Symmetries as Differential Base of Compatible Operators of the Klein-Gordon Equation

Enrique Casanova

Instituto de física y escuela de física
Universidad Autonoma de Santo Domingo

March 20, 2025

Overview

Overview of the Klein-Gordon Equation for a Free Particle

La ecuación de Klein-Gordon, nombrada por los trabajos de Oskar Klein y Walter Gordon en 1926, para partículas libres (sin potencial) relativistas en el espacio-tiempo plano de Minkowski es relevante para los campos escalares en el proceso de cuantización de particulas sin espin y es covariante Lorentz.

$$\hat{H}_{KG} = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \tag{1}$$

Este operador es auto-adjunto con valor propio real $\lambda = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, las funciones de onda en el espacio de Hilbert $|\psi\rangle \in L^2(\mathbf{R}^4)$ con norma invariante Lorentz cumplen:

$$\hat{H}_{KG}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \tag{2}$$

La interpretación de la solución de esta ecuación está bien representada en el espacio de Fourier como una superposición de ondas planas la cual obedecen la relación de dispersión energía-momento de la relatividad especial.

Observables

En mecánica cuántica, un observable es una propiedad física que puede medirse, como la posición, el momento o la energía. Se representa por un operador auto-adjunto, que actúa sobre las funciones de onda en el espacio de Hilbert. Los resultados posibles de una medición son los valores propios de este operador, y si el sistema está en un estado propio, la medición dará ese valor con certeza. Un operador $\hat{L}$ auto-adjunto cumple:

$$\langle\psi|\,\hat{L}\,|\phi\rangle = \left\langle \hat{L}\psi \middle| \phi \right\rangle \tag{3}$$

Symmetries

Una simetría es una transformación que deja invariantes las probabilidades de medición, representada por operadores unitarios $\hat{U}_i$ en el espacio de Hilbert. Para simetrías continuas, estas transformaciones forman grupos de Lie **G** generados por operadores hermitianos $\hat{D}_i$ mediante $\hat{U}_i(\theta) = e^{i\theta\hat{D}_i}$, que constituyen un álgebra de Lie con relaciones de conmutación $\left[\hat{D}_a, \hat{D}_b\right] = if^c_{ab}\hat{D}_c$. Los generadores $\hat{D}_i$ son observables conservados cuando la simetría es una invariancia del sistema, y la acción sobre observables $\hat{H}'_{KG} = \hat{U}\hat{H}_{KG}\hat{U}^\dagger$ preserva la estructura del sistema:

1. Norma invariante
$$\||\psi\rangle\| = \||\hat{U}\psi\rangle\| \tag{4}$$
2. Conmutación con el operador central:
$$\left[\hat{H}_{KG}, \hat{D}_i\right] = 0 \tag{5}$$

The Complete First Order Differential Operator

Definiendo el operador de primer orden general en Minkoski como:

$$\hat{L}(x) = F^0(ct, \mathbf{x})\partial_t + F^1(ct, \mathbf{x})\partial_x + F^2(ct, \mathbf{x})\partial_y + F^3(ct, \mathbf{x})\partial_z + F^4(ct, \mathbf{x}) \tag{6}$$

Con $F^\mu \in \mathbf{A} = \mathbf{A}_+ \oplus \mathbf{A}_-$, como funciones definidas en las álgebras de Jordan y Lie.

1. El algebra de Jordan es un algebra no necesariamente asociativa donde el producto es conmutativo y satisface la identidad de Jordan $(a * b) * a^2 = a * (b * a^2)$ donde $a^2 = a * a$.
2. De la misma forma el algebra de Lie es un algebra no asociativa con producto anticonmutativo ($[a, b] = -[b, a]$) y satisface la identidad de Jacobi: $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

Osea que podemos descomponer el operador $\hat{L}$ con una parte simetrica y otra anti-simetrica.

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\{\hat{L}, \hat{L}\} + \frac{1}{2}\left[\hat{L}, \hat{L}\right] \tag{7}$$

Commutation with the Klein-Gordon equation (CSOC)

El teorema de la compatibilidad nos dicta que dado dos observables (valores proprios reales), son compatibles si y solo si sus operadores auto-adjuntos correspondientes tienen una base de soluciones comunes, cumpliendo la conmutacion:

$$\left[\hat{H}_{KG}, \hat{L}\right] = 0 \tag{8}$$

En otras palabras, los observables de $\hat{H}_{KG}$ y $\hat{L}$ son igualmente medibles con exacta precisión y no depende del orden en el que los operadores actúan sobre la función de onda, y por tanto es simétrico en la medición.

$$\hat{H}_{KG}\hat{L}\left|\psi\right\rangle = \hat{L}\hat{H}_{KG}\left|\psi\right\rangle \tag{9}$$

Generators of Symmetries in Minkowski as Differential Basis

Luego de la conmutación $\left[\hat{H}_{KG}, \hat{L}\right] = 0$, escribimos $\hat{L}$ por combinación lineal de los elementos en $e_k \in \mathbf{A}$. Escribimos el operador $\hat{L}$, con $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$, como:

$$\hat{L}_{KG}(ct, \mathbf{x}) = K^\mu \hat{p}_\mu + \frac{1}{4} C^\mu (\alpha^\nu)^{-1} \hat{O}_{\nu\mu}(ct, \mathbf{x}) + K = \sum_{k=1}^{7} e_k \hat{D}_k + K \tag{10}$$

Donde $\alpha_\mu^0 = (0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)$, $\alpha_\mu^1 = (\alpha_0^1, 0, \alpha_2^1, \alpha_3^1)$, $\alpha_\mu^2 = (\alpha_0^2, \alpha_1^2, 0, \alpha_3^2)$ y $\alpha_\mu^3 = (\alpha_0^3, \alpha_1^3, \alpha_2^3, 0)$, estas constantes pertenecen a una parametrización continua. Y los elementos K^μ, C^μ y K forman una base de ocho dimensiones de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_8(\mathbf{C})$, cumpliendo el contraste $\sum_{\mu=0}^{3}(\alpha_\mu^0 C^0 + \alpha_\mu^1 C^1 + \alpha_\mu^2 C^2 + \alpha_\mu^3 C^3) = 0$. $\hat{L}_{KG}$ cumple la **máxima superintegrabilidad**, porque admite $2n - 1 = 7$ operadores diferenciales parciales algebraicamente independientes de orden finito, con $n = 4$ grados de libertad globales.

Lie Algebra

Los primeros cuatro operadores de (9) son justamente los operadores de traslación en el espacio de Minkowski más tres rotaciones generalizadas y tres boosts generalizados. Estos seis últimos de forma explícita $\hat{O}_{nm} = \alpha^n(\alpha^m_\mu x^\mu)\hat{p}_m - \alpha^m(\alpha^n_\mu x^\mu)\hat{p}_n$.

1. Traslaciones por traslaciones:
$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_v] = 0 \tag{11}$$
2. Rotaciones y Boots por traslaciones:
$$\left[\hat{O}_{\mu v}, \hat{p}_n\right] = \alpha^v \alpha^\mu_n \hat{p}_\mu - \alpha^\mu \alpha^v_n \hat{p}_v \tag{12}$$
3. Rotaciones y boosts por rotaciones y boosts:
$$\left[\hat{O}_{au}, \hat{O}_{bv}\right] = \alpha^a f^u \hat{M}_{ubv} + \alpha^u f^a \hat{M}_{avb} + \alpha^b f^v \hat{M}_{vua} + \alpha^v f^b \hat{M}_{bau} \tag{13}$$
O de la misma forma:
$$\left[\hat{O}_{au}, \hat{O}_{bv}\right] = \alpha^a \hat{J}_{bv} + \alpha^u \hat{J}_{vb} + \alpha^b \hat{J}_{ua} + \alpha^v \hat{J}_{au} \tag{14}$$
Donde $f^a = \alpha^a_\mu x^\mu$ y con los operadores $\hat{M}_{abc} = \alpha^c_a \alpha^b \hat{p}_c - \alpha^b_a \alpha^c \hat{p}_b$, cumplen:

1. Contraccion:

$$\alpha^a \hat{M}_{avu} = \alpha^u \hat{M}_{ava} + \alpha^v \hat{M}_{aau} \tag{15}$$

2. Representación de los operadores de traslación:

$$\hat{M}_{aba} = \alpha_a^b \alpha^a \hat{p}_b \tag{16}$$

3. Anulación por indices:

$$\hat{M}_{abb} = 0 \rightarrow \hat{O}_{bb} = 0 \tag{17}$$

4. Antisimetría :

$$\hat{M}_{abc} = -\hat{M}_{acb} \rightarrow \hat{O}_{bc} = -\hat{O}_{cb} \tag{18}$$

5. Sub-Álgebra de Lie:

$$\left[f^u \hat{M}_{ubv}, f^a \hat{M}_{anm}\right] = \left[\hat{J}_{bv}, \hat{J}_{nm}\right] = [Q_{uv}^{bva} - Q_{ub}^{vba}] f^u \hat{M}_{anm} + [Q_{am}^{nmu} - Q_{an}^{mnu}] f^a \hat{M}_{ubv} \tag{19}$$

Donde las constantes de estructura son $Q_{uv}^{bva} = \alpha^b \alpha_u^v \alpha_v^a$. Por ultimo, como los operadores cumplen el Álgebra de Lie, cumplen que $\hat{U}_n = e^{-e_n \hat{D}_n}$ son efectivamente generadores unitarios de simetrías del sistema, y por consiguiente sus valores propios (observables) son constantes del movimiento del sistema.

Effects of a Small Perturbation in the Differential Basis

Téngase ahora la perturbación ($0 < \epsilon < 1$) en la ecuación de Klein-Gordon por un potencial conocido:

$$\hat{H} = \hat{H}_{KG} + \epsilon \hat{V} + O(\epsilon^2) \tag{20}$$

Creando y deformando el operador $\hat{L}$:

$$\hat{L}_{KG} \longrightarrow \hat{L}^{'} = \hat{L}_{KG} + \epsilon \hat{L}_1 + O(\epsilon^2) \tag{21}$$

Para poder construir este operador nuevo de simetrías es necesario encontrar a $\hat{L}_1$. Imponiendo nuevamente el (CSOC) en (20) y (21) se obtiene:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}^{'}\right] = 0 \longrightarrow \left[\hat{V}, \hat{L}_{KG}\right] + \left[\hat{H}_{KG}, \hat{L}_1\right] = 0 \tag{22}$$

Asumiremos por simplicidad un potencial $\hat{V} = kx^2$ y:

$$\hat{L}_1(x) = E^1(x)\partial_x + E^2(x) \tag{23}$$

Deformation of the Symmetric Algebra in the Operator Base

Del resultado de la conmutación por la perturbación (22) obtenemos:

$$\hat{L}^{'} = \hat{L}_{KG} + E_1 \hat{p}_x + E_2 \tag{24}$$

Siendo E_1 y E_2 constantes. En este caso el algebra de Lie no se perturba pero se obtiene la restricción en el espacio de Minkowski.

$$\alpha_2^1 y + \alpha_3^1 z + \alpha_0^1 (ct) + K_1 = 0 \tag{25}$$

Entonces a partir de la perturbación por el potencial en la dirección x se obtiene una deformación simétrica en nuestro conjunto de observables compatibles y conmutantes. Este tipo de transformaciones preservan la estructura del grupo de Lie de generadores de simétrias infinitesimales.

Conclusion

1. El operador general $\hat{L}$ de primer orden puede ser escrito como base de las simétrias del sistema de Klein-Gordon al imponer su conmutación.
2. La pequena perturbación por un potencial en la ecuacion de Klein-Gordon deforma la base diferencial de operadores de $\hat{L}$.
3. El algebra de Lie de Generadores de simétrias tambien se vera afectado por la perturbacion.
4. La perturbacion puede ser descrita como una deformacion en la metrica de Minkowski asociandose a espacios-tiempos curvos con un principio de incertidumbre generalizado o una deformación del algebra de Heinsenberg-Weyl.

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_v] = i\hbar\eta_{\mu v} + \epsilon_{\mu v} \tag{26}$$

acknowledgments

Agradecer a mi asesor PhD. Melvin Arias, a la UASD, al PhD. Primitivo Acosta por darme la oportunidad de ser parte de la EMAFTA 2025.

Gracias por su atención