Codificación de Canal

Enrique Alexandre

Dpto. de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Curso 2021/2022

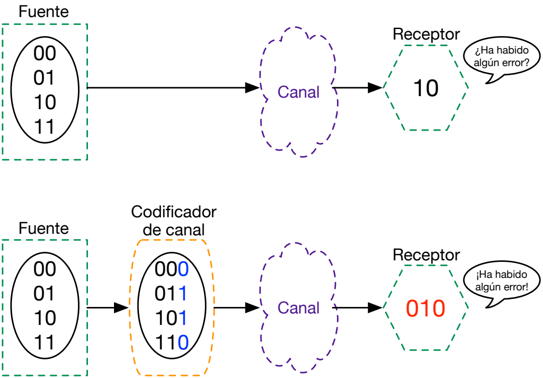
Índice

1. Introducción
   - Motivación
   - Parámetros importantes
   - Detección y corrección de errores
   - ¿Y la probabilidad de error?
2. Códigos de repetición
   - Definición
   - Cálculo de la probabilidad de error
3. Códigos de paridad
4. Códigos bloque
   - Decodificación de máxima verosimilitud
   - Códigos Hamming
5. Decodificación dura y blanda
   - Definición
   - Ejemplo
6. Códigos convolucionales
   - Introducción
   - Árbol del código
   - Diagrama de rejilla
   - Diagrama de estados
   - Algoritmo de Viterbi

Introducción

Motivación

- Existencia de canales ruidosos
  - Necesidad de transmitir información libre de errores



Introducción

Parámetros importantes

- **Tasa de codificación:** Relación entre el número de bits de información y el número de bits totales transmitidos.
- **Distancia Hamming:** Número de elementos distintos entre dos vectores.
- **Distancia mínima:** La menor distancia Hamming entre dos palabras código válidas.

Introducción

Detección y corrección de errores

- Dado un código con una distancia mínima d_{min}:
  - Se pueden **detectar** $d_{min} - 1$ errores.
  - Se pueden **corregir** $(d_{min} - 1)/2$ errores.

Introducción

¿Y la probabilidad de error?

- Supongamos que la probabilidad de error en un bit es p_e.
- La probabilidad de que ocurran i errores en una palabra código con n bits se puede calcular como:

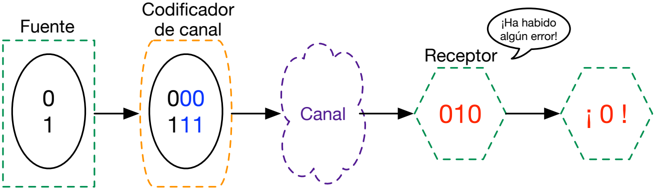
$$p(i,n) = \binom{n}{i} \cdot P_e^i \cdot (1-p_e)^{n-i} \approx \binom{n}{i} \cdot p_e^i$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Códigos de repetición

Definición

- Posiblemente la solución más sencilla:
  - Repito cada bit transmitido n veces
- Por ejemplo, si $n = 3$:



Códigos de repetición

Cálculo de la probabilidad de error

- Supongamos lo siguiente:
  - $p_e = 10^{-6}$
  - Código de repetición con $k = 1$ y $n = 3$.
- La probabilidad de que haya algún error pero no lo detectemos será:

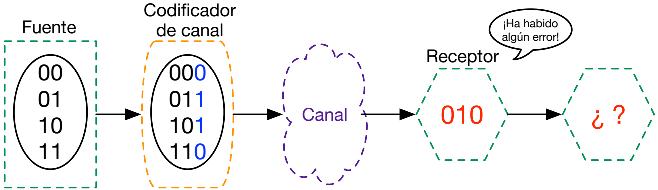
$$p(3,3) = p_e^3 = 10^{-18}$$

- La probabilidad de que haya algún error y no lo podamos corregir:

$$p = p(2,3) + p(3,3) = 3 \cdot p_e^2 - 2p_e^3 \approx 3 \cdot 10^{-12}$$

Códigos de paridad

- Se utiliza $n = k + 1$.
- El bit de paridad es tal que el número de unos en la palabra código sea par (paridad par) o impar (paridad impar).



Códigos bloque

- En realidad agrupan también a los anteriores.
- Un par de definiciones:
  - **Código lineal:**
    - La suma de dos vectores código es otro vector código.
    - El vector 0 forma parte del código.
  - **Peso de un vector:**
    - Es el número de unos que tiene el vector.
  - **Distancia mínima:**
    - Se puede calcular como el peso mínimo del código

Códigos bloque

- Supongamos un mensaje a transmitir, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_k)$.
- Y el correspondiente vector transmitido: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
- En un código bloque, ambos vectores se relacionan matricialmente como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{G}$$

- Donde $\mathbf{G}$ es la **matriz generadora** del código, de dimensiones $(k \times n)$.
- Decimos que un **código es sistemático** si la matriz generadora es tal que:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}]$$

Códigos bloque

- ¿Y cómo decodificamos el mensaje?
- Se utiliza la matriz de paridad **H**, de dimensiones $(n - k \times n)$:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T | \mathbf{I_{n-k}}]$$

- Si recibimos un vector **y** (que en realidad será el vector transmitido **x** más ruido (**e**), haremos lo siguiente:

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T$$

- A **s** se le llama **síndrome**, y si es nulo, la palabra código **y** es válida.

Códigos bloque

- Y los errores, ¿cómo se corrigen?
- Es posible demostrar que el síndrome depende exclusivamente del error cometido ($\mathbf{e}$), y no del vector transmitido ($\mathbf{x}$).
- Pero hay un problema:
  - Si $\mathbf{x}$ tiene n bits, hay 2^n posibles vectores de error.
  - El síndrome sólo tiene $n-k$ bits:
    - Sólo hay 2^{n-k} síndromes posibles

Códigos bloque

Decodificación de máxima verosimilitud

- Creamos una tabla con los síndromes correspondientes a los 2^{n-k-1} vectores de error más probables.
- ¿Qué hará el decodificador?
  - Calcula el síndrome: $\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T$
  - Busca en la tabla ese síndrome
  - Obtiene el vector de error correspondiente $(\widehat{\mathbf{e}})$
  - Obtiene cuál sería la palabra decodificada: $\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{e}}$

Códigos bloque

Códigos Hamming

- No hemos visto cómo se define la matriz generadora de un código bloque.
- Hay muchos métodos, pero quizás el más conocido es el de **códigos Hamming**.
- Se caracterizan por:
  - Bits de control: $q = n - k \geq 3$.
  - $n = 2^q - 1$
  - Independientemente del valor de q, $d_{min} = 3$:
    - Podemos detectar hasta 2 errores
    - Podemos corregir hasta 1 error.

Códigos bloque

Códigos Hamming

- Para crear la matriz de comprobación de paridad, colocamos todos los vectores binarios posibles en las columnas, ordenados de forma que quede la matriz identidad al final:

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Códigos bloque

Códigos Hamming

- A partir de aquí, es inmediato calcular $\mathbf{G}$, sabiendo que $\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T | \mathbf{I}_q]$:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Decodificación dura y blanda

Definición

- **Decodificación dura:**
    - Es lo que hemos venido haciendo hasta ahora.
    - La palabra recibida se decodifica bit a bit.
    - Se elige aquella palabra código a una distancia Hamming menor.
- **Decodificación blanda:**
    - En este caso se elige el símbolo a una menor distancia euclídea.
    - La probabilidad de error va a ser menor

Decodificación dura y blanda

Ejemplo

- Supongamos lo siguiente:
  - Código de paridad con $n = 3$.
  - Utilizamos una modulación PAM unipolar con amplitudes 0V y 1V.
  - Suponemos además que:
    - Se transmite el símbolo **011**.
    - Es decir, transmitimos por el canal la señal $0\text{V} - 1\text{V} - 1\text{V}$.
    - En el receptor obtenemos: $0{,}2\text{V} - 0{,}45\text{V} - 0{,}7\text{V}$

Decodificación dura y blanda

Ejemplo

- Si utilizamos decodificación dura:
  - El receptor obtendrá:
    - $0{,}2\text{V} \rightarrow 0$
    - $0{,}45\text{V} \rightarrow 0$
    - $0{,}7\text{V} \rightarrow 1$
  - Es decir, recibimos el vector **001**, que sabemos que es incorrecto.
  - Hay cuatro posibles palabras código: **000**, **011**, **101** y **110**.
  - Las distancias Hamming de nuestra palabra a cada una de éstas es: 1, 1, 1 y 3 respectivamente.
  - Por tanto, elegiremos una de las tres primeras al azar.
  - Y acertaremos **1 de cada 3 veces**.

Decodificación dura y blanda

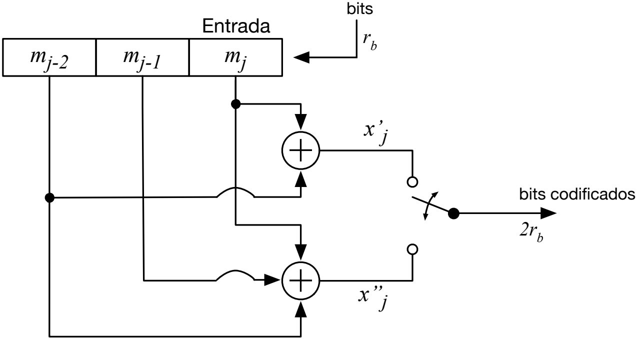
Ejemplo

- Si utilizamos decodificación blanda:
  - Recibimos el mismo vector que antes: $0{,}2\text{V} - 0{,}45\text{V} - 0{,}7\text{V}$.
  - En este caso calculamos la distancia euclídea desde este vector a cada uno de los posibles símbolos de mi constelación:
    - $000 \rightarrow (0-0{,}2)^2 + (0-0{,}45)^2 + (0-0{,}7)^2 = 0{,}73$
    - $011 \rightarrow (0-0{,}2)^2 + (1-0{,}45)^2 + (1-0{,}7)^2 = 0{,}43$
    - $101 \rightarrow (1-0{,}2)^2 + (0-0{,}45)^2 + (1-0{,}7)^2 = 0{,}93$
    - $110 \rightarrow (1-0{,}2)^2 + (1-0{,}45)^2 + (0-0{,}7)^2 = 1{,}43$
  - Finalmente elegiremos el símbolo **011**.

Códigos convolucionales

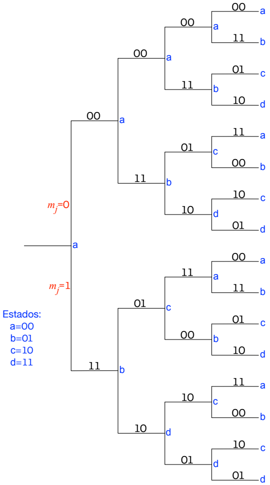
Introducción

- Principal diferencia con lo anterior: tienen memoria
- Ejemplo: Código $(n, k, L) = (2, 1, 2)$.



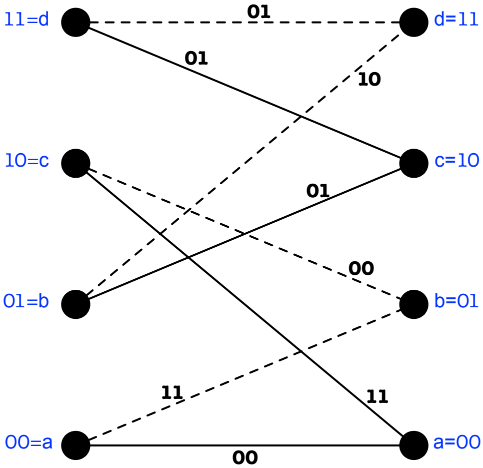
Códigos convolucionales

Árbol del código



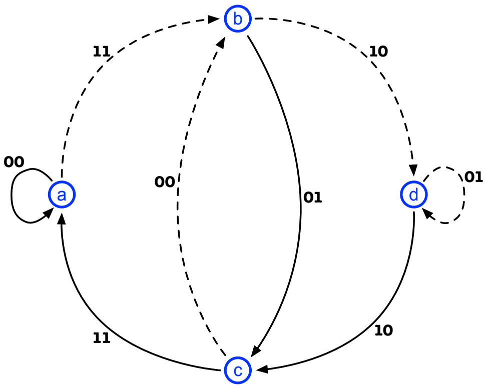
Códigos convolucionales

Diagrama de rejilla



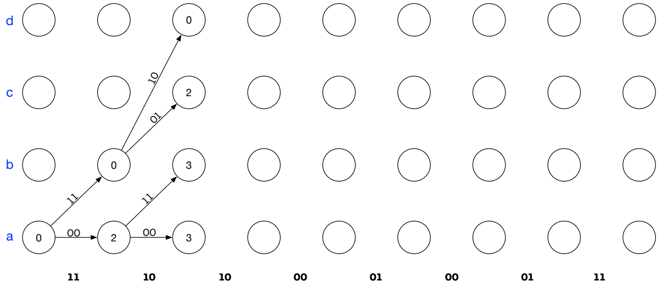
Códigos convolucionales

Diagrama de estados



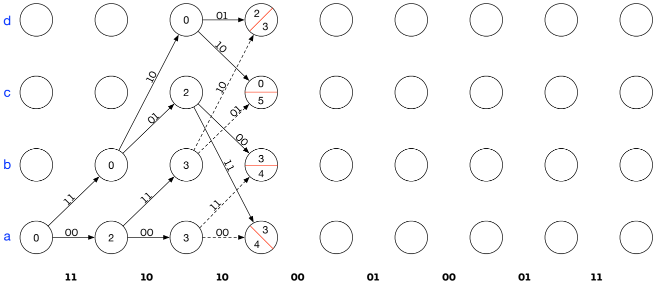
Códigos convolucionales

Algoritmo de Viterbi



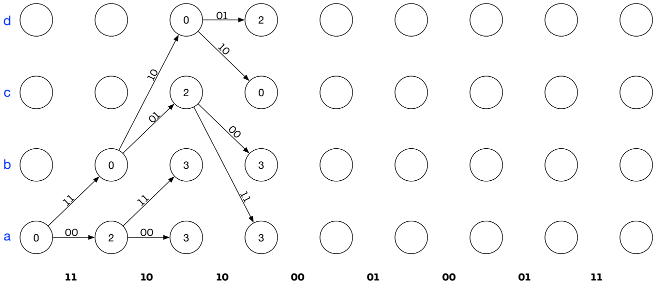
Códigos convolucionales

Algoritmo de Viterbi



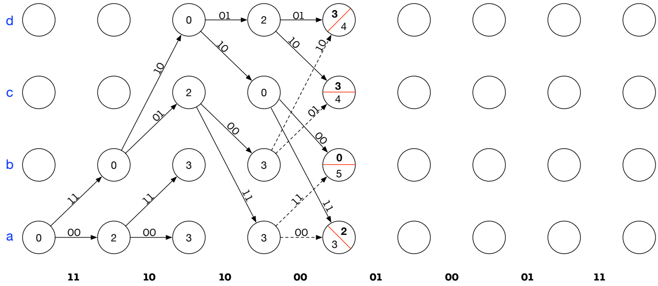
Códigos convolucionales

Algoritmo de Viterbi



Códigos convolucionales

Algoritmo de Viterbi



Códigos convolucionales

Algoritmo de Viterbi