Práctica 2

Índice

Introducción

En esta práctica se explora la aplicación del método numérico de Runge-Kutta de orden 4 para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y sistemas de EDO acopladas. Este método normalmente se utiliza en problemas de matemáticas aplicadas y física debido a que proporciona soluciones numéricas precisas y eficientes para las EDO de primer y segundo orden.

Primero, se abordará el caso de una EDO de primer orden y compararemos la solución numérica obtenida con el método de Runge-Kutta con su solución analítica. Luego, se utilizará el método para resolver sistemas de EDO acopladas y una EDO de segundo orden, en particular, una de un oscilador armónico simple. Finalmente, se aplicarádicho método para resolver dos modelos epidemiológicos:

1. Modelo SIS
2. Modelo SIR

Además, se analizará cómo varía el comportamiento de estos modelos en función de diferentes condiciones iniciales y parámetros. Estas simulaciones permitirán comprender la dinámica de las epidemias y cómo se propagan las enfermedades en una población haciendo uso de dichos modelos.

Desarrollo

A continuación se comienza con el desarrollo de la práctica.

Ejercicio 1

Resolver la siguiente EDO de primer orden mediante el método de RungeKutta de orden 4. Resolver también la EDO analíticamente. Comparar las soluciones.

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv f'(t) = -5f(t), \quad f(0) = 100$$

Solución Analítica

A continuación se definen los pasos para obtener la solución analítica de la ecuación diferencial

Paso 1: Identificar tipo de ecuación diferencial

$$\text{Ec. dif. lineal de primer orden:} \quad \frac{df(t)}{dt} + 5f(t) = 0$$

Paso 2: Sacar el factor integrante

$$\text{Factor integrante:} \quad e^{\int 5dt} = e^{5t}$$

Paso 3: Multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante

$$e^{5t}\frac{df(t)}{dt} + 5e^{5t}f(t) = 0$$

Paso 4: Se observa que el lado izquierdo es la derivada del producto del factor integrante y la función

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}f(t)) \equiv e^{5t}\frac{df(t)}{dt} + 5e^{5t}f(t) = 0$$

Paso 5: Integrar ambos lados

$$\int \frac{d}{dt}(e^{5t}f(t))dt = \int 0dt$$

Paso 6: Resolver las integrales y despejar la función

$$e^{5t}f(t) = C \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ce^{-5t}$$

Paso 7: Utilizar la condición inicial para obtener la constante C y definir solución analítica

$$f(0) = Ce^{-5(0)} = C \quad \Rightarrow \quad C = 100$$

$$f(t) = 100e^{-5t}$$

Una vez obtenemos la solución analítica calculamos 100 valores equitativamente distribuidos entre t = 0 y t = 2 para su posterior comparación con la solución numérica (*RungeKutta de cuarta orden*)

```
% Solución analítica
t0 = 0; % Tiempo inicial
tf = 2; % Tiempo final
N_steps = 100; % Número de pasos
t = linspace(t0, tf, N_steps + 1); % Array de tiempos
f_analytical = 100 * exp(-5 * t); % Solución analítica
```

Solución Numérica

A continuación se calculan los valores de la solución de la ecuación diferencial propuesta mediante el método de *RungeKutta de cuarto orden* para 100 valores equitativamente distribuidos entre t = 0 y t = 2.

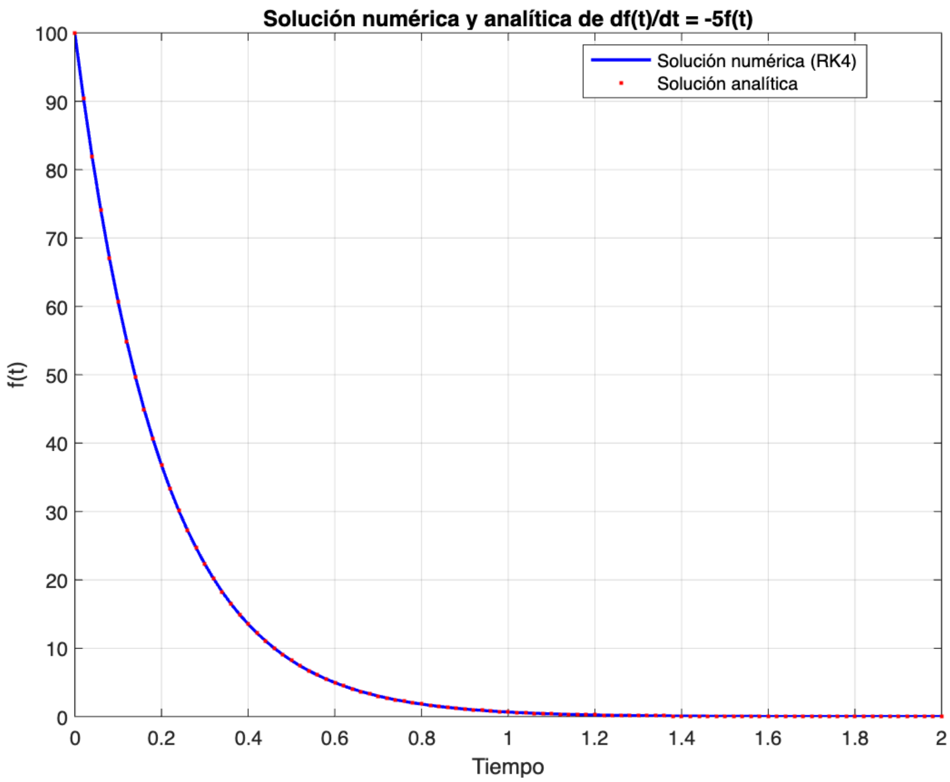
```
% Definición de la EDO y parámetros
f = @(t, r) -5 * r; % Definición de la función f(t)

t0 = 0; % Tiempo inicial
tf = 2; % Tiempo final
N_steps = 100; % Número de pasos
dt = (tf - t0) / N_steps; % Tamaño del paso
t = linspace(t0, tf, N_steps + 1); % Array de tiempos

r = zeros(size(t)); % Array vacío de valores de r(t)
r(1) = 100; % Condición inicial

% Método de Runge-Kutta de cuarto orden
for i = 2:N_steps+1
    k1 = f(t(i-1), r(i-1));
    k2 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k1);
    k3 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k2);
    k4 = f(t(i-1) + dt, r(i-1) + dt * k3);
    r(i) = r(i-1) + (dt / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
end
```

Comparación

Finalmente, comparamos ambas soluciones:

```
% Graficar solución numérica y analítica en un mismo plot
plot(t, r, 'b', t, f_analytical, '.r', 'LineWidth', 1.5);
```

```
xlabel('Tiempo');
ylabel('f(t)');
title('Solución numérica y analítica de df(t)/dt = -5f(t)');
legend('Solución numérica (RK4)', 'Solución analítica', 'Location', 'best');
grid on;
```



Podemos observar como obtenemos el mismo comportamiento tanto con la solución analítica como con la aproximación mediante el método *RungeKutta de cuarto orden*.

Ejercicio 2

```
clc, clear
```

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones acopladas mediante el método de Runge-Kutta de orden 4.

$$\begin{cases} a'(t) = a(t)b^3(t) + b(t)\sin^2(a(t)) \\ b'(t) = (|\cos(t)| + 1.1)b^2(t)a(t) \end{cases}, \text{ con } \begin{cases} a(0) = 0.1, \\ b(0) = 0.2. \end{cases}$$

Solución numérica

A continuación se muestra la resolución del sistema de ecuaciones acopladas mediante el método *RungeKutta de cuarto orden*

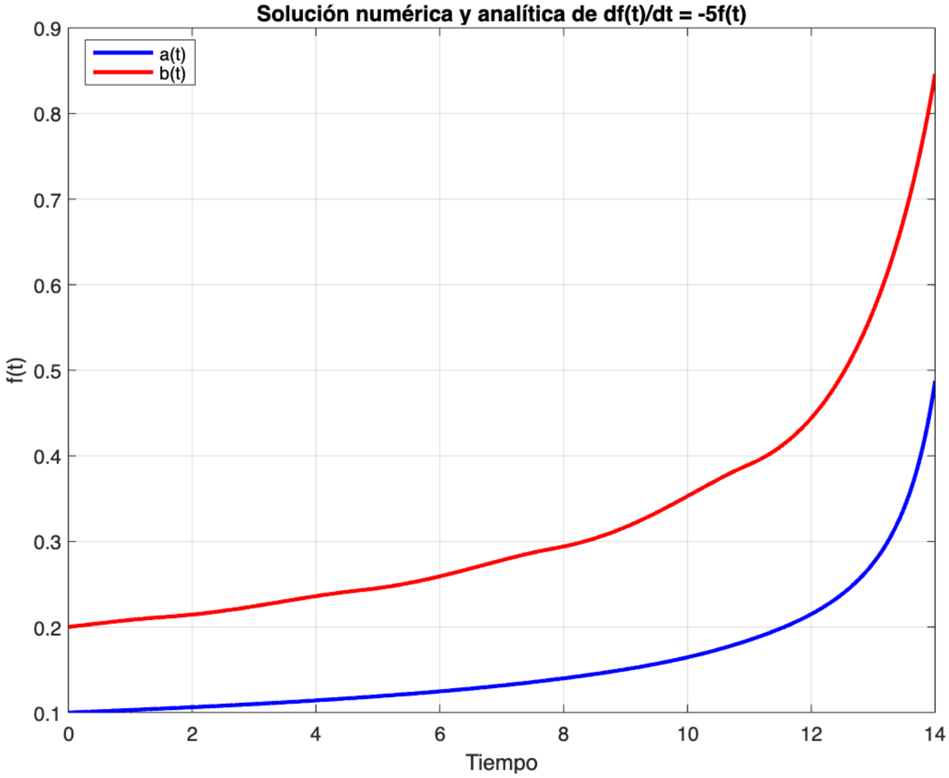
```
% Definición de las funciones
f = @(t, a, b) a * b^3 + b * sin(a)^2;
```

```
g = @(t, a, b) (abs(cos(t)) + 1.1) * b^2 * a;

% Condiciones iniciales
a0 = 0.1;
b0 = 0.2;

% Parámetros del método numérico
t0 = 0;
tf = 14; % Por ejemplo, un tiempo final de 10
N_steps = 1000;
dt = (tf - t0) / N_steps;

% Arrays para almacenar las soluciones
t = linspace(t0, tf, N_steps + 1);
a = zeros(size(t));
b = zeros(size(t));
a(1) = a0;
b(1) = b0;

% Método de Runge-Kutta de cuarto orden
for i = 2:N_steps+1
    k1 = f(t(i-1), a(i-1), b(i-1));
    m1 = g(t(i-1), a(i-1), b(i-1));
    k2 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, a(i-1) + 0.5 * dt * k1, b(i-1) + 0.5 * dt *
m1);
    m2 = g(t(i-1) + 0.5 * dt, a(i-1) + 0.5 * dt * k1, b(i-1) + 0.5 * dt *
m1);
    k3 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, a(i-1) + 0.5 * dt * k2, b(i-1) + 0.5 * dt *
m2);
    m3 = g(t(i-1) + 0.5 * dt, a(i-1) + 0.5 * dt * k2, b(i-1) + 0.5 * dt *
m2);
    k4 = f(t(i-1) + dt, a(i-1) + dt * k3, b(i-1) + dt * m3);
    m4 = g(t(i-1) + dt, a(i-1) + dt * k3, b(i-1) + dt * m3);
    a(i) = a(i-1) + (dt / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    b(i) = b(i-1) + (dt / 6) * (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4);
end
```

Visualización de resultados

Posteriormente, se grafican y observan los resultados.

```
% Graficar solución numérica y analítica en un mismo plot
plot(t, a, 'b', t, b, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo');
ylabel('f(t)');
title('Solución numérica y analítica de df(t)/dt = -5f(t)');
legend('a(t)', 'b(t)', 'Location', 'best');
grid on;
```



Ejercicio 3

```
clc, clear
```

Resolver la siguiente ecuación diferencial de orden 2. Para ello, expresarla como un sistema de dos EDOs de primer orden acoplada (una para la posición y otra para la velocidad). Esta es la EDO que describe un oscilador armónico simple. Resolver analíticamente la ecuación. Hacer un plot comparando las dos soluciones (analítica y numérica).

$$r''(t) + 52r(t) = 0, \quad r(0) = \frac{\pi}{2}, \quad r'(0) \equiv v(0) = 0.$$

Solución Analítica

A continuación se definen los pasos para obtener la solución analítica de la ecuación diferencial:

Paso 1: Identificar el tipo de ecuación diferencial

Ec. dif. lineal de 2do orden con coefs constantes

$$r''(t) + 52r(t) = 0$$

Paso 2: Sacar y resolver la ecuación característica

$$\text{Ecuación característica:} \quad m^2 + 52 = 0$$

$$m^2 = -52 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{-52} = \pm 2\sqrt{13}\, i$$

Paso 4: Escribir solución general

$$r(t) = C_1 \cos(2\sqrt{13}\, t) + C_2 \sin(2\sqrt{13}\, t)$$

Paso 5: Usar condiciones iniciales para obtener las constantes C1 y C2 y definir la solución analítica

$$r(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$r'(t) = -2\sqrt{13}\, C_1 \sin(2\sqrt{13}\, t) + 2\sqrt{13}\, C_2 \cos(2\sqrt{13}\, t)$$
$$r'(0) = 0 = -2\sqrt{13}\, C_1 \sin(0) + 2\sqrt{13}\, C_2 \cos(0) = 2\sqrt{13}\, C_2$$
$$C_2 = 0$$

SOLUCIÓN:

$$r(t) = \frac{\pi}{2} \cos(2\sqrt{13}\, t)$$

Una vez obtenemos la solución analítica calculamos 200 valores equitativamente distribuidos entre t = 0 y t = 4 para su posterior comparación con la solución numérica (*RungeKutta de cuarta orden*)

```
% Parámetros del método numérico
t0 = 0;
tf = 4; % Por ejemplo, un tiempo final de 2
N_steps = 200;

% Arrays para almacenar las soluciones
t = linspace(t0, tf, N_steps + 1);

% Solución analítica
r_analytical = pi/2 * cos(5 * t);
```

Solución Numérica

A continuación se calculan los valores de la solución de la ecuación diferencial propuesta mediante el método de *RungeKutta de cuarto orden* para 200 valores equitativamente distribuidos entre t = 0 y t = 4.

```
% Definir las funciones
```

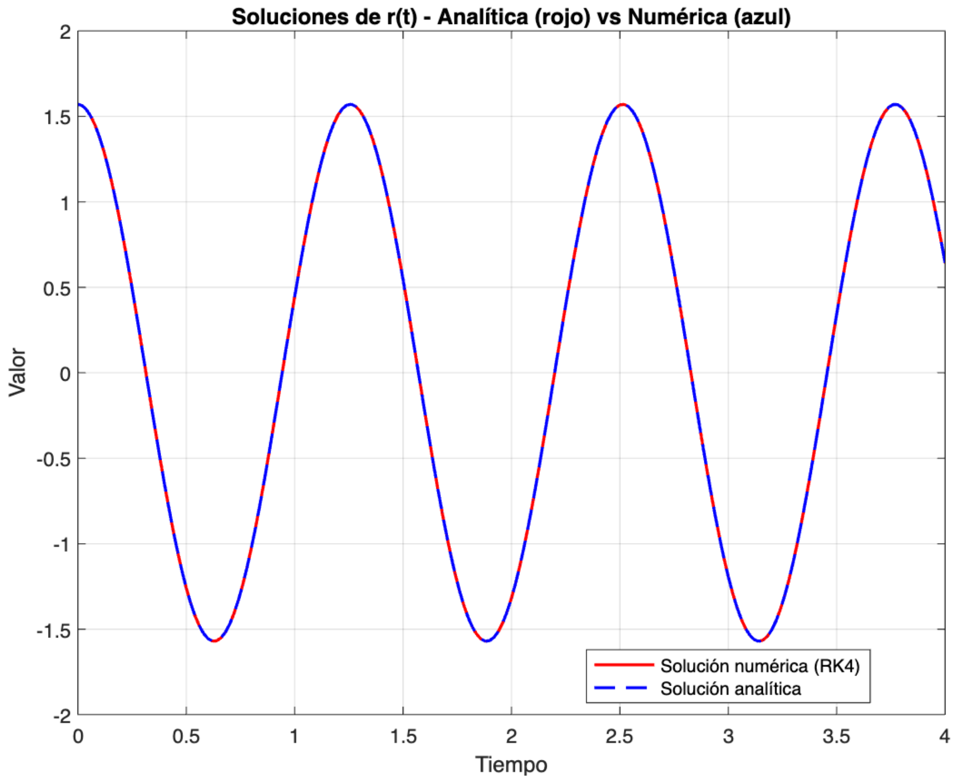
```
f = @(t, r, v) v;
g = @(t, r, v) -25 * r;

% Condiciones iniciales
r0 = pi/2;
v0 = 0;

% Parámetros del método numérico
t0 = 0;
tf = 4; % Por ejemplo, un tiempo final de 2
N_steps = 200;
dt = (tf - t0) / N_steps;

% Arrays para almacenar las soluciones
t = linspace(t0, tf, N_steps + 1);
r = zeros(size(t));
v = zeros(size(t));
r(1) = r0;
v(1) = v0;

% Método de Runge-Kutta de cuarto orden
for i = 2:N_steps+1
    k1 = f(t(i-1), r(i-1), v(i-1));
    m1 = g(t(i-1), r(i-1), v(i-1));
    k2 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k1, v(i-1) + 0.5 * dt *
m1);
    m2 = g(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k1, v(i-1) + 0.5 * dt *
m1);
    k3 = f(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k2, v(i-1) + 0.5 * dt *
m2);
    m3 = g(t(i-1) + 0.5 * dt, r(i-1) + 0.5 * dt * k2, v(i-1) + 0.5 * dt *
m2);
    k4 = f(t(i-1) + dt, r(i-1) + dt * k3, v(i-1) + dt * m3);
    m4 = g(t(i-1) + dt, r(i-1) + dt * k3, v(i-1) + dt * m3);
    r(i) = r(i-1) + (dt / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
    v(i) = v(i-1) + (dt / 6) * (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4);
end
```

Comparación

Finalmente, se comparan los resultados de la solución analítica con la solución numérica.

```
% Gráfica de las soluciones
figure;
plot(t, r, 'r', t, r_analytical, '--b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('Valor');
title('Soluciones de r(t) - Analítica (rojo) vs Numérica (azul)');
```

```
legend('Solución numérica (RK4)', 'Solución analítica', 'Location', 'best');
grid on;
```



Podemos observar como obtenemos el mismo comportamiento de oscilador armónico tanto con la solución analítica como con la aproximación mediante el método *RungeKutta de cuarto orden*.

Ejercicio 4

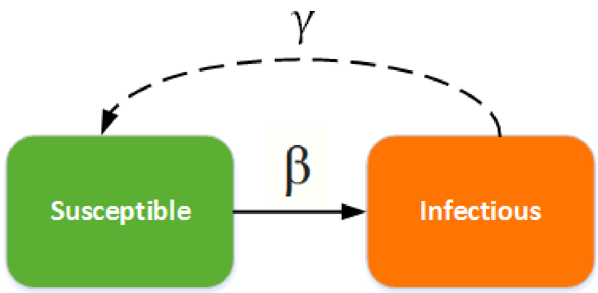
```
clc, clear
```

Modelo SIS. Utilizar el método Runge-Kutta de orden 4 para resolver el modelo SIS estudiado en clase para los parámetros α = 0.001, β = 0.22, con tmax = 60, y para los siguientes sets de condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & S(0) = 1000, \quad I(0) = 10 \\ \text{(b)} & S(0) = 400, \quad I(0) = 10 \\ \text{(c)} & S(0) = 150, \quad I(0) = 140 \end{array}$$

Recordar que el modelo SIS (*Susceptible-Infectious-Susceptible*) es*:*

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I,$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

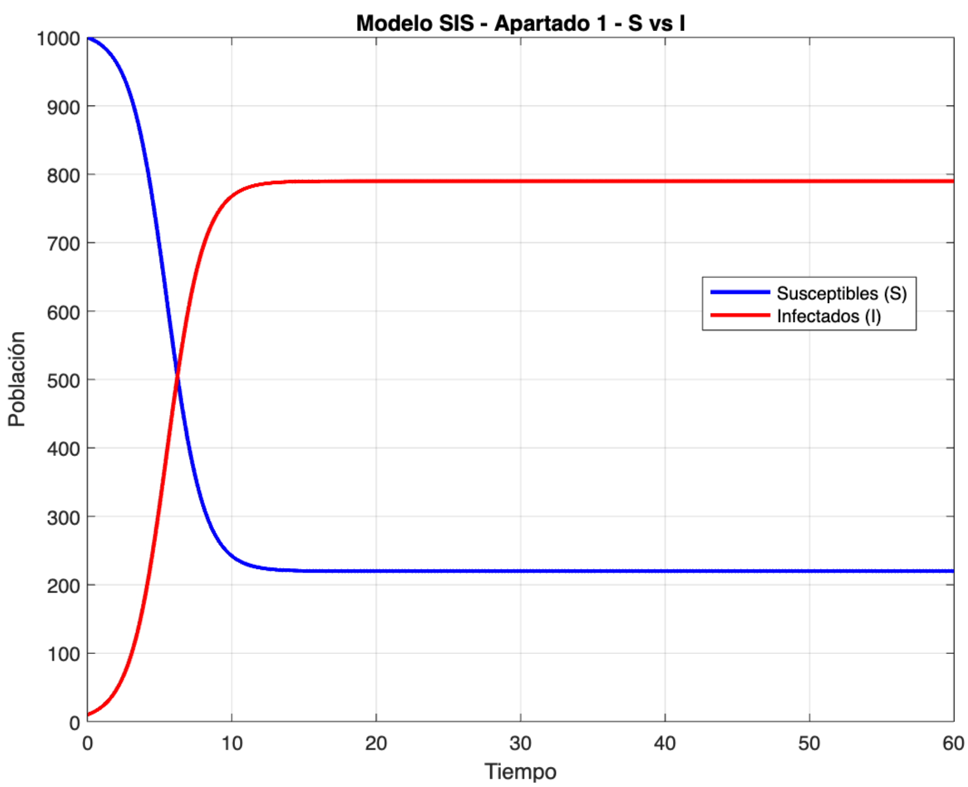


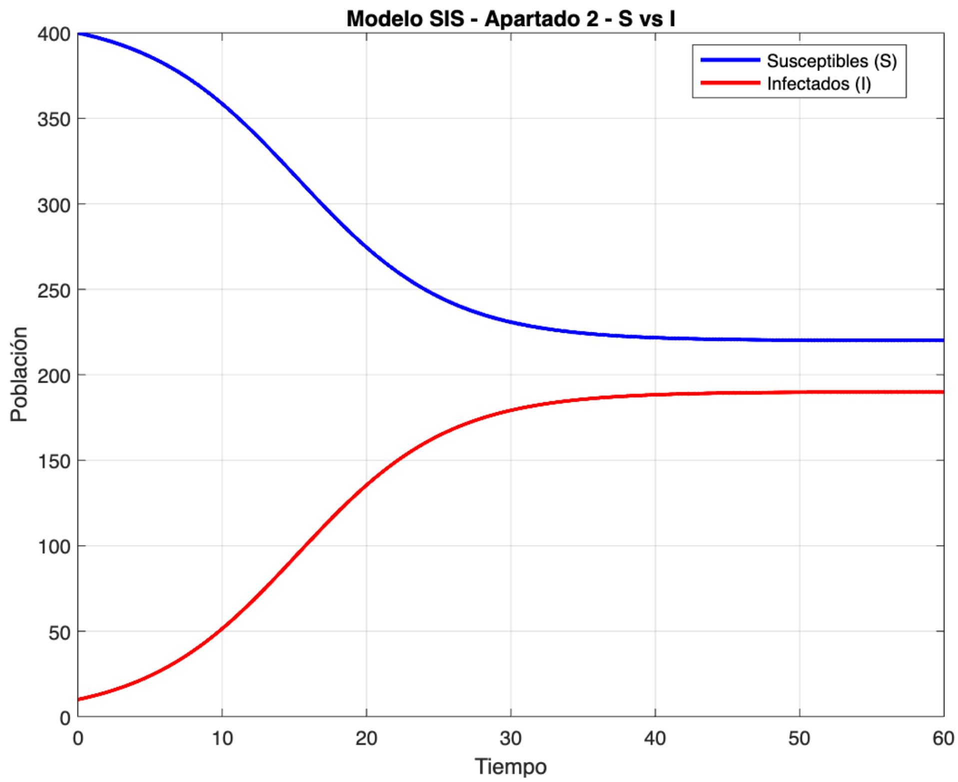
(tener en cuenta que α = β y β = γ*)*

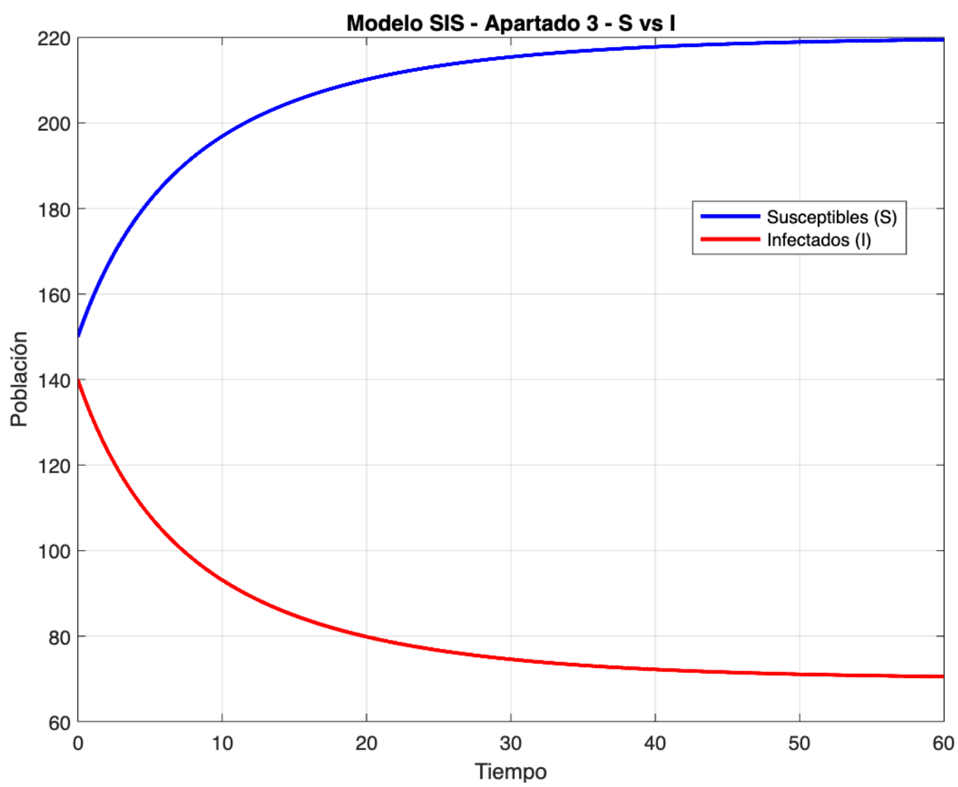
Solución Numérica y Visualización

```
% Definición de las funciones
alpha = 0.001;
beta = 0.22;

f = @(S, I) -alpha * S * I + beta * I;
g = @(S, I) alpha * S * I - beta * I;

% Parámetros del método numérico
t0 = 0;
tmax = 60;
N_steps = 6000; % Dividir el intervalo de tiempo en pasos pequeños
dt = (tmax - t0) / N_steps;

% Sets de condiciones iniciales
sets_iniciales = [
    struct('S0', 1000, 'I0', 10);
    struct('S0', 400, 'I0', 10);
    struct('S0', 150, 'I0', 140)
];

for set = 1:length(sets_iniciales)
    S0 = sets_iniciales(set).S0;
    I0 = sets_iniciales(set).I0;

    % Arrays para almacenar las soluciones
    t = linspace(t0, tmax, N_steps + 1);
    S = zeros(size(t));
    I = zeros(size(t));
    S(1) = S0;
    I(1) = I0;
```

```
    % Método de Runge-Kutta de cuarto orden
    for i = 2:N_steps+1
        k1 = f(S(i-1), I(i-1));
        m1 = g(S(i-1), I(i-1));
        k2 = f(S(i-1) + 0.5 * dt * k1, I(i-1) + 0.5 * dt * m1);
        m2 = g(S(i-1) + 0.5 * dt * k1, I(i-1) + 0.5 * dt * m1);
        k3 = f(S(i-1) + 0.5 * dt * k2, I(i-1) + 0.5 * dt * m2);
        m3 = g(S(i-1) + 0.5 * dt * k2, I(i-1) + 0.5 * dt * m2);
        k4 = f(S(i-1) + dt * k3, I(i-1) + dt * m3);
        m4 = g(S(i-1) + dt * k3, I(i-1) + dt * m3);
        S(i) = S(i-1) + (dt / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
        I(i) = I(i-1) + (dt / 6) * (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4);
    end

    % Gráfica de las soluciones
    figure;
    plot(t, S, 'b', t, I, 'r', 'LineWidth', 2);
    xlabel('Tiempo');
    ylabel('Población');
    title(sprintf('Modelo SIS - Apartado %d - S vs I', set));
    legend('Susceptibles (S)', 'Infectados (I)', 'Location', 'best');
    grid on;
end
```




Modelo SIS - Apartado 2 - S vs I
Susceptibles (S)
Infectados (I)
Población
Tiempo


Modelo SIS - Apartado 3 - S vs I
Susceptibles (S)
Infectados (I)
Población
Tiempo

Preguntas

1.Comentar si los resultados obtenidos encajan con lo que esperaríamos. 2.¿En qué caso se produce una epidemia? 3.¿Podíamos haber predicho esto mediante algún resultado analítico visto en clase?

En el modelo SIS, nos encontramos dos tipos de individuos: los susceptibles (S) y los infectados (I) los cuales pueden regresar a ser susceptibles nuevamente. Los parámetros α y β representan las tasas de infección y recuperación respectivamente (en este caso, α = 0.001 y β = 0.22). Con estos parámetros y las condiciones iniciales dadas [(a) S(0) = 1000, I(0) = 10: (b) S(0) = 400, I(0) = 10: (c) S(0) = 150, I(0) = 140] podemos responder a las preguntas:

1. Las epidemias se producen en las condiciones iniciales del apartado (a) (S(0) = 1000, I(0) = 10) y (b) (S(0) = 400, I(0) = 10)
2. Sabiendo las condiciones iniciales y los parámetros tenemos dos casos con los que podemos diferenciar si se produce epidemia o no. Estos son:

$$I(0) < N - \frac{\beta}{\alpha}, \text{ se produce endemia y epidemia}$$
$$I(0) > N - \frac{\beta}{\alpha}, \text{ se produce endemia pero no epidemia}$$

Con estas condiciones podemos comprobar para los apartados.

$$\text{(a) } I(0) = 10 \text{ y } S(0) = 1000 \text{ luego } N = 1010 \text{ entonces } 10 < 1010 - \frac{\beta}{\alpha} = 1010 - 220 = 790$$

Se producirá epidemia

$$\text{(b) } I(0) = 10 \text{ y } S(0) = 400 \text{ luego } N = 410 \text{ entonces } 10 < 410 - \frac{\beta}{\alpha} = 410 - 220 = 190$$

Se producirá epidemia

$$\text{(c) } I(0) = 140 \text{ y } S(0) = 150 \text{ luego } N = 290 \text{ entonces } 140 > 290 - \frac{\beta}{\alpha} = 290 - 220 = 70$$

No se producirá epidemia

Podemos observar que los resultados obtenidos analíticamente se corresponden con los resultados obtenidos en MatLab.

Ejercicio 5

```
clc, clear
```

Modelo SIR. Utilizar el método Runge-Kutta de orden 4 para resolver el modelo SIR estudiado en clase para los parémetros α = 0.001, β = 0.22, con tmax = 60, y para los siguientes sets de condiciones iniciales:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & S(0) = 1000, & I(0) = 10, & R(0) = 0, \\ \text{(b)} & S(0) = 400, & I(0) = 10, & R(0) = 0, \\ \text{(c)} & S(0) = 200, & I(0) = 10, & R(0) = 0. \end{array}$$

Recordar que el modelo SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) es:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

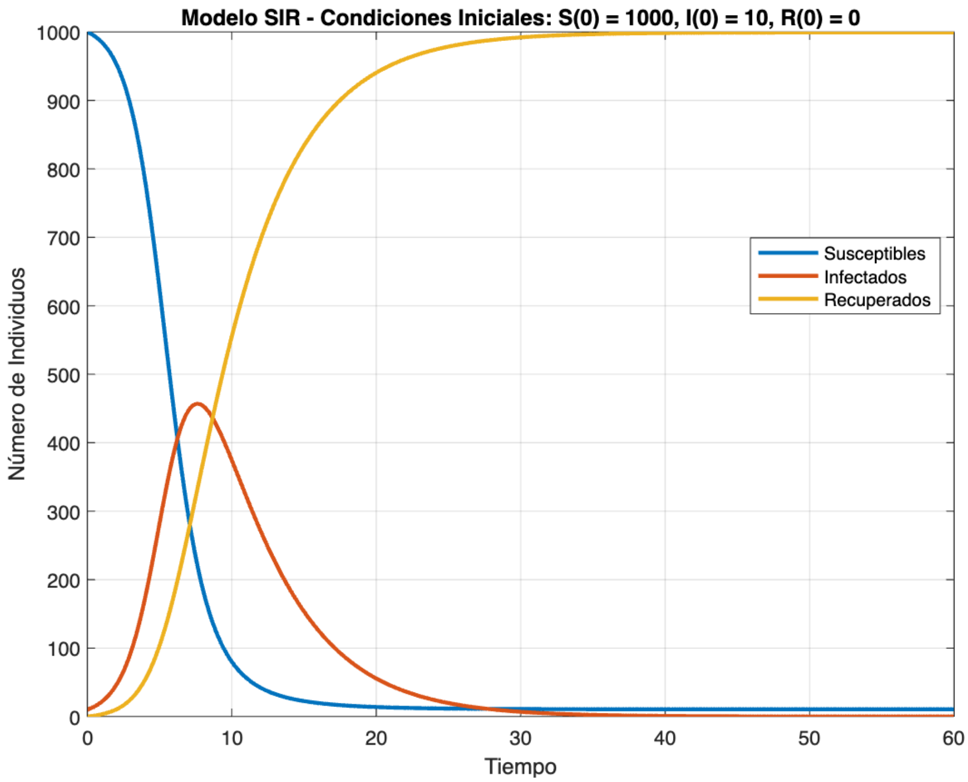
(tener en cuenta que α = β y β = γ*)*

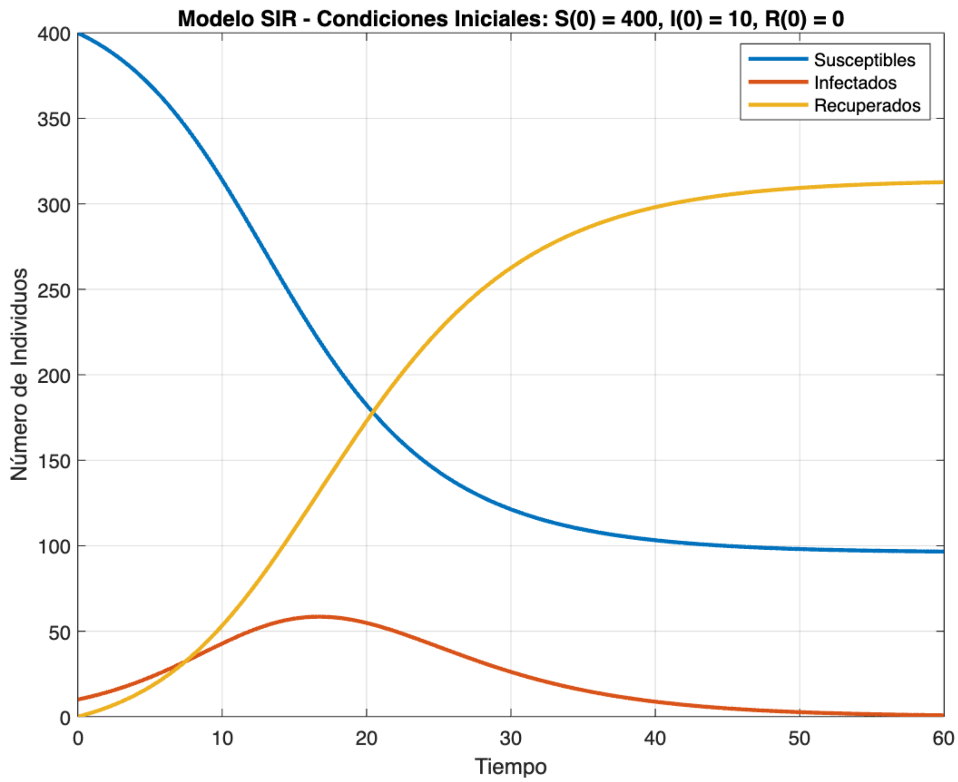
Solución Numérica y Visualización

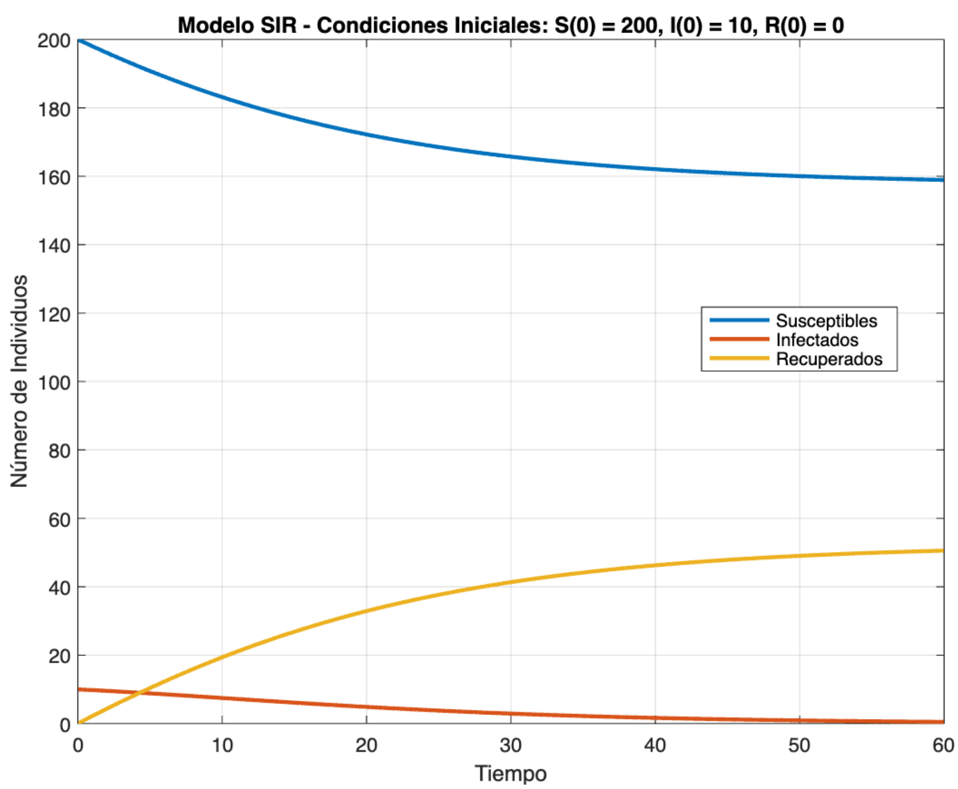
```
% Parámetros del modelo SIR
alpha = 0.001;
beta = 0.22;

% Condiciones iniciales para los tres casos
S0_values = [1000, 400, 200];
I0_values = [10, 10, 10];
R0_values = [0, 0, 0];

% Tiempo máximo y número de pasos
tmax = 60;
N_steps = 600;

% Funciones del modelo SIR
f_SIR = @(t, S, I, R) -alpha * S * I;
g_SIR = @(t, S, I, R) alpha * S * I - beta * I;
h_SIR = @(t, S, I, R) beta * I;

% Loop para cada conjunto de condiciones iniciales
for case_num = 1:length(S0_values)
    % Inicialización de variables
    SIR_t = linspace(0, tmax, N_steps+1);
    S = zeros(size(SIR_t));
    I = zeros(size(SIR_t));
    R = zeros(size(SIR_t));
    S(1) = S0_values(case_num);
```

```
    I(1) = I0_values(case_num);
    R(1) = R0_values(case_num);

    % Método de Runge-Kutta de orden 4
    for i = 2:N_steps+1
        k1 = f_SIR(SIR_t(i-1), S(i-1), I(i-1), R(i-1));
        m1 = g_SIR(SIR_t(i-1), S(i-1), I(i-1), R(i-1));
        n1 = h_SIR(SIR_t(i-1), S(i-1), I(i-1), R(i-1));

        k2 = f_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k1, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m1, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n1);
        m2 = g_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k1, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m1, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n1);
        n2 = h_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k1, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m1, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n1);

        k3 = f_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k2, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m2, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n2);
        m3 = g_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k2, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m2, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n2);
        n3 = h_SIR(SIR_t(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps), S(i-1) +
0.5*(tmax/N_steps)*k2, I(i-1) + 0.5*(tmax/N_steps)*m2, R(i-1) + 0.5*(tmax/
N_steps)*n2);

        k4 = f_SIR(SIR_t(i-1) + (tmax/N_steps), S(i-1) + (tmax/N_steps)*k3,
I(i-1) + (tmax/N_steps)*m3, R(i-1) + (tmax/N_steps)*n3);
        m4 = g_SIR(SIR_t(i-1) + (tmax/N_steps), S(i-1) + (tmax/N_steps)*k3,
I(i-1) + (tmax/N_steps)*m3, R(i-1) + (tmax/N_steps)*n3);
        n4 = h_SIR(SIR_t(i-1) + (tmax/N_steps), S(i-1) + (tmax/N_steps)*k3,
I(i-1) + (tmax/N_steps)*m3, R(i-1) + (tmax/N_steps)*n3);

        S(i) = S(i-1) + (tmax/N_steps)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
        I(i) = I(i-1) + (tmax/N_steps)*(m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4)/6;
        R(i) = R(i-1) + (tmax/N_steps)*(n1 + 2*n2 + 2*n3 + n4)/6;
    end

    % Gráfico de las soluciones
    figure;
    plot(SIR_t, S, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Susceptibles');
    hold on;
    plot(SIR_t, I, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Infectados');
    plot(SIR_t, R, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Recuperados');
    xlabel('Tiempo');
    ylabel('Número de Individuos');
```

```
    title(['Modelo SIR - Condiciones Iniciales: S(0) = ', 
num2str(S0_values(case_num)), ', I(0) = ', num2str(I0_values(case_num)), ', 
R(0) = ', num2str(R0_values(case_num))]);
    legend('show', 'Location', 'Best');
    grid on;
end
```




Modelo SIR - Condiciones Iniciales: S(0) = 400, I(0) = 10, R(0) = 0
Susceptibles
Infectados
Recuperados
Número de Individuos
Tiempo
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
10
20
30
40
50
60


Modelo SIR - Condiciones Iniciales: S(0) = 200, I(0) = 10, R(0) = 0
Susceptibles
Infectados
Recuperados
Número de Individuos
Tiempo
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
0
10
20
30
40
50
60

Preguntas

Comentar si los resultados obtenidos encajan con lo que esperaríıamos. ¿En qué caso se produce una epidemia? ¿Podíamos haber predicho esto mediante algún resultado analítico visto en clase?

En el modelo SIR, las personas pasan de ser susceptibles (S) a infectadas (I) y luego se recuperan (R) siendo inmunes a una nueva infección. Los parámetros α y β representan las tasas de infección y recuperación, respectivamente (en este caso, α = 0.001 y β = 0.22). Con estos parámetros y las condiciones iniciales dadas [(a) S(0) = 1000, I(0) = 10, R(0) = 0 (b) S(0) = 400, I(0) = 10, R(0) = 0 (c) S(0) = 200, I(0) = 10, R(0) = 0] podemos responder a las preguntas:

1. Las epidemias se producen en las condiciones iniciales del apartado (a) (S(0) = 1000, I(0) = 10, R(0) = 0) y (b) (S(0) = 400, I(0) = 10, R(0) = 0)
2. Sabiendo las condiciones iniciales y los parámetros tenemos dos casos con los que podemos diferenciar si se produce epidemia o no. Estos son:

$$S(0) > \frac{\beta}{\alpha}, \text{ se produce epidemia}$$

$$S0) < \frac{\beta}{\alpha}, \text{ no se produce epidemia}$$

Con estas condiciones podemos comprobar para los apartados.

$$\text{(a) } S(0) = 1000 \text{ entonces } 1000 > \frac{\beta}{\alpha} = 220$$

Se producirá epidemia

$$\text{(a) } S(0) = 400 \text{ entonces } 400 > 220$$

Se producirá epidemia

$$\text{(a) } S(0) = 150 \text{ entonces } 150 < 220$$

No se producirá epidemia

Podemos observar que los resultados obtenidos analíticamente se corresponden con los resultados obtenidos en MatLab.