Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo

Análisis de Algoritmos

ESCOM

Práctica 5: Algoritmos Greedy.

Grupo: ________________

Semestre 2022-1

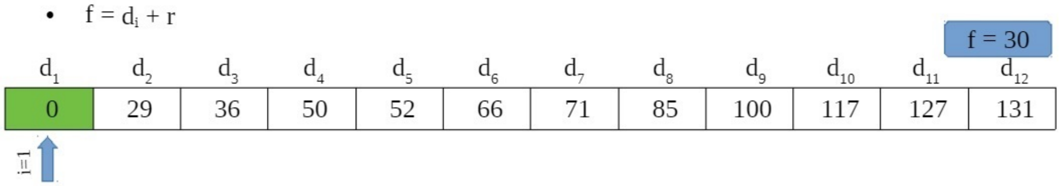
1. Planteamiento del problema: Un granjero necesita un determinado fertilizante que se vende en una tienda del pueblo. La tienda tiene un horario irregular, pero el granjero sabe que días abre la tienda. La cantidad máxima de fertilizante que puede usar el granjero le dura r días. Lo que busca el granjero es hacer el mínimo número de desplazamientos al pueblo y para ello, hace uso de un algoritmo Greedy. El algoritmo Greedy busca ir al pueblo el último día de apertura antes de que se acabe el fertilizante, de modo que si fuera al siguiente día de apertura ya se le habría acabado el fertilizante. Consideremos el conjunto de días ordenados que abre la tienda dentro del periodo de interés $< d_1, d_2, \ldots, d_n >$ y el número de días r en el que el granjero tiene fertilizante. Para llevar a cabo este algoritmo tomamos como d_i al día de visita en el que nos encontramos, la siguiente visita sería el día d_j^* donde j^* es el máximo valor de j tal que $d_j - d_i \leq r$ y $j > i$. Así conseguiríamos el día de apertura de la tienda tal que $d_j^* - d_i \leq r$ y $d_j^* + 1 > r$.

Ejemplo:

Sea S el conjunto de días de la solución que comenzará siendo vacío y C todos los días de aperturade la tienda, es decir, candidatos a ser elegidos por el algoritmo. Para este ejemplo tomaremos un valor de $r = 30$ y una variable f que va guardando el valor del día en el que se acabará el fertilizante. Todos los días se empiezan a contar desde el día d_1 que es igual a 0.

Situación inicial:

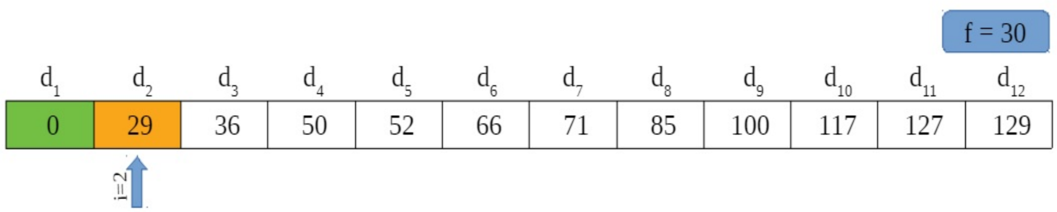
- $S = \emptyset$
- $C = \mathbf{d} = \{0, 29, 36, 50, 52, 66, 71, 85, 100, 117, 127, 131\}$
- $r = 30$
- $f = d_i + r$



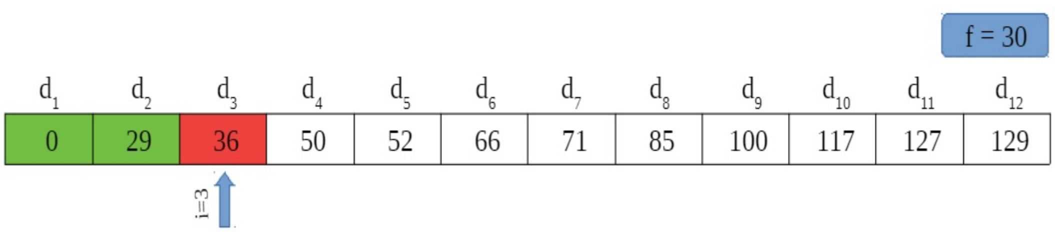
Empezamos disponiendo los días de apertura en un arreglo. Tomamos el día d_1 como el primer día que el granjero ha ido a comprar fertilizante y decidimos usar el algoritmo a partir de ese día. Como $r = 30$, el valor de $f = d1 + r = 0 + 30 = 30$, es decir, el fertilizante se acabará el día 30. El algoritmo debe elegir el día de apertura más cercano al día 30 sin pasarse. Para ello se itera sobre el arreglo y se va comparando con f.

Como d_1 está dentro de la solución lo añadimos a S:

- $S = \{0\}$
- $C = \{29, 36, 50, 52, 66, 71, 85, 100, 117, 127, 129\}$



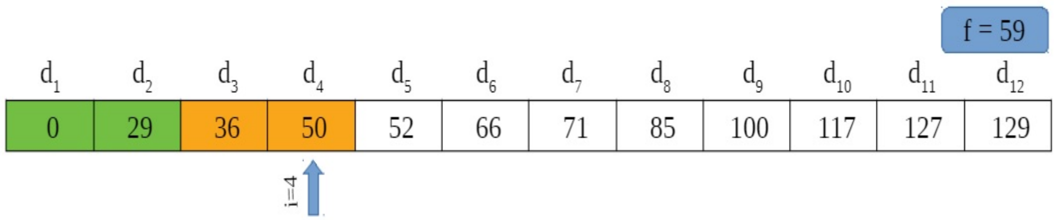
Como $29 \leq f$, puede que haya otro día $d_n \leq f$, así que seguimos recorriendo el vector



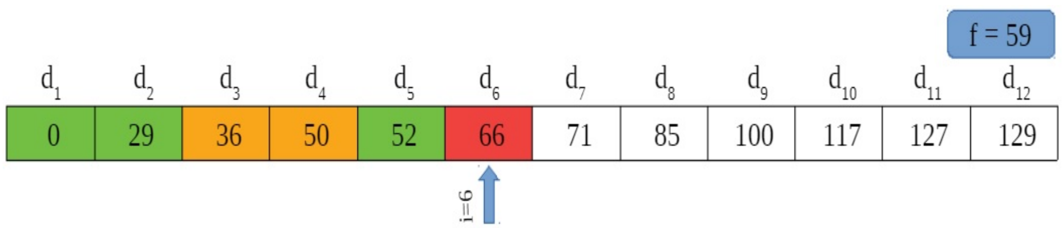
Esta vez $36 > f$, entonces debemos tomar el día anterior e insertarlo en el conjunto S y actualizar f. Entonces:

- $S = \{0, 29\}$
- $C = \{36, 50, 52, 66, 71, 85, 100, 117, 127, 129\}$
- $f = d_2 + r = 29 + 30 = 59$

Ahora, el granjero tendrá que ir al pueblo a comprar fertilizante antes del día 59, así que seguimos buscando el siguiente día que deberá volver.



$50 \leq f$ así que puede haber otro día que se acerque más a f así que continuamos.



Seguimos comparando los días de apertura y llegamos al día d_6 que como podemos ver, $d_6 > f$, por lo tanto el día anterior se debe añadir a la solución. Eliminamos los elementos entre el día d_5 y d_2 ya que hemos visto que no son solución del problema:

- S = {0, 29, 52}
- C = {66, 71, 85, 100, 117, 127, 129}
- f = d_5 + r = 52 + 30 = 82

Continuamos con el algoritmo hasta no tener más candidatos para llegar a la solución final:

f = 130

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
0	29	36	50	52	66	71	85	100	117	127	129

- S = {0, 29, 52, 71, 100, 129}
- C = Ø
- f = 130

Al llegar al final, por falta de candidatos no podemos confirmar que el día $d_{12} = 129$ es el último día de apertura dentro del periodo de interés, pero el algoritmo siempre elegirá el día máximo de entre los candidatos menores que f, así que se añade a la solución.

Optimalidad de la situación

Sea la solución de nuestro problema el conjunto $\mathbf{d_{p0}}$, $\mathbf{d_{p1}}$, **…,** $\mathbf{d_{pm}}$ y suponemos que hay otra solución factible $\mathbf{d_{q0}}$, $\mathbf{d_{q1}}$, **…,** $\mathbf{d_{qk}}$ que realiza **k** visitas, menos que la solución anterior (**k<m**). Vamos a demostrar por inducción que para todo valor de **j** entre 1 y k, $\mathbf{d_{pj}} \geq \mathbf{d_{qj}}$.

- Para **j = 1**, podemos ver que obviamente $\mathbf{d_{p1}} > \mathbf{d_{q1}}$ ya que $\mathbf{d_{p1}}$ es el último día de apertura que puede estar el granjero sin fertilizante ($\mathbf{d_{p1}} \leq \mathbf{r}$). Entonces obviamente cualquier día de apertura siguiente a ese ya no tendría fertilizante ($\mathbf{d_{p1+1}} > \mathbf{r}$, combinando: $\mathbf{d_{q}} > \mathbf{d_{p1+1}} > \mathbf{r}$ y **q** no sería solución factible)

- Suponemos que $\mathbf{d_{pi\text{-}1}} \geq \mathbf{d_{qi\text{-}1}}$, entonces $\mathbf{d_{qi}} - \mathbf{d_{pi\text{-}1}} \leq \mathbf{d_{qi}} - \mathbf{d_{qi\text{-}1}}$ y como **q** es factible también se cumple que $\mathbf{d_{qi}} - \mathbf{d_{qi\text{-}1}} \leq \mathbf{r}$ y por lo tanto $\mathbf{d_{qi}} - \mathbf{d_{pi\text{-}1}} \leq \mathbf{r}$. Esto nos indica que $\mathbf{d_{qi}}$ está en el rango de $\mathbf{d_{p\text{-}1}}$ lo que signifca que $\mathbf{d_{qi}}$ es el día más alejado en el que puede ir el granjero al pueblo por lo que el algoritmo greedy lo habría seleccionado. Por lo tanto no puede ser el día más alejado dentro del rango. Entonces se demuestra que $\mathbf{d_{pj}} \geq \mathbf{d_{qj}}$ para **j** entre 1 y k.

- Finalmente como sabemos que $\mathbf{d_{pk}} \geq \mathbf{d_{qk}}$, entonces $\mathbf{d_{n+1}} - \mathbf{d_{pk}} \geq \mathbf{d_{n+1}} - \mathbf{d_{qk}}$ y como **q** es factible $\mathbf{d_{n+1}} - \mathbf{d_{qk}} \leq \mathbf{r}$, entonces $\mathbf{d_{n+1}} - \mathbf{d_{pk}} \leq \mathbf{r}$. Por lo que $\mathbf{d_{pk}}$ está dentro del periodo de interés y no tiene sentido que vayamos más días.