UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

PRÁCTICA 1

Asignatura: Biomatemática
Profesor: Carlos Fulgado Claudio

25 DE OCTUBRE DE 2023

Autor: Enrique Ramos
4º INGENIERÍA MATEMÁTICA

ÍNDICE

Introducción 1
Desarrollo 2
Ejercicio 1 3
Ejercicio 2 4
Ejercicio 3 5
Ejercicio 4 6
Ejercicio 5 7
Ejercicio 6 8

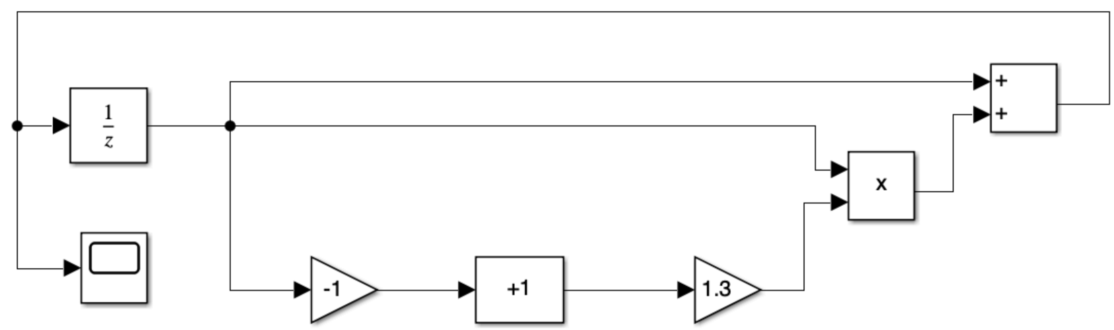
Introducción

En esta práctica se trabajarán con sucesiones dinámicas haciendo uso de MATLAB. En concreto se estudiará el modelo logístico visto en clase $x_{n+1} = x_n + a(1 - x_n)x_n$ y sus características, anticipadas ya en clase. Cabe recalcar que no se tendrá en cuenta lo visto en clase, si no que se llegará a las conclusiones mediante el estudio. Para esto se realizarán diferentes modelos en Simulink con condiciones iniciales diferentes y varios valores para el parámetro a.

Desarrollo

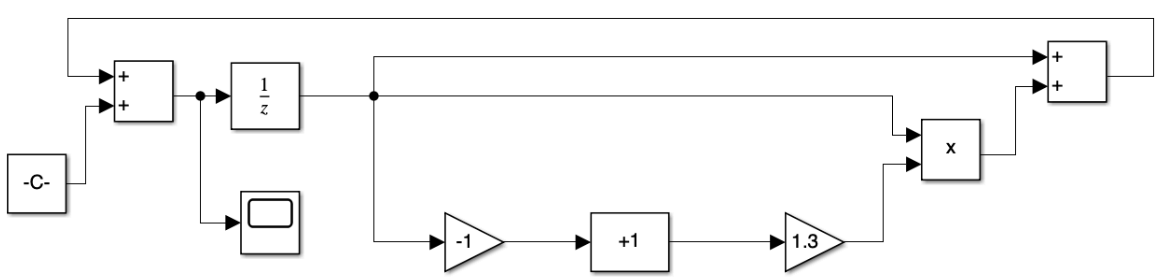
Para el desarrollo se seguirán los ejercicios propuestos haciendo un análisis profundo de los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

Primero de todo, el modelo de Simulink con el que estaremos trabajando es el siguiente:



La rama de abajo representa el paréntesis de la sucesión el cual se multiplica por a y, posteriormente, x_n, sumando finalmente a todo esto x_n. Las condiciones iniciales se definen en el bloque Unit Delay. En esta práctica las condiciones inciales serán un vector de 5 valores aleatorios dentro del intervalo (0,2) para así poder observar el comportamiento del sistema para diferentes condiciones iniciales.

Es importante mencionar que para comportamientos a largo plazo utilizaremos el mismo modelo con una pequeña diferencia. El modelo es el siguiente:

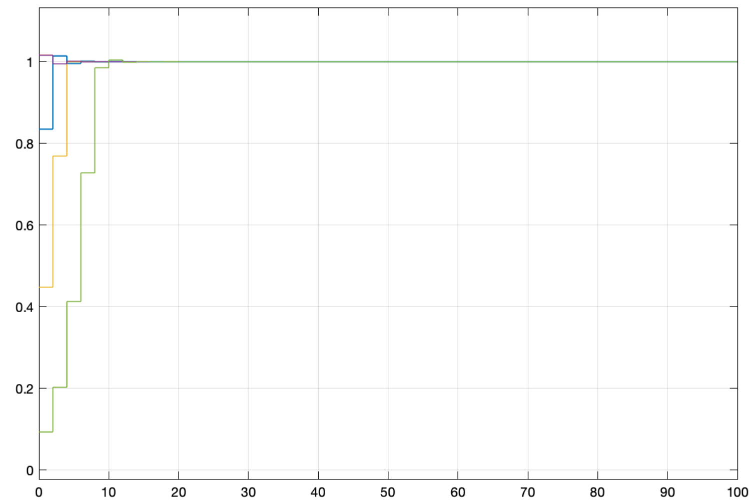


En este lo que se ha añadido es una constante aleatoria del orden 10^{-5} como *posibles perturbaciones* para ver si el modelo cambia con estas.

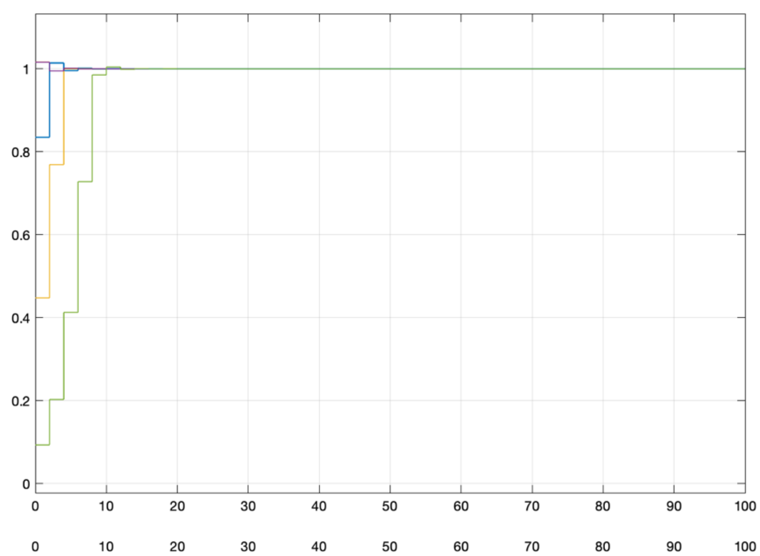
Ejercicio 1

Órbita de x_n para $n = 1{:}100$ con $a = 1.3$

Con este valor de a podemos observar en la siguiente gráfica que las diferentes condiciones iniciales tienden hacia el valor 1 (el cual vimos que era el único estable de este sistema) y finalmente se estabilizan en este, sin importar si la condición inicial era superior o inferior a 1.



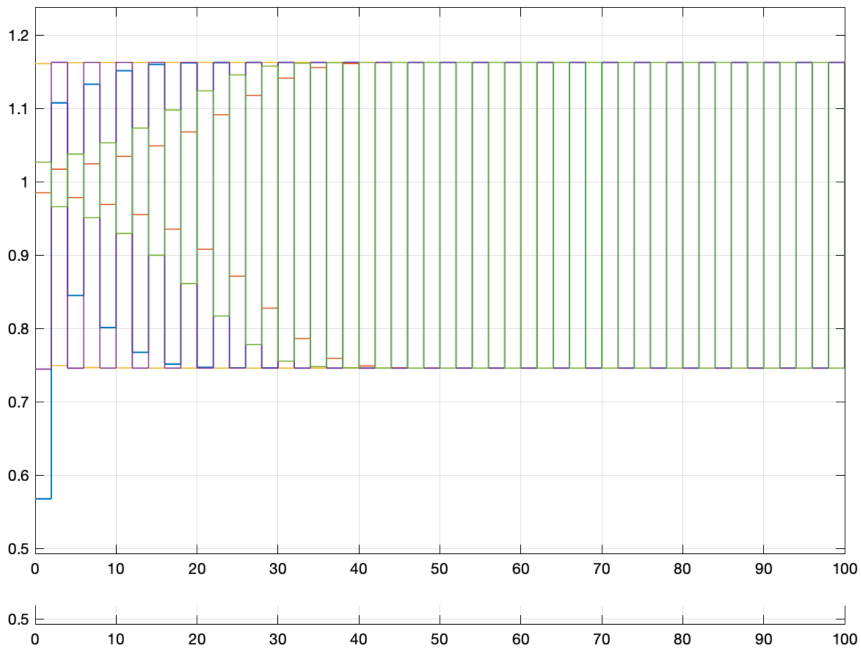
En cuanto el modelo con perturbaciones para observar comportamientos a largo plazo con posibles existencias de estas, vemos como igualmente el valor tiene a 1 sin importar las posibles perturbaciones. Confirmamos que con $a = 1.3$, el sistema se estabiliza siempre en 1.



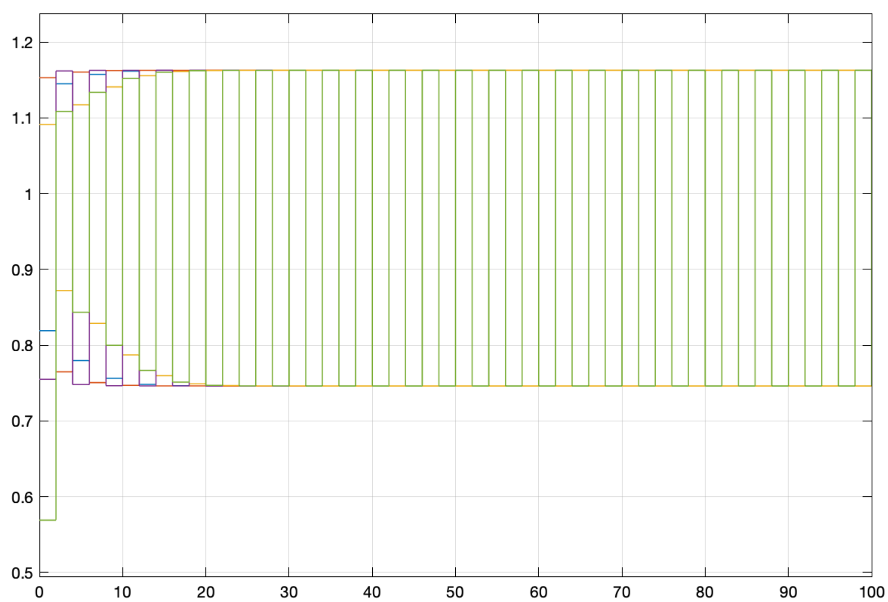
Ejercicio 2

Órbita de x_n para $n = 1{:}100$ con $a = 2.2$

Con este valor de a observamos dos diferencias respecto al modelo anterior. Primero, en el estado transitorio, podemos observar cómo el valor de oscila alrededor de uno cambiando de posición (superior o inferior a este). Esto sigue sucediendo mientras se acerca a los dos valores que componen una oscilación



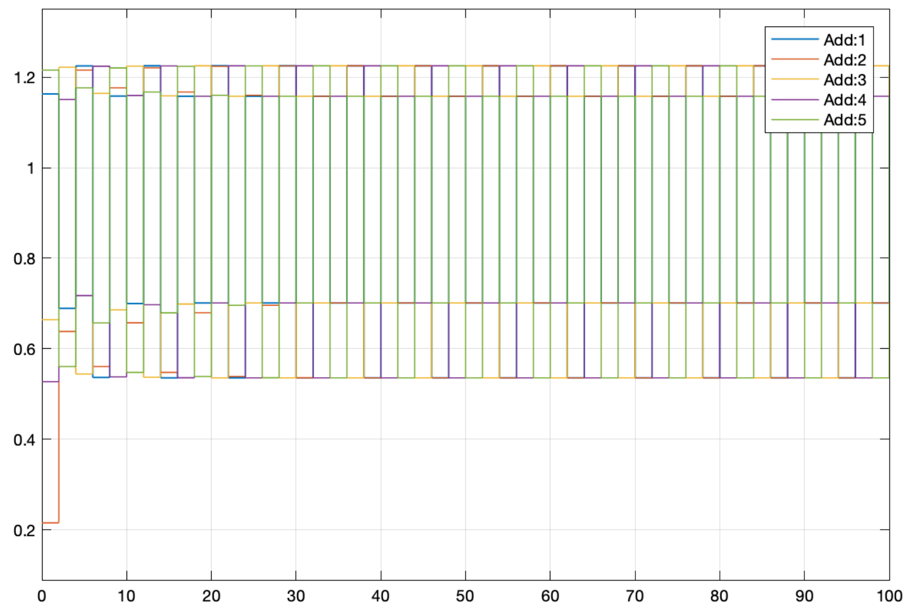
estacionaria entre estos alrededor de uno. En cuanto al comportamiento a largo plazo, en vez de estabilizarse en 1, oscila entre **dos** valores en estado estacionario alrededor de este indefinidamente sin importar posibles perturbaciones.



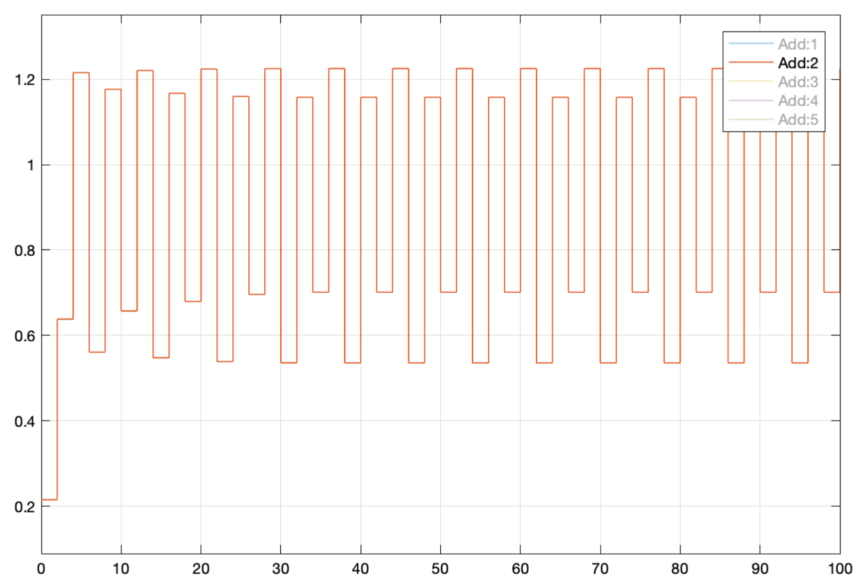
Ejercicio 3

Órbita de x_n para $n = 1{:}100$ con $a = 2.5$

Para estas condiciones, podemos observar como el comportamiento transitorio es similar al del Ejercicio 2. No obstante, a diferencia del 2 que era como una amplificación hasta el *estado estacionario*, este parece algo más *aleatorio* ya que oscila entre varios valores aumentando y disminuyendo la distancia al valor 1.



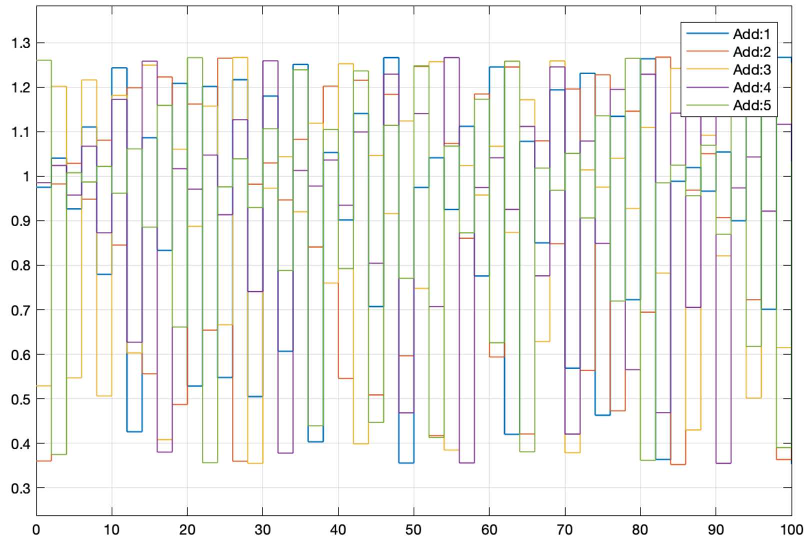
En cuanto el comportamiento a largo plazo, podemos observar que en vez de oscilar por 2 puntos lo hace por 4. En cuanto al modelo con existencia de perturbaciones, podemos observar que se mantiene oscilando entre los puntos en un *estado estacionario* alrededor de estos.



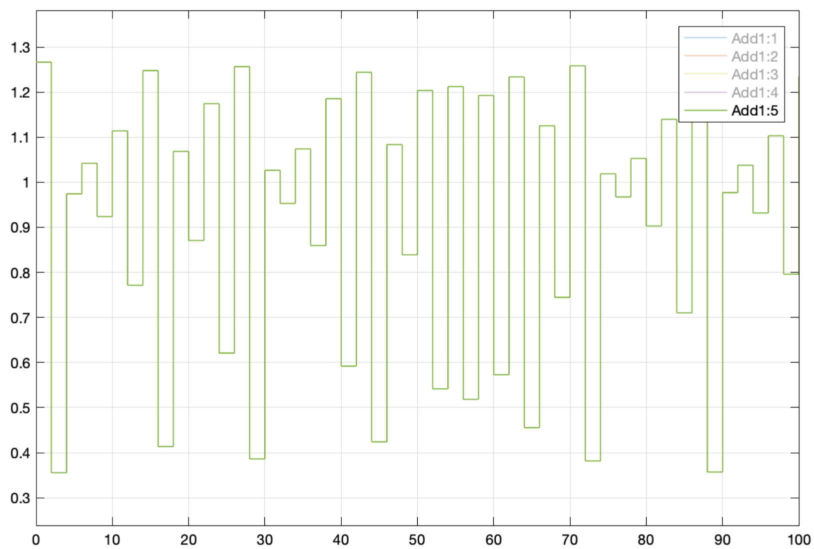
Ejercicio 4

Órbita de x_n para $n = 1{:}100$ con $a = 2.7$

Con un valor para a de 2.7 empieza a parecer que los valores son totalmente aleatorios y que no se puede predecir un patrón en estos. Es por esto por lo que podríamos decir que el patrón transitorio es *aleatorio* (no podemos predecir valores del futuro) aunque realmente estos vengan



de una función de sucesión discreta. En cuanto al comportamiento a largo plazo podríamos decir que es parecido al transitorio puesto que, como el *estado estacionario* es oscilar entre tanta cantidad de valores realmente parece aleatorio. Por otra parte, la existencia de perturbaciones

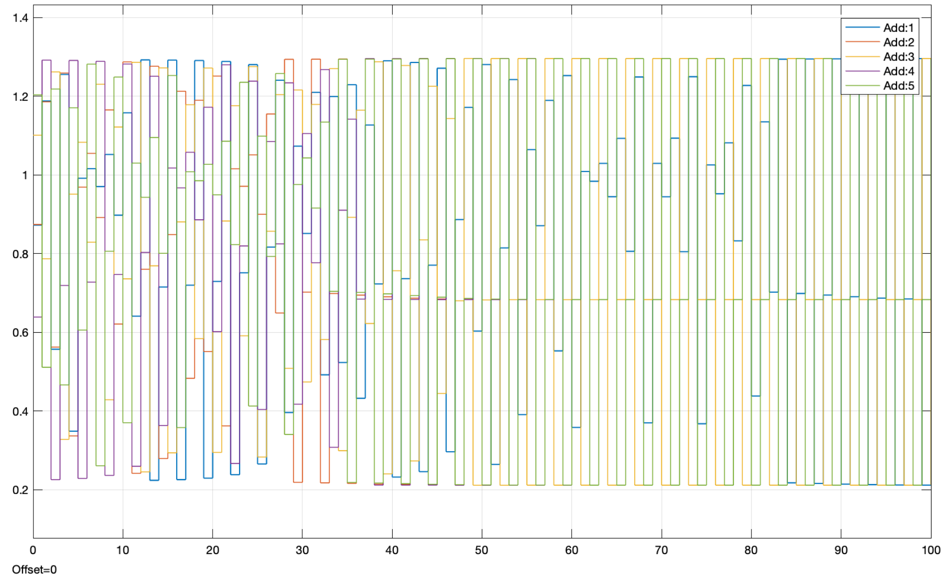


puede alterar el sistema puesto que, en caso de que exista una el sistema podría *perder* el patrón y cambiar el siguiente valor de este. Es decir, como si cambiase a otro punto de partida en este. Sin embargo, los valores por los que oscila siempre son los mismos.

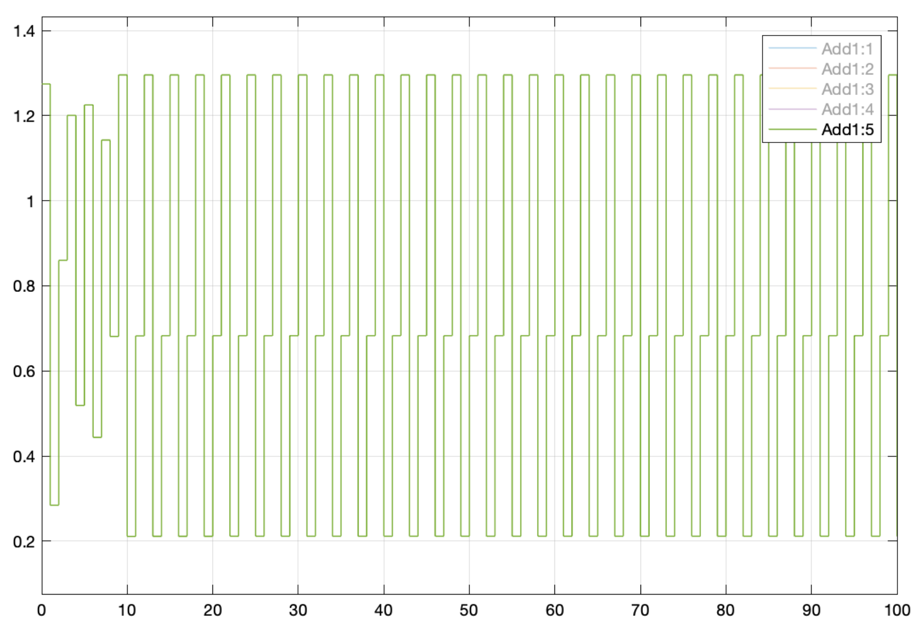
Ejercicio 5

Órbita de x_n para $n = 1: 100$ con $a = 2.83$

Para estas condiciones, podemos observar como el comportamiento transitorio es similar al del Ejercicio 3, e incluso el 2. En su estado transitorio oscila entre varios valores hasta que alcanza su



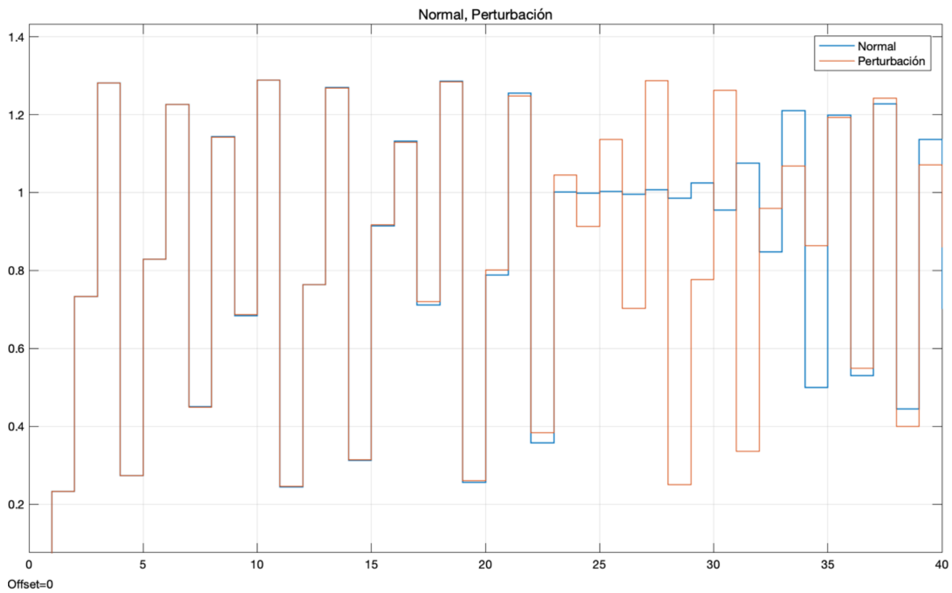
estado estacionario tras un largo plazo. Su comportamiento a largo plazo, como se puede observar, es oscilar alrededor de 3 valores. Este modelo no es sensible a perturbaciones ya que como podemos observar se mantiene entre los tres valores *fijos*.



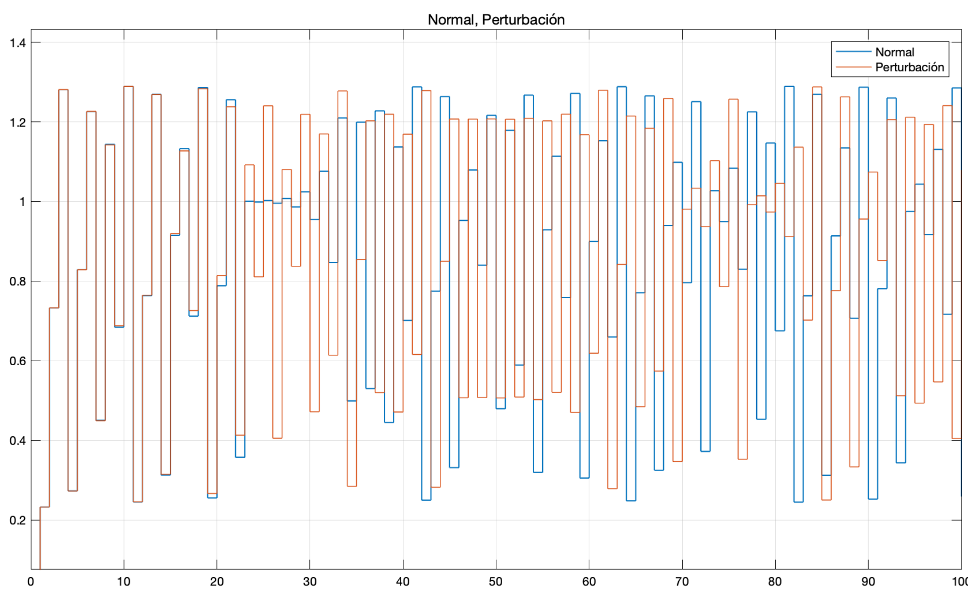
Ejercicio 6

Órbita de x_n para $n = 1{:}100$ con $a = 2.8$ (caótico)

Para este ejercicio tomamos el valor de a para el cual el sistema es caótico. Este es 2.8. Para poder observar este comportamiento caótico (sensibilidad a pequeños cambios) realizamos el mismo modelo para dos valores. Uno es 1.34 y otro es el mismo más una perturbación aleatoria del orden de 10^{-5}. Podemos observar en la gráfica que en el comportamiento transitorio se mantiene esa pequeña diferencia, pero a medida que pasa el tiempo esa diferencia aumenta



llegando a crear valores totalmente diferentes a partir de $t = 24$. De hecho, si observamos el comportamiento a mayor largo plazo (100 iteraciones) podemos ver como toman valores totalmente diferentes. Es por eso por lo que se considera un modelo caótico para el valor definido de a.



Ejercicio 7

Dibujar diagrama de bifurcación (código en MATLAB)

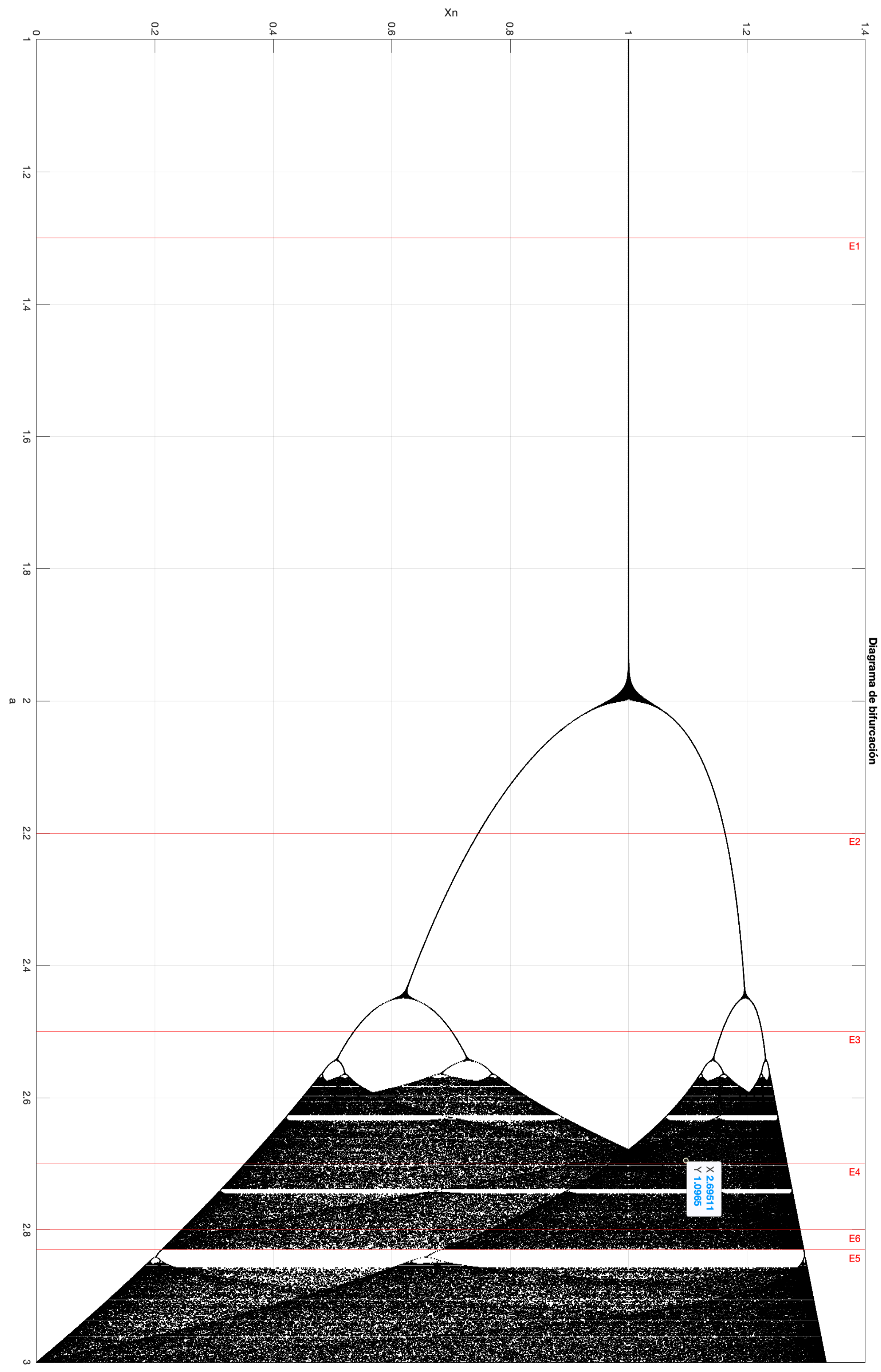


Figura 1

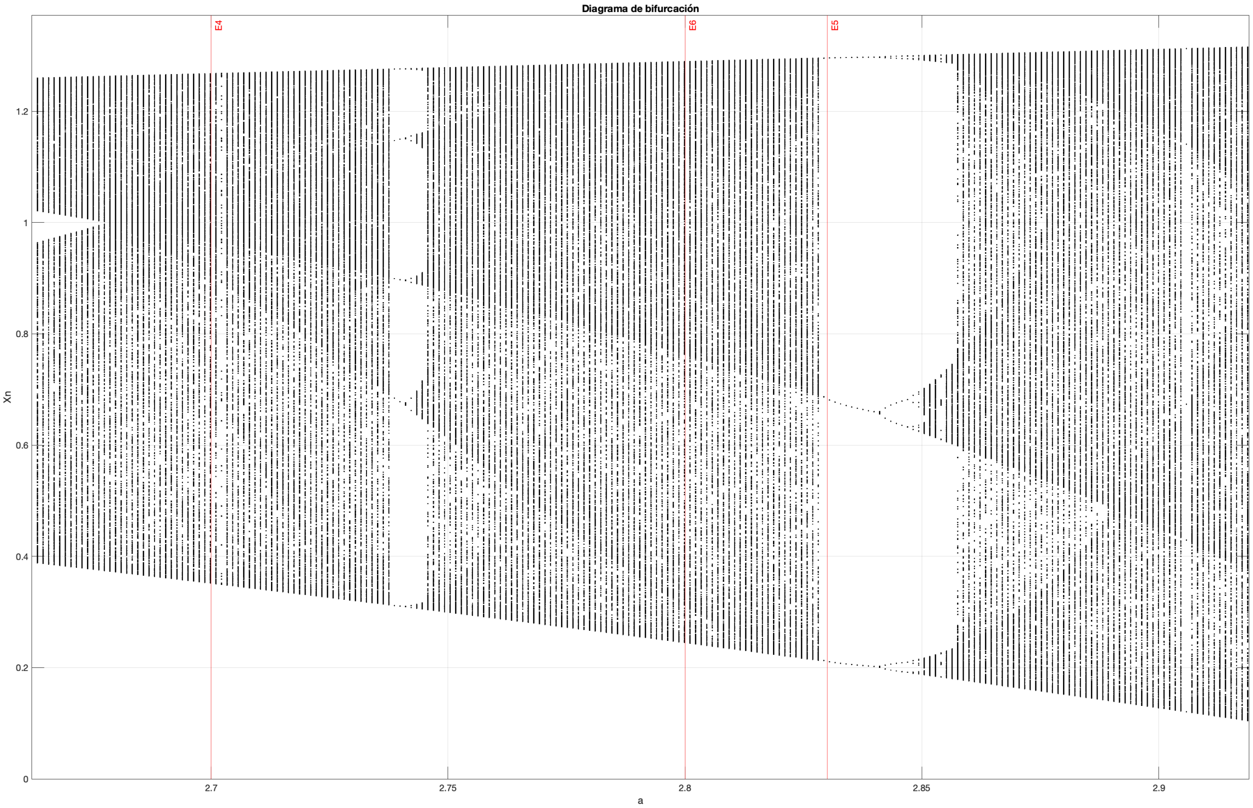


Diagrama de bifurcación
E4
E6
E5
Xn
a
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2.7
2.75
2.8
2.85
2.9

Figura 2

Ejercicio 8

Caso 1 ($a = 1.3$)

En cuanto al caso 1, se observa que solo hay un valor para x estable que es 1. Esto se confirma con el diagrama de bifurcación en el que para todo valor de $a <\approx 2$ todos los modelos tienden a 1 y se estabilizan en este punto

Caso 2 ($a = 2.2$)

En cuanto al caso 2, se observa que x tiende a oscilar entre dos valores en un *estado estacionario*. Esto se confirma con el diagrama de bifurcación donde para $a = 2.2$ existen dos posibles valores de x. Estos son aproximadamente $x = 0.76$ y $x = 1.16$. Tras alcanzar uno de estos valores el sistema oscila entre ambos de forma estable.

Caso 3 ($a = 2.5$)

En cuanto al caso 3, sucede lo mismo que con el caso 2 pero con 4 valores para x. Esto se confirma con el diagrama de bifurcación dónde se observa que para $a = 2.5$ el diagrama se ha bifurcado ya dos veces y existen cuatro posibles valores para x entre los que el sistema oscila establemente.

Caso 4 ($a = 2.7$)

En cuanto al caso 4, el sistema se comporta de forma diferente. En el ejercicio 4 se ha llegado a la conclusión de que el sistema se comporta de forma *pseudoaleatoria*. Es decir, existen tantos valores por los que oscila *establemente* que parece aleatorio. Esto se confirma con el gráfico de bifurcación (Figura 2) donde se observa que, debido a la cantidad de bifurcaciones anteriores, existen muchos posibles valores para x haciendo posible ese comportamiento *aleatorio*.

Caso 5 ($a = 2.83$)

En cuanto al caso 5, se ha comprobado que el sistema vuelve a converger a una oscilación entre pocos valores, concretamente 3. Esto se confirma con el diagrama de bifurcación donde se puede observar que para $a = 2.83$ solo existen tres posibles valores de x.

Caso 6 ($a = 2.8$)

En cuanto al caso 6, se ha comprobado su comportamiento caótico debido a su gran cambio causado por muy pequeñas perturbaciones. Su comportamiento es *pseudoaleatorio*, similar al caso 4. No obstante, como se observa en la gráfica, para el valor 2.8 existen aún más valores de x posibles por lo que lo hace *más aleatorio* (que realmente no ya que está definido por una sucesión). Como se ha explicado en el ejercicio 6 un cambio pequeño en el valor supondría un cambio de posición en la sucesión por lo que supondría un comportamiento impredecible.

Conclusión

Con esta práctica se ha podido estudiar el comportamiento de una ecuación discreta la cual, en función de uno de sus parámetros su comportamiento es totalmente diferente, pudiendo pasar de uno estable a uno totalmente caótico. Además, se ha trabajo con la herramienta de MATLAB mejorando así su manejo y conocimiento sobre esta.