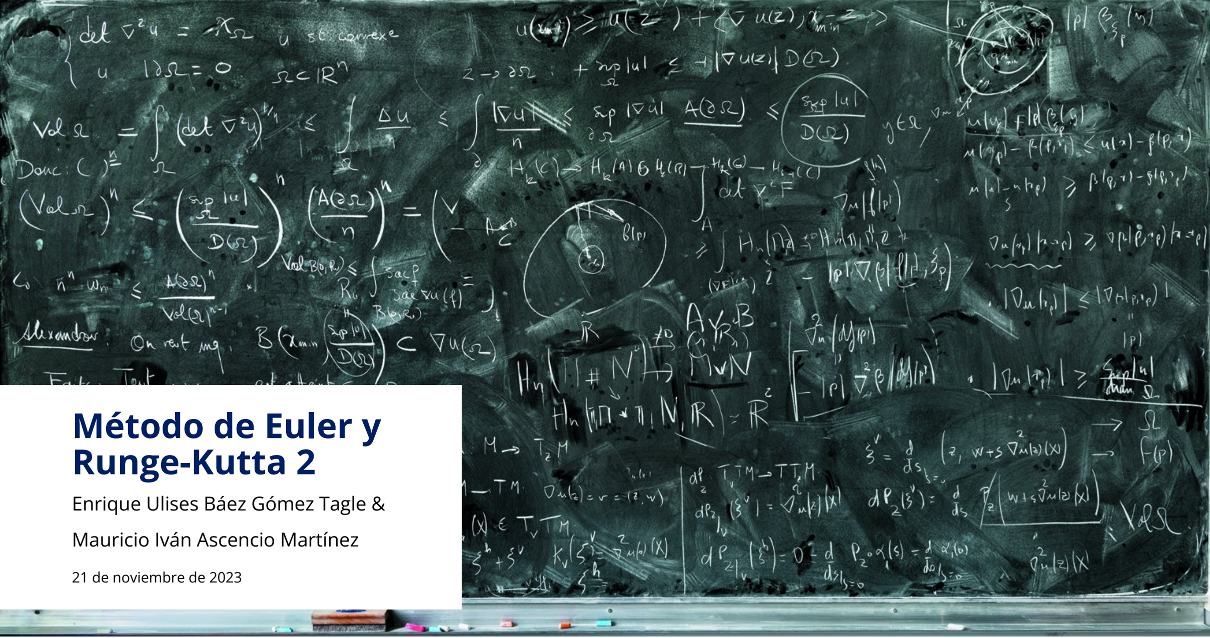


Método de Euler y Runge-Kutta 2

Enrique Ulises Báez Gómez Tagle &

Mauricio Iván Ascencio Martínez

21 de noviembre de 2023

1. Introducción

El método de Euler y el método de Runge-Kutta de orden 2 son técnicas numéricas fundamentales para resolver EDO.

1.1. Método de Euler

Es uno de los algoritmos más simples y antiguos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se basa en la aproximación lineal de la función, utilizando la tangente en un punto conocido para predecir el valor de la función en un punto siguiente.

1.2. Formulación matemática

Dada una EDO de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ con una condición inicial $Y(t_0) = Y_0$, el método de Euler propone la siguiente fórmula iterativa para aproximar Y en puntos sucesivos:

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n) \tag{1}$$

donde h es el tamaño del paso y Y_{n+1} es la aproximación de Y en $t_n + 1 = t_n + h$

1.3.1 Análisis de Error: Error Local de Truncamiento (ELT)

Se refiere a la diferencia entre la solución real y la solución numérica después de un solo paso. Matemáticamente, se expresa como:

$$ELT = |y(t_{n+1}) - (y_n + hf(t_n, y_n))| \tag{2}$$

donde $y(t_{n+1})$ es el valor real de la solución en t_{n+1}, y_n es la aproximación actual, y $f(t_n, y_n)$ es la derivada en el punto actual. Este error es proporcional al cuadrado del tamaño del paso h.

1.3.2 Análisis de Error: Error Global de Truncamiento (EGT)

Es la acumulación del ELT en cada paso durante todo el proceso de integración. Se define como:

$$EGT = |y(t_{final}) - y_n| \quad (3)$$

donde $y(t_{final})$ es el valor real en el tiempo final y y_n es la aproximación numérica. El EGT es proporcional a h y tiende a aumentar con el número de pasos.

1.3.3 Estabilidad Numérica

Está relacionada con la elección del tamaño del paso h. Un h demasiado grande puede llevar a inestabilidades, especialmente en ecuaciones diferenciales con comportamientos rápidamente cambiantes.

Se puede demostrar que para ciertos problemas, el método es condicionalmente estable, lo que significa que la estabilidad depende del tamaño del paso y de la naturaleza de la función $f(t, y)$.

1.4 Ventajas

- Simplicidad: Su mayor ventaja es su simplicidad conceptual y facilidad de implementación.
- Requiere Pocos Recursos Computacionales: Ideal para problemas donde la precisión no es crítica o los recursos computacionales son limitados.
- Fundamento para Métodos Más Complejos: Sirve como base para comprender algoritmos más avanzados.

1.5.1 Código: Tamaño de Paso Fijo

El tamaño del paso h es un parámetro que se pasa directamente a la función. Esto permite controlar la precisión de la aproximación con mayor detalle. Con un h menor, se generaría una solución más precisa, pero requerirá más cálculos. Esta versión es útil cuando se necesita un control específico sobre la precisión de cada paso individual.

```python
def euler_method(f, y0, t0, tf, h):
    """
    Args:
    f (function): La funcion derivada, f(t, y), de la ecuacion
    diferencial dy/dt = f(t, y).
    y0 (float): Valor inicial de la variable dependiente (y) en
    el tiempo t0.
    t0 (float): Tiempo inicial.
    tf (float): Tiempo final hasta donde se resolvera la ecuacion.
    h (float): Tamano del paso para la integracion numerica.
    """

    t = t0
    y = y0

    solution = [(t, y)]

    while t <= tf:
        y = y + h * f(t, y)
        t = t + h
        solution.append((t, y))

    return solution

# dy/dt = -2y con y(0) = 1 desde t=0 hasta t=5 con un paso h=0.1

def f(t, y):
  return -2 * y + 4 * t

euler_solution = euler_method(f, 1.0, 0.0, 5.0, 0.1)

for t, y in euler_solution:
    print(f"t = {t:.1f}, y = {y:.4f}")

\end{lstlisting}
```

1.5.2 Código: Número de Pasos Fijo

En lugar de especificar el tamaño del paso, se define el número total de pasos n para cubrir el intervalo de tiempo desde t_0 hasta t_n. El tamaño del paso se calcularía automáticamente en función del número de pasos. Esta versión es útil cuando necesitamos controlar el número total de evaluaciones de la función, lo que podría ser importante en contextos donde las evaluaciones de la función son costosas o limitadas.

```python
def euler_method(f, y0, t0, tn, n):
    """
    Args:
    f (function): La funcion derivada, f(t, y), de la ecuacion diferencial dy/dt = f(t, y).
    y0 (float): Valor inicial de la variable dependiente (y) en el tiempo t0.
    t0 (float): Tiempo inicial.
    tn (float): Tiempo final hasta donde se resolvera la ecuacion.
    n (int): Numero de pasos para la integracion numerica.
    """
    h = (tn - t0) / n
    t = t0
    y = y0
    for i in range(n):
        y += h * f(t, y)
        t += h

    return y

def f(t, y):
    return -2 * y + 4 * t

# Condiciones iniciales y parametros
y0 = 1  # Valor inicial de y
t0 = 0  # Tiempo inicial
tn = 2  # Tiempo final
n = 10  # Numero de pasos

approximation = euler_method(f, y0, t0, tn, n)
print("Aproximacion de y(t) en t =", tn, "es", approximation)
```

2.1. Método de Runge-Kutta de Segundo Orden (RK2)

Es una técnica más precisa que el método de Euler para resolver EDOs. Ofrece una mejor aproximación al considerar no solo la pendiente inicial sino también una pendiente intermedia.

2.2. Formulación matemática

La formulación general de RK2 para la EDO $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ es:

$$Y_{n+1} = Y_n + hK_2$$

$K_1 = f(t_n, y_n)$
$K_2 = f(t_n, \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1)$(4) aquí K_1 es la pendiente en el punto inicial, y K_2 es la pendiente en el punto medio estimado.

2.3.1 Análisis de Error: Error Local de Truncamiento (ELT)

Utilizando una estimación intermedia. Para un paso dado, el ELT en RK2 se puede expresar como:

$$ELT = |y(t_{n+1}) - (y_n + hK_2)| \tag{5}$$

donde $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1)$ y $K_1 = f(t_n, y_n)$. A pesar de que el cálculo del ELT en RK2 es más complejo que en Euler, generalmente resulta en un error menor para el mismo tamaño de paso.

2.3.2 Comparación con Euler

Se observa que RK2 ofrece una mayor precisión para un mismo tamaño de paso. Esto se debe al uso de la pendiente intermedia K_2, que proporciona una mejor aproximación de la función en el intervalo. En términos de Error Global de Truncamiento, RK2 también tiende a superar a Euler, especialmente en problemas donde las derivadas de la función cambian rápidamente.

2.3.3 Estabilidad Numérica

Muestra una mejor estabilidad numérica en comparación con el método de Euler. Esto es particularmente notable en problemas donde Euler puede ser inestable debido al tamaño del paso. RK2, al utilizar la pendiente intermedia, ofrece una aproximación más precisa y, por lo tanto, puede manejar mejor las inestabilidades inherentes a ciertas EDOs.

2.4 Ventajas

- Mayor Precisión: Ofrece mayor precisión que el método de Euler para el mismo tamaño de paso.
- Estabilidad Mejorada: Tiende a ser más estable, especialmente para problemas donde el método de Euler muestra inestabilidad.
- Buen Compromiso: Representa un buen balance entre la complejidad computacional y la precisión.

2.5 Código

El tamaño del paso h es un parámetro que se pasa directamente a la función. Esto permite controlar la precisión de la aproximación con mayor detalle. Con un h menor, se generaría una solución más precisa, pero requerirá más cálculos. Esta versión es útil cuando se necesita un control específico sobre la precisión de cada paso individual.

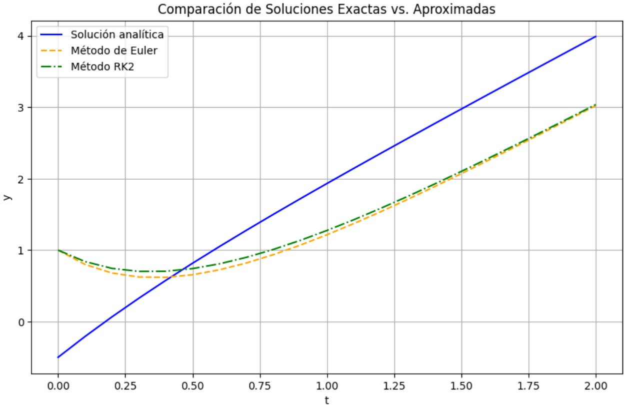
```python
def rk2_method(f, y0, t0, tn, n):
    """
    Args:
    f (function): La funcion derivada, f(t, y), de la ecuacion diferencial dy/dt = f(t, y).
    y0 (float): Valor inicial de la variable dependiente (y) en el tiempo t0.
    t0 (float): Tiempo inicial.
    tn (float): Tiempo final hasta donde se resolvera la ecuacion.
    n (int): Numero de pasos para la integracion numerica.

    Returns:
    float: Valor aproximado de y en el tiempo final tn.
    """
    h = (tn - t0) / n
    t = t0
    y = y0

    for i in range(n):
        k1 = f(t, y)
        k2 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1)
        y += h * k2
        t += hw

    return y

def f(t, y):
    return -2 * y + 4 * t

# Condiciones iniciales y parametros
y0 = 1  # Valor inicial de y
t0 = 0  # Tiempo inicial
tn = 2  # Tiempo final
n = 10  # Numero de pasos

approximation = rk2_method(f, y0, t0, tn, n)
print("Aproximacion de y(t) en t =", tn, "es", approximation)
```

3.1. Análisis de resultados: Comparación de Soluciones Exactas vs. Aproximadas

Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -2y + 4t$ con la condición inicial $y(0) = 1$. La solución analítica de esta ecuación es conocida, lo que nos permite compararla con las soluciones numéricas obtenidas a través de los métodos de Euler y RK2.

- La línea azul representa la solución analítica de la ecuación diferencial.
- La línea naranja discontinua muestra la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler.
- La línea verde discontinua muestra la solución aproximada obtenida mediante el método RK2.

3.1. Análisis de resultados: Comparación de Soluciones Exactas vs. Aproximadas



3.1. Análisis de resultados: Comparación de Soluciones Exactas vs. Aproximadas

Se puede concluir que el método RK2 tiende a estar más cerca de la solución analítica que el método de Euler, especialmente a medida que el tiempo avanza. Esto ilustra la mayor precisión del método RK2 en comparación con el método de Euler para un mismo tamaño de paso.

3.2 Análisis de resultados: Gráficos de Error

Los siguientes gráficos muestran cómo varía el error, tanto el ELT como el EGT, para diferentes tamaños de paso en ambos métodos. Se observa claramente que el método RK2 generalmente ofrece una mayor precisión para un mismo tamaño de paso comparado con el método de Euler.

- El Error Local de Truncamiento (ELT) es consistentemente menor para el método RK2 en comparación con el método de Euler para todos los tamaños de paso probados.
- La disminución del ELT en ambos métodos es más pronunciada a medida que se reduce el tamaño del paso, siendo más significativa en el método RK2.
- En cuanto al Error Global de Truncamiento (EGT), el método RK2 también muestra un error significativamente menor que el método de Euler en todos los tamaños de paso.

3.2 Análisis de resultados: Gráficos de Error

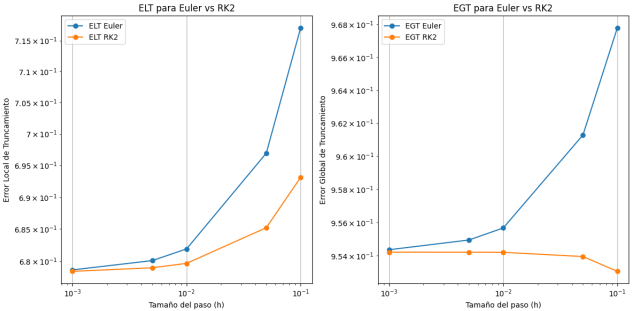


Figura: Comparación del Error Local y Global de Truncamiento para los métodos de Euler y RK2.

3.3 Análisis de resultados: Visualización de la Estabilidad Numérica

Consideremos una ecuación diferencial donde Euler tiende a ser inestable. Observaremos cómo el tamaño del paso afecta la estabilidad de las soluciones en ambos métodos.

- Para tamaños de paso más pequeños, ambos métodos tienden a ser más estables y las soluciones se acercan más a la solución analítica.
- El método de Euler muestra una tendencia a ser inestable, especialmente con tamaños de paso más grandes.
- El método RK2 muestra una mayor estabilidad en comparación con el método de Euler, manteniendo las soluciones más cercanas a la solución analítica incluso para tamaños de paso más grandes.

3.3 Análisis de resultados: Visualización de la Estabilidad Numérica

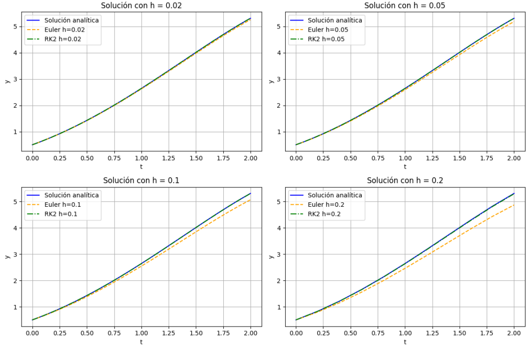


Figura: Estabilidad numérica de los métodos de Euler y RK2 en una ecuación diferencial donde Euler es inestable.

4.1. Conclusión: Implicaciones de la Precisión y la Estabilidad

La mayor precisión del método RK2, evidenciada en los ejemplos, sugiere su idoneidad para problemas donde los errores pequeños son críticos. Por otro lado, la simplicidad del método de Euler puede ser suficiente en situaciones donde se requiere menos precisión o donde los recursos computacionales son un factor limitante. Además, la estabilidad mejorada de RK2 lo hace más confiable en situaciones con soluciones que varían rápidamente o donde el tamaño del paso es relativamente grande.

4.1. Conclusión: Consideraciones Prácticas en la Elección del Método

La elección entre el método de Euler y RK2 no debería basarse únicamente en la precisión y la estabilidad. Factores como la complejidad del problema, la facilidad de implementación, y los recursos computacionales disponibles también juegan un papel crucial. En la práctica, el método de Euler a menudo se utiliza para obtener una solución rápida y aproximada, que luego puede refinarse utilizando métodos más precisos como RK2.

4.2. Conclusión: Relevancia en Aplicaciones Reales

En aplicaciones del mundo real, especialmente en ingeniería y ciencias físicas, la elección del método numérico adecuado puede tener implicaciones significativas en la calidad y confiabilidad de los resultados. Por ejemplo, en la modelización de sistemas dinámicos o en la simulación de procesos físicos, la precisión y estabilidad ofrecidas por RK2 pueden ser esenciales para obtener resultados válidos y útiles.