Trabajo Final Programa QUANt UCEMA

<u>Tema Elegido:</u>

Skew, Smile, Volatilidad Estocástica, Shadow Greeks.

Participantes:

- Cristian Ragucci
- Enrique Corimayo

Índice

“Fantaseaba con construir un modelo que, aceptado por todos, reemplazara al de Black & Scholes. No fue tan simple como pensaba. Durante los siguientes diez años aprendí que la “exactitud" en el modelado financiero es un concepto mucho más difuso de lo que había imaginado.”

My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance – Emanuel Derman.

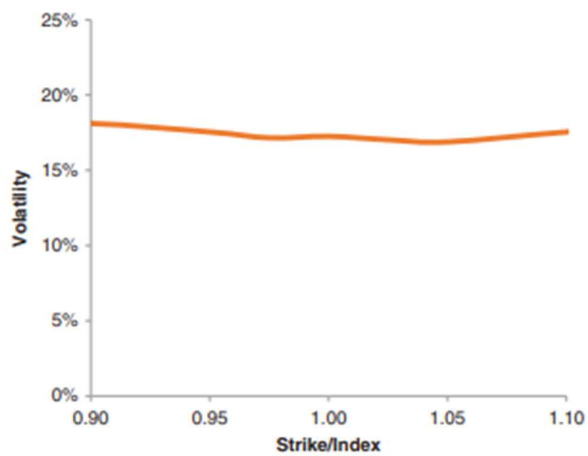
SMILE & SKEW:

Historia:

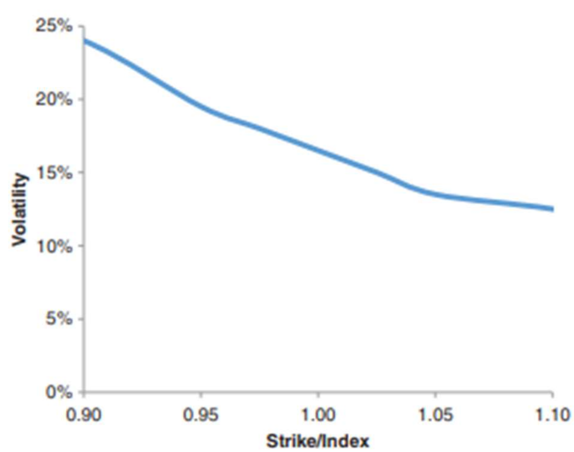
Previo a la caída mundial del mercado de valores de 1987, el modelo de valoración de opciones, Black-Scholes-Merton (BSM), parecía describir razonablemente bien los mercados de opciones.

Después del colapso, y desde entonces, los mercados de opciones de índices bursátiles han mostrado una sonrisa en la volatilidad, una anomalía en flagrante desacuerdo con el modelo BSM.

Desde entonces, los Quants de todo el mundo han trabajado para extender el modelo a acomodar esta anomalía.



S&P 500 VI antes del crash del 87.



S&P 500 VI después del crash del 87.

Lo que se puede apreciar, es que previo a la caída del mercado en el año 1987, la volatilidad respecto al Strike de las opciones tenía una forma plana. Luego del crash, en el mercado de opciones de equity se empieza a aprecia una “Smirk”, una curva con pendiente negativa.

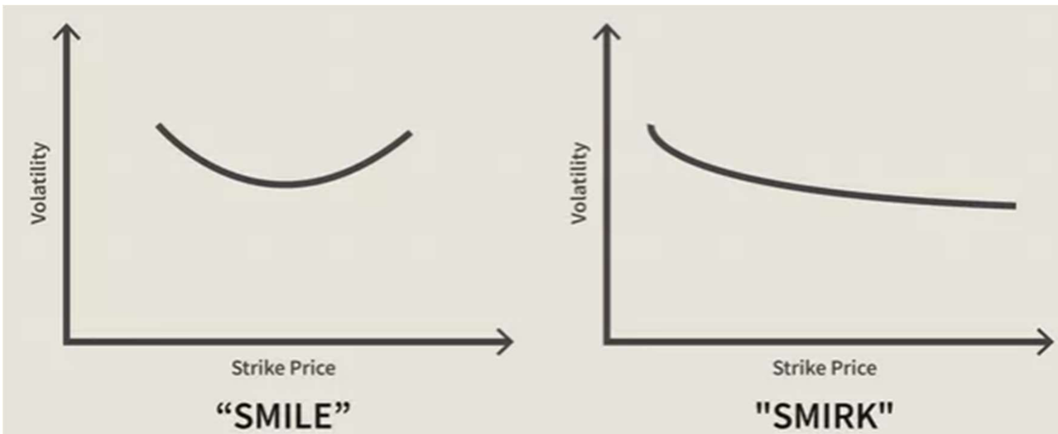
Dependencia del Strike

En BSM, la volatilidad se asume constante para el proceso estocástico que sigue el Spot. Esto significa que opciones con diferente strike tendrían la misma volatilidad, es decir la Skew es "plana".

En realidad, las volatilidades asociadas a Strikes muy OTM o ITM son mayores que las volatilidades ATM

En mercado de FX, las curvas de volatilidades suelen ser simétricas alrededor del strike ATM.

En Equity, las curvas suelen estar fuertemente sesgadas en una dirección. Por ejemplo, en opciones europeas los strikes más bajos presentan mayor volatilidad que los strikes más altos.



Dependencia del tiempo:

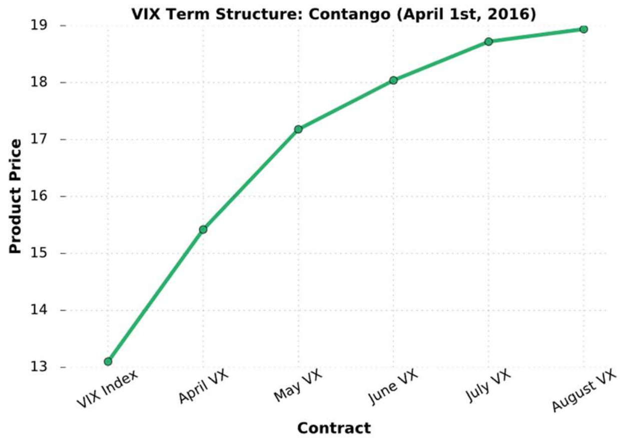
La volatilidad implícita para un contrato dado, también depende de la fecha de expiración. Por lo tanto, también tenemos una estructura a término de la volatilidad implícita.

Para un strike determinado, IV varían dependiendo de la maturity de la opción. En la mayoría de los casos, la Term Struture es una función creciente en función de la maturity. Este es el caso general en periodos calmos donde las volatilidades de corto plazo son relativamente bajas

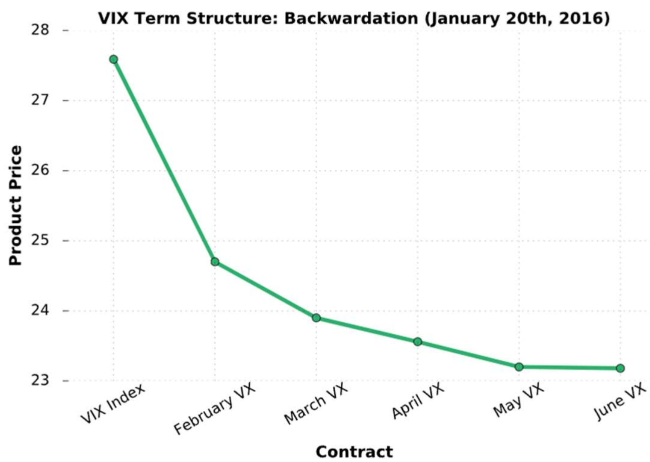
La curva puede ser decreciente si el mercado es volátil y la volatilidad de corto plazo son altas.

La Term Structure también puede reflejar expectativas de mercado de un evento cercano en términos de la volatilidad que ese evento podría implicar.

Uno puede ver la forma de la Term Structure. Un trade sencillo para ver esto es el Calendar Spread, el es la diferencia entre de iguales características, pero diferente maturity.



En periodos calmos, la Term Structure se encuentra en “contango”.



Durante periodos donde se espera alta volatilidad a corto plazo, la curva se invierte y se dice que queda en “backwardation”.

Por qué Smile/Skew?

Oferta y Demanda

Lo primero que hay que entender es que cada mercado tiene sus propios participantes con su propio comportamiento y aversión al riesgo. Por lo tanto, los patrones de volatilidad son particulares para cada asset class.

Fx: Smile simétrica, ej: EURUSD. Esto es intuitivo ya que los inversores del Euro ven el mercado a la inversa que los inversores del Dollar. Aunque, si bien esto explica la simetría, no explica porque las opciones OTM/ITM tiene mayor VI que uno ATM. La razón es que en general, los inversores se protegen contra movimientos adversos de la tasa FX. Por lo tanto, aquellos inversores a los cuales una caída en la tasa podría ser algo malo, compran Puts OTM para protegerse. Por otro lado, para aquellos que una suba en la tasa podría ser algo perjudicial compran Calls OTM. Como hay una demanda de compradores mayor que de vendedores, los precios en los extremos se hacen mas altos, dando como resultado mayor volatilidad implícita.

Equity: Smile asimétrica. Los inversores generalmente necesitan cubrirse más contra caídas que contra subidas de mercado. La Skew suele verse generalmente explicada con el concepto de cobertura. El mercado también intuye mas probable un gran movimiento hacia abajo que un movimiento hacia arriba en el precio de una acción. Adicionalmente, también esta el efecto de apalancamiento, en el que, si el precio de una acción cae, y los niveles de deuda de la firma se mantienen constantes, el apalancamiento de la empresa habrá aumentado, conduciendo esto a mayor volatilidad en el equity.

Por todo lo anterior, cobra demasiado sentido la aparición del "Skew" después del crash del 87.

Hay además otro fenómeno visto en la actualidad post "COVID19 Crash" que es que se observa mayor convexidad en la curva de volatilidad. Aún no se sabe si se estamos ante un fenómeno pasajero o si llego para quedarse. Una forma sencilla de medir esto es sacando la diferencia entre el VIX y la VI ITM (1m ttm)

Commodity: Smile asimétrica inversa(creciente). Los inversores necesitan cubrirse del upside. El upside puede afectar a industrias que procesan los commodities para su producto final.

Fixed Income: Las tasas de interés tienen su propio comportamiento dependiendo del instrumento considerado.

Comportamiento No Gassiano

La verdadera dinámica del underlying no son las que aparecen en el modelo de Black & Scholes y los participantes de mercado están bien al tanto de esto.

Gamma P&L

En un mercado descendente, Gamma para opciones de strike bajo aumenta, lo que combinado con una mayor volatilidad realizada hace que el vendedor de opciones tenga que rebalancear su delta con mayor frecuencia, lo que resulta en mayores pérdidas para el vendedor de opciones. Entonces, ese costo entonces se lo pasa al comprador.

Pendiente del Skew:

Medidas y Trading

Lo primero es notar su nivel, que es dado generalmente por la VI ATM. La palabra Skew es utilizada normalmente para referirse a la pendiente de la curva de volatilidad implícita. Por tanto, equity markets se dice que tienen Skew negativa.

Asumiendo que la volatilidad es dependiente del strike uno puede calcular la pendiente calculando la derivada primera en algún punto, esto se hace generalmente en el strike ATM.

Si comparamos la Skew de la VI de un Índice contra la Skew de la VI de un Stock, notaremos que las volatilidades del índice están más sesgadas. Esto se debe a que durante las caídas generales de mercado todos los stocks caen, la correlación realizada entre los mismos crece, y un equity index esta ponderado entre diferentes stocks.

Ésta es una propiedad útil, ya que se puede utilizar el Skew de un índice como proxy para fijar los precios de los pagos dependientes del Skew de acciones cuyos sesgos implícitos no son tan líquidos como los del índice. Sabiendo que las volatilidades implícitas del índice están más sesgadas que las de las acciones individuales, es posible tomar un porcentaje del skew del índice y usarlo en el pricing. El porcentaje a usar se deberá primeramente a si la estructura en cuestión pone al vendedor short skew o long skew, y desde ahí ver que tan agresivo el trader quiere ser con el Skew.

Pendiente en el Tiempo

El Skew para cualquier acción específica es más pronunciado para los vencimientos a corto plazo que para los vencimientos a largo plazo. Un vencimiento a largo plazo podría tener un sesgo a un nivel más alto que el vencimiento a corto plazo, pero el sesgo a corto plazo será más pronunciado.

Para entender esto, recuerde que el sesgo se debe principalmente a que los operadores temen perder dinero en caso de que el mercado baje y se vuelva más volátil.

Obviamente, cuanto mayor sea Gamma, más inminente será el problema. Dado que las opciones “downside” a corto plazo tienen Gamma más grande cuando el precio de las acciones se mueve hacia abajo a los strikes más bajos, el efecto de skew es mayor para esas opciones.

Otro motivo es que, para vencimientos cortos, el trader “sabe” si es una opción a un determinado strike es una “downside option” o no. No ocurre lo mismo para vencimientos largos, ya que el trader no sabe donde estará el precio del Stock para un periodo X determinado.

Un salto en el precio de la acción tendrá un impacto significativo en el precio de un Put, para corto plazo este efecto es más severo ya que el mercado no tiene tiempo para recuperarse.

Curvatura

Según Strike

La curvatura es el último parámetro que se utiliza para marcar una superficie IV.

Para strikes muy altos, en Equity, la volatilidad implícita ya no disminuye, sino que se aplana.

Al mismo tiempo, los strikes muy bajos tienen una volatilidad implícita aún mayor de lo que indica el parámetro de sesgo.

Las volatilidades implícitas de una sola acción generalmente tienen más curvatura que las de un índice. La razón de esto es que los saltos a la baja tienen un impacto mayor en las acciones individuales que en un índice, y el riesgo de que una sola acción caiga por completo es mayor que el de un índice completo.

Entonces, aunque una acción puede tener volatilidades implícitas menos sesgadas negativamente que un índice, las volatilidades implícitas de la primera son más convexas que las del índice.

Según Tiempo

La curvatura de la sonrisa tiende a disminuir a medida que aumentan los vencimientos. La curvatura de la sonrisa disminuye a la inversa del tiempo. Esta propiedad se observa en todos los mercados de valores.

Ésta es la expresión de que el riesgo de volatilidad a corto plazo es mayor que a largo plazo. Para coincidir con esta observación, la varianza en todo momento debe ser igual. Esto solo se puede lograr con un proceso de alta reversión a la media y una alta volatilidad de la volatilidad.

Curvatura Put-Call

Los Puts tienen mayor curvatura que los Calls, esto se debe a que los puts son usados como cobertura ante eventos de stress.

Modelos Populares

Arbitrage freedom de la superficie de VI

Para que una superficie de volatilidad implícita esté libre de arbitraje, se deben cumplir algunos criterios.

1. Para todas las maturities, todos los call spreads tienen que ser positivos:

$$C(K_j, T_i)\text{-}C(K_{j+1}, T_i) \geq 0$$

2.Una restricción adicional en estos spreads es que si los dividimos por la diferencia de los strikes tenemos que tener:

$$\frac{C(K_j,T_i)\text{-}C(K_{j+1},T_i)}{K_{j+1}-K_J} \leq 1$$

Para que una superficie de volatilidad implícita esté libre de arbitraje, se deben cumplir algunos criterios.

3. Todos los calendar spreads deben ser positivos:

$$C(K_j, T_{i+1})\text{-}C(K_j, T_i) \geq 0$$

4. Todos los butterfly spreads tienen que ser positivos:

$$C\left(K_{j+1}, T_i\right) - \frac{K_j,\text{-}C(K_{j+1},T_i)}{K_{j+1}-K_J}$$

El set de opciones europeas serán arbitrage free si todas las condiciones anteriores se cumplen.

Debemos preocuparnos de que cualquier modelo que usemos para capturar la asimetría cumpla estas condiciones. El hecho de que la calibración de un modelo no cumpla con estas condiciones es un criterio sólido para rechazar dicha calibración. Cualquier interpolación entre las volatilidades implícitas de dos strikes consecutivos debe cumplir estas condiciones para estar libre de arbitraje.

Dinámicas de la Volatilidad Implícita

Existe un orden natural de velocidad de datos de mercado:

- El Spot cambia más rápido que las Volatilidades ATM
- Volatilidades ATM cambia más rápido que la Skew
- Las Volatilidades cambian más rápido que los forecast de dividendos

El rendimiento del hedging se puede mejorar asumiendo un vínculo entre diferentes parámetros del mercado (esto se discutirá mejor en la sección de Shadow Greeks &MVDelta)

Sticky Strike Rule:

- Sticky Strike implica que la volatilidad asociada con una Strike determinado no cambia cuando el spot se mueve.

Sticky Delta Rule:

- Sticky delta implica que la volatilidad asociada con una opción con un delta dado no cambia cuando cambia el spot. En este caso se dice que la dinámica es dependiente del “moneyness” y del “term”.

Stick Implied Tree Model:

- Ajusta las volatilidades individuales hacia arriba a medida que el mercado cae y hacia abajo a medida que sube el mercado.

La volatilidad reacciona lentamente sobre movimientos del spot. En mercados tranquilos, la volatilidad se cotiza por strike y se actualiza con mucha menos frecuencia que el spot. La dinámica se asemeja a un Sticky Strike.

Cuando los mercados son volátiles, las volatilidades implícitas se actualizarán con más frecuencia y la dinámica puede parecerse a un Sticky Delta.

Los modelos realistas deben exhibir una dinámica de volatilidad implícita estocástica, en el sentido de que la dinámica de la sonrisa puede permitir una dinámica Sticky Strike y Sticky Delta, así como cambios aleatorios entre las dos.

Hasta cierto punto, los modelos de volatilidad estocástica local capturan este comportamiento.

Hechos estilizados y modelización

Reversión a la media: La VI tiende a revertir a la media alrededor de un nivel promedio. El modelo para capturar esto es:

- Orstein Uhlenbeck

Smile Slope decrece a razón $\approx \frac{1}{\sqrt{T}}$. Para modelar este usamos:

- Two Factors Stochastic Volatility

Smile Curvature decrece a razón $\approx \frac{1}{T^{\alpha}}$. Para modelar esto usamos:

- Two Factors Stochastic Volatility

La curvatura de un put es mayor a la curvatura de un call. Para modelar esto usamos:

- Jump Model

Dinámicas del Smile. Para modelar por ejemplo un régimen sticky strike, usamos:

- Mix entre Local Vol y Stochastic Vol

Modelos mas populares en el ámbito

- Heston (Stochastic Volatility): Modelo de Volatilidad estocástica
- Dupire’s Local Volatitlity: Modelo de Volatilidad Local
- SLV: Modelo mixto

Modelo de Heston

El modelo de Heston es generalmente el mas conocido dentro de los modelos de volatilidad estocástica por los siguientes motivos:

- Provee una solución cerrada para las opciones call europeas

- Permite que el precio del stock siga una siga una distribución no log-normal
- Expresa la volatilidad implícita como un proceso de reversión a la media, y ajusta bastante bien la superficie de VI vista en los mercados
- Tiene en cuenta la relación entre el stock Price y la Volatilidad

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\upsilon_t} S_t dZ_S$$

$$d\upsilon_t = \kappa(\theta - \upsilon_t)dt + \sigma_\upsilon \sqrt{\upsilon} dZ_\upsilon$$

$$E[\, Z_S, Z_\upsilon] = \rho dt$$

La primera SDE expresa el hecho de que el precio del stock sigue un proceso estocástico con un retorno constante µ.

La segunda SDE, corresponde al proceso que sigue la varianza del precio del stock. Se puede ver que es un proceso de reversión a la media.

Efectos de los parámetros en la volatilidad implícita

θ

A este término se lo denomina “Long-term mean reversion”. Su efecto resulta claro, un aumento de θ corresponde a un aumento en el nivel de la varianza, y por lo tanto la curva del Smile se traslada hacia arriba

σ

Este término corresponde a la volatilidad de la varianza. Mientras mas grande le mismo, mas pronunciada la Smile. Esto se ve claramente si pensamos que un incremento en la probabilidad de eventos más extremos debería concluir en el incremento de los precios de Calls y Puts OTM.

κ

Este termino corresponde a la velocidad de la reversión a la media. En impacto de este parámetro en el precio de las opciones parece ser limitado.

Un incremento de κ decrece las probabilidades de eventos extremos. Por lo tanto, un incremento de dicho termino cuando las opciones están Deep OTM, implicará la disminución de las probabilidades de dichas opciones de acabar ITM y por lo tanto su precio disminuirá. Por el contrario, un aumento de κ cuando las opciones están Deep ITM, implicará una disminución en las probabilidades de que las opciones acaben OTM, por lo tanto, el precio de las mismas subirá.

The Feller Condition

$$2\kappa\theta_\upsilon > \ \sigma_\upsilon^2$$

Si bien la varianza no puede ser negativa, podría ser cero a menos que se cumpla la condición de arriba.

En la práctica esta condición no se suele cumplir y las posibilidades de una varianza igual a cero son importantes.

ρ

Los procesos del movimiento del stock y la volatilidad están inversamente correlacionados. Una correlación negativa hace que la cola izquierda de la distribución de los retornos sea mayor a la cola derecha. Esta lógica, se corresponde con que los precios de los put OTM tengan mayor volatilidad implícita. Por paridad Put Call, los calls también deberían tener mayor VI.

Cuando usar SV models?

Los modelos volatilidad estocástica pueden explicar de manera auto consistente las características reales que vemos en los datos empíricos del mercado. Una vez que se especifica un modelo de este tipo, los sesgos generados por el modelo son una función de sus parámetros, y encontrar los parámetros que se ajustan a un cierto sesgo (o superficie) se hace mediante de calibración.

Los modelos de volatilidad estocástica van más allá del sesgo y la estructura a término, lo que permite vega convexity y foward skew. Cualquier derivado que sea sensible a vega convexity y / o a foward skew debe valorarse utilizando un modelo de volatilidad estocástica.

Los modelos de volatilidad estocástica también tienen sus debilidades, ya que tienen dificultades para ajustarse a ambos extremos de la superficie, es decir, ajustar el sesgo para vencimientos tanto a corto como a largo al mismo tiempo.

Dupire's Local Volatility

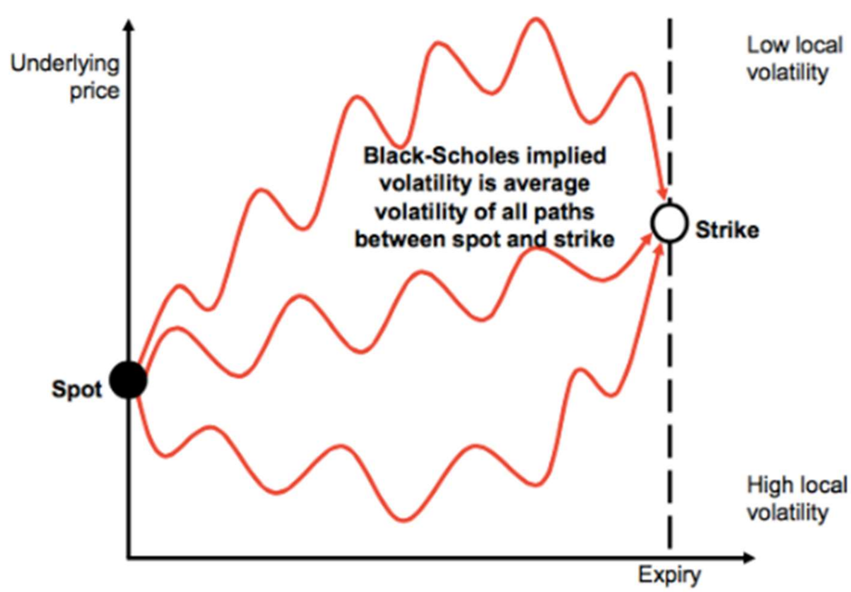
Los derivados de renta variable exóticos suelen requerir un modelo más sofisticado que el modelo Black-Scholes. El modelo alternativo más popular es un modelo de volatilidad local (LocVol), que es el único modelo de volatilidad consistente completo.

- Completo: permite coberturas basadas únicamente en el subyacente.
- Consistente: no contiene contradicción.

Los modelos LocVol intentan mantenerse cerca del modelo Black-Scholes introduciendo más flexibilidad en la volatilidad.

Es posible calcular la volatilidad local a partir de la volatilidad implícita de BSM. Esto es posible ya que la volatilidad implícita de BSM de una opción es el promedio de las volatilidades de todos los caminos entre el spot y el strike.

A continuación, una imagen que nos da una intuición acerca de lo que es la volatilidad local.



Sobre la LocVol:

- La volatilidad local es la **volatilidad instantánea del subyacente**
- Black & Scholes VI es un promedio de las volatilidades locales
- La volatilidad ATM es la misma en Black & Scholes que en Local Vol
- Black & Scholes Skew es la mitad de la LocVol Skew dado que es su promedio

Desde la VI a la Volatilidad local

Podemos mirar el mercado de Vanillas y encontrar precios o VI para cualquier Strike y vencimiento, y entonces encontrar LocVol tal que si el spot sigue el siguiente proceso:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma local(S_t, t)dW$$

Podamos hacer que el Fair Value de las Vanillas ajuste perfecto al mercado.

Encontrar LocVol es un proceso llamado Calibración. Los inputs para esta función no son solamente el nivel actual del asset, la curva risk free, los dividendos, sino también el Skew de la VI. Dado un set de VI de opciones vanillas, la calibración es un proceso que en que buscamos las volatilidades locales para que el modelo se ajuste con los precios de mercado.

Conociendo los precios de las Vanillas, la función de LocVol puede ser derivada usando la siguiente fórmula:

$$\sigma(K,T) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r-q)K\frac{\partial C}{\partial K} + qC}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

La construcción de la volatilidad local desde la volatilidad implícita constituye un problema numérico complicado en la práctica.

Empezando desde un numero finito de volatilidades implícitas, uno puede interpolar para dar continuidad a la curva, y luego calcular las volatilidades locales.

Una vez que las volatilidades locales fueron obtenidas, uno puede pricear instrumentos exóticos con el modelo de volatilidad local calibrado.

Podemos además obtener la PDE del modelo de volatilidad local. La derivación es igual que la de la ecuación de BSM.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma^2(K,T)}{2}K^2\frac{\partial C^2}{\partial K^2} - (r-q)K\frac{\partial C}{\partial K} - qC$$

El resultado de la superficie de volatilidad local es completamente no paramétrico. El modelo además permite un ajuste completo a una superficie de VI libre de arbitraje.

Desventajas:

- Foward Skew más pequeña de lo que debería ser
- Vol of Vol pequeña
- Problemas numéricos en la implementación

A pesar de todo esto 90% de los sistemas de bancos de inversión usan LocVol en el día a día.

Muchas veces los trader ajustan sus griegas y precios si ven que LocVol no es adecuado para pricear.

Ventajas:

- Ofrece una manera de capturar Skew sin introducir variables random adicionales
- Es un One Factor Model, lo que quiere decir que permite dinámicas risk-neutral

Stochastic Local Volatility

Es un intento de mezclar las fortalezas de los modelos Stochastic Vol y Local Vol.

La idea en SLV es que queremos mantener la dinámica de nuestro modelo de volatilidad estocástica, pero necesitamos ajustar la cantidad promedio de volatilidad que el modelo recoge en cada punto de la superficie S, t para que coincida con la cantidad del modelo de volatilidad local.

Esto se logra agregando una función de apalancamiento, L (S, t) que aumenta la volatilidad que produce el modelo estocástico cuando subvalora las opciones de vainilla, y reduce la volatilidad cuando es demasiado alto.

Además, generalmente se agrega η para calibrar entre la volatilidad local y estocástica con respecto a los valores exóticos del mercado que dependen de la volatilidad del precio.

La dinámica del proceso es:

$$dS_t = rdt + \sqrt{v_t}L(S,t)S_t dZ_S$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \eta\varepsilon\sqrt{v}dZ_v$$

Procedimiento para calibrar:

- Tomar una superficie de vol observada y calcular Dupire LocVol.
- Calibrar un modelo de Heston por ej. lo mejor que se pueda.
- Después pasar a los dos dentro del proceso de calibración L(S,t) – Este punto es complicado, veremos si con la ayuda de QuantLib podemos lograrlo.

Para parámetros sensibles de Heston, esto nos devolverá un modelo que re pricea exactamente las opciones vanilla, y el parámetro η puede ser ajustado de 0 a 1 para pricear correctamente la primera generación de exóticos.

QuantLib

A continuación, presentaremos un ejemplo de calibración del modelo SLV hecho en con la librería QuantLib.

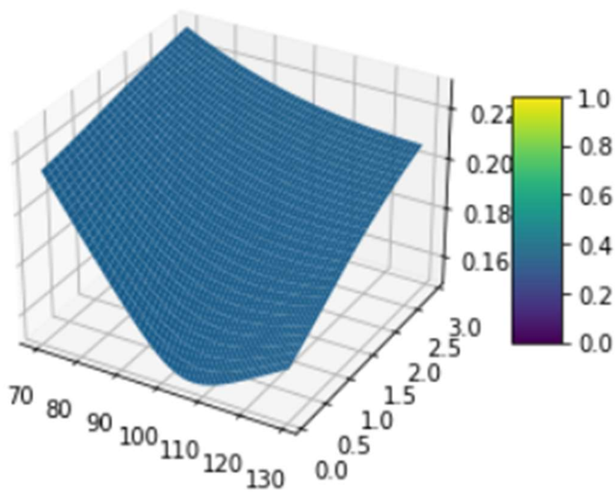
Para una explicación completamente detallada por favor revise el link de abajo que lo llevará al repositorio de Github donde encontrará dos archivos dentro de la carpeta Modelos, uno para el cálculo y calibración del modelo SVL y otro para el de la volatilidad local y la calibración de Heston.

https://github.com/enriquecorimayo/Quant-UCEMA-Grupo-4

Calibración SLV - Pasos a Seguir:

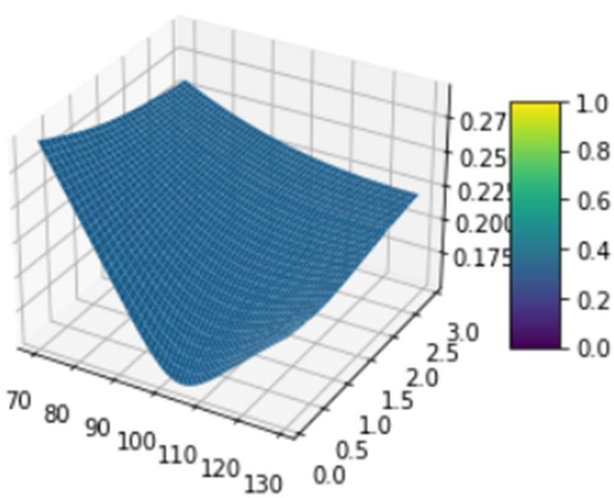
Superficie de Volatilidad

Primero, creamos y trazamos una superficie de volumen usando algunos parámetros aleatorios en un proceso Heston; supongamos que estos son los datos que el mercado nos ha mostrado.



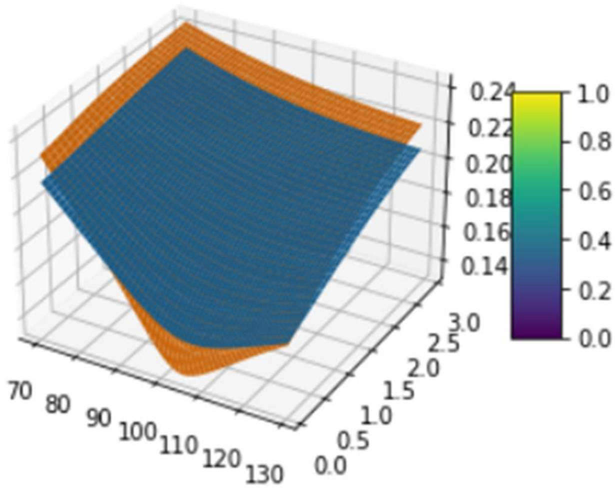
Calculo de la Loc Vol de Dupire

Calculamos la volatilidad instantánea de Dupire



Calibramos un Procesos de Heston

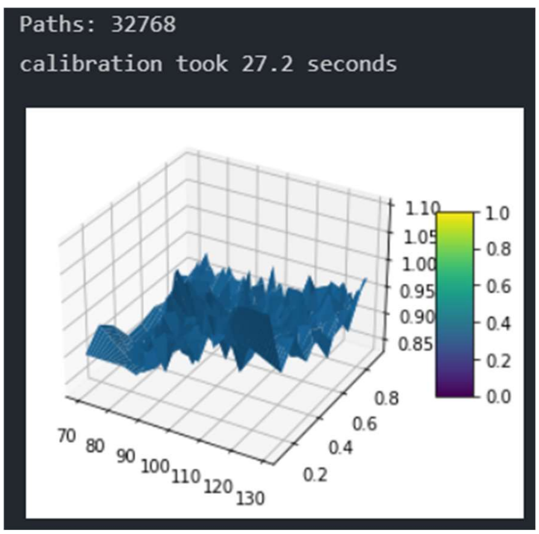
Calibramos un proceso de Heston (supongamos que tenemos los parámetros ligeramente incorrectos ... para que la superficie de volumen no coincida del todo)

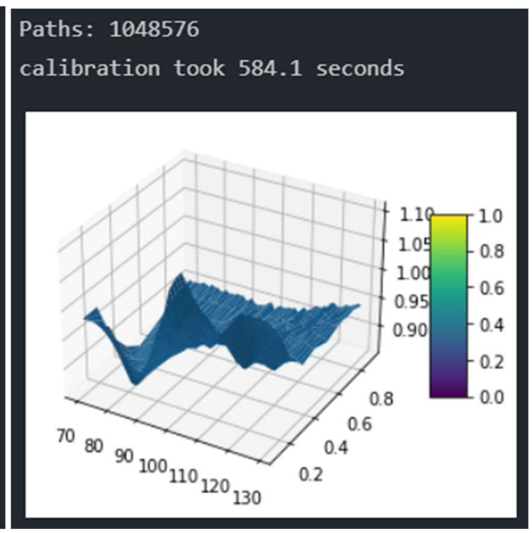


La superficie naranja es la superficie de volatilidad de mercado y la azul la que se obtiene del modelo de Heston.

Calibrar los dos modelos con la función de Apalancamiento

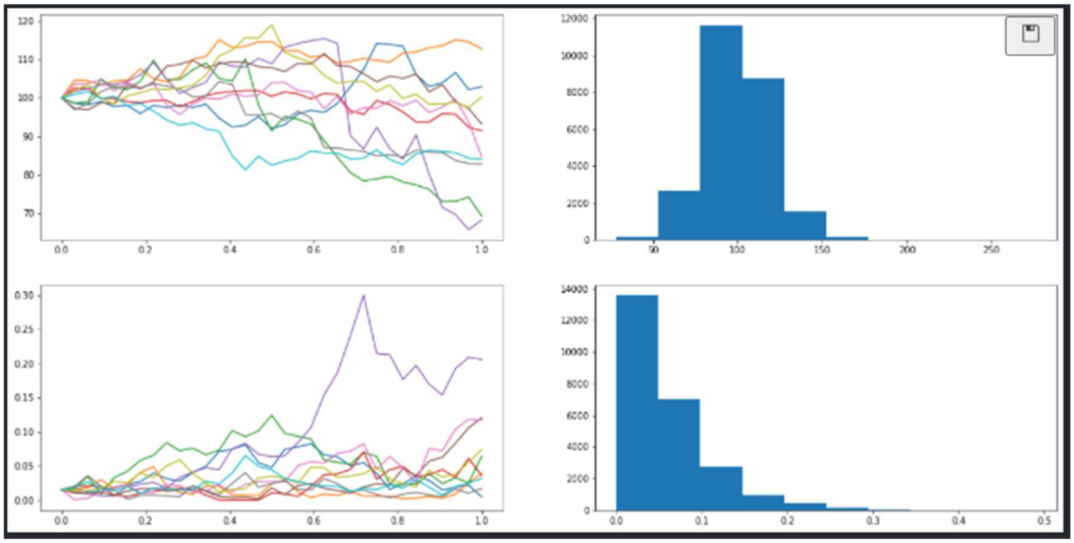
Ejecutar el ajuste de volatilidad local y calcular la función de apalancamiento.





Montecarlo

Ahora, creemos un generador de paths y generemos caminos a partir del proceso de volatilidad estocástica local calibrado en el paso anterior:



Finalmente podemos fijar el precio de las opciones utilizando estos caminos a través de Monte Carlo.

```
# Call un año a strike 100
(df_spot[1.0] - 100).clip(lower=0).mean()
[13]
... 7.22263467933447
```

Shadow Greeks & MVDelta:

Las griegas comunes se definen en términos de derivadas parciales con respecto al subyacente, el tiempo, la volatilidad, etc., mientras se mantienen fijas las demás variables / parámetros. Esa es la definición de una derivada parcial. Pero, por supuesto, las variables / parámetros podrían, en la práctica, moverse juntos. Por ejemplo, una caída en el precio de las acciones puede ir acompañada de un aumento de la volatilidad. Por lo tanto, se puede medir la sensibilidad ya que tanto el subyacente como la volatilidad se mueven juntos. A esto se le llama Shadow Greek y es como el concepto de derivada total en, por ejemplo, mecánica de fluidos, donde uno podría seguir el camino de una partícula de fluido.

Shadow Delta:

Los traders suelen ajustar su delta de la siguiente manera:

$$\Delta = \Delta_{BS} + \upsilon_{BS} \frac{\partial \sigma(S_0; K, T)}{\partial S}$$

donde el segundo término a veces se llama shadow delta: está relacionado con cómo se espera que la volatilidad implícita (superficie) se mueva con el spot. El mercado a menudo exhibe diferentes regímenes de volatilidad y los profesionales han propuesto varios supuestos de stickiness o reglas prácticas para capturar estos.

Resulta que hacer una suposición de modelado particular (es decir, elegir un determinado modelo matemático para la dinámica del subyacente) da forma implícitamente a la dinámica de spot/ implicit Vol.

Black-Scholes, por ejemplo, obviamente está sticky strike porque el modelo estipula teóricamente que la volatilidad es constante

$$\frac{\partial \sigma(S_0; K, T)}{\partial S_0} = 0$$

En esquemas más elaborados, este término no es cero.

En modelos de volatilidad local no homogéneos a la Dupire podemos observar:

$$\frac{\partial \sigma(S_0; K, T)}{\partial S_0} < 0$$

(Sticky implied tree/ sticky local delta)

En modelos de volatilidad estocástica homogénea (por ejemplo, Heston) tiene

$$\frac{\partial \sigma(S_0; K, T)}{\partial S_0} = -\frac{K}{S_0}\frac{\partial \sigma(S_0; K, T)}{\partial K} > 0$$

(sticky moneyness)

Por lo general, en los mercados de valores (sesgados negativamente) tendremos:

$$\Delta_{LV} \leq \Delta_{BS} \leq \Delta_{SV}$$

Delta Modelo No Consistente

Bajo los supuestos de algún modelo, uno puede ajustar un método numérico (Montecarlo, por ejemplo) para calcular cualquier tipo de Delta, no necesariamente consistentes con el modelo. Por ejemplo, si tenemos una aproximación de diferencias finitas centradas:

$$\Delta = \frac{V(S + \Delta S, \theta) - V(S - \Delta S, \theta)}{\Delta S}$$

Utilizando este aproach, uno obtiene diferentes valores de Delta dependiendo en que variables entre la variable genérica θ se muevan en conjunto con el Spot en la función de pricing V(S, θ). Por ejemplo, en BSM, junto con S uno puede elegir que la VI evolucione acorde a ciertas regles de "stickness" lo cual va en contra del modelo teórico.

Delta Modelo Consistente

El calculo de Delta de mínima varianza bajo los supuestos de los diferentes modelos quedaría de la siguiente manera:

BSM:

$$\Delta_{BS}^{MS} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

LV Dupire:

$$\Delta_{BS}^{LV} = \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \sigma_{LV}} \frac{\partial \sigma_{LV}}{\partial S}$$

SV Heston:

$$\Delta_{BS}^{SV} = \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \upsilon} \frac{\xi \rho}{S}$$

Para concluir, observemos que Vega tiene que ser entendida como una “out of the model Greek”. En otras palabras, BSM Vega tiene que ser vista como una violación a los supuestos del modelo de BSM. En este sentido, uno puede comprar vega como una sensibilidad respecto a parámetros de Heston por ejemplo. Dicho esto, si uno quiere la sensibilidad a un movimiento paralelo de la curva de VI (que es lo que BSM Vega representa matemáticamente), es posible obtenerla en Heston u otros modelos, pero raramente esto pueda hacerse analíticamente.

Github

https://github.com/enriquecorimayo/Quant-UCEMA-Grupo-4

Referencias

- The Volatility Smile: Emanuel Derman
- Quantitative Strategies Research Notes – Regimes of Volatilities: Emanuel Derman
- Trading Volatility, Correlation, Term Structure & Skew: Colin Bennet
- Quantlib documentation
- Calibration of Local – Stochastic and Path-Dependent Volatility Models to Vanilla and No-Touch Options - Alan Bain
- Arbitrage-Free Smoothing of the Implied Volatility Surface: Matthias R.Flenger
- The Volatility Surface – Jim Gatheral
- Stochastic Volatility Modeling - Lorenzo Vergomi