

Universidad Autónoma de Santo Domingo

Primada de América
Fundada el 28 de Octubre de 1538

Facultad de Ciencias
Escuela de Física



Sobre la obtención de ecuaciones de movimiento a partir de simetrías en sistemas mecánico-cuánticos mediante el principio de incertidumbre de Heisenberg

Tesis de grado para optar por el título de Licenciatura en Física

Sustentante

Enrique Ernesto Casanova Benitez

Asesor

Melvin Santiago Arias Polanco

Santo Domingo, República Dominicana

Octubre, 2025

Resumen

Proponemos la construcción de ecuaciones de movimiento, a partir de los generadores de simetrías en sistemas mecánico-cuánticos, tomando como fundamento mínimo el principio de incertidumbre de Heisenberg-Weyl. A partir de los operadores canónicos se construyen dos espacios de operadores conjugados y un tercer espacio derivado de los anteriores que incluye el operador de *Simetría-Dilatación*. Cuando este operador conmuta con la ecuación de movimiento principal, define el conjunto de observables compatibles como una base completa de operadores (generadores de simetría) organizada en un álgebra de Lie dependiente del principio de incertidumbre en el espacio-tiempo de Minkowski. Al requerir la conmutación del operador de dilatación con el operador central, la función de onda queda restringida, permitiendo reconstruir estructuras conocidas. Este marco se aplica a casos específicos: relativista, no relativista, y un caso que ha comenzado a explorarse en tiempos recientes, *ultra-relativista (Carroll-Schrödinger)*. Además, asumiendo el principio de mínima acción en forma de operador dependiente del operador de dilatación, y la aplicación del teorema de Noether, se obtienen corrientes conservadas y se habilita la derivación diferencial de las ecuaciones de movimiento en cada caso, mediante comparación directa de las relaciones de Hamilton-Jacobi. Finalmente, se desarrolla una teoría introductoria de perturbaciones basada en una *incertidumbre modificada*, analizando su impacto en la dinámica cuántica y las condiciones que preservan las relaciones simétricas con el operador central. Como ejemplo, se obtiene la *ecuación ultra-relativista de Pauli* mediante una transformación simétrica que no deforma el HUP, así como la ecuación matricial *Carroll-Schrödinger-Pauli*. Este trabajo abre nuevas posibilidades para comprender y clasificar simetrías en mecánica cuántica, así como para proponer un método alternativo de derivación de ecuaciones de movimiento y su aplicación en escenarios complejos, incluyendo posibles partículas exóticas.

Abstract

We propose the construction of equations of motion, based on the symmetry generators in mechanical–quantum systems, taking as a minimal foundation the Heisenberg–Weyl uncertainty principle. From the canonical operators, two spaces of conjugate operators are constructed, together with a third space derived from the former that includes the *Symmetry–Dilation* operator. When this operator commutes with the main equation of motion, it defines the set of compatible observables as a complete basis of operators (symmetry generators) organized in a Lie algebra dependent on the uncertainty principle in Minkowski space–time. By requiring the commutation of the dilation operator with the central operator, the wave function becomes restricted, allowing the reconstruction of known structures. This framework is applied to specific cases: relativistic, non-relativistic, and a case that has begun to be explored in recent times, *ultra-relativistic (Carroll–Schrödinger)*. Moreover, by assuming the principle of least action in the form of an operator dependent on the dilation operator, and the application of Noether’s theorem, conserved currents are obtained and the differential derivation of the equations of motion in each case is enabled, through direct comparison with the Hamilton–Jacobi relations. Finally, an introductory perturbation theory is developed based on a *modified uncertainty*, analyzing its impact on quantum dynamics and the conditions that preserve the symmetric relations with the central operator. As an example, the *ultra-relativistic Pauli equation* is obtained through a symmetric transformation that does not deform the HUP, as well as the matrix equation *Carroll–Schrödinger–Pauli*. This work opens new possibilities for understanding and classifying symmetries in quantum mechanics, as well as for proposing an alternative method for deriving equations of motion and their application in complex scenarios, including possible exotic particles.

Contribuciones

La presente tesis ha sido derivada de la mano con el artículo [14] “*On the Derivation of Equations of Motion from Symmetries in Quantum-Mechanical Systems via Heisenberg’s Uncertainty*” publicado en el repositorio en línea [arXiv](#), autoría del sustentante y asesor.

Agradecimientos

La formulación matemática de la experiencia, a menudo tosca, del físico conduce, en un número asombroso de casos, a una descripción extraordinariamente precisa de una amplia clase de fenómenos.

— Eugene Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*

Agradezco a cada uno de mis profesores de la escuela de física de la Universidad Autónoma de Santo Domingo, en quienes se sembró en mí la continuidad del gran conocimiento práctico y teórico durante toda la carrera de Física, en especial al Dr. Vladimir Pérez, por darme el espacio en el Instituto de Física (IFIS) para poder desarrollar mis ideas, y a mi asesor Dr. Melvin Arias, que siempre se mantuvo firme y nunca se rindió conmigo, incluso cuando yo me rendía semanalmente; además de mentor, lo considero un arquetipo y ejemplo a seguir, que fomentó en mí una resiliencia continua y la concentración necesaria para alcanzar mis metas profesionales. Del mismo modo, agradezco a cada uno de mis amigos cercanos, que me brindaron ánimo en los momentos difíciles.

A mi madre, Whendy Benítez, por cuidarme incondicionalmente; y a mis abuelos, Caridad Ovalles y Ramón Benítez, por creer siempre en mí sin dudar ni un segundo. Por ustedes lucho.

Por último, agradezco a mi padre, José Casanova, por haberme heredado el amor por la ciencia. Eres y seguirás siendo mi motivación principal y la luz que ilumina mi camino en la oscuridad. Con esto cumplo una de las promesas que te hice en vida.

Gracias a todos.

Este artículo fue inspirado en el trabajo de Nikolay Sukhomlin, a través de mi asesor, el Dr. Melvin Arias. Espero que esta línea de investigación continúe creciendo con éxito.

Índice general

1. Introducción	13
1.1. Justificación	15
1.2. Planteamiento del Problema	16
1.2.1. Conjunto de Observables Compatibles	16
1.2.2. Generadores de Simetría	17
1.3. Antecedentes	19
1.4. Objetivos	20
1.4.1. Objetivo General	20
1.4.2. Objetivos Específicos	20
1.5. Revisión de la literatura	21
 I Simetrías y ecuaciones libres de movimiento bajo el HUP	 23
2. Marco Teórico	25
2.1. Factorización Simetría-Dilatación	25
2.2. Hipótesis	25
2.3. Afirmaciones	26
2.4. Acción y Noether	28
2.4.1. Teorema de Noether y su relación con la acción	29
 3. Casos Relativistas, No Relativista y Ultra Relativista	 31
3.1. Tipología Relativistas de Klein–Gordon y Dirac	31
3.1.1. Las Corrientes Relativistas	33
3.1.2. Derivación Diferencial de la Ecuación de Klein Gordon	34
3.1.3. Derivación Diferencial de la Ecuación de Dirac–Weyl	35
3.2. Casos No-Relativistas y Ultra-Relativistas	35
3.2.1. Caso No-Relativista	38
3.2.2. La Corriente No Relativista	39
3.2.3. Representación Diferencial de la Ecuación de Schrödinger	40
3.2.4. Caso Ultra-Relativista, Tipología de Carroll–Schrödinger	41
3.2.5. La Corriente Ultra-Relativista	42
3.2.6. Representación Diferencial de la Ecuación Carroll–Schrödinger	42
3.2.7. Restauración de Simetrías Rotacionales, Carroll–Schrödinger Matricial	46

II	Perturbación en el HUP	49
4.	Marco Teórico Perturbado	51
4.1.	Casos perturbados Simétricos	53
4.1.1.	Ecuación de Pauli sin Potencial Escalar	53
4.1.2.	Ecuación de Pauli	54
4.1.3.	Ecuación Carroll–Schrödinger-Pauli sin Potencial Escalar	54
4.1.4.	Ecuación Carroll–Schrödinger-Pauli (C.S.P.)	57
5.	Resumen de ecuaciones de movimiento	59
6.	Discusión	61
7.	Conclusión	63
8.	Recomendaciones	65

Capítulo 1

Introducción

El *principio de incertidumbre de Heisenberg-Weyl* (HUP, por sus siglas en inglés) formulado por Werner Heisenberg en 1927 [32], y poco después formalizada por Hermann Weyl en 1928, [52] establece que no es posible determinar simultáneamente (con precisión arbitraria), ciertos pares de magnitudes físicas (denominados pares conjugados), como la posición x y el momento lineal p . Se sigue,

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad (1.1)$$

donde Δx y Δp representa las incertidumbres estándar de cada magnitud y \hbar es la constante reducida de Planck ($\hbar \approx 1,054571817 \times 10^{-34} J \cdot s$). Este límite no es consecuencia de limitaciones experimentales, sino de la propia naturaleza ondulatoria y probabilística de los sistemas cuánticos [13]. Los mismos (1.1) son expresados como relaciones de operadores cuánticos, $p \rightarrow \hat{p}$, $x \rightarrow \hat{x}$ no conmutativos

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.2)$$

Aun así, actualmente, la búsqueda de marcos teóricos que incorporen efectos gravitatorios cuánticos ha motivado la modificación de la relación de incertidumbre de Heisenberg, dando lugar al denominado *Principio de Incertidumbre Generalizado* (GUP, por sus siglas en inglés). Este principio surge en diversas aproximaciones a la gravedad cuántica como la teoría de cuerdas, la gravedad cuántica de bucles o modelos de espacio-tiempo no conmutativo, y postula la existencia de una longitud mínima no nula (del orden de la longitud de Planck) por debajo de la cual la noción clásica de posición deja de tener sentido operacional¹. Matemáticamente, el GUP se implementa mediante deformaciones de las relaciones canónicas de conmutación, incorporando términos dependientes del momento que preservan la estructura relativista, y que implican una modificación fundamental del espectro de observables y de las simetrías internas del sistema [33] [34]. En general,

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= i\hbar\theta_{\mu\nu} \\ [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] &= i\hbar\Sigma_{\mu\nu} \\ [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] &= i\hbar g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹En este régimen, asociado a escalas del orden de la longitud de Planck $\ell_P \approx 1,6 \times 10^{-35}$ m, los efectos cuántico-gravitatorios modifican radicalmente la estructura del espacio-tiempo. Las fluctuaciones cuánticas de la geometría impiden definir con significado físico un punto espacial exacto, de modo que la posición sólo puede describirse mediante regiones mínimas de extensión finita.

donde $\theta_{\mu\nu}$, $\Sigma_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ son funciones del espacio de fase de operadores (posición y momento respectivamente) $(\hat{x}_\mu, \hat{p}_\mu) \in \Omega_n$, en n grados de libertad.

La relación canónica de conmutación (1.2) constituye la base algebraica sobre la que se erigen distintas construcciones formales en mecánica cuántica, como en teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés). Una de las más relevantes es el *álgebra de Weyl*, que permite formular estas relaciones de forma exponenciada mediante operadores unitarios $W(f)$ asociados a funciones de prueba f en el espacio de fase, satisfaciendo

$$W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W(f+g), \quad (1.4)$$

donde $\sigma(f,g)$ es una forma bilineal que cumple la estructura simpléctica², utilizada en problemas de dominio de operadores no acotados³ y es clave para la construcción rigurosa de representaciones cuánticas en espacios de Hilbert [37]. En paralelo, la cuantización canónica puede interpretarse como una deformación de esta estructura, y las variables clásicas de posición y momento en el espacio de fase x, p se sustituyen por operadores que satisfacen (1.2), preservando la correspondencia de corchetes de Poisson $\{\cdot, \cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$. En QFT, esta estructura se traslada al espacio de soluciones de ecuaciones de campo, dotándolo de una forma simpléctica que permite definir de manera unívoca las clases de equivalencia de observables (como los operadores de creación y destrucción).

Todo esto acompañado con el formalismo cuántico de los *observables* los cuales se representan mediante operadores auto-adjuntos $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ definidos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , cuya propiedad de auto-adjunción garantiza que sus valores propios $\lambda \in \mathbb{R}$ sean reales y, por tanto, físicamente medibles. En numerosos casos de interés, dichos operadores adoptan la forma de problemas diferenciales de tipo Sturm–Liouville

$$\mathcal{L}[y](x) \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), \quad (1.5)$$

dotados de condiciones de frontera apropiadas que aseguran la completitud del conjunto de funciones propias $\{y_n(x)\}$ ortogonales bajo el producto interno en su espacio funcional. En cuanto a la resolución del correspondiente problema de auto-valores $|\psi_n\rangle$ ⁴,

$$\hat{O} |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle, \quad |\psi_n\rangle \in \mathcal{H}, \quad (1.6)$$

²**Un álgebra simpléctica** es un álgebra de Lie asociada al grupo simpléctico $Sp(2n, \mathbb{R})$, que preserva una forma bilineal antisimétrica no degenerada. Estas estructuras aparecen de manera fundamental en mecánica hamiltoniana y en la formulación geométrica de la mecánica cuántica.

³Un **operador lineal** T definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dice **acotado** si existe una constante $M > 0$ tal que $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$. Cuando no existe tal M , el operador es **no acotado**. Ejemplos típicos son el operador de posición $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$ y el de momento $\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)$, ambos definidos en dominios densos de $L^2(\mathbb{R})$. Estos operadores no son acotados, pero son esenciales en la formulación rigurosa de la mecánica cuántica.

⁴La **notación de Dirac**, también conocida como notación bra–ket, es un formalismo introducido por Paul Dirac para describir estados cuánticos en un espacio de Hilbert. Un *ket* $|\psi\rangle$ representa un vector columna (estado), mientras que un *bra* $\langle\psi|$ es su dual hermitico (vector fila conjugado). El producto interno entre dos estados se escribe como $\langle\phi|\psi\rangle$, y el producto externo $|\phi\rangle\langle\psi|$ representa un operador. Esta notación facilita la manipulación algebraica y la generalización a sistemas con bases continuas o discretas.

no solo determina el espectro $\{\lambda_n\}$ de la magnitud física en cuestión, sino que también proporciona una base ortonormal en el espacio de Hilbert, si y solo si para un apropiado producto interno

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (1.7)$$

capaz de generar cualquier estado físico $|\Psi\rangle$ mediante la expansión discreta

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle, \quad c_n = \langle \psi_n | \Psi \rangle. \quad (1.8)$$

Este formalismo establece un vínculo directo entre la estructura algebraica de los operadores y la predicción cuantitativa de resultados experimentales descritas por la obtención de observables desde (1.6). Si resolvemos la ecuación de valores propios dado un operador asignado a una cantidad física,

$$\lambda_n = \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle \quad (1.9)$$

obtenemos todo el espectro medible del mismo, igualmente coincide formalmente con el valor esperado del observable cuando el sistema se encuentra en el estado propio $|\psi_n\rangle$, lo que refleja la consistencia entre la teoría espectral y la interpretación estadística usual de la mecánica cuántica. En el caso de las teorías cuánticas de campos, la sumatoria (1.8) pasa a ser una integral, por los grados de libertad infinitos, así como (1.7) se sustituye por una delta de Dirac y (1.9) se convierte en un funcional.

1.1. Justificación

De manera temprana, *von Neumann* intentó algebrizar la mecánica cuántica estableciendo, entre 1932 y 1936, un marco algebraico general a través de las *álgebras de operadores* (álgebras de von Neumann⁵ y C^* -álgebras⁶), proporcionando un lenguaje unificado para representar y clasificar todos los posibles espacios de Hilbert y las representaciones de las relaciones canónicas [35, 36]. En este formalismo, un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un espacio vectorial complejo dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ completo en la norma inducida, y los observables físicos se representan mediante operadores auto-adjuntos definidos sobre \mathcal{H} . Las relaciones canónicas de conmutación para un sistema con n grados de libertad

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{jk} \hat{\mathbb{I}}, \quad [\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad (1.10)$$

y el *Teorema de unicidad de Stone–von Neumann* asegura que, bajo ciertas condiciones, todas las representaciones irreducibles de estas relaciones son unitariamente equivalentes.

⁵**Álgebras de von Neumann.** Son subálgebras de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} que son $*$ -cerradas (cerradas bajo el adjunto) y cerradas en la topología débil (o, equivalentemente, en la topología débil- $*$). Contienen al operador identidad y están íntimamente relacionadas con la teoría de la medida y la probabilidad cuántica.

⁶ **C^* -álgebras.** Son álgebras normadas complejas \mathcal{A} con una operación de involución $*$ que satisfacen la identidad $\|A^*A\| = \|A\|^2$ para todo $A \in \mathcal{A}$, y que son completas respecto a la norma. Toda C^* -álgebra puede representarse como una subálgebra cerrada en norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert \mathcal{H} (Teorema de Gelfand–Naimark). Son el marco abstracto para la formulación algebraica de la mecánica cuántica, donde los observables corresponden a elementos auto-adjuntos de la C^* -álgebra.

Este esfuerzo pionero sentó las bases de la formulación algebraica de la mecánica cuántica y mostró la potencia de un enfoque estructurado en términos de operadores y simetrías. Otras personas que aportaron a esta área fueron: Paul Dirac [62], Garrett Birkhoff [113], Irving Segal [114], George Mackey [115], Haag y Kastler [116], Rudolf Haag [117].

A pesar de estos avances previos, no existe aún un marco algebraico unificado que parta directamente del principio de incertidumbre de Heisenberg y de las simetrías del sistema. Las ecuaciones de Schrödinger, Dirac y Klein-Gordon se derivan históricamente de fundamentos distintos, lo que dificulta su integración en un esquema común. De esta manera, se pretende aportar un marco conceptual que fortalezca la comprensión de la mecánica cuántica desde sus fundamentos algebraicos más esenciales, en inspiración a los trabajos de *von Neumann*.

1.2. Planteamiento del Problema

En la formulación variacional, el principio de acción estacionaria (con un Lagrangiano) genera las ecuaciones de movimiento mediante Euler–Lagrange, y el teorema de Noether vincula las simetrías continuas de la acción con corrientes y cargas conservadas. Esta es la vía estándar para analizar sistemas clásicos y cuánticos. Siendo poco explorado el caso inverso. Dado un conjunto de generadores de simetría (y sus relaciones algebraicas), asociados a cantidades conservadas, ¿existe una clase de ecuaciones de movimiento compatible con ellos simultáneamente? Más aún, ¿admiten estas ecuaciones una formulación lagrangiana (o hamiltoniana) equivalente, como ecuación de movimiento del sistema?

Por ende, el problema central que aborda esta investigación, es responder a esas preguntas en el caso cuántico, y determinar si el principio de incertidumbre de Heisenberg–Weyl (HUP) puede servir como fundamento mínimo para un espacio algebraico de operadores acotados, al cual se le impone la *compatibilidad de operadores* con la ecuación central, permitiendo derivar ecuaciones de movimiento en diferentes aproximaciones cuánticas, a partir de los generadores de simetría del sistema organizados por el mismo principio.

1.2.1. Conjunto de Observables Compatibles

En mecánica cuántica, dos observables representados por operadores Hermíticos \hat{A} y \hat{B} son compatibles si pueden medirse simultáneamente con precisión arbitraria. Matemáticamente, esto se traduce en la siguiente condición de conmutación

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0. \quad (1.11)$$

El conjunto de todos los operadores que conmutan con un dado operador \hat{Q} se denomina *centralizador* de \hat{Q} , denotado por $\mathcal{Z}(\hat{Q})$. Es decir,

$$\mathcal{Z}(\hat{Q}) = \{\hat{A} \in F(\mathcal{H}) \mid [\hat{A}, \hat{Q}] = 0\} \quad (1.12)$$

donde $F(\mathcal{H})$ es una álgebra de operadores definida sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si existe un conjunto de operadores mutuamente conmutantes $\{\hat{A} = \hat{L}_0, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_{m-1}\}$, entonces

dicho conjunto constituye un *conjunto completo de observables compatibles*⁷ (CSCO, por sus siglas en inglés). La importancia del CSCO radica en que permite la construcción de una base ortonormal de estados propios $\{|\psi_i\rangle\}$

$$\hat{L}_k |\psi_i\rangle = \lambda_k^{(i)} |\psi_i\rangle, \quad \forall k = 0, \dots, m-1, \quad (1.13)$$

donde $\lambda_k^{(i)}$ son los valores propios asociados a cada observable \hat{L}_k . Esta propiedad garantiza que los estados $|\psi_i\rangle$ están completamente determinados por los valores de los observables compatibles [26] [31]. De esta forma m observables pueden medirse sucesivamente (y sin perturbar la medición siguiente), sin importar el orden, como $[\hat{L}_l, \hat{L}_p] = 0$ para cualquier l o p .

1.2.2. Generadores de Simetría

Las transformaciones de simetría son operaciones realizadas en los dispositivos que preparan los estados y en los aparatos que miden los observables, teniendo la propiedad de no cambiar los resultados de los experimentos. Por ejemplo, las traslaciones de simetría es debido a la homogeneidad del espacio por trasladar el sistema, las rotaciones debido a la isotropía del espacio por rotar el sistema, y en relatividad las transformaciones *boosts* por la isotropía del espacio-tiempo por comparar dos sistemas inerciales que se mueven a velocidad constante entre sí. En el caso de sistemas con simetría, el operador de Casimir \hat{C} de un grupo de Lie \mathbf{G} suele pertenecer al centro de la envolvente universal $\mathcal{A}(\mathbf{G})$,

$$[\hat{C}, \hat{D}_a] = 0, \quad \forall \hat{D}_a \in \mathcal{A}(\mathbf{G}) \quad (1.14)$$

donde $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ es un algebra de Lie, y implica que $\hat{C} \in \mathcal{Z}(\hat{D}_a)$. Por tanto, es posible formar un conjunto de operadores unitarios, tal que, al aplicarse a la función de onda mantenga la norma del espacio de Hilbert invariante usando el *teorema de Wigner* [95] se tiene la representación unitaria (anti-unitaria) dado \hat{D}_a .

$$\hat{U}_a(r_a) = e^{r_a \hat{D}_a} \quad (1.15)$$

Siendo r_i un parámetro complejo, y cumplen el **álgebra de Lie** de generadores de simetría.

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_j] = \sum_k C_{ij}^k \hat{D}_k \quad (1.16)$$

Con $C_{ij}^k \in \mathbb{C}$ constantes de estructura. Por consiguiente, este conjunto de operadores forma un grupo \mathbf{G} de Lie, $\hat{U}_i \in \mathbf{G}$. Por ejemplo, en relatividad especial, las simetrías fundamentales

⁷**Teorema del Conjunto de Observables Compatibles (CSCO).** En mecánica cuántica, un conjunto completo de observables compatibles es un conjunto maximal de operadores Hermíticos que conmutan entre sí y cuyos valores propios determinan de forma única el estado cuántico del sistema (hasta una fase global). Formalmente, si $\{\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_{m-1}\}$ es un CSCO, entonces para cada conjunto de valores propios $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ existe un único vector propio $|\psi\rangle$ (salvo una fase) tal que $\hat{L}_k |\psi\rangle = \lambda_k |\psi\rangle$ para todo k . Este teorema garantiza que la medición simultánea de todos los observables del CSCO permite identificar completamente el estado físico del sistema, y que dichas mediciones no interfieren entre sí debido a la conmutatividad de los operadores.

del espacio-tiempo de Minkowski están descritas por el **grupo de Poincaré**. Estos diez generadores forman un *álgebra de Lie de Poincaré*⁸, cerrada bajo conmutadores, preservando la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. En su representación diferencial, actúan como operadores sobre funciones de onda $\psi(x^\mu)$ en el espacio-tiempo, y son esenciales para formular ecuaciones relativistas como las de Klein–Gordon o Dirac (ver cuadro 1.1).

Generador de Simetría	Símbolo	Forma diferencial
Traslación temporal	\hat{p}_0	$-i \partial_t$
Traslación espacial x	\hat{p}_1	$-i \partial_x$
Traslación espacial y	\hat{p}_2	$-i \partial_y$
Traslación espacial z	\hat{p}_3	$-i \partial_z$
Rotación xy	\hat{M}_{12}	$i(x \partial_y - y \partial_x)$
Rotación xz	\hat{M}_{13}	$i(x \partial_z - z \partial_x)$
Rotación yz	\hat{M}_{23}	$i(y \partial_z - z \partial_y)$
Boost en x	\hat{M}_{01}	$i(t \partial_x + x \partial_t)$
Boost en y	\hat{M}_{02}	$i(t \partial_y + y \partial_t)$
Boost en z	\hat{M}_{03}	$i(t \partial_z + z \partial_t)$

Cuadro 1.1: Generadores de simetría relativistas en forma diferencial.

La representación del álgebra de Lie de Poincaré es

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0 \quad (1.17)$$

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{p}_\rho] = i\hbar(\eta_{\mu\rho}\hat{p}_\nu - \eta_{\nu\rho}\hat{p}_\mu) \quad (1.18)$$

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] = i\hbar(\eta_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho}). \quad (1.19)$$

De manera más profunda, en la teorica cuantica relativista, los estados cuánticos se organizan en representaciones irreducibles del grupo de Poincaré, clasificándose por masa y espín según el célebre análisis de Wigner. Así, “partícula” significa un multiplete de estados con la misma masa y espín, transformando de forma coherente bajo Poincaré, lo que explica degeneraciones, reglas de selección y la forma covariante de las ecuaciones de Dirac y Klein–Gordon asociadas a cada tipo de representación.

⁸**El álgebra de Poincaré** describe las simetrías fundamentales del espacio–tiempo de Minkowski. Sus generadores tienen un significado físico claro, - P_0 corresponde a la energía, asociado a traslaciones temporales. - P_i representan los momentos lineales, asociados a traslaciones espaciales. - $J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$ son los generadores de rotaciones, responsables de la conservación del momento angular. - $K_i = M_{0i}$ son los generadores de boosts de Lorentz, que relacionan observadores en movimiento relativo. En conjunto, estos operadores codifican la invariancia bajo traslaciones, rotaciones y cambios de marco inercial, garantizando la validez de la relatividad especial y la conservación de energía, momento y momento angular.

1.3. Antecedentes

Las ecuaciones de movimiento describen cómo evolucionan los sistemas físicos en el tiempo, constituyendo una herramienta fundamental para predecir el comportamiento dinámico de partículas y campos. Desde Isaac Newton en el siglo XVII, se formularon las leyes del movimiento de la mecánica clásica [27], como la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (1.20)$$

representando uno de los primeros marcos matemáticos unificados de la física. Casi un siglo después, Pierre Louis Maupertuis propuso en 1744 el principio de mínima acción [28],

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (1.21)$$

refinado en 1788 con el formalismo lagrangiano de Joseph-Louis Lagrange [25] y posteriormente reformulado y ampliado por Hamilton en 1834–1835 [29, 30], derivando así las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.22)$$

para describir de forma elegante la dinámica a partir de un lagrangiano.

Luego, en el siglo XX, la mecánica cuántica introdujo ecuaciones de movimiento que no requerían explícitamente el principio de mínima acción. En 1926, Erwin Schrödinger formuló su ecuación para describir la evolución temporal de estados cuánticos no relativistas [19],

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.23)$$

mientras que, en paralelo, Heisenberg desarrolló la mecánica matricial con un enfoque distinto [12],

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right)_{\text{expl}}. \quad (1.24)$$

Más tarde, Dirac demostró la equivalencia de ambas formulaciones [24] y, en 1928, integró la relatividad especial con la mecánica cuántica en su ecuación para el electrón [20, 21]

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0, \quad (1.25)$$

derivada algebraicamente de la ecuación de Klein–Gordon [22, 23]

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0. \quad (1.26)$$

Por último, entre las décadas de 1930 y 1940, la teoría cuántica de campos (QFT) adoptó la densidad lagrangiana como base funcional, perfeccionada por Dirac y Julian Schwinger [17, 18], permitiendo derivar ecuaciones de movimiento para campos y partículas a partir del principio de mínima acción

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (1.27)$$

lo que resolvió problemas de la mecánica cuántica relativista como la no conservación del número de partículas [15] y la violación de la causalidad [16].

1.4. Objetivos

Proponemos la construcción de ecuaciones de movimiento basadas en simetrías en sistemas mecánico-cuánticos, utilizando el principio de incertidumbre de Heisenberg como fundamento mínimo. A partir de operadores canónicos, se construyen dos espacios de operadores conjugados, junto con un tercer espacio derivado de los anteriores, que incluye al operador de “Simetría-Dilatación”. Cuando este operador conmuta con la ecuación principal de movimiento, se define el conjunto de observables compatibles con una base completa de operadores (generadores de simetría), organizados en una álgebra de Lie dependiente del principio de incertidumbre de Heisenberg dentro del espacio-tiempo de Minkowski. Además, al requerir que el operador de dilatación (proporcional a la acción en el espacio de operadores) conmute con el operador central, se restringe la función de onda, permitiendo así la construcción de estructuras conocidas. Se derivan casos específicos: relativista, no relativista, y un caso menos explorado, ultra-relativista cuando la velocidad de la luz tiende a cero $c \rightarrow 0$ en comparación con otras variables del sistema.

1.4.1. Objetivo General

Analizar, mediante una organización algebraica operacional, cómo el principio de incertidumbre de Heisenberg establece el límite mínimo para la construcción de ecuaciones de movimiento en mecánica cuántica plana (partículas cuánticas en Minkowski), así como su posible extensión a sistemas cuánticos perturbados.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Construir un espacio de operadores cerrado que permita formular ecuaciones de movimiento de forma operacional.
- Derivar y unificar, en un marco teórico y algebraico común, ecuaciones conocidas relativistas y no-relativistas de la cuántica, todas consistentes con el HUP en Minkowski.
- Identificar y representar la estructura simétrica mínima en el espacio-tiempo de Minkowski para cada ecuación de movimiento central.
- Explorar el caso ultra relativista. Extensión cuántica poco estudiada en la literatura.
- Restringir la función de onda mediante el principio de mínima acción y relacionarlo con el *teorema de Noether*, permitiendo la derivación diferencial de las ecuaciones de movimiento.
- Desarrollar una teoría introductoria de la incertidumbre perturbada, para derivar extensiones de las ecuaciones principales bajo perturbaciones que dejan invariante el HUP.
- Analizar la estructura y el significado físico de la ecuación de Carroll–Schrödinger, y su extensión matricial Carroll–Schrödinger–Pauli derivada por la perturbación simétrica de un *boost* de Carroll.

1.5. Revisión de la literatura

En la literatura contemporánea, la *Conformal Field Theory* (CFT) se ha consolidado como un marco teórico fundamental para el estudio de sistemas invariantes bajo el grupo conforme, el cual incluye traslaciones, rotaciones, dilataciones y transformaciones conformes especiales [54, 9]. A diferencia de los enfoques tradicionales basados en el principio de mínima acción, la CFT se construye directamente a partir de las simetrías y de la estructura algebraica que estas imponen sobre los operadores y correladores del sistema [10]. Este énfasis en la simetría como elemento generador de la dinámica ha permitido avances significativos en áreas como la teoría de cuerdas, la física estadística en puntos críticos y la clasificación de teorías cuánticas de campos bidimensionales [11].

Parte I

Simetrías y ecuaciones libres de movimiento bajo el HUP

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Factorización Simetría-Dilatación

La siguiente construcción surge al asumir la estructura mínima de un sistema cuántico en un espacio de operadores $F(Z_{\alpha\beta})$, la relación canónica de incertidumbre de Heisenberg–Weyl, la cual dicta una conexión intrínseca entre el operador de “Simetría-Dilatación” $\hat{Q} \in F(Z_{\alpha\beta})$ y el operador de Casimir $\hat{A} \in F(Z_{\alpha\beta})$. En consecuencia, la ecuación dinámica que rige la función de onda del sistema cuántico emerge al imponer la conmutación

$$[\hat{A}, \hat{Q}] = 0 \quad (2.1)$$

así, $\hat{A} \in \mathcal{Z}(\hat{Q})$, lo que significa que pertenece al centralizador de \hat{Q} . Esta condición de conmutación garantiza el teorema de observables compatibles (CSCO) para \hat{A} (discutido por primera vez por Dirac en *The Principles of Quantum Mechanics* [17]). De este modo, aseguramos que los operadores son simultáneamente medibles dentro del sistema y que sus soluciones comparten el mismo espacio de Hilbert L^2 . Además, al comprender cómo se expanden y organizan los operadores base dentro de \hat{Q} , podemos determinar cuántas simetrías admite el sistema cuántico.

2.2. Hipótesis

- Álgebra canónica (HUP).

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\eta_{\mu\nu}$$

compactificada en forma de cuatro-vector usando la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

- Operadores lineales mínimos.
 - Traslación Dual Lineal.

$$\hat{N}_\alpha = \alpha_\mu \hat{x}^\mu + \alpha' \hat{I},$$

- Traslación Lineal.

$$\hat{M}_\beta = \beta_\nu \hat{p}^\nu + \beta' \hat{I},$$

(usando la convención de suma de Einstein sobre $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

- Tomando $\hat{Q}(\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu) \equiv \hat{N}_\alpha \hat{M}_\beta$, el operador de simetría autoadjunto se factoriza como una combinación completa de generadores de simetría y el operador de “dilatación”.

$$\hat{Q} = c_l \hat{I} + c_p^\mu \hat{p}_\mu + c_x^\mu \hat{x}_\mu + c_m^{\mu\nu} \hat{M}_{\mu\nu} + \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{S}} + \hat{\mathcal{D}}$$

donde los coeficientes c son funciones polinomiales de $\alpha_\mu, \beta_\nu, \alpha', \beta'$. Los símbolos $\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{\mathcal{S}}$ y $\hat{\mathcal{D}}$ representan, respectivamente: rotaciones, *boosts*, simetrías y dilatación.

- Condición de Simetría (Casimir). Se requiere la existencia de un operador Hermítico \hat{A} tal que conmute con \hat{Q} para algún estado $|\Phi_c\rangle \in L^2(\mathbf{R}^4)$.
- Condición Simpléctica con peso.

$$[\hat{N}_\alpha, \hat{M}_\beta] = i\hbar \alpha_\mu \beta^\mu \quad (2.2)$$

Donde se toma $[\alpha_u, \beta_u] = 0$ y $[\alpha', \beta'] = 0$. Esta es la condición de cuantización canónica de operadores conjugados en el espacio $Z_{\alpha\beta}$.

2.3. Afirmaciones

- A1 : *Determinación de \hat{A}* Bajo las hipótesis anteriores, la condición $[\hat{A}, \hat{\mathcal{S}}]|\Phi\rangle = 0$, determina de manera única a \hat{A} como una función de los generadores de simetría,

$$\hat{A} \equiv A(\hat{\mathcal{S}}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \hat{\mathcal{S}}^n$$

donde los coeficientes q_n son números reales (o matrices reales). Además, en algunas aplicaciones, el operador de Casimir puede ser una función de una simetría específica de $\hat{\mathcal{S}}$.

- A2 : *Ecuación Dinámica Universal* Para algún vector de estado $|\Phi_c\rangle$, debe cumplirse la siguiente condición

$$[\hat{A}, \hat{\mathcal{D}}]|\Phi_c\rangle = 0 \sim \hat{A}|\Phi_c\rangle = 0,$$

donde $\hat{\mathcal{D}}$ es el operador de dilatación¹, definido explícitamente

$$\hat{\mathcal{D}} \equiv \alpha^\mu \beta^\mu \hat{x}_\mu \hat{p}_\mu = \alpha_0 \beta_0 \hat{t} \hat{H} + \alpha_1 \beta_1 \hat{x} \hat{p}_x + \alpha_2 \beta_2 \hat{y} \hat{p}_y + \alpha_3 \beta_3 \hat{z} \hat{p}_z.$$

Cabe destacar que, en el desarrollo de la teoría cuántica de campos, el análisis de las simetrías de escala ha sido abordado sistemáticamente mediante el generador de dilatación, el cual en cuatro dimensiones fue definido por Peskin y Schroeder [101], y utilizado para determinar las dimensiones canónicas de los campos y estudiar anomalías de escala. Posteriormente, en el contexto de teorías conformes bidimensionales, Di Francesco et al. [54], mediante el álgebra de Virasoro, enfatizaron su papel central en la clasificación de campos primarios y en la estructura conforme.

¹En una teoría conforme de campos (CFT), el *operador de dilatación* $\hat{\mathcal{D}}$ es el generador de transformaciones de escala, es decir, aquellas que reescalan las coordenadas espaciales y temporales como $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$. Su acción sobre un campo $\mathcal{O}(x)$ de dimensión de escala Δ está dada por la relación de conmutación

$$[\hat{\mathcal{D}}, \mathcal{O}(x)] = i(x^\nu \partial_\nu + \Delta) \mathcal{O}(x),$$

lo que refleja que $\hat{\mathcal{D}}$ mide cómo cambia el campo bajo dilataciones. En el álgebra conforme, $\hat{\mathcal{D}}$ aparece junto con los generadores de traslaciones \hat{p}_μ , rotaciones/*boosts* $\hat{M}_{\mu\nu}$ y transformaciones conformes especiales \hat{K}_μ , satisfaciendo las relaciones de conmutación del grupo conforme $SO(d, 2)$. Físicamente, $\hat{\mathcal{D}}$ permite clasificar los campos en *primarios* y *descendientes* según su dimensión de escala, y su espectro está directamente relacionado con las dimensiones canónicas y anómalas de los operadores en la CFT.

2.4. Acción y Noether

En esta sección asumiremos que la acción $\hat{S}_{\alpha\beta}$ es directamente proporcional al operador dilatación

$$\hat{S}_{\alpha\beta} \propto \mathcal{D}. \quad (2.3)$$

Se sigue entonces que, el principio de mínima acción (en forma de operador) surge de la conmutación con el operador central \hat{A} , asegurando de esta forma una conservación para un tipo específico de funciones de onda en el espacio de Hilbert que cumplen ser soluciones simultáneas de ambos operadores

$$\delta \hat{S}_{\alpha\beta} |\Phi_c\rangle \longrightarrow [\hat{A}, \hat{S}_{\alpha\beta}] |\Phi_c\rangle = 0, \quad (2.4)$$

para un espacio parametrizado por alguna variable $\tau \in \mathbf{R}$, los grados de libertad del espacio de fase toman la forma $x_\mu = x_\mu(\tau)$ y $p_\mu = p_\mu(\tau)$, proyectando el espacio a la línea recta real. Ahora podemos definir nuestra ecuación de movimiento de Heisenberg (Teorema de Ehrenfest ²) definiendo la dinámica cuántica de la acción

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{S}_{\alpha\beta}] \rangle (x^\mu(\tau), p^\mu(\tau); \tau). \quad (2.5)$$

Y con la interpretación de operadores en la imagen de interacción³, la evolución dinámica se define por la ecuación central

$$\hat{S}_{\alpha\beta}(\tau)_{\alpha\beta} = e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{A}} \hat{S}_{\alpha\beta} e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{A}}. \quad (2.6)$$

Si el operador es constante $\hat{S}_{\alpha\beta}(\tau) = \hat{S}_{\alpha\beta}$ cumple la conmutación (2.4) y por tanto la conservación esperada de la acción en todo el movimiento del sistema bajo τ .

La relación de Hamilton–Jacobi surge al expresar el valor esperado de la acción

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{d\tau} = \sum_{\mu} \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \frac{dx_{\mu}}{d\tau} + \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial p_{\mu}} \frac{dp_{\mu}}{d\tau} \right) \quad (2.7)$$

²**Teorema de Ehrenfest.** Establece el vínculo entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica al mostrar que los valores esperados de los observables cuánticos obedecen ecuaciones de movimiento análogas a las leyes clásicas de Newton o Hamilton. Para un operador \hat{A} sin dependencia temporal explícita, se cumple

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle$$

y, si \hat{A} depende explícitamente del tiempo, se añade el término $\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle$. Aplicado a posición y momento, este teorema conduce a

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle,$$

lo que muestra que la dinámica media de un sistema cuántico sigue la forma de la segunda ley de Newton, conectando así el formalismo cuántico con el límite clásico.

³**Imagen de interacción en mecánica cuántica.** Es una representación intermedia entre la imagen de Schrödinger y la de Heisenberg. En ella, los operadores evolucionan en el tiempo bajo la dinámica del Hamiltoniano libre H_0 , mientras que los estados evolucionan bajo la influencia del Hamiltoniano de interacción $H_I(t)$. Formalmente, un operador en la imagen de interacción se define como $\hat{O}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}$, y el estado como $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_S(t)\rangle$.

En forma de operadores

$$\langle [\hat{A}, \hat{S}_{\alpha\beta}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \langle [\hat{A}, \hat{x}_{\mu}] \rangle + \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial p_{\mu}} \langle [\hat{A}, \hat{p}_{\mu}] \rangle \right). \quad (2.8)$$

Finalmente obtenemos las relaciones de Hamilton en nuestro espacio de operadores.

$$\langle \alpha_{\mu} \beta_{\mu} \hat{p}_{\mu} \rangle \propto \frac{1}{i\hbar} \partial_{\mu} \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle \quad (2.9)$$

$$\langle \alpha_{\mu} \beta_{\mu} \hat{x}_{\mu} \rangle \propto \frac{1}{i\hbar} \partial_{p_{\mu}} \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle \quad (2.10)$$

2.4.1. Teorema de Noether y su relación con la acción

Emmy Noether en 1918, publica su teorema el cual establece una conexión profunda entre las simetrías continuas de un sistema físico y las leyes de conservación que este obedece [8]. En el marco de la mecánica clásica y cuántica, si la acción de un sistema

$$S[\phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) d^n x, \quad (2.11)$$

es invariante bajo un grupo continuo de transformaciones de la forma

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon \delta x^{\mu}, \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \epsilon \delta \phi(x), \quad (2.12)$$

entonces existe una *corriente conservada* j^{μ} tal que

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (2.13)$$

Dicha corriente se obtiene como

$$j^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^{\mu}, \quad (2.14)$$

luego de minimizar la acción (2.11). La cantidad conservada asociada (carga de Noether) es

$$Q = \int_{\Sigma_t} j^0 d^{n-1}x, \quad \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

Por ejemplo, la simetría temporal de la acción implica la conservación de la energía, la espacial implica la conservación del momento lineal, y la invariancia bajo rotaciones implica la conservación del momento angular etc.

En nuestro contexto, la acción $\hat{S}_{\alpha\beta}$ está directamente relacionada con el operador de dilatación \mathcal{D} , y su conmutación con el operador central \hat{A} garantiza compatibilidad con la existencia de cantidades conservadas en el espacio de Hilbert, analogas a Noether.

Capítulo 3

Casos Relativistas, No Relativista y Ultra Relativista

Todas las sub-secciones posteriores se obtienen como una aplicación particular, asumiendo que $\hat{A} = \hat{A}(c_p^\mu \hat{p}_\mu)$ es únicamente una función de \hat{p}_μ . Basta con agrupar los elementos dentro de $\hat{N}_\alpha \hat{M}_\beta$ de manera que generen el álgebra deseada, expresando así diferentes casos de \hat{Q} . Luego, \hat{A} se calcula utilizando las reglas de conmutación, asegurando el cumplimiento de la ecuación (2.1), y se impone la condición $[\hat{A}, \hat{\mathcal{D}}] |\Phi_c\rangle = 0$, satisfaciendo de este modo las afirmaciones de la sección 2.3. En todos estos casos, la noción de espín como una simetría interna surge a partir de la definición de los elementos α_n y β_n , los cuales satisfacen a su vez un álgebra específica.

3.1. Tipología Relativistas de Klein–Gordon y Dirac

En el caso de agrupar simetrías relativistas impuestas sobre el operador \hat{Q} , su condición de conmutación con \hat{A} es de grado ajustable k (es decir, \hat{p}_μ^k). Al elegirlo cuadrático, surge inmediatamente la ecuación de Klein–Gordon de segundo orden para espines enteros. Si se toma lineal, aparece simultáneamente la ecuación de Dirac de primer orden para espines semienteros. Así, ambas formulaciones se derivan de un núcleo simétrico común y se implican mutuamente dentro del mismo marco algebraico.

Agrupación de Rotaciones y *boosts*.

$$\alpha_\mu \beta_\nu = -\alpha_\nu \beta_\mu \quad (3.1)$$

El operador relativista $\hat{\mathcal{S}}$ se escribe ahora como una combinación lineal de los generadores de simetría,

$$\hat{\mathcal{S}} = \alpha' \beta' + \alpha^\mu \beta^\nu \hat{M}_{\mu\nu} + \alpha' \beta^\mu \hat{p}_\mu + \alpha^\mu \beta' \hat{x}_\mu \quad (3.2)$$

donde $\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{x}_\mu \hat{p}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{p}_\mu$ son las rotaciones y los *boosts* de Lorentz en la representación de operadores. Nótese que los primeros diez operadores satisfacen las relaciones de conmutación características del álgebra de Lie del grupo de Poincaré, en el caso de Klein–Gordon, como generadores de simetrías continuas. Para el caso de Dirac, es necesario imponer la condición

$\alpha'\beta' = k_0\alpha^\mu\beta^\nu\sigma_{\mu\nu}$, donde $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ es antisimétrica, para no romper la estructura del álgebra de Lie y, en su lugar, acoplar a $\hat{M}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{M}_{\mu\nu} + k_0\sigma_{\mu\nu}$. Finalmente, observamos una simetría adicional proveniente del último elemento de (3.2); esta simetría actúa como una restricción que adquirirá significado físico más adelante.

Ahora, el operador central

$$\hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha'\beta^\rho \hat{p}_\rho)^n, \quad (3.3)$$

el cual debe conmutar con cada rotación y *boost* del sistema $[\hat{A}, \alpha'\beta' + \alpha_\mu\beta_\nu\hat{M}_{\mu\nu}] = 0$, con $a_{n>1} \in \mathbb{R}$, y donde a_0 podría ser una matriz constante. De esto obtenemos la primera restricción sobre el operador central

$$\alpha_\mu\beta_\nu [\hat{A}, \hat{M}_{\mu\nu} + k_0\sigma_{\mu\nu}] = -[\hat{A}, \alpha_\mu\beta_\nu] (\hat{M}_{\mu\nu} + k_0\sigma_{\mu\nu}). \quad (3.4)$$

El conmutador del lado izquierdo debe anularse para que el operador satisfaga el álgebra completa de Poincaré con espín. Por lo tanto, el conmutador del lado derecho, que restringe las simetrías internas, también debe ser nulo. Expresando la primera conmutación explícitamente

$$[(\alpha'\beta^\rho \hat{p}_\rho)^n, \hat{M}_{\mu\nu}] = -k_0[(\alpha'\beta^\rho \hat{p}_\rho)^n, \sigma_{\mu\nu}]. \quad (3.5)$$

Destacamos que cuando $n = 2k$ (par), se cumple la doble conmutación $[(\alpha'\beta^\rho \hat{p}_\rho)^{2k}, \hat{M}_{\mu\nu}] = 0 \rightarrow [(\alpha'\beta^\rho \hat{p}_\rho)^{2k}, \sigma_{\mu\nu}] = 0$. Por ejemplo, eligiendo $k = 1$, obtenemos la primera relación de Klein–Gordon $(\alpha'\beta^c)(\alpha'\beta_d)[\hat{p}_c\hat{p}^d, \hat{M}_{\mu\nu}] = 0$, la cual, dado que $[\hat{p}_\sigma\hat{p}^\sigma, \hat{M}_{\mu\nu}]$ conmuta, debe tomarse de forma que,

$$\{\alpha'\beta_\mu, \alpha'\beta_\nu\} = 0 \rightarrow [(\alpha'\beta^\rho)^2, \sigma_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.6)$$

cuando $(\mu \neq \nu)$, la suma en (3.3) se simplifica significativamente al eliminar la dependencia de los términos cruzados $\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu, \dots$, acercándonos a la estructura usual de un operador relativista en el espacio de Minkowski. Ahora, la ecuación (3.5) se convierte en

$$(\alpha'\beta^\rho)^n [\hat{p}_\rho^n, \hat{M}_{\mu\nu}] = -k_0[(\alpha'\beta^\rho)^n, \sigma_{\mu\nu}]\hat{p}_\rho. \quad (3.7)$$

Como se discutió anteriormente, dependiendo de si n es par o impar, obtenemos dos restricciones de conmutación distintas para cada caso. Continuando desde (3.4), llegamos finalmente a la restricción sobre los elementos $[(\alpha'\beta_\rho), \alpha_\mu\beta_\nu] = 0$ (la cual, como se requiere para $n = 1$ en el caso de Dirac, se cumple para cualquier valor de n).

Finalmente, la conmutación de \hat{A} con la suma $\alpha^\mu\beta'\hat{x}_\mu$ produce,

$$[\alpha^\mu\beta', \sum a_n(\alpha'\beta^\rho)^n]\hat{x}_\mu\hat{p}_\rho + i\hbar \sum a_n(\alpha'\beta^\rho)^n(\alpha^\mu\beta')\eta_{\mu\rho} = 0, \quad (3.8)$$

de todo esto, el candidato para $\sigma_{\mu\nu}$, debido a su antisimetría y a las relaciones en (3.6), es

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\alpha'\beta_\mu, \alpha'\beta_\nu], \quad (3.9)$$

con $k_0 = -\hbar$. La ecuación (3.9) se convierte así en la representación estándar del grupo de espín, siempre que los términos $\alpha'\beta_\mu$ se tomen como las matrices gamma de Dirac γ_μ . Así, de la ecuación (3.3) extraemos los dos operadores de interés.

Caso mínimo impar (ecuación tipo Dirac).

$$\hat{A}_D = a_1 \gamma^\rho \hat{p}_\rho \quad (3.10)$$

Caso mínimo par (ecuación tipo Klein–Gordon).

$$\hat{A}_{KG} = -a_2 \hat{p}^\rho \hat{p}_\rho \quad (3.11)$$

Nótese que, tomando $\alpha^\mu \beta' = \gamma^\mu$, la ecuación (3.8) conduce a

$$\sigma^{\mu\nu} \hat{M}_{\mu\nu} + 4\hbar I_4 = 0, \quad (3.12)$$

en $n = 1$, y de donde I_4 es la matriz identidad en cuatro dimensiones¹. Para el caso $n = 2$ se cumple que $a_0 - a_2 \eta^{\rho\rho} = 0$. En cuanto a los órdenes $n > 3$, surgirán diferentes relaciones internas.

Resultados: Finalmente, las ecuaciones (3.10) y (3.11) deben satisfacer la *Afirmación 2* de la sección 2.3.

$$\boxed{[\hat{A}_{KG}, \hat{\mathcal{D}}] |\Phi_c\rangle = 0 \longrightarrow [\alpha_\mu \beta_\mu \hat{p}^\mu \hat{p}^\mu] (\mathbf{1} |\Phi_c\rangle) = 0} \quad (3.13)$$

$$\boxed{[\hat{A}_D, \hat{\mathcal{D}}] |\Phi_c\rangle = 0 \longrightarrow [\alpha_\mu \beta_\mu \gamma_\mu \hat{p}^\mu] (\mathbf{1} |\Phi_c\rangle) = 0} \quad (3.14)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento esperadas para nuestro sistema relativista. En el caso en que $\alpha_\mu \beta_\mu = \mathbf{1}$ (representación unitaria), recuperamos las estructuras usuales de Klein–Gordon y de Weyl respectivamente.

3.1.1. Las Corrientes Relativistas

Derivamos ahora dos corrientes de Noether en el caso relativista parametrizado $x_\mu = x_\mu(\tau)$ y $p_\mu = p_\mu(\tau)$, por tanto con $|\Phi\rangle = |\Phi\rangle(\tau)$. Las corrientes de Noether son

Por los Generadores de Traslaciones

$$d_\tau q_\mu^T = \delta_\tau \langle \hat{T}_\mu \rangle \equiv \partial_\sigma (J^\sigma)_\mu^T \quad (3.15)$$

Donde q_μ^T son las cargas conservadas de los cuatro operadores de traslaciones, y $(J^\sigma)_\mu$ son sus corrientes definidas en el espacio de Minkowski. Para el cumplimiento del teorema de Noether se tiene

$$\partial_\sigma \langle \alpha^\dagger \beta_\mu \hat{p}_\mu \rangle d_\tau x^\sigma = 0, \quad (3.16)$$

como $\delta_\tau p^\sigma = 0$ y $\partial_\sigma \delta_\tau x^\sigma = 0$ en este caso. Finalmente derivamos la corriente,

$$(J^\sigma)_\mu = \langle \alpha^\dagger \beta_\mu \hat{p}_\mu \rangle d_\tau x^\sigma \quad (3.17)$$

¹Físicamente, esta expresión podría significar que la acción conjunta de los generadores de Lorentz sobre los espinores se reduce a un múltiplo de la identidad, reflejando que la representación de Dirac es de dimensión cuatro. El término proporcional a \hbar aseguraría la correcta cuantización del espín intrínseco 1/2, de modo que la contribución de $\sigma^{\mu\nu} \hat{M}_{\mu\nu}$ se compensa exactamente con $4\hbar$. En otras palabras, la ecuación podría expresar la vinculación entre el espín y el momento angular total en el espacio de espinores de Dirac.

Por los Generadores Rotaciones y *Boosts*

$$d_\tau q_{\mu\nu}^R = d_\tau \langle \hat{O}_{\mu\nu} \rangle \equiv \partial_\sigma (J^\sigma)_{\mu\nu}^R \quad (3.18)$$

De la misma forma $q_{\mu\nu}^R$ son las cargas conservadas de los seis operadores de rotaciones y *boosts* restantes, y $(J^\sigma)_{\mu\nu}^R$ sus respectivas corrientes, entonces cumplimiento el teorema de Noether $\partial_\sigma (J^\sigma)_{\mu\nu}^R = 0$, la corriente se expresa como,

$$(J^\sigma)_{\mu\nu}^R = (\langle \alpha_\mu \beta_\nu \hat{x}_\mu \hat{p}_\nu \rangle - \langle \alpha_\nu \beta_\mu \hat{x}_\nu \hat{p}_\mu \rangle) \delta_\tau x^\sigma. \quad (3.19)$$

Estos dos tipos corrientes conservadas acarrearán 10 cargas conservadas una por cada simetría del sistema, específicamente, aseguran la conservación del momento lineal, energía, momento angular y marco de referencia inercial. También por las relaciones de Hamilton-Jacobi, se cumple teorema de Noether de las simetrías externas con la acción minimizada $S_{\alpha\beta}(\tau) = \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle$.

$$d_\tau S(\tau)_{\alpha\beta} = 0 \longleftrightarrow \partial_\sigma (J^\sigma) = 0 \quad (3.20)$$

3.1.2. Derivación Diferencial de la Ecuación de Klein Gordon

Tomando la sumatoria $\partial_\sigma d_\tau x^\sigma = 0$ y utilizando la relación de la diferencial y la conmutación, $d_\tau x^\sigma = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{x}^\sigma] \rangle$ (de la misma forma se utiliza $d_\tau p^\sigma = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{p}^\sigma] \rangle$), y cambiando el índice $\sigma \rightarrow \mu$,

$$\partial_\mu \langle (\alpha' \beta^\mu)^2 \hat{p}^\mu \rangle = 0 \longleftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle = 0 \quad (3.21)$$

Ahora tomando la ecuación (3.13) de forma compacta

$$\hat{p}_\mu (\beta^\mu | \Phi_c \rangle_\mu) = 0. \quad (3.22)$$

Satisface una relación de ecuación de continuidad, donde $| \Phi_c \rangle_\mu = \alpha^v \delta_\mu^v \hat{p}_v | \Phi \rangle_c$. Comparando ahora (3.21) y (3.22) obtenemos $\hat{p}_\mu \propto \partial_\mu$ si

$$\beta_\mu | \Phi_c \rangle_\mu \propto \partial_\mu \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle, \quad (3.23)$$

podemos tomar satisfactoriamente $\hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu$ con $\hat{x}_\mu = x_\mu$ (para que así mantenga el HUP). Cumpliéndose solo si la función de onda $| \Phi_c \rangle$ es proporcional al valor esperado de la acción (espectro). Sin embargo no es posible compararlas directamente ya que pertenecen a espacios distintos. Para analizarlas directamente hacemos

$$| \Phi_c \rangle = \sum_l f_l (\langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle) | \phi_l \rangle, \quad (3.24)$$

con $\{ | \phi \rangle_n \}$ una base de Hilbert, y las funciones definidas cumplen $f_l (\langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle) = \langle \phi_l | \Phi_c \rangle$.

Primer resultado relativista diferencial: Encontramos de (3.13), la estructura más simple, obteniendo así la ecuación diferencial

$$\boxed{[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}] |\Phi_c\rangle = 0.} \quad (3.25)$$

La cual satisface la ecuación de Klein-Gordon diferencial. Note que, la relación de la función de onda con la acción (3.24) es habitual en mecánica cuántica, por ejemplo, la función de onda $|\Phi\rangle \propto e^{iS/\hbar}$ puede ser escrita proporcionalmente a las integrales de camino [7] dependiente de la acción del sistema.

3.1.3. Derivación Diferencial de la Ecuación de Dirac-Weyl

Las 10 corrientes relativistas mantienen la misma estructura que el caso de Klein-Gordon, a excepción de las 6 corrientes *boosts*/rotaciones que se generan de $\hat{M}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{M}_{\mu\nu} - \hbar\sigma_{\mu\nu}$. Siguiendo la misma derivación que el caso anterior de la sección 3.1.2, pero con el operador de Dirac (3.10). Obtenemos primero la ecuación de continuidad de las matrices Gamma²,

$$\partial_\rho \langle \gamma^\rho \rangle = 0. \quad (3.26)$$

En este caso, comparamos con la ecuación de Weyl (3.14) por su estructura de ecuación de continuidad, para así escribir $\hat{p}_\rho = -i\hbar\partial_\rho$ y por consiguiente $\hat{x}_\rho = x_\rho$. Se tiene,

$$\gamma^\rho |\Phi_c\rangle \propto \langle \gamma^\rho \rangle \quad (3.27)$$

y entonces, escribiendo apropiadamente la sumatoria de estados en el caso de Dirac-Weyl,

$$\gamma^\rho |\Phi_c\rangle = \sum_l f_l(\langle \gamma^\rho \rangle) |\phi_l\rangle \quad (3.28)$$

donde se cumple la proyección $\langle \phi_l | \gamma^\rho | \Phi_c \rangle = f_l(\langle \gamma^\rho \rangle)$. También por las relaciones de Hamilton-Jacobi, el valor esperado de la acción es solución de la ecuación diferencial de Klein-Gordon (3.25).

Segundo resultado relativista diferencial: Finalmente, expresamos la ecuación de Weyl en forma diferencial.

$$\boxed{\gamma^\rho \partial_\rho |\Phi_c\rangle = 0} \quad (3.29)$$

3.2. Casos No-Relativistas y Ultra-Relativistas

Suponemos ahora una agrupación diferente de los elementos internos de \hat{Q} , una que aproxima las diez simetrías no-relativistas usuales: rotaciones, traslaciones y *boosts* galileanos. Al

²Esta relación constituye una ecuación de continuidad relativista, donde la divergencia de la corriente definida a partir de las matrices de Dirac γ^ρ se anula, lo que expresa la conservación de una magnitud fundamental asociada al campo espinorial. En términos físicos, garantiza la preservación de la probabilidad total por $\langle \gamma^\rho \rangle = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ siendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ el adjunto del espinor de Dirac.

obtener la representación explícita de estas tres simetrías galileanas, también derivamos una representación de los tres *boosts* ultra-relativistas. Estos corresponden a sistemas cuánticos en los que, o bien se asume que la velocidad de la luz es muy pequeña, o el sistema en cuestión se mueve más rápido que la velocidad de la luz. Es posible separar ahora el operador de simetría en dos partes,

$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}^{\mathcal{NR}} + \hat{\mathcal{S}}^{\mathcal{UR}} \quad (3.30)$$

donde la agrupación de rotaciones sigue la forma usual $\alpha_i \beta_j = -\alpha_j \beta_i$, en contraste a los *boosts* que estarán deformados. Ahora, comenzando con la sustitución $\beta' \rightarrow \beta'/c^2$ y,

$$\begin{aligned} \beta^0 &\rightarrow c\beta^0 \\ \alpha^0 &\rightarrow \alpha^0/c \end{aligned} \quad (3.31)$$

obtenemos

La agrupación de *boosts* no-relativistas

$$\alpha^0 \beta^i = -(2a_{NR})\alpha^i \beta^i. \quad (3.32)$$

La agrupación de *boosts* ultra-relativistas

$$\alpha^i \beta^0 = \frac{(2a_{UR})}{c^2} \alpha^0 \beta^i. \quad (3.33)$$

Donde a_{NR} y a_{UR} son escalares reales. La última constante puede hacerse dependiente del cuadrado de un parámetro de ajuste de velocidad (con las mismas unidades que la velocidad).

Por lo tanto, al fijar $a_{UR} = v^2 a_{UR}^*$ colocamos $\frac{2v^2 a_{UR}^*}{c^2}$ en el lado derecho de (3.33).

Así, para $c \gg \sqrt{a_{UR}^*}v$, aproximando,

$$\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}^{NR} = \alpha^i \beta^j \hat{M}_{ij} + \alpha^i \beta^i \hat{B}_i^{NR} + \alpha^i \beta^i \hat{p}_i - \alpha^0 \beta_0 \hat{H}, \quad (3.34)$$

donde $\hat{B}_i^{NR} = [(2a_{NR})\hat{t}\hat{p}_i + \hat{x}_i]$ son los operadores de *boost* galileanos (no-relativistas). Estos generadores presentan similitudes con la Simetría Conforme Galileana (GCS), la cual encuentra aplicaciones en teorías de campos en el borde y en la correspondencia AdS/CFT [44].

Por otro lado, si $c \ll \sqrt{a_{UR}^*}v$, aproximando,

$$\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}^{UR} = (\alpha^i \beta^j \hat{M}_{ij} + \alpha^i \beta^i / c^2) - \alpha_0 \beta^i \sum_i \hat{B}_i^{UR} + \alpha^i \beta^i \hat{p}_i - \alpha^0 \beta_0 \hat{H}, \quad (3.35)$$

donde $\hat{B}_i^{UR} = \left[\frac{v^2}{c^2} (2a_{UR}^*) \hat{x}_i \hat{H} + t \right]$. Este tipo de aproximaciones que involucran una velocidad de la luz pequeña (en comparación) ya han sido estudiadas en: [47], [59], [78], y [85]. Dado que este álgebra difiere significativamente de las álgebras de Lie usuales (Poincaré y Galileana), escribimos ahora el álgebra de generadores de simetría externa

Traslaciones espaciales con traslaciones espaciales

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (3.36)$$

Traslaciones espaciales con traslaciones temporales

$$[\hat{p}_i, \hat{H}] = 0. \quad (3.37)$$

Traslaciones espaciales con rotaciones

$$[\hat{p}_k, \hat{M}_{ij}] = i\hbar(\delta_{jk}\hat{p}_i - \delta_{ik}\hat{p}_j). \quad (3.38)$$

Rotaciones con rotaciones

$$[\hat{M}_{ij}, \hat{M}_{kh}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{M}_{jh} - \delta_{ih}\hat{M}_{jk} - \delta_{jk}\hat{M}_{ih} + \delta_{jh}\hat{M}_{ik}). \quad (3.39)$$

Rotaciones con traslaciones temporales

$$[\hat{M}_{ij}, \hat{H}] = 0. \quad (3.40)$$

Rotaciones con *Boosts* ultra-relativistas

$$[\hat{M}_{ij}, \hat{B}_k^{UR}] = -2i\hbar a_{UR}^* \left(\frac{v^2}{c^2} \right) [\delta_{jk}\hat{x}_i - \delta_{ik}\hat{x}_j] \hat{H}. \quad (3.41)$$

***Boosts* ultra-relativistas con traslaciones espaciales**

$$[\hat{B}_i^{UR}, \hat{p}_j] = 2i\hbar a_{UR}^* \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \delta_{ij} \hat{H}. \quad (3.42)$$

***Boosts* ultra-relativistas con traslaciones temporales**

$$[\hat{B}_i^{UR}, \hat{H}] = -i\hbar. \quad (3.43)$$

***Boosts* ultra-relativistas con *Boosts* ultra-relativistas**

$$[\hat{B}_i^{UR}, \hat{B}_j^{UR}] = 2i\hbar \left(\frac{v^2}{c^2} \right) a_{UR}^* [\hat{x}_i - \hat{x}_j]. \quad (3.44)$$

Esta álgebra de Lie (de Carroll), describe las simetrías de un régimen ultra-relativista en el que la velocidad de la luz tiende a cero, de modo que las transformaciones de “boost” ya no mezclan espacio y tiempo como en el caso de Lorentz, sino que congelan el movimiento espacial y dejan únicamente la evolución temporal. Físicamente, esto significa que las partículas no pueden propagarse en el espacio, sino que permanecen fijas mientras el tiempo transcurre, lo que convierte al grupo de Carroll en el *análogo dual*³ del grupo de Galilei.

³El término *análogo dual* se refiere a una construcción matemática o física que surge como el “reflejo” de otra bajo un límite opuesto. En este caso, el grupo de Galilei se obtiene como el límite $c \rightarrow \infty$ del grupo de Poincaré (no relativista), mientras que el grupo de Carroll aparece en el límite complementario $c \rightarrow 0$ (ultra-relativista). Ambos grupos son, por tanto, duales en el sentido de que representan extremos opuestos de la misma estructura de simetría relativista.

Característica	Galilei	Poincaré	Carroll
Límite de c	$c \rightarrow \infty$ (no relativista)	c finito (relativista)	$c \rightarrow 0$ (ultra-relativista)
Tiempo	Absoluto, independiente del espacio	Relativo, mezclado con espacio	Absoluto, espacio “congelado”
Propagación	Movimiento libre	Limitado por c	Sin propagación espacial
Aplicaciones	Mecánica clásica	Relatividad especial, QFT	Límites ultra-rel., simetrías BMS

Cuadro 3.1: Comparación entre las álgebras de Galilei, Poincaré y Carroll.

3.2.1. Caso No-Relativista

Procedemos ahora a derivar el operador central no-relativista, seguido de la ecuación tipo Schrödinger. La conmutación con el operador de *boost* no-relativista impone una restricción estructural sobre la forma de la ecuación,

$$[\hat{A}, \hat{B}_k^{NR}] = 0 \rightarrow \hat{A} \propto \delta_{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j + \hat{H}, \quad (3.45)$$

debido a la distinción entre rotaciones y *boosts*, el operador presenta una dependencia puramente cuadrática en los operadores de momento espacial \hat{p}_i . La simetría de *boost* galileana restringe el operador de traslación temporal dentro de \hat{A} a una forma lineal.

Expresamos explícitamente el operador central no-relativista

$$\hat{A}^{NR} = a_{NR}(\alpha' \beta_i)(\alpha' \beta^i) \hat{p}_i \hat{p}^i + (\alpha' \beta_0) \hat{H} + \lambda I. \quad (3.46)$$

Aquí, λ es una constante aditiva que no afecta la estructura interna del operador. Esta agrupación es consistente con la propiedad $\{\alpha' \beta_i, \alpha' \beta_j\} = 0$ para $(i \neq j)$, como se discutió en la sección 3.1.

Las propiedades de los elementos que acompañan a los generadores de simetría surgen de su conmutación con el operador de simetría no-relativista $\hat{\mathcal{S}}^{NR}$, y son las siguientes

Rotaciones

$$\begin{aligned} [\alpha^i \beta^j, (\alpha' \beta^k)^2] &= 0 \\ [\alpha^i \beta^j, \alpha' \beta^0] &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Boosts no-relativistas

$$\begin{aligned} [\alpha^0 \beta^i, (\alpha' \beta^k)^2] &= 0 \\ [\alpha^0 \beta^i, \alpha' \beta_0] &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Traslaciones.

$$\begin{aligned} [\alpha' \beta^\rho, (\alpha' \beta^i)^2] &= 0 \\ [\alpha' \beta^\rho, \alpha' \beta^0] &= 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Resultados: Por lo tanto, los términos $\alpha'\beta_0$ y $(\alpha'\beta^i)^2$ pueden ser escalares o matrices diagonales (es decir, la matriz identidad multiplicada por una constante). Ahora, aplicando la *Afirmación 2* y asumiendo $\alpha'\beta_0 = (\alpha'\beta^i)^2$, se obtiene

$$\left[\hat{A}, \hat{\mathcal{D}}\right] |\Phi_c\rangle = 0 \longrightarrow [\alpha^i \beta^i \hat{p}_i \hat{p}_i - \frac{\alpha_0 \beta_0}{2a_{NR}} \hat{H}] |\Phi_c\rangle = 0. \quad (3.50)$$

Usando la misma simplificación que en el caso relativista, a saber $\alpha_\mu \beta_\mu = \mathbf{1}$ (propiedad que también se reutilizará en el caso ultra-relativista) obtenemos la tipología de Schrödinger.

$$\boxed{[\hat{p}_i \hat{p}^i - 2a_{NR} \hat{H}](\mathbf{1} |\Phi_c\rangle) = 0} \quad (3.51)$$

3.2.2. La Corriente No Relativista

En este caso no relativista existen de la misma forma 10 corrientes con 10 cargas conservadas. Por la diferencia entre las rotaciones y los *boosts* tendremos ahora 3 tipos de corrientes, parametrizando $x_\mu = x_\mu(\tau)$ y $p_\mu = p_\mu(\tau)$, con función de onda $|\Phi\rangle = |\Phi\rangle(\tau)$, las corrientes de Noether son

Por los Generadores de Traslaciones

$$d_\tau q_\mu^T = d_\tau \langle \hat{T}_\mu \rangle \equiv \partial_v (J^v)_\mu^T. \quad (3.52)$$

Donde q_μ^T son las cargas conservadas de los operadores de traslaciones, y $(J^v)_\mu$ son sus corrientes definidas en el espacio euclidiano. Para el cumplimiento del teorema de Noether se tiene que cumple

$$\partial_v \langle \alpha^i \beta_\mu \hat{p}_\mu \rangle d_\tau x^v = 0, \quad (3.53)$$

como $d_\tau p^v = 0$ y $\partial_v d_\tau x^v = 0$. Finalmente,

$$(J^v)_i = \langle \alpha^i \beta_i \hat{p}_i \rangle d_\tau x^v \quad (3.54)$$

$$(J^v)_0 = \langle \alpha^i \beta_0 \hat{H}_0 \rangle d_\tau x^v, \quad (3.55)$$

siendo las tres primeras las corrientes asociadas a cada momento lineal, y la última expresada como la corriente conservadora de la energía.

Por los generadores Rotaciones

$$d_\tau q_{ik}^R = \delta_i \langle \hat{O}_{ik} \rangle \equiv \partial_v (J^v)_{ik}^R. \quad (3.56)$$

De la misma forma q_{ik}^R son las cargas conservadas de los tres operadores de rotaciones, entonces cumplimiento el teorema de Noether $\partial_v (J^v)_{ik}^R = 0$, la corriente es

$$(J^v)_{ik}^R = (\langle \alpha_i \beta_k \hat{x}_i \hat{p}_k \rangle - \langle \alpha_k \beta_i \hat{x}_k \hat{p}_i \rangle) \delta_\tau x^v. \quad (3.57)$$

Por los Generadores *Boosts* de Galileo

$$d_\tau q_i^B = d_\tau \langle \hat{B}_i \rangle \equiv \partial_v (J^v)_i^B. \quad (3.58)$$

En este caso q_i^B son las cargas conservadas de los tres operadores de *boosts* de Galileo, entonces cumpliendo el teorema de Noether $\partial_v (J^v)_i^B = 0$, de aquí se tiene que

$$(J^v)_i^B = \langle \alpha_0 \beta_i [(2a) \hat{t} \hat{p}_i + \hat{x}_i] \rangle d_\tau x^v = 0, \quad (3.59)$$

se asegura, al igual que el caso anterior, la mínima acción para todas las corrientes conservadas y por tanto la conservación de 10 cargas Galileanas

$$d_\tau S_{\alpha\beta}(\tau) = 0 \longleftrightarrow \partial_\sigma (J^\sigma) = 0. \quad (3.60)$$

3.2.3. Representación Diferencial de la Ecuación de Schrödinger

Utilizando nuevamente $\partial_\sigma d_\tau x^\sigma = 0$ pero con el operador no relativista. De la misma forma que 3.1.2, se sigue

$$\partial_\sigma \langle [\hat{A}, \hat{x}^\sigma] \rangle = 0 \longrightarrow 2\partial_i \langle (\alpha' \beta^i)^2 \hat{p}_i \rangle + \partial_t \langle \Phi | \alpha' \beta_0 | \Phi \rangle = 0, \quad (3.61)$$

donde se define $\partial_0 = c^{-1} \partial_t$, utilizando ahora la ecuación no relativista (3.50) en forma compacta $\hat{p}_\mu (\beta^\mu | \Phi_c')_\mu = 0$ como relación de continuidad, con $\hat{p}_\mu = (\hat{p}_i, -\hat{H})$,

$$| \Phi_c' \rangle_\mu = (\delta_\mu^i \alpha_i (\beta_i)^2 \hat{p}_i + \frac{\alpha_0 \beta_0}{2a_{NR}} \delta_\mu^0) | \Phi_c \rangle. \quad (3.62)$$

Comparando con (3.61) obtenemos las relaciones de continuidad esperadas para el caso no relativista,

$$\hat{p}_i (\beta^i | \Phi_c')_i \propto 2\partial_i \langle (\alpha' \beta^i)^2 \hat{p}_i \rangle \quad (3.63)$$

$$-\hat{H} (\beta_0 | \Phi_c')_0 \propto \partial_t \langle \Phi | \alpha' \beta_0 | \Phi \rangle. \quad (3.64)$$

Podemos tomar igualmente $\hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu$ con $\hat{x}_\mu = x_\mu$. Igualmente la función de onda $| \Phi_c \rangle$ es proporcional a la acción por la relación (3.60) como en el caso de Klein-Gordon. No obstante, surge un contraste con el caso relativista, la función $| \Phi_c \rangle$ es dependiente de $\langle \Phi | \Phi \rangle(\tau)$ por (3.64). Expresamos utilizando el mismo truco de la proyección con las funciones $g_n(\langle \Phi | \Phi \rangle) = \langle \phi_n | \Phi_c \rangle$.

$$| \Phi_c \rangle = \sum_l g_l(\langle \Phi | \Phi \rangle) | \phi_l \rangle = \sum_l f_l(\langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle) | \phi_l \rangle. \quad (3.65)$$

Por esta nueva relación y por comparación,

$$g_n(\langle \Phi | \Phi \rangle) = f_n(\langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle) \longrightarrow \langle \Phi | \Phi \rangle \propto \langle \hat{S}_{\alpha\beta} \rangle, \quad (3.66)$$

se asegura su conservación al aplicar d_τ por el cumplimiento de la mínima acción (3.60)

$$d_\tau \langle \Phi | \Phi \rangle (\tau) = 0. \quad (3.67)$$

Existe entonces, la posible construcción de una norma dependiente de solamente tres variables grados de libertad en Minkowski lo que garantiza la conservación de la probabilidad⁴. El caso habitual es tomar $x^i = x^i(t)$ para los casos no relativistas, y así relacionar el movimiento con la dependencia temporal usual.

Resultado diferencial no relativista: Al cumplir estas restricciones obtenemos la ecuación de Schrödinger para una partícula libre al pasar a la forma diferencial desde (3.51)

$$\boxed{(-2\hbar^2 a_{NR} \nabla^2 - i\hbar \partial_t) |\Phi_c\rangle = 0.} \quad (3.68)$$

En contraste con el caso anterior, el valor esperado de la acción cumple la ecuación de Schrödinger (diferencial), y la constante a_{NR} es dependiente de la masa de la partícula.

3.2.4. Caso Ultra-Relativista, Tipología de Carroll–Schrödinger

Exploramos ahora un caso particular en el que el sistema presenta simetrías traslacionales pero carece de simetrías rotacionales. Nuestro objetivo principal es construir una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger escalar, pero con una dependencia lineal en los operadores de traslación espacial y una dependencia de segundo orden en el operador de traslación temporal. Esta construcción nos permite estudiar sistemas que, si bien no son estrictamente relativistas, muestran propiedades interesantes que los acercan a dicho régimen. En este contexto, el sistema es anisotrópico⁵ (en el caso escalar), y el operador de Casimir central \hat{A}_c no conmuta con las rotaciones espaciales, asumiendo a partir de la ecuación (3.35) $(\alpha^i \beta^j \hat{M}_{ij} + \alpha' \beta' / c^2) \rightarrow 0$. Entonces, por la relación de conmutación con el *boost* ultra-relativista,

$$[\hat{A}_c, \hat{B}_k^{UR}] = 0 \rightarrow \hat{A}_c \propto \sum_i \hat{p}_i + \hat{H}^2 \quad (3.69)$$

encontramos la forma del operador central tipo Carroll

$$\hat{A}_c = \left(\frac{c^2}{v^2 a_{UR}^*} \right) \alpha' \beta^i \hat{p}_i + (\alpha' \beta^0)^2 \hat{H}^2 + \lambda_c \hat{I}. \quad (3.70)$$

⁴En mecánica cuántica, $\langle \Phi(\tau) | \Phi(\tau) \rangle$ representa la norma del estado, es decir, la probabilidad total de encontrar al sistema en algún estado físico permitido. Que su derivada temporal sea nula implica que dicha norma permanece constante en el tiempo, lo cual es equivalente a la conservación de la probabilidad.

⁵El término *anisotrópico* se refiere a un sistema o material cuyas propiedades físicas dependen de la dirección en la que se midan. A diferencia de un medio *isotrópico*, donde magnitudes como la conductividad, la permitividad o la velocidad de propagación son idénticas en todas las direcciones, en un medio anisotrópico estas propiedades varían según el eje considerado. En mecánica cuántica y en física de materiales, la anisotropía refleja la ruptura de simetría espacial y conduce a comportamientos direccionales específicos en la dinámica del sistema.

Primer resultado ultra-relativista (función escalar): Y aplicando la *Afirmación 2*,

$$\left[\left(\frac{c^2}{2v^2 a_{UR}^*} \right) \alpha' \beta^i \hat{p}_i - (\alpha' \beta^0)^2 \hat{H}^2 \right] |\Phi_c\rangle = 0 \quad (3.71)$$

con $\alpha' \beta^\mu$ tratados como escalares. Esta ecuación describe la dinámica del sistema en el límite ultra-relativista escalar, donde las contribuciones de los operadores de traslación están acopladas de forma lineal, en contraste a la tipología no relativista de Schrödinger cuadrática.

3.2.5. La Corriente Ultra-Relativista

Se cumplen las simetrías de traslación igualmente que las corrientes conservadas de Noether en este caso, como en el caso relativista y no-relativista. Pero destacamos las corrientes ultra-*boosts*

$$d_\tau \langle \hat{B}_j \rangle = \partial_v \langle \hat{B}_j \rangle d_\tau x^v = 0. \quad (3.72)$$

Como ya es usual se tiene $d_\tau p^v = 0$ y $\partial_v d_\tau x^v = 0$. Ahora las tres corrientes nuevas por cada eje espacial son

$$(J^v)_j = \langle \hat{B}_j \rangle d_\tau x^v = k \left\langle \left[\frac{v^2}{c^2} (2a_{UR}^*) \hat{x}_j \hat{H} + t \right] \right\rangle d_\tau x^v = 0. \quad (3.73)$$

Como era de esperar se cumple perfectamente la mínima acción.

$$d_\tau S_{\alpha\beta}(\tau) = 0 \longleftrightarrow \partial_\sigma (J^\sigma) = 0 \quad (3.74)$$

3.2.6. Representación Diferencial de la Ecuación Carroll–Schrödinger

Como en la sección 3.1.2 y 3.2.3, pero para el caso ultra-relativista, se sigue

$$\partial_\sigma \langle [\hat{A}, \hat{x}^\sigma] \rangle = 0 \longrightarrow \partial_i \langle \frac{\alpha^i \beta^i}{2a} \rangle + 2\alpha_0 \beta_0 \partial_t \langle \hat{H} \rangle = 0. \quad (3.75)$$

Donde se toma También $\partial_0 = c^{-1} \partial_t$, Utilizando ahora la ecuación ultra-relativista (3.71) en forma compacta $\hat{p}_\mu (\beta^\mu |\Phi_c\rangle_\mu) = 0$ como relación de continuidad, con $\hat{p}_\mu = (\hat{p}_i, -\hat{H})$

$$|\Phi_c\rangle_\mu = \left[\frac{\delta_\mu^i \alpha_i}{2a} + \delta_\mu^0 \alpha_0 \hat{H} \right] |\Phi\rangle_\mu. \quad (3.76)$$

En este caso comparando con (3.75),

$$\hat{p}_i (\beta^i |\Phi_c\rangle_i) \propto \frac{\alpha^i \beta^i}{2a} \partial_i \langle \Phi | \Phi \rangle \quad (3.77)$$

$$-\hat{H} (\beta^0 |\Phi_c\rangle_0) \propto 2\alpha_0 \beta_0 \partial_t \langle \hat{H} \rangle. \quad (3.78)$$

De misma forma, surge el contraste con la ecuación relativista, la función $|\Phi_c\rangle$ es dependiente de $\langle\Phi|\Phi\rangle(\tau)$, utilizando el mismo truco de la proyección con $g_n(\langle\Phi|\Phi\rangle) = \langle\phi_n|\Phi_c\rangle$ obtenemos,

$$|\Phi_c\rangle = \sum_n g_n(\langle\Phi|\Phi\rangle) |\phi_n\rangle = \sum_n f_n(\langle\hat{S}_{\alpha\beta}\rangle) |\phi_n\rangle. \quad (3.79)$$

Paralelo a la derivación no relativista en 3.2.3 se obtiene la conservación de la norma ultra-relativista minimizando la acción, la cual depende, como era de esperar, de $|\Phi_c\rangle$

$$d_\tau \langle\Phi|\Phi\rangle(\tau) = 0. \quad (3.80)$$

Primer resultado diferencial ultra-relativista (función escalar): Al cumplir las restricciones de la función de onda obtenemos la ecuación de ultra-relativista diferencial para una partícula libre. Escribimos

$$\left[\frac{-i\hbar}{2} \hat{n} \cdot \nabla + a_{UR}^* \hbar^2 \partial_t^2 \right] |\Phi_c\rangle = 0. \quad (3.81)$$

Definimos el vector $\hat{n} = (\alpha'\beta^1, \alpha'\beta^2, \alpha'\beta^3) \in \mathbb{R}^3$ y fijamos $\alpha'\beta^0 = c/v$.

Ejemplo en una dimensión: Para ilustrar el tipo de soluciones que admite esta ecuación diferencial, consideramos el caso lineal $|\Phi_c\rangle = |\Phi_c\rangle(x, t)$. Su solución analítica se asemeja al núcleo invertido de la ecuación del calor, con dominio $(x, t) \in \{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}\}$. Eligiendo $a_{UR}^* = -\frac{1}{4(mc^3)}$, la solución se convierte en

$$|\Phi_c\rangle = c \sqrt{\frac{mc}{2\pi i \hbar x}} \exp\left(\frac{imc^3 t^2}{2\hbar x}\right). \quad (3.82)$$

Esta satisface la condición límite $\lim_{x \rightarrow 0} |\Phi_c\rangle(x, t) = k\delta(t)$ con k una constante apropiada. La solución se comporta como una distribución gaussiana proporcional a la amplitud de transición en la teoría de campos Carroll–Schrödinger, indicando localización espacial. Este resultado es consistente con la ecuación de Schrödinger unidimensional bajo el intercambio $x \longleftrightarrow ct$ y resalta la dualidad intercambiable entre dispersión espacial y temporal en los regímenes ultra-relativista y no-relativista en el caso escalar [85]. Para la comparación gráfica tomamos $x \in \{10^{-15}, 10^{-14}, 10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}\}$ m, cubriendo desde la escala nuclear (femtómetros) hasta la escala atómica (ångströms). En todos los casos se empleó la masa del electrón $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, la velocidad de la luz $c = 3,0 \times 10^8$ m/s, y la constante reducida de Planck $\hbar = 1,054 \times 10^{-34}$ J·s. Con estos parámetros se evaluó la función de onda $\Phi_c(t, x)$ en el intervalo temporal $0 \leq t \leq 2 \times 10^{-9}$ s, mostrando en cada caso la evolución de su amplitud y fase.

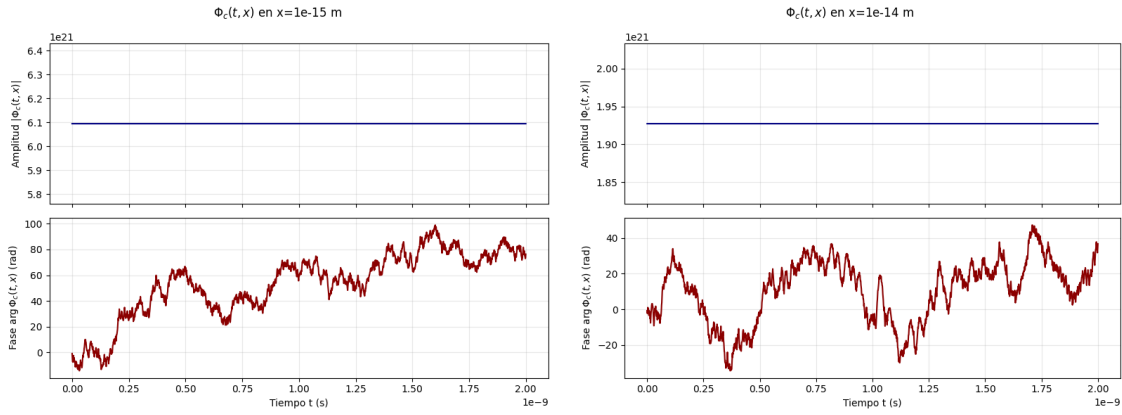


Figura 3.1: Amplitud y fase de $\Phi_c(t, x)$ para $x = 10^{-15}$ m (izquierda) y $x = 10^{-14}$ m (derecha).

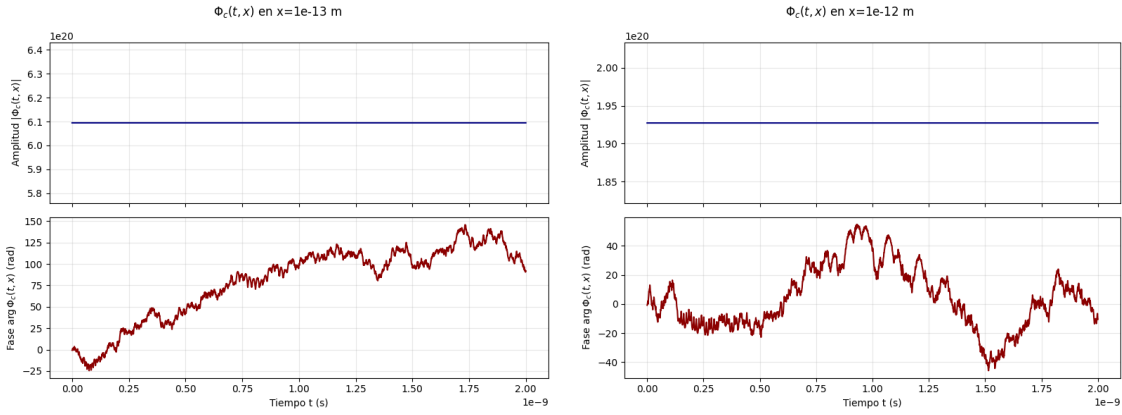


Figura 3.2: Amplitud y fase de $\Phi_c(t, x)$ para $x = 10^{-13}$ m (izquierda) y $x = 10^{-12}$ m (derecha).

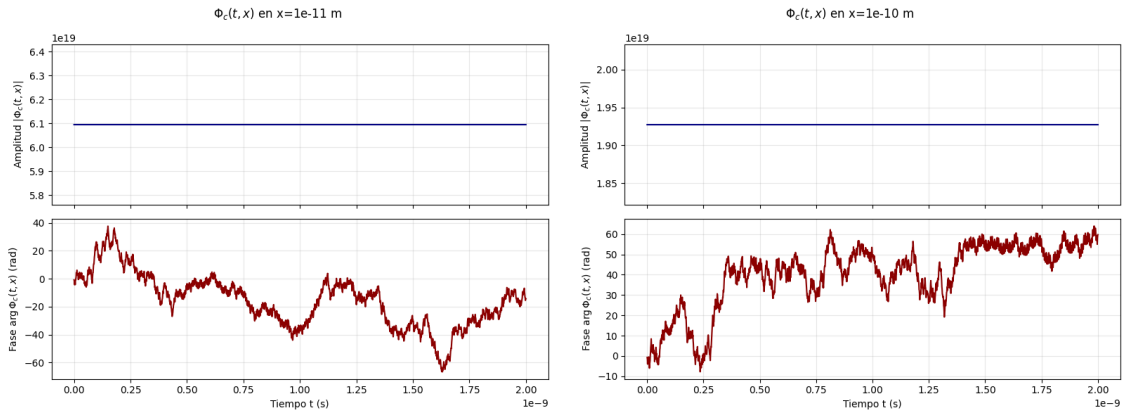


Figura 3.3: Amplitud y fase de $\Phi_c(t, x)$ para $x = 10^{-11}$ m (izquierda) y $x = 10^{-10}$ m (derecha).

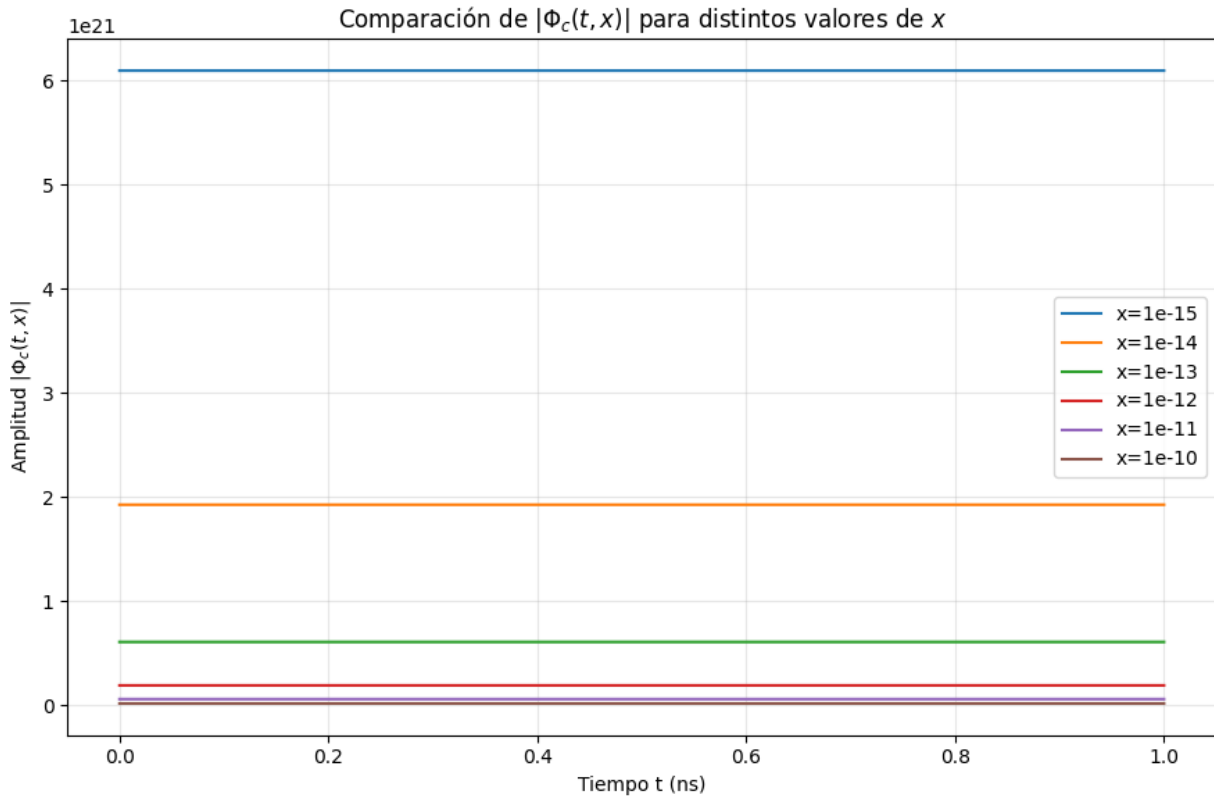


Figura 3.4: Comparación de la amplitud $|\Phi_c(t, x)|$ para distintos valores de $x \in \{10^{-15}, 10^{-14}, 10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}\}$. Se observa cómo la magnitud se mantiene constante en el tiempo pero con escalas diferentes según la posición, reflejando la localización característica en el régimen Carroll–Schrödinger.

3.2.7. Restauración de Simetrías Rotacionales, Carroll–Schrödinger Matricial

Para construir un operador general que restaure las simetrías rotacionales, es necesario asumir que el primer término de $\hat{\mathcal{S}}^{UR}$ no se anula y, por lo tanto, el operador \hat{A}_c no es escalar. Usamos la relación de anticonmutación $\{\alpha'\beta_i, \alpha'\beta_j\} = 0$ para $(i \neq j)$, como en el caso no relativista. Se sabe que en el caso escalar, el generador de rotaciones \hat{M}_{ij} no conmuta con \hat{A}_c . Introduciendo el acoplamiento $\alpha'\beta'/c^2 = \sum E_{ij}$, imitamos el caso de Dirac, recuperando la estructura de conmutación. Expresando la conmutación de \hat{A}_c con el operador de rotaciones

$$(\alpha'\beta^i) [\hat{p}_i, \hat{M}_{kj}] + [(\alpha'\beta^i), E_{kj}] \hat{p}_i = 0, \quad (3.83)$$

ahora las propiedades de los elementos que acompañan a los generadores de simetría en la ecuación (3.70) surgen de su conmutación con $\hat{\mathcal{S}}^{UR}$. Estos elementos satisfacen

Rotaciones

$$\begin{aligned} [\alpha'\beta^k, \alpha^i\beta^j] &= 0 \\ [(\alpha'\beta^0)^2, \alpha^i\beta^j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

(esto asegura la conmutación $[\hat{A}, \alpha_i\beta_j(\hat{M}_{ij} + E_{ij})] = 0$).

Boosts ultra-relativistas

$$\begin{aligned} [\alpha'\beta^i, \alpha^0\beta'] &= 0 \\ [\alpha'\beta^i, \alpha^i\beta'] &= 0 \\ [(\alpha'\beta^0)^2, \alpha^0\beta'] &= 0 \\ [(\alpha'\beta^0)^2, \alpha^i\beta'] &= 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Traslaciones

$$[(\alpha'\beta^0)^2, \alpha'\beta^p] = 0. \quad (3.86)$$

Debido a la antisimetría inducida por el acoplamiento con los operadores de rotación, el término E_{ij} puede escribirse con el conmutador

$$E_{ij} = -\frac{i\hbar}{2} [\alpha'\beta_i, \alpha'\beta_j], \quad (3.87)$$

restaurando el conjunto completo de 10 simetrías, como en casos previos en el espacio-tiempo de Minkowski. Dado que la simetría rotacional se recupera, una interpretación de espín se vuelve viable en el régimen ultra-relativista. Los candidatos más adecuados para los elementos $\alpha'\beta^i$ son las matrices de Pauli, como en el caso no relativista.

Segundo resultado ultra-relativista (matricial) Finalmente, fijando $\alpha'\beta^0 = I_2(c/v)$, la ecuación (3.71), derivada tras la *Afirmación 2*, se convierte en

$$[\sigma^i \hat{p}_i - 2a_{UR}^* \hat{H}^2](\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = 0. \quad (3.88)$$

Para comprender mejor esta ecuación, consideramos la solución $|\Phi_c\rangle = u_+ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + u_- e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, donde u_+ y u_- son espinores constantes, siempre que

- u_+ sea un espinor con espín anti-paralelo a \mathbf{k} , es decir, $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k}u_+ = -|\mathbf{k}|u_+$.
- u_- sea un espinor con espín paralelo a \mathbf{k} , es decir, $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k}u_- = +|\mathbf{k}|u_-$.
- Ambos términos satisfagan la relación de dispersión

$$\omega = \sqrt{\frac{2mc^3|\mathbf{k}|}{\hbar}}. \quad (3.89)$$

Físicamente, esta solución describe una superposición de dos ondas planas con momentos opuestos ($\hbar\mathbf{k}$ y $-\hbar\mathbf{k}$), y espines correlacionados con sus direcciones de propagación. El primer término en la ecuación (3.88) está relacionado con el operador de helicidad, que mide la proyección del espín de una partícula a lo largo de su dirección de momento (ampliamente utilizado en colisiones de partículas con espín arbitrario [99]). Tales soluciones pueden representar estados en sistemas con acoplamiento espín-momento, como en materiales topológicos [100], o en teorías de campos efectivas con dinámica temporal no estándar gobernada por la relación de dispersión $\omega \propto \sqrt{|\mathbf{k}|}$, en contraste con sistemas relativistas $\omega \propto |\mathbf{k}|$ o partículas no relativistas $\omega \propto k^2$.

Para ilustrar, y por tanto, graficar el comportamiento temporal de la función de onda espinorial se fija la posición espacial en $\mathbf{r} = (0, 0, 10^{-12})$ m y se considera un vector de onda $\mathbf{k}(0, 0, 10^{10})$ m⁻¹. Los espinores constantes se tomaron como $u_+ = (1, 0)^T$ y $u_- = (0, 1)^T$. La relación de dispersión (3.89) se define numéricamente de la misma forma que en el final de la sección 3.2.6 con la masa del electrón m_e , la velocidad de la luz c y la constante reducida de Planck \hbar . El intervalo temporal considerado es de $0 \leq t \leq 1,0 \times 10^{-12}$ s, muestreado en $N_t = 2000$ puntos.

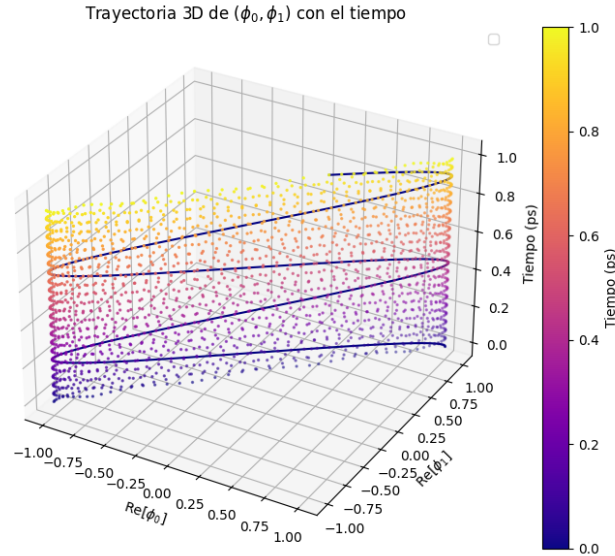


Figura 3.5: Trayectoria 3D de las componentes reales $\text{Re}[\phi_0]$ proyectado en u_+ y $\text{Re}[\phi_1]$ proyectado en u_- en función del tiempo, para $\mathbf{r} = (0, 0, 10^{-12})$ m y $\mathbf{k} = (0, 0, 10^{10})$ m⁻¹. El color indica la evolución temporal en picosegundos.

Parte II

Perturbación en el HUP

Capítulo 4

Marco Teórico Perturbado

En esta sección exploramos cómo la relación de incertidumbre (2.1) se mantiene invariante bajo un tipo específico de transformaciones. Estas perturbaciones en el sistema pueden alterar relaciones internas sin romper las simetrías fundamentales. Optamos por la invariancia de la relación de incertidumbre bajo transformaciones adjunta (automorfismos)¹².

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] = e^{-\hat{D}_n} [\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] e^{\hat{D}_n} \quad (4.1)$$

Donde \hat{D}_n es un operador de simetría. Al tomar

$$\hat{x}_\mu \longrightarrow x'_\mu = e^{-\hat{D}_n} \hat{x}_\mu e^{\hat{D}_n}, \quad (4.2)$$

$$\hat{p}_v \longrightarrow \hat{p}'_v = e^{-\hat{D}_n} \hat{p}_v e^{\hat{D}_n}, \quad (4.3)$$

los operadores de la sección 2.2 de nuestro espacio $Z(\hat{N}_\alpha)$ y $Z(\hat{M}_\beta)$ serán afectados, por tanto \hat{Q} transforma igual. Los operadores \hat{D}_n son simetrías cuando

$$[\hat{A}, \hat{Q}] = 0 \longrightarrow [\hat{A}, e^{-\hat{D}_n} \hat{Q} e^{\hat{D}_n}] = [e^{\hat{D}_n} \hat{A} e^{-\hat{D}_n}, \hat{Q}] = 0. \quad (4.4)$$

Cumpliendo $[\hat{A}, \hat{D}_n] = 0$, aunque deformemos el principio de incertidumbre de Heisenberg se deja invariante la conmutación con el operador Simetría-Acción de la base (CSOC).

¹**Transformada adjunta (automorfismo) de operadores.** La aplicación $\text{Ad}_{e^B} : A \mapsto e^{-B} A e^B$ es un *automorfismo interno* del álgebra de operadores, pues preserva productos y conmutadores $[\text{Ad}_{e^B}(A), \text{Ad}_{e^B}(C)] = \text{Ad}_{e^B}([A, C])$. Se expresa como la acción exponencial del derivador $\text{ad}_B(X) \equiv [B, X]$
 $e^{-B} A e^B = e^{-\text{ad}_B} A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \text{ad}_B^n(A) = A - [B, A] + \frac{1}{2!}[B, [B, A]] - \frac{1}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots$

Esta es la expansión de Baker–Campbell–Hausdorff en su forma de *conjugación*. La serie se trunca si los conmutadores anidados se anulan a partir de cierto orden (p.ej., álgebras nilpotentes) y converge en amplias condiciones funcionales. Si $B = iG$ con G Hermítico, la transformación es unitaria ($U = e^{iG}$) y Ad_U preserva espectros y valores esperados.

²En la literatura de teoría de campos, las transformaciones adjuntas se denominan en ocasiones “gauge” porque actúan como automorfismos internos del álgebra de simetría, preservando las relaciones de conmutación y dejando invariantes las cantidades físicas observables. En particular, al igual que las transformaciones de calibre en electrodinámica, estas operaciones no modifican los valores medibles, sino únicamente la representación interna de los operadores o campos, lo que justifica la analogía terminológica.

Ahora, rompiendo el principio de incertidumbre con una perturbación

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] \longrightarrow i\hbar(\eta_{\mu v} + \hat{\epsilon}_{\mu v}), \quad (4.5)$$

de la cual, imponemos que la perturbación $\hat{\epsilon}_{\mu v} = \hat{\epsilon}_{\mu v}(x, p)$ deforme el álgebra de observables (GUP-Deformed Quantum Mechanics [4][6][5]), pero dejando invariante $[x'_\mu, x'_v] = 0$ y $[\hat{p}'_\mu, \hat{p}'_v] = 0$. Si la perturbación es invariante adjunta,

$$[\hat{\epsilon}_{\mu v}, \hat{D}_n] = 0 \quad (4.6)$$

la denominamos **perturbación simétrica**. La cuantización canónica se vuelve

$$[\hat{N}_\alpha, \hat{M}_\beta] = i\hbar\alpha^\mu\beta^\mu[\eta_{\mu v} + \hat{\epsilon}_{\mu v}]. \quad (4.7)$$

Y por ende la conmutación de \hat{Q} con el operador central

$$[\hat{A}, \hat{N}_\alpha \hat{M}_\beta] = [A, \hat{M}_\beta \hat{N}_\alpha] + i\hbar\alpha^\mu\beta^\mu[\hat{A}, \hat{\epsilon}_{\mu v}], \quad (4.8)$$

crea la posibilidad de expandir la ecuación central $\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{V}(\hat{\epsilon}_{\mu v})$ siendo \hat{A}_0 el operador central simétrico que cumple $[\hat{A}_0, \hat{Q}] = 0$. La ecuación anterior puede reescribirse

$$[\hat{V}, [\hat{N}_\alpha, \hat{M}_\beta]] = i\hbar\alpha^\mu\beta^\mu[\hat{A}_0 + \hat{V}, \hat{\epsilon}_{\mu v}], \quad (4.9)$$

donde se ha utilizado que la métrica de Minkowski conmuta con la ecuación central. De aquí se deriva la restricción de la perturbación, por ser generadora del potencial $\hat{V} = \hat{V}(\epsilon_{\mu v})$

$$\alpha^\mu\beta^\mu[\hat{A}_0, \hat{\epsilon}_{\mu v}] = 0. \quad (4.10)$$

Al ser entonces $\hat{A}_0 \propto \hat{Q}$ una función de las simetrías base y la acción, la perturbación tendrá soluciones comunes con ambos operadores, definiendo

$$\hat{E} = F(\hat{Q}(\hat{x}, \hat{p})), \quad (4.11)$$

con $\hat{E} = \sum_{\mu v} \alpha_\mu \beta_v \hat{\epsilon}_{\mu v}$, es proporcional a las simetrías en \hat{Q} . Si cada termino de la doble sumatoria conmuta con \hat{A}_0 central se tiene

$$[\hat{A}_0, \hat{\epsilon}_{\mu v}] = d_\tau \epsilon_{\mu v} = 0. \quad (4.12)$$

Note que la perturbación puede ser vista como un cambio directo en la métrica del sistema $\eta_{\mu v}$ de Minkowski. Esto ha sido estudiados ya por [1] en rompimiento de simetrías de, como Lorentz y CPT, que surgen cuando el principio de incertidumbre es generalizado (dependiente del momento o la posición locales) y toma en cuenta los efectos de curvatura del espacio-tiempo [2]. Un caso interesante es el del rompimiento de la perturbación simétrica

$$\hat{\epsilon}_{\mu v} \neq e^{-\hat{D}_n} \hat{\epsilon}_{\mu v} e^{\hat{D}_n} \longleftrightarrow [\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] \neq e^{-\hat{D}_n} [\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] e^{\hat{D}_n}. \quad (4.13)$$

En estos casos pasamos a una métrica diferente $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$, la cual acarrea incertidumbre.

$$\sigma_A \sigma_Q \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{Q}] \rangle \right| \propto O(\epsilon_{\mu\nu}) \quad (4.14)$$

Este resultado sugiere que el rompimiento de las simetrías por la no conmutabilidad en (4.6) conduce a una modificación no trivial de las relaciones de incertidumbre, lo que podría tener implicaciones profundas en la descripción de sistemas cuánticos en espacios con métricas no triviales. Trabajos como los de Aron J. Beekman, Louk Rademaker, y Jasper van Wezel introducen las consecuencias de el rompimiento espontaneo de simetrías [3].

4.1. Casos perturbados Simétricos

4.1.1. Ecuación de Pauli sin Potencial Escalar

En contraste, sabemos que la ecuación de Pauli sin potencial constituye una aproximación no relativista de la ecuación de Dirac relativista. En este marco, se introduce la transformación simétrica $\hat{D}_i = \frac{r_i}{c} \hat{B}_i^{NR}$, con $r_i = r_i(x)$ una función dependiente de la posición, aplicada a cada \hat{p}_i y \hat{x}_i mediante un *boost* galileano adjunto, para encontrar otra forma de derivación desde el marco no relativista. Así mismo, dicha transformación garantiza que la relación de incertidumbre permanezca invariante, haciendo

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &\longrightarrow e^{\hat{D}_i} \hat{p}_i e^{-\hat{D}_i} = \hat{p}_i - \frac{q}{c} \phi_i \delta_{ij}, \\ \hat{x}_i &\longrightarrow e^{\hat{D}_i} \hat{x}_i e^{-\hat{D}_i} = \delta_{ij} \hat{x}_j, \end{aligned} \quad (4.15)$$

y dado que $[\phi_i, \hat{p}_i] = 0$, se sigue que $[\phi_i, \hat{B}_i^{NR}] = 0$ en este caso. Definiendo $r_i(x) = \frac{q}{i\hbar} \phi_i(x)$, donde ϕ_i son los componentes del potencial vector y q es la carga eléctrica de la partícula.

Resultados: Asumiendo nuevamente $\alpha_\mu \beta_\mu = \mathbf{1}$, y aplicando la *Afirmación 2*, obtenemos la ecuación de Pauli

$$[(\alpha' \beta^i)(\alpha' \beta_i)(\hat{p}_i - \frac{q}{c} \phi_i)(\hat{p}^i - \frac{q}{c} \phi^i) - \frac{\alpha' \beta_0}{2a} \hat{H}](\mathbf{1} |\Phi_c\rangle) = 0. \quad (4.16)$$

Nótese que esto se corresponde perfectamente con la ecuación de Pauli cuando tomamos $\alpha' \beta_i = \sigma_i$, $\alpha' \beta_0 = I_2$, y expresamos los operadores en su forma diferencial. Agrupando con $\mathbf{A}_e = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, entonces (4.16) queda finalmente

$$\boxed{2a[(\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{q}{c} \mathbf{A}_e))^2 (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = i\hbar \partial_t (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle)].} \quad (4.17)$$

La derivación algebraica de la ecuación de Pauli a partir del álgebra no-relativista mediante una transformación de *boost* galileano ofrece una explicación directa de por qué su estructura no es relativista, es simplemente una aproximación válida para partículas con espín semi-entero. Véase, por ejemplo, una construcción algebraica en [40], donde la corriente de Pauli se deriva de identidades de espín en el marco de la teoría de Lévy-Leblond. Note que, en el límite $c \rightarrow \infty$, recuperamos la estructura no-relativista de Schrödinger.

4.1.2. Ecuación de Pauli

Téngase un operador \hat{F}_0 generador de potencial simétrico tal que la transformación

$$e^{\hat{F}_0} \hat{H} e^{-\hat{F}_0} = \hat{H} + \phi_0, \quad (4.18)$$

genere un potencial eléctrico $\phi_0 = [\hat{F}_0, \hat{H}]$. Por la expansión del lado izquierdo en (4.18) se cumple

$$[\hat{F}_0, [\hat{F}_0, \hat{H}]] = 0. \quad (4.19)$$

Usando, en este marco, el álgebra de Lie no-relativista, es posible construir ϕ_0 con invariancia boost galileana

$$\hat{F}_0 = \hat{F}_0(\hat{B}_i^{NR}) \longrightarrow [\phi_0, \hat{B}_i^{NR}] = 0. \quad (4.20)$$

De la misma forma que el caso sin potencial, se debe transformar $\hat{x}_0 \longrightarrow e^{\hat{F}_0} \hat{x}_0 e^{-\hat{F}_0}$ que no afectan la ecuación central, y asegura la invariancia de la relación de incertidumbre.

Resultados: Finalmente, el operador de Pauli,

$$\hat{A}_{NR} = \beta^i \beta_i (\hat{p}_i - \frac{q}{c} \phi_i) (\hat{p}^i - \frac{q}{c} \phi^i) - \frac{\beta_0}{2a} (\hat{H} + \phi_0), \quad (4.21)$$

donde notamos que $\hat{A}_{NR} \longrightarrow \hat{A}_{NR} + \hat{V}$ con $\hat{V}(\epsilon_{\mu\nu}) = -\frac{\beta_0}{2a} \phi_0$. Dando a entender que el potencial puede ser descrito (generado) como una perturbación simétrica que cumple (4.10).

En forma diferencial desde (4.17) se tiene $\hat{A}_p |\Phi_c\rangle = 0$, quedando así

$$2a[(\sigma \cdot (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}_e))^2 (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) + \hat{V}(\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = i\hbar \partial_t (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle)]. \quad (4.22)$$

Las dos transformaciones (*boosts* y \hat{F}_0) mapean perfectamente a la ecuación de Pauli con potencial vector y potencial escalar, relacionándose a un marco de referencia distinto general donde se toman en cuenta los potenciales eléctricos y magnéticos de una partícula cargada desde la perspectiva no relativista. Con el caso de tener una perturbación en el principio de incertidumbre, esta no romperá la simetría del sistema si conmuta con el Boost de Galileo (transformación a otro marco de referencia), aunque se deforme el álgebra de Lie no relativista, seguirá mapeando a la misma ecuación central no-relativista (Pauli) por el cumplimiento de (4.4).

4.1.3. Ecuación Carroll–Schrödinger–Pauli sin Potencial Escalar

Para completar la analogía con la ecuación de Pauli, aplicamos ahora la misma transformación adjunta, pero esta vez con el ultra-boost, $\hat{D}_i = w_i \hat{B}_i^{UR}$. Esta transformación preserva la relación de incertidumbre de Heisenberg, paralelo al caso simétrico anterior, asegurando que la estructura cuántica permanezca invariante también bajo la simetría ultra-relativista. Así,

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &\longrightarrow e^{\hat{D}_j} \hat{p}_i e^{-\hat{D}_j} = \hat{p}_i - \delta_{ij} [(Q a_{UR}^*) \phi_i \hat{H} + \left(\frac{c^2}{v^2}\right) \frac{Q^2}{2} a_{UR}^* \phi_i^2] \\ \hat{x}_i &\longrightarrow e^{\hat{D}_j} \hat{x}_i e^{-\hat{D}_j} = \delta_{ij} \hat{x}_i, \end{aligned} \quad (4.23)$$

con la función $w_i(x) = \frac{c^2}{v^2} \frac{Q}{2i\hbar} \phi_i(x)$, donde Q es una constante real, potencialmente interpretable como la *carga magnética*³ del sistema. Se satisfacen las siguientes relaciones de conmutación $[\hat{p}_i, \phi_i] = 0$, y $[\hat{B}_i^{UR}, \phi_i] = 0$. La única condición adicional requerida para derivar la ecuación es $[\hat{H}, \phi_i] = 0$, la cual también se cumple implícitamente en la ecuación de Pauli (4.17) siempre que el potencial vector no sea una función explícita del tiempo.

Resultados: A partir de la ecuación (3.88), escribimos ahora la ecuación de C-S-P, que generaliza la estructura de Pauli a regímenes ultra-relativistas con acoplamiento espín-momento y una relación de dispersión no estándar

$$\left[\sigma^i (\hat{p}_i - Q a_{UR}^* \phi_i \hat{H} + \left(\frac{c^2}{v^2} \right) \frac{Q^2}{2} a_{UR}^* \phi_i^2) - 2 a_{UR}^* \hat{H}^2 \right] (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = 0. \quad (4.24)$$

Nótese que en el límite $a_{UR}^* \rightarrow 0$, obtenemos $\sigma^i \hat{p}_i |\Phi_c\rangle = 0$, donde $|\Phi_c\rangle$ es una de las posibles soluciones de la ecuación de Weyl para partículas sin masa con espín $s = 1/2$. No obstante, el parámetro a_{UR}^* tiene unidades de $(\text{kg} \cdot \text{m}^3/\text{s}^3)^{-1}$, lo que implica que la ecuación (4.24) puede aproximarse en regímenes donde el sistema es altamente energético o posee una masa extremadamente grande.

Ejemplo: Aproximamos $(c^2/v^2 Q^2) \rightarrow 0$. Entonces la ecuación toma una forma mas simple y manejable

$$[\sigma^i (\hat{p}_i - Q a_{UR}^* \phi_i \hat{H}) - 2 a_{UR}^* \hat{H}^2] (\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = 0. \quad (4.25)$$

Suponiendo una solución tipo onda plana $|\Phi_c\rangle(\mathbf{x}, t) = u e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, con espinor constante u , se obtiene

$$\left[\sigma \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) - 2 a_{UR}^* \hbar^2 \omega^2 \right] u = 0, \quad (4.26)$$

con $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, y $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \hbar \mathbf{k} + Q a_{UR}^* \hbar \omega \phi$. La condición de existencia de soluciones no triviales es $2 a_{UR}^* \hbar^2 \omega^2 = \pm |\hbar \mathbf{k} + Q a_{UR}^* \hbar \omega \phi|$. Donde en el caso colineal $\mathbf{k} \parallel \phi$, se reduce a la cuadrática

$$2 a_{UR}^* \hbar^2 \omega^2 - Q a_{UR}^* \hbar |\phi| \omega - \hbar |\mathbf{k}| = 0, \quad (4.27)$$

cuyas soluciones son

$$\omega = \frac{Q a_{UR}^* \hbar |\phi| \pm \sqrt{Q^2 (a_{UR}^*)^2 \hbar^2 |\phi|^2 + 8 a_{UR}^* \hbar^3 |\mathbf{k}|}}{4 a_{UR}^* \hbar^2}. \quad (4.28)$$

Finalmente, el espinor u es un autovector de $\sigma \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$, y la solución general toma la forma

$$|\Phi_c\rangle(\mathbf{x}, t) = u_{\pm} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (4.29)$$

donde u_{\pm} corresponde a espín paralelo o antiparalelo a $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$.

³Esto es porque en Pauli es la carga eléctrica, y esta que . No descartamos la posibilidad de la existencia de otro tipo de *cargas* de algún campo efectivo o exótico.

Para graficar ahora el comportamiento temporal de la función de onda solución (4.29) se fijan las mismas constantes físicas empleadas que en el caso de la sección 3,2,6. Los parámetros del modelo se toman como $a_{UR}^* = 1,0 \times 10^{-20} \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}/\text{s}^{-3}$ y $Q = 1,0$. El potencial se considera en dirección colineal $\phi = (0, 0, 1)$, mientras que el vector de onda se fija en $\mathbf{k} = (0, 0, 10^{10}) \text{m}^{-1}$. La posición espacial se mantiene constante en $\mathbf{r} = (0, 0, 10^{-12}) \text{m}$. El intervalo temporal considerado es de $0 \leq t \leq 1,0 \times 10^{-12} \text{s}$, muestreado en $N_t = 2000$ puntos. Con estos valores se construye la trayectoria tridimensional en el espacio $(\text{Re}[\phi_0], \text{Re}[\phi_1], t)$, donde el color indica la evolución temporal en picosegundos.

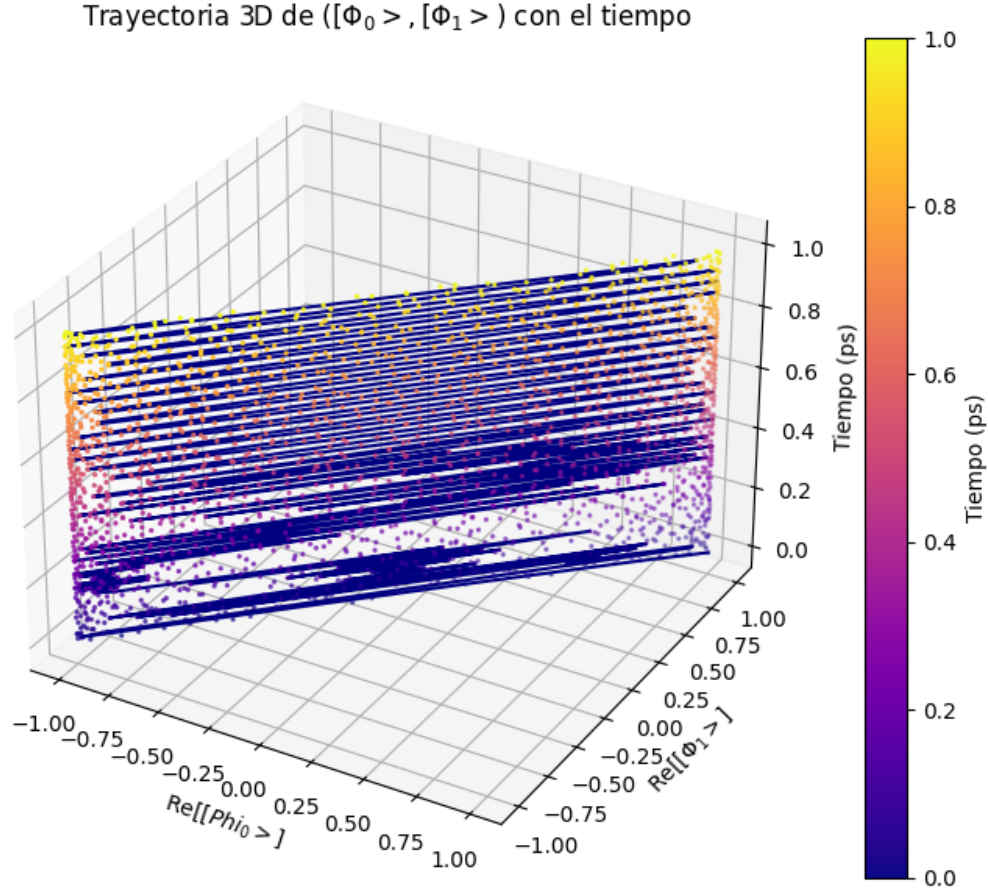


Figura 4.1: Trayectoria 3D de las componentes reales $\text{Re}[\Phi_0(t)]$ y $\text{Re}[\Phi_1(t)]$ de la función de onda solución $|\Phi_c\rangle(\mathbf{x}, t)$, evaluada en la posición fija $\mathbf{r} = (0, 0, 10^{-12}) \text{m}$ con vector de onda $\mathbf{k} = (0, 0, 10^{10}) \text{m}^{-1}$. Los parámetros empleados son $a_{UR}^* = 1,0 \times 10^{-20}$, $Q = 1,0$, $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$, $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$ y $c = 3,0 \times 10^8 \text{m/s}$.

4.1.4. Ecuación Carroll–Schrödinger-Pauli (C.S.P.)

Para que la perturbación genere un potencial simétrico, y así escribir la ecuación completa, Carroll–Schrödinger-Pauli, se debe cumplir la relación de invariancia adjunta y la restricción de la perturbación (4.10), la ecuación central queda

$$\hat{A}_{UR} \longrightarrow \hat{A}_{UR} + \hat{V}(\epsilon_{\mu\nu}), \quad (4.30)$$

donde este potencial es generado por la perturbación y por tanto debe ser invariante bajo la transformaciones ultra-*boosts*

$$[\hat{V}, \hat{B}_i] = 0. \quad (4.31)$$

Resultado: Escribiendo el potencial de (4.30) como $\hat{V}(\epsilon_{\mu\nu}) = -2a_{UR}^* \tilde{V}^2$ (pseudo-potencial). La ecuación ultra-Pauli anterior (4.24) se expresa ahora como

$$\boxed{[\sigma^i(\hat{p}_i - Qa_{UR}^* \phi_i \hat{H} + \left(\frac{c^2}{v^2}\right) \frac{Q^2}{2} a_{UR}^* \phi_i^2) - 2a_{UR}^* (\hat{H} + i\tilde{V})^2](\mathbb{I}_2 |\Phi_c\rangle) = 0.} \quad (4.32)$$

donde se cumple la anticonmutación $\{\hat{H}, \tilde{V}(\epsilon_{\mu\nu})\} = 0$, para que cumpla la transformación $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + i\tilde{V}(\epsilon_{\mu\nu})$ paralela al caso de Pauli con potencial escalar. Note que el cuadrado de \tilde{V} , conmuta con el ultra-*boost*, por esto, es denominada aquí como *pseudo-potencial*.

La ecuación dada (4.32), pertenece a la clase de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para campos espinores, específicamente de tipo Weyl modificado, como en el caso anterior. Lo mas interesante, es la posible resolución completa por teoría de perturbaciones en la función de onda

$$|\Phi_c\rangle = |\Phi_c^{(0)}\rangle + \epsilon |\Phi_c^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |\Phi_c^{(2)}\rangle + \dots + \epsilon^N |\Phi_c^{(N)}\rangle + O(\epsilon^{N-1}), \quad (4.33)$$

con las siguientes opciones de solubilidad: (i) Perturbando el parámetro escalar ultra-relativista $a_{UR}^* \rightarrow \epsilon$, por tanto la primera solución $|\Phi_c^{(0)}\rangle$ fundamental, de la expansión anterior cumple la ecuación de Weyl para partículas sin masa $\sigma^i \hat{p}_i |\Phi_c^{(0)}\rangle = 0$. (ii) Perturbando la carga $Q \rightarrow \epsilon$ y así la primera solución cumple la ecuación $[\sigma^i(\hat{p}_i - 2a_{UR}^* (\hat{H} + i\tilde{V})^2)](I_2 |\Phi_c\rangle) = 0$ con operadores de traslación \hat{p}_i acoplados a las matrices de Pauli. Y por ultimo pero no imposible, (iii) Perturbando el *pseudo-potencial*, que por definición ya es generado por una perturbación simétrica. La solución fundamental $|\Phi_c^{(0)}\rangle$ es expresada en (4.24).

Es necesario añadir que este tipo de construcción es comparable a los métodos de pseudo-potenciales en física del estado sólido⁴, donde se reemplaza la interacción microscópica complicada por un operador efectivo que preserve las propiedades de simetría y permite obtener soluciones analíticas, o incluso, perturbativas [79] [80].

⁴Históricamente, el estudio cuántico de los electrones en cristales y metales se denominó “física del estado sólido”, centrado en bandas de energía, fonones y propiedades electrónicas. A partir de la segunda mitad del siglo XX, el campo se amplió para incluir líquidos cuánticos, superconductores, sistemas desordenados y fases topológicas, adoptando el nombre más general de “física de la materia condensada”.

Capítulo 5

Resumen de ecuaciones de movimiento

Régimen	Ecuación	Forma simbólica
Relativista	Klein–Gordon (esc.)	$[\alpha_\mu \beta^\mu \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu](1 \Phi_c\rangle) = 0$ (3,13)
Relativista	Dirac/Weyl (esp.)	$[\alpha_\mu \beta^\mu \gamma^\mu \hat{p}_\mu](1 \Phi_c\rangle) = 0$ (3,14)
No relativista	Schrödinger libre	$[\alpha^i \beta^i \hat{p}_i \hat{p}_i - \frac{\alpha_0 \beta_0}{2a_{NR}} \hat{H}](1 \Phi_c\rangle) = 0$. (3,50)
No relativista	Pauli (+ V , \mathbf{A})	$2a[(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}))^2 + \hat{V} - \frac{1}{2a}\hat{H}](\mathbb{I}_2 \Phi_c\rangle) = 0$ (4,22)
Ultra– relativista	C.–S. (esc.)	$[(\frac{c^2}{2v^2 a_{UR}^*})\alpha' \beta_i \hat{p}_i - (\alpha' \beta_0)^2 \hat{H}^2](1 \Phi_c\rangle) = 0$ (3,71)
Ultra– relativista	C.–S. (Matricial)	$[\sigma^i \hat{p}_i - 2a_{UR}^* \hat{H}^2](\mathbb{I}_2 \Phi_c\rangle) = 0$ (3,88)
Ultra– relativista	C.S.P. (sin V_s)	$[\sigma_i(\hat{p}_i - Qa_{UR}^* \phi_i \hat{H} + \frac{c^2}{v^2} \frac{Q^2}{2} a_{UR}^* \phi_i^2) - 2a_{UR}^* \hat{H}^2](\mathbb{I}_2 \Phi_c\rangle) = 0$ (4,24)
Ultra– relativista	C.S.P. (pseudo- V)	$[\sigma_i(\hat{p}_i - Qa_{UR}^* \phi_i \hat{H} + \frac{c^2}{v^2} \frac{Q^2}{2} a_{UR}^* \phi_i^2) - 2a_{UR}^* (\hat{H} + i\tilde{V})^2](\mathbb{I}_2 \Phi_c\rangle) = 0$ (4,33)

Cuadro 5.1: Clasificación de las ecuaciones de movimiento obtenidas en la tesis según el régimen cinemático.

Capítulo 6

Discusión

La derivación de una ecuación tipo Carroll–Schrödinger en el régimen ultra-relativista plantea varios aspectos teóricos que merecen ser discutidos. En primer lugar, el hecho de que la simetría rotacional se rompa en el caso escalar, mientras que se preserve la invariancia bajo ultra-*boosts*, sugiere la presencia de una anomalía en la que los generadores de simetría no forman una subálgebra de tipo Poincaré con las diez simetrías esperadas en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta ruptura podría tener implicaciones relevantes para el estudio de teorías efectivas con anisotropía inherente, como se ha discutido en contextos de materia exótica [43]. De forma paralela, la validez formal del límite carrolliano requiere una interpretación más precisa, especialmente respecto a la consistencia de la evolución temporal. En este modelo, dicha evolución está gobernada por términos cuadráticos, lo cual plantea preguntas sobre su estabilidad y aplicabilidad. Al extender la construcción al caso con espín (C.S.P.), mediante la introducción de matrices de Pauli, se sugiere una analogía con la estructura del espinor de Dirac. Sin embargo, cabe destacar que el marco físico en el que las matrices de Pauli emergen usualmente es el no relativista. Aquí, en contraste, el espín no surge de una representación de simetría relativista ni como resultado de un *boost* ultra-relativista, sino como una estructura añadida manualmente para recuperar la invariancia bajo rotaciones. Esto reproduce la lógica de Dirac, quien extendió el grupo de rotaciones y *boosts* para incorporar el espín, pero en este caso con motivación distinta. Este hecho plantea interrogantes acerca de si podría existir un principio de simetría más general —posiblemente una extensión no lineal o deformada del álgebra de Poincaré–Carroll— que permita derivar de manera natural estas estructuras a partir de una métrica modificada $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$. En particular, sería interesante explorar si el espacio de operadores $Z_{\alpha\beta}$ admite una realización geométrica o puede interpretarse como una representación de una superálgebra no asociativa relevante para modelos en teorías de gravedad cuántica [51, 5, 56, 57, 4].

A partir de esta estructura, también sería posible estudiar extensiones algebraicas con correcciones supersimétricas derivadas de perturbaciones en la relación de incertidumbre de Heisenberg–Weyl. Estas perturbaciones pueden emerger en contextos de mediciones cuánticas ruidosas, sistemas abiertos o configuraciones experimentales con interacción ambiental [87, 88, 48, 92, 96, 89, 107]. Dicho enfoque permitiría, en principio, derivar una familia de ecuaciones de movimiento para partículas libres, adaptadas a cada tipo de modificación de la incertidumbre, considerando que el operador \hat{A} dependa funcionalmente de todos los generadores de simetría base, i.e., $\hat{A} = \hat{A}(\hat{p}_\rho, \hat{M}_{\mu\nu})$. Esto incluso abriría la posibilidad de encontrar

el segundo invariante de Casimir de Poincaré, relacionado con el cuadrado del pseudo-vector de Pauli–Lubanski. Sin embargo, una limitación importante en esta formulación es la suposición de compatibilidad con el álgebra de Von Neumann de tipo I, que es adecuada para sistemas discretos pero falla en teorías de campos cuánticos locales o en sistemas cuánticos estadísticos con infinitos grados de libertad. En este contexto, sería necesario considerar álgebras de tipo III para abordar de manera adecuada teorías de gravedad cuántica [117, 66].

Por otro lado, la modificación en la relación de dispersión que surge en el modelo ultra-relativista podría interpretarse como la manifestación de un comportamiento ondulatorio no estándar. Sería deseable explorar si tal comportamiento puede reflejarse en fenómenos físicos concretos, tales como la propagación de partículas bosónicas en medios anisotrópicos o fermiónicos en medios isotrópicos. En relación con lo anterior, resulta particularmente interesante el comportamiento dinámico de las soluciones de C.S.P. en ausencia de potencial escalar. Estas visualizan un rompimiento inicial de simetría de la onda, el cual se estabiliza con el tiempo hasta tomar la forma de una onda usual. Este comportamiento transitorio podría interpretarse como el resultado de un proceso de calibración caracterizado por un tiempo efectivo t_{eff} , generado por un potencial vectorial acoplado de forma no trivial. Sería notable poder encontrar aplicaciones directas en las que los espinores sigan la relación de dispersión carrolliana planteada en (4.28). Un aspecto particularmente prometedor del régimen ultra-relativista (o carrolliano) es su conexión con fenómenos físicos observables, lo que abre la posibilidad de validación experimental de las teorías construidas en dicho límite. Por ejemplo, la dinámica del plasma quark–gluón creado en colisiones de iones pesados (RHIC, LHC) puede describirse eficazmente mediante hidrodinámica carrolliana, ya que el flujo de Bjorken presenta las simetrías esperadas en el límite $v \rightarrow c$ [41]. Asimismo, en sistemas de materia condensada, se han observado excitaciones fractónicas con movilidad restringida en experimentos de gases cuánticos sobre redes ópticas [42], lo cual confirma predicciones teóricas directamente relacionadas con simetrías carrollianas. Estas observaciones sugieren que, lejos de ser una mera idealización matemática, el límite ultra-relativista posee relevancia tangible en plataformas experimentales actuales, abriendo nuevas perspectivas tanto en física de altas energías como en materia condensada y simulaciones cuánticas.

Capítulo 7

Conclusión

- Presentamos una formulación *algebraica* de ecuaciones de movimiento cuánticas a partir de simetrías y un postulado mínimo de incertidumbre.
- Construimos operadores conjugados en un análogo al espacio de fases, generador del operador de *Simetría-Dilatación* que conmutan con un operador central tipo Casimir.
- Recuperamos dinámicas cuánticas conocidas (relativistas y no relativistas) y generamos nuevas estructuras.
- Destaca el límite ultra-relativista Carroll–Schrödinger–Pauli (C.S.P.) como caso matricial de partícula libre con espín.
- Redefinimos la acción como *operador* dependiente del generador de dilataciones para derivar ecuaciones vía Noether.
- Obtenemos una interpretación natural de la conservación de la probabilidad en Schrödinger y en su dual Carroll–Schrödinger.
- En la extensión perturbativa aparecen soluciones espinoriales sencillas para el electrón con comportamiento ondulatorio bien definido.
- En el régimen Carroll–Schrödinger matricial, la onda libre permanece constante en el tiempo.
- Al acoplar un potencial vector invariante bajo *ultra-boosts*, la onda se deforma de forma controlada (posible acoplamiento electromagnética con carga magnética efectiva).
- Generalizamos a un potencial escalar con acoplamiento $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \tilde{V}$ si el pseudo-potencial anticonmuta con el generador temporal \hat{H} .

Capítulo 8

Recomendaciones

No quisiéramos concluir este trabajo sin antes señalar algunos puntos relevantes para futuras investigaciones. Recomendamos un análisis cuidadoso de la consistencia real, y por tanto medible, de la ecuación matricial de Carroll–Schrödinger–Pauli, dado que se trata de una construcción enteramente teórica y, hasta donde sabemos, no se han descrito sistemas cuánticos formulados de esa manera en la literatura. Una de las dificultades principales de los análisis Carrolianos es que en muchas derivaciones, la velocidad de luz tiende a cero. El cual hemos tratado de evitar en la aproximación del *boost* ultra-relativista con el parámetro de comparación $a_{UR}^* v^2 / c^2$, para tratar de no violar la causalidad. Es posible que una extensión más general conduzca a nuevas soluciones y resulte necesaria para verificar su validez en el régimen cuántico de Carroll. Asimismo, sería interesante calcular las amplitudes de transición asociadas a interacciones y acoplamientos con otros campos, como el gravitatorio, o incluso explorar la posibilidad de replicar y/o ajustar las autointeracciones (loops cuánticos) $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 2$ en el marco del C.S.P. fermiónico.

De la misma manera, para poder pasar al principio de incertidumbre generalizado, como una deformación del HUP, y poder utilizar esta teoría en sistemas en donde se acopla la gravedad cuántica, es necesario hacer comparaciones habituales entre la constante de Planck, y la curvatura, controlada por la constante de gravitatoria de Newton. Por lo tanto, es muy posible que deba haber un umbral de energía el cual permita las deformaciones en las álgebras canónicas y de generadores de simetrías. Los agujeros negros, serían el ejemplo perfecto para poder utilizar nuestra teoría perturbada, y poder derivar ecuaciones de movimiento en mecánica cuántica de espacios tiempo curvos con acoplamientos gravitatorios exóticos.

En cuanto a las consideraciones matemáticas de manipulación algebraica, calculo, y soluciones de ecuaciones diferenciales, entre otros, recomendamos el *software* abierto *Sage* descargable como paquete de *Python*, para poder agilizar los procesos manuales que conlleva este trabajo, y futuros otros. Otro programa como *Maple* también es una excelente opción, pero no es un *software* abierto.

Finalmente, recomendamos mantener siempre la perseverancia frente a cualquier adversidad. En palabras de *Richard P. Feynman*: “**El éxito de la ciencia se basa en la perseverancia de seguir preguntando, incluso cuando las respuestas no son inmediatas.**”

Bibliografía

- [1] Lambiase, G., & Scardigli, F. (2018). Lorentz violation and generalized uncertainty principle. *Physical Review D*, **97**, 075003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.075003>
- [2] Illuminati, F., Lambiase, G., & Petruzzello, L. (2021). Spontaneous Lorentz violation from infrared gravity. *Symmetry*, **13**, 1854. <https://doi.org/10.3390/sym13101854>
- [3] Beekman, A. J., Rademaker, L., & van Wezel, J. (2019). An introduction to spontaneous symmetry breaking. *SciPost Physics Lecture Notes*, **11**. <https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.11>
- [4] Wagner, F. (2021). Generalized uncertainty principle or curved momentum space? *Physical Review D*, **104**(12), 126010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.126010>
- [5] Chemisana, D., Giné, J., & Madrid, J. (2023). Generalized Heisenberg Uncertainty Principle due to the quantum gravitational effects in the Schwarzschild spacetime. *Nuclear Physics B*, **991**, 116225. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116225>
- [6] Wagner, F. (2023). Reinterpreting deformed Heisenberg algebras. *The European Physical Journal C*, **83**, 154. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11298-0>
- [7] Feynman, R. P. (1948). Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, **20**(2), 367–387. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367>
- [8] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 235–257, 1918.
- [9] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, 1998.
- [10] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 241, no. 2, pp. 333–380, 1984.
- [11] P. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory,” in *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Les Houches Summer School 1988, eds. E. Brézin and J. Zinn-Justin, North-Holland, 1990.

- [12] Heisenberg, W. (1925). *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. *Zeitschrift für Physik*, 33, 879–893. doi:10.1007/BF01328377
- [13] P. Busch, T. Heinonen, P. Lahti, *Heisenberg’s uncertainty principle*, *Physics Reports* **452** (6), 155–176 (2007). doi:10.1016/j.physrep.2007.05.006
- [14] E. Casanova, J. Rojas, M. Arias, “On the Derivation of Equations of Motion from Symmetries in Quantum-Mechanical Systems via Heisenberg’s Uncertainty,” [arXiv:2508.10661 \[quant-ph\]](#), 2025.
- [15] Pauli, W. (1940). *The Connection Between Spin and Statistics*. *Physical Review*, 58(8), 716–722. doi:10.1103/PhysRev.58.716
- [16] Fierz, M. (1939). *Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin*. *Helvetica Physica Acta*, 12, 3–37. doi:10.1002/hlca.19390220102
- [17] Dirac, P. A. M. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.
- [18] Schwinger, J. (1951). *The Theory of Quantized Fields. I*. *Physical Review*, 82(6), 914–927. doi:10.1103/PhysRev.82.914
- [19] Schrödinger, E. (1926). *Quantisierung als Eigenwertproblem I–IV*. *Annalen der Physik*, 79, 361–376; 79, 489–527; 80, 437–490; 81, 109–139. doi:10.1002/andp.19263840404
- [20] Dirac, P. A. M. (1928). *The Quantum Theory of the Electron*. *Proceedings of the Royal Society A*, 117(778), 610–624. doi:10.1098/rspa.1928.0023
- [21] Dirac, P. A. M. (1928). *The Quantum Theory of the Electron, Part II*. *Proceedings of the Royal Society A*, 118(779), 351–361. doi:10.1098/rspa.1928.0056
- [22] Klein, O. (1926). *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. *Zeitschrift für Physik*, 37, 895–906. doi:10.1007/BF01397481
- [23] Gordon, W. (1926). *Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie*. *Zeitschrift für Physik*, 40, 117–133. doi:10.1007/BF01390840
- [24] Dirac, P. A. M. (1927). *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics*. *Proceedings of the Royal Society A*, 113(765), 621–641. doi:10.1098/rspa.1927.0012
- [25] Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Paris: Veuve Desaint. doi:10.5479/sil.322586.39088000898585
- [26] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, Addison-Wesley, 1994. (Sección sobre operadores que conmutan y conjuntos completos de observables compatibles).
- [27] Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London: Royal Society. doi:10.5479/sil.52126.39088015628399

- [28] Maupertuis, P. L. M. (1744). *Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*. *Mém. Acad. Sci. Paris*, 417–426.
- [29] Hamilton, W. R. (1834). *On a General Method in Dynamics*. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 124, 247–308. doi:10.1098/rstl.1834.0017
- [30] Hamilton, W. R. (1835). *Second Essay on a General Method in Dynamics*. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 125, 95–144. doi:10.1098/rstl.1835.0009
J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, Addison-Wesley, 1994. (Sección sobre operadores que conmutan y conjuntos completos de observables compatibles).
- [31] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mecánica Cuántica*, Vol. 1, Hermann / Wiley, 1977. (Capítulo sobre observables, conmutadores y construcción de bases a partir de un CSCO).
- [32] W. Heisenberg, “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, pp. 172–198, 1927. doi:10.1007/BF01397280.
- [33] M. Maggiore, “A Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity,” *Physics Letters B*, vol. 304, no. 1–2, pp. 65–69, 1993.
- [34] L. J. Garay, “Quantum gravity and minimum length,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 10, no. 2, pp. 145–166, 1995.
- [35] F. J. Murray y J. von Neumann, “On rings of operators,” *Annals of Mathematics*, vol. 37, no. 1, pp. 116–229, 1936.
- [36] M. H. Stone y J. von Neumann, “The uniqueness of the canonical commutation relations,” *Annals of Mathematics*, vol. 33, no. 3, pp. 567–573, 1932.
- [37] O. Bratteli y D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C^* - and W^* -Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, 2^a ed., Springer-Verlag, 1987.
- [38] N. Sukhomlin, Estudio de simetría y de posibilidades de la resolución exacta de las ecuaciones de Schrödinger y Hamilton–Jacobi para un sistema aislado. *CIENCIA Y SOCIEDAD*, XXIX(1), 2004, INTEC.
- [39] H. Bacry & J. M. Lévy-Leblond, Possible Kinematics. *Journal of Mathematical Physics* **9**, 1605–1614 (1968). doi:10.1063/1.1661490
- [40] J. M. Wilkes, The Pauli and Lévy–Leblond Equations, and the Spin Current Density, *Eur. J. Phys.* **41**, 035402 (2020). doi:10.1088/1361-6404/ab7495
- [41] L. Ciambelli, R. G. Leigh and P. Mao, “Carrollian hydrodynamics and Bjorken flow,” *Phys. Rev. D* **105**, 106011 (2022).

- [42] J. Koepsell *et al.*, “Observation of Fractonic Mobility in a Tilted Hubbard Model,” *Nature Physics* **19**, 358–364 (2023).
- [43] A. A. Soluyanov *et al.*, "Type-II Weyl semimetals", *Nature* **527**, 495–498 (2015).
[doi:10.1038/nature15768](https://doi.org/10.1038/nature15768)
- [44] A. Bagchi & R. Gopakumar, Galilean conformal algebras and AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics* 2009(07):037.
[doi:10.1088/1126-6708/2009/07/037](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/07/037)
- [45] E. Benitez & L. M. Arevalo, Scientific Reports (Nature) **8**, 4010 (2018).
[doi:10.1038/s41598-018-22336-3](https://doi.org/10.1038/s41598-018-22336-3)
- [46] E. H. Kennard, *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, *Zeitschrift für Physik* **44**(4–5), 326–352 (1927).
[doi:10.1007/BF01391200](https://doi.org/10.1007/BF01391200)
- [47] E. Bergshoeff *et al.*, Dynamics of Carroll Particles. *Classical and Quantum Gravity* **31**, 205009 (2014).
[doi:10.1088/0264-9381/31/20/205009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/31/20/205009)
- [48] P. Busch *et al.*, Heisenberg’s uncertainty principle. *Physics Reports* **452**(6), 155–176 (2007).
[doi:10.1016/j.physrep.2007.05.006](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.05.006)
- [49] R. R. S. Cantuba, A Casimir element inexpressible as a Lie polynomial. *International Electronic Journal of Algebra* **30**, 1–15 (2021).
[doi:10.24330/ieja.969570](https://doi.org/10.24330/ieja.969570)
- [50] M. Cariglia, Hidden Symmetries of Dynamics in Classical and Quantum Physics. *Reviews of Modern Physics* **86**(4), 1283–1336 (2014).
[doi:10.1103/RevModPhys.86.1283](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.1283)
- [51] R. Casadio & F. Scardigli, Horizon wave function for single localized particles: GUP and quantum black-hole decay. *Eur. Phys. J. C* **74**, 2685 (2014).
[doi:10.1140/epjc/s10052-013-2685-2](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2685-2)
- [52] H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig (1928).
English edition: The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover Publications (1931). [Gruppentheorie und Quantenmechanik](#)
- [53] H. Casimir, Über die Konstruktion einer zu den irreduziblen Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen gehörigen Differentialgleichung. *Proceedings of the Royal Academy of Amsterdam* **34**, 844–846 (1931).
- [54] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer, New York (1997).
[doi:10.1007/978-1-4612-2256-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2256-9)

- [55] I. I. Cotăescu, External symmetry in general relativity. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33**(50), 9177–9192 (2000).
[doi:10.1088/0305-4470/33/50/304](https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/50/304)
- [56] C. Cremaschini & M. Tassarotto, Planck Length Emerging as the Invariant Quantum Minimum Effective Length Determined by the Heisenberg Uncertainty Principle in Manifestly Covariant Quantum Gravity Theory. *Symmetry* **16**(8), 1042 (2021).
[doi:10.3390/sym16081042](https://doi.org/10.3390/sym16081042)
- [57] S. Das & E. C. Vagenas, Universality of quantum gravity corrections. *Physical Review Letters* **101**(22), 221301 (2008).
- [58] J. S. Dehesa, Spherical-Symmetry and Spin Effects on the Uncertainty Measures of Multidimensional Quantum Systems with Central Potentials. *Entropy* **23**(5), 607 (2021).
[doi:10.3390/e23050607](https://doi.org/10.3390/e23050607)
- [59] J. de Boer *et al.*, Carroll symmetry, dark energy, and inflation. *Frontiers in Physics* **10**, 810405 (2022).
[doi:10.3389/fphy.2022.810405](https://doi.org/10.3389/fphy.2022.810405)
- [60] P. A. M. Dirac, The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **109**(752), 642–653 (1925).
[doi:10.1098/rspa.1925.0150](https://doi.org/10.1098/rspa.1925.0150)
- [61] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **114**(767), 243–265 (1927).
- [62] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the electron (Parts I & II). *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **117**(778), 610–624 (1928); **118**(779), 351–361 (1928).
[doi:10.1098/rspa.1928.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023); [doi:10.1098/rspa.1928.0056](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0056)
- [63] C. Duval & P. A. Horváthy, Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane, and the Hall effect. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**(47), 10097–10108 (2001).
[doi:10.1088/0305-4470/34/47/314](https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/47/314)
- [64] S. Eswara Rao, Generalized Casimir operators for Lie superalgebras. *Journal of Mathematical Physics* **62**(10), 107703 (2021).
[doi:10.1063/5.0056538](https://doi.org/10.1063/5.0056538)
- [65] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, Springer, 2nd edition (1996).
- [66] E. Witten, “Notes on Some Entanglement Properties of Quantum Field Theory,” *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045003 (2018).
- [67] Shôichirô Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971. [doi:10.1007/978-3-642-61993-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61993-9)

- [68] A. J. Eckman *et al.*, An introduction to spontaneous symmetry breaking. *SciPost Phys. Lect. Notes* **11** (2019).
[doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes.11](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.11)
- [69] C. Fields, Symmetry in Quantum Theory of Gravity. *Symmetry* **14**(4), 775 (2022).
[doi:10.3390/sym14040775](https://doi.org/10.3390/sym14040775)
- [70] J. Giné & G. G. Luciano, Gravitational effects on the Heisenberg Uncertainty Principle: A geometric approach. *Results in Physics* **38**, 105594 (2022).
[doi:10.1016/j.rinp.2022.105594](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105594)
- [71] J. Gomis & K. Kamimura, Schrödinger Equations for Higher Order Non-relativistic Particles and N-Galilean Conformal Symmetry. *Physical Review D* **85**(4), 045023 (2012).
[doi:10.1103/PhysRevD.85.045023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.045023)
- [72] M. Henkel & J. Unterberger, Schrödinger invariance and space-time symmetries. *Nuclear Physics B* **660**(3), 407–435 (2003).
[doi:10.1016/S0550-3213\(03\)00252-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(03)00252-9)
- [73] W. Heisenberg & W. Pauli, Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik* **56**(1-2), 1–61 (1930).
- [74] S. Jia *et al.*, Weyl semimetals: Fermi arcs and chiral anomaly. *Nature Materials* **15**(11), 1140–1144 (2016).
[doi:10.1038/nmat4787](https://doi.org/10.1038/nmat4787)
- [75] M. Z. Jiahao Huang & C. Lee, Entanglement-enhanced quantum metrology: From standard quantum limit to Heisenberg limit. *Applied Physics Reviews* **11**(3), 031302 (2024).
[doi:10.1063/5.0204102](https://doi.org/10.1063/5.0204102)
- [76] E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik* **41**(4-5), 326–352 (1927).
[doi:10.1007/BF01391200](https://doi.org/10.1007/BF01391200)
- [77] G. Lambiase & F. Scardigli, Lorentz violation and generalized uncertainty principle. *Phys. Rev. D* **97**, 075003 (2018). [10.1103/PhysRevD.97.075003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.075003)
- [78] J.-M. Lévy-Leblond, Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré. *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **3**, 1 (1965).
- [79] J. C. Phillips and L. Kleinman, “New Method for Calculating Wave Functions in Crystals and Molecules,” *Physical Review*, vol. 116, no. 2, pp. 287–294, 1959.
[doi:10.1103/PhysRev.116.287](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.287)
- [80] W. E. Pickett, “Pseudopotential methods in condensed matter applications,” *Computer Physics Reports*, vol. 9, no. 3, pp. 115–197, 1989. [doi:10.1016/0167-7977\(89\)90002-6](https://doi.org/10.1016/0167-7977(89)90002-6)
- [81] H. Li *et al.*, Heisenberg-limited Hamiltonian learning for interacting bosons. *npj Quantum Inf.* **10**, 83 (2024).
[doi:10.1038/s41534-024-00881-2](https://doi.org/10.1038/s41534-024-00881-2)

- [82] G. G. Luciano & L. Petruzzello, Generalized Uncertainty Principle in the presence of a minimal length and maximal momentum. *Quantum Stud.: Math. Foundations* **9**(1), 95–107 (2022).
[doi:10.1007/410059-022-002252-0](https://doi.org/10.1007/410059-022-002252-0)
- [83] J. K. Lubański, On the theory of elementary particles of arbitrary spin. I–II. *Physica* **9**(3), 310–324; 325–338 (1942).
- [84] M. Najafizadeh, Carroll Particle: A possible candidate for dark matter [Preprint]. HAL (2024).
<https://hal.science/hal-04545028v2>
- [85] M. Najafizadeh, *Carroll-Schrödinger equation as the ultra-relativistic limit of the tachyon equation*, Scientific Reports **15**, 13884 (2025). [doi:10.1038/s41598-024-82010-9](https://doi.org/10.1038/s41598-024-82010-9).
- [86] L. Nye, Complexity Considerations in the Heisenberg Uncertainty Principle. *J. High Energy Phys., Gravitation and Cosmology* **10**, 1470–1513 (2024).
[doi:10.4236/jhepgc.2024.101083](https://doi.org/10.4236/jhepgc.2024.101083)
- [87] M. Ozawa, Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements. *Phys. Rev. Lett.* **88**(5), 050402 (2002).
[doi:10.1103/PhysRevLett.88.050402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.050402)
- [88] M. Ozawa, Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Phys. Rev. A* **67**(4), 042105 (2003).
[doi:10.1103/PhysRevA.67.042105](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.042105)
- [89] J. L. Pienaar *et al.*, Open Timelike Curves Violate Heisenberg’s Uncertainty Principle. *Phys. Rev. Lett.* **110**(6) (2013).
[doi:10.1103/PhysRevLett.110.080301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.080301)
- [90] L. Pitaevskii & S. Stringari, Uncertainty Principle, Quantum Fluctuations, and Broken Symmetries. *J. Low Temp. Phys.* **85**(5/6) (1991).
- [91] F. Reiter & A. S. Sørensen, Effective operator formalism for open quantum systems. *Phys. Rev. A* **85**(3), 052111 (2012).
[doi:10.1103/PhysRevA.85.052111](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.052111)
- [92] A. Rozema *et al.*, Violation of Heisenberg’s measurement–disturbance relationship by weak measurements. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 100404 (2012).
[doi:10.1103/PhysRevLett.109.100404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.100404)
- [93] J. Uffink, The Uncertainty Principle. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2016).
<https://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/>
- [94] J. M. Wilkes, The Pauli and Levy-Leblond Equations, and the Spin Current Density. *Eur. J. Phys.* **41**(3), 050402 (2002).
[doi:10.1088/1361-6044/ab7495](https://doi.org/10.1088/1361-6044/ab7495)

- [95] E. P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atom-spektren*. Vieweg+Teubner Verlag, Braunschweig (1931).
- [96] M. P. Woods *et al.*, Experimental violation and reformulation of the Heisenberg’s error-disturbance uncertainty relation. *Scientific Reports* **3**, 2221 (2013).
[doi:10.1038/srep02221](https://doi.org/10.1038/srep02221)
- [97] X.-L. Zhong & Y.-Q. Zhang, Exact solutions to the Klein-Gordon equation with a non-minimal coupling to an external electromagnetic field. *Commun. Theor. Phys.* **73**(12), 125401 (2021).
[doi:10.1088/1572-3944/ac286a](https://doi.org/10.1088/1572-3944/ac286a)
- [98] M. Z. Zhuang & C. Lee, Entanglement-enhanced quantum metrology: From standard quantum limit to Heisenberg limit. *Appl. Phys. Rev.* **11**(3), 031302 (2024).
[doi:10.1063/5.0204102](https://doi.org/10.1063/5.0204102)
- [99] M. Jacob and G. C. Wick, *On the general theory of collisions for particles with spin*, Ann. Phys. (N.Y.) **7**, 404–428 (1959). [doi:10.1016/0003-4916\(59\)90051-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(59)90051-X)
- [100] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators”, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045–3067 (2010). [doi:10.1103/RevModPhys.82.3045](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045)
- [101] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995. DOI: [10.1201/9780429503559](https://doi.org/10.1201/9780429503559)
- [102] F. Illuminati, G. Lambiase & L. Petruzzello, Spontaneous Lorentz Violation from Infrared Gravity. *Symmetry* **13**(10), 1854 (2021).
[doi:10.3390/sym13101854](https://doi.org/10.3390/sym13101854)
- [103] G. Lindblad, On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups. *Commun. Math. Phys.* **48**(2), 119–130 (1976).
[doi:10.1007/BF0160845](https://doi.org/10.1007/BF0160845)
- [104] T. Paterek & A. Kay, Quantum Correlations Shared via Symmetry. *Phys. Rev. A* **89**(2), 022106 (2014).
[doi:10.1103/PhysRevA.89.022106](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.022106)
- [105] J. Oppenheim & S. Wehner, The Uncertainty Principle Determines the Nonlocality of Quantum Mechanics. *Science* **330**, 1072–1074 (2010).
[doi:10.1126/science.1192065](https://doi.org/10.1126/science.1192065)
- [106] P. Busch, T. Heinonen & P. Lahti, Heisenberg’s uncertainty principle. *Phys. Rep.* **452**(6), 155–176 (2007).
[doi:10.1016/j.physrep.2007.05.006](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.05.006)
- [107] P. Busch, P. Lahti and R. F. Werner, Proof of Heisenberg’s error–disturbance relation, Phys. Rev. Lett. **111**, 160405 (2013). [doi:10.1103/PhysRevLett.111.160405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.160405)

- [108] D. Leong, Probabilistic Interpretation of Observer Effect on Entrepreneurial Opportunity. *Organizacija* **55**(44), 243–258 (2022).
[doi:10.2478/orga-2022-0016](https://doi.org/10.2478/orga-2022-0016)
- [109] A. N. Hatzinikitas, The non-commutative Robertson-Schrödinger uncertainty principle. *Quantum Stud.: Math. Foundations* **10**(1), 67–78 (2022).
[doi:10.1007/s40509-022-00282-0](https://doi.org/10.1007/s40509-022-00282-0)
- [110] F. Alshammari, P. S. Isaac & I. Marquette, A differential operator realisation approach for constructing Casimir operators of non-semisimple Lie algebras. *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**(2018) 065206.
[doi:10.1088/1751-8121/aaa468](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaa468)
- [111] V. Giovannetti, S. Lloyd & L. Maccone, Advances in quantum metrology. *Nat. Photonics* **5**(4), 222–229 (2011).
[doi:10.1038/nphoton.2011.35](https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35)
- [112] C. Bambi, F. R. Urban & D. D. Donev, Generalized uncertainty principle, extra dimensions and holography. *Class. Quantum Grav.* **25**(1), 015008 (2008).
[doi:10.1088/0264-9381/25/1/015008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/1/015008)
- [113] G. Birkhoff and J. von Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics*, Annals of Mathematics **37**(4), 823–843 (1936). [10.2307/1968621](https://doi.org/10.2307/1968621)
- [114] I. E. Segal, *Mathematical Problems of Relativistic Physics*, American Mathematical Society, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 2 (1963). [ams](https://www.ams.org/)
- [115] G. W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, New York (1968). [Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics](#)
- [116] R. Haag and D. Kastler, *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, Journal of Mathematical Physics **5**, 848–861 (1964). [10.1063/1.1704187](https://doi.org/10.1063/1.1704187)
- [117] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, Springer, 2nd edition (1996). [10.1007/978-3-642-61458-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61458-3)