MA0748 - FISICA PER I DISPOSITIVI IOT

Lorenzo Santi

AA 2022/23 – Lezione 7 21/03/2023

Argomenti della lezione di oggi

- Andamenti esponenziali
  - La funzione esponenziale
  - Andamenti esponenzialmente decrescenti nel tempo
- Circuiti con condensatori

Andamenti esponenziali

Per l’esperienza n.3 abbiamo bisogno di introdurre un nuovo concetto matematico, la funzione esponenziale.

Per la sua definizione, possiamo procedere per gradi, incominciando a parlare delle funzioni del tipo

$$f(x) = a^x$$

ove a è un numero reale positivo.

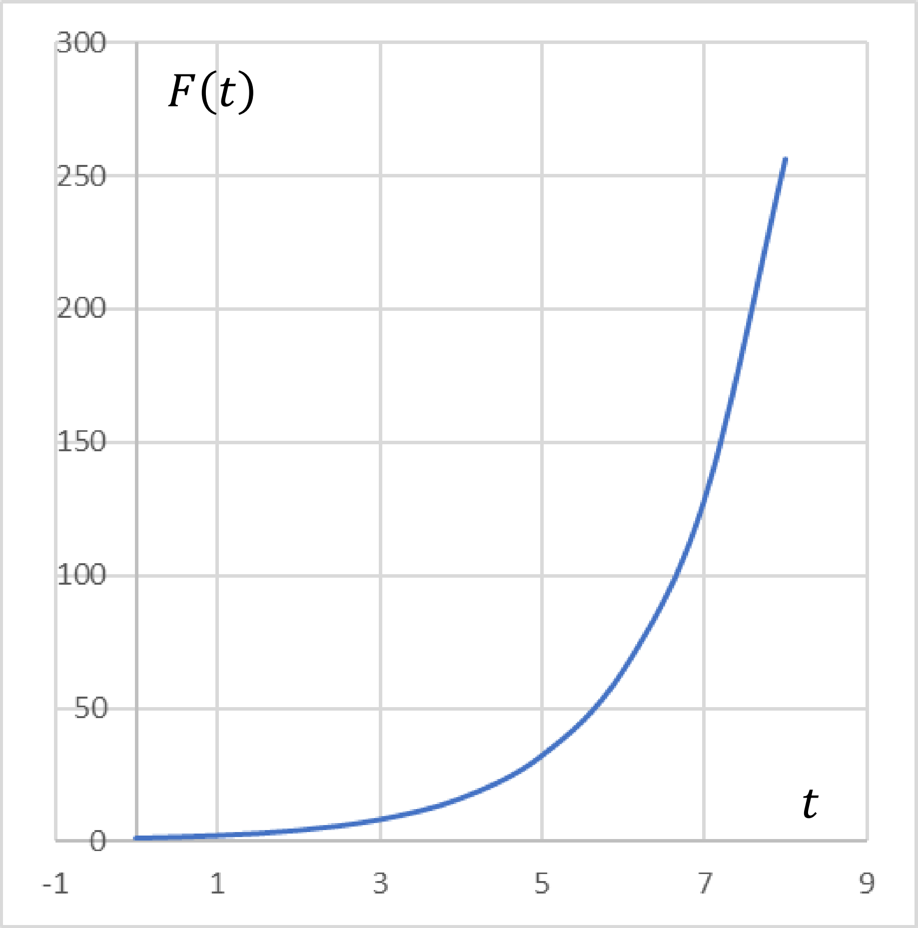
Consideriamo il seguente problema: una certa grandezza F aumenta con il tempo, raddoppiando il suo valore ogni secondo. Se il suo valore iniziale è 1, che valore assumerà dopo un intervallo di tempo t?

Se t è un numero intero di secondi abbiamo che in tale intervallo F ha raddoppiato t volte il suo valore e quindi

$$F(t) = 2^t$$

Se t non è un numero esatto di secondi, possiamo comunque supporre che la precedente relazione sia ancora valida.

Otteniamo una funzione, il cui grafico è rappresentato accanto.



La funzione

$$F(t) = 2^t$$

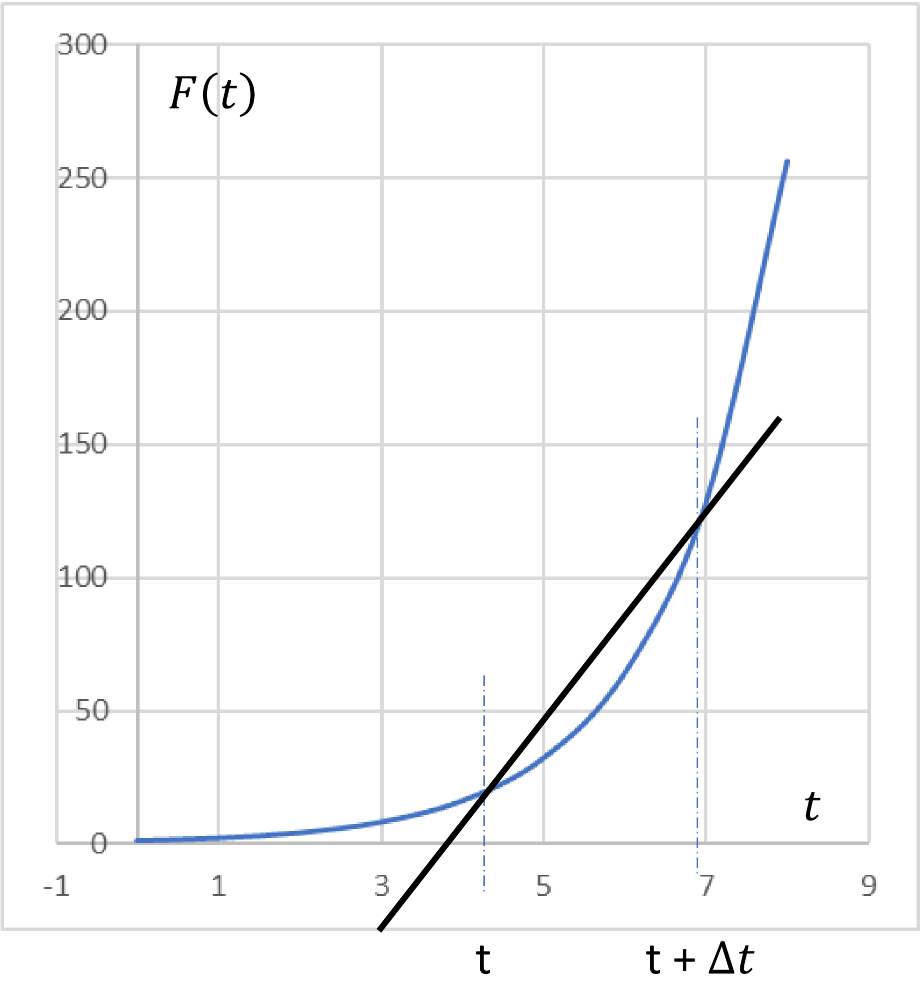
sembra aumentare molto rapidamente e la velocità con cui aumenta, aumenta pure essa col tempo.

Vediamo di quantificare la velocità con cui la F(t) aumenta.

Se calcoliamo il rapporto incrementale di F(t) in un intervallo (t, t + Δt) abbiamo

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{2^{t+\Delta t} - 2^t}{\Delta t} = 2^t \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

Questa è il coefficiente angolare della secante nei due punti estremi dell'intervallo (t, t + Δt)

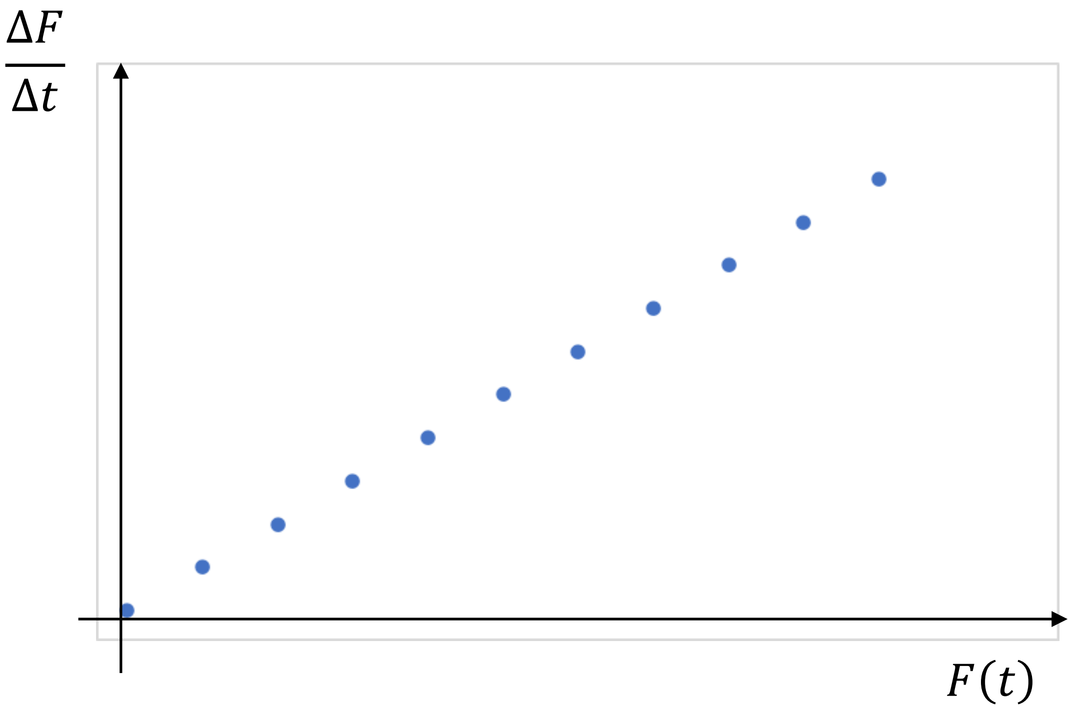


$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = 2^t\,\frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \equiv F(t)\,A(\Delta t)$$

(essendo $2^t = F(t)$ e posto

$A(\Delta t) = \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$)

Quindi la variazione di F(t) risulta essere proporzionale a F(t) stessa (a parità di intervallo di tempo Δt)



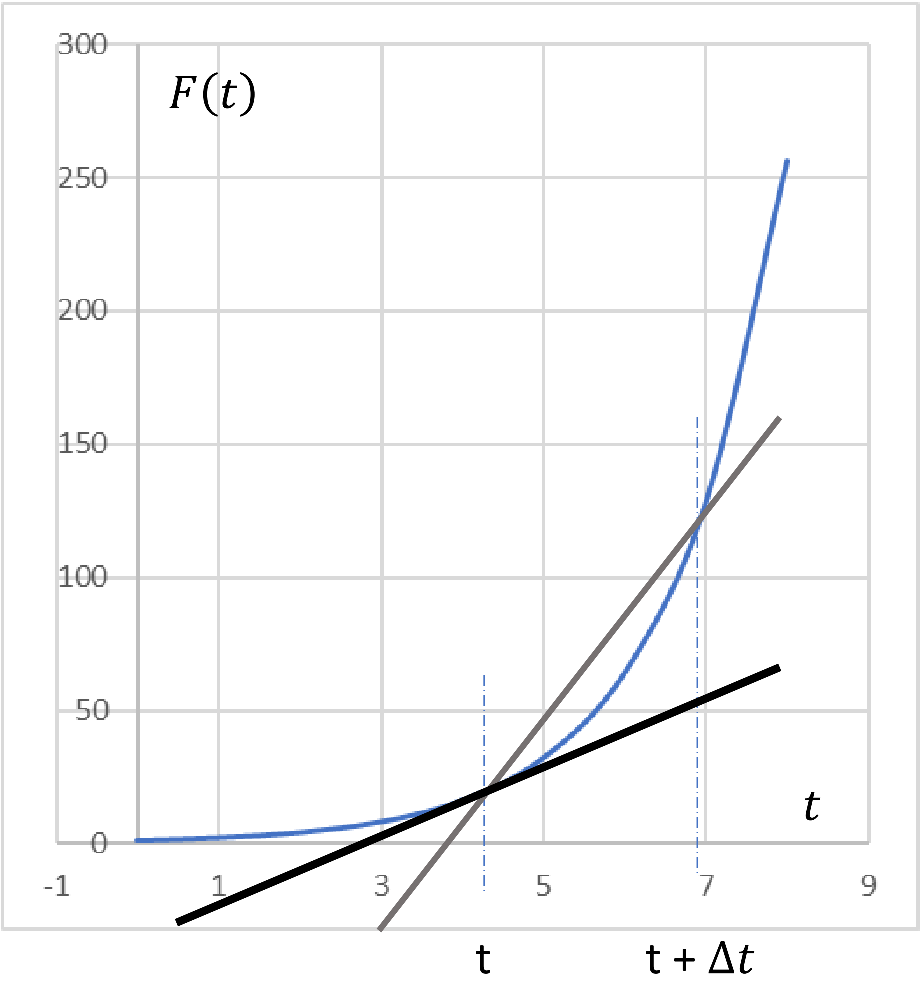
Se ci vogliamo svincolare dalla scelta dell'intervallo di tempo Δt possiamo prendere intervalli di tempo Δt sempre più piccoli

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = 2^t \lim_{\Delta t \to 0} A(\Delta t) = 2^t A$$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t}$ è il coefficiente angolare della tangente alla curva all'istante t: rappresenta la velocità con cui la grandezza F varia in tale istante.

Tale velocità (chiamiamola $\frac{dF}{dt}$) risulta quindi proporzionale a F

$$\frac{dF}{dt} = A\, F(t)$$



La relazione

$$\frac{dF}{dt} = A\,F(t)$$

(o la equivalente alle differenze finite)

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = F(t)\,A(\Delta t)$$

rappresenta la relazione di definizione di un andamento esponenzialmente crescente nel tempo.

L'unico parametro che la caratterizza è la costante A, legata al valore della base della potenza che definisce la funzione F (in questo caso, essendo $F(t) = 2^t$, la base è 2).

Più in generale, per una funzione del tipo $F(t) = a^t$, (con a reale positivo) vale ancora la relazione

$$\frac{dF}{dt} = A(a)\,F(t)$$

solo che la costante A risulta essere una funzione di a : tale funzione viene indicata con la scrittura

$$\ln(a) \quad (\equiv A(a))$$

ove ln(a) viene chiamato **logaritmo naturale** di a

La funzione esponenziale

Tra i diversi valori a di base possibili per la funzione $F(t) = a^t$ è particolarmente importante il caso $a = e$ per cui $\ln(e) = 1.$

Infatti la velocità di variazione della funzione F(t) risulta eguale al valore della funzione stessa

$$\frac{dF}{dt} = F(t)$$

La funzione viene chiamata esponenziale ed il valore e numero di Eulero ($e \cong 2.718281828459 \ldots$)

La funzione esponenziale risulta così scritta come

$$e^t \text{ oppure } \exp(t)$$

Proprietà della funzione esponenziale

La funzione esponenziale ha alcune proprietà che derivano dalla sua definizione di funzione con elevamento a potenza

- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$
- $\exp(\alpha\, x) = (\exp(x))^{\alpha} = (\exp(\alpha))^{x}$

Una ulteriore proprietà lega la funzione esponenziale con la funzione logaritmo naturale precedentemente introdotta: per un qualsiasi numero positivo a si ha

- $\exp(\ln(a)) = \ln(\exp(a)) = a$

Cioè funzione esponenziale e logaritmo naturale sono una la funzione inversa dell'altra.

La funzione esponenziale risulta definita anche per valori negativi dell’argomento.

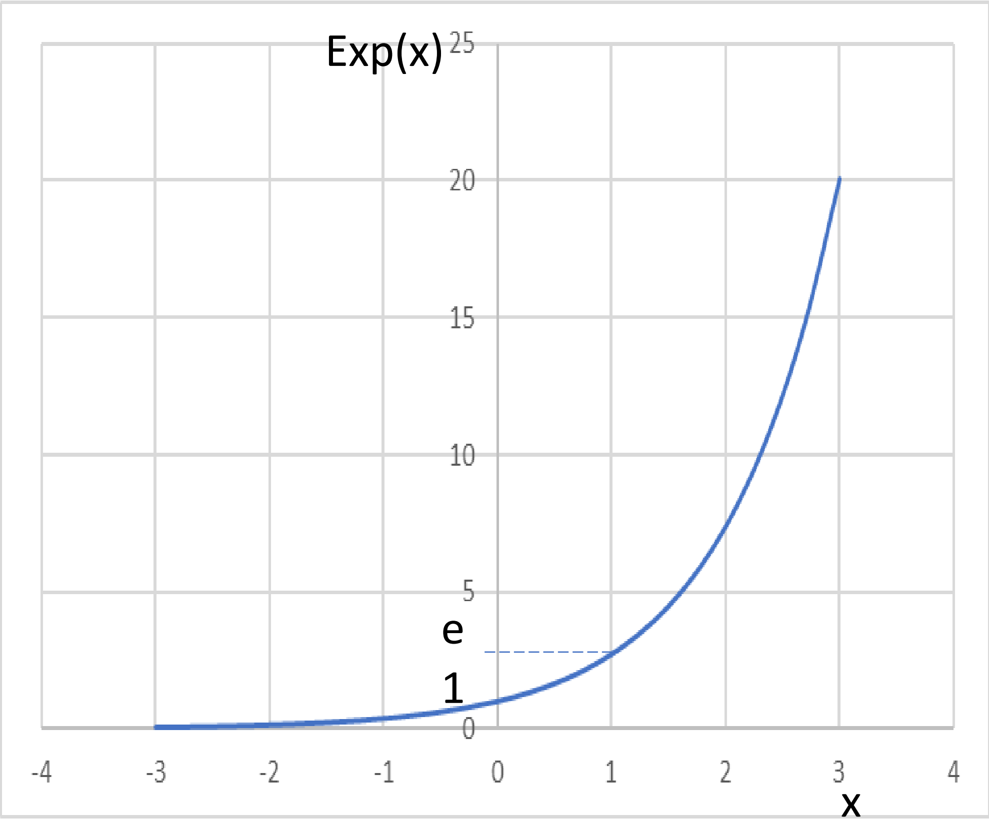
Dalle precedenti proprietà si ha

$$\exp(-x) = 1/\exp(x)$$

Inoltre abbiamo che

$$\exp(x+1) = e\,\exp(x)$$

Cioè variando di una unità l’argomento dell’esponenziale, si moltiplica di un fattore *e* il valore della funzione.



Andamenti esponenzialmente decrescenti nel tempo

Un tipo di funzione esponenziale del tempo F(t) con andamento esponenziale che incontreremo nelle esperienze di laboratorio è quello decrescente (**decadimento esponenziale**).

Esso ha la forma

$$F(t) = F(0)\,\exp(-\frac{t}{\tau})$$

e corrisponde al caso in cui la variazione nel tempo di F(t) segue la legge

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{1}{\tau}F$$

o, espressa alle differenze finite

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \cong -\frac{1}{\tau}F$$

Il parametro τ (che ha la dimensione di un tempo) si chiama **tempo proprio** del decadimento esponenziale.

Esso è caratterizzato dalla proprietà

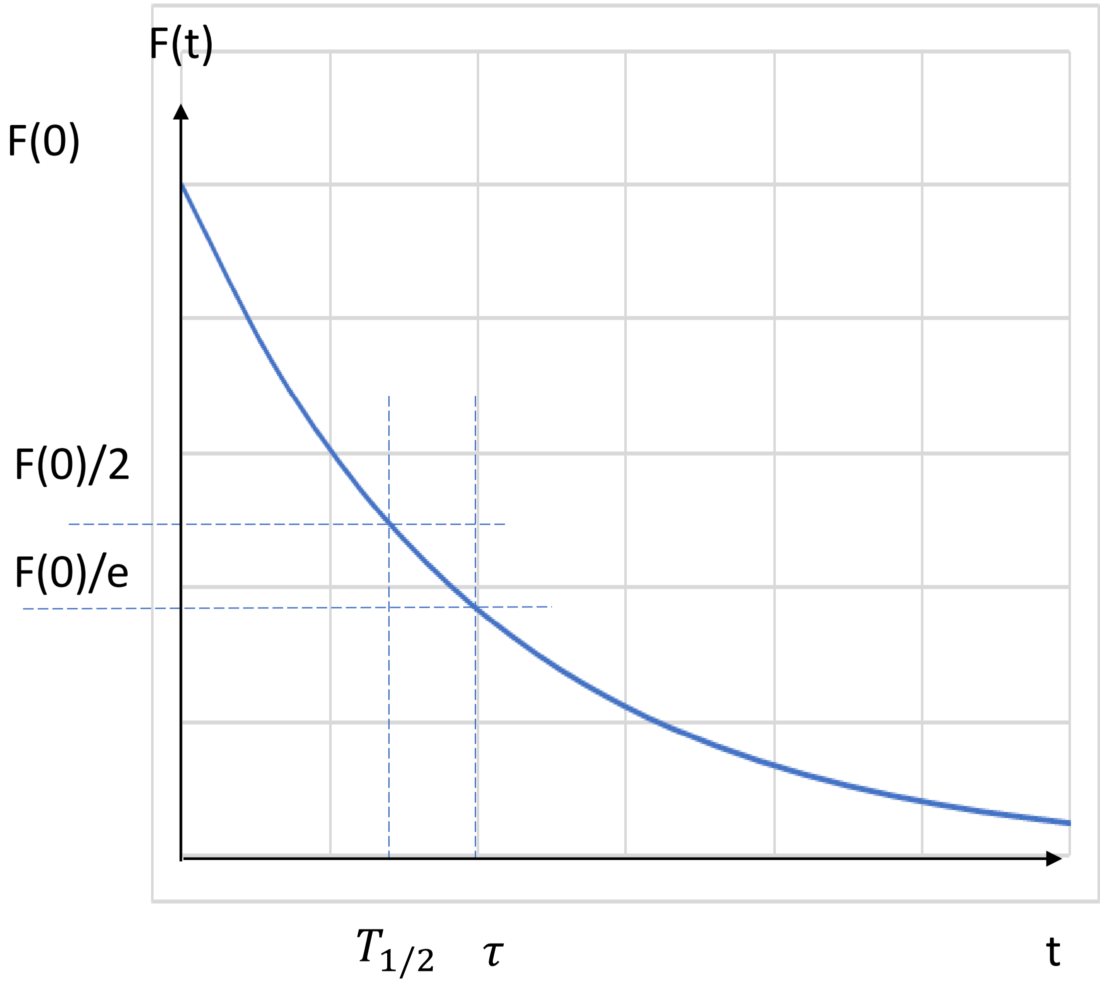
$$F(t+\tau) = F(t)/e$$

Un altro modo per esprimere ciò è caratterizzare l'intervallo di tempo $T_{1/2}$ in cui il valore della funzione si dimezza

$$F\left(t+T_{1/2}\right) = \frac{1}{2}F(t)$$

Risulta che

$$T_{1/2} = \tau \ln(2)$$



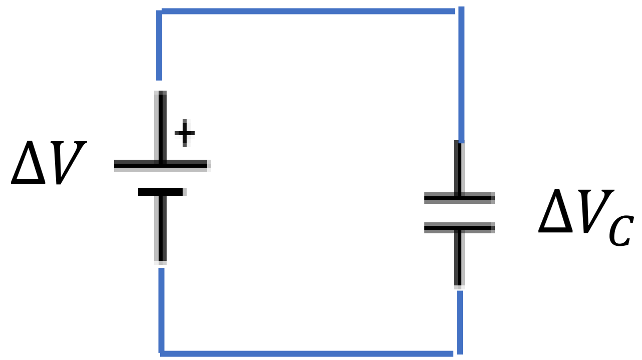
Circuiti con condensatori

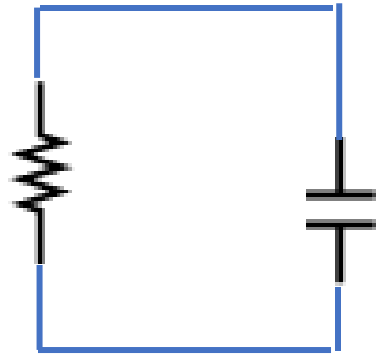
In un circuito in condizioni stazionarie, le tensioni devono essere costanti.

Poiché per un condensatore la tensione ai suoi capi dipende dalla carica sulle armature e quest'ultima varia se della corrente circola nel dispositivo, la corrente concatenata ad un condensatore deve essere nulla.

Nel caso di un condensatore connesso ad un alimentatore, avremo che la tensione ΔV_C sarà (per la legge delle maglie) eguale (e contraria) a quella erogata dall'alimentatore.

Per un condensatore connesso in serie con una resistenza, corrente circolante nulla implica tensione nulla ai capi della resistenza. Dalla legge delle maglie si ricava che anche la tensione sul condensatore sarà nulla.





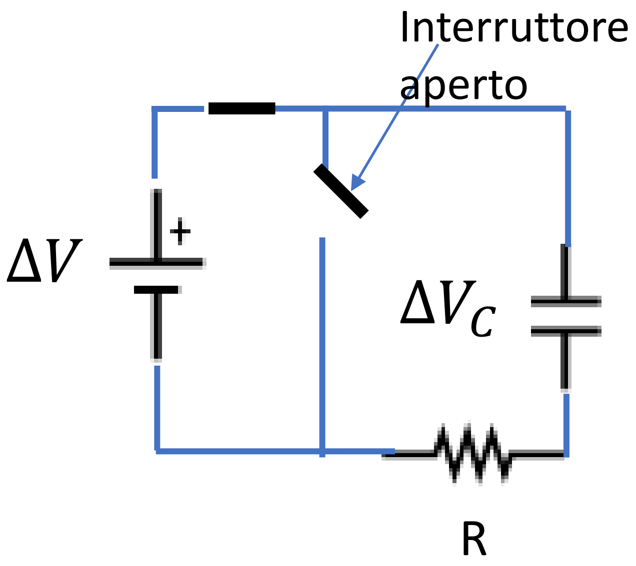
Le cose cambiano quando consideriamo circuiti in condizioni non stazionarie.

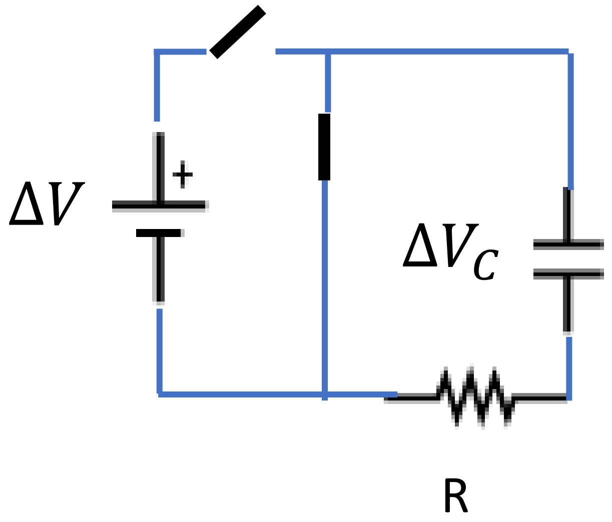
Nel circuito accanto vi è una sola maglia in cui può circolare corrente: nel tratto con l'interruttore aperto non vi è connessione elettrica.

In condizioni stazionarie non vi è corrente circolante e la tensione ΔV_C è eguale ed opposta a ΔV.

Se chiudiamo l'interruttore aperto ed apriamo l'altro di connessione all'alimentatore, può circolare corrente solo nella maglia contenente resistore e condensatore.

Ma all'istante in cui si è operato sugli interruttori il condensatore risulta carico e quindi il circuito non è in condizioni stazionarie: deve fluire corrente e le tensioni devo cambiare nel tempo.





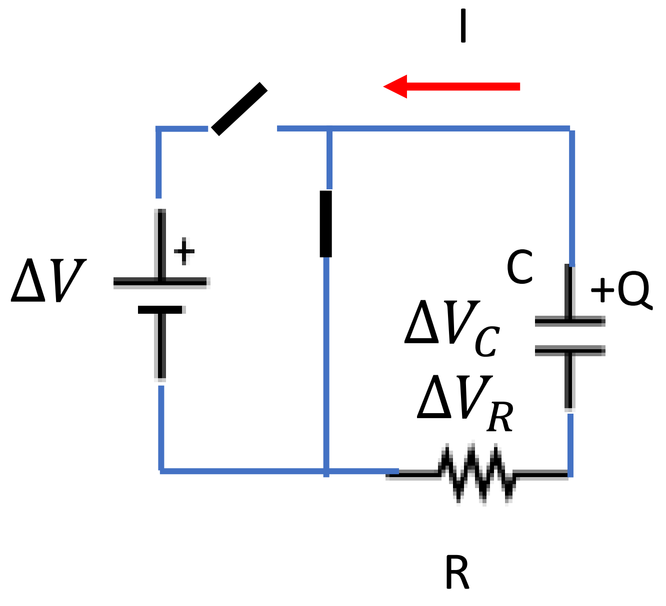
Percorrendo la maglia in senso antiorario avremo

$$\Delta V_R + \Delta V_C = 0$$

Inoltre sarà

$$R\, I = -\, \Delta V_R$$
$$I\, \Delta t \cong -\, \Delta Q$$
$$C\, \Delta V_C = Q$$

(il condensatore viene attraversato dal polo negativo a quello positivo)



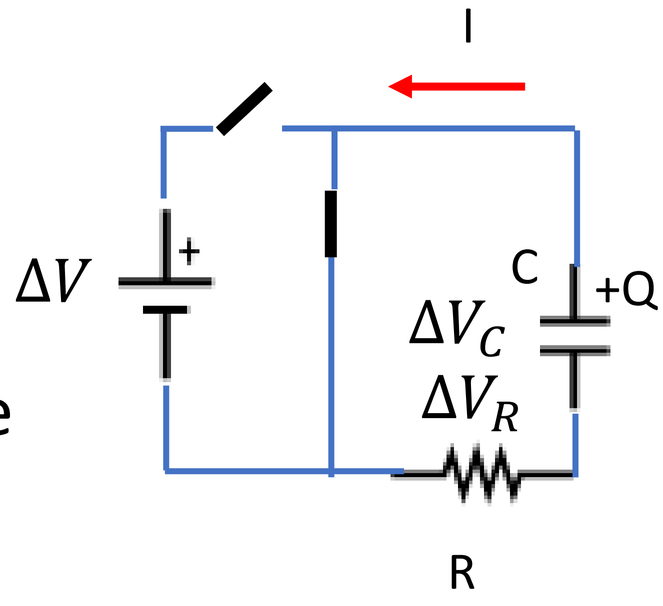
Mettendo tutto assieme abbiamo, in termini della carica Q sulle armature del condensatore

$$\frac{Q}{C} = \Delta V_C = -\, \Delta V_R = R\, I \cong -\, R\, \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

(il simbolo $\cong$ appare invece che un simbolo di eguaglianza, perché la corrente I varia nell’intervallo di tempo Δt considerato e se ne considera un valore medio)

La relazione

$$\frac{Q}{C} \cong -R\frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cong -\frac{1}{RC}Q$$



definisce un andamento decrescente esponenzialmente nel tempo, del tipo

$$Q(t) = Q(0)\exp(-\frac{t}{\tau})$$

ove $\tau = RC$. (verificare la correttezza dimensionale!)

Il valore Q(0) va poi determinato imponendo la condizione che la tensione sul condensatore all'istante t = 0 sia pari a quella dell'alimentatore

$$Q(0) = C\,\Delta V$$

$$Q(t) = C\,\Delta V \exp(-\frac{t}{RC})$$

Essendo

$$I \cong \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cong \frac{1}{RC} Q$$

(tutte queste relazioni sono esatte nel limite $\Delta t \to 0$)

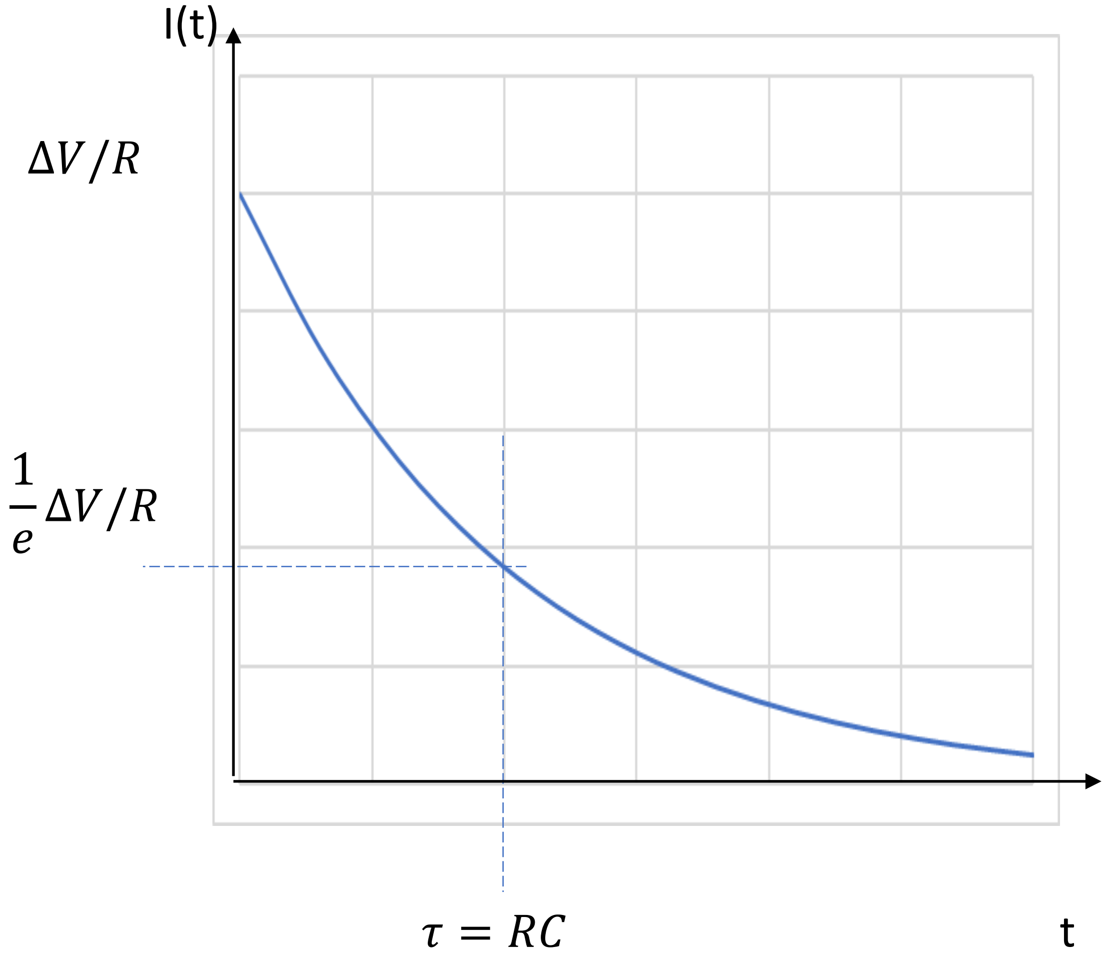
Ne segue che anche la corrente ha un andamento esponenzialmente decrescente, di equazione

$$I(t) = \frac{1}{RC} C\,\Delta V \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = I(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

con $I(0) = \Delta V/R$.

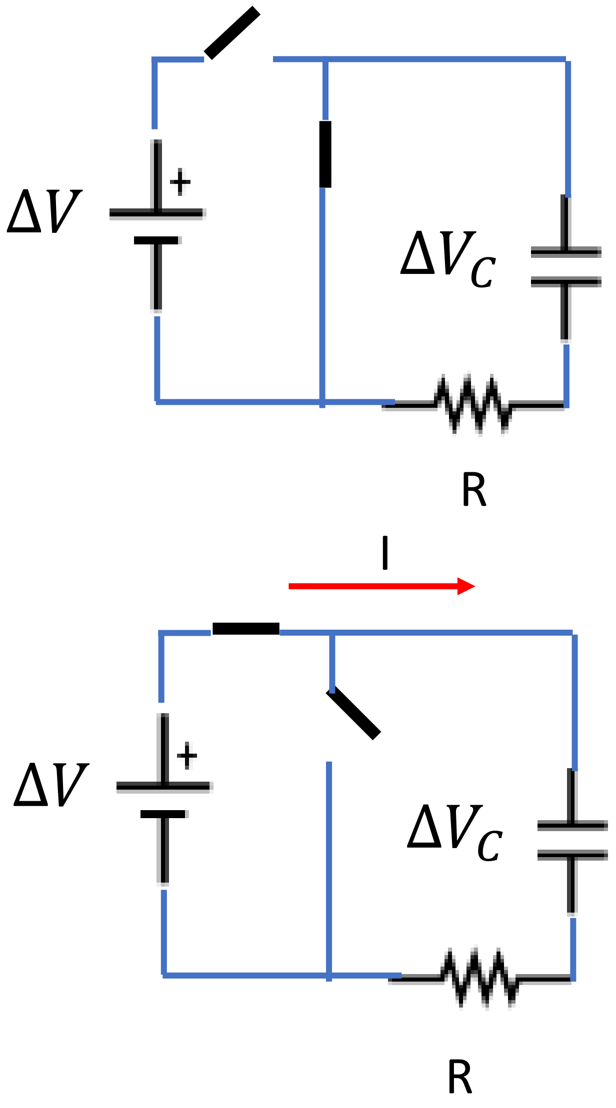
Il grafico dell'andamento temporale della corrente parte da un valore $I(0) = \Delta V/R$ (come se il condensatore si comportasse come un alimentatore, almeno per l'istante iniziale).

Per tempi successivi, la corrente diminuisce di un fattore e ogni intervallo di tempo $\tau = RC$ diminuisce di un fattore e, fino ad annullarsi all'infinito (questa corrisponde alla soluzione stazionaria, in cui la corrente è nulla).



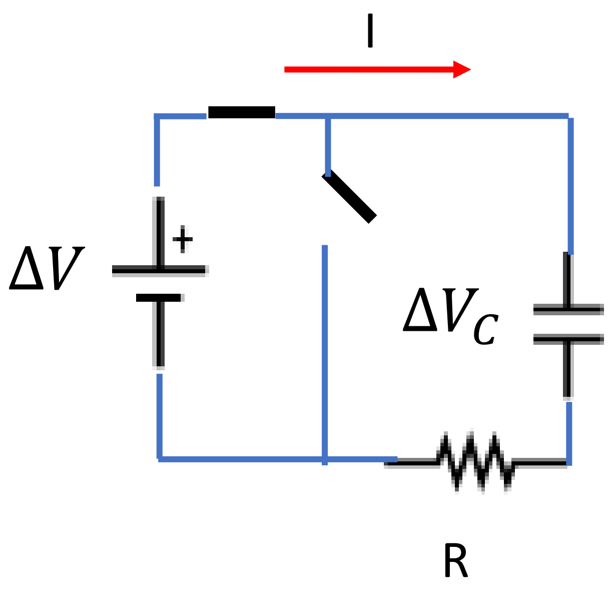
Vediamo ora di partire da un situazione stazionaria del circuito, in cui non circola corrente e il condensatore è scarico.

Se ora apriamo l'interruttore della maglia con la resistenza e il condensatore in serie e chiudiamo quello della maglia che contiene l'alimentatore, il circuito non è più in condizioni stazionarie: della corrente tende a circolare in senso orario.



In questo circuito le relazioni sono simili a quelle viste in precedenza. Dalla legge della maglia (andando sempre in senso antiorario orario, seguendo il verso definito positivo della corrente) avremo

$$\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V = 0$$



e le relazioni che caratterizzano resistenza e condensatore saranno

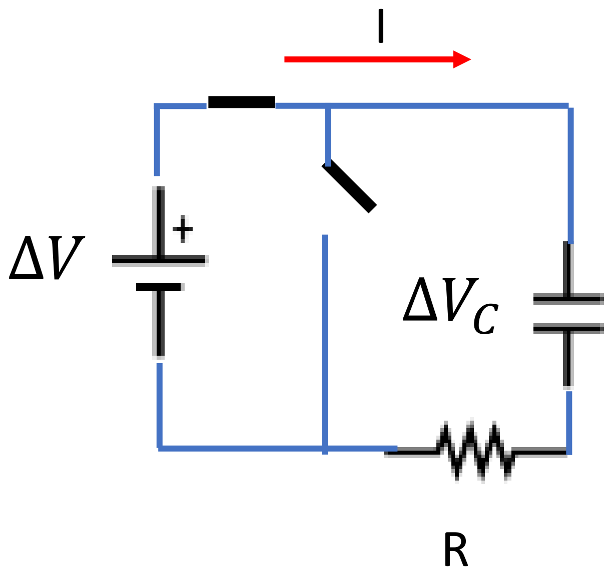
$$R\, I = -\, \Delta V_R$$
$$I\, \Delta t \cong \Delta Q$$
$$C\, \Delta V_C = -\, Q$$

(il condensatore viene attraversato in verso opposto al caso precedente)

Avremo

$$-\frac{Q}{C} = \Delta V_C = -\, \Delta V_R - \Delta V = R\, I - \Delta V \cong R\frac{\Delta Q}{\Delta t} - \Delta V$$

$$-\frac{Q}{C} \cong R\frac{\Delta Q}{\Delta t} - \Delta V$$



Definendo $Q' = Q - C\,\Delta V$

avremo

$$-\frac{Q'}{C} \cong R\frac{\Delta Q'}{\Delta t}$$

(ricordiamo che la variazione del termine costante $-\,C\,\Delta V$ è nulla) cioè esattamente la stessa equazione del precedente caso, che ammette la stessa forma di soluzione

$$Q'(t) = Q'(0)\exp(-\frac{t}{RC})$$

cioè

$$Q(t) = C\,\Delta V + Q'(0)\exp(-\frac{t}{RC})$$

$$Q(t) = C\,\Delta V + Q'(0)\,\exp(-\frac{t}{RC})$$

$Q'(0)$ si ricava imponendo che $Q(0) = 0$ (il condensatore inizialmente è scarico), cioè $Q'^{(0)} = -C\,\Delta V$ e quindi alla fine

$$Q(t) = C\,\Delta V(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right))$$

Per quanto riguarda la corrente I, avremo

$$I \;\cong \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q'}{\Delta t} \cong \frac{1}{RC}\,Q' = -\frac{1}{RC}\,C\,\Delta V\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

cioè

$$I(t) = -\frac{\Delta V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

In questo caso la corrente parte dal valore $-\Delta V/R$ e tende per tempi lunghi a raggiungere un valore nullo, proprio dello stato stazionario.

La corrente complessivamente è negativa (per cui in realtà circola in senso orario nel circuito) ed il suo valore si riduce di un fattore e ogni intervallo di tempo $\tau = RC$.