el proceso de cuantización de particulas sin espin y es covariante Lorentz.

$$\hat{H}_{KG} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1}$$

Este operador es Hermitico con valor propio real $\lambda = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, las funciones de onda en el espacio de Hilbert cumplen:

$$\hat{H}_{KG}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle \tag{2}$$

La interpretación de la solución de esta ecuación está bien representada en el espacio de Fourier como una superposición de ondas planas la cual obedecen la relación de dispersión energía-momento de la relatividad especial. Adicionalmente, la ecuación (2) puede ser escrita como:

$$\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu\left|\psi\right\rangle = m^2c^2\left|\psi\right\rangle \tag{3}$$

Con el operador momento:

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_u \tag{4}$$

## Teorema de Observables Compatibles

El teorema de la compatibilidad nos dicta que dado dos observables (valores propios reales), son compatibles si y solo si sus operadores (hermiticos) correspondientes tienen una base de soluciones comunes, cumpliendo la conmutacion:

$$\left[\hat{H}_{KG}, \hat{L}\right] = 0 \tag{5}$$

En otras palabras, los observables de $\hat{H}_{KG}$ y $\hat{L}$ son igualmente medibles con exacta precisión y no depende del orden en el que los operadores actúan sobre la función de onda, y por tanto es simétrico en la medición.

$$\hat{H}_{KG}\hat{L}\left|\psi\right\rangle = \hat{L}\hat{H}_{KG}\left|\psi\right\rangle \tag{6}$$

Buscamos de la misma forma el CSOC del operador de primer orden diferencial proyectado en el álgebra no abeliana. Con $F^\mu \in \mathbf{A} = \mathbf{A}_+ \oplus \mathbf{A}_-$ (álgebra de Jordan + álgebra de Lie), donde:

$$\hat{L}(x) = F^0(ct,\mathbf{x})\partial_t + F^1(ct,\mathbf{x})\partial_x + F^2(ct,\mathbf{x})\partial_y + F^3(ct,\mathbf{x})\partial_z + F^4(ct,\mathbf{x}) \tag{7}$$

## Simetrías del Sistema

Luego de la conmutación $\left[\hat{H}_{KG}, \hat{L}\right] = 0$, escribimos $\hat{L}$ por combinación lineal de los elementos en $e_k \in \mathbf{A}$. Escribimos el operador $\hat{L}$ ahora como:

$$\hat{L}_{KG}(x) = K^\mu\hat{p}_\mu + \frac{1}{4}C^\mu(\alpha^v)^{-1}\hat{O}_{v\mu}(x) + K = \sum_{k=1}^{7} e_k\hat{D}_k + K \tag{8}$$

Donde $\alpha^0_\mu = (0, \alpha^0_1, \alpha^0_2, \alpha^0_3)$ , $\alpha^1_\mu = (\alpha^1_0, 0, \alpha^1_2, \alpha^1_3)$ , $\alpha^2_\mu = (\alpha^2_0, \alpha^2_1, 0, \alpha^2_3)$ y $\alpha^3_\mu = (\alpha^3_0, \alpha^3_1, \alpha^3_2, 0)$, estas constantes pertenecen a una parametrización continua. Y los elementos $K^\mu$, $C^\mu$ y $K$ forman una base de ocho dimensiones de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_8(\mathbf{C})$, cumpliendo el contraste $\sum_{\mu=0}^{3}(\alpha^0_\mu C^0 + \alpha^1_\mu C^1 + \alpha^2_\mu C^2 + \alpha^3_\mu C^3) = 0$. $\hat{L}_{KG}(x)$ cumple la **máxima superintegrabilidad**, porque admite $2n-1 = 7$ operadores diferenciales parciales algebraicamente independientes de orden finito, con $n = 4$ grados de libertad globales.

## Álgebra de Lie de los Generadores de Simetrías

Los primeros cuatro operadores de (8) son justamente los operadores de traslación en el espacio de Minkowski más tres rotaciones generalizadas y tres boosts generalizados. Estos seis últimos de forma explícita $\hat{O}_{nm} = \alpha^n(\alpha^m_\mu x^\mu)\hat{p}_m - \alpha^m(\alpha^n_\mu x^\mu)\hat{p}_n$.

1. Traslaciones por traslaciones:

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_v] = 0 \tag{9}$$

2. Rotaciones y Boots por traslaciones:

$$\left[\hat{O}_{\mu v}, \hat{p}_n\right] = \alpha^v\alpha^\mu_n\hat{p}_\mu - \alpha^\mu\alpha^v_n\hat{p}_v \tag{10}$$

3. Rotaciones y boosts por rotaciones y boosts:

$$\left[\hat{O}_{au}, \hat{O}_{bv}\right] = \alpha^a f^u\hat{M}_{ubv} + \alpha^u f^a\hat{M}_{avb} + \alpha^b f^v\hat{M}_{vua} + \alpha^v f^b\hat{M}_{bau} \tag{11}$$

O de la misma forma:

$$\left[\hat{O}_{au}, \hat{O}_{bv}\right] = \alpha^a\hat{J}_{bv} + \alpha^u\hat{J}_{vb} + \alpha^b\hat{J}_{ua} + \alpha^v\hat{J}_{au} \tag{12}$$

Donde $f^a = \alpha^a_\mu x^\mu$ y con los operadores $\hat{M}_{abc} = \alpha^c_a\alpha^b\hat{p}_c - \alpha^b_a\alpha^c\hat{p}_b$, cumplen:

1. Contraccion:

$$\alpha^a\hat{M}_{avu} = \alpha^u\hat{M}_{ava} + \alpha^v\hat{M}_{aau} \tag{13}$$

2. Representación de los operadores de traslación:

$$\hat{M}_{aba} = \alpha^b_a\alpha^a\hat{p}_b \tag{14}$$

3. Anulación por indices:

$$\hat{M}_{abb} = 0 \rightarrow \hat{O}_{bb} = 0 \tag{15}$$

4. Antisimetría :

$$\hat{M}_{abc} = -\hat{M}_{acb} \rightarrow \hat{O}_{bc} = -\hat{O}_{cb} \tag{16}$$

5. Sub-Álgebra de Lie:

$$\left[f^u\hat{M}_{ubv}, f^a\hat{M}_{anm}\right] = \left[\hat{J}_{bv}, \hat{J}_{nm}\right] = [Q^{bva}_{uv} - Q^{vba}_{ub}]f^u\hat{M}_{anm} + [Q^{nmu}_{am} - Q^{mnu}_{an}]f^a\hat{M}_{ubv} \tag{17}$$

Donde las constantes de estructura son $Q^{bva}_{uv} = \alpha^b\alpha^v_u\alpha^a_v$. Por ultimo, como los operadores cumplen el Álgebra de Lie, cumplen que $\hat{U}_n = e^{-e_n\hat{D}_n}$ son efectivamente generadores unitarios de simetrías del sistema, y por consiguiente sus valores propios son constantes del movimiento del sistema..

## Relación con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Como $\hat{x}_\mu$ y $\hat{p}_\mu$ son variables conjugadas que cumplen el principio de incertidumbre de Heisenberg acarrean una relación directa con la organización de las simetrías en el espacio de Minkowski y por tanto con la organización del Álgebra de Lie de los generadores de simetrías de (9-17). De forma compacta se escribe:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] = i\hbar\eta_{\mu v} \tag{18}$$

Todo este equilibrio surge de tener unas simetrías dependientes y únicas de la ecuación central que a su vez están ligadas a la forma del espacio-tiempo.

## Potenciales Conservativos de Orden Superior

Llamamos potencial conservativo al que conmuta con la ecuación central. Por la estructura del operador de Klein-Gordon, los potenciales puramente polinómicos $\hat{V}(x_\mu) \propto \hat{x}^n_\mu$ no conmutan.

$$\left[\hat{H}_{KG}, \hat{V}\right] \neq 0 \tag{19}$$

Aun así, si los potenciales son funciones de los operadores de simetría, estos si conmutan con $\hat{H}_{KG}$. La estructura mínima del potencial puede escribirse como:

$$\hat{V}(x_\mu, \hat{p}_\mu) = \sum_\mu [c_1 x_\mu + c_2\hat{p}^{-1}_\mu x_\mu\hat{p}_\mu] \tag{20}$$

Para la conmutación las constantes deben , $c_1 = -c_2$. Y por tanto los órdenes superiores de este operador potencial polinómico son igualmente conservativos.

$$\left[H_{KG}, \hat{V}^n\right] = 0 \tag{21}$$

## Referencias

[1] Nikolay Sukhomlin.
Estudio de simetria y de posibilidades de la resolucion exacta de las ecuaciones de schrodinger y hamilton-jacobi para un sistema aislado.
*CIENCIA Y SOCIEDAD*, XXIX(1), 2004.