Come risolvere un sistema $Ax = b$ quando A non è quadrata, oppure quando è quadrata ma non invertibile?
Utilizzando le trasformazioni elementari possiamo sempre trasformare un sistema lineare qualsiasi in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) ma in modo che la matrice completa del sistema sia "a scalini" (Row Echelon Form):

DEFINIZIONE

Una matrice si dice a scala o a scalini se, per ogni riga non nulla, il pivot della riga compare prima del pivot della riga successiva; si richiede inoltre che le eventuali righe nulle vengano per ultime, ovvero, dopo una riga nulla possono esserci solo righe nulle.

Ad esempio, sono a scala le seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come risolvere un sistema $Ax = b$ quando A non è quadrata, oppure quando è quadrata ma non invertibile?
Utilizzando le trasformazioni elementari possiamo sempre trasformare un sistema lineare qualsiasi in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) ma in modo che la matrice completa del sistema sia "a scalini" (Row Echelon Form):

DEFINIZIONE

Una matrice si dice a scala o a scalini se, per ogni riga non nulla, il pivot della riga compare prima del pivot della riga successiva; si richiede inoltre che le eventuali righe nulle vengano per ultime, ovvero, dopo una riga nulla possono esserci solo righe nulle.

Ad esempio, sono a scala le seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre queste altre non sono a scala:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(nella prima matrice il pivot della terza riga appare al terzo posto, prima di quello della seconda riga che appare al quarto posto; nella seconda matrice il pivot della seconda riga viene prima del pivot della prima riga; nella terza matrice la seconda riga è nulla, ma la terza riga non è nulla).

Eliminazione di Gauss

In modo simile a quanto abbiamo già visto nel caso dei sistemi quadrati si dimostra che:

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Ogni sistema lineare $Ax = b$ può essere trasformato (tramite le trasformazioni elementari sulle righe della matrice completa) in un sistema equivalente in cui la matrice completa è a scalini.

Vediamo un esempio di applicazione dell' algoritmo di Gauss per trasformare un sistema lineare in un sistema a scalini:

$$\begin{cases} -y + z = 7 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice completa del sistema è: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Troviamo una riga della matrice che ha il pivot più a sinistra (se tutte le righe sono nulle, la matrice è già a scala) e scambiamola con la prima riga: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Utilizzando il pivot di quella che è ora la prima riga, annulliamo tutti i coefficienti che sono sulla colonna sotto questo pivot: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Eliminazione di Gauss

In modo simile a quanto abbiamo già visto nel caso dei sistemi quadrati si dimostra che:

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Ogni sistema lineare $Ax = b$ può essere trasformato (tramite le trasformazioni elementari sulle righe della matrice completa) in un sistema equivalente in cui la matrice completa è a scalini.

Vediamo un esempio di applicazione dell' algoritmo di Gauss per trasformare un sistema lineare in un sistema a scalini:

$$\begin{cases} -y + z = 7 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice completa del sistema è: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Troviamo una riga della matrice che ha il pivot più a sinistra (se tutte le righe sono nulle, la matrice è già a scala) e scambiamola con la prima riga: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Utilizzando il pivot di quella che è ora la prima riga, annulliamo tutti i coefficienti che sono sulla colonna sotto questo pivot: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Ricominciamo le operazioni descritte dalla seconda riga, non considerando più la prima riga.

Eliminazione di Gauss

In modo simile a quanto abbiamo già visto nel caso dei sistemi quadrati si dimostra che:

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Ogni sistema lineare $Ax = b$ può essere trasformato (tramite le trasformazioni elementari sulle righe della matrice completa) in un sistema equivalente in cui la matrice completa è a scalini.

Vediamo un esempio di applicazione dell' algoritmo di Gauss per trasformare un sistema lineare in un sistema a scalini:

$$\begin{cases} -y + z = 7 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice completa del sistema è: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Troviamo una riga della matrice che ha il pivot più a sinistra (se tutte le righe sono nulle, la matrice è già a scala) e scambiamola con la prima riga: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Utilizzando il pivot di quella che è ora la prima riga, annulliamo tutti i coefficienti che sono sulla colonna sotto questo pivot: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Ricominciamo le operazioni descritte dalla seconda riga, non considerando più la prima riga. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{bmatrix}$.

Abbiamo raggiunto una matrice a scala, che corrisponde al sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y + z = 7 \\ -9z = -36 \end{cases}$, che è equivalente al sistema di partenza.

ESERCIZIO

Trasformare i seguenti sistemi in sistemi a scala equivalenti.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + w = 1 \\ x - w = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Consideriamo un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è a scala, ma senza righe nulle come ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice dei coefficienti è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Consideriamo un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è a scala, ma senza righe nulle come ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice dei coefficienti è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Il pivot della prima riga si trova nella colonna (dei coefficienti relativi a) x_1, quello della seconda riga nella colonna relativa ad x_2, quello della terza riga ad x_4:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_4 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Consideriamo un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è a scala, ma senza righe nulle come ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice dei coefficienti è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Il pivot della prima riga si trova nella colonna (dei coefficienti relativi a) x_1, quello della seconda riga nella colonna relativa ad x_2, quello della terza riga ad x_4:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Trasformiamo ora il sistema risolvendo ogni equazione rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, ovvero spostiamo le altre variabili (cambiando di segno!) a destra del simbolo $=$ e dividiamo se necessario per un opportuno coefficiente.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_4 \\ x_4 = 1 + x_5/2 \end{cases} .$$

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Consideriamo un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è a scala, ma senza righe nulle come ad esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{dove la matrice dei coefficienti è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Il pivot della prima riga si trova nella colonna (dei coefficienti relativi a) x_1, quello della seconda riga nella colonna relativa ad x_2, quello della terza riga ad x_4:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Trasformiamo ora il sistema risolvendo ogni equazione rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, ovvero spostiamo le altre variabili (cambiando di segno!) a destra del simbolo $=$ e dividiamo se necessario per un opportuno coefficiente.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_4 \\ x_4 = 1 + x_5/2 \end{cases} .$$

Partendo dall' ultima equazione e risalendo, possiamo sostituire tutte le occorrenze delle variabili “pivot” (ovvero x_4, x_2, x_1) che si trovano a destra con variabili non “pivot” (x_5 e x_3):

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 1 - x_5/2 + 1 \\ x_2 = -1 - x_5/2 \\ x_4 = 1 + x_5/2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5/2 \\ x_2 = -1 - x_5/2 \\ x_4 = 1 + x_5/2 \end{cases}$$

(SEGUE)

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5/2 \\ x_2 = -1 - x_5/2 \\ x_4 = 1 + x_5/2 \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo un sistema in cui le variabili di pivot appaiono solo a sinistra.

Ogni valore arbitrario delle variabili a destra (che non sono di pivot) fornisce un valore alle variabili di pivot e quindi una soluzione del sistema .

Ad esempio, se $x_5 = 0$ e $x_3 = 1$ otteniamo $x_4 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = -1$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è una soluzione del sistema originale

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Più in generale, l'insieme di tutte le soluzioni si ottiene utilizzando i parametri h, k per dare valore alle variabili che non sono di pivot a destra delle equazioni, x_3, x_5.

Una soluzione del sistema avrà quindi la forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h - k/2 \\ -1 - k/2 \\ h \\ 1 + k/2 \\ k \end{bmatrix}$, dove h, k possono variare in $\mathbb{R}$.

In altre parole, l'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$SOL = \{(-h - k/2, -1 - k/2, h, 1 + k/2, k) : h, k \in \mathbb{R}\}.$$

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

1. In ogni equazione risolviamo rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, spostando a destra tutte le altre variabili ed eventualmente dividendo per un coefficiente opportuno.

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

1. In ogni equazione risolviamo rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, spostando a destra tutte le altre variabili ed eventualmente dividendo per un coefficiente opportuno.

2. Utilizziamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot dell'ultima riga in tutte le altre equazioni;

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

1. In ogni equazione risolviamo rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, spostando a destra tutte le altre variabili ed eventualmente dividendo per un coefficiente opportuno.

2. Utilizziamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot dell'ultima riga in tutte le altre equazioni;

3. Se abbiamo raggiunto un sistema in cui le variabili di pivot appaiono solo a sinistra, ci fermiamo e risolviamo il sistema utilizzando parametri per le variabili non di pivot. Altrimenti ci dimentichiamo dell'ultima riga e ricominciamo dal punto 2, in modo da eliminare la variabile pivot della penultima riga dalla destra delle equazioni, e così via.

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

1. In ogni equazione risolviamo rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, spostando a destra tutte le altre variabili ed eventualmente dividendo per un coefficiente opportuno.

2. Utilizziamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot dell'ultima riga in tutte le altre equazioni;

3. Se abbiamo raggiunto un sistema in cui le variabili di pivot appaiono solo a sinistra, ci fermiamo e risolviamo il sistema utilizzando parametri per le variabili non di pivot. Altrimenti ci dimentichiamo dell'ultima riga e ricominciamo dal punto 2, in modo da eliminare la variabile pivot della penultima riga dalla destra delle equazioni, e così via.

SOLUZIONI PER SISTEMI A SCALA

Più in generale, se un sistema ha per matrice dei coefficienti una matrice a scala senza righe nulle, possiamo trasformare il sistema in un sistema risolto e trovare tutte le sue soluzioni operando come nell'esempio precedente.

Il procedimento da seguire è il seguente:

1. In ogni equazione risolviamo rispetto alla variabile che corrisponde al pivot della riga, spostando a destra tutte le altre variabili ed eventualmente dividendo per un coefficiente opportuno.

2. Utilizziamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot dell'ultima riga in tutte le altre equazioni;

3. Se abbiamo raggiunto un sistema in cui le variabili di pivot appaiono solo a sinistra, ci fermiamo e risolviamo il sistema utilizzando parametri per le variabili non di pivot. Altrimenti ci dimentichiamo dell'ultima riga e ricominciamo dal punto 2, in modo da eliminare la variabile pivot della penultima riga dalla destra delle equazioni, e così via.

4. Se invece un sistema ha una matrice di coefficienti a scala con qualche riga nulla, allora l'esistenza di soluzioni dipenderà anche dalla colonna dei termini noti del sistema. Il sistema avrà soluzioni se e solo se i termini noti che corrispondono alle righe nulle sono nulli.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = +1 \\ y + z - w = -2 \\ 2w = 4 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x+y+z+2w=+1 \\ y+z-w=-2 \\ 2w=4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (con i pivots in rosso) è

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} \end{bmatrix} \end{array};$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = +1 \\ y + z - w = -2 \\ 2w = 4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (con i pivots in rosso) è

$$\begin{array}{cccc} x & y & & w \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \end{array};$$

la matrice è a scala e le variabili x, y, w corrispondono a pivots (ripettivamente della prima, seconda e terza riga); risolvendo rispetto alle variabili pivots in ogni riga otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = -y - z - 2w + 1 \\ y = -z + w - 2 \\ w = 2 \end{cases}$$

ESEMPIO cnt.

Ora usiamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot w quando compare a destra, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -y - z - 2 \cdot 2 + 1 \\ y = -z + 2 - 2 \\ w = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -y - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

ESEMPIO cnt.

Ora usiamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot w quando compare a destra, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -y - z - 2 \cdot 2 + 1 \\ y = -z + 2 - 2 \\ w = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = -y - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

A questo punto, se consideriamo il sistema ottenuto cancellando l'ultima equazione, ci accorgiamo che la variabile che corrisponde al pivot della seconda riga, ovvero y, compare a destra nella prima equazione. Usiamo allora la seconda equazione per eliminare le occorrenze di y a destra, ottenendo:

ESEMPIO cnt.

Ora usiamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot w quando compare a destra, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -y - z - 2 \cdot 2 + 1 \\ y = -z + 2 - 2 \\ w = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -y - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

A questo punto, se consideriamo il sistema ottenuto cancellando l'ultima equazione, ci accorgiamo che la variabile che corrisponde al pivot della seconda riga, ovvero y, compare a destra nella prima equazione. Usiamo allora la seconda equazione per eliminare le occorrenze di y a destra, ottenendo:

$$\begin{cases} x = z - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

ESEMPIO cnt.

Ora usiamo l'ultima equazione per eliminare la variabile pivot w quando compare a destra, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x = -y - z - 2 \cdot 2 + 1 \\ y = -z + 2 - 2 \\ w = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -y - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

A questo punto, se consideriamo il sistema ottenuto cancellando l'ultima equazione, ci accorgiamo che la variabile che corrisponde al pivot della seconda riga, ovvero y, compare a destra nella prima equazione. Usiamo allora la seconda equazione per eliminare le occorrenze di y a destra, ottenendo:

$$\begin{cases} x = z - z - 3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -z \\ w = 2 \end{cases}$$

Ponendo l'unica variabile z che non corrisponde ad alcun pivots uguale ad un parametro reale h e otteniamo tutte le soluzioni del sistema:

$$SOL = \{(-3, -h, h, 2) : h \in \mathbb{R}\}.$$

ESEMPIO 2

Supponiamo adesso che la matrice dei coefficienti abbia qualche riga nulla:

$$A = \begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora un sistema del tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ avrà soluzione se e solo se $b_2 = b_3 = 0$.
In particolare, il sistema

$$\begin{cases} x - y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione, mentre il sistema

$$\begin{cases} x - y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

ha soluzione (basta cancellare le righe nulle e procedere come per una matrice a scala senza righe nulle; in particolare, solo la variabile x corrisponde ad un pivot (quello della prima riga) e l'insieme delle soluzioni è $\{(3 + h, h, k) : h, k \in \mathbb{R}\}$).

Matrici a scalini e rango

Come abbiamo visto, ogni matrice A può essere ridotta, tramite trasformazioni elementari, ad una matrice a scalini. Inoltre, le trasformazioni elementari non cambiano il rango. Ma il rango di una matrice a scalini è semplicemente il numero di righe non nulle, perché la forma a scalini garantisce che le righe non nulle siano indipedenti.
Quindi, per trovare il rango di una matrice possiamo ridurla a scalini tramite operazioni elementari e poi contare le righe non nulle della matrice a scalini.

Esempio La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ha rango 3 perché può essere trasformata nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{bmatrix}$ che ha tre righe non nulle.

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ha rango 2 perché può essere trasformata nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che ha due righe non nulle.