COSA SIGNIFICA DIAGONALIZZARE?

In questo capitolo ci occuperemo solo di trasformazioni lineari in cui il dominio coincide con il codominio: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Questi vengono chiamati anche *operatori* lineari.

- Se T è un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e A è la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$

  $$A = M_{\mathcal{E}_n}(T) = [T(v_1) \dots T(v_n)],$$

  allora la matrice A ci permette di calcolare l'operatore T, perché:

  $$Av = T(v)$$

COSA SIGNIFICA DIAGONALIZZARE?

In questo capitolo ci occuperemo solo di trasformazioni lineari in cui il dominio coincide con il codominio: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Questi vengono chiamati anche *operatori* lineari.

- Se T è un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e A è la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$

  $$A = M_{\mathcal{E}_n}(T) = [T(v_1) \dots T(v_n)],$$

  allora la matrice A ci permette di calcolare l'operatore T, perché:

  $$Av = T(v)$$

- Se la matrice A è "semplice", riusciremo a moltiplicarla per v in modo efficiente. In particolare, se la matrice A è diagonale, cioè se tutti i coefficienti al di fuori della diagonale principale $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ sono nulli e se $v = (x_1, \dots, x_n)$ allora

  $$Av = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 \\ a_{2,2}x_2 \\ \vdots \\ a_{n,n}x_n \end{bmatrix} = T(v)$$

  e il calcolo di $T(v)$ risulta particolarmente semplice.

SOMMARIO MATRICI TRASFORMAZIONI RISPETTO AD UNA BASE

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \ldots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \ldots, ||T(v_n)||^B]$$

si avrà

$$M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

SOMMARIO MATRICI TRASFORMAZIONI RISPETTO AD UNA BASE

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \ldots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \ldots, ||T(v_n)||^B]$$

si avrà

$$M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

- Se B è una base di $\mathbb{R}^n$, per passare dalla matrice $M_B(T)$ di T in base B alla matrice $M_{\mathcal{E}_n}(T)$ di T nella base canonica e viceversa utilizzeremo le suguenti uguaglianze:

$$M_B(T) = B^{-1} M_{\mathcal{E}_n}(T) B$$
$$M_{\mathcal{E}_n}(T) = B M_B(T) B^{-1}$$

TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

DEFINIZIONE

Un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ tale che $M_B(T)$ è diagonale.

TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

DEFINIZIONE

Un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ tale che $M_B(T)$ è diagonale.

Quindi: le trasformazioni diagonalizzabili si possono descrivere tramite una matrice diagonale, a patto di ammettere eventualmente un cambiamento di base.
Diagonalizzare un operatore lineare significa trovare un base in cui la matrice che rappresenta T sia diagonale.

ESEMPIO

Consideriamo un operatore lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x,y) = (x+y, -y)$. La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale:

$$M_{\mathcal{E}_2}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Consideriamo un operatore lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (x + y, -y)$. La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale:

$$M_{\mathcal{E}_2}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1, \\ 0 \end{bmatrix} = v_1, ||T(v_1)||^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -v_2, \ ||T(v_2)||^B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che la matrice di T rispetto alla base B è diagonale e

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Se } ||v||^B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ allora } ||T(v)||^B = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

Matrici diagonalizzabili

DEFINIZIONE

Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se l'operatore T_A è diagonalizzabile

LEMMA

Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile B tale che

$$A = B\Lambda B^{-1}$$

Dimostrazione Sia n la dimensione di A e supponiamo che A sia diagonalizzabile, ovvero che T_A lo sia. Quindi esiste una base B per cui la matrice$M_B(T_A)$ di T_A rispetto a B è diagonale. Se consideriamo B come matrice (la matrice che ha per colonne i vettori della base B), avremo che B è invertibile e inoltre

$$M_{\mathcal{E}_n}(T) = A = BM_B(T_A)B^{-1}$$

. Quindi $\Lambda = M_B(T_A)$ è la matrice diagonale cercata.

Viceversa, supponiamo che $A = B\Lambda B^{-1}$ con Λ diagonale e B invertibile. Poiché la matrice B è invertibile, le colonne di B formano una base di $\mathbb{R}^n$. Considerando la trasformazione T_A e la matrice della trasformazione T_A rispetto alla base B avremo

$$M_B(T_A) = B^{-1}M_{\mathcal{E}_n}(T_A)B = B^{-1}AB = B^{-1}(B\Lambda B^{-1})B = \Lambda$$

Quindi T_A è un operatore diagonalizzabile, ovvero A è diagonalizzabile.

ESEMPIO

La matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
dell'esempio precedente è diagonalizzabile. Se consideriamo la base B dell'esempio, $B = [v_1 \;\; v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, avremo
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B^{-1}$$

La fattorizzazione $A = B\Lambda B^{-1}$ che caratterizza le matrici diagonalizzabili è molto utile, ad esempio nel calcolo delle potenze:

ESERCIZIO

Se A è diagonalizzabile, allora anche le matrici $A^2, A^3, \ldots$ lo sono.
Se A è diagonalizzabile e la matrice Λ non ha zeri sulla diagonale, allora A è invertibile e anche A^{-1} è diagonalizzabile.

Suggerimento: se A è diagonalizzabile, allora esiste una matrice B invertibile e una matrice Λ diagonale per cui vale

$$A = B\Lambda B^{-1}.$$

Ma allora $A^2 = \ldots$

DIAGONALIZZABILITÀ

Come abbiamo visto, la situazione ideale è quella in cui esiste una base B per cui $M_B(T)$ è una matrice diagonale.

Ma come possiamo verificare se una tale base esiste, ovvero come possiamo verificare che la trasformazione T è diagonalizzabile e, in caso positivo, trovare la base B per cui $M_B(T)$ è diagonale?

Nelle prossime slides vedremo come rispondere a queste domande utilizzando una particolare famiglia di vettori, gli autovettori della trasformazione lineare T e una particolare famiglia di coefficienti, gli autovalori della trasformazione lineare.

IN INGLESE:
autovettori= eigenvectors
autovalori = eigenvalues

AUTOVETTORI

Affrontiamo la diagonalizzazione colonna per colonna!

LEMMA

Sia $B = [v_1, \ldots, v_n]$. Allora:

$$\text{la prima colonna di } M_B(T) \text{ è } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1 .$$

Dimostrazione. Poiché v_1 è il primo vettore della base B, si ha $||v_1||^B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi:

$$\overbrace{M_B(T)(:,1)}^{\text{prima colonna di } M_B(T)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M_B(T)||v_1||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = \lambda_1 ||v_1||^B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = ||\lambda_1 v_1||^B \Leftrightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1$$

AUTOVETTORI

Affrontiamo la diagonalizzazione colonna per colonna!

LEMMA

Sia $B = [v_1, \dots, v_n]$. Allora:

$$\text{la prima colonna di } M_B(T) \text{ è } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1 .$$

Dimostrazione. Poiché v_1 è il primo vettore della base B, si ha $||v_1||^B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi:

$$\overbrace{M_B(T)(:,1)}^{\text{prima colonna di } M_B(T)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M_B(T)||v_1||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = \lambda_1 ||v_1||^B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ||T(v_1)||^B = ||\lambda_1 v_1||^B \Leftrightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1$$

Analogamente: la seconda colonna di $M_B(T)$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(v_2) = \lambda_2 v_2$, e così via, per ogni colonna.

Quindi $M_B(T)$ è diagonale se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti) tali che

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1, \; T(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots T(v_n) = \lambda_n v_n,$$

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

(Nota bene: un autovettore è, per definizione, un vettore non nullo; un autovalore, invece, può essere uguale a zero).

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

(Nota bene: un autovettore è, per definizione, un vettore non nullo; un autovalore, invece, può essere uguale a zero).

L'insieme degli autovalori di un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si chiama

lo SPETTRO di T.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (0, 2y)$. Il vettore $(1, 0)$ è un autovettore per T con autovalore 0. Infatti $T(1, 0) = (0, 0) = 0(1, 0)$.
Il vettore $(0, 1)$, invece, è un autovettore per T con autovalore 2. Infatti $T(0, 1) = (0, 2) = 2(0, 1)$.
In questo esempio, quindi, lo spettro di T è l'insieme $\{0, 1\}$

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base $B = [v_1, \ldots, v_n]$ allora

$$M_B(T) \text{ è diagonale } \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n \text{ sono autovettori di } T.$$

Quindi T è diagonalizzabile se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T.

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base $B = [v_1, \ldots, v_n]$ allora

$$M_B(T) \text{ è diagonale } \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n \text{ sono autovettori di } T.$$

Quindi T è diagonalizzabile se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T.

Dimostrazione Segue dal lemma precedente dove abbiamo dimostrato che

$$\overbrace{M_B(T)(:, i)}^{\text{i-esima col. di } M_B(T)} = \lambda e_i \iff T(v_i) = \lambda_i v_i$$

ESEMPIO

- Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, -y)$, la matrice di T rispetto alla base canonica non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori:

ESEMPIO

- Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, -y)$, la matrice di T rispetto alla base canonica non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2) = (1, -1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2 = \{ke_2 : k \in \mathbb{R}\}$.

ESEMPIO

- Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, -y)$, la matrice di T rispetto alla base canonica non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2) = (1, -1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2 = \{ke_2 : k \in \mathbb{R}\}$.
  Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

- Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, -y)$, la matrice di T rispetto alla base canonica non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2) = (1, -1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2 = \{ke_2 : k \in \mathbb{R}\}$.
  Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ abbiamo:
  $$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
  ed infatti la base $B = [v_1, v_2]$ è formata da autovettori, $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = -v_2$.
- Per l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $T(x, y) = (0, 2y)$ la base canonica $\mathcal{E}_2 = [e_1, e_2]$ è formata da autovettori: $T(1, 0) = (0, 0) = 0(1, 0)$, $T(0, 1) = (0, 2) = 2(0, 1)$ ed infatti la matrice di T rispetto alla base canonica è diagonale.

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili. Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili. Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo $T(e_1) = (0, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0)$ e la matrice A rispetto alla base canonica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili. Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo $T(e_1) = (0, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0)$ e la matrice A rispetto alla base canonica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostriamo che T non è diagonalizzabile, ovvero che non esiste una base formata da autovettori, anzi , non esiste alcun autovettore!
Infatti nessun vettore non nullo ha la stessa direzione del vettore stesso ruotato di $\pi/2$, quindi T non è diagonalizzabile.

ESERCIZIO

Per ognuna delle trasformazioni T e vettori elencati, stabilire se i vettori sono autovettori per T. In caso affermativo, stabilire qual è l'autovalore corrispondente. Nel caso in cui i vettori formino una base, determinare la matrice $M_B(T)$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (2x - y, 2y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO

Per ognuna delle trasformazioni T e vettori elencati, stabilire se i vettori sono autovettori per T. In caso affermativo, stabilire qual è l'autovalore corrispondente. Nel caso in cui i vettori formino una base, determinare la matrice $M_B(T)$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (2x - y, 2y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Sol: v_1 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_1) = T(1, 0) = (2, 0) = 2v_1$.
  Anche v_2 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_2) = T(-1, 0) = (-2, 0) = 2v_2$. I vettori v_1, v_2 sono dipendenti quindi non formano una base di $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO

Per ognuna delle trasformazioni T e vettori elencati, stabilire se i vettori sono autovettori per T. In caso affermativo, stabilire qual è l'autovalore corrispondente. Nel caso in cui i vettori formino una base, determinare la matrice $M_B(T)$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (2x - y, 2y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Sol: v_1 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_1) = T(1, 0) = (2, 0) = 2v_1$.
  Anche v_2 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_2) = T(-1, 0) = (-2, 0) = 2v_2$. I vettori v_1, v_2 sono dipendenti quindi non formano una base di $\mathbb{R}^2$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x, 3x + y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO

Per ognuna delle trasformazioni T e vettori elencati, stabilire se i vettori sono autovettori per T. In caso affermativo, stabilire qual è l'autovalore corrispondente. Nel caso in cui i vettori formino una base, determinare la matrice $M_B(T)$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (2x - y, 2y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Sol: v_1 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_1) = T(1, 0) = (2, 0) = 2v_1$.
  Anche v_2 è un autovettore con autovalore 2, infatti $T(v_2) = T(-1, 0) = (-2, 0) = 2v_2$. I vettori v_1, v_2 sono dipendenti quindi non formano una base di $\mathbb{R}^2$.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x, 3x + y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Sol: v_1 è un autovettore con autovalore 1, infatti $T(v_1) = T(0, 2) = (0, 2) = v_1$.
  v_2 non è un autovettore, infatti $T(v_2) = (-1, -3)$ non ha la stessa direzione di v_2. $B = [v_1, v_2]$ è una base (ono due vettori indipendenti in $\mathbb{R}^2$) ma la base non è composta interamente da autovettori (solo v_1 è un autovettore). Poiché v_1 è un autovettore con autovalore 1, la prima colonna di $M_B(T)$, ovvero $||T(v_1)||^B$, è $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. La seconda colonna di $M_B(T)$ è invece $||T(v_2)||^B$. Per calcolare $||T(v_2)||^B$ usiamo la matrice di cambiamento di base $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (verificare che invertendo la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ si ottenga questa matrice) e la formula per il cambiamento di base:

$$||T(v_2)||^B = B^{-1}T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  (nota bene: possiamo verificare il calcolo delle coordinate di $T(v_2)$ in base B controllando che valga $T(v_2) = (-3/2)v_1 + v_2$). Quindi avremo:

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B \; ||T(v_2)||^B] = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO-continua

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x + 4y, x + y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO-continua

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x + 4y, x + y)$, $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.**Sol:** v_1 è un autovettore con autovalore -1, infatti $T(v_1) = T(-2, 1) = (2, -1) = -v_1$.
  v_2 è un autovettore con autovalore 3, infatti $T(v_2) = T(2, 1) = (6, 3) = 3v_2$.
  I vettori v_1, v_2 sono indipendenti quindi $B = [v_1, v_2]$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori e

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

  Quindi T è diagonalizzabile.

ESERCIZIO-continua

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la trasformazione lineare tale che $T = T_A$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO-continua

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la trasformazione lineare tale che $T = T_A$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sol: v_1 è un autovettore con autovalore 0, infatti $T(v_1) = T(1,-3,-2) = (0,0,0) = 0 \cdot v_1$.
v_2 è un autovettore con autovalore -1, infatti $T(v_2) = T(-1,2,0) = (1,-2,0) = -v_2$.
v_3 non è un autovettore. Infatti $T(v_3) = T(0,1,0) = (1,0,0)$, da cui vediamo che $T(v_3)$ non ha la stessa direzione di v_3. Quindi v_3 non è un autovettore per T.
Per calcolare la matrice $M_B(T)$ rispetto alla base B notiamo che, poiché v_1 e v_2 sono autovettori con autovalori 0 e -1, rispettivamente, la prima e la seconda colonna di $M_B(T)$ sono $M_B(T)(:,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $M_B(T)(:,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per quanto riguarda la terza colonna, poiché v_3 non è un autovettore non ci sono scorciatoie e dobbiamo calcolare $||T(v_3)||^B$. Per questo, risolviamo il sistema $(1,0,0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ ovvero

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ per cui $M_B(T)(:,3) = ||T(v_3)||^B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. In conclusione,

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

RICERCA DI AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Fissato un autovalore λ_0, l'insieme dei suoi autovettori, a cui aggiungiamo il vettore nullo, si chiama autospazio di λ_0 e lo denotiamo con il nome Aut_{λ_0}:

$$Aut_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R} : v \text{ è un autovettore di } T \text{ con autovalore } \lambda_0\} \cup \{\vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R} : T(v) = \lambda_0 v\}$$

Nel prossimo teorema vedremo come sia possibile trovare autovalori e autovettori, usando la nozione di determinante e risolvendo sistemi lineari omogenei.

TEOREMA

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare che ha come matrice, rispetto alla base canonica, la matrice $M_{\mathcal{E}_n}(T)$ (che indicheremo con A per semplicità).

1. Per trovare gli autovalori della trasformazione T (o, equivalentemente, della matrice A), si considera λ come un'incognita e si risolve l'equazione
$$det(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$
2. Se λ_0 è un autovalore trovato al punto precedente, gli autovettori di λ_0 sono le soluzioni non nulle del sistema
$$(A - \lambda_0 I)\vec{x} = \vec{0}$$
In particolare, l'autospazio Aut_{λ_0} di T (o di A) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione (nella slide successiva)

RICERCA DI AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Dimostrazione

1. λ è un autovalore se e solo se esiste $v \neq \vec{0}$ tale che $T(v) = \lambda v$, ovvero $Av = \lambda v$. Inoltre
$$\exists v \neq \vec{0} \text{ con } Av = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq \vec{0} \text{ con } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$
Ne segue: λ è un autovalore se e solo se il sistema omogeneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ ha una soluzione non nulla e questo vale se e solo se (vedere le slide sul determinante) $det(A - \lambda I) = 0$.
2. Se λ_o è un autovalore, Il vettore v è un autovettore per λ_0 se e solo se:
$$Av = \lambda_0 v \Leftrightarrow (Av - \lambda_0 v) = \vec{0}, \Leftrightarrow (A - \lambda_0 I)v = \vec{0}$$
Quindi v è un autovettore per λ_0 se e solo se $v \neq \vec{0}$ e v è soluzione del sistema $(A - \lambda_0 I)\vec{x} = \vec{0}$.

ESEMPIO

Troviamo gli autovalori dell'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$. La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Troviamo gli autovalori dell'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$. La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A - \lambda I)$ è

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Abbiamo: $det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$. L'equazione $det(A - \lambda I) = 0$ ha due soluzioni: $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, che sono quindi tutti e soli gli autovalori di T (lo spettro di T è quindi $\{1, 2\}$.
Troviamo l'autospazio l'autospazio Aut_1 (e mostriamo che contiene vettori non nulli).

ESEMPIO

Troviamo gli autovalori dell'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$. La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A - \lambda I)$ è

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Abbiamo: $det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$. L'equazione $det(A - \lambda I) = 0$ ha due soluzioni: $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, che sono quindi tutti e soli gli autovalori di T (lo spettro di T è quindi $\{1, 2\}$.
Troviamo l'autospazio l'autospazio Aut_1 (e mostriamo che contiene vettori non nulli).
La matrice $(A - I)$ è

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Troviamo gli autovalori dell'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$. La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A - \lambda I)$ è

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Abbiamo: $det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$. L'equazione $det(A - \lambda I) = 0$ ha due soluzioni: $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, che sono quindi tutti e soli gli autovalori di T (lo spettro di T è quindi $\{1, 2\}$.
Troviamo l'autospazio l'autospazio Aut_1 (e mostriamo che contiene vettori non nulli).
La matrice $(A - I)$ è

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema per trovare l'autospazio è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ovvero $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

Risolvendolo, si ottiene l'autospazio $Aut_1 = \{(-h, -h, h) : h \in \mathbb{R}\}$. In particolare, l'autospazio ha dimensione 1 ed il vettore vettori $v = (1, 1, -1)$ è un autovettore di T con autovalore 1. Considerando anche l'autovalore 2 si vede subito che i vettori e_1, e_2 sono autovettori per l'autobvalore 2. Inotre e_1, e_2, v sono indipendenti, quindi $B = [e_1, e_2, v]$ è una base di autovettori per T. La trasformazione T è quindi diagonalizzabile con

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AUTOSPAZI E BASI

Nell'esempio precedente abbiamo costruito una base di autovettori unendo basi degli autospazi di T. Questo è sempre possibile se T è diagonlizzabile. Per dimostrarlo, notiamo che:

LEMMA

Se W, W' sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$ per cui vale $W \cap W' = \{\vec{0}\}$, $w_1, \dots, w_k$ sono vettori indipendenti in W e $w'_1, \dots, w'_h$ sono vettori indipendenti in W' allora $w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_h$ sono ancora indipendenti.
In particolare se B è una base di W e B' è una base di W' allora $B \cup B'$ è una base di

$$W + W' = \{w + w' \ : \ w \in W, w' \in W'\}$$

.

Dim Se $t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k + s1 w_1 + \dots s_h w_h = \vec{0}$ allora
$v = t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k = -(s1 w_1 + \dots s_h w_h) = \vec{0} \in W \cap W' = \{\vec{0}\}$. Quindi $t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k = \vec{0} = s1 w_1 + \dots s_h w_h$ e dall'indipendenza dei due gruppi di vettori segue $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0 = s_1 = s_2 = \cdots = s_k$.

Se $B = [w_1 \ \dots \ w_k]$ è una base di W e $B' = [w'_1 \ \dots \ w'_h]$ è una base di W', poiché $W + W' \subseteq SPAN(B \cup B')$, l'insieme di vettori $B \cup B'$ è un insieme di vettori indipendenti in $W + W'$ che genera $W + W'$, quindi è una base di $W + W'$.

COROLLARIO

Se λ, λ' sono autovalori distinti della trasformazione lineare T, allora $Aut_\lambda \cap Aut_{\lambda'} = \{\vec{0}\}$. Quindi se
$\vec{0} \neq v \in Aut_\lambda, \vec{0} \neq v' \in Aut_{\lambda'}$ allora i vettori v, v' sono indipendenti.

Dm Se $v \in Aut_\lambda \cap Aut_{\lambda'}$ allora $T(v) = \lambda v = \lambda' v$, quindi $\lambda v = \lambda' v$ e $(\lambda - \lambda')v = \vec{0}$ da cui $\lambda = \lambda'$. La seconda parte del corollario segue dal lemma precedente.

COME RICONOSCERE SE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE (O UNA MATRICE) È DIAGONALIZZABILE?

Il corollario precedente si generalizza a più autovalori:

LEMMA

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di una trasformazione lineare T, allora $(Aut_{\lambda_1} + Aut_{\lambda_2} + \cdots + Aut_{\lambda_i}) \cap Aut_{\lambda_{i+1}} = \{\vec{0}\}$ per ogni $i \leq k$.
Se $B_1, \ldots, B_k$ sono basi per $Aut_{\lambda_1}, \ldots, Aut_{\lambda_k}$, rispettivamente, allora $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ è una base per $Aut_{\lambda_1} + Aut_{\lambda_2} + \cdots + Aut_{\lambda_k}$ e

$$dim(Aut_{\lambda_1} + Aut_{\lambda_2} + \cdots + Aut_{\lambda_k}) = dim(Aut_{\lambda_1}) + \cdots + dim(Aut_{\lambda_k})$$

Dim Per induzione su i. La base è data dal corollario precedente. La dimostrazione del passo induttivo è lasciata come esercizio.

COME RICONOSCERE SE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE (O UNA MATRICE) È DIAGONALIZZABILE?

TEOREMA

Un operatore ineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se, detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di T e $Aut_{\lambda_1}, Aut_{\lambda_2} \ldots, Aut_{\lambda_k}$ i relativi autospazi vale:

$$dim(Aut_{\lambda_1}) + \cdots + dim(Aut_{\lambda_k}) = n.$$

Se questa condizione è soddisfatta, si può costruire una base di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori per T unendo una base Aut_{λ_1} con una base per Aut_{λ_2} , ..., con una base per Aut_{λ_k}.

Dim Sappiamo che T è diagonalizzabile se e solo se ha una base formata da autovettori. Quindi, se T è diagonalizzabile, dividendo gli autovettori che formano la base di $\mathbb{R}^n$ nei relativi autospazi, otteniamo delle basi degli autospazi e $dim(Aut_{\lambda_1}) + \cdots + dim(Aut_{\lambda_k}) = n$.

Viceversa, se $dim(Aut_{\lambda_1}) + \cdots + dim(Aut_{\lambda_k}) = n$, possiamo trovare una base di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T unendo le basi dei vari autospazi,

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3$$

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3$$

L'unico autovalore di T è quindi $\lambda = 2$.
Per calcolare l'autospazio V_2, dobbiamo risolvere il sistema $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$, ovvero

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di tale sistema sono l'autospazio $Aut_2 = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\}$ che è uno spazio di dimensione 2. Quindi non è possibile trovare una base di autovettori e T non è diagonalizzabile.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2) =$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2) =$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2) =$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T. L'autospazio Aut_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T. L'autospazio Aut_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi $Aut_1 = \{2k, k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1, mentre l'autospazio Aut_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - 2I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

quindi $Aut_2 = \{k, k, h) : k, h \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 2. (SEGUE)

ESEMPIO

Siccome $dim(Aut_1) + dim(Aut_2) = 3$, l'operatore lineare T è diagonalizzabile e una sua base di autovettori è $B = [v_1, v_2, v_3]$ dove

$$v_1 = (2,1,0) \in Aut_1, \; v_2 = (1,1,0) \in Aut_2, \; v_3 = (0,0,1) \in Aut_2.$$

ESEMPIO

Siccome $dim(Aut_1) + dim(Aut_2) = 3$, l'operatore lineare T è diagonalizzabile e una sua base di autovettori è $B = [v_1, v_2, v_3]$ dove

$$v_1 = (2,1,0) \in Aut_1, \; v_2 = (1,1,0) \in Aut_2, \; v_3 = (0,0,1) \in Aut_2.$$

La matrice diagonale che corrisponde a T in questa base è:

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIAGONALIZZABILITA'

In un caso particolare ci basta conoscere gli autovalori senza dover calcolare la dimensione degli autospazi di una trasformazione per dichiararla diagonalizzabile:

COROLLARIO

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.

Dim Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di T e si ha $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$ allora $dim(Aut_{\lambda_i}) = 1$, per ogni i. Infatti, poiché λ_i è un autovalore, $dim(Aut_{\lambda_i}) = d_i \leq 1$ mentre, poiché T è diagonalizzabile, dobbiamo avere $d_1 + \ldots + d_k = n$. Ne segue $dim(Aut_{\lambda_i}) = 1$, per ogni i ed è possibile costruire una base di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori prendendo un vettore non nullo in ogni autospazio.

ESEMPIO La (trasformazione lineare corrispondente alla) matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ha come autovalori $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Avendo 3 autovalori distinti in $\mathbb{R}^3$, la matrice è diagonalizzabile.
Notare che la condizione enunciata nel corollario è solo sufficiente, non necessaria: se ad esempio

$$M_{\mathcal{E}_3}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

allora T è diagonalizzabile (la matrice rispetto alla base canonica è diagonale), ma T ha due autovalori e non tre.

Un controllo sugli autovalori

LEMMA

Se A è una matrice quadrata, allora:

1. $det(A)$ è il prodotto dei suoi autovalori (ogni autovalore λ_0 va però contato con la sua molteplicità algebrica, ovvero il numero di volte che il fattore $(\lambda - \lambda_0)$ compare nella fattorizzazione del polinomio caratteristico);
2. la somma degli elementi sulla diagonale di A (detta la “traccia” della matrice A) è uguale alla somma degli autovalori, contati con la loro molteplicità algebrica.

(**Dimostrazione omessa**) Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$. Quindi gli autovalori di A sono due, $\lambda_1 = 2$, con molteplicità algebrica pari a 2 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica pari a 1. Gli autovalori, contati con la loro molteplicità, sono allora $2, 2, 1$. Il prodotto è $4 = det(A)$ e la somma è $5 = tr(A)$.

Diagonalizzabilità di Matrici

Quali matrici sono diagonalizzabili? Un' importante condizione sufficiente viene dal seguente teorema

TEOREMA SPETTRALE

Se S è una matrice simmetrica, allora S è diagonalizzabile. Inoltre esiste sempre una matrice ortogonale U (ovvero i vettori colonna formano una base ortonormale) tale che

$$S = U \Lambda U^T$$

con Λ matrice diagonale.

senza dimostrazione: che per le matrici ortogonali vale $U^{-1} = U^T$.

Applicazioni alla Singular Value Decomposition

Usando il Teorema spettrale si dimostra un risultato (la SVD di una matrice) che si applica a matrici qualsiasi A (non necessariamente quadrate).

TEOREMA SVD

Se A è una matrice $n \times m$ di rango k esistono sempre k vettori ortonormali $U = [u_1, \ldots, u_k]$ di $\mathbb{R}^n$ e k vettori ortonormali $V = [v_1, \ldots, v_k]$ di $\mathbb{R}^m$ tali che

$$A = U\Lambda V^T = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} = \lambda_1 u_1 v_1^T + \ldots + \lambda_k u_k v_k^T$$

dove Λ è una matrice diagonale $k \times k$ con elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sulla diagonale.
Inoltre, se $A_i = \lambda_1 u_1 v_1^T + \ldots + \lambda_i u_i v_i^T$ allora la matrice A_i ha rango i ed è, fra tutte le matrici di rango i, quella “approssima” meglio la matrice A.

Applicazione alla compressione di immagini: Immage Compression with SVD

Applicazioni alla Principal Component Analysis visualization of PCA