



---

# Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

---

**MA2008B.602**

Análisis numérico para la optimización no-lineal

**Escuela de Ingeniería y Ciencias**

Ingeniería en Ciencias de Datos y Matemáticas

## Modelación del movimiento de un edificio ante un sismo

### **Profesores**

Fernando Elizalde Ramírez

Joel Pérez Padrón

Sofía Salinas Obregón

### **Alumnas y alumnos**

Diana Paola Cadena Nito	A01197399
Enrique García Varela	A01705747
Alexis Hernández Spinola	A01275180
Paola Sofía Reyes Mancheno	A00831314
María Fernanda Torres Alcubilla	A01285041

Monterrey, Nuevo León. 13 de junio de 2023.

# Índice

<b>1. Investigación</b>	<b>3</b>
1.1. Características físicas . . . . .	3
1.2. Registros sísmicos . . . . .	4
1.3. Políticas de construcción y su cambio histórico . . . . .	7
1.4. Análisis de costos . . . . .	8
<b>2. Análisis del sistema</b>	<b>9</b>
2.1. Modelación . . . . .	11
2.2. Análisis . . . . .	15
2.3. Simulación . . . . .	17
<b>3. Sistemas de control</b>	<b>20</b>
3.1. Conceptos y herramientas matemáticas involucradas . . . . .	22
3.1.1. Función de transferencia . . . . .	22
3.1.2. Espacio de estados . . . . .	23
3.1.3. Estabilidad: Ceros, polos y criterio de Routh. . . . .	25
3.1.4. Controladores . . . . .	26
3.1.5. Método del lugar de las raíces . . . . .	27
3.2. Diseño del sistema de control . . . . .	30
3.2.1. Análisis matemático . . . . .	30
3.2.2. Simulación . . . . .	32
3.2.3. Análisis de resultados . . . . .	34
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>
4.1. Limitaciones . . . . .	36

## Resumen

La teoría de control es un área de estudios de la ingeniería y ciencias, estudiándose sistemas dinámicos. En el presente reporte se busca modelar el comportamiento de un edificio bajo un temblor; específicamente se modela la Torre Latinoamericana en la Ciudad de México, México. Primero, se establece un marco teórico general acerca de los terremotos en el territorio mexicano así como políticas y costos asociados. Posteriormente, se establecen los conceptos matemáticos correspondientes y se realiza la modelación y el análisis del sistema sin amortiguamiento. Finalmente, se diseña un sistema de control adecuado para su análisis, encontrando los parámetros necesarios para que el edificio modelado sea capaz de soportar terremotos.

**Palabras clave:** *sistemas de control, modelación de edificios, simulación, análisis de sistemas dinámicos, estabilidad*

## 1. Investigación

Los temblores, también denominados como sismos o terremotos, son fenómenos naturales donde existe un movimiento de la corteza terrestre y la liberación de energía. [1]. Estos movimientos suelen ser causados especialmente por la interacción de las placas tectónicas, seguido de erupciones volcánicas, hundimientos en la corteza y deslizamientos a lo largo de fallas. Además, pueden ser estudiados con base a su amplitud, duración y frecuencia con la finalidad de inferir el comportamiento del espacio geográfico. [2]. Principalmente, existen dos tipos de sismos: intraplaca y corticales. Los sismos intraplaca se generan debido a la tensión y compresión en la placa oceánica subducida, teniendo un alto potencial destructivo. Por otro lado, los sismos corticales se dan por la ruptura de la corteza terrestre al interior de una placa tectónica; son generalmente asociados con fallas geológicas. [2].

### 1.1. Características físicas

Como se menciona con anterioridad, los temblores se originan en zonas de interacción entre las placas tectónicas. En México, la mayoría de los sismos son de tipo intraplaca en la costa del océano Pacífico, donde interactúan las placas Cocos y Norteamericana. [2]. Para describir a los sismos, existen ciertos términos importantes de mencionar. En primer lugar, se encuentra el punto específico de la unión de placas tectónicas, así como la proyección de este punto en la superficie terrestre; el primero, lleva el nombre de hipocentro o foco, y el segundo, se llama epicentro. Estos dos puntos pueden identificarse a través de sismogramas, los cuales son gráficas de tiempo-distancia y van registrando las ondas sísmicas que van llegando a diferentes velocidades. [3].

Por otro lado, existen dos tipos de movimientos que pueden suceder en un sismo; el vertical y horizontal. Cerca del epicentro, existe un mayor movimiento vertical que horizontal, lo que le da la atribución de trepidatorio. Mientras que, cuando se aleja del punto de origen, hay una amplificación del movimiento horizontal, por lo que se llama oscilatorio. [3].

Asimismo, cuando llega un terremoto, suele venir acompañado de otros de menor magnitud, los cuales llevan el nombre de réplicas. Este fenómeno se da gracias al reacomodo de las placas tectónicas. Ahora bien, tomando en cuenta zonas donde existen terremotos cada cierto tiempo, existen dos términos importantes a considerar: cuando existe una *quietud sísmica*, que es cuando entre dos terremotos existen sismos de baja magnitud. Y por otra parte, existe el *tiempo de recurrencia*, el cual muestra el tiempo entre dos terremotos. [3].

De manera general, los sismos pueden clasificarse según su *magnitud* la cual comúnmente se mide del 0 al 10 mediante la escala de Richter. Esta magnitud tiene como objetivo “caracterizar el tamaño de un sismo y la energía sísmica liberada” [4] y es medible de forma cuantitativa. Por otro lado, a diferencia de la creencia común, la intensidad de un sismo no es lo mismo que la magnitud, pues esta se refiere a una escala cualitativa (de Mercalli) de los daños provocados a la sociedad. [3].

Con respecto a la magnitud, esta escala es la que comúnmente se maneja, sobre todo por el hecho de ser cuantitativa. Es importante señalar que no existe un solo tipo de magnitud, pues existen 7 y se diferencian por la metodología utilizada; no obstante, todas estas variantes manejan una escala logarítmica, donde la diferencia de una unidad representa un aumento de la raíz cuadrada de mil, la cual es aproximadamente 32. [4].

Entre algunos de los diferentes tipos de magnitud se encuentran los siguientes:

- **Magnitud local**

$$M_L$$

Mejor conocida como la magnitud de Richter, esta se ha dejado de utilizar en la actualidad por ciertas limitaciones. [4] Se creó en California donde se mide la máxima amplitud que se registra en un sismógrafo Wood Anderson, con un factor de amortiguamiento del 0.8. [5]

- **Magnitud de Coda**

$$M_c$$

La magnitud de Coda mide la señal tardía que disminuye desde que el sismo como tal ha parado y los movimientos tectónicos han llegado al nivel previo al sismo. “La duración de la *coda* es proporcional al tamaño del sismo, aunque puede verse afectada por otros factores” [4]

- **Magnitud de ondas de cuerpo**

$$M_B$$

Esta magnitud mide la amplitud máxima en el sismograma con oscilaciones de 1 segundo. No obstante, para sismos con magnitudes superiores a 6.5, la magnitud de ondas de cuerpo no puede ser utilizada. [4] Además, cuando los sismos tienen una profundidad focal de más de 50 km, se debe aplicar un factor de corrección, ya que las ondas no tienen la suficiente amplitud y por ende la medición pierde exactitud.

- **Magnitud de momento**

$$M_w$$

Esta magnitud más confiable en la actualidad, y por lo mismo es bastante compleja. Se necesita entre los primeros 15 a 30 minutos después del temblor para hacer las mediciones, y se obtiene a través del momento sísmico. Este momento representa la rigidez de la roca, el desplazamiento y el área que recibió la fractura. [4] [5]

## 1.2. Registros sísmicos

Los sismómetros son instrumentos que permiten medir los movimientos del suelo con demasiada precisión, son capaces de identificar el momento exacto de inicio y fin de un sismo. [6]. No obstante, el valor obtenido por medio de un sismómetro y la percepción de una persona ante un temblor tiene una varianza significativa. Esto se debe principalmente a la distancia al epicentro y el tipo de terreno y construcción donde se encuentre la persona al momento del temblor. De igual manera, cabe destacar que las personas

únicamente son capaces de percibir los puntos más intensos del movimiento de las placas por lo que no se puede establecer un valor fijo para la duración de los sismos. [6].

De acuerdo a diversos estudios, se podría relacionar la profundidad del sismo con la duración de este por medio de frecuencias. Sin embargo, esta relación no toma en consideración otros factores que influyen por lo que no se puede considerar como un modelo confiable. Los temblores se dan al liberar estrés en forma de energía, es posible que exista una alta liberación de energía en un largo periodo de tiempo pero también en un corto periodo de tiempo. [7]. Así como no es físicamente posible predecir cuándo sucederá un sismo, tampoco se puede establecer una relación directa entre la duración del mismo con alguna otra característica.

Además del tipo de movimiento de las placas tectónicas, los sismos pueden ser clasificados de acuerdo a su intensidad en términos de la magnitud registrada. Para clasificar los sismos en el territorio mexicano en los últimos 10 años, se tomaron datos del Servicio Sismológico Nacional desde el 7 de marzo de 2013 hasta el 7 de marzo de 2023 y se establecieron los siguientes rangos de magnitud:

- Menor a 3.5
- Daños menores [3.5, 5.5]
- Daños ligeros ocasionados a edificios (5.5, 6.0]
- Daños severos en áreas pobladas (6.0, 6.9]
- Terremotos mayores de 7.0 en adelante

En la siguiente imagen, se puede observar una visualización general de las magnitudes de los sismos en México. [8].

Sismos en México 2013-2023

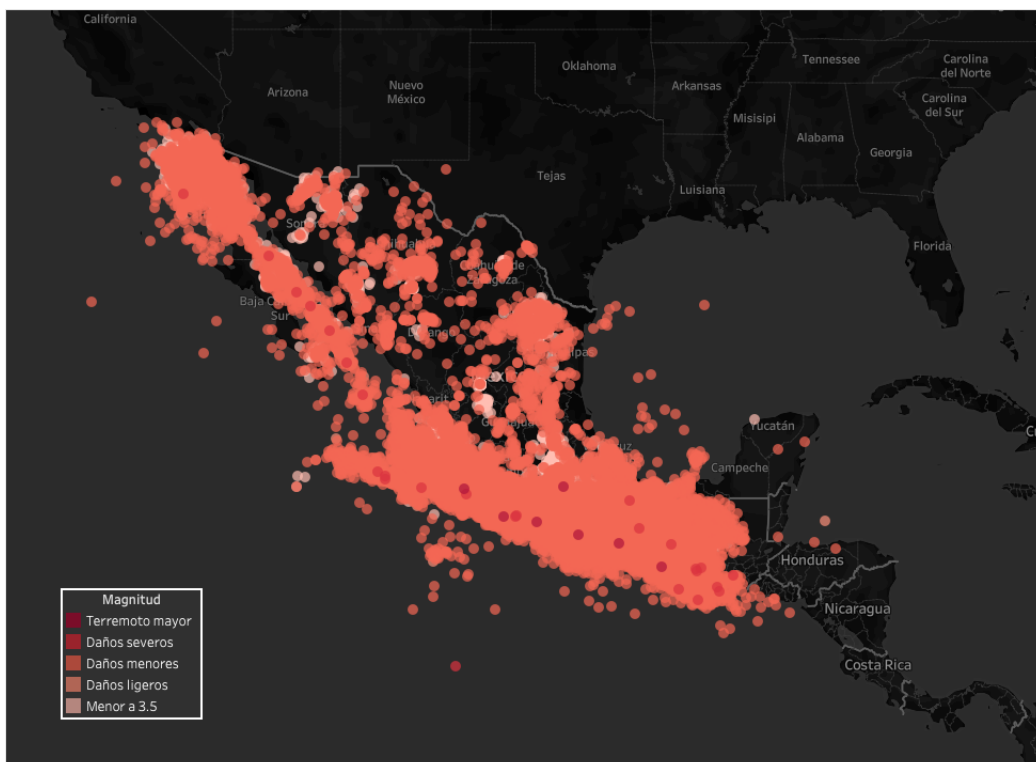


Figura 1: Sismos en México

Debido a que los movimientos de las placas tectónicas menores a 3.5 no suelen ser de significancia, se puede omitir esta categoría. La visualización por cada uno de los rangos previamente mencionados se muestra a continuación.

Sismos en México 2013-2023

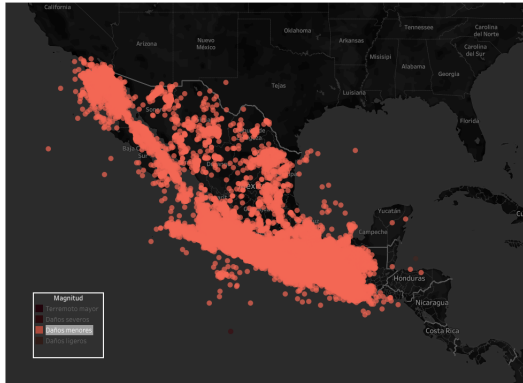


Figura 2: Magnitud 0.35 a 5.5.

Sismos en México 2013-2023

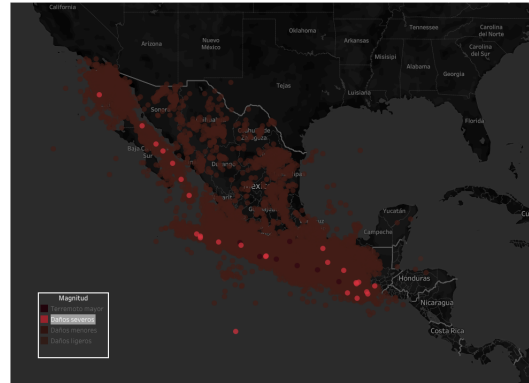


Figura 4: Magnitud 6.0 a 6.9.

Sismos en México 2013-2023

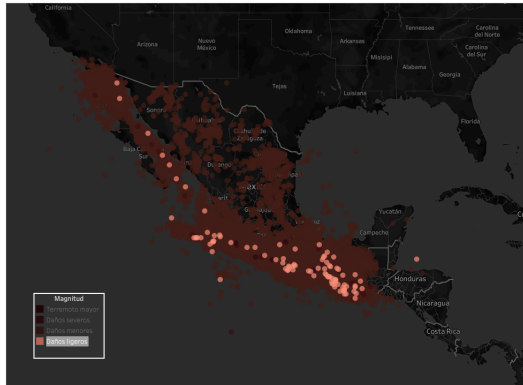


Figura 3: Magnitud 5.5 a 6.0.

Sismos en México 2013-2023

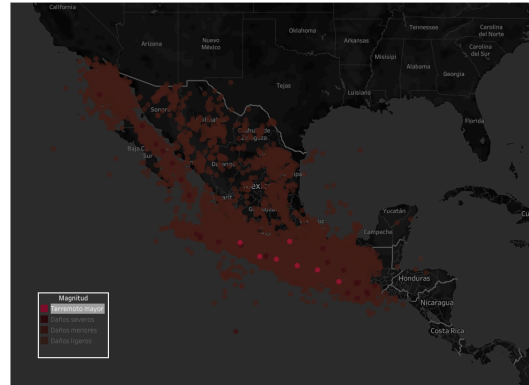


Figura 5: Magnitud 7.0 en adelante.

Como se puede observar en los mapas generados, la mayoría de los sismos de magnitud mayor a 5.5 suceden en la costa Pacífico del país. Justo en esta zona es donde existe la interacción entre la placa Norteamericana y otras, como se mencionó con anterioridad. Con la finalidad de otorgar un punto de referencia, se muestra una imagen de la ubicación de las distintas placas tectónicas que interactúan en el territorio mexicano.

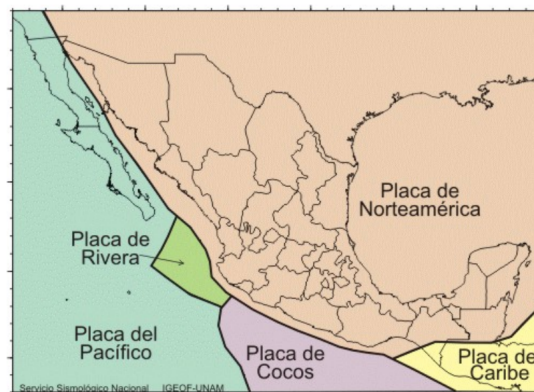


Figura 6: Placas tectónicas en México. [6].

### 1.3. Políticas de construcción y su cambio histórico

Debido a las distintas implicaciones sociales y económicas que tienen los derrumbes de edificios y estructuras generados por sismos, se deben establecer normativas enfocadas a la construcción en zonas sísmicas; en este caso, se estará trabajando específicamente con la Ciudad de México. Actualmente, la última normatividad sísmica para la Ciudad de México fue actualizada en junio del 2020. [9]. Esta tiene el propósito de establecer las políticas de resguardar la seguridad pública y fallas estructurales de alto impacto. Sin embargo, no cubre posibles daños que puedan sufrir las estructuras del edificio en cuestiones económicas. En los siguientes párrafos se establece un resumen de estas políticas.

Cabe destacar, que esta normatividad está basada en un análisis estático, que estará evaluando las fuerzas aplicadas sobre la estructura en un momento determinado. Y en el dinámico el cual es el comportamiento de todas las fuerzas a través del tiempo, siendo este el que sirve para medir el comportamiento del edificio a través de vibraciones, como es el sismo o vientos. Este segundo análisis se divide en la parte de dinámica modal y la dinámica no lineal.

Con respecto al sistema estructural este está dado para los materiales de concreto reforzado, acero y mampostería. En esta se dan los valores necesarios para el factor de comportamiento sísmico y distorsión límite, los cuales están haciendo referencia a la deformación lateral que hay entre cada material y dependen también del tipo de estructura que se esté buscando construir.

Así mismo, se establecen las medidas necesarias para cumplir el análisis dinámico, el cual establece que un modelo que permita la respuesta del sistema considerando la demanda sísmica. De modo que permita una vibración adecuada para cada piso, tomando en cuenta los efectos de torsión, de segundo orden, bidireccional y comportamiento asimétrico. Siendo el análisis aplicado para la estructura y cimentación.

Relacionado al diseño de cimentación, es necesario que estos cumplan con la característica de la sobre-resistencia. El cual es un factor, que se estará multiplicando por el resultado del análisis de estructura. Además, es un requisito tomar en cuenta los miembros críticos, los cuales si estos se rompen, el resto de la construcción colapsa. Siendo estas zapatas aisladas, pilotes y anclas. Siendo más puntuales en la dinámica, por la parte del análisis modal, este hace referencia al modo de vibración que hay dentro de cada periodo. De modo que el peso entre cada vibración tiene que ser por lo menos un 90 % igual al anterior, a la que se le conoce como masa participativa.

Por otro lado, el análisis dinámico no lineal presenta historias de tiempo para simular el comportamiento de los desplazamientos y fuerzas al momento de presentarse un sismo. Para cumplir con esto se requiere de ocho análisis que cumplan con la combinación de direcciones de la cortante basal (fuerzas totales del sismo) y las fuerzas ortogonales aplicada por la estructura del edificio. Para el mismo, también es necesario que cumpla con los espectros de peligro uniforme, siendo este el escenario donde haya un sismo de magnitud 7.5 y distancia de 150 km y el escenario de 7.8 con distancia de 256km.

Según el registro en el artículo [10] la primera normatividad fue creada en 1920 en el que inicialmente se tenía una cantidad de pisos y perímetro de construcción por zona. Más adelante, el reglamento de construcciones de 1940 se solicitaba por tener resistencia ante fuerzas laterales iguales al 4 % de su propio peso.

A continuación, debido al alto impacto del sismo de 1957 se realizaron con las Normas de Emergencia y seguridad estructural, incorporado los análisis de cimentación estudios y geotécnicos. Así como la figura de Director Responsable de Obra (DRO)[11]. Después en 1960 se hizo un Folleto que especificaba el comportamiento dinámico requerido para las estructuras el cual servía como complemento a la normatividad.

Para 1977 se realiza otra actualización sobre las normas, para regular el diseño sobre estructuras de concreto, mampostería, acero y madera. Más adelante, se actualizan los reglamentos, en 1978, con el que se inicia los "estados límite" para identificar analíticamente cuando la estructura no estaría soportando escenarios de riesgo. [12]. El siguiente cambio, viene tras las altas afectaciones que hubo en el sismo de 1985 con el que la normatividad busca ser más puntual.

Para el siguiente siglo, en 2004 se hace una actualización dado el desarrollo tecnológicos. A partir de este último documento el reglamento de construcción ha tenido cambios en el 2017 y actualmente se tiene el del 2021. Por otra parte, están las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño por Sismo con última actualización en el 2020. [11].

## 1.4. Análisis de costos

La construcción de edificios requiere del desarrollo de un presupuesto, lo cual es la suma de los costos directos e indirectos y el costo preliminar es calculado por los costos de proyectos similares en la misma región. Sin embargo, la investigación de estos proyectos similares solo es de carácter informativo, puesto que aunque se piense en diseñar un edificio con características casi idénticas, la forma del terreno y la orientación del edificio podrían suponer grandes diferencias financieras entre los proyectos. Esta estimación normalmente se expresa en parámetros de  $m^2$ ,  $m^3$  de área cubierta, unidades de obra o  $m^2$  de muros, losas, etc. [13].

El análisis de costo es la evaluación de manera general de un proceso determinado y se caracteriza por ser un aproximado (ya que no hay dos construcciones iguales), específico para cada construcción, dinámico (debido a las actualizaciones de los materiales y herramientas) y se puede elaborar de manera inductiva o deductiva. [13].

Los costos directos finales son aquellos gastos técnico-administrativos, como el material, mano de obra, equipo y subproductos para la construcción y los costos indirectos en la obra son los gastos que son aplicables a todos los conceptos de una construcción. [13].

El costo directo se puede calcular de dos maneras, por ensamble y unitario, en el primero se analiza por separado cada elemento de una obra y después se integran de acuerdo al proyecto, esto te brinda adaptabilidad y flexibilidad para el costo final estimado de la obra, el cual resulta con una aproximación del 20 %. Por otro lado, el cálculo del costo unitario se da a través de análisis y revisión de planos, el cual contará con una aproximación del 10 %. [13].

Existen diferentes tipos de construcciones, las cuales son: habitacional o residencial, edificación, pesada, urbana o industrial. Así como, las personas encargadas del desarrollo tienen que tomar en cuenta también la calidad de la construcción deseada, siendo posible escoger entre interés social, calidad media, lujo, etc. Para este análisis se hará referencia a la edificación de tipo oficinas y comercio, Complejo City Angelopolis, ubicado en Cholula, Puebla. [13].

Este edificio está conformado por dos edificios de 8 y 12 niveles con una altura de 39.40 mts y 52.50 mts respectivamente. Se cuentan con dos niveles subterráneos de estacionamiento, recepción, terrazas, planta baja de uso comercial, restaurante con terraza, 6 niveles de oficinas en el edificio A y 10 en el edificio B. En total, el edificio A cuenta con 7,797.19  $m^2$  y el edificio B con 6,662.86  $m^2$ . Para el análisis de costos se hicieron uso de dos métodos, por ensamble y unitario. [13].

El costo directo por ensamble se dividió en dos etapas, primero la cimentación y estructura de concreto armado en los estacionamientos con un costo de \$3,023.61 por  $m^2$ , en la cual se consideraba la excavación



general, cimentación pisos de concreto y la estructura de concreto estacionamiento 1 y 2. La segunda etapa, la estructura de acero y muros de cortante de acero armado con un costo de \$3,510.47 por  $m^2$ , en el cual se consideraban todos los pisos de los edificios A y B. En total, el costo directo por ensamble resultó de \$59,675,519.62. [13].

Por otro lado, el costo directo unitario calculado fue de \$61,478,336.89. Para su cálculo se tuvieron dos etapas, la subestructura y estructura, las cuales se dividían en distintos apartados que se desarrollaban por actividades con su costo por unidad y total, los apartados considerados son los siguientes:

- Terracerías
- Cimentación
- Pisos de concreto
- Estructura de concreto estacionamiento 1 y 2
- Losaceso y losa de compresión
- Estructura de acero y muros de cortante

La comparación entre ambos métodos es útil para conocer la diferencia o similitud para el costo final de la construcción, lo cual servirá para la evaluación y selección de las mejores alternativas en el desarrollo. Sin embargo, el análisis de costo siempre va a tener un margen de error inversamente proporcional a la diferencia de tiempo que existe entre la fecha en que se propone el diseño del proyecto y la fecha en que se pone en marcha la construcción. Es decir, entre más cercano se este de comenzar el edificio, el precio pronosticado también será más exacto, debido a que hay un número de gastos variables que pueden cambiar debido a factores como inflación y desabastecimiento, que pudieran aumentar el costo de la obra considerablemente. Un análisis de costos por más profundo que sea, debe ser considerado más como una guía que le permita al grupo inversionista o institución pública definir un presupuesto inicial y tener en cuenta un porcentaje con el cual puede aumentar dicha cifra.

## 2. Análisis del sistema

La Torre Latinoamericana es un rascacielos ubicado en el Centro Histórico de la Ciudad de México y se ha convertido en uno de los edificios más emblemáticos de la ciudad. [14] Este edificio, contando su antena de televisión, mide al rededor de 181 metros de altura y cuenta con 44 pisos, pesando aproximadamente 25,000 toneladas. [14]. Se dice que la Torre Latinoamericana se ha vuelto en uno de los edificios más emblemáticos de la ciudad debido a su resistencia a los sismos; fue el rascacielos más alto que se construyó, fuera de Estados Unidos, en una zona de alto riesgo sísmico en 1956. Hasta la fecha, ha soportado los tres sismos de 1957, 1985 y 2017, haciéndolo uno de los edificios más seguros en zonas sísmicas. [15].

En 1957, obtuvo un reconocimiento por parte del *American Institute of Steel Construction* al ser el edificio más alto, en su momento, a ser expuesto a un terremoto de 7.8. En 1985, el edificio resistió un máximo de 8.1 en la escala de Richter donde la duración del terremoto rondó los 2 minutos. [14]. Al estar situado en una zona de alto riesgo sísmico, como se ha mencionado anteriormente, el edificio debe estar preparado para resistir sismos de alta magnitud y duración. Esto se debe a su diseño dinámico y a cuatro factores principales: la cimentación con apoyo directo de 361 pilotes de concreto colocados a 33 metros de profundidad, el principio de flotación conformado por 3 pisos de sótano que actúan como cajones hidráulicos, el principio de compensación a través de la sustitución de masas y su estructura de acero.

[15]. Todos estos factores juntos facilitan la absorción de las vibraciones que son producidas durante un sismo, disminuyendo considerablemente sus efectos.

De manera general, las estructuras de acero son ampliamente utilizadas para la construcción de edificios sismorresistentes debido a su alta ductilidad y resistencia. [16]. Cuando materiales con estas cualidades son sometidos a cargas cíclicas, se disipa una cantidad de energía por cada ciclo mientras el material se encuentre en su rango plástico. Conforme va disminuyendo la velocidad del movimiento, la tensión y deformación van disminuyendo de igual forma. Es conveniente que la ductilidad del acero sea elevada ya que, entre mayor posibilidad de deformación en el rango plástico, menos probabilidad de que la estructura colapse. [16].

No obstante, para que un edificio esté lo suficientemente bien estructurado para contrarrestar los movimientos generados por sismos, se deben analizar estos últimos así como distintos factores geográficos previo a la construcción propia del edificio. Los sismos, debido a sus movimientos, generan ondas sísmicas con vibraciones tanto horizontales como verticales. [16]. Las vibraciones horizontales también son denominadas como fuerzas de inercia, las cuales son proporcionales al peso muerto de la estructura y vienen siendo las más dañinas para los edificios. Otros factores importantes a tomar en consideración son el periodo de vibración del edificio así como su capacidad de absorber la energía. [16]. En el caso de la Torre Latinoamericana, cada piso del edificio tiene un periodo de vibración de más de cuatro segundos mientras que el suelo se mueve a 2.5 segundos, haciendo que se mantenga la Torre Latinoamericana. [17]. Si el edificio tuviera el mismo periodo de vibración que el suelo, este entraría en resonancia y simplemente se aumentarían los efectos del movimiento tectónico.

Debido a que, bajo un sismo, el comportamiento del edificio se vuelve un sistema dinámico, se puede representar y analizar este mismo a través de modelos matemáticos con las mismas características. Al ocurrir un sismo, se produce un desplazamiento en la estructura, generando a su vez una velocidad y aceleración por lo que se puede decir que produce energía cinética. [16]. Asimismo, en estos sistemas se cuenta con una fuerza de inercia, de deformación y de amortiguación; estas fuerzas hacen referencia a la masa, rigidez y a la histéresis de la estructura respectivamente. Para el cálculo de la respuesta de este sistema, se requiere la mecánica de Newton, específicamente la Segunda Ley, así como la ley de Hooke. [18]. Partiendo de la leyes recién mencionadas, se obtiene una ecuación de equilibrio dinámico, siendo esta una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes entre las fuerzas y de una sola variable. [16].

Para determinar la estabilidad del sistema propuesto, se deben analizar las raíces del polinomio asociado así como el tipo de amortiguamiento presente. [18]. Debido a que se estará trabajando con un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con movimiento forzado debido a las ondas sísmicas, la solución del sistema involucra una parte homogénea y otra particular. Cuando el sistema no está amortiguado, o el valor es muy bajo, se da una superposición de dos oscilaciones armónicas. Esto hace que el sistema caiga en resonancia y no haya estabilidad, haciendo que puedan llegar a estar bajo vibraciones capaces de destruir el sistema. [18]. En el caso de que el sistema sí esté amortiguado, dependerá de la relación entre la fuerza de amortiguamiento, la masa y la constante de elasticidad del resorte qué tanto tiempo le toma estabilizarse. Con la finalidad de conocer más a fondo el comportamiento del sistema, se deben considerar otros factores junto con la relación entre los distintos pisos del edificio; esto mismo se desarrollará en el siguiente apartado.

Generalmente hablando, los modelos matemáticos son de gran utilidad para la representación de una situación real y su manipulación más sencilla. En el caso de la representación del comportamiento de un edificio bajo ondas sísmicas, la modelación de sistemas así puede resultar en un tema de seguridad pública. Una vez establecido un modelo matemático capaz de representar correctamente el comportamiento de

un sistema así, se puede estudiar y analizar para lograr determinar distintas áreas de oportunidad en el diseño de un edificio o posibles mejoras en otros aspectos. La relevancia de esto aumenta en zonas de alto riesgo sísmico, pues la caída de un edificio puede conllevar a diversas repercusiones legales. De manera general, si se sabe cómo será el comportamiento de un edificio durante un terremoto y este resulta poco favorable, se pueden hacer adaptaciones previas a su construcción. De esta forma, se estarían ahorrando distintos tipos recursos y su construcción resultaría en mayor seguridad.

## 2.1. Modelación

Para el modelado adecuado del comportamiento de un edificio bajo ondas sísmicas, se deben tener en consideración la Ley de Hooke y la segunda ley de Newton; como se mencionó con anterioridad. La Ley de Hooke establece una relación entre un resorte y una masa sujeta y la fuerza de recuperación. [18].

$$F = -ks \quad (1)$$

donde

$k$  es la constante de elasticidad del resorte, y  
 $s$  es la elongación del resorte.

La segunda ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración en un sistema en movimiento; como se busca que el sistema esté en equilibrio, esta se puede escribir de la siguiente manera. [18].

$$mg - ks = 0 \quad (2)$$

donde

$m$  es la masa, y  
 $g$  es la gravedad.

En este caso, se está trabajando con un sistema masa-resorte. Cuando el cuerpo está en reposo, únicamente están actuando las fuerzas gravitacionales y del resorte de manera que están en equilibrio.

$$F_1 + F_2 = mg - ks = 0 \quad (3)$$

Cuando existe un desplazamiento, este se denota por  $x(t)$  y se produce una fuerza adicional en el sistema  $-kx$ ; entonces la ecuación 3 puede reescribirse como

$$F_1 + F_2 - kx = -kx$$

Asimismo, si el sistema se encuentra amortiguado, se incluye una tercera fuerza referente a esto mismo.

$$F_3 = -c\dot{x}$$

Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son

$$F_1 + F_2 + F_3 = -kx - c\dot{x}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación.

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad (4)$$

En caso de que el sistema se encuentre en reposo, se tiene

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

No obstante, se estará trabajando con movimientos forzados debido a una fuerza externa  $f(t)$ , por lo que la ecuación que modela el sistema masa-resorte es la siguiente. [18].

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (6)$$

donde

$m\ddot{x}$  es la fuerza inercial,

$c\dot{x}$  es la fuerza de amortiguamiento,

$kx$  es la fuerza elástica, y

$f(t)$  es la fuerza externa a la estructura.

De igual manera, se está considerando una entrada periódica por lo que se puede establecer que

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

donde tanto  $F_0$  como  $\omega$  son mayores a cero.

El desarrollo anterior se puede considerar para un edificio de un solo piso pero se busca modelar un edificio de  $n$  pisos. Para esto, se asume que el  $i$ -ésimo piso tiene una masa  $m_i$  y todos los pisos están conectados por un conector elástico cuyo efecto es similar al de un resorte. Asimismo, cada conector proporciona una fuerza de restauración dada por

$$F_r = k_i (x_{i+1} - x_i) \quad (7)$$

donde

$x_i$  representa el desplazamiento horizontal del  $i$ -ésimo piso.

Otros supuestos que se toman para la modelación del sistema es que la masa es un punto centrado en cada piso y que las oscilaciones debido a los sismos producen una fuerza  $mF_0\omega^2 \cos(\omega t)$  en cada piso. Retomando la segunda ley de Newton, se obtienen las siguientes ecuaciones. [19].

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1(t) &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + m_1F_0\omega^2\cos(\omega t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + m_2F_0\omega^2\cos(\omega t) \\ m_3\ddot{x}_3(t) &= -k_3(x_3 - x_2) + k_4(x_4 - x_3) - c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + m_3F_0\omega^2\cos(\omega t) \\ &\vdots \\ m_n\ddot{x}_n(t) &= -k_n(x_n - x_{n-1}) + k_{n+1}(x_{n+1} - x_n) - c_{n-1}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}) + m_nF_0\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede reescribirse de manera matricial, como se muestra a continuación. [20].

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n-1}(t) \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & -(c_1 + c_2) & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -(c_2 + c_3) & c_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(c_{n-1} + c_n) & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & -c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(k_{n-1} + k_n) & k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 F_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_2 F_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_3 F_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ \vdots \\ m_{n-1} F_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_n F_0 \omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Este sistema puede ser expresado a la vez como

$$M\ddot{x}(t) = C\dot{x}(t) + Kx(t) + F(t) \quad (8)$$

donde

$M$  es la matriz de masas,

$\ddot{x}(t)$  es el vector de aceleración,

$C$  es la matriz de amortiguamiento,

$\dot{x}(t)$  es el vector de velocidad,

$K$  es la matriz de rigidez,

$x(t)$  es el vector de desplazamiento, y

$F(t)$  es la fuerza externa aplicada a cada piso.

Para encontrar las soluciones del sistema descrito por la ecuación 8, se puede hacer un cambio de variable para pasar de un sistema de segundo orden a uno de primer orden; esto también puede considerarse como su representación en espacio de estados. [20]. Se definen dos vectores de variables de estado  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  de la siguiente forma.

$$x_{1,i} = x_i(t), \quad i = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$x_{2,i} = \dot{x}_i(t), \quad i = \{1, 2, \dots, n\}$$

Entonces,

$$\mathbf{x}_1 = y \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{x}}_2 \quad (11)$$

En la ecuación 8, se sustituyen los vectores correspondientes a las ecuaciones 10 y 11 para posteriormente despejar su equivalente a  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ .

$$M\dot{\mathbf{x}}_2 = C\mathbf{x}_2 + K\mathbf{x}_1 + F(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = M^{-1}C\mathbf{x}_2 + M^{-1}K\mathbf{x}_1 + M^{-1}F(t)$$

El vector de estado  $\mathbf{x}$  queda definido como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose las siguientes ecuaciones finales. [20].

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + EF(t) \quad (12)$$

$$y(t) = G\mathbf{x}(t) \quad (13)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \vdots & \dots \\ M^{-1}K & \vdots & M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k \\ \dots \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}$$

donde

$\mathbf{I}$  es la matriz identidad,

$\mathbf{0}_n$  es una matriz de ceros de dimensión  $n \times n$ , y

$\mathbf{0}_k$  es una matriz de ceros de dimensión  $n \times k$ .

Retomando los datos de la Torre Latinoamericana, se asume que el peso total de 25,000 toneladas está distribuido uniformemente a través de los 44 pisos; entonces  $m_i \approx 568.18182$  toneladas. Por otro lado, se indica que la estructura del edificio esta realizada de acero, el cual cuenta con una tensión de límite elástico igual a  $275 \text{ N/mm}^2$ . [21]. No obstante, se estará tomando el valor de la constante de elasticidad como 10 veces el valor de la masa, por lo que  $k_i = 5681.8182$  unidades. Este valor se asumirá como igual en todos los pisos y se estará trabajando con un sistema sin amortiguamiento como parte del primer acercamiento al sistema. Por lo tanto, las matrices que representan el sistema quedan como

$$M = \begin{bmatrix} 568.18 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 568.18 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 568.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 568.18 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -11.36 & 5.68 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5.68 & -11.36 & 5.68 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -11.36 & 5.68 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5.68 & -5.61 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 568.18 \cdot F_0 \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \\ 568.18 \cdot F_0 \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \\ \vdots \\ 568.18 \cdot F_0 \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \\ 568.18 \cdot F_0 \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

donde  $M$  y  $K$  tienen una dimensión de  $44 \times 44$ ,  $F(t)$  de  $44 \times 1$  y  $K$  está en escala  $10^3$ .

## 2.2. Análisis

De este modo, podría comenzar la modelación planteando la estructura de un edificio con dos pisos. De tal forma, que la transformación al sistema de ecuaciones de primer orden quedara de la siguiente forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

Así, los valores propios de la matriz  $A$  asociada al sistema de primer orden, son la siguiente ecuación.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & -\lambda & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + \frac{3k}{m}\lambda^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

donde las raíces quedan como

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k(\sqrt{5}-3)}{2m}}i$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m}}i$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{k(\sqrt{5}-3)}{2m}}i$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m}}i$$

Es con lo anterior que se logra identificar que los *eigenvalores* de la matriz  $A$  sus resultados son valores

imaginarios sin parte real, lo cual describe que el sistema por todo el tiempo se mantendrá oscilando. Entonces, podríamos decir que se mantiene su estructura siempre y cuando la amplitud de la onda generada por el movimiento oscilatorio, no rebase su capacidad máxima de desplazamiento. De manera similar sucede para el caso del edificio con tres pisos. De la que se tuviera la matriz de rigidez:

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde la matriz  $A$  para el sistema de primer orden es la siguiente:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \quad (15)$$

Y los valores propios del sistema serán obtenidos, dados la ecuación 15.

$$|(A - \lambda I)| = \lambda^6 + \frac{5k}{m}\lambda^4 + \frac{6k^2}{m^2}\lambda^2 + \frac{k^3}{m^3} = 0$$

Con ayuda del software *Wolfram*, se obtiene la siguiente aproximación de los valores propios.

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} 0.44504i$$

$$\lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} 1.2469i$$

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} 1.8019i$$

De este modo, se puede observar que el valor propio es un número complejo con parte real igual a cero. Entonces, se puede establecer que el edificio, de misma forma que con el de dos pisos, solo estará oscilando. Los resultados anteriores, tienen que ver con que en la modelación no se está incluyendo el factor de amortiguamiento, sino solo la elasticidad. Por lo que para este caso, para cualquier valor de  $k$  y  $m$  que se tomará el edificio continuaría oscilando.

Para profundizar, se busca determinar las frecuencias y periodos de vibración naturales que estén determinadas por el movimiento armónico simple. De forma que el periodo de vibración natural sea la posición del edificio que tarda  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  hercios en completar una oscilación. Para hallar la frecuencia natural, se usa la fórmula  $\omega = \sqrt{-\lambda}$ , donde solo hace falta sustituir los valores de  $k$  y  $m$  en los eigenvalores correspondientes a la matriz original de rigidez 14. Una vez realizado esto, se puede hallar la frecuencia natural para cada piso.



Debido a que no se conocen propiamente las características del edificio de 3 pisos, para la simulación realizada con el software *MATLAB* se toman tres valores distintos para  $k$ . Esto con la finalidad de observar el comportamiento de la frecuencia y el periodo natural por cada piso; considerando la masa variable para cada nivel del edificio los valores iniciales de esta son 957.1507, 933.4382, 910.5097. Se obtuvieron los valores mostrados en las siguientes tablas.

Piso	K=8	K=275	K=5681.8182
1	0.04141	0.2428	1.1037
2	0.1151	0.6751	3.0684
3	0.1663	0.9752	4.4326

Cuadro 1: Frecuencia natural para cada piso

Piso	K=8	K=275	K=5681.8182
1	151.6945	25.8731	5.6924
2	54.5666	9.3069	2.0476
3	37.7731	6.4426	1.4174

Cuadro 2: Periodo natural para cada piso en segundos

Para que este edificio, asumiendo tres pisos, pueda resistir un terremoto de cinco segundos, se deben considerar varios factores como la intensidad y el periodo natural del mismo. Para efectos analíticos, el edificio tiene las mismas características de la Torre Latinoamericana en cuanto a masa, pero carece de altura. Esto implica que periodos de vibración del suelo altos ocasionen un mayor daño en su estructura y, dependiendo de qué tipo de suelo sea el cimiento, se podría verificar si el edificio aguantaría las vibraciones sísmicas o no [22]. Sin embargo, en la simulación que se explicará a continuación, se muestra que existe un intervalo de  $k$  donde el edificio tiene un desplazamiento estable y en menos de 10 centímetros. Por lo que este valor se propone sea  $\geq 8$ , para así asegurar que el edificio sea capaz de sobrellevar un terremoto. Además, se asume que el edificio de 3 pisos se encuentra en la misma zona que la Torre Latinoamericana; esta una zona que tiene un periodo de vibración alto de aproximadamente 3.7 segundos. [21]. Tomando esto en consideración, el edificio modelado hasta el momento aguantaría el terremoto debido a que no es tan vulnerable a periodos de vibración de más de 2 segundos. [14].

### 2.3. Simulación

Para realizar la simulación, se consideró un edificio de 3 pisos con una masa de 568.18182 toneladas cada uno. A pesar de que el factor de elasticidad viene dado en la documentación como un valor de 275, para fines de la simulación, se buscó el rango de  $k$  donde la oscilación de los pisos del edificio sea menor a un valor asignado. Esto mismo se consigue a través del análisis posterior.

Para fines de visualización, se graficaron las amplitudes máximas, medidas en centímetros, en dos rangos de  $k$ . La gráfica 7 muestra el primer rango, tomando valores de 0 a 100. Por otro lado, la gráfica 8 se visualiza el rango de 101 a 6000, donde en este último se incluye al valor sugerido de  $k$  de 10 veces la masa.

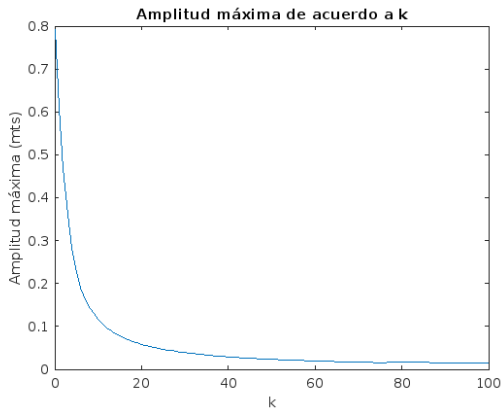


Figura 7: Amplitud máxima cuando  $0 \leq k \leq 100$

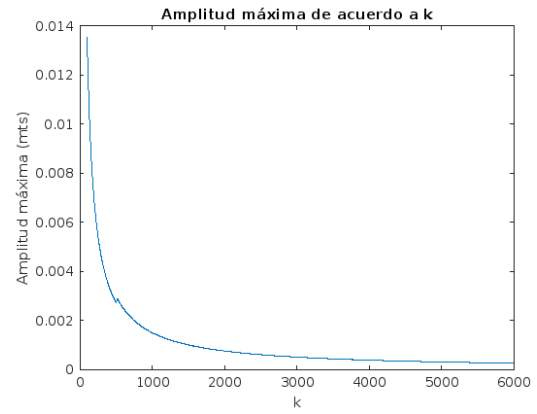


Figura 8: Amplitud máxima cuando  $1000 < k \leq 6000$

En la gráfica 7, se puede observar que cuando  $k$  toma valores entre 0 y 10, la amplitud máxima sobrepasa los 10cm y rápidamente desciende mientras los valores de  $k$  aumentan. En la gráfica 8, se empieza con una amplitud cercana a 1.4 cm y sigue el mismo comportamiento de descenso, a excepción del rango donde  $k$  toma valores entre 506 y 522. En este último rango, la amplitud máxima aumenta 0.161 mm y empieza a descender nuevamente.

Como se puede observar en la gráfica 7, si se separan los valores de  $k$  en dos rangos, el primero cuando va entre 0 y 10 y el segundo con el resto de los valores, se puede ver un cambio en su comportamiento. Este cambio se observa específicamente en su razón de cambio, es por esto que se decidió hacer un análisis de las pendientes entre los valores de  $k$  de 0 a 30. Este análisis se muestra en la gráfica 9 y se observa que la razón de cambio entre los valores de  $k = 8$  y  $k = 7$  es cuando la curva se empieza a comportar de manera diferente. Por ende, para los análisis posteriores se estará trabajando con un rango donde  $k \geq 8$ .

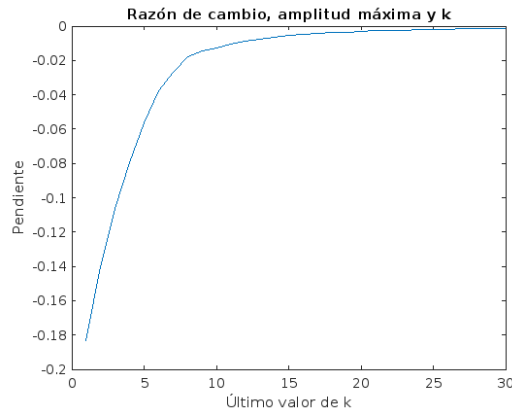


Figura 9: Pendiente de la amplitud máxima de 2 valores consecutivos de  $k$

Los periodos de vibración naturales para cada piso se obtuvieron con las funciones de transferencia de cada piso y la función de *MATLAB*, *step*, la cual grafica la oscilación de los pisos cuando no existe ninguna fuerza externa aplicada al edificio. Con esto, a partir de los mínimos locales, se encontró el tiempo que se demoraba en completarse un ciclo. En cuanto a las frecuencias naturales, sus valores son el recíproco de cada periodo de vibración. En la gráfica 10, se muestran los periodos naturales de cada piso de acuerdo a su valor de  $k$ . Con el mismo formato en la gráfica 11, se muestran las frecuencias naturales. Debido a las limitaciones propias del software, no es posible graficar cuando  $k$  tiende al infinito por lo que se estableció un valor elevado de  $k$ . El valor establecido fue  $k = 6,000$ , el cual resulta ser mayor a 10 veces la masa de cada piso.

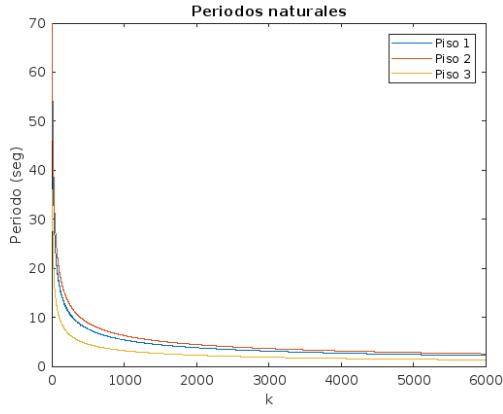


Figura 10: Periodos naturales

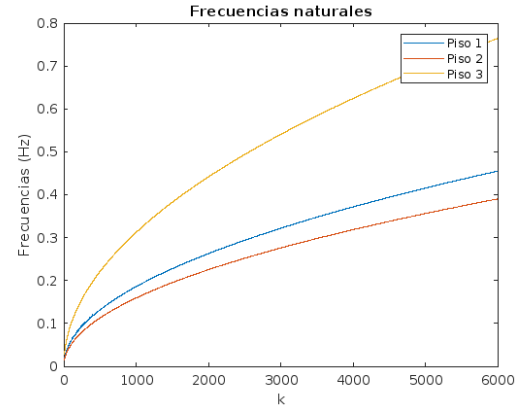


Figura 11: Frecuencias naturales

Las amplitudes de las oscilaciones periódicas de cada piso se graficaron con distintos valores de  $k$ , con la finalidad de observar cómo se comportaría cada piso del edificio a través del tiempo con el rango de  $k$  obtenido anteriormente. En las gráficas 12, 13 y 14 se observa el primer rango para  $k$ , de 8 a 100, con un paso de 10. De forma general, al comparar las oscilaciones de los tres pisos, se puede observar como, al ir aumentando pisos, el movimiento se vuelve más complejo; donde la forma sinusoidal del primer piso va deformándose hasta tener una especie de picos más pequeños dentro de un periodo de onda. Esta observación será de gran importancia más adelante al modelar al edificio en su totalidad.

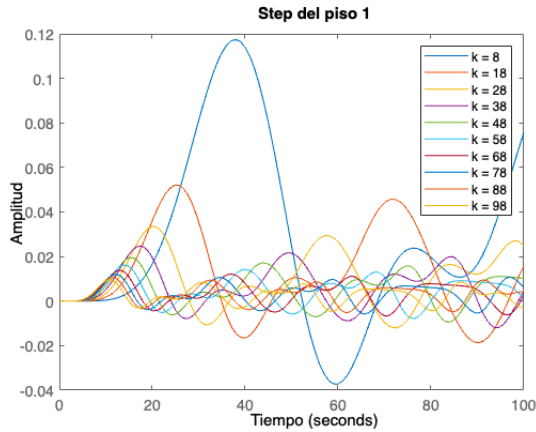


Figura 12: Step Piso 1 -  $8 \leq k \leq 100$

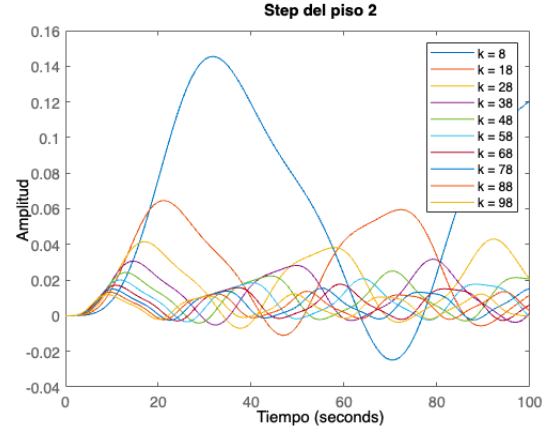


Figura 13: Step Piso 2 -  $8 \leq k \leq 100$

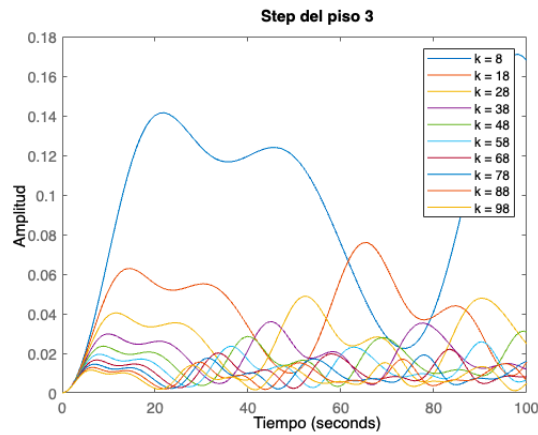


Figura 14: Step Piso 3 -  $8 \leq k \leq 100$

Continuando, en las gráficas 15,16 y 17 se observa el rango de  $k$  de 101 a 6,000 con un paso de 1,000 unidades. En este caso, la forma de las ondas tiene un comportamiento diferente a cuando el factor de amortiguamiento es menor a 100.

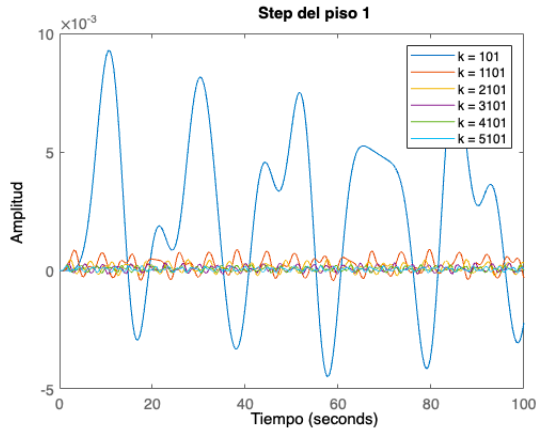


Figura 15: Step Piso 1 -  $101 \leq k \leq 6000$

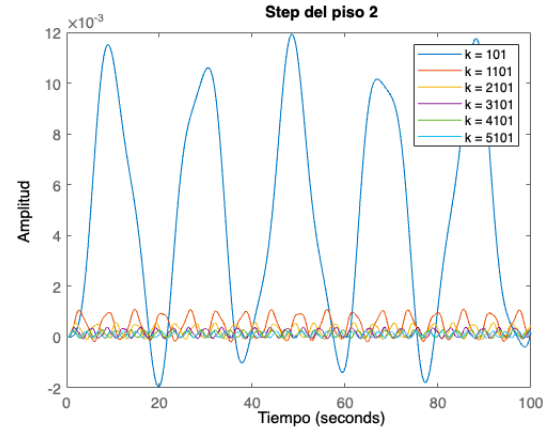


Figura 16: Step Piso 2 -  $101 \leq k \leq 6000$

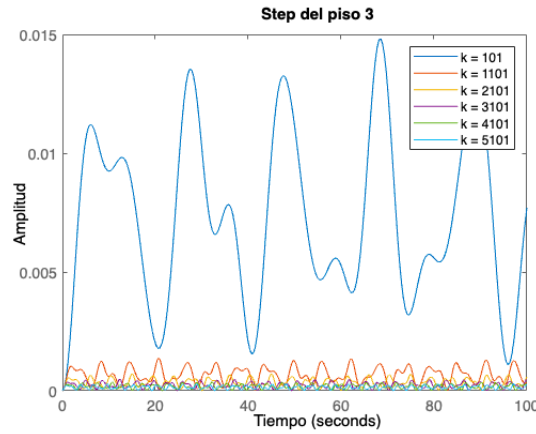


Figura 17: Step Piso 3 -  $101 \leq k \leq 6000$

Es importante recalcar que el comportamiento de las oscilaciones de los pisos con los diferentes valores de  $k$  solamente aplican al escenario de un edificio de tres pisos. En estudios posteriores, se podrá verificar si el factor de amortiguamiento especificado está dentro del rango correcto. Por lo mismo, actualmente, no se puede especificar un rango para este factor, pues las funciones de transferencia del edificio real son mucho más complejas que las de esta modelación de tres pisos.

### 3. Sistemas de control

Previo a establecer qué es un sistema de control, se deben definir las partes involucradas en este. Un sistema es un conjunto de distintas componentes que se relacionan entre sí para cumplir con un objetivo en particular, donde las componentes pueden ser tanto físicas como abstractas. [23]. Por lo tanto, un sistema puede hacer referencia a fenómenos físicos, sociológicos, económicos, entre otros. En cuanto al control, este es la regulación de algo y puede ser clasificado como pasivo, activo, semiactivo e híbrido. [16]. Debido a la naturaleza del reporte, se estará hablando de control en estructuras.

El control pasivo consiste de un actuador adjunto o incrustado a la estructura con la finalidad de modificar la rigidez o amortiguamiento de esta. El actuador además trabaja sin una fuente externa de energía y

no añade energía al sistema; como ejemplos de esto se encuentra el aislamiento de la base y la disipación de energía pasiva. [20]. El aislamiento de la base es una técnica altamente aceptada mientras que los disipadores de energía únicamente son de utilidad bajo las vibraciones con las que fueron calibrados. Por otro lado, el control activo utiliza energía externa para que los actuadores reduzcan la respuesta de la estructura ante dicha energía externa. [20]. Un punto importante a notar es que son susceptibles a fallas eléctricas además de requerir altas cantidades de energía para operar correctamente.

El control híbrido, como su nombre lo dice, utiliza elementos de control activo y pasivo. Por ejemplo, puede utilizar un actuador de control pasivo para disminuir la cantidad de energía requerida para un actuador de control activo. [16]. Por último, el control semi-activo es similar al híbrido ya que se basa en el uso de elementos de control activo y pasivo pero este no aplica fuerza mecánica sobre la estructura. [16]. El control semi-activo puede ser controlado y adaptado de acuerdo a las variaciones de su entorno en tiempo real, no desestabiliza el sistema y, bajo una correcta implementación, tienen un mejor desempeño que los actuadores de control activo y pasivo. [16]. Los actuadores principales del control semi-activo son amortiguadores; estos pueden ser de fricción, fluido, impacto o rigidez variable, de masa o líquido sintonizado y magneto-reológicos, entre otros. [16].

Retomando entonces los sistemas de control, un sistema de control es un conjunto de componentes capaces de regularse a sí mismas o a otro sistema de manera dinámica. [23]. Para que este proceso sea llevado a cabo, se requiere que el sistema cuente con una entrada regular y una salida. La entrada del sistema es una variable que no depende de los procesos internos llevados en el sistema, se utiliza para la excitación del mismo. Por otro lado, la salida del sistema es requerida para analizar el comportamiento propio del sistema y los efectos que tiene la entrada del sistema sobre el sistema. [23]. De manera general, el esquema de un sistema es como se muestra a continuación.

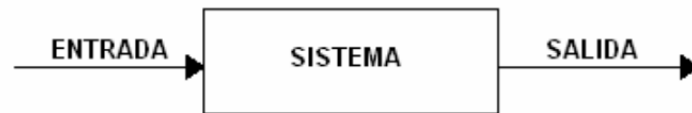


Figura 18: Esquema de un sistema. [23].

Si en el sistema de control se establece una relación directa entre la entrada y la salida, comparándolas y utilizando la diferencia como variable de control, se denomina como un sistema de control retroalimentado. Un sistema con retroalimentación también es llamado como un sistema de lazo cerrado mientras que un sistema sin retroalimentación es de lazo abierto. Un problema de control busca seleccionar una entrada que genere la respuesta deseada en un sistema. [23]. En un sistema de control de lazo abierto, la salida del sistema no se compara con la entrada; la exactitud depende de la calibración del mismo. Una representación visual del comportamiento de un sistema son los diagramas de bloque, donde cada bloque representa una función llevada a cabo; posteriormente se detallará más acerca de estos diagramas y su análisis. Para un sistema de lazo abierto, su diagrama de bloque se ve de la siguiente manera.



Figura 19: Sistema de control de lazo abierto. [23].

En cuanto a un sistema de control de lazo cerrado, estos se representan como se observa en la figura 20.

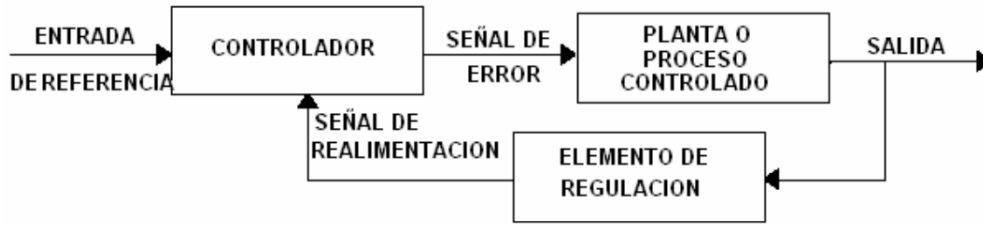


Figura 20: Sistema de control de lazo cerrado. [23].

El comportamiento de un sistema puede ser analizado de manera experimental, se mide la salida y se va ajustando la entrada hasta obtener el resultado deseado. Sin embargo, el comportamiento también puede ser analizado desde un enfoque propiamente matemático al igual que el diseño de los controladores en dichos sistemas. En la siguiente sección, se estará detallando más sobre los conceptos y herramientas matemáticas relacionadas en los sistemas de control.

### 3.1. Conceptos y herramientas matemáticas involucradas

Primeramente, los sistemas de control representan un sistema dinámico y estos a su vez pueden ser representados por medio de modelos matemáticos. Estos modelos son conjuntos de ecuaciones que describen la dinámica del sistema, por lo general en términos de ecuaciones diferenciales. [24]. Cabe mencionar que el modelo matemático de un sistema puede ser generado de distintas maneras, no es único para cada sistema. La selección de un modelo matemático adecuado para el sistema dependerá de la naturaleza del mismo; algunos modelos son la representación en el espacio de estados y la función de transferencia. [24].

#### 3.1.1. Función de transferencia

La función de transferencia representa la relación entrada-salida de un sistema descrito por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes constantes o sólo se encuentran en función de la variable independiente; si no se tienen ecuaciones lineales, existen métodos para linealizar el modelo. Por otro lado, que una ecuación diferencial sea invariante en el tiempo significa que sus coeficientes son constantes. Como tal, la función de transferencia está definida como la transformada de Laplace de la salida entre la transformada de Laplace de la entrada, suponiendo que las condiciones iniciales son igual a cero. [24]. Considerando la ecuación diferencial

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} \dots a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$$

donde

$y$  es la salida del sistema, y

$x$  es la entrada.

La función de transferencia se establece como

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{salida\}}{\mathcal{L}\{entrada\}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \dots a_{n-1} s + a_n} \quad (16)$$

Las funciones de transferencia no dan información sobre la estructura física del sistema pero contienen las unidades necesarias para su análisis correspondiente. Con anterioridad se habló sobre los diagramas de bloque y se estableció un concepto general de estos. Un diagrama de bloques es una representación gráfica del comportamiento de un sistema, qué funciones lleva a cabo y el flujo de la señal. [24]. Dentro de estos diagramas, cada bloque contiene una ecuación que representa alguna función del sistema y los bloques se enlazan a través de flechas que indican el flujo. Al igual que las funciones de transferencia, los diagramas de bloques no dan información acerca de la estructura física por lo que el mismo diagrama puede representar distintos sistemas. [24]. A través de los métodos correspondientes de reducción de los diagramas de bloque, se puede llegar a la función de transferencia del sistema representado. Para un sistema de lazo abierto, su función de transferencia queda denominada como

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$$

donde

$C(s)$  es la salida del sistema, y

$E(s)$  es la señal de error.

En cuanto a un sistema en lazo cerrado, su función de transferencia queda como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (17)$$

donde

$R(s)$  es la entrada del sistema, y

$H(s)$  es la función de transferencia que representa la trayectoria de realimentación en el sistema. [24].

### 3.1.2. Espacio de estados

En cuanto a la representación en el espacio de estados de un sistema dinámico, este es otro modelo matemático de gran utilidad y puede relacionarse con las funciones de transferencia. Dentro de esta representación, se define el estado, variables de estado y vector de estado para así establecer el espacio de estados. [24]. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño requerido para determinar el comportamiento del sistema en cualquier tiempo  $t \geq t_0$ . Las variables de estado conforman dicho conjunto de variables, donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son el conjunto de  $n$  variables de estado. [24]. Asimismo, las  $n$  variables de estado son las  $n$  componentes de un vector de estado. Como tal, el espacio de estados es un espacio  $n$ -dimensional con los ejes de coordenadas denotados por el eje  $x_1$  hasta el eje  $x_n$ . Cualquier estado del sistema puede representarse como un punto en el espacio de estados. [24]. El análisis de esta representación se basa principalmente en las tres variables de un sistema dinámico: variables de entrada, de salida y de estado.

Para un sistema de  $r$  entradas,  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ ,  $m$  salidas,  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ , y variables de estado  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , se define el sistema como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t)
\end{aligned}$$

Asimismo, se pueden definir los vectores

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

Por lo que el sistema puede definirse de igual manera como

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)
\end{aligned}$$

y esto a su vez queda como

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)
\end{aligned}$$

donde

$\mathbf{A}(t)$  es la matriz de estado,

$\mathbf{B}(t)$  es la matriz de entrada,

$\mathbf{C}(t)$  es la matriz de salida, y

$\mathbf{D}(t)$  es la matriz de transmisión directa.

Si el sistema es invariante en el tiempo, las matrices se expresan simplemente como  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ . [24]. Además, cabe destacar la similitud de estas ecuaciones con las ecuaciones 12 y 13 descritas en la sección 2.1. Una vez establecido el espacio de estados, se puede obtener la función de transferencia del sistema a través de las transformadas de Laplace y el manejo matricial correspondiente. Teniendo las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{18}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \tag{19}$$

y obteniendo sus transformadas de Laplace, asumiendo condiciones iniciales iguales a cero y siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,



$$s\mathbf{X}(s) - x(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (20)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (21)$$

Al sustituir la ecuación 20 en la 21, se llega a

$$Y(s) = \mathbf{C} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] U(s) \quad (22)$$

Además, recordando la función de transferencia establecida en la ecuación 16 como la salida entre la entrada, para la representación en espacio de estados [24], la función de transferencia en términos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  queda como

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (23)$$

### 3.1.3. Estabilidad: Ceros, polos y criterio de Routh.

Una manera de analizar la estabilidad del sistema es a través de las raíces del numerador y denominador de la función de transferencia; estas también son conocidas como los ceros y polos de la función. [25]. Una representación general de una función de transferencia factorizada se muestra a continuación

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

donde

$k$  es un término constante,

$z_i$  son los ceros de la función, y

$p_i$  son los polos.

Una vez obtenidas las raíces, estas se grafican en el plano complejo  $s$  y, dependiendo de su ubicación, se puede determinar la estabilidad del sistema. En el plano complejo, los ceros son representados por 'o' y los polos por 'x'. [25]. El sistema será estable siempre que los polos estén del lado izquierdo del plano, pero hay otros casos donde se requieren distintos criterios para determinar la estabilidad. El sistema se denomina como *críticamente estable* si hay un polo en el origen y el resto se encuentra del lado izquierdo y *marginamente estable* cuando hay dos polos imaginarios sin parte real y el resto del lado izquierdo del plano. Por otra parte, el sistema es inestable si se encuentran dos polos en el origen o cuatro polos imaginarios sin parte real. Además, si existe un polo del lado izquierdo, el sistema es inestable siempre y cuando no exista un cero a su derecha. En caso de que sí se encuentre el cero, el sistema es estable pero tarda en estabilizarse. [25].

Otra manera de determinar la estabilidad de un sistema a partir de su función de transferencia es por medio del criterio de Routh. [26]. El criterio de estabilidad de Routh también incorpora la ubicación de los ceros y polos pero sin la necesidad de graficarlos, a través de la función característica; siendo esta  $1 + G(s)H(s)$ . Este método determina de qué lado del plano se encuentran los ceros y hay estabilidad si

la parte real de todas las raíces de la función característica son negativas. [26]. Para utilizar el criterio de Routh, se reescribe la función característica como

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \dots a_{n-1} s + a_n = 0$$

Se determina estabilidad si todos los coeficientes tienen el mismo signo y ninguno es cero. Una vez verificados estos criterios, los coeficientes se escriben de la siguiente manera.

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$s^1$	$f_1$	0	0	$\dots$
$s^0$	$g_1$	0	0	$\dots$

donde

$a_n$  son los coeficientes de la ecuación característica, y

$b_n, c_n, \dots, g_1$  se calculan a partir de los coeficientes  $a_n$  como  $b_n = \frac{(a_1 - a_{2n})(a_0 - a_{2n+1})}{a_1}$ ,

$c_n = \frac{(b_1 - a_{2n+1})(a_1 - b_{n+1})}{b_1}$  y así sucesivamente.

Ya que se hayan determinado todos los coeficientes del arreglo anterior, hay estabilidad si no hubo cambio de signos en los coeficientes. La cantidad de cambio de signos es igual al número de polos del lado derecho en el plano complejo. [18]. Una limitación de este método es que no sugiere cómo se podría mejorar la estabilidad del mismo pero es posible determinar los efectos que tiene en esta al cambiar algunos parámetros. Asimismo, si la ecuación característica contiene una constante  $k$ , se puede establecer un rango de estabilidad con base a dicha constante. Esto será de utilidad para el diseño de un sistema de control que se detallará posteriormente.

### 3.1.4. Controladores

Como tal, los controladores se encuentran en un sistema de lazo cerrado puesto que utiliza la retroalimentación y determina la desviación entre el valor real contra el deseado. Una vez determinada la desviación, el controlador produce una señal de control con la finalidad de reducir dicha desviación. [24]. Asimismo, los controladores industriales pueden ser clasificados de acuerdo a su acción, señal y control. Estos pueden ser controladores de dos posiciones, proporcionales, integrales, proporcionales-integrales, proporcionales-derivativos y proporcionales-integrales-derivativos. Es de particular interés el controlador proporcional-integral-derivativo.

Un controlador proporcional permite obtener una salida cercana a la referencia y relaciona la salida  $u(t)$  con el error  $e(t)$  como  $u(t) = K_p e(t)$ , donde  $K_p$  es la ganancia proporcional. Además, su función de transferencia está definida como  $G(s) = K_p$ . [24]. Un controlador de acción derivativa agrega un cero en el origen de la función de transferencia en lazo abierto, siendo esta función  $G(s) = sK_d$  y significando que se añade amortiguamiento al sistema. La acción derivativa representa la tendencia de cambio, proyecta el desplazamiento futuro del proceso,  $u(t) = K_d T_d \frac{de(t)}{dt}$ . [24].

Por último, la acción integral agrega un polo en lazo abierto por lo que, al desestabilizar el sistema, debe de ir de la mano de la acción derivativa. En estos controladores, la relación de la salida y el error se define como  $u(t) = K_i \int_0^t e(t)dt$  y su función de transferencia como  $G(s) = \frac{K_i}{s}$ , siendo  $K_i$  una constante ajustable. [24]. Entonces, un controlador proporcional-integral-derivativo combina todas las ventajas que proporcionan cada una de las acciones involucradas. [20]. La ecuación de un controlador de este tipo queda como

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

donde

$T_i$  es el tiempo integral, y

$T_d$  es el tiempo derivativo.

Por lo tanto, su función de transferencia sería

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

De manera general, los controladores permiten reducir el error presente en los sistemas y dar información acerca de la estabilidad en respuesta a distintas entradas. Como por ejemplo, una entrada de escalón, rampa, parábola, entre otras. [24]. Así como está el diseño matemático de los controladores, todo el sistema de control puede ser diseñado y analizado a partir de conceptos matemáticos. Los métodos asociados a este diseño y análisis son el método del lugar de las raíces, de la respuesta en frecuencia e inclusive en el espacio de estados. [24]. A continuación, se describe el método del lugar geométrico de las raíces así como una breve comparativa con los demás métodos.

### 3.1.5. Método del lugar de las raíces

El método del lugar de las raíces permite representar las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema, siendo este la ganancia  $K$ . [24]. Las raíces de la ecuación característica son los polos del sistema en lazo cerrado, cuyo movimiento en el plano complejo  $s$  está determinado por la ganancia. Dependiendo del sistema, al ajustar la ganancia se pueden posicionar los polos en un lugar deseado. Este método permite analizar los efectos que tiene la ubicación de los polos en lazo cerrado, la variación del valor de la ganancia o el añadir polos y/o ceros en lazo abierto en el sistema. [24]. Dos conceptos relevantes para el método son las condiciones de ángulo y magnitud, las cuales determinan las raíces de la ecuación característica.

Teniendo una función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

con la función característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

Las condiciones de ángulo y magnitud están dadas, respectivamente, como

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180(2k + 1)$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

El lugar de las raíces es una gráfica de todos los valores en el plano complejo que satisfacen la condición de ángulo mientras que las raíces de un valor específico de la ganancia están determinadas por la condición de magnitud. Por lo general, el lugar de las raíces se da cuando la ganancia  $K$  varía desde cero hasta el infinito y este es simétrico con respecto al eje real. [24]. Para implementar este método, además de considerar las condiciones previas, se deben seguir ciertos pasos, descritos a continuación.

1. **Obtener la función característica.** Una vez obtenida la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$ , esta se reescribe de la forma

$$1 + \frac{K(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_n)} = 0 \quad (24)$$

donde  $K > 0$ .

- a) **Localizar polos y ceros de  $G(s)H(s)$  en el plano complejo.** La cantidad de ramas en la gráfica del lugar de las raíces es igual a la cantidad de polos en lazo abierto.
  - b) **Localizar segmentos en el eje real que pertenece al lugar geométrico de las raíces.** Estos se determinan a partir de los ceros y polos en lazo abierto y un punto arbitrario. Al seleccionar un punto arbitrario en el eje real, este se encuentra en el lugar geométrico si la cantidad total de ceros y polos a su derecha es impar. [24].
2. **Determinar las asíntotas.** La cantidad de asíntotas es igual al número de polos menos el número de ceros,  $n - m$ , en lazo abierto. Además, todas las asíntotas tienen un punto de corte en el eje real.
- a) **Determinar el punto de partida  $\sigma$ .** Este también es denominado como el centroide o corte en el eje real, y se calcula a partir de la sumatoria de las partes reales de los polos menos la sumatoria de las partes reales de los ceros entre el número de asíntotas.

$$\sigma = \frac{\sum \text{Re}(p) - \sum \text{Re}(z)}{n - m} \quad (25)$$

- b) **Determinar los ángulos de las asíntotas  $\theta$ .** El valor  $k$  asume un valor infinito pero el ángulo se repite a sí mismo de acuerdo a la cantidad distinta de asíntotas, por lo que  $k$  va de cero hasta  $n - m - 1$ . [24]

$$\theta = \pm \frac{180(2k + 1)}{n - m}, k = (0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

3. **Encontrar los puntos de ruptura e ingreso sobre el eje real.** Para este paso, se retoma la ecuación característica 24.

- a) **Despejar la constante  $K$  y derivar en términos de  $s$ .**
- b) **Obtener las raíces de la derivada  $\frac{dK}{ds} = 0$ .** Todos los puntos deben ser raíces de esta ecuación pero no todas las raíces de la ecuación serán puntos de ruptura con el eje real; esto dependerá de las condiciones de magnitud y ángulo.
- c) **Evaluar los valores en las condiciones de magnitud y ángulo.** Si el valor de  $s$  cumple con ambas condiciones, entonces es una raíz de la ecuación característica y por ende un punto de partida en el eje real. [24].

4. **Determinar el corte de los lugares de las raíces con el eje imaginario.** Para esto, se puede realizar a través del criterio de Routh o sustituyendo  $s = j\omega$  en la ecuación característica

- a) **Criterio de Routh.** Se realiza el criterio de Routh, siendo de particular interés los términos en  $s$  y  $s^2$ . Para la ganancia  $K$ , se iguala  $s = 0$  y se obtienen los valores de  $K$  correspondientes. Luego, en los términos de  $s^2$ , se saca la ecuación  $b_1 s^2 + b_2 = 0$ . En esta última, se evalúan los valores de la ganancia obtenidos previamente y se despeja para  $s$ . El punto de corte con el eje imaginario será aquél que  $s = \pm \beta j$ , con la ganancia siendo la utilizada para su evaluación.
- b)  $s = j\omega$  Una vez realizado el cambio de variable, se divide la ecuación característica en su parte real e imaginaria y se igualan a cero. Posteriormente, se despeja para  $\omega$  y  $K$ ; los valores de  $\omega$  son las frecuencias en las que los LGRs cruzan el eje imaginario y  $K$  es la ganancia asociada al punto de cruce. [24].

5. **Encontrar el ángulo de salida y de entrada de un LGR.** Los ángulos se obtienen con la finalidad de dibujar el lugar geométrico de las raíces con una mayor precisión. De manera general, se le resta la suma de todos los ángulos de vectores a  $180^\circ$ . [24].

- a) **Ángulos de salida.** Estos se obtienen a partir de los polos complejos. A  $180^\circ$ , se le resta la sumatoria de los ángulos hacia el polo desde otros polos y se le suma la sumatoria de los ángulos hacia el polo desde los ceros.

$$\phi_p = 180 - \sum \angle p + \sum \angle z \quad (27)$$

- b) **Ángulos de llegada.** Estos se obtienen a partir de los ceros complejos. A  $180^\circ$ , se le resta la sumatoria de los ángulos hacia el cero desde otros ceros y se le suma la sumatoria de los ángulos hacia el cero desde los polos.

$$\phi_z = 180 - \sum \angle z + \sum \angle p \quad (28)$$

6. **Dibujar el lugar geométrico de las raíces.** Con los puntos y parámetros encontrados en los pasos anteriores, se realiza la gráfica del LGR. La sección de mayor relevancia en esta gráfica es la parte cercana al eje complejo y al origen. Para mayor precisión en los cálculos, se recomienda el uso de herramientas computacionales como *MATLAB*.

7. **Determinar los polos en lazo cerrado.** Para determinar los polos en lazo cerrado, se requiere nuevamente de la condición de magnitud y cada polo es un punto específico en cada rama del LGR. [24]. Para obtener un valor de  $K$  correspondiente a cualquier punto  $s$ , se puede obtener a través de *MATLAB*, la condición de magnitud o por

$$K = \frac{\text{producto de las longitudes entre } s \text{ y los polos}}{\text{producto de las longitudes entre } s \text{ y los ceros}}$$

Algunos ejemplos de gráficas asociadas a lugares geométricos de las raíces se muestran a continuación.

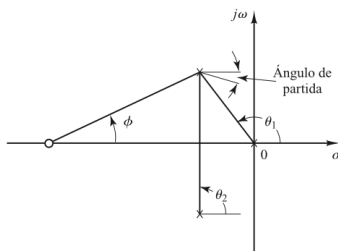


Figura 21: Ejemplo lugar de las raíces. [24].

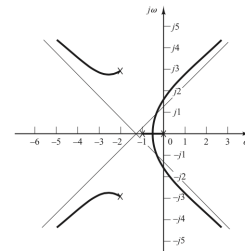


Figura 22: Ejemplo lugar de las raíces. [24].

Por otro lado, el método de la respuesta en frecuencia se puede considerar como complementario al lugar de las raíces. La respuesta en frecuencia se refiere a la respuesta de un sistema en estado estacionario ante una entrada sinusoidal. [24]. Este método, dicha frecuencia se varía en un rango y se estudian los efectos que esto tiene en la respuesta resultante. La información que se obtiene a partir del método de la respuesta en frecuencia es distinta a la que se obtiene a través del lugar de las raíces, por lo que se complementan. Asimismo, el método de la respuesta es capaz de obtener los datos y medidas correspondientes sin primero deducir su modelo matemático. [24]. Otra ventaja de este método es que las pruebas de la respuesta en frecuencia son sencillas y precisas, además de ser capaz de eliminar los efectos del ruido y poder diseñar sistemas de control no lineales. [24].

En cuanto al diseño de sistemas de control en el espacio de estados, este se puede basar en el método de asignación de polos o del regulador óptimo cuadrático. Particularmente, el método de asignación de polos es similar al lugar de las raíces ya que se colocan los polos en una ubicación deseada en lazo cerrado. [24]. La diferencia entre estos métodos radica en la cantidad de polos que se colocan; en el LGR sólo se sitúan los polos dominantes mientras que en la asignación de polos se colocan todos. La implementación de estos últimos métodos se facilita a través de softwares como *MATLAB*, donde cada uno tiene sus ventajas y desventajas.

## 3.2. Diseño del sistema de control

En este caso, se busca controlar la salida del modelo asociado al comportamiento de un edificio bajo las fuerzas oscilatorias de un terremoto. En la sección 2, se hace un planteamiento de este sistema dinámico sin amortiguación y se observa como la salida de este es oscilatoria. Esto quiere decir que el sistema no se estabiliza en algún punto y, por ende, el edificio colapsaría. Para mitigar esto, se propone el diseño de un regulador lineal cuadrático gaussiano LQG, utilizando el sistema en espacio de estados y a través del software *MATLAB*.

### 3.2.1. Análisis matemático

Para el sistema sin amortiguamiento, la fuerza externa aplicada al primer piso se modeló de la siguiente manera:

$$F = T \cdot a \cdot w^2 \cdot \cos(w) \quad (29)$$

donde

$a$  representa la amplitud de las ondas sísmicas,

$w$  la frecuencia de las ondas sísmicas, y

$T$  es la frecuencia natural del primer piso.

Posteriormente, para la representación de una respuesta en el tiempo simulada de un sistema dinámico, se tiene la siguiente función de transferencia de tiempo discreto [27]:

$$\text{sys}(z^{-1}) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}, \quad (30)$$

Después, en función de la recursión asociada a 30, se filtra la entrada con la función de transferencia [27]:

$$y[k] = a_0 u[k] + \dots + a_n u[k - n] - b_1 y[k - 1] - \dots - b_n y[k - n]. \quad (31)$$

Para el sistema con amortiguamiento primero se realizó un espacio de estados similar al anterior, con la diferencia que en este se consideran los coeficientes de amortiguamiento por piso, con una matriz de amortiguamiento resultante de la forma descrita en la representación de estados 2.1.

Después, al sistema resultante se le realiza un filtrado de Kalman, el cual reduce los errores de ruido en las mediciones, es posible estimar la verdadera salida a través de la siguiente forma, en función de las mediciones con ruido  $y[n]$  [28]

$$y_t[n] = y[n] - v[n] \quad (32)$$

Para la parte de sistemas de control primero se usó el regulador lineal cuadrático (LQR), el cual se aplica para sistemas dinámicos descritos por una ecuación diferencial lineal y con un costo descrito por una ecuación cuadrática. [29] Para esta parte se considera un sistema lineal de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Con una función cuadrática de costo a minimizar, definida como:

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$$

La retroalimentación del estado de control que minimiza el costo es descrita como:

$$u = -Kx$$

donde  $K$  representa la retroalimentación de la ganancia del estado:

$$K = R^{-1} (B^T S + N^T)$$

y  $S$  representa la solución al resolver la ecuación algebraica Riccati asociada:

$$A^T S + SA - (SB + N)R^{-1} (B^T S + N^T) + Q = 0$$

Por último, los polos en lazo cerrado se obtienen de la siguiente manera:

$$P = \text{eig}(A - BK)$$

Con este sistema de control se obtuvo la retroalimentación de la matriz de ganancia de estados.

Por último, se implementó el sistema de control, el regulador lineal cuadrático Gaussiano (LQG), el cual es una combinación de un filtro de Kalman con un regulador lineal cuadrático (LQR) y se aplica tanto para sistemas lineales invariantes o variantes en el tiempo. Para el caso de un tiempo continuo, las ecuaciones del regulador son las siguientes: [30]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= [A - LC - (B - LD)K]\hat{x} + Ly \\ u &= -K\hat{x} \end{aligned} \quad (33)$$

donde

$\hat{x}$  representa la estimación por el Kalman, y  
 $y$  es el vector de las medidas de salida.

Además, se implementó la representación de una respuesta en el tiempo simulada de un sistema dinámico

mostrado en la ecuación 30.

### 3.2.2. Simulación

Para la simulación del edificio de 44 pisos sin amortiguamiento, se usó una fuerza externa que dependía de los parámetros de frecuencia y amplitud del terremoto. Para esto, se consideró que un rango para la frecuencia de las ondas en terremotos de 1 a 100 Hz y se fijó el valor de la amplitud en  $1.24 \times 10^{-1}$  metros. [31]. Como tal, el comportamiento observado del edificio sin amortiguamiento permanece considerablemente igual al cambiar la frecuencia.

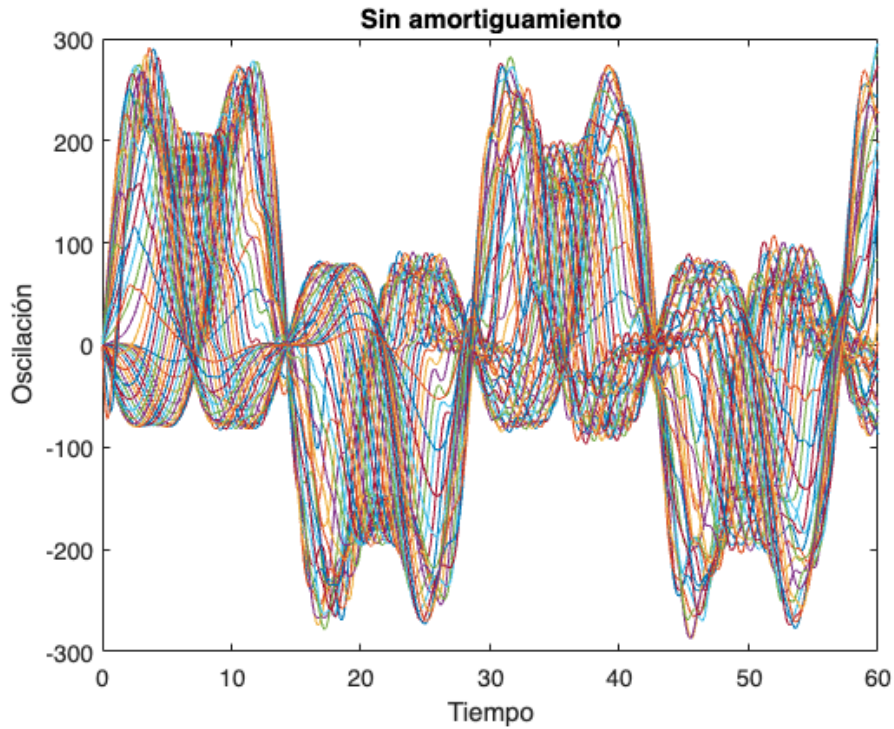


Figura 23: Oscilación sin amortiguación

Para la resolución del sistema de control con el software *MATLAB* se hizo uso de las funciones *kalman()*, *lqr()* y *lqgreg()* para el filtrado de Kalman, regulador lineal cuadrático y regulador lineal cuadrático Gaussiano respectivamente. En el primero se ingresa el modelo de espacio de estados amortiguado y una matriz identidad de tamaño  $n$  y un arreglo vacío, los cuales representan la covarianza de ruido de los datos, de esta matriz obtenemos la matriz de estimaciones  $K_{est}$ , en *lqr()* se ingresa el modelo del espacio de estados y dos matrices identidades de tamaño  $2n$  y  $n$  respectivamente, con esto se obtienen un vector fila  $Ka$  de la ganancia óptima del sistema de lazo cerrado de tamaño  $n$ . Por último, para el sistema de control final, en *lqgreg()* se ingresaron las dos matrices obtenidas anteriormente,  $K_{est}$  y  $Ka$  y se obtuvo su respuesta a lazo cerrado con la función *lsim()*.

El cambio en la frecuencia de las ondas de la fuerza externa es notorio al momento de graficar el sistema amortiguado con retroalimentación, particularmente en la oscilación del último piso. Para esto, se identifica qué parámetros de amortiguamiento funcionan mejor para valores de frecuencia distintos. Estos se establecieron de manera arbitraria, basándose en el paper *Vibration control of a structure with ATMD against earthquake using fuzzy logic controllers*. [32]. Debido a que la masa de los pisos se asume igual para todos, en teoría el coeficiente de amortiguación debería ser el mismo para todos los pisos de igual manera. Sin embargo, estabilizar la estructura de esta forma es más difícil por lo que se proponen dos



maneras de establecer los coeficientes: (1)  $c_1$  hasta  $c_{n-1}$  con un coeficiente igual y  $c_n$  con un coeficiente distinto ó (2) incrementar el coeficiente de dos en dos para  $c_1$  hasta  $c_{n-1}$  y establecer un coeficiente mayor para  $c_n$ .

Para la simulación, se toman estas dos metodologías previas y se va variando la frecuencia, con la finalidad de identificar qué constantes de amortiguación funcionan mejor para estabilizar la estructura. En la tabla 3 se pueden observar las oscilaciones con una amplitud fija de 0.124 metros, frecuencias entre 1 y 100 Hz y distintos coeficientes de amortiguamiento. En particular, se despliega el comportamiento del último piso ya que es el que mayor oscilación presenta en general.

### Metodología 1

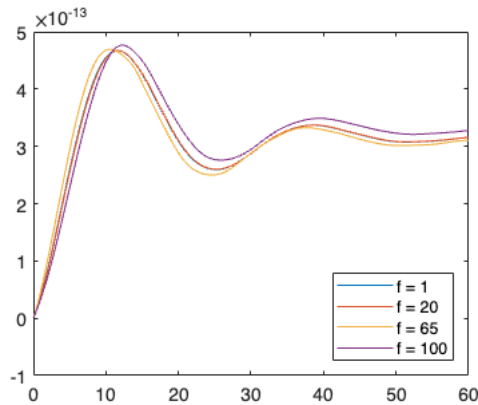


Figura 24:  $c_i = 30$ ,  $c_n = 90$

### Metodología 2

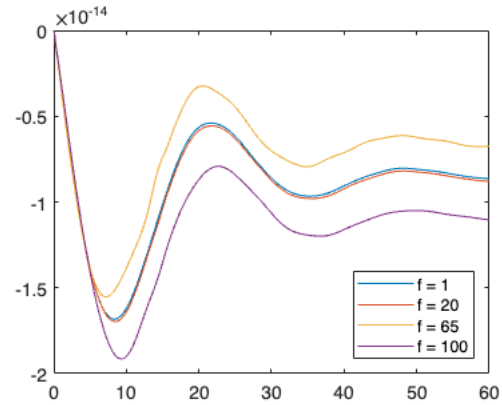


Figura 25:  $c_1 = 30$ ,  $c_n = 240$

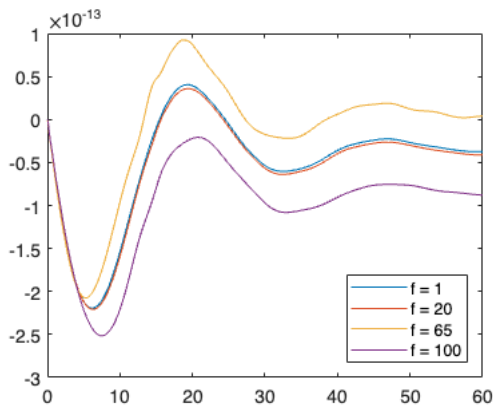


Figura 26:  $c_i = 70$ ,  $c_n = 140$

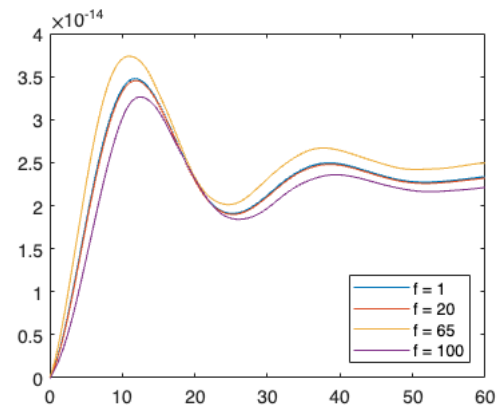


Figura 27:  $c_1 = 70$ ,  $c_n = 2100$

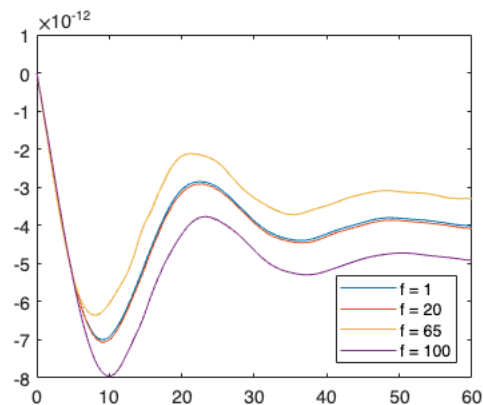


Figura 28:  $c_i = 3$ ,  $c_n = 50$

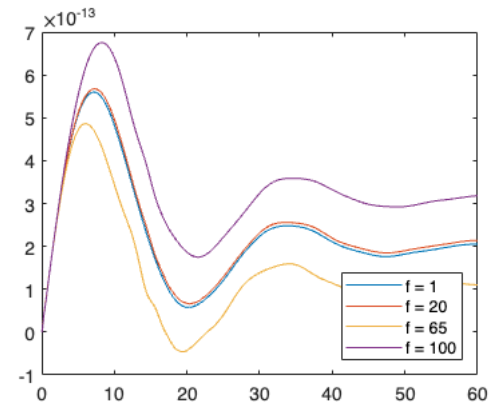


Figura 29:  $c_1 = 3$ ,  $c_n = 120$

Cuadro 3: Oscilación con amortiguador y amplitud 0.124 m, distintas frecuencias

### 3.2.3. Análisis de resultados

En la tabla 3 se puede observar el comportamiento oscilatorio del edificio con distintas fuerzas variando la frecuencia de las ondas sísmicas, por los rangos de las gráficas se puede observar que menor sea la frecuencia, también lo será la oscilación. De manera general, con cualquier coeficiente de amortiguación seleccionado y método para esto, el sistema oscila muy poco. No obstante, dicha oscilación es menor cuando el coeficiente de amortiguación incrementa por piso y en particular cuando se establece  $c_1 = 30$ .

Entonces, la matriz de amortiguamiento,  $C$ , queda definida como

$$C = \begin{bmatrix} -30 & 30 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 30 & -62 & 32 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -66 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 112 & -352 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 240 & -240 \end{bmatrix}$$

y el edificio entero, bajo una fuerza externa con una frecuencia media de 50 Hz y amplitud de 0.124 metros, se comporta como se muestra a continuación.

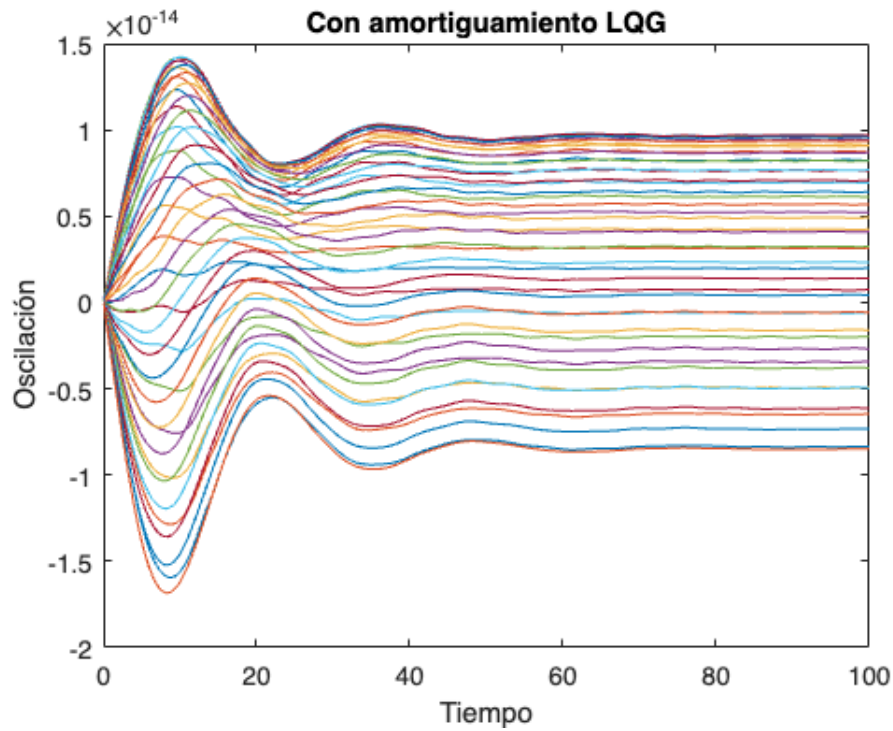


Figura 30: Oscilación del edificio amortiguado y realimentación en lazo cerrado.

La gráfica 30 muestra que el edificio, al iniciar el movimiento del terremoto, tiene un ligero desplazamiento, siendo  $\pm 1.5 \cdot 10^{-14}$  el máximo, y eventualmente converge en un rango  $(-10^{-14}, 10^{-14})$ . Realmente, este

es un valor muy cercano a cero y debido a otras fuerzas externas y propiedades, los edificios siempre se encuentran vibrando. Por esto mismo, hace sentido que el movimiento no sea exactamente cero una vez estabilizado el sistema. A manera de comparación entre el sistema con y sin amortiguamiento, se tiene la siguiente gráfica.

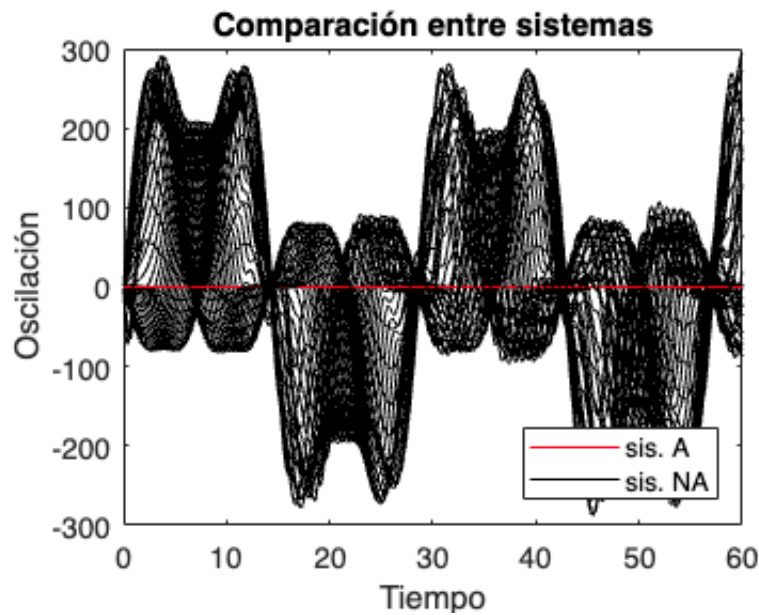


Figura 31: Comparación

Como se puede observar, existe una gran diferencia entre el desplazamiento del sistema amortiguado y no amortiguado bajo una fuerza externa.

## 4. Conclusiones

La Ciudad de México es una zona del territorio mexicano que ha experimentado fuerzas sísmicas de altas magnitudes a lo largo de los años. Es por esto mismo que contar con infraestructura resistente ante estas fuerzas externas es de gran relevancia. En el terremoto de septiembre de 2017, alrededor de 50 edificios se derrumbaron y esto generó la muerte de más de 200 personas. [33]. En su mayoría, fueron edificios de menos de 10 niveles y fueron construidos antes de 1985, por lo que no siguen las normativas de construcción para zonas sísmicas. Por otro lado, también están los costos asociados a la reconstrucción de los edificios y otro tipo de pérdidas económicas que se pueden dar en la presencia de un evento sísmico.

La construcción de edificios en zonas sísmicas debe regirse de acuerdo a las normativas existentes pero también puede apoyarse en la teoría y análisis de control presentada previamente. De esta manera, el sistema, en este caso el edificio, se modela y se van ajustando ciertos parámetros para que este sea estable al ser sometido a fuerzas oscilatorias. En la modelación, se toma en consideración la masa por piso, las constantes de rigidez del material utilizado y coeficientes de amortiguamiento. Asimismo, se trabaja con un controlador para ajustar la respuesta del sistema a una deseada. Una vez se encuentren los parámetros de manera analítica, se pueden llevar a cabo otro tipo de pruebas con la finalidad de verificar que todo esté en orden y la construcción pueda ser llevada a cabo.

Para las constantes de rigidez, estas se tomaron como diez veces el peso por piso y los coeficientes de amortiguamiento fueron obtenidos a partir de la simulación realizada. Para la parte del controlador, se utilizó un regulador lineal cuadrático junto con un regulador lineal Gaussiano. Cabe mencionar que en

la práctica, es más común utilizar otro tipo de controladores cuya decisión se basa principalmente en la relación costoeficiencia. No obstante, el diseño de sistemas de control se puede llevar acabo de diversas maneras y generar los mismos resultados de igual forma.

Otro factor importante en la construcción de edificios es el material utilizado; en la actualidad, el acero es uno de los más usados. Las estructuras de acero se emplean de tal forma que forman numerosas zonas plásticas, las cuales al actuar como un todo presentan un grado de ductibilidad bastante bueno. Al momento de recibir las fuerzas horizontales, el edificio logra disipar energía de manera efectiva y resiste el terremoto. Otra de las propiedades que hacen que el acero sea frecuentemente usado en zonas sísmicas es que tiene un peso bajo y buena flexibilidad. Los edificios con características contrarias suelen atraer fuerzas más grandes cuando un sismo llega, por lo tanto se requiere menor cantidad de este elemento en la base de la construcción y así se reduce el costo de la construcción significativamente. [34]. Sin embargo, hoy en día se está investigando del uso de la madera contralaminada en la construcción de edificios en zonas sísmicas. Las propiedades naturales de este tipo de material conceden buena estabilidad dimensional y fuerza uniforme, así como sostenibilidad. La combinación de este tipo de material junto con acero está siendo estudiado para zonas sísmica y promete buenos resultados. [35].

#### 4.1. Limitaciones

Una limitación principal de la investigación y modelación llevada acabo es que se asume que la masa del edificio está distribuida de manera equitativa a lo largo de todos los pisos. No obstante, esto suele evitarse ya que alcanzar la estabilidad del edificio se vuelve más complicado. Por lo mismo, se asume que la constante de amortiguamiento va incrementando por piso a pesar de que la masa sea la misma. Asimismo, se tuvo que adecuar el tipo de controlador utilizado debido a que el software *MATLAB* sólo acepta sistemas de una entrada y una salida para implementar un controlador proporcionalintegral-derivativo; el cual era el que originalmente se planeaba utilizar. Modelar sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas se puede realizar por medio de *Simulink*, pero no se cuentan con los conocimientos necesarios para su uso.

De igual manera, una limitación general para el diseño de edificios en zonas sísmicas es que no se toman en consideración los efectos acumulados de las fuerzas oscilatorias en estos. El desgaste de las estructuras al ser sometidas, con cierta frecuencia, a fuerzas de altas magnitudes, como lo es en el caso de la Ciudad de México, generan su eventual derrumbe. Por lo mismo de que este no es un factor que se tome en consideración en el diseño actual, tampoco fue tomado en cuenta para la realización de esta investigación pero puede ser considerada como una área de mejora u oportunidad.

## Referencias

- [1] S. G. Mexicano, “Sismos: Causas, características e impactos,” 2017. [Online]. Available: <https://www.gob.mx/sgm/es/articulos/sismos-causas-caracteristicas-e-impactos?idiom=es>
- [2] L. F. P. MORENO *et al.*, “Simulación estocástica de movimientos fuertes en el centro-occidente de la faja volcánica transmexicana para sismos corticales e intraplaca,” 2022.
- [3] S. G. Mexicano, “Sismos: Causas, características e impactos,” 2017. [Online]. Available: <https://www.gob.mx/sgm/es/articulos/sismos-causas-caracteristicas-e-impactos?idiom=es>
- [4] “Magnitud de un sismo.” [Online]. Available: <http://www.ssn.unam.mx/jsp/reportesEspeciales/Magnitud-de-un-sismo.pdf>
- [5] D. G. de Observatorio de Amenazas y Recursos Naturales, “Escala de magnitud.” [Online]. Available: <https://www.snet.gob.sv/ver/seccion+educativa/sismologia/escalas+de+magnitud/>
- [6] “Servicio sismológico nacional,” 2023. [Online]. Available: <http://www.ssn.unam.mx/>
- [7] J. E. Vidale and H. Houston, “The depth dependence of earthquake duration and implications for rupture mechanisms,” *Nature*, vol. 365, no. 6441, pp. 45–47, 1993.
- [8] “Catálogo de sismos.” 2023. [Online]. Available: <http://www2.ssn.unam.mx:8080/catalogo/#>
- [9] A. P. de la Ciudad de México, “Normas técnicas complementarias para diseño por sismo con comentarios,” 2020. [Online]. Available: <https://www.isc.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/62d/849/d81/62d849d812008797163429.pdf>
- [10] R. Lara, “¿cómo cambió el reglamento de construcciones tras los sismos?” 2018, milenio. [Online]. Available: <https://www.milenio.com/politica/comunidad/como-cambio-el-reglamento-de-construcciones-tras-los-sismos>
- [11] E. Grajeda, “Cronología del reglamento de construcciones,” 2005, el Universal. [Online]. Available: <https://archivo.eluniversal.com.mx/notas/302917.html>
- [12] D. G. de Comunicación Social, “Sismos en cdmx han incrementado investigación y normatividad,” 2019. [Online]. Available: [https://www.dgcs.unam.mx/boletin/bdboletin/2019\\_732.html](https://www.dgcs.unam.mx/boletin/bdboletin/2019_732.html)
- [13] J. A. B. Vázquez, “Costo por ensamble de edificio complejo City Angelopolis,” Ph.D. dissertation, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Octubre 2015.
- [14] T. Latinoamericana, “Historia,” 2023. [Online]. Available: <https://torrelatinoamericana.com.mx/historia/>
- [15] M. Martínez, “Esta es la razón por la que la torre latinoamericana resiste los sismos de cdmx,” 2018. [Online]. Available: <https://www.admagazine.com/arquitectura/razon-torre-latinoamericana-sismos-cdmx-19s-20180918-4624-articulos#:~:text=Torre%20Ejecutiva%20BBVA%20Bancomer,estructura%2C%20pero%20no%20su%20colapso.>
- [16] I. Ileva Anguelova, “Estudio comparado de los métodos y dispositivos actuales orientados a amortiguar los efectos del terremoto sobre la estructura de los edificios,” Ph.D. dissertation, Universitat Politècnica de València, 2020.
- [17] J. A. P. Molina, “La torre latinoamericana.” 2018. [Online]. Available: <https://sites.ipleiria.pt/seismicknowledge/la-torre-latinoamericana/>

- [18] S. P. Rodríguez Chuquimango, “Modelamiento matemático de la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden,” 2019.
- [19] S. Bagai, P. Madaan, and T. Khajuria, “A mathematical model for the effect of earthquake on high rise buildings of different shapes,” *DU Journal of Undergraduate Research and Innovation*, vol. 2, no. 1, pp. 180–188, 2016.
- [20] M. A. González Padilla, “Modelado y control pid-difuso de una estructura de edificio sometida a las vibraciones de un temblor,” Master’s thesis, Tesis (MC)–Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN . . . , 2012.
- [21] J. Camargo García, “Dos edificios de gran altura emblemáticos de la cd. de méxico : ”torre latino-americana y torre ejecutiva pemex”,” *Universidad de Sevilla*, 2015.
- [22] SAGE, “Building resonance: Structural stability during earthquakes,” *Earth Scope Consortium*.
- [23] M. Pérez, A. Pérez, and E. Pérez, “Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo,” *Universidad Nacional de San Juan*, pp. 1–69, 2008.
- [24] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [25] H. Franco, “Funcion de transferencia y sistemas de primer orden.”
- [26] J. L. Domínguez Ponce de León, “Función de transferencia y sus aplicaciones,” 1967.
- [27] MathWorks, “lsim.” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/control/ref/lti.lsim.html>
- [28] —, “Filtro de kalman.” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/control/ug/kalman-filtering.html>
- [29] —, “Linear-quadratic regulator (lqr).” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/control/ref/lti.lqr.html>
- [30] —, “Form linear-quadratic-gaussian (lqg) regulator.” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/control/ref/ss.lqgreg.html>
- [31] Britannica, “Properties of seismic waves.” [Online]. Available: <https://www.britannica.com/science/geomorphology>
- [32] R. Guclu and H. Yazici, “Vibration control of a structure with atmd against earthquake using fuzzy logic controllers,” *journal of sound and vibration*, vol. 318, no. 1-2, pp. 36–49, 2008.
- [33] M. E. Rodríguez, “Interpretación de los daños y colapsos en edificaciones observados en la ciudad de méxico en el terremoto del 19 de septiembre 2017,” *Ingeniería sísmica*, no. 101, pp. 1–18, 2019.
- [34] ArcelorMittal, “Earthquake resistance.” [Online]. Available: [https://constructalia-is.aware.be/sites/default/files/Earthquake\\_EN--30417e866429d8b43c667cbab068084c.pdf](https://constructalia-is.aware.be/sites/default/files/Earthquake_EN--30417e866429d8b43c667cbab068084c.pdf)
- [35] L. Zhengyao and T. Konstantinos Daniel, “Design for seismic resilient cross laminated timber (clt) structures: A review of research, novel connections, challenges and opportunities.” *Buildings*, vol. 13, no. 505, p. 505, 2023. [Online]. Available: <http://0-search.ebscohost.com.biblioteca-ils.tec.mx/login.aspx%3fdirect%3dtrue%26db%3dedsoj%26AN%3dedsoj.f4f6d5b4ef5a4f33aa5a56825b810638%26lang%3des%26site%3ded-live%26scope%3dsite>

## Anexos

- **MATLAB** Amplitud máxima  
[https://drive.google.com/file/d/1Xc-fY9Uj3RVQONThtAEnaS4-QQCmkTXt/view?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/file/d/1Xc-fY9Uj3RVQONThtAEnaS4-QQCmkTXt/view?usp=drive_link)
- **MATLAB** Oscilación  
[https://drive.google.com/file/d/11wH175XlUELN\\_emgJ8acAJRnJFqmM7NQ/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/11wH175XlUELN_emgJ8acAJRnJFqmM7NQ/view?usp=sharing)
- **MATLAB** Periodos y frecuencias  
[https://drive.google.com/file/d/16zfdm2yK-9YURhHJ6HHuwaSg6vLxczkx/view?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/file/d/16zfdm2yK-9YURhHJ6HHuwaSg6vLxczkx/view?usp=drive_link)
- **MATLAB** Sistema de control  
[https://drive.google.com/file/d/1NycG1hy\\_\\_KfjOh3LUIVRSCAA6PUAj0s1/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1NycG1hy__KfjOh3LUIVRSCAA6PUAj0s1/view?usp=sharing)
- **Python** Periodos y frecuencias naturales por piso  
[https://drive.google.com/file/d/14te5Ta3tKvUtxr0FBbJK6-7upxg\\_Bhmx/view?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/file/d/14te5Ta3tKvUtxr0FBbJK6-7upxg_Bhmx/view?usp=drive_link)