MA0748 - FISICA PER I DISPOSITIVI IOT

Lorenzo Santi

AA 2022/23 – Lezione 02 01/03/2023

Argomenti della lezione

- L’energia (parte 2)
  - Il funzionamento della bilancia a due bracci
  - L’energia potenziale della forza peso
  - L’energia cinetica
  - L’energia potenziale elastica
  - L’energia interna (a.k.a., l’energia termica)
  - Il principio di conservazione dell’energia
- Primo interludio matematico:
  - la misura di angoli
  - la funzione coseno
  - la funzione seno
- Il moto armonico

L'energia (parte 2):
il funzionamento della bilancia a due bracci

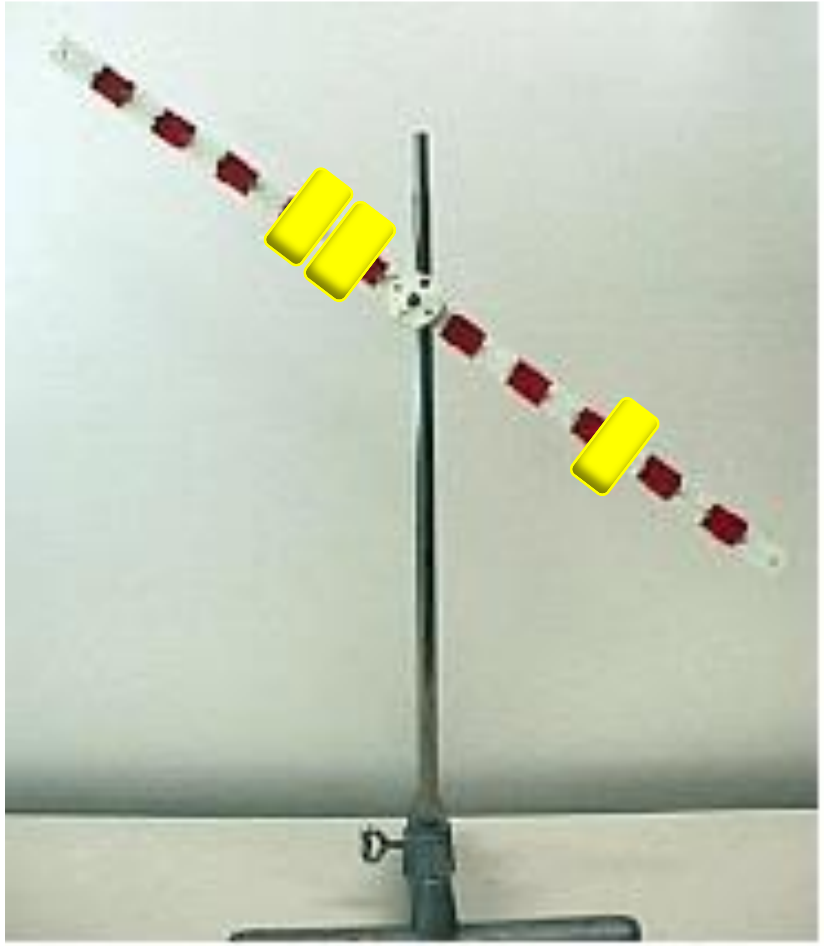
In questa bilancia, hanno ruolo fondamentale due tipi di grandezze: il peso delle masse poste sulla bilancia e la loro distanza dal fulcro.

Il **peso** in Fisica è una grandezza di tipo forza. Per un corpo nei pressi della superficie della Terra, ha un valore dato da

P = m g

ove m è la massa del corpo e g la costante di accelerazione di gravità (g = 9.81 $m\ s^{-2}$).

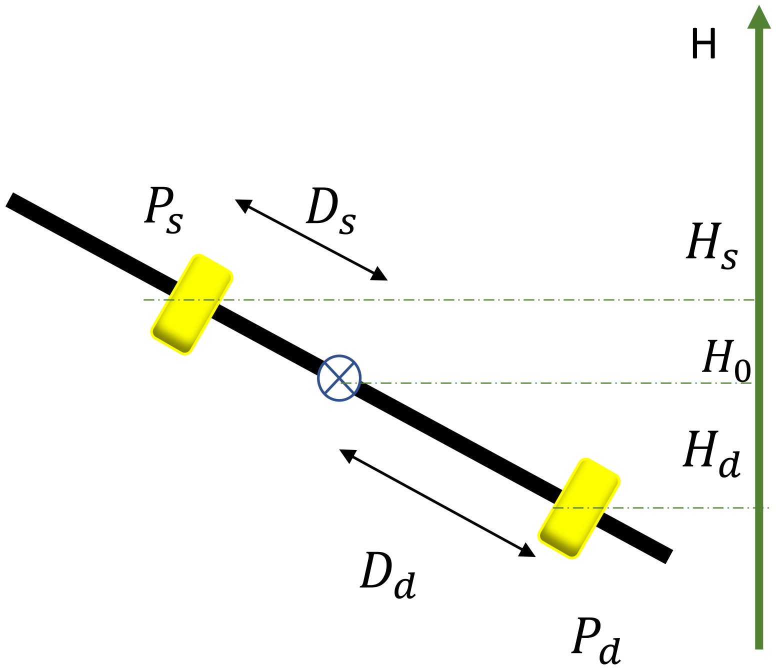
La **forza** nel Sistema Internazionale viene espressa in $kg\ m\ s^{-2}$, unità che viene anche chiamata **Newton** (N).



La bilancia risulta essere in equilibrio se tra i pesi delle due masse (P_s e P_d) e le loro distanze dal fulcro (D_s e D_d) esiste la seguente relazione

$$D_s P_s = D_d P_d$$

(legge di Archimede per la leva).

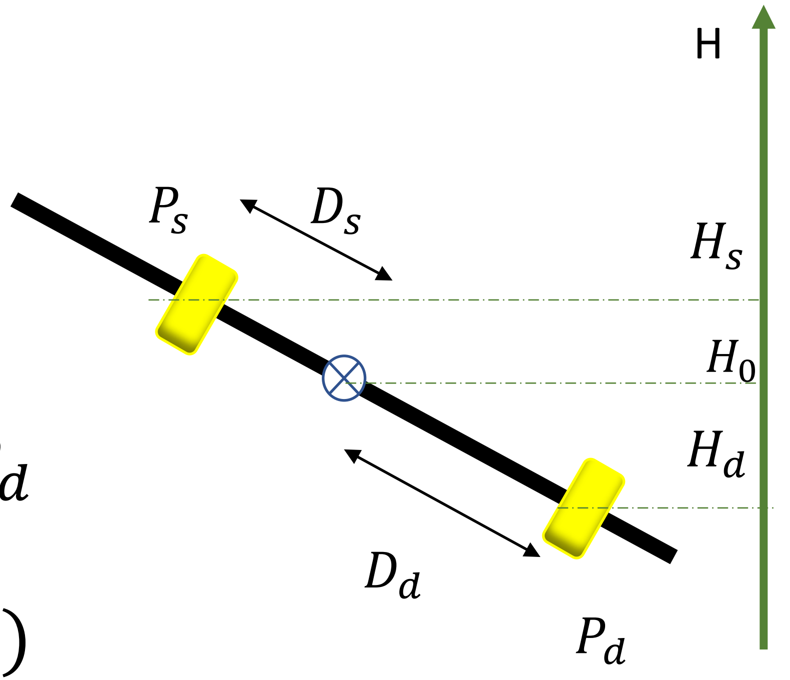


Inoltre, semplici considerazioni geometriche sulla similitudine tra triangoli mostrano che tra le quote delle due masse (H_s e H_d) e le loro distanze dal fulcro (D_s e D_d) esiste un'altra relazione di proporzionalità

$$\frac{H_s - H_0}{D_s} = \frac{H_0 - H_d}{D_d}$$

Risolvendo la prima relazione rispetto a D_s e sostituendo nella seconda

$$D_s P_s = D_d P_d \qquad \text{e} \qquad \frac{H_s - H_0}{D_s} = \frac{H_0 - H_d}{D_d}$$



si ottiene, dopo alcuni passaggi

$$(H_s - H_0)P_s = (H_0 - H_d)P_d$$

Ovvero

$$H_s P_s + H_d P_d = H_0(P_s + P_d)$$

ove il membro di destra è una costante che dipende dalla scelta dell'origine dell'asse coordinato verticale.

Ne segue che in qualsiasi trasformazione (rotazione della bilancia) che avvenga per successivi stati di equilibrio, **la quantità $\boldsymbol{H_s P_s + H_d P_d}$** risulta avere sempre lo stesso valore: **è conservata nella trasformazione**.

L’energia:
l’energia potenziale della forza peso

La quantità

$$U_p = H_s P_s + H_d P_d$$

viene chiamata **energia potenziale della forza peso**.

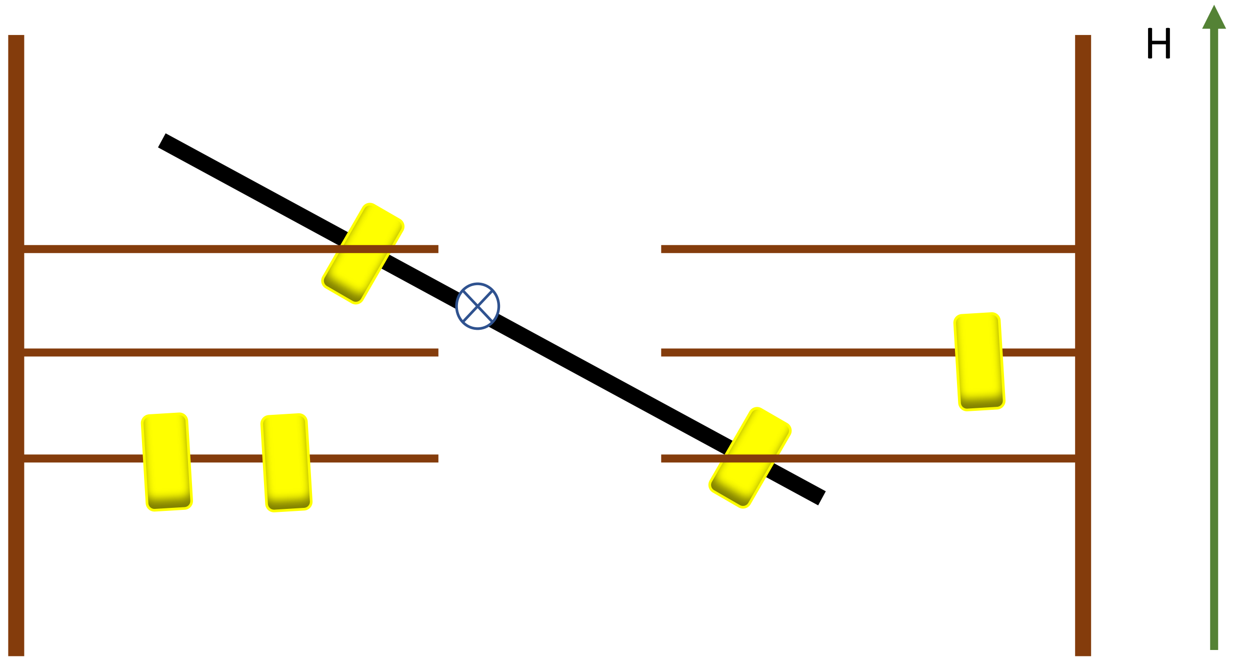
Nel Sistema Internazionale ha come unità di misura $kg\ m^2 s^{-2}$ (Joule).

Questa definizione può essere generalizzata al caso in cui siano presenti più di due corpi, ad esempio N corpi ciascuno di massa m_i

$$U_p = \sum_{i=1,N} H_i m_i g$$

ove abbiamo sostituito a P la sua dipendenza dalla massa m e g è la costante di accelerazione di gravità.

Questi corpi possono essere pensati distribuiti su due rastrelliere in una certa configurazione iniziale.



Possiamo variare le quote dei vari corpi spostandoli verticalmente con successive operazioni con la bilancia.

Le trasformazioni così effettuate hanno la proprietà che il valore dell’energia potenziale rimane lo stesso nello stato iniziale e in quello finale

$$\Delta U_P \equiv U_{P\,fin} - U_{P\,iniz} = 0$$

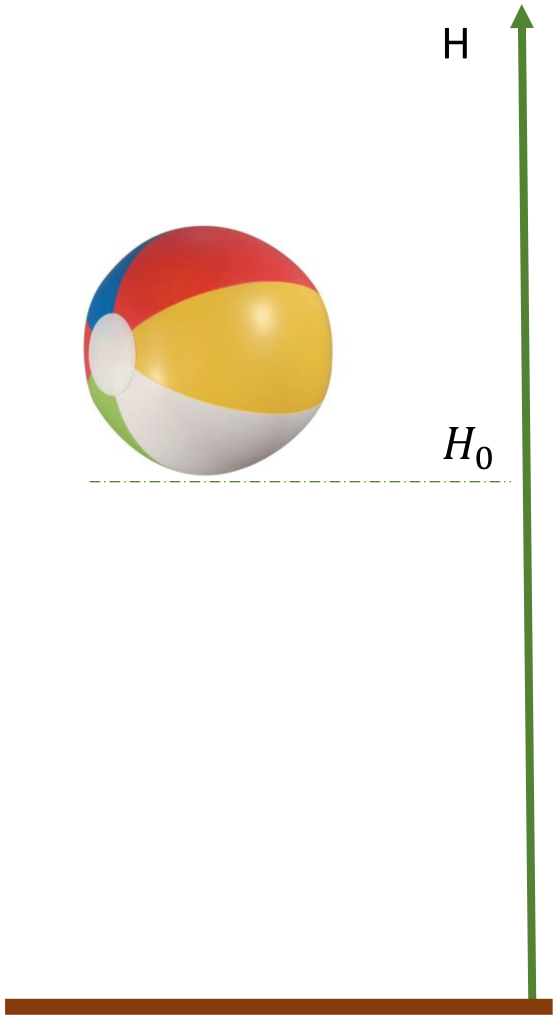
Questa è la **legge di conservazione dell’energia** che viene rispettata nella categoria di trasformazioni mediate dalla bilancia.

L’energia:
l’energia cinetica

Proviamo ad applicare la legge di conservazione così trovata

$$\Delta U_P = 0$$

in un contesto diverso: la caduta libera di una palla di massa m, a partire da quiete ad una certa altezza H_0.



Se andiamo a calcolare la variazione di U_P tra l’istante iniziale del moto e quello in cui la palla tocca il terreno avremo

$$\Delta U_P \equiv \Delta(H\ m\ g) = \Delta H\ m\ g \neq 0$$

Cosa non ha funzionato qui? Il fatto è che **il moto non è virtuale** ma avviene in un tempo finito: il corpo in ogni istante di tempo ha uno stato che è descritto non solo dalla sua quota, ma anche dalla velocità che possiede in quel momento.

Un modo per risolvere questo problema è supporre che in questo caso non si conservi U_P ma qualcosa che contiene anche l’informazione sullo stato di moto

$$E = U_P + K(v)$$

Ove K(v) è un termine chiamato **energia cinetica**.

In effetti, studiando il moto dei gravi (corpi nei pressi della superficie della Terra, sottoposti solo alla azione del peso) si ottiene dalle equazioni del moto che la seguente quantità rimane costante durante tutta la caduta

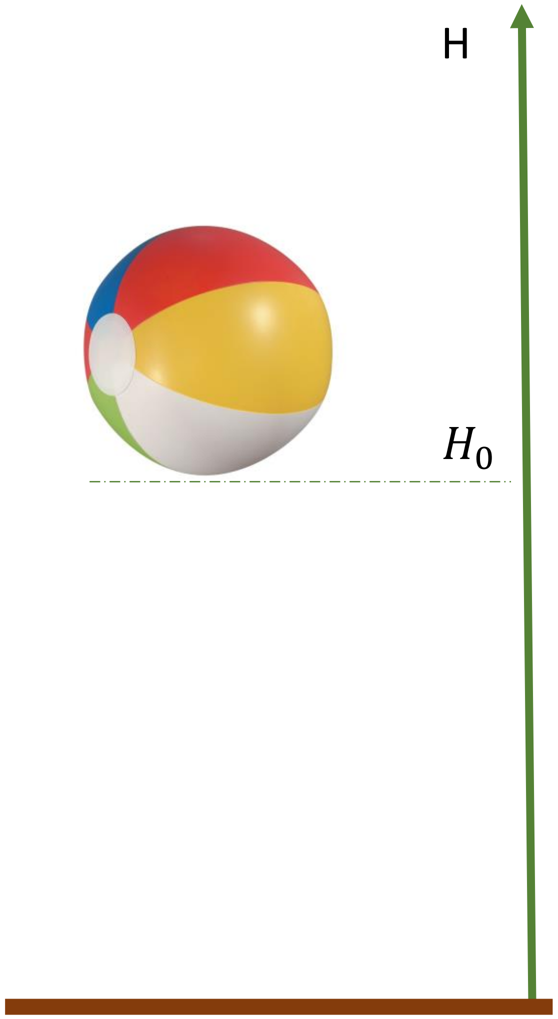
$$m\,g\,h + \frac{1}{2}mv^2$$

Interpretando il secondo addendo come un termine di energia cinetica

$$K(v) = \frac{1}{2}m\,v^2$$

si ottiene che nel moto del grave si conserva l'energia complessiva E

$$\Delta E = \Delta(U_P + K(v)) = 0$$



L'energia:
l'energia potenziale elastica

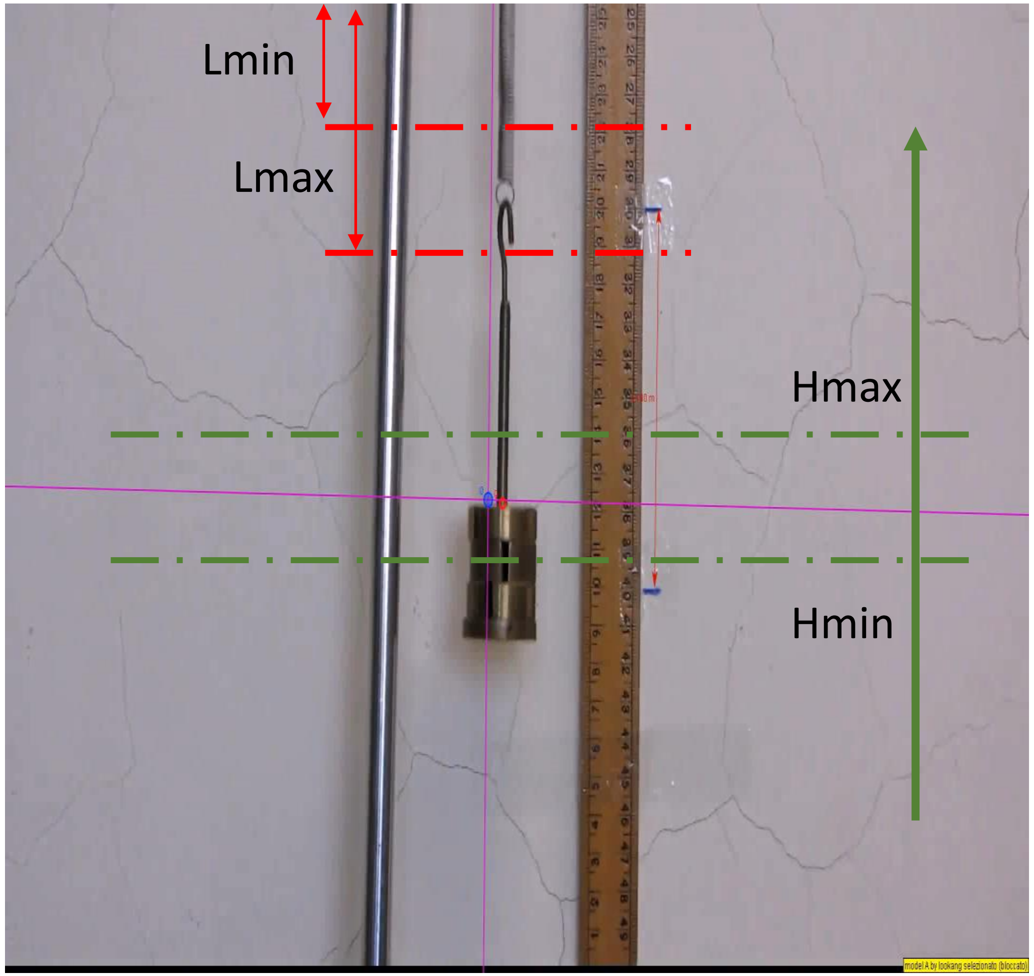
Un'altra situazione considerabile è quella di una massa sospesa verticalmente con una molla.

Lasciata andare da una certa quota, essa oscilla tra due estremi, Hmin e Hmax: in questi due punti inverte il verso del suo moto, per cui avrà velocità nulla.

Se consideriamo il moto dalla quota Hmax a Hmin avremo con la precedente espressione dell'energia

$$\Delta E = \Delta\big(U_P(H) + K(v)\big) = (Hmax - Hmin)m\, g \neq 0$$

Ancora una volta **manca qualcosa**: in questo caso **l'azione applicata dalla molla** sul corpo, per effetto della sua deformazione elastica.



Studiando dinamicamente il sistema, si trova che in questo caso nel moto si conserva la quantità

$$E = U_P(H) + K(v) + U_{elastica}(\Delta L)$$

ove $\boldsymbol{\Delta L}$ è la **deformazione** (variazione di lunghezza) **della molla** e $U_{elastica}(\Delta L) = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$ è quantità chiamata **energia potenziale elastica** (**k** è una opportuna costante che dipende dalla molla, chiamata **costante elastica**).

L'energia (parte 2):
l'energia interna (a.k.a., l'energia termica)

Un'altra situazione: supponiamo di lanciare un blocchetto di legno su una superficie piana orizzontale.

Dopo un certo spostamento, il blocchetto si ferma.

Inizialmente ha una certa energia cinetica K_{iniz}, quando si ferma la sua energia cinetica è nulla.

Poiché il moto avviene orizzontalmente, non ci sono variazioni di quota ($\Delta U_P = 0$) e non ci sono interazioni elastiche ($\Delta U_{elastica} = 0$) quindi

$$\Delta E = \Delta K = 0 - K_{iniz} < 0$$

Manca qualcosa.

Se misuriamo la temperatura del blocchetto (e della superficie su cui scivola) vedremo che i due oggetti si sono scaldati leggermente: la loro temperatura T è variata (aumentata).

Possiamo fare ritornare tutto supponendo che ci sia un termine aggiuntivo di energia da considerare $E_{interna}(T)$: **energia interna dipendente dalla temperatura**, e che l'energia che dobbiamo considerare nella trasformazione sia

$$E = U_P(H) + U_{elastica}(\Delta L) + K(v) + E_{interna}(T)$$

L’energia:
Il principio di conservazione dell’energia.

Esaminando contesti con fenomeni diversi, **l’espressione dell’energia** potrà essere completata con **termini che dipendono da nuove grandezze di stato** (l’abbiamo visto nel caso della velocità e della temperatura) **oppure di energia potenziale**, nel caso di nuovi tipi di azioni (interazioni) sul corpo:
in maniera tale che l’energia sia conservata nelle trasformazioni.

Questa ipotesi viene chiamata **principio di conservazione dell’energia.** La sua formulazione è

In un sistema isolato dal mondo circostante la sua energia totale

$$E_{totale} = \sum U_{interazioni} + \sum_i E(grandezza\ di\ stato\ i)$$

si conserva in tutte le trasformazioni.

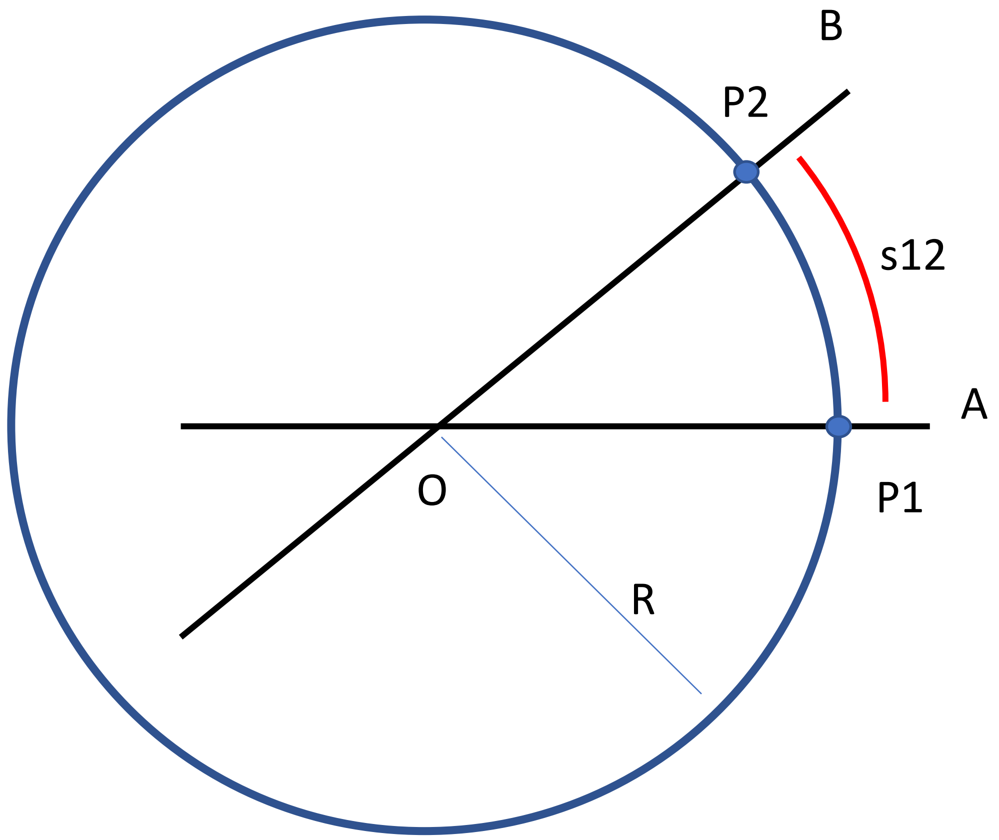
Primo interludio matematico:
la misura di angoli.

Affrontiamo il problema di valutare quantitativamente qual è l’orientazione relativa tra due rette, ad esempio A e B in figura.

Un modo è quello di tracciare un cerchio centrato nel punto O di intersezione tra le due rette ed un certo raggio R.

Il cerchio interseca le due rette in due punti, che chiameremo P1 e P2.

Definiamo con s12 la lunghezza dell’arco di cerchio compreso tra P1 e P2

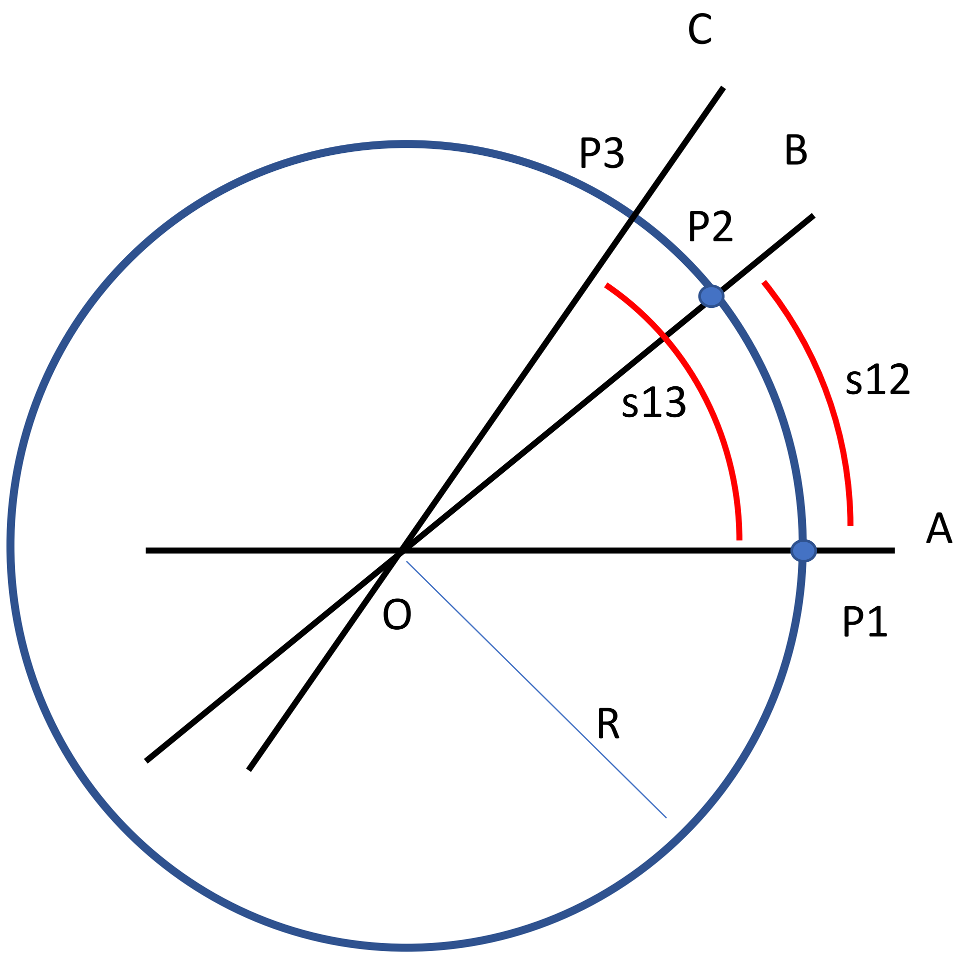


La quantità s12 permette di descrivere quantitativamente l’orientazione relativa tra le due rette.

Come esempio, prendiamo una terza retta C passante anch’essa per O, che intersechi il cerchio nel punto P3.

P3 definisce un arco, a partire da P1, di lunghezza pari a s13.

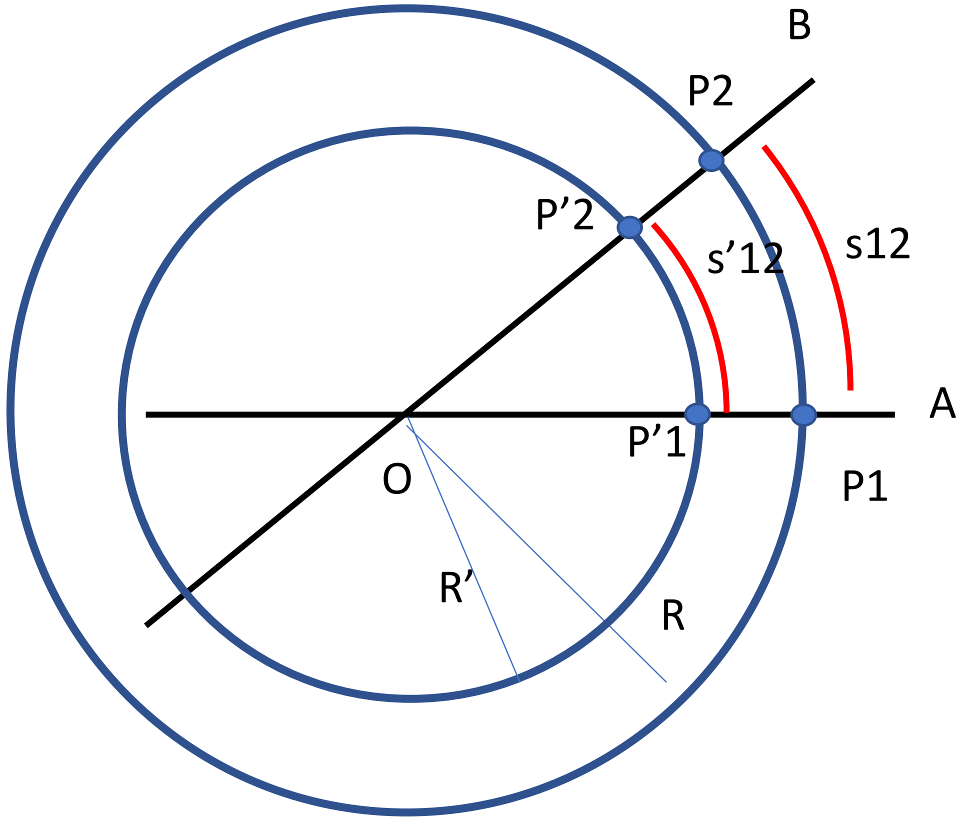
Il valore s13 risulta maggiore di s12 e quindi ci permette di dire che rispetto ad A, la retta C è più inclinata di B.



La quantità s12 però dipende dal raggio R del cerchio scelto.

Se scegliamo un cerchio di raggio R’, otterremo un valore s’12 diverso: questo è scomodo, perchè per esprimere l’orientazione relativa tra le rette non basta la lunghezza dell’arco ma occorre specificare anche il raggio.

Si può ovviare a questo problema considerando non s12 ma il rapporto $\frac{s12}{R}$



Tale rapporto è indipendente dal raggio del cerchio considerato

$$\alpha = \frac{s12}{R} = \frac{s'12}{R'}$$

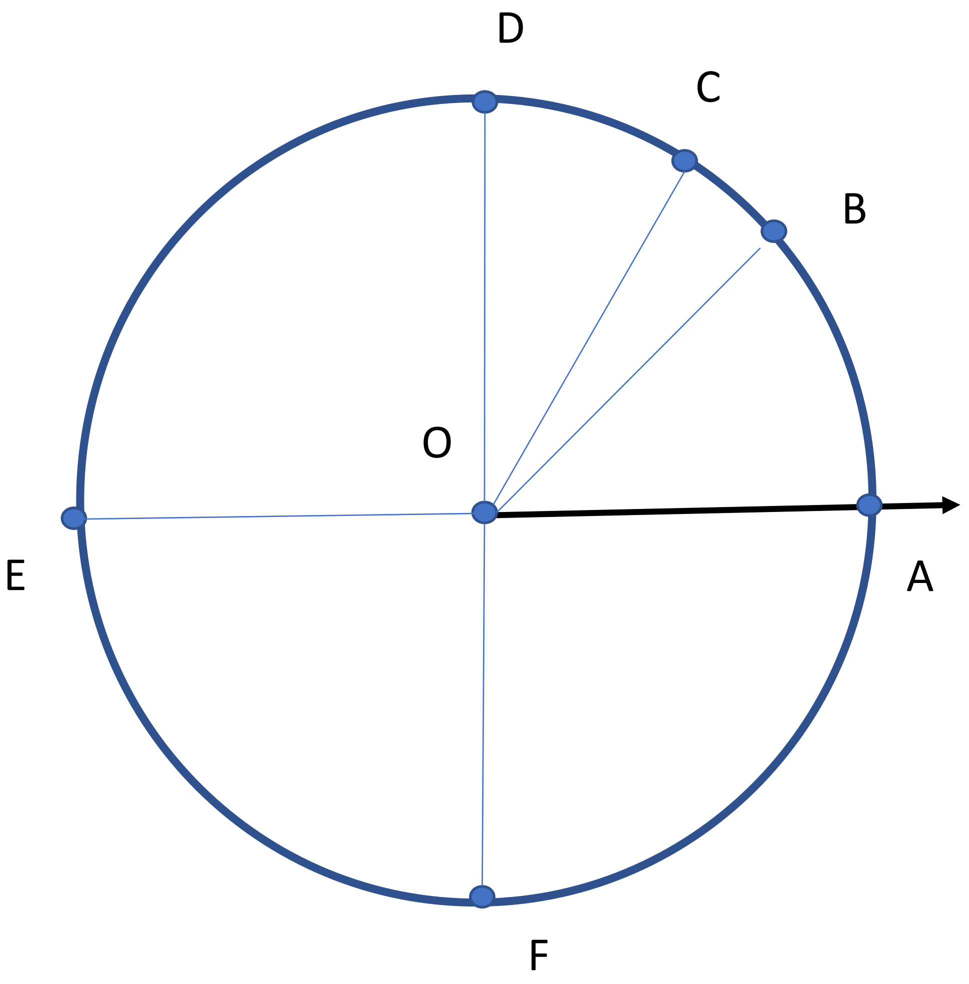
α verrà chiamato valore dell’angolo formato dalle due rette.

L'angolo, determinato in questo modo, risulta essere espresso in **radianti**.

Vediamo i valori in radianti di alcuni angoli notevoli.

- Angolo tra ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo isoscele ($\widehat{AB}$) $\frac{\pi}{4}$
- Angolo tra due lati di un triangolo equilatero ($\widehat{AC}$) $\frac{\pi}{3}$
- Angolo retto ($\widehat{AD}$) $\frac{\pi}{2}$
- Angolo piatto ($\widehat{AE}$) π
- ($\widehat{AF}$) $\frac{3\pi}{2}$
- Angolo giro ($\widehat{AA}$) 2π

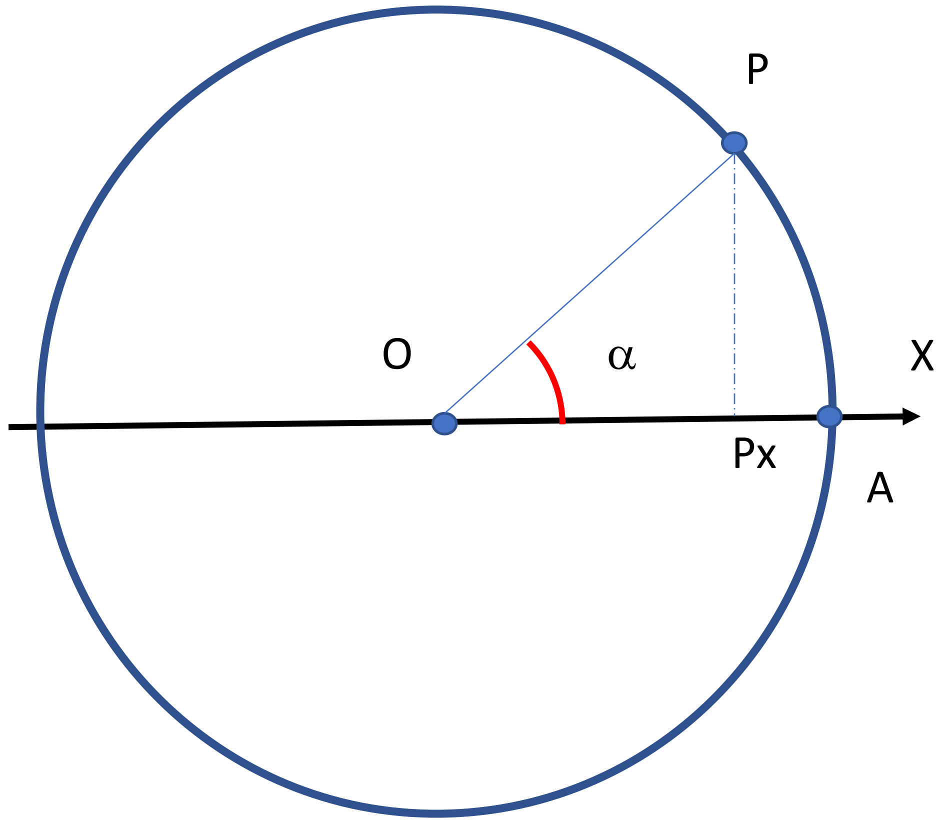
(questi valori sono facilmente ottenibili ricordando che la lunghezza di una circonferenza di raggio R è pari a 2π R)



Primo interludio matematico:
la funzione coseno.

In una circonferenza di raggio R = 1 (circonferenza goniometrica), l'angolo α che una direzione forma con la semiretta X di riferimento determina univocamente il punto P, di intersezione con la circonferenza.

Domandiamoci che coordinata ha il punto proiettato P_x lungo X, considerato come un asse coordinato di origine O, come in figura.



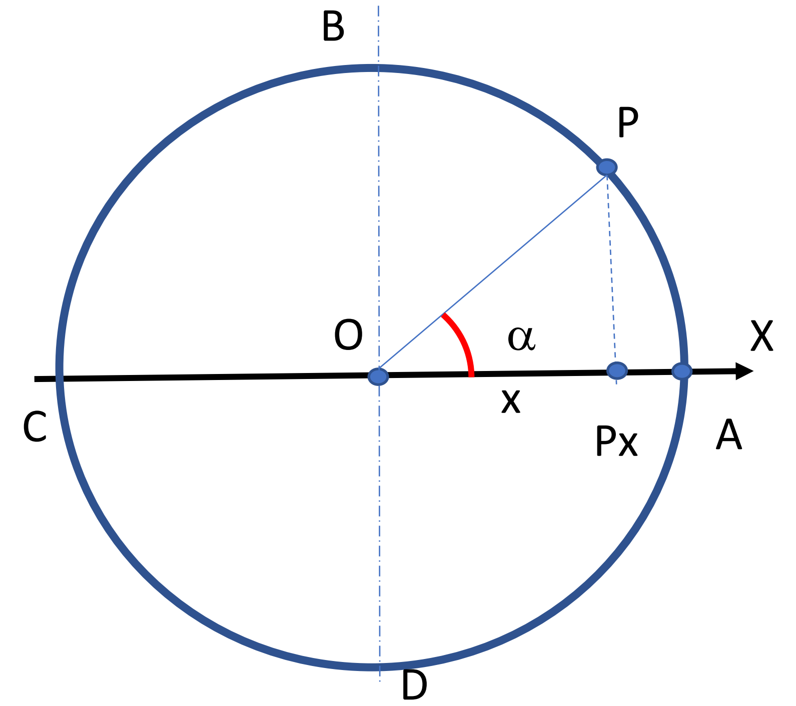
La coordinata del punto proiettato Px assume i valori

Per P=A $\quad x = 1$

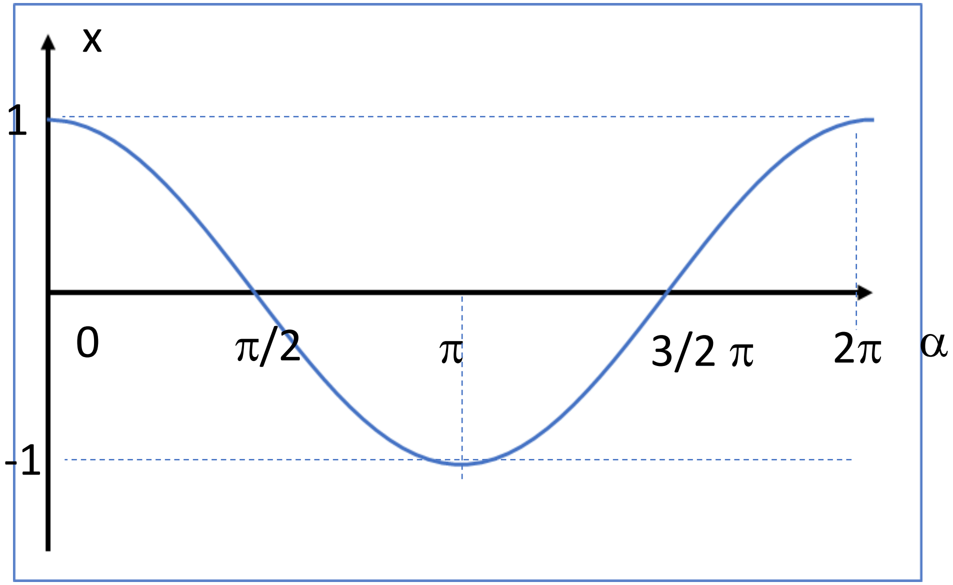
Per P=B $\quad x = 0$

Per P=C $\quad x =-1$

Per P=D $\quad x = 0$



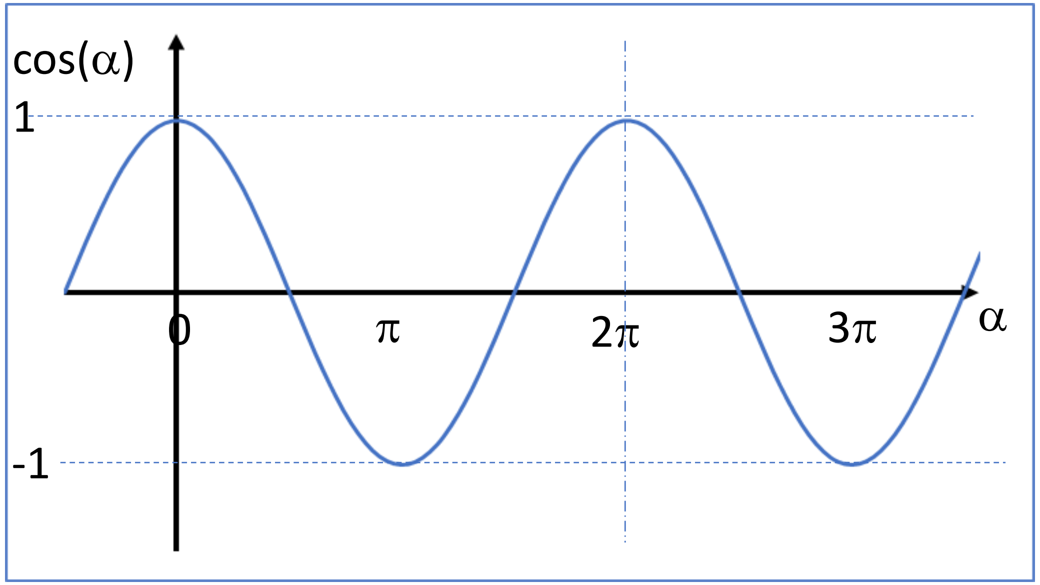
La x, considerata come una funzione $x=x(\alpha)$, assume così l'andamento descritto in figura



La funzione $x(\alpha)$ può essere però pensata estesa anche fuori dalla determinazione principale $[0,2\pi)$, ripetendola identicamente sia a destra che a sinistra.

Si ottiene così una funzione definita su tutto il campo reale, che chiameremo coseno

$$x = \cos(\alpha)$$



La funzione coseno è

- limitata, tra i valori 1 e -1
- periodica, di periodo 2π (cioè $\cos(\alpha) = \cos(\alpha+2\pi)$)
- gode delle seguenti proprietà di simmetria

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = -\cos(\alpha+\pi)$$

Primo interludio matematico:
la funzione seno.

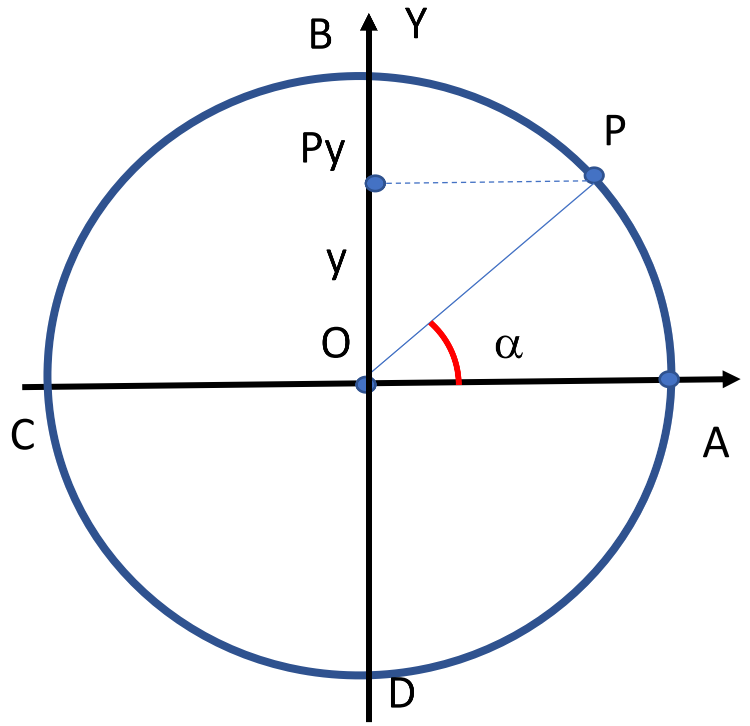
In maniera analoga possiamo vedere come dipende da α la coordinata y del punto proiettato da P su un asse Y, verticale. Avremo

Per P=A $\quad y = 0$

Per P=B $\quad y = 1$

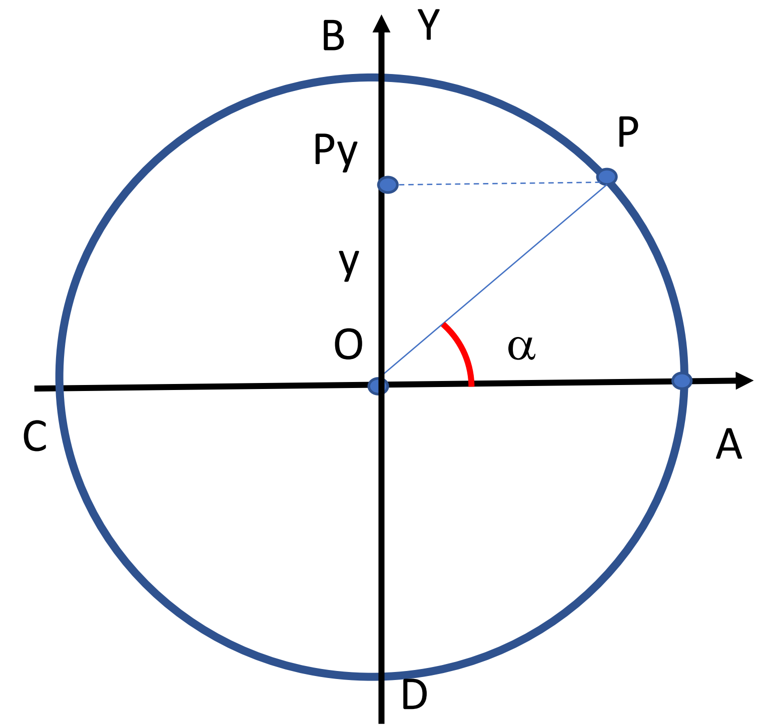
Per P=C $\quad y = 0$

Per P=D $\quad y = -1$



Ancora una volta, estendendo la funzione $y=y(\alpha)$ così ottenuta al di fuori della determinazione principale $[0,2\pi)$ per α, ripetendola identicamente a destra ed a sinistra, otteniamo una funzione che chiameremo seno

$$y = \sin(\alpha)$$

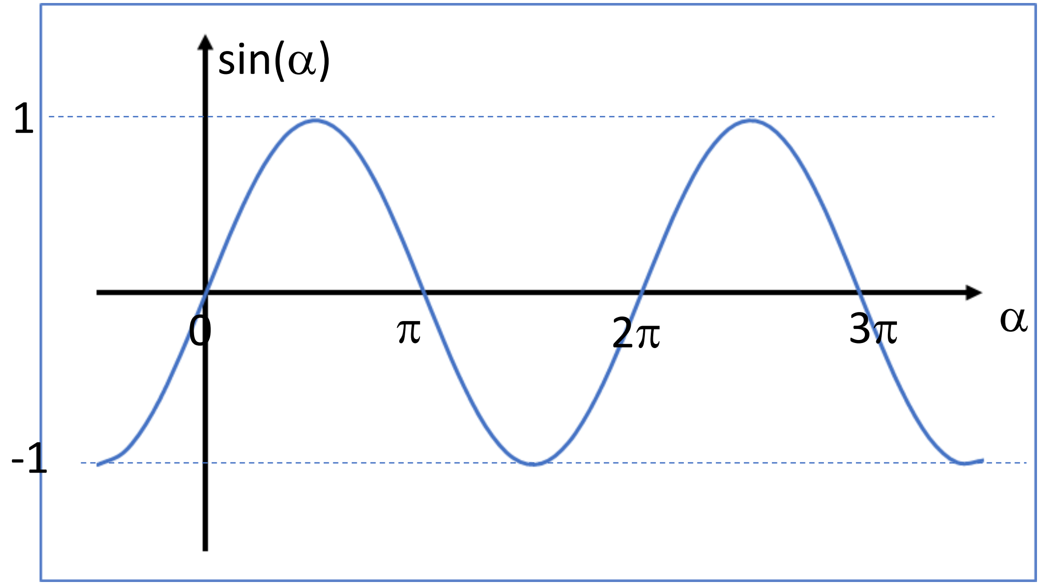


La funzione seno è

- limitata, tra i valori 1 e -1
- periodica, di periodo 2π (cioè $\sin(\alpha) = \sin(\alpha+2\pi)$)
- gode delle seguenti proprietà di simmetria

$$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = -\sin(\alpha+\pi)$$

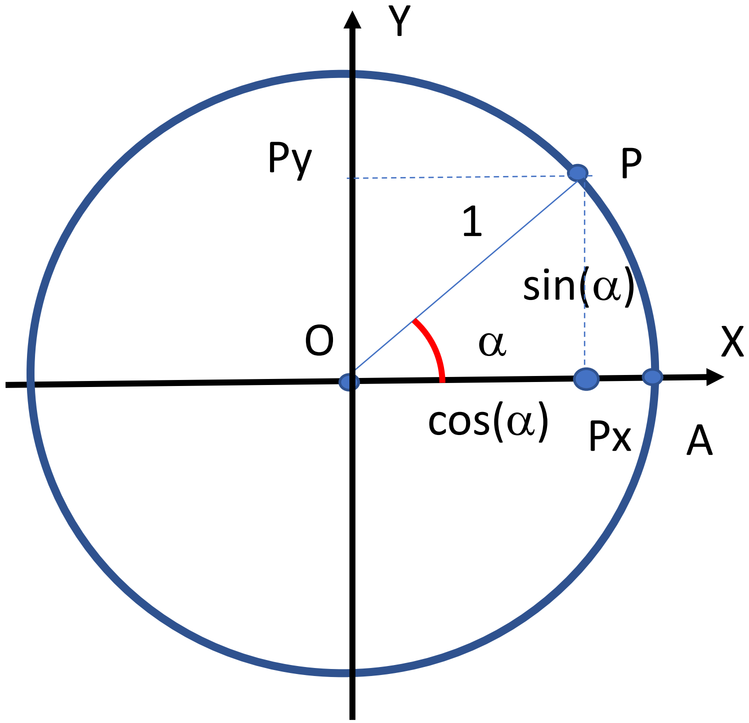


Le funzioni seno e coseno sono strettamente correlate tra di loro. Una importante relazione nasce esaminando la circonferenza goniometrica.

Il triangolo O Px P è retto e quindi vale il teorema di Pitagora. Dalle varie definizioni risulta

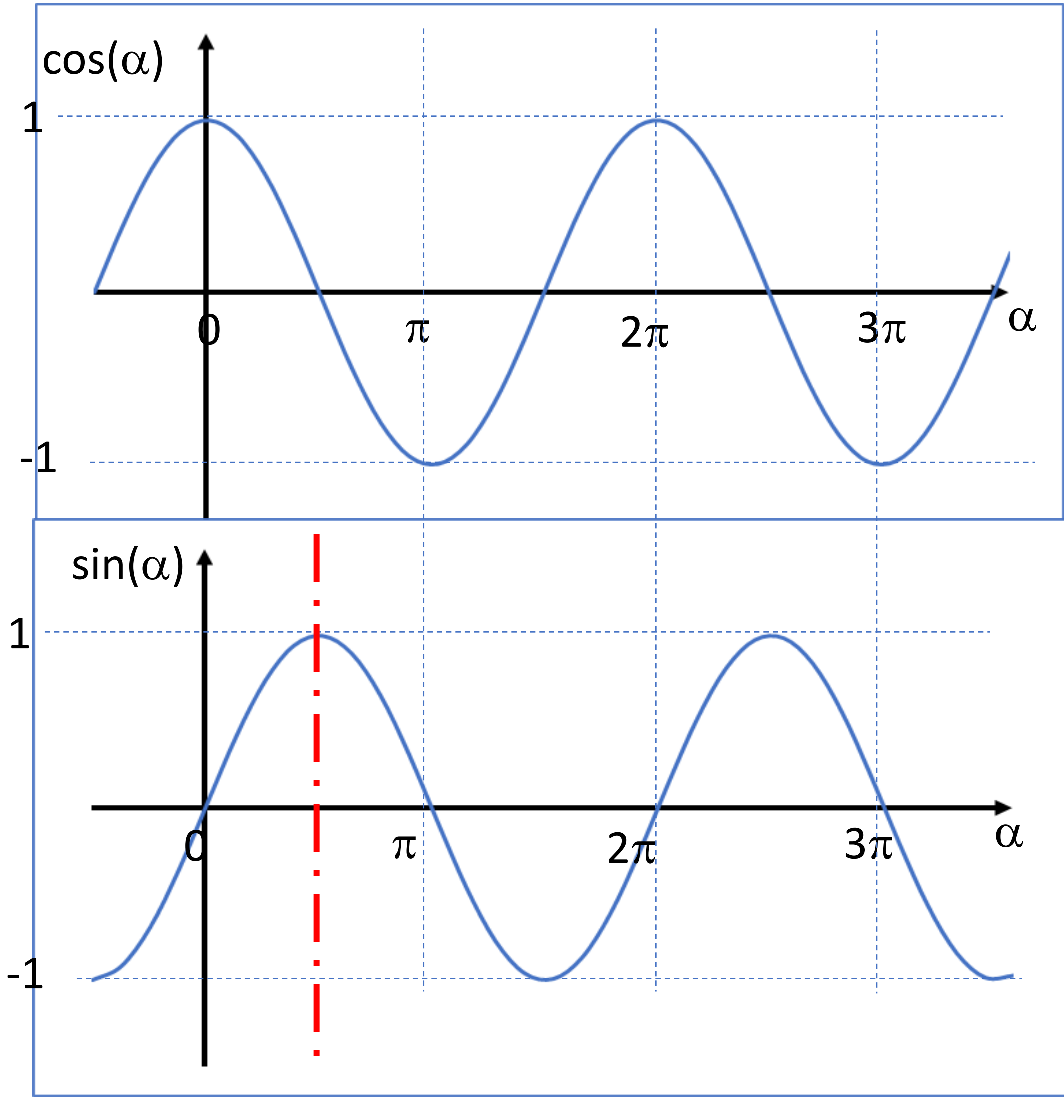
$$cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$$

Questa relazione viene chiamata relazione fondamentale della trigonometria.



Le funzioni coseno e seno sono correlate tra di loro anche in un altro modo:

Se trasliamo in α la funzione coseno di un quarto di periodo (π /2) otteniamo esattamente la funzione seno (confrontare l'andamento del seno a partire dalla linea rossa con quella del coseno)



Il moto armonico

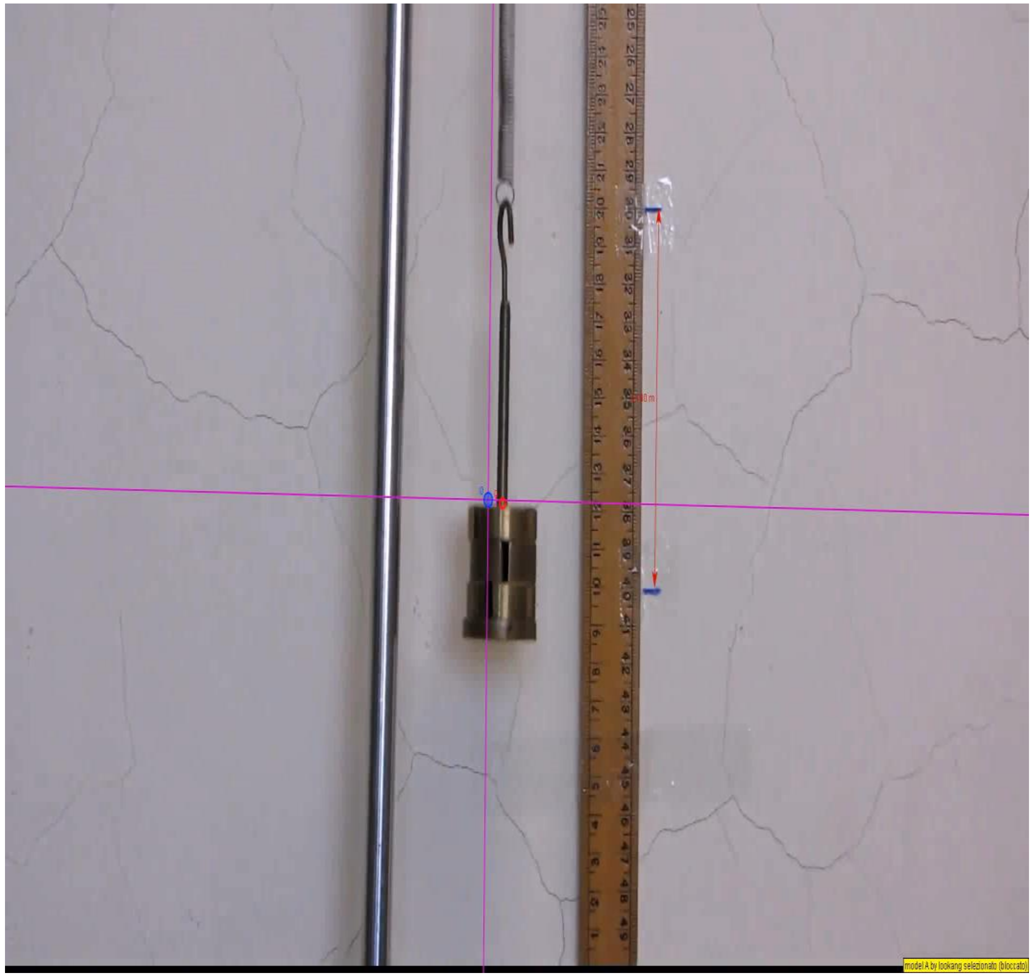
In precedenza abbiamo visto un video del moto di una massa sospesa con una molla.

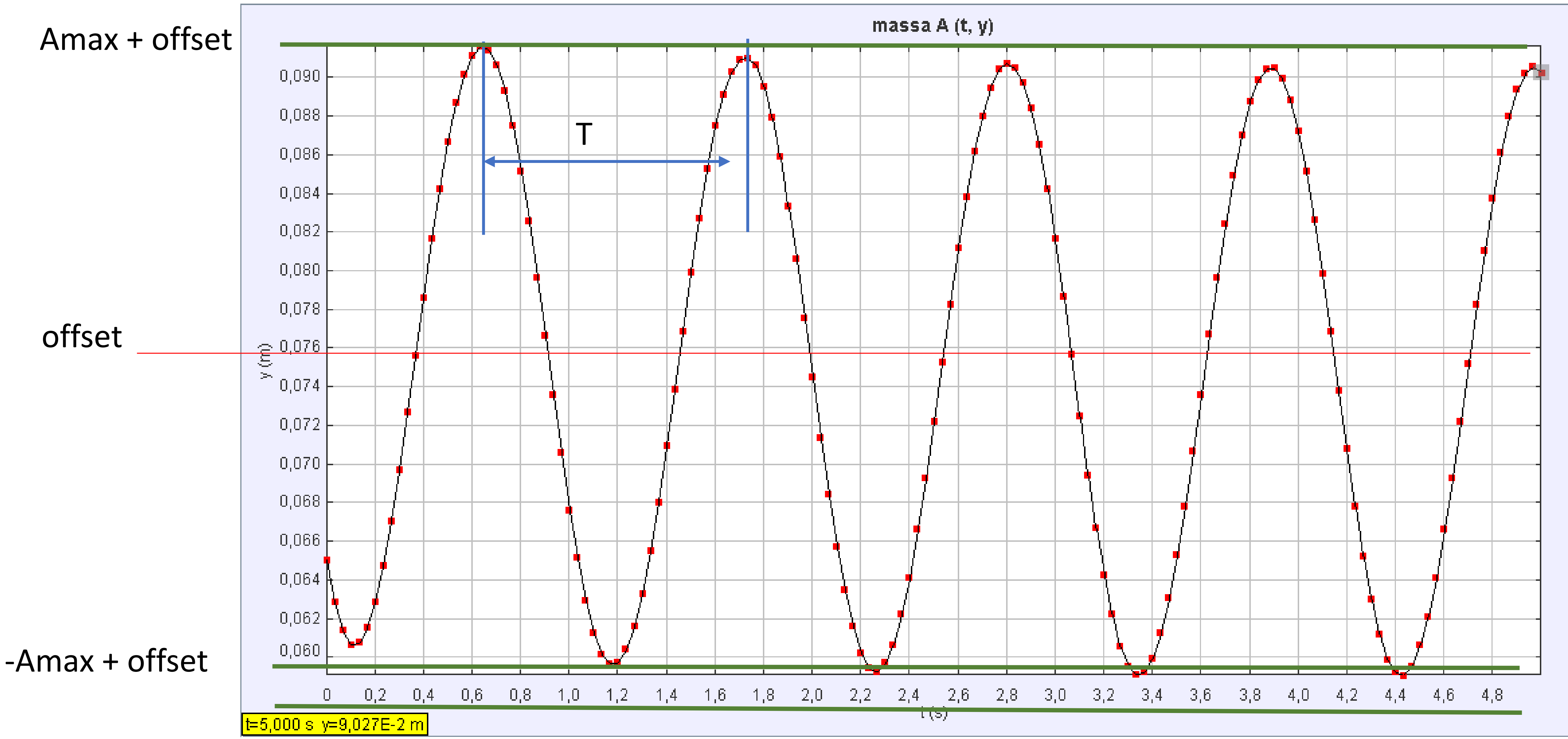
Che tipo di moto segue?

Lo scopriremo analizzando il video con l'applicazione Tracker (https://tracker.physlets.org/)

Troverete su Moodle nella cartella il file
massa molla 1.trk

con il video analizzato (da aprire con Tracker)





Analizziamo l'andamento della legge oraria dai dati acquisiti mediante l'analisi del video:

- È periodico di periodo T ($\cong 1.07\ s$)
- Oscilla tra un valore massimo Amax ed uno minimo –Amax (attorno un offset)

A parte i fattori di scala orizzontali e verticale, l'andamento di y = y(t) riproduce molto bene quello della funzione coseno.

Si può dimostrare che la legge oraria di un sistema massa molla è del tipo

$$y = A\cos(\omega\, t)$$

(avendo scelto opportunamente l'origine dell'asse coordinato e l'istante iniziale) ove

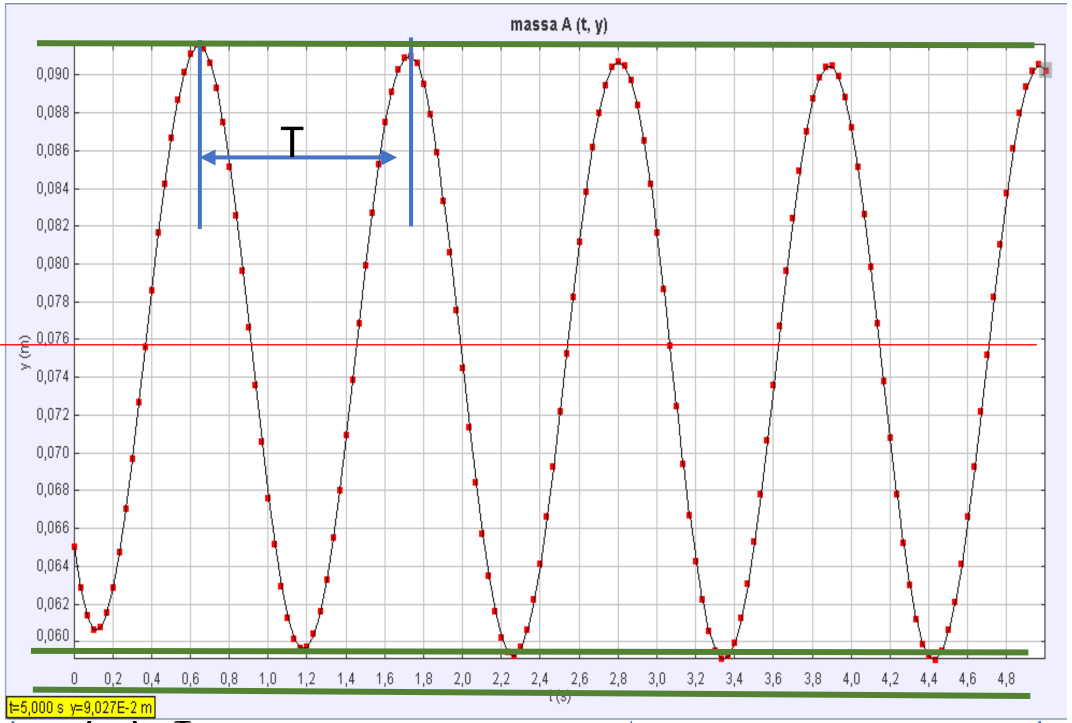
- A viene chiamata **ampiezza** dell'oscillazione
- ω è la **pulsazione o frequenza angolare** dell'oscillazione. Risulta pari a

$$\omega = {}^{2\pi}/_{T}$$

- T è il **periodo** dell'oscillazione

Un **moto** che segue questa legge oraria viene chiamato **armonico**.

Amax
+ offset



offset

-Amax
+ offset