ACTIVIDAD 4.4 OPERACIONES ENTRE RELACIONES

Enrique Ulises Báez Gómez Tagle

26 de noviembre de 2023

Sean $A = B = C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y las relaciones $R : A \to B$ y $S : B \to C$, donde:

$R = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5)\}$
$S = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

a) Obtener $M_{S^{-1} \cap R \circ S}$

b) Explicar si tiene o no las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

c) ¿Cuál es su grafo dirigido?

1 Obtener $M_{S^{-1} \cap R \circ S}$

Pasos realizados:

1. Inversa de S (S^{-1}):

$$S^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 3), \\ (3, 3), (4, 3), (5, 3), (3, 4), \\ (4, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), \\ (5, 5) \end{array} \right\}$$

2. Composición de R y S ($R \circ S$):

$$R \circ S = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1), (2, 4), (2, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5), \\ (3, 1), (3, 4), (3, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 5), \\ (3, 4), (3, 2), (2, 4), (2, 2), (4, 4), (4, 2), \\ (5, 4), (5, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 4), \\ (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 4), (3, 1), (3, 3), \\ (3, 5), (3, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (5, 1), \\ (5, 4), (5, 5) \end{array} \right\}$$

3. Intersección de S^{-1} y $R \circ S$ ($S^{-1} \cap R \circ S$):

$$S^{-1} \cap R \circ S = \left\{ \begin{array}{l} (5,4),(5,1),(2,3),(3,4),(4,3), \\ (4,5),(4,4),(4,1)),(5,4),(5,1), \\ (5,5),(2,3),(3,4),(4,4),(4,3), \\ (5,1),(5,2),(5,5) \end{array} \right\}$$

4. Matriz booleana de la intersección ($M_{S^{-1} \cap R \circ S}$):

$$M_{S^{-1} \cap R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Explicar si tiene o no las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva

- **Reflexividad**: La relación no es reflexiva, ya que no todos los elementos en la diagonal principal son 1 (por ejemplo: $a(2,2) = 0$).
- **Irreflexividad**: La relación no es irreflexiva, ya que hay elementos 1 en la diagonal principal (por ejemplo: $(3,3), (4,4)$, y $(5,5)$).
- **Simetría**: La relación no es simétrica. Ya que la matriz no es simétrica con respecto a su diagonal principal (por ejemplo: $(2,5) = 1$, pero $(5,2)$ $= 0$).
- **Asimetría**: La relación no es asimétrica, ya que existen pares como $(3,4)$ y $(4,3)$ donde ambos valen 1.
- **Antisimetría**: La relación no es antisimétrica, ya que por ejemplo: $(3,4)$ y $(4,3)$ son ambos 1.
- **Transitividad**: No se puede determinar si la relación es transitiva solo con la matriz sin una revisión exhaustiva de todas las combinaciones posibles.
- **Transitividad**: La relación no es transitiva. Encontramos al menos un caso en el que un elemento a está relacionado con b y b está relacionado con c, pero a no está relacionado con c. Esto viola la definición de transitividad. Por ejemplo, $a(2,3) = 0$ mientras que $a(2,5)$ y $a(5,3)$ son ambos 1.

3 ¿Cuál es su grafo dirigido?