Soluzione di sistemi lineare con n equazioni ed n incognite

Un sistema lineare con n equazioni ed n incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_n = b_n \end{cases}$$

ha come matrice dei coefficienti una matrice A quadrata $n \times n$.
Dimostreremo che un sistema di questo tipo può avere:

1. una sola soluzione;
2. infinite soluzioni;
3. nessuna soluzione

e che il numero delle soluzioni dipende dal rango della matrice A (e dal vettore dei termini noti).

Matrici invertibili

Nella risoluzione di sistemi quadrati gioca un ruolo importante il concetto di invertibilità di una matrice:

DEFINIZIONE

Una matrice si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B (della stessa dimensione di A) tale che

$$AB = I_n = BA$$

Se una tale matrice esiste, è unica e si denota con A^{-1}. Infatti se $AB = I_n = BA$ e $AB' = I_n = B'A$ allora

$$B' = I_n B' = (BA)B = B(AB') = BI_n = B.$$

Non tutte le matrici sono invertibili: ad esempio $A = (0)$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non lo sono (perché per ogni matrice B la matrice AB ha (almeno) una riga nulla e non può essere uguale ad I).

Risoluzione di sistemi quadrati

Dimostreremo (ma non ora) che

TEOREMA

Le seguenti affermazioni sono equivalenti se A è una matrice quadrata e b è un vettore colonna, entrambi di dimensione n:

1. il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione;
2. le colonne (le righe) di A sono indipendenti;
3. la matrice A ha rango n;
4. la matrice A è invertibile.

L'implicazione da (4) ad (1) è semplice: se A è invertibile e $Ax = b$ allora

$$x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

quindi il sistema ha per unica soluzione il vettore $A^{-1}b$.
Notiamo anche che se (una delle) condizioni precedenti non vale, allora il sistema può avere infinite soluzioni, o anche nessuna, come nel caso dei sistemi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{(infinite soluzioni)}, \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{(nessuna soluzione)}$$

Matrici triangolari superiori

Prima di dimostrare il teorema precedente, vediamo come risolvere un sistema $Ax = b$ senza necessariamente calcolare la matrice inversa (sempre che esista).

Iniziamo con un caso semplice di sistema quadrato $Ux = c$ in cui la matrice dei cofficienti U è triangolare (superiore):

DEFINIZIONE

Una matrice quadrata U si dice triangolare superiore se le entrate sotto la diagonale principale sono tutte nulle.

Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{sono matrici triangolari superiori.}$$

LEMMA

Se U è una matrice triangolare superiore e le entrate della matrice sulla diagonale principale sono tutte non nulle allora il sistema $Ux = c$, per qualsiasi $c \in \mathbb{R}^n$, ha un'unica soluzione.

Nel caso in cui la matrice triangolare superiore contenga qualche 0 sulla diagonale, dimostreremo in seguito che il sistema $Ux = c$ non ha soluzione o ne ha infinite.

Esercizio

Dimostrare che le colonne (o le righe) di una matrice triangolare superiore senza entrate nulle sulla diagonale sono indipendenti.

Per risolvere un sistema del tipo $Ux = b$ si usa utilizzeremo il metodo delle "sostituzioni all'indietro", come nell'esempio seguente.

Consideriamo il sistema (matrice dei coefficienti triangolare superiore, senza 0 sulla diagonale):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y - 2z = 3 \\ 3z = -1 \end{cases}$$

Per trovare l'unica soluzione basta ragionare per "sostituzione all'indietro", come nel seguente esempio:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y - 2z = 3 \\ 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y - 2z = 3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$ da cui, sostituendo z nella seconda eq. otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y - 2(-1/3) = 3 \\ z = -1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y = 3 - 2/3 = 7/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$ da cui, sostituendo y, z nella prima eq. otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + 7/3 - (-1/3) = 1 \\ y = 7/3 \\ z = -1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (1 - 8/3)/2 = -5/6 \\ y = 7/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema iniziale è $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/6 \\ 7/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

Più in generale, ogni sistema del tipo $Ux = c$ con U triangolare superiore senza coefficienti nulli sulla diagonale ha un'unica soluzione che si trova con il sistema delle sostituzioni all'indietro esemplificato qui sopra.

Trasformare "$Ax = b$" in "$Ux = c$" con U triangolare superiore

Nel caso di una matrice quadrata qualsiasi, la strategia per risolvere il sistema $Ax = b$ è quella di trasformarlo in un sistema equivalente (ovvero: con le stesse soluzioni) $Ux = c$ con U triangolare superiore e risolvere quest'ultimo. In particolare, se la matrice U non ha zeri sulla diagonale, sappiamo che avremo un'unica soluzione.
Per trasformare $Ax = b$ in $Ux = c$ useremo le seguenti operazioni sulle equazioni del sistema:

1. scambiare due equazioni;
2. sottrarre dalla i-esima equazione la j-esima equazione moltiplicata per un coefficiente $c \neq 0$ (detta anche operazione di eliminazione perché di solito si usa per annullare un cooefficiente di una riga).

Eliminazione

1. scambiare due equazioni;

Eliminazione

1. scambiare due equazioni;

$$\begin{cases} -z = 2 \\ x - y = 7 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{scambiando } e_1 \text{ e } e_3$$

Eliminazione

1. scambiare due equazioni;

$$\begin{cases} -z = 2 \\ x - y = 7 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{scambiando } e_1 \text{ e } e_3$$

2. sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale $c \neq 0$.

Eliminazione

1. scambiare due equazioni;

$$\begin{cases} -z = 2 \\ x - y = 7 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{scambiando } e_1 \text{ e } e_3$$

2. sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale $c \neq 0$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 6 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{sommando ad } e_2 \text{ la riga } -e_1$$

Dimostriamo che le trasformazioni precedenti sulle equazioni del sistema non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema.

Dimostriamo che le trasformazioni precedenti sulle equazioni del sistema non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema.

Questo è ovvio quando scambiamo due equazioni.

Per quanto riguarda il secondo tipo di trasformazione, supponiamo di aggiungere alla i-esima equazione la j-esima equazione moltiplicata per c (per $i \neq j$). Vogliamo dimostrare che i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

Dimostriamo che le trasformazioni precedenti sulle equazioni del sistema non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema.

Questo è ovvio quando scambiamo due equazioni.

Per quanto riguarda il secondo tipo di trasformazione, supponiamo di aggiungere alla i-esima equazione la j-esima equazione moltiplicata per c (per $i \neq j$). Vogliamo dimostrare che i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

Se $Ax = b$ è il primo sistema, l'i-esima e la j-esima equazione sono:

$$\begin{array}{rcl} A(i,:)x & = & b_i \\ A(j,:)x & = & b_j \end{array}$$

Nel sistema sistema trasformato, alla i-esima equazione aggiungiamo c volte la j-esima equazione, quindi le equazioni diverse dalla i-esima non cambiano, mentre la i-esima equazione diventa

$$A(i:,)x + cA(j:,)x = b_i + cb_j$$

Ma

$$A(i,:)x = b_i \text{ e } A(j,:)x = b_j \quad \Leftrightarrow \quad A(i:,)x + cA(j:,)x = b_i + cb_j \text{ e } A(j,:)x = b_j$$

Da destra a sinistra, basta sommare l'equazione $A(j,:)x = b_j$ all'equazione $A(i,:)x = b_i$ per ottenere l'equazione $A(i:,)x + cA(j:,)x = b_i + cb_j$.

Da sinistra a destra, basta sottrarre a $A(i:,)x + cA(j:,)x = b_i + cb_j$ l'equazione $A(j,:)x = b_j$ per ottenere $A(i,:)x = b_i$.

Facciamo vedere con un esempio come utilizzare le trasformazioni precedenti per ottenere un sistema triangolare superiore.

Dobbiamo eliminare tutti i coefficienti della matrice del sistema che si trovano sotto la diagonale.

Ogni trasformazione che operiamo su un sistema si riflette sulla matrice completa = matrice dei coefficienti + colonna dei termini noti

Facciamo vedere con un esempio come utilizzare le trasformazioni precedenti per ottenere un sistema triangolare superiore.

Dobbiamo eliminare tutti i coefficienti della matrice del sistema che si trovano sotto la diagonale.

Ogni trasformazione che operiamo su un sistema si riflette sulla matrice completa = matrice dei coefficienti + colonna dei termini noti
Ad esempio, la matrice completa del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \qquad \text{è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Facciamo vedere con un esempio come utilizzare le trasformazioni precedenti per ottenere un sistema triangolare superiore.

Dobbiamo eliminare tutti i coefficienti della matrice del sistema che si trovano sotto la diagonale.

Ogni trasformazione che operiamo su un sistema si riflette sulla matrice completa = matrice dei coefficienti + colonna dei termini noti
Ad esempio, la matrice completa del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sottrarre la prima alla seconda equazione equivale a considerare la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ che corrisponde al sistema triangolare superiore } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 6 \\ -z = 2 \end{cases}$$

Facciamo vedere con un esempio come utilizzare le trasformazioni precedenti per ottenere un sistema triangolare superiore.

Dobbiamo eliminare tutti i coefficienti della matrice del sistema che si trovano sotto la diagonale.

Ogni trasformazione che operiamo su un sistema si riflette sulla matrice completa = matrice dei coefficienti + colonna dei termini noti
Ad esempio, la matrice completa del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y = 7 \\ -z = 2 \end{cases} \quad \text{è} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sottrarre la prima alla seconda equazione equivale a considerare la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ che corrisponde al sistema triangolare superiore } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 6 \\ -z = 2 \end{cases}$$

Se invece di operare le trasformazioni su un sistema lo facciamo sulla matrice completa riuscendo a trasformarla in modo che la sua parte incompleta sia triangolare superiore allora il corrispondente sistema sarà triangolare superiore e potremo risolverlo come descritto nel paragrafo precedente.

ESEMPIO

$$\begin{cases} -y+z=7 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$ la matrice completa del sistema è $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} -y+z=7 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases} \quad \text{la matrice completa del sistema è} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La prima riga ha il il primo coefficiente nullo. Troviamo una riga della matrice che ha primo coefficiente non nullo e la scambiamo con la prima riga;

ESEMPIO

$$\begin{cases} -y+z=7 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases} \quad \text{la matrice completa del sistema è} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La prima riga ha il il primo coefficiente nullo. Troviamo una riga della matrice che ha primo coefficiente non nullo e la scambiamo con la prima riga;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sottraiamo la prima riga moltiplicata per 3 alla terza riga, in modo da ottenere solo degli 0 sotto il primo elemento della diagonale principale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Per annullare il -5 in posizione $(3,2)$, sommiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per -5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -36 \end{bmatrix}$$

Adesso la matrice dei coefficienti è triangolare superiore con nessuno zero sulla diagonale: possiamo trovare l'unica soluzione per sostituzione all'indietro:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y+z=7 \\ -9z=-36 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y+4=7 \\ z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2(-3)+4=1 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$$

Trasformare “$Ax = b$” in “$Ux = c$”

1. Il pivot di una riga è il primo coefficiente non nullo, da sinistra.
2. Una matrice triangolare superiore senza coefficienti nulli sulla diagonale ha tutti i pivot sulla diagonale.
3. La strategia che abbiamo usato per trasformare un sistema in un sistema triangolare superiore consiste in:

   - Ottenere una prima riga con pivot in prima colonna, eventualmente scambiando righe.
   - Utilizzando il pivot della prima riga, annullare tutte le entrate della prima colonna sotto il pivot. La prima riga non verrà più cambiata.
   - Passare alla seconda riga, che dovrà avere il pivot in seconda posizione, eventualmente scambiando righe.
   - Utilizzando il pivot della seconda riga, annullare tutte le entrate della seconda colonna sotto il pivot.
   - e via così

ESERCIZIO

Risolvere il seguente sistema, trasformandolo in un sistema triangolare superiore con le .

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Risolvere il seguente sistema, trasformandolo in un sistema triangolare superiore con le .

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

l'unica soluzione del sistema è $x = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matrici elementari (di eliminazione o di scambio)

Per risolvere un sistema $Ax = b$ abbiamo visto come trasformarlo in un sistema $Ux = b$ scambiando righe o moltiplicando una riga per un multiplo di un'altra.

Il procedimento può fallire quando, arrivati alla riga i-esima non riesco a scambiarla con una riga che abbia il pivot nella posizione i-esima colonna. In questo caso, come vedremo, il sistema non avrà un'unica soluzione.

Vediamo ora come le operazioni elementari sulle righe di una matrice (scambio o eliminazione) si possono ottenere moltiplicando la matrice a sinistra per un'altra matrice.
Alle operazioni elementari già viste aggiungiamo anche la moltiplicazione di una riga per un coefficiente c non nullo, come in:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow -2R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Come vedremo, questo tornerà molto utile nella ricerca dell'inversa di una matrice.

Matrici di scambio

Data una matrice B di dimensione $n \times m$ (non necessariamente quadrata), per scambiare la i-esima con la j-esima riga di B, basta moltiplicare B a sinistra per la matrice $P_{i,j}$ che si ottiene scambiando i-esima e la j-esima riga della matrice identità I_n.

Ad esempio, per scambiare la prima e la seconda riga della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{la moltiplichiamo a sx per la matrice } P_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{1,2}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrici di eliminazione

Data una matrice B di dimensione $n \times m$ (non necessariamente quadrata), per sommare alla riga i la riga j moltiplicata per c basta moltiplicarla a sinistra per la matrice $E_{(r_i, cr_j)}$ che si ottiene dalla matrice identità I_n sommando alla riga i la riga j moltiplicata per c

Ad esempio, per sommare alla terza riga della matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ la prima riga moltiplicata per -3, la moltiplichiamo a sinistra per la matrice

$E_{(r_3, -3r_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ottenuta dalla matrice identità operando la stessa trasf. :

$$E_{(r_3, -3r_1)} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrici di moltiplicazione

Data una matrice B di dimensione $n \times m$ (non necessariamente quadrata), per moltiplicare una riga i per un coefficiente c basta considerare la matrice E_{cr_i} che si ottiene dalla matrice identità I_n moltiplicando per c la riga i-esima:

Ad esempio per moltiplicare la seconda riga di $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ per 3,

dovremo moltiplicarla a sinistra per la matrice

$$E_{3r_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

:

$$E_{3r_2} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 1

Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare la matrice elementare E tale che $E \cdot B$ abbia la prima riga uguale ad $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sommando alla prima riga la terza riga:

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sommando alla prima riga la terza riga:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_1 \leftarrow R_1 + R_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sommando alla prima riga la terza riga:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_1 \leftarrow R_1 + R_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo ottenere lo stesso effetto su B moltiplicando a sinistra per la matrice elementare $E_{1,3,1}$:

$$E_{(r_1,r_3)}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 2

Possiamo anche fare più trasformazioni elementari e calcolare la matrice (prodotto delle singole matrici elementari) che realizza la trasformazione finale, come nel seguente esempio:
Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice E (prodotto di matrici elementari) tale che $E \cdot B$ sia una matrice triangolare superiore.

ESEMPIO 2, continua

Possiamo ottenere una matrice triangolare superiore usando le seguenti operazioni elementari sulle righe della matrice B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_2 \leftrightarrow R_1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(R_3 \leftarrow R_3 + R_2) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Lo stesso effetto si ottiene moltiplicando B a sinistra per la matrice $E_{(r_3,r_2)}P_{1,2}$:

$$E_{(r_3,r_2)}P_{1,2}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Prodotto di matrici elementari

Possiamo calcolare facilmente il prodotto di matrici elementari utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità.
Ad esempio, il prodotto delle matrici $E_{(r_3,2r_2)}P_{1,2}E_{(r_1,-r_2)}$, di dimensione 3 è

$$E_{(r_3,2r_2)}P_{1,2}E_{(r_1,-r_2)} = E_{(r_3,2r_2)}P_{1,2}E_{(r_1,-r_2)}I_3 = E_{(r_3,2r_2)}P_{1,2}E_{(r_1,-r_2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$E_{(r_3,2r_2)}P_{1,2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = E_{(r_3,2r_2)}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Alcuni utili lemmi

I prossimi esercizi ci saranno molto molto utili nel seguito (dimostrazioni nelle prossime slides)

ESERCIZIO 1

I vettori $v_1, \dots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ esiste una combinazione lineare dei vettori, a coefficienti non tutti nulli (una combinazione "non banale") che da il vettore nullo:

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \vec{0} \text{ dove almeno uno dei } c_i \text{ è non nullo}$$

ESERCIZIO 2

Un sottoinsieme di un insieme di vettori indipendenti è indipendente. Un sovrainsieme di un insieme di vettori dipendenti è dipendente.

ESERCIZIO 3

Una matrice triangolare superiore ha rango n se e solo se non ha zeri sulla diagonale.

ESERCIZIO 4

Le trasformazioni elementari non cambiano il rango di una matrice.

Dimostrazione ESERCIZIO 1

Dim
($\Rightarrow$) Se i vettori sono dipendenti, uno di loro è combinazione lineare degli altri:

$$v_i = c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n$$

Ma allora esiste una combinazione lineare non banale che da il vettore nullo:

$$\vec{0} = c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + -1 v_i + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n$$

($\Leftarrow$)
Se esiste una combinazione non banale che da il vettore nullo:

$$\vec{0} = c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + c_i v_i + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n$$

con $c_i \neq 0$, allora

$$v_i = -\frac{1}{c_i}(c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n)$$

Dimostrazione ESERCIZIO 3 ($\Leftarrow$)

Se la matrice non ha zeri sulla diagonale, facciamo vedere che le colonne sono indipendenti, ovvero che una qualsiasi loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è necessariamente quella banale.
Se infatti $c_1 A(:,1) + c_2 A(:,2) + \cdots + c_n A(:,n) = \vec{0}$, avremo

$$c_1 \begin{bmatrix} A(1,1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} A(1,1) \\ A(1,2) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots c_n \begin{bmatrix} A(1,n)) \\ A(2,n) \\ \vdots \\ A(n,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Guardando l'ultimo coefficiente della somma si ottiene $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_n A(n,n) = 0$, quindi, poiché $A(n,n) \neq 0$ si ha $c_n = 0$. Guardando a penultimo coefficiente della somma $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_{n-1} A(n-1,n-1) + c_n A(n-1,n) = 0$, otteniamo $c_{n-1} A(n-1,n-1)$ quindi poiché $A(n-1,n-1) \neq 0$ si ha $c_{n-1} = 0$, e cosí via.

Dimostrazione ESERCIZIO 3 ($\Rightarrow$)

Facciamo vedere che se la matrice ha rango n, ovvero le sue colonne sono indipendenti, allora non può avere zeri sulla diagonale. Mostriamo infatti che se ne ha, le colonne sono necessariamente dipendenti. Esemplifichiamo la dimostrazione con una matrice triangolare superiore 5×5 che ha uno zero sulla diagonale principale. Dimostriamo che non ha rango 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice in rosso (sotto lo zero sulla diagonale) ha una colonna nulla, quindi le colonne sono dipendenti, Ma allora il rango è minore di tre e anche le righe di quella matrice sono dipendenti. Esiste quindi una loro combinazione lineare non banale con coefficienti c_1, c_2, c_3 non tutti nulli che da il vettore nullo. Considerando le righe corrispondenti nella matrice 5×5, la stessa combinazione mi da il vettore nullo (i coefficienti iniziali non cambiano il risultato perché sono tutti nulli). Quindi quelle righe sono dipendenti anche nella matrice 5×5. Quindi le 5 righe sono dipendenti e la matrice non ha rango 5.

Dimostrazione ESERCIZIO 4

Le trasformazioni elementari sono: (a) scambiare due righe; (b) moltiplicare una riga per un coefficiente non nullo; (c) sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per un coefficiente non nullo.
Il fatto che queste trasformazioni non cambino il rango di una matrice dipende dalle seguenti proprietà dei vettori: se $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $c \neq 0$ allora

$$v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k \text{ sono indipendenti}$$

$$v_1, \dots, v_i, \dots, v_k \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow v_1, \dots, cv_i, \dots, v_k \text{ sono indipendenti}$$

$$v_1, \dots, v_i, \dots, v_k \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow v_1, \dots, v_i + cv_j, \dots, v_j, \dots, v_k \text{ sono indipendenti}$$

Quindi se in una matrice A ci sono k righe indipendenti, si troveranno k righe indipendenti anche nella matrice trasformata tramite trasformazioni elementari e viceversa. Ne segue che il rango non cambia.

TEOREMA

Le seguenti affermazioni sono equivalenti se A è una matrice quadrata di dimensione n:

1. il sistema $Ax = \vec{0}$ ha come unica soluzione il vettore $\vec{0}$;
2. le colonne (le righe) di A sono indipendenti;
3. la matrice A ha rango n;
4. la matrice A è invertibile.

TEOREMA

Le seguenti affermazioni sono equivalenti se A è una matrice quadrata di dimensione n:

1. il sistema $Ax = \vec{0}$ ha come unica soluzione il vettore $\vec{0}$;
2. le colonne (le righe) di A sono indipendenti;
3. la matrice A ha rango n;
4. la matrice A è invertibile.

Dim

($1 \Rightarrow 2$) Consideriamo una combinazione lineare delle colonne che dà il vettore nullo:

$$c_1 A(:,1) + \cdots + c_n A(:,n) = \vec{0}$$

Ma allora

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

quindi il vettore $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ è soluzione del sistema $Ax = \vec{0}$; per ipotesi 1) abbiamo $\vec{c} = \vec{0}$, ovvero $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Dall'esercizio (1) precedente segue che le colonne di A sono indipendenti.

TEOREMA

Le seguenti affermazioni sono equivalenti se A è una matrice quadrata di dimensione n:

1. il sistema $Ax = \vec{0}$ ha un'unica soluzione;
2. le colonne (le righe) di A sono indipendenti;
3. la matrice A ha rango n;
4. la matrice A è invertibile;
5. per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione.

TEOREMA

Le seguenti affermazioni sono equivalenti se A è una matrice quadrata di dimensione n:

1. il sistema $Ax = \vec{0}$ ha un'unica soluzione;
2. le colonne (le righe) di A sono indipendenti;
3. la matrice A ha rango n;
4. la matrice A è invertibile;
5. per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione.

Dim
($2 \Rightarrow 3$) Segue dalla definizione di rango.

($3 \Rightarrow 4$) Usando le trasformazioni elementari, possiamo sempre trasformare A in una matrice triangolare superiore U. Poiché le trasformazioni elementari non cambiano il rango della matrice, se A ha rango n anche U ha rango n, quindi non ha entrate nulla sulla diagonale. Possiamo allora utilizzare i pivot sulla diagonale per trasformare U, ancora tramite trasformazioni elementari, nella matrice identità. Ricapitolando: se $rg(A) = n$, tramite le trasformazioni $T_1, \ldots, T_k$ arriviamo ad U triangolare superiore senza zeri sulla diagonale e poi tramite $T_{k+1}, \ldots, T_m$ trasformiamo U nella matrice identità I_n. Considerando le matrici elementari E_i che corrispondono alle trasformazioni T_i avremo:

$$E_m E_{m-1} \ldots E_1 A = I_n$$

quindi $E_m E_{m-1} \ldots E_1 = Id_n$.

($4 \Rightarrow 5$) Se A è invertibile, possiamo usare A^{-1} per trovare l'unica soluzione di $Ax = b$, moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per A^{-1}: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, da cui segue $x = A^{-1}b$.

($5 \Rightarrow 1$) Se, per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione, questo vale in particolare per $b = \vec{0}$.

Invertibilità di una matrice con il metodo delle matrici elementari

Dal teorema precedente otteniamo:

COROLLARIO

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite operazioni elementari di scambio e eliminazione nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ sono le matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette (partendo da destra, in ordine cronologico) della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \cdots E_1$.

Dim ($\Leftarrow$) Dalle ipotesi segue che $(E_k \cdots E_1)A = I_n$, quindi $(E_k \cdots E_1) = A^{-1}$.

($\Rightarrow$) Se la matrice è invertibile, per il teorema precedente ha rango n e possiamo trasformarla in una matrice triangolare superiore U senza zeri sulla diagonale. Possiamo poi usare i pivots di U per arrivare alla matrice identità.

Procedura per il calcolo dell'inversa

- operiamo in parallelo su due colonne;

Procedura per il calcolo dell'inversa

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica;

Procedura per il calcolo dell'inversa

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \ldots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.

Procedura per il calcolo dell'inversa

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \dots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.
- Sulla seconda colonna, partendo da $B_0 = I_n$, calcoliamo le matrici $B_0, B_1, \dots$, operando le stesse operazioni elementari che facciamo a sinistra.

Procedura per il calcolo dell'inversa

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \ldots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.
- Sulla seconda colonna, partendo da $B_0 = I_n$, calcoliamo le matrici $B_0, B_1, \ldots$, operando le stesse operazioni elementari che facciamo a sinistra.
- Per le proprietà delle matrice elementari ad ogni passo avremo

$$A_i = B_i A$$

- Quindi se sulla sinistra raggiungiamo $A_k = I_n$, varrà $I_n = B_k A$ e $B_k = A^{-1}$.

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

$$\begin{array}{ccc}
A_0 := A & B_0 := I_n & \\
A_1 & B_1 & \\
\vdots & \vdots & \text{ad ogni livello, vale } A_i = B_i A \\
A_i & B_i & \\
\vdots & \vdots & \\
I_n & B_k & \text{quindi } I_n = B_k A \text{ e } B_k = A^{-1}
\end{array}$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il "pivot" 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso.

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il "pivot" 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso. Nella colonna di destra, facciamo le stesse operazioni elementari partendo da I_n.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il "pivot" 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso. Nella colonna di destra, facciamo le stesse operazioni elementari partendo da I_n.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO, continua

$R_3 \leftarrow R_3 - 1/2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow 2R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow 1/2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO, continua

Poiché sulla prima colonna abbiamo ottenuto l'identità, la matrice scritta sulla seconda colonna sarà A^{-1},

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verificare che effettivamente vale:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{3\times 3}$$

ESERCIZI

Trovare l'inversa delle seguenti matrici (invetibili).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONI

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$