IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

- Data una matrice quadrata A è possibile definire un numero, il determinante della matrice, che svolge un ruolo molto importante nello studio dei problemi lineari.

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

- Data una matrice quadrata A è possibile definire un numero, il determinante della matrice, che svolge un ruolo molto importante nello studio dei problemi lineari.
- Il determinante di una matrice A si indica con

$$det(A) \text{ oppure } |A|$$

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

- Data una matrice quadrata A è possibile definire un numero, il determinante della matrice, che svolge un ruolo molto importante nello studio dei problemi lineari.
- Il determinante di una matrice A si indica con

$$det(A) \text{ oppure } |A|$$

- La definizione di determinante è piuttosto complessa. In questo corso ci accontenteremo di definizioni “operative” del determinante. In particolare studieremo un metodo, basato sulle traformazioni elementari delle matrici, che ci permetterà di calcolare il determinante di matrici complicate trasformandole in matrici più semplici, di determinante noto.

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

- Data una matrice quadrata A è possibile definire un numero, il determinante della matrice, che svolge un ruolo molto importante nello studio dei problemi lineari.
- Il determinante di una matrice A si indica con

$$det(A) \text{ oppure } |A|$$

- La definizione di determinante è piuttosto complessa. In questo corso ci accontenteremo di definizioni "operative" del determinante. In particolare studieremo un metodo, basato sulle traformazioni elementari delle matrici, che ci permetterà di calcolare il determinante di matrici complicate trasformandole in matrici più semplici, di determinante noto.
- Diamo per prima cosa una definizione "geometrica" del determinante di matrici di dimensione 2 e 3, ovvero nel piano e nello spazio; poi useremo le proprietà del determinante del piano e dello spazio per definire il determinante in dimensioni superiori.

Determinante di matrici 2×2

Se A è una matrice 2×2,

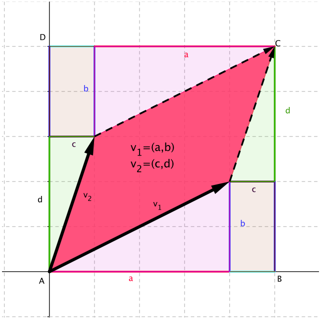
$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

allora definiamo

$$det(A) = ad - cb.$$

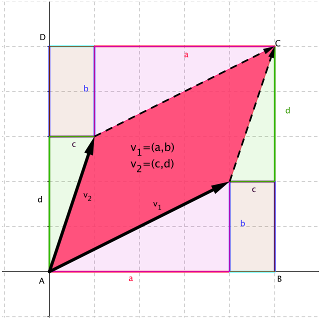
Come vedremo nella prossima scheda, il determinante delle matrici 2×2 ha un'interessante interpretazione geometrica.

Determinante nel piano



Consideriamo i due vettori $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ in figura.

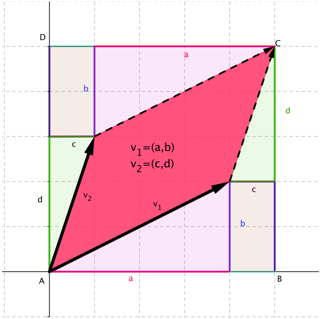
Determinante nel piano



Consideriamo i due vettori $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ in figura.

L'area del parallelogramma (zona rossa) costruito sui due vettori si ottiene dall'area del rettangolo *ABCD* sottraendo l'area di 2 triangoli di area $ab/2$, due triangoli di area $cd/2$ e di due rettangoli di area bc.

Determinante nel piano

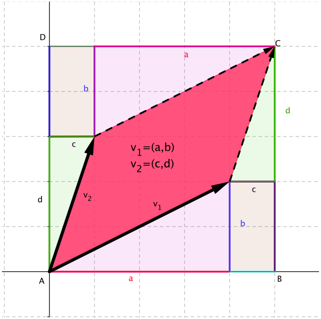


Consideriamo i due vettori $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ in figura.

L'area del parallelogramma (zona rossa) costruito sui due vettori si ottiene dall'area del rettangolo $ABCD$ sottraendo l'area di 2 triangoli di area $ab/2$, due triangoli di area $cd/2$ e di due rettangoli di area bc.

Quindi l'area del parallelogramma $ABCD$ si esprime tramite le coordinate dei vettori come
$(a + c)(b + d) - ab - cd - 2bc = ad - bc$.

Determinante nel piano



Consideriamo i due vettori $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ in figura.

L'area del parallelogramma (zona rossa) costruito sui due vettori si ottiene dall'area del rettangolo $ABCD$ sottraendo l'area di 2 triangoli di area $ab/2$, due triangoli di area $cd/2$ e di due rettangoli di area bc.

Quindi l'area del parallelogramma $ABCD$ si esprime tramite le coordinate dei vettori come $(a+c)(b+d) - ab - cd - 2bc = ad - bc$.

Se consideriamo la matrice che ha come colonne i vettori v_1 e v_2 si ha $A = [v_1 v_2] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $det(A) = ad - bc$ è quindi l'area del parallelogramma rosso in figura.

Determinante nel piano

- Non sempre *det*(A) è un numero positivo: ad esempio, $det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.

Determinante nel piano

- Non sempre $det(A)$ è un numero positivo: ad esempio, $det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.
- Il valore assoluto di $det(A)$ è in ogni caso sempre uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori colonna della matrice A.

Determinante nel piano

- Non sempre $det(A)$ è un numero positivo: ad esempio, $det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.
- Il valore assoluto di $det(A)$ è in ogni caso sempre uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori colonna della matrice A.
- È facile verificare che se scambiamo il ruolo dei vettori, cioè scambiamo le due colonne di A, il determinante cambia di segno:

$$det([v_2 \ v_1]) = -det([v_1 \ v_2])$$

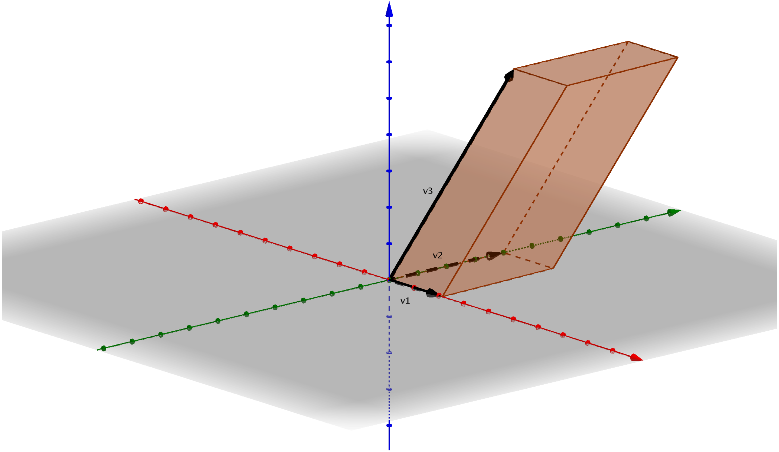
Determinante nel piano

- Non sempre $det(A)$ è un numero positivo: ad esempio, $det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$.
- Il valore assoluto di $det(A)$ è in ogni caso sempre uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori colonna della matrice A.
- È facile verificare che se scambiamo il ruolo dei vettori, cioè scambiamo le due colonne di A, il determinante cambia di segno:

  $$det([v_2 \; v_1]) = -det([v_1 \; v_2])$$

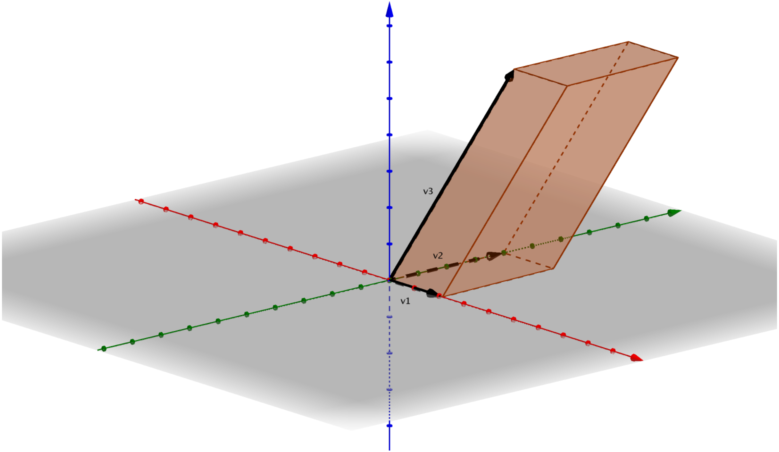
  il segno dipende dall'orientazione dei due vettori: è positivo se l'orientazione è quella della base canonica $[e_1 \; e_2]$, ovvero se il vettore della prima colonna raggiunge il vettore della seconda colonna ruotando in senso antiorario di un angolo minore di π.

Determinante di matrici 3×3



Analogamente, se v_1, v_2, v_3 sono i vettori in figura, il determinante della matrice $A = [v_1 \; v_2 \; v_3]$ è dato dal volume del parallelogramma in figura.

Determinante di matrici 3×3



Analogamente, se v_1, v_2, v_3 sono i vettori in figura, il determinante della matrice $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ è dato dal volume del parallelogramma in figura.

Il segno del determinate dipende dall'orientazione dei tre vettori: è positivo se l'orientazione è quella della base canonica $[e_1 \ e_2 \ e_3]$, negativo altrimenti.

Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di una matrice 3×3

Per calcolare il determinante della matrice

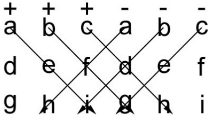
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di una matrice 3×3

Per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ si raddoppia la matrice: } \begin{bmatrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{bmatrix}$$

e si considerano le tre diagonali da sinistra a destra e le tre diagonali da destra a sinistra come in figura:



Per ogni diagonale si moltiplicano i termini: ad esempio la prima diagonale da sinistra a destra dà come risultato $a \cdot e \cdot i$. Si sommano poi questi prodotti: le diagonali con segno $+$ in figura danno un contributo positivo, quelle con segno meno, uno negativo. In definitiva, il determinante di A è

$$det(A) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i - c \cdot e \cdot g.$$

ESEMPI

1. $$det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$$

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
Per calcolarne il determinante con la regola di Sarrus raddoppiamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
e moltiplichiamo le diagonali sommandole come spiegato nella scheda precedente:
$$det(A) = +1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= -2 + 1 - 4 = -5.$$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

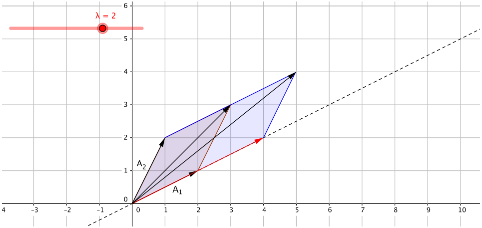
Dalla definizione di determinante come area o come volume segue che valgono le seguenti proprietà, che enunciamo nel caso di una matrice A di dimensione 2 descritta tramite le sue colonne $A = [A(:,1)\ A(:,2)]$ (analoghe proprietà valgono, come vedremo, in ogni dimensione):

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Dalla definizione di determinante come area o come volume segue che valgono le seguenti proprietà, che enunciamo nel caso di una matrice A di dimensione 2 descritta tramite le sue colonne $A = [A(:,1)\ A(:,2)]$ (analoghe proprietà valgono, come vedremo, in ogni dimensione):

- Omogeneità:

$$det[(\lambda A(:,1))\ A(:,2)] = \lambda det[A(:,1)\ A(:,2)] = det[A(:,1)\ (\lambda A(:,2))], \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



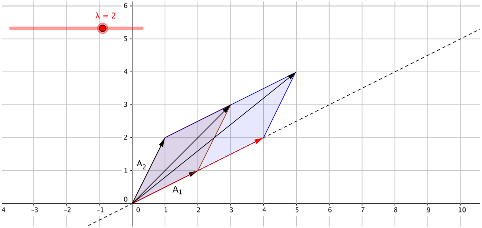
(animazione)

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Dalla definizione di determinante come area o come volume segue che valgono le seguenti proprietà, che enunciamo nel caso di una matrice A di dimensione 2 descritta tramite le sue colonne $A = [A(:,1)\ A(:,2)]$ (analoghe proprietà valgono, come vedremo, in ogni dimensione):

- Omogeneità:

$$det[(\lambda A(:,1))\ A(:,2)] = \lambda det[A(:,1)\ A(:,2)] = det[A(:,1)\ (\lambda A(:,2))], \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



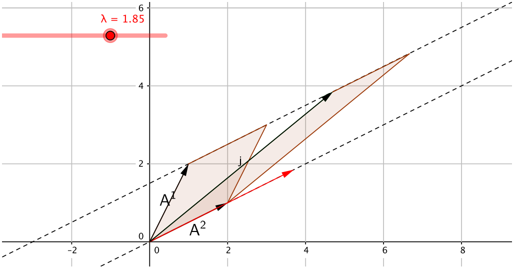
(animazione)

- In particolare questo implica che se una matrice ha una colonna nulla, allora il determinante è nullo.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Invarianza per scorrimento:

$$det[A(:,1)\ A(:,2)] = det[A(:,1) + \lambda A(:,2), A(:,2)].$$

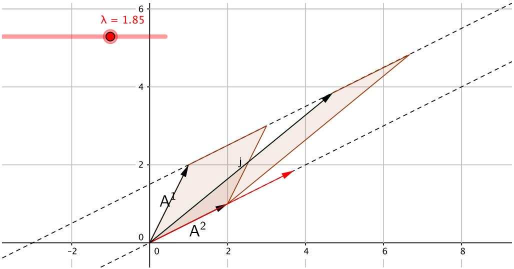


(animazione)

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Invarianza per scorrimento:

$$det[A(:,1)\ A(:,2)] = det[A(:,1) + \lambda A(:,2), A(:,2)].$$



(animazione)

In particolare se una matrice A ha due colonne uguali, $A(:,1) = A(:,2)$, il determinante è nullo perché:

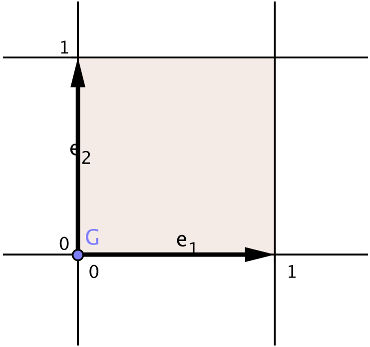
$$det[A(:,1)\ A(:,2)] = det[[A(:,1) - A(:,2)], A(:,2)] = det[\vec{0}, A(:,2)] = 0$$

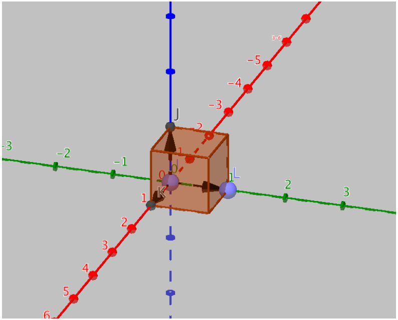
PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Alternanza: se scambiamo due colonne di una matrice, il determinante cambia di segno.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Alternanza: se scambiamo due colonne di una matrice, il determinante cambia di segno.
- $det(I_{2\times 2}) = det(I_{3\times 3}) = 1.$





PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Multilinearità (da cui si domostrano omogeneità, invarianza per scorrimento etc)

$$det[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,\ v] = \lambda_1 det[v_1,\ v] + \lambda_2 det[v_2,\ v] + \ldots + \lambda_k det[v_k,\ v]$$

$$det[v,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k] = \lambda_1 det[v,\ v_1] + \lambda_2 det[v,\ v_2] + \ldots + \lambda_k det[v,\ v_k]$$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

- Multilinearità (da cui si domostrano omogeneità, invarianza per scorrimento etc)

$$det[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,\ v] = \lambda_1 det[v_1,\ v] + \lambda_2 det[v_2,\ v] + \ldots + \lambda_k det[v_k,\ v]$$

$$det[v,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k] = \lambda_1 det[v,\ v_1] + \lambda_2 det[v,\ v_2] + \ldots + \lambda_k det[v,\ v_k]$$

Ad esempio, considerando le colonne $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e la matrice

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = [v,\ -v_1 + 2v_2].$$

Allora

$$det(D) = det[v,\ -v_1 + 2v_2] = -1 det[v,\ v_1] + 2 det[v,\ v_2] =$$

$$-1 det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -4 - 6 = -10$$

IL DETERMINANTE PER MATRICI QUADRATE QUALSIASI

La nozione di determinante si generalizza a tutte le dimensioni:

TEOREMA 1.

Fissata una dimensione n, esiste un unico modo di assegnare ad ogni matrice A di dimensione n un numero, $det(A)$, il determinante della matrice, tale che

1. il determinante è multilineare sulle colonne;
2. scambiando due colonne il determinante cambia di segno;
3. $det(I_{n\times n}) = 1$.

(dimostrazione omessa)

NOTA:
- il punto 1. implica che se una matrice ha una colonna nulla allora il determinante è nullo:

$$det([\ldots \vec{0} \ldots]) = det([\ldots 0 \cdot \vec{0} \ldots]|) = 0 \cdot det([\ldots \vec{0} \ldots]) = 0.$$

- il punto 2. implica che se una matrice ha due colonne uguali allora il determinante è nullo:

$$det([\ldots v \ldots v \ldots)] = -det([\ldots v \ldots v \ldots)] \text{ quindi } det([\ldots v \ldots v \ldots)] = 0$$

Dalle proprietà enunciate possiamo ricavare in dimensione n quanto visto in dimensione 2 e 3.

- Invarianza per scorrimento: se aggiungiamo ad una colonna di una matrice una combinazione lineare di altre colonne il determinante non cambia. Ad esempio, se $A = [v_1, v_2, v_3]$ allora

$$det[v_1 + v_2 - v_3, v_2, v_3] = det[v_1, v_2, v_3] \; + \; det[v_2, v_2, v_3] \; - \; det[v_3, v_2, v_3] =$$

$$= det[v_1, v_2, v_3] + 0 + 0 = det(A)$$

- Una matrice con una colonna nulla ha determinante nullo. Ad esempio:

$$det[v_1, \vec{0}, v_3] = det[v_1, \vec{0} + v_1, v_3] = det[v_1, v_1, v_3] = 0$$

- Una matrice con colonne dipendenti ha determinante nullo, poiché una colonna v_i sarà combinazione lineare di altre colonne e potremmo sottrarre tale combinazione lineare alla colonna v_i ottenendo una colonna nulla. Ad esempio:

$$det[v_2 + v_3, v_2, v_3] = det[v_2 + v_3 - (v_2 + v_3), v_2, v_3] = det[\vec{0}, v_2, v_3] = 0$$

ESEMPI

Quanto visto ci permette di calcolare il determinante di matrici di ordine maggiore di 3, anche se ancora non abbiamo dato una regola generale per calcolare il determinante. Per calcolare il determinante di una matrice quadrata, trasformiamo tramite operazioni elementari sulle colonne la matrice in una matrice a scala. Se gli elementi sulla diagonale della matrice a scala sono non nulli, allora possiamo utilizzare questi pivots per trasformare la matrice nella matrice identità, sempre usando trasformazioni elementari.
Ad esempio:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{[C_1 \leftarrow C_1 - C_2]} det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{[C_1 \leftarrow C_1 - C_4]}$$

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(la matrice è a scala)} \underset{=}{[C_4 \leftarrow C_4 - C_3]} det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = det(I_{4\times 4}) = 1$$

ESEMPI

Se invece, arrivati alla matrice a scala, qualche elemento sulla diagonale della matrice a scala è nullo, allora è facile dimostrare che i vettori colonna sono dipendenti, quindi un vettore colonna è dipendente dagli altri ed il determinante della matrice a scala (e quindi anche quello della matrice iniziale) è nullo.
Ad esempio:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

(sottraiamo la seconda colonna alla prima colonna, poi la terza alla prima, e infine la quarta alla prima).

ESERCIZIO: calcolare il determiante della matrice A seguente con il metodo appena illustrato

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO: calcolare il determiante della matrice A seguente con il metodo appena illustrato

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$det \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$det \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

SVILUPPO DI LAPLACE PER IL CALCOLO DEL DETERMINANTE

Lo sviluppo di Laplace è un metodo che ci permette di calcolare il determinante in maniera induttiva: scelta una qualsiasi riga della matrice,

$$A(i,:) = a_{i,1} a_{i,2}, \ldots, a_{i,n},$$

si dimostra che

$$det(A) = \sum_{j} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(C_{i,j}),$$

dove la matrice *cofattore* $C_{i,j}$ si ottiene dalla matrice A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SVILUPPO SULLA SECONDA RIGA: dobbiamo calcolare i determinanti delle sottomatrici $C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}$, ma $a_{2,3} = 0$, quindi possiamo limitarci a calcolare i determinanti $det(C_{2,1}), det(C_{2,2})$ (in generale nella scelta della riga da sviluppare conviene sceglierne una con il massimo numero di coefficienti nulli).

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SVILUPPO SULLA SECONDA RIGA: dobbiamo calcolare i determinanti delle sottomatrici $C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}$, ma $a_{2,3} = 0$, quindi possiamo limitarci a calcolare i determinanti $det(C_{2,1}), det(C_{2,2})$ (in generale nella scelta della riga da sviluppare conviene sceglierne una con il massimo numero di coefficienti nulli). Si ha:

$$C_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, det(C_{2,1}) = -1 \qquad C_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, det(C_{2,2}) = 1$$

quindi

$$det(A) = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot det(C_{2,1}) + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot det(C_{2,2}) + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \det(C_{2,3}) = -1 + 2 = 1$$

SVILUPPO SULLA PRIMA RIGA:

$$det(A) = 1 \cdot det(C_{1,1}) - 1 \cdot det(C_{1,3}) = 2 - 1 = 1$$

SVILUPPO SULLA TERZA RIGA:

$$det(A) = -1 \cdot det(C_{3,2}) + 1 \cdot det(C_{3,3}) = -1 + 2 = 1$$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Sia A^T (la trasposta di A) la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Si ha:

TEOREMA 2 (senza dimostrazione)

$$det(A) = det(A^T)$$

Ad esempio

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(senza dimostrazione)
Quindi ogni proprietà del determinante che abbiamo enunciato riferendoci alle colonne della matrice vale anche sulle righe e viceversa. In particolare:

- Il determinate è multilineare anche sulle righe;
- se una matrice ha righe dipendenti (in particolare, se ha una riga nulla), allora il suo determinate è nullo;
- per calcolare il determinante posso utilizzare le trasformazioni elementari per righe o per colonne;
- lo sviluppo di Laplace si può anche fare per colonne.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE DA NON DIMENTICARE

1. Se si scambiano due colonne (o due righe) il determinante cambia di segno - quindi se una matrice ha due colonne o due righe uguali il determinante è zero.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE DA NON DIMENTICARE

1. Se si scambiano due colonne (o due righe) il determinante cambia di segno - quindi se una matrice ha due colonne o due righe uguali il determinante è zero.
2. Se una colonna (o una riga) vengono moltiplicate per una costante allora il determinante viene moltiplicato per c.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE DA NON DIMENTICARE

1. Se si scambiano due colonne (o due righe) il determinante cambia di segno - quindi se una matrice ha due colonne o due righe uguali il determinante è zero.
2. Se una colonna (o una riga) vengono moltiplicate per una costante allora il determinante viene moltiplicato per c.
3. Se ad una colonna si aggiunge una combinazione lineare di altre colonne (nel caso più semplice, un'altra colonna moltiplicata per una costante) il determinante non cambia (idem per le righe).

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE DA NON DIMENTICARE

1. Se si scambiano due colonne (o due righe) il determinante cambia di segno - quindi se una matrice ha due colonne o due righe uguali il determinante è zero.
2. Se una colonna (o una riga) vengono moltiplicate per una costante allora il determinante viene moltiplicato per c.
3. Se ad una colonna si aggiunge una combinazione lineare di altre colonne (nel caso più semplice, un'altra colonna moltiplicata per una costante) il determinante non cambia (idem per le righe).
4. Una matrice quadrata si dice triangolare superiore se tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli. Utilizzando lo sviluppo di Laplace si vede che il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale. Similmente per le matrici triangolare inferiori, dove tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli.

$$det \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} = a \cdot e \cdot h \cdot l$$

ESEMPIO DI CALCOLO DEL DETERMINANTE SENZA LO SVILUPPO DI LAPLACE

Trasformiamo la matrice in una matrice triangolare utilizzando le trasformazioni elementari

$$det\begin{bmatrix}1 & 2 & -1/2 & 0\\ 1 & 1 & 1/2 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \pi\end{bmatrix} \overset{R_2\leftarrow R_2-R_1}{=} det\begin{bmatrix}1 & 2 & -1/2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \pi\end{bmatrix} =$$

$$\overset{R_1\leftarrow 2R_1}{=} (1/2)\cdot det\begin{bmatrix}2 & 4 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \pi\end{bmatrix} \overset{R_3\leftarrow R_3-R_1}{=} (1/2)\cdot det\begin{bmatrix}2 & 4 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \pi\end{bmatrix} =$$

$$\overset{R_4\leftarrow R_4-R_2}{=} (1/2)\cdot det\begin{bmatrix}2 & 4 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pi-3\end{bmatrix} = (1/2)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(\pi-3) = \pi-3$$

ALTRE PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Altre proprietà utili della funzione determinante sono descritte nel seguente teorema.

TEOREMA 3

Se A, B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora:

1. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ (senza dimostrazione);
2. A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$;
3. Se A è invertibile allora $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

ALTRE PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Altre proprietà utili della funzione determinante sono descritte nel seguente teorema.

TEOREMA 3

Se A, B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora:

1. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ (senza dimostrazione);
2. A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$;
3. Se A è invertibile allora $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

Dimostrazione (2) Se trasformiamo la matrice A in una matrice a scala tramite operazioni elementari, il valore del determinante può cambiare (ad esempio quando moltiplichiamo una riga per una costante $c \neq 0$), ma non cambia il fatto che questo valore sia nullo o diverso da zero.

ALTRE PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Altre proprietà utili della funzione determinante sono descritte nel seguente teorema.

TEOREMA 3

Se A, B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora:

1. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ (senza dimostrazione);
2. A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$;
3. Se A è invertibile allora $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

Dimostrazione (2) Se trasformiamo la matrice A in una matrice a scala tramite operazioni elementari, il valore del determinante può cambiare (ad esempio quando moltiplichiamo una riga per una costante $c \neq 0$), ma non cambia il fatto che questo valore sia nullo o diverso da zero.
Se nella matrice a scala ottenuta non ci sono zeri sulla diagonale, la matrice di partenza è invertibile ed il determinante è diverso da zero, mentre se nella matrice a scala c' è un coefficiente nullo sulla diagonale la matrice di partenza non è invertibile e il determinante è nullo.
(3) segue da (1): $\quad det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(AA^{-1}) = det(I) = 1.$

BASI E DETERMINANTE

Usando il determinante possiamo stabilire se n vettori in $\mathbb{R}^n$ sono indipendenti o, equivalentemente, se $B = [v_1 \dots v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

COROLLARIO

Se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$, le seguenti condizioni sono equivalenti (indichiamo con B sia la base, sia la matrice che ha i vettori $v_1, \dots, v_n$ come colonne):

1. $B = [v_1 \dots v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$;
2. la matrice B è invertibile;
3. $det(B) \neq 0$.

DIM $(1 \Leftrightarrow 2)$

$$\begin{array}{rcl} B = [v_1 \dots v_n] \text{ è una base di } \mathbb{R}^n & \Leftrightarrow & v_1 \dots v_n \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow \\ Bx = \vec{0} \text{ ha un'unica soluzione } (\vec{0}) & \Leftrightarrow & \text{la matrice } B \text{ è invertibile} \end{array}$$

(abbiamo dimostrato quest'ultima equivalenza nella parte delle slides riguardante i sistemi quadrati).
$(2 \Leftrightarrow 3)$ segue dal punto 2 del teorema precedente.

ESERCIZIO

1. Se
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
dimostrare che $B = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Dati i vettori
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 01 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}), v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
di $\mathbb{R}^4$ dimostrare che $B = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

DETERMINANTE E INVERSA

Il determinante di una matrice ci permette anche di dare una formula esplicita per l'inversa di una matrice.

1. Considerare la matrice C che ha per elemento al posto (i, j) il numero $(-1)^{i+j}det(C_{i,j})$ dove $C_{i,j})$ è la sottomatrice di A ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.
2. la formula per l'inversa è data da:

$$A^{-1} = (det(A)^{-1})C^T$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{array}{lllllllll} C_{1,1} & = & -14 & C_{1,2} & = & -1 & C_{1,3} & = & 9 \\ C_{2,1} & = & 4 & C_{2,2} & = & 1 & C_{2,3} & = & -4 \\ C_{3,1} & = & 1 & C_{3,2} & = & -1 & C_{3,3} & = & -1 \end{array}$$

mentre $det(A) = -5$.
Quindi

$$A^{-1} = (-1/5) \begin{bmatrix} -14 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$