Primera perturbacion del hamiltoneano lineal $\hat{H}$ de una particula dado el potencial de Yukawa en una dimension

Y derivacion de los cambios de su operador $\hat{L}$ compatible

Enrique Ernesto Casanova Benitez

Facultad de Ciencias, Escuela de Física
Universidad Autonoma de Santo Domingo, UASD

Proyecto Final Nuclear

Tabla de Contenido

Halmitoneano modificado de Schrodinger:

$$\hat{H}_0 = a\partial_x^2 - i\hbar\partial_t \tag{1}$$

Con: $a = \frac{-\hbar^2}{2m}$ y $\hbar = 1$. Definimos un operador diferencial $\hat{L}$ de 1-orden:

1. $$\hat{L}_0 = A(x,t)\partial_x + B(x,t)\partial_t + C(x,t) \tag{2}$$
2. Imponemos la conmutación y cumpliendo con un 'Conjunto Completo de Observables Compatibles' (CCOC):

$$\left[\hat{H}_0, \hat{L}_0\right]\Psi = \frac{d\hat{L}_0}{dt}\Psi = 0 \tag{3}$$

3. Siendo: $\Psi = \{\Psi(x,t) \in \mathbb{C} | x \wedge t \in \mathbb{R}\}$, La eigenfunción asociada al hamiltoniano y a la solución del problema de valores propios:

$$\hat{H}_0 \left|\Psi\right\rangle = \lambda_0 \left|\Psi\right\rangle \tag{4}$$

Teorema: CCOC

Teorema de la compatibilidad

El teorema de la compatibilidad nos dice que dado dos observables, representados por sus operadores, en este caso $\hat{H}_0$ y $\hat{L}_0$, los observables asociados son compatibles si y solo si sus operadores correspondientes tienen una base propia comun. Estos operadores deben conmutar (ec. 3).

YUKAWA

El potencial de Yukawa es fisica atomica es el potencial nombrado en honor a el Japones Yudeki Yukawa en su articulo de 1935, donde trataba de explicar los resultados del modelo atomico de James Chadwick el cual considera a los protones y neutrones compactados en un nucleo pequeno con un radio del orden de $10^{-}14$ metros. Los fisicos ya especulaban que por las fuerzas Culombicas los protones deben repelerse fuertemente por esa distancia tan compacta. Yukawa fue el primero en combinar las ideas de Heisenberg con una nueva interaccion de corto alcance y la idea de Fermi del intercambio de particulas en la interaccion neutron-proton. Demostrando asi que la fuerza nuclear se debe al intercambio de una particula masica llamada pion.

Potencial de Yukawa

El potencial es de la forma:

$$V_{yukawa}(r) = g^2\left(\frac{e^{-\alpha mr}}{r}\right) \tag{5}$$

Donde g es una constante de escala y relacionada a la amplitud del potencial, m es la masa de la particula, y α es un factor de escala. Se puede apreciar que la funcion es monoticamente decreciente por el factor r de la distancia. Se toma el origen $r_0 = 0$
En nuesto caso lineal tomamos, $r(x) = x$, queda:

$$V_{yukawa}(x) = g^2\left(\frac{e^{-\alpha mx}}{x}\right) \tag{6}$$

Se puede apreciar que la funcion es monoticamente decreciente por el factor r de la distancia. Se toma el origen $x_0 = 0$

Tabla de Contenido

Operadores base de L

La clasificación por constantes luego de la conmutación nos da como resultado cuatro operadores independientes definidos como:

- $$\hat{D}_1 = (-2ai)t\partial_x + x \tag{7}$$
- $$\hat{D}_2 = -i\partial_x \tag{8}$$
- $$\hat{D}_3 = i\partial_t \tag{9}$$
- $$\hat{D}_4 = \hat{I} \tag{10}$$

El operador diferencial de primer orden puede ser escrito (en forma base de operadores independientes) como:

$$\hat{L} = d_1\hat{D}_1 + d_2\hat{D}_2 + d_3\hat{D}_3 + d_4\hat{D}_4 \tag{11}$$

Las constantes $(d_i)_{i=1}^{4}$ son numeros complejos. En mayoría números imaginarios puros o números reales. Esto último para asegurar hermiticidad de los operadores por las derivadas parciales.

Todos los operadores base $\hat{D}_i$ cumplen la conmutacion con $\hat{H}$:

$$\left[\hat{H}, \hat{D}_i\right] = 0 \tag{12}$$

Sin embargo las conmutaciones internas, $\left[\hat{D}_i, \hat{D}_j\right]$:

$$\left[\hat{D}_2, \hat{D}_1\right] = \hat{D}_4 \wedge \left[\hat{D}_3, \hat{D}_1\right] = \hat{D}_2 \wedge \left[\hat{D}_3, \hat{D}_2\right] = 0 \tag{13}$$

$$\left[\hat{D}_i, \hat{D}_4\right] = 0 \tag{14}$$

Notemos el algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de **G**, característica de nuestra elección de $\hat{H}$, tal que el conjunto $\left\{\hat{D}_i\right\}_{i=1}^{4}$ forma un grupo de generadores de simetria, el cual $e^{\alpha D_i} \in \mathbf{G}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Perturbacion de $\hat{H}$

La nueva definicion del operador $\hat{H}$ es una suma de el hamiltoneano base $\hat{H}_0$ y el potencial perturbado por un ϵ, entonces:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon V(x) + o(\epsilon^2) \tag{15}$$

Sustituyendo por $\hat{H}_0 = a\partial_x^2 - i\hbar\partial_t$, y por $V(x) = g^2(\frac{e^{-\alpha m x}}{x})$, expandimos a la forma explicita:

$$\hat{H} = a\partial_x^2 - i\hbar\partial_t + g^2(\frac{e^{-\alpha m x}}{x}) \tag{16}$$

Esta es la primera perturbacion para $\hat{H}$, queremos encontrar la forma perturbada de $\hat{L}$, de la misma manera escribimos:

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \epsilon \hat{L}_1 + o(\epsilon^2) \tag{17}$$

Recordando que:

$$\hat{L}_0 = d_1((-2ai)t\partial_x + x) - id_2\partial_x + id_3\partial_t + d_4 \tag{18}$$

Desarrollo de la commutacion $\left[\hat{H}, \hat{L}\right]$

Buscaremos ahora una relacion entre el operador $\hat{L}_0$ el cual es obtenido de la commutacion de $\left[\hat{H}_0, \hat{L}_0\right]$ y la perturbacion $\epsilon V(x)$ para encontrar a $\hat{L}_1$. Desarrollamos:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}\right] = \frac{d\hat{L}}{dt} \rightarrow \left[\hat{H}_0 + \epsilon V(x), \hat{L}_0 + \epsilon \hat{L}_1\right] = \frac{d(\hat{L}_0 + \epsilon \hat{L}_1)}{dt} \tag{19}$$

Simplificando por la linealidad de la commutacion y por $\epsilon^2 = 0$, se deriva la interesante relacion buscada:

$$\left[V, \hat{L}_0\right] = \frac{d\hat{L}_1}{dt} \tag{20}$$

Finalmente integrando con respecto al tiempo, se encuentra la ecuacion para encotrar la perturbacion de $\hat{L}_1$:

$$\hat{L}_1 = \int \left[\hat{V}, \hat{L}_0\right] dt \tag{21}$$

Tabla de Contenido

Resultado de la commutacion de $\left[\hat{V}, \hat{L}_0\right]$

La comutacion de $\left[\hat{V}, \hat{L}_0\right]\Psi$ con una funcion de prueba resulta en una funcion de la posicion y del tiempo, multiplicada por la perturbacion de Yukawa $V(x)$:

$$\left[\hat{V}, \hat{L}_0\right] = d_1((2ait)(x(\alpha m + 1) + 1)V(x) + d_2 i(\alpha m x + 1)V(x) \tag{22}$$

Recordando que para la particula en este campo, α y m son constantes. Podemos expresar la commutacion como:

$$\left[\hat{V}, \hat{L}_0\right] = \frac{d\hat{L}_1}{dt} = f(x, t; d_1, d_2)V(x) \tag{23}$$

Para poder resolver la ecuacion de arriba hay que asumir que solo aplicamos este operador a una funcion de onda estacionaria en x, osea con $\Psi(x,t) = \psi(x)\psi(t)$ tomando a $\psi = \psi(x)$. Esta simplificacion nos ayudara a expresar a $\hat{L}_1$ de forma explicita.

Resultado de la commutacion de $\left[\hat{V}, \hat{L}_0\right]$ parte 2

Finalmente:

$$\hat{L}_1 = F(x,t;d_1,d_2)V(x) + constant \tag{24}$$

Con la funcion $F(x,t;d_1,d_2)$ definida como:

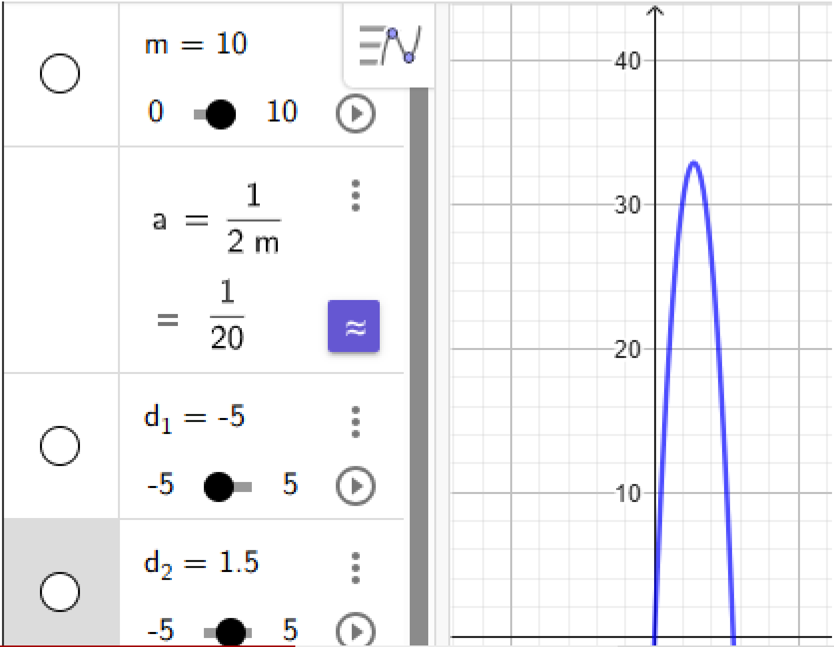
$$F(x,t;d_1,d_2) = [d_1(ait^2)((x(\alpha m+1)+1)+d_2(\alpha mx+1)t] \tag{25}$$

Este operador es lineal en x y cuadratico con el tiempo, forma una parabola como funcion del tiempo y x fijo. Algunas propiedades de $\hat{L}_1$ son:

1. Cuando t $= 0, \rightarrow \hat{L}_1 = constant$, podemos elegir la constante como cero, para concluir que no hay efecto de este operador inicialmente. No descartamos la posibilidad de $t < 0$.
2. Cuando $V(x) = g^2\frac{e^{-\alpha mx}}{x} \rightarrow 0$, en $x \rightarrow \infty$. Tambien $\hat{L}_1 = constant$
3. Los valores propios λ_H de $\hat{H}$ y los valores propios λ_L de $\hat{L}$ se rigen por la siguiente transformacion dada la funcion $F(x,t;d_1,d_2)$:

$$\lambda_L = F(x,t;d_1,d_2)\lambda_H \tag{26}$$

Grafica ejemplo



1. Al igual que en el operador $\hat{H}$ el potencial perturba a el operador $\hat{L}$
2. Podemos encontrar la funcion de proporcionalidad de los valores propios como tanteo de:

$$F(x, t; d_1, d_2) = \frac{\lambda_L}{\lambda_H} \tag{27}$$

3. La aparicion del potencial puede ser descrita como un choque donde se intercambia mas energia en un tiempo, t_max donde genera mayor cambio en el valor propi de $\hat{L}$
4. Esta aproximacion $O(\epsilon^2)$ puede ser extendida para la n-perturbacion. Por ejemplo a la segunda perturbacion:

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \epsilon \hat{L}_1 + \epsilon^2 \hat{L}_2 \tag{28}$$

De esta forma el metodo de perturbacion puede ser mas preciso.

¡Gracias!