

Tema 5

Transmisión digital en banda base

1 Conceptos a repasar

Antes de hacer estos ejercicios es importante repasar y tener claros los siguientes conceptos teóricos:

- Esquema general de un sistema de comunicaciones en banda base, incluyendo el esquema del receptor.
- Modulación PAM. Cálculo de la densidad espectral de potencia de una señal PAM.
- Códigos de línea. Tipos de códigos de línea y diferencias entre ellos.
- Interferencia entre símbolos (ISI). Concepto de filtro ideal de Nyquist. Filtro de coseno alzado.
- Diagrama de ojos. Cómo se construye.

2 Problemas básicos

Este primer bloque de problemas son problemas extraídos en su mayoría de la bibliografía de la asignatura, y consisten en algunos cálculos básicos que es necesario dominar.

Problema 5.1

Un sistema de transmisión cuaternario en banda base transmite la siguiente señal:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot h(t - nT)$$

- ¿Cuál es la base ortonormal que permite definir el espacio de señal para esta modulación?
- Representa la constelación.
- ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de error?

Resultados del problema

- El propio pulso $h(t)$, normalizado si es necesario.
- Constelación 4-aria unidimensional.
- Con la fórmula para una M-aria unidimensional.

Problema 5.2

[Carlson2010] Un ordenador genera palabras binarias de 16 bits a la velocidad de 20000 palabras por segundo.

- Calcule el ancho de banda mínimo necesario para transmitir la salida como una señal PAM binaria.
- Calcule M para que la salida se pueda transmitir como señal M -aria en un canal de $B = 60kHz$.

Resultados del problema

- $B_T \geq 160kHz$
- $M = 8$

Problema 5.3

Un sistema de transmisión en banda base transmite la siguiente señal:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot h(t - nT)$$

donde T es el intervalo de símbolo, a_n es una secuencia equiprobable incorrelada cuyo valor máximo es A y $h(t)$ es un pulso cuadrado normalizado en energía de duración T_x .

Calcular la densidad espectral de potencia y el ancho de banda de la señal transmitida para los siguientes casos:

- Secuencia polar NRZ.
- Secuencia polar RZ con $T_x = T/2$
- Secuencia unipolar NRZ.

Resultados del problema

- $S_x(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{T} \frac{4 \sin^2\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega^2} \cdot A^2$
 $B = \frac{2\pi}{T}$
- $S_x(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{T} \frac{4 \sin^2\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega^2} \cdot A^2$
 $B = \frac{4\pi}{T}$
- $S_x(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{4 \sin^2\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega^2} \cdot \frac{A^2}{4} + \frac{A^2\pi}{2} \delta(\omega)$
 $B = \frac{2\pi}{T}$

Problema 5.4

Un sistema de transmisión en banda base transmite la siguiente señal:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot h(t - nT)$$

donde T es el intervalo de símbolo, a_n es una secuencia equiprobable incorrelada cuyo valor máximo es A y $h(t)$ es un pulso en coseno alzado con roll-off factor -exceso de ancho de banda- α .

Calcular la densidad espectral de potencia y el ancho de banda de la señal transmitida suponiendo que se utiliza una codificación polar.

Resultados del problema

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T} \cdot |H(\omega)|^2 \cdot A^2, \text{ siendo } H(\omega) \text{ la respuesta en frecuencia del filtro en coseno alzado.}$$

$$B = \frac{1+\alpha}{2T}$$

Problema 5.5

Considere una secuencia binaria b_n a partir de la cual formamos los símbolos $a_n = b_n - b_{n-1}$, los b_n son variables aleatorias binarias equiprobables e incorreladas, que toman los valores 1 y 0.

Calcule el ancho de banda y la densidad espectral de potencia de la señal transmitida para el caso en que el filtro transmisor tenga una respuesta al impulso:

$$h_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Resultados del problema

$$\text{a) } S_x(\omega) = \frac{4}{T^2 \omega^2} \text{sen}^4\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$\text{b) } B = \frac{2\pi}{T}$$

Problema 5.6

[Carlson2010] Calcule la $\left(\frac{S}{N}\right)_R$ para que un sistema binario unipolar con ruido blanco gaussiano aditivo tenga $P_e = 0.001$.

¿Cuál será la probabilidad de error de un sistema polar con la misma $\left(\frac{S}{N}\right)_R$.

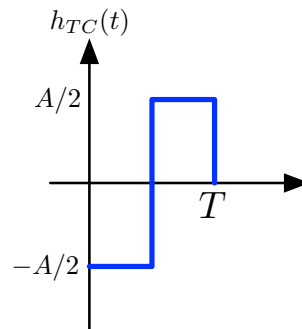
Resultados del problema

$$\text{a) } \rho = \frac{E_s}{N_0/2} = 19,22$$

$$P_e = Q(4,38) < 8.54 \cdot 10^{-6}$$

Problema 5.7

[Haykin2001] Considere la señal $h_{TC}(t)$ de la figura:

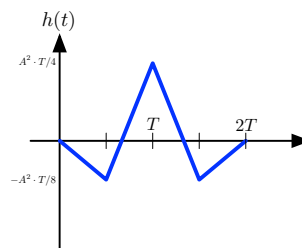


- Determine la respuesta al impulso del filtro adaptado a esta señal y represéntela en función del tiempo.
- Dibuje la forma de onda de la respuesta al impulso global $h(t)$.

Resultados del problema

a) $h_R(t) = h_{TC}(T - t)$

b)



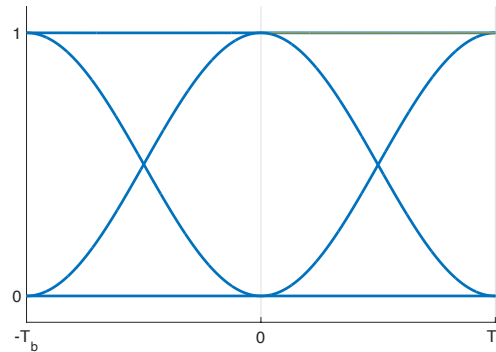
Problema 5.8

[Carlson2010] Se recibe una señal PAM $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n h(t - nT)$.

Dibuje dicha señal $r(t)$ y construya su diagrama de ojos, sin distorsión, para la siguiente secuencia de datos en formato unipolar: 1011100010.

$$h(t) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{4T_b}t\right) \Pi\left(\frac{t}{2T_b}\right)$$

Resultados del problema



Problema 5.9

Un ordenador genera impulsos con una tasa de $R_b = 1Mbps$, para su transmisión por un canal ruidoso con densidad espectral de potencia $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-20} W/Hz$. Se especifica que la tasa de error no debe superar el valor de 1 bit por hora. Se pide:

- Determinar la potencia de ruido del canal y la probabilidad de error de bit en el sistema.
- Supóngase que en el transmisor se incluye ahora una característica de transferencia con espectro en coseno alzado, con un exceso de ancho de banda del 75%, y que el sistema sea PAM cuaternario. Calcular el nuevo ancho de banda necesario para la transmisión.

Resultados del problema

- $P_N = 2 \cdot 10^{-14} W$, $P_b = 2.7 \cdot 10^{-10}$
- $B = 437.5 kHz$

3 Problemas adicionales

Estos problemas son algo más elaborados que los anteriores, en muchos casos extraídos de exámenes antiguos.

Problema 5.10

Un sistema de comunicación digital transmite la señal:

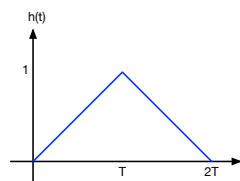
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot h_T(t - nT)$$

donde b_n representa una secuencia de variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas (iid) que toman valores ± 1 con la misma probabilidad. La forma de onda del impulso transmitido es $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, la respuesta al impulso del canal es $h_c(t) = \delta(t)$ y el filtro receptor $h_R(t)$ está adaptado a $h_T(t)$. Se pide:

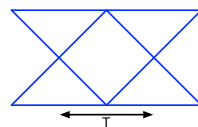
- Determinar la forma de onda de la respuesta al impulso global $h(t)$.
- Dibujar el diagrama de ojos de la señal de salida del filtro receptor antes de ser muestreada.
- Repetir el apartado a) para un canal con respuesta al impulso $h_c(t) = \delta(t) - 0.5 \cdot \delta(t - T)$.
- Calcular los valores de las muestras de la señal tomadas a la salida del filtro receptor, así como el valor de la interferencia entre símbolos (ISI) en cada una de ellas suponiendo que se ha transmitido la secuencia 1101.

Nota: $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq t < 0.5 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

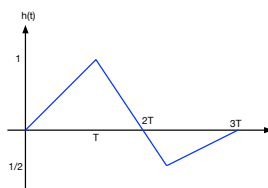
Resultados del problema



Apartado (a)



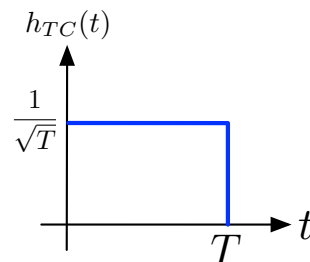
Apartado (b)



Apartado (c)

Problema 5.11

[Examen2012] Considere un sistema de comunicación digital binario que transmite un código polar NRZ con la forma de impulso $h_{TC}(t)$ de la figura.

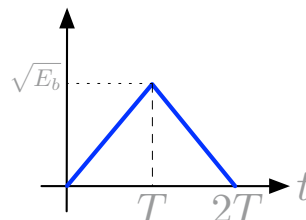


- Determine la respuesta al impulso del filtro adaptado y represente en función del tiempo la salida del mismo cuando se recibe un 1 y cuando se recibe un 0.
- Calcule la probabilidad media de error de detección en un canal de ruido blanco gaussiano aditivo, cuya densidad espectral de potencia de ruido sea $N_0/2$ W/Hz.

Datos: Energía media por bit $E_b = 4$ pJ, $N_0 = 3.6 \cdot 10^{-13}$ W/Hz.

Resultados del problema

a)



b) $P_e = 1.3 \cdot 10^{-6}$

Problema 5.12

[Examen2012] Un dispositivo electrónico genera 30000 palabras binarias por segundo, que son transmitidas como una señal PAM-binaria unipolar NRZ con 10 mV de amplitud de pulso a la entrada del canal, cuyo ancho de banda es 120 kHz, que atenúa la señal 10 dB e introduce ruido blanco gaussiano de densidad espectral de potencia $N_0/2 = 10^{-10}$ W/Hz.

- Número de bits máximo, n , que tiene cada palabra binaria. Se supone que todas las palabras generadas tienen igual número de bits.
- Energía media de símbolo a la salida del canal, considerando que los símbolos son equiprobables.

Si por razones económicas se reduce el ancho de banda del canal a 60 kHz.

- c) Determinar el valor de M para que la salida se pueda transmitir como señal M-aria.

Si por razones de diseño se incluye en el transmisor una característica de transferencia con espectro en coseno alzado, con un exceso de ancho de banda del 95% y la salida se transmite como señal 8-aria.

- d) Determinar el nuevo ancho de banda necesario para la transmisión

Resultados del problema

- a) $n = 8$
- b) $E_s = 2.083 \cdot 10^{-11} \text{ J}$
- c) $M = 4$
- d) $B_T = 78 \text{ kHz}$

Bibliografía

- [Carlson2010] A. Bruce Carlson and Paul B. Crilly. Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication, 5th Ed. McGraw-Hill, 2010.
- [Haykin2001] Simon Haykin. Communication Systems, 4th Ed. John Wiley and Sons, 2001.