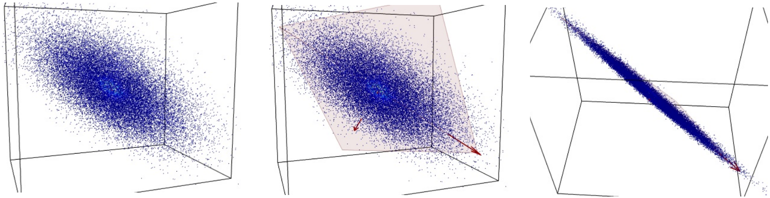
PERCHÉ RISOLVERE SISTEMI LINEARI?

Lo studio dei sistemi lineari e, più in generale, delle applicazioni lineari ha una grande importanza in moltissime applicazioni, in particolare in Data Science e Machine Learning.

Studiare le applicazioni lineari i permette, ad esempio, di *proiettare insiemi di dati* in modo da diminuirne la "dimensione".



Risoluzione di sistemi lineari

- In questo corso svilupperemo dei metodi che ci permetteranno di capire quando un sistema lineare con un numero qualsiasi di equazioni e di incognite ammette almeno una soluzione e svilupperemo delle tecniche per descrivere l'insieme di tutte le soluzioni e la sua "dimensione".

Risoluzione di sistemi lineari

- In questo corso svilupperemo dei metodi che ci permetteranno di capire quando un sistema lineare con un numero qualsiasi di equazioni e di incognite ammette almeno una soluzione e svilupperemo delle tecniche per descrivere l'insieme di tutte le soluzioni e la sua "dimensione".

In generale, un sistema lineare ad n equazioni ed m incognite $x_1, \dots, x_m$ è una lista di equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

dove gli $a_{i,j}$ (i coefficienti del sistema) e i b_i (i termini noti) sono numeri reali fissati.

In generale, un sistema lineare ad n equazioni ed m incognite $x_1, \ldots, x_m$ è una lista di equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

dove gli $a_{i,j}$ (i coefficienti del sistema) e i b_i (i termini noti) sono numeri reali fissati.

Ad esempio, per trovare l' intersezione fra due rette del piano di equazione $2x - y = 3$ e $-x + y = 0$ basta risolvere un sistema lineare con due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

(quando le variabili sono meno di quattro, a volte si preferisce utilizzare x, y, z, w invece che x_1, x_2, x_3, x_4).

EQUAZIONI NUMERICHE E MATRICIALI

Vedremo che risolvere un sistema equivale a risolvere una singola equazione lineare matriciale.

EQUAZIONI NUMERICHE E MATRICIALI

Vedremo che risolvere un sistema equivale a risolvere una singola equazione lineare matriciale.
Equazioni lineari numeriche: nei numeri reali, un'equazione del tipo

$$ax = b \quad \text{dove} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ha:

- se $a \neq 0$: un'unica soluzione, $x = a^{-1}b$;
- se $a = 0$ e $b \neq 0$: nessuna soluzione;
- se $a = 0$ e $b = 0$: infinite soluzioni (perché ogni numero è soluzione di $0x = 0$).

Risolvere un sistema equivale a risolvere un'equazione del tipo

$$Ax = b$$

dove A è una matrice, x è il vettore delle incognite e b è il vettore "termine noto".

Ma cosa significa Ax?

Matrici e loro spazio delle colonne

Data una matrice A con n righe ed m colonne possiamo vedere ogni colonna come un vettore in $\mathbb{R}^n$ (ed ogni riga come un vettore di $\mathbb{R}^m$).

Ad esempio, se :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

i suoi vettori colonna sono

$$A(:,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A(:,2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ A(:,3) = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

i suoi vettori riga (= matrici $1 \times m$) sono

$$A(1,:) = [0,\ -1,\ -2],\ \ A(2,:) = [1,\ 2,\ \sqrt{2}]$$

(Occhio alla notazione! In MATHLAB, un programma molto potente per la matematica, l'elemento di una matrice A all'incrocio fra la riga i e la colonna j si indica con $A(i,j)$; per indicare l'iesima colonna si usa $A(:,i)$; per indicare l'iesima riga si usa $A(i,:)$)

Moltiplicazione matrice x vettore colonna

Possiamo moltiplicare una matrice A di dimensione $n \times m$ a destra per un vettore colonna $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^m$, ottenendo un vettore colonna $Ax \in \mathbb{R}^m$.

Abbiamo due modi per esprimere questo prodotto:

1. attraverso le colonne della matrice A: il vettore colonna Ax si ottiene come combinazione lineare delle colonne di A tramite i coefficienti del vettore $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$:

$$Ax = x_1 A(:, 1) + \cdots + x_m A(:, m)$$

2. attraverso le righe della matrice A: l'i-esimo elemento del vettore colonna Ax si ottiene come prodotto scalare della i-esima riga di A per il vettore x:

$$Ax = \begin{bmatrix} A(1, :) \cdot x \\ \vdots \\ A(n, :) \cdot x \end{bmatrix}$$

Esempio prodotto matrice per vettore colonna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esempio prodotto matrice per vettore colonna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Guardando le colonne:

$$Ax = x_1 A(:,1) + x_2 A(:,2) + x_3 A(:,3) = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Guardando le righe:

$$Ax = \begin{bmatrix} A(1,:) \cdot x \\ A(2,:) \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 2 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-\sqrt{2}) \\ 1 \times 2 + (2) \times 1 + (\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Più in generale, se A è una matrice $n \times m$ è facile convincersi che vale:

$$x_1 A(:,1) + x_2 A(:,2) + x_3 A(:,3) + \cdots + x_m A(:,m) = \begin{bmatrix} A(1,:) \cdot x \\ \vdots \\ A(n,:) \cdot x \end{bmatrix}$$

Più in generale, se A è una matrice $n \times m$ è facile convincersi che vale:

$$x_1 A(:,1) + x_2 A(:,2) + x_3 A(:,3) + \cdots + x_m A(:,m) = \begin{bmatrix} A(1,:) \cdot x \\ \vdots \\ A(n,:) \cdot x \end{bmatrix}$$

Infatti, il primo coefficiente del vettore $x_1 A(:,1) + x_2 A(:,2) + x_3 A(:,3) + \cdots + x_m A(:,m)$ è

$$x_1 A(1,1) + x_2 A(1,2) + \cdots + x_m A(1,m)$$

che coincide con il prodotto scalare fra il vettore $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ e la prima riga $A(1,:)$ di A.

Lo stesso vale per il secondo coefficiente e cosi via.

Prodotto Ax e sistemi lineari.

La ricerca di soluzioni di un sistema lineare equivale a risolvere un'equazione matriciale di tipo $Ax = b$.
Infatti, dato il sistema

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

possiamo considerare la sua “matrice dei coefficienti” $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix}$

il “vettore delle incognite” $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, il “vettore dei termini noti” $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ e considerare l'equazione matriciale $Ax = b$.

Poiché

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix}$$

cercare un vettore x che soddisfa $Ax = b$ equivale a cercare un vettore x per cui

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ovvero a risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Esempio

Trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

equivale a risolvere l'equazione matriciale

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$$

dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Anticipazioni: Spazio delle Colonne e Spazio delle Righe di una Matrice

L'insieme di tutte le combinazioni lineari delle colonne di una matrice A si chiama Spazio delle Colonne di una matrice.

Le colonne "generano" (span) lo spazio delle colonne.

Per capire se un sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione, basta studiare lo spazio delle colonne di A, in particolare la dipendenza o l'indipendenza delle colonne.

Definizione (vedi anche nelle future slides sulla dipendenza)

- I vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti se uno di loro è combinazione lineare degli altri vettori.
- I vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono indipendenti se nessuno di loro è combinazione lineare degli altri vettori.

Ad esempio, i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ e , più in generale

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Invece, i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono dipendenti (il secondo è somma degli altri due).

Esempio di studio di un sistema Ax tramite lo spazio delle colonne di A

In una matrice $2 \times n$ i vettori colonna sono vettori in $\mathbb{R}^2$. Ad esempio consideriamo $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1/2 \end{bmatrix}$. Com'è fatto lo spazio delle colonne di A?

Esempio di studio di un sistema Ax tramite lo spazio delle colonne di A

In una matrice $2 \times n$ i vettori colonna sono vettori in $\mathbb{R}^2$. Ad esempio consideriamo $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1/2 \end{bmatrix}$. Com'è fatto lo spazio delle colonne di A?

I vettori colonna di A (così come tutte le loro combinazioni lineari) hanno tutti la stessa direzione, quindi lo spazio delle colonne di A è una retta (i vettori colonna sono "dipendenti").

Se b è un vettore colonna di $\mathbb{R}^2$ che sta su questa retta, allora $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$ ha soluzione, altrimenti no (perché il vettore $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ appartiene sempre allo spazio delle colonne).

In particolare, il sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ha soluzione, mentre $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ non ha soluzione.

Cambiamo matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Com'è fatto lo spazio delle colonne di A?
Le due prime colonne di A sono dipendenti ma la terza colonna è indipendente dalle altre due.
Lo spazio delle colonne è quindi $\mathbb{R}^2$.
Questo significa che, qualsiasi sia il vettore colonna b di $\mathbb{R}^2$, il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione.

Prima di studiare più a fondo i sistemi lineari, vediamo altre operazioni fra matrici.

SOMMA DI MATRICI

- Se A, B hanno entrambe dimensione $n \times m$, allora

$$C = A + B$$

ha dimensione $n \times m$ e vale $C(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$.
Ad esempio,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOMMA DI MATRICI

- Se A, B hanno entrambe dimensione $n \times m$, allora

$$C = A + B$$

ha dimensione $n \times m$ e vale $C(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$.
Ad esempio,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

- è ASSOCIATIVA

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

- è ASSOCIATIVA
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- è COMMUTATIVA
$$A + B = B + A$$

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

- è ASSOCIATIVA
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- è COMMUTATIVA
$$A + B = B + A$$

- la matrice $n \times m$ con tutti i coefficienti uguali a zero (che indichiamo con (0)) è un elemento neutro per l'addizione
$$A + (0) = (0) + A = A$$

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

- è ASSOCIATIVA
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- è COMMUTATIVA
$$A + B = B + A$$
- la matrice $n \times m$ con tutti i coefficienti uguali a zero (che indichiamo con (0)) è un elemento neutro per l'addizione
$$A + (0) = (0) + A = A$$
- se $-A$ è la matrice ottenuta da A cambiando il segno di tutte le entrate allora
$$A + (-A) = (-A) + A = (0).$$

SOMMA DI MATRICI

Questa operazione di somma fra matrici della stessa dimensione $n \times m$ ha delle proprietà simili a quelle della somma fra numeri reali:

- è ASSOCIATIVA
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- è COMMUTATIVA
$$A + B = B + A$$
- la matrice $n \times m$ con tutti i coefficienti uguali a zero (che indichiamo con (0)) è un elemento neutro per l'addizione
$$A + (0) = (0) + A = A$$
- se $-A$ è la matrice ottenuta da A cambiando il segno di tutte le entrate allora
$$A + (-A) = (-A) + A = (0).$$

MATRICE OPPOSTA

Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

allora

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 - /2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UN NUMERO

Un'altra operazione semplice è quella del prodotto fra un numero reale r e una matrice A:

MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UN NUMERO

Un'altra operazione semplice è quella del prodotto fra un numero reale r e una matrice A:
la matrice rA ha le stesse dimensioni della matrice A e

$$(rA)(i,j) = rA(i,j)$$

MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UN NUMERO

Un'altra operazione semplice è quella del prodotto fra un numero reale r e una matrice A:
la matrice rA ha le stesse dimensioni della matrice A e

$$(rA)(i,j) = rA(i,j)$$

Ad esempio, se $r = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

allora

$$2A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

MOLTIPLICAZIONE FRA MATRICI

Data una matrice A di dimensioni $n \times m$ e una matrice B di dimensioni $m \times k$ il prodotto $C := AB$ ha dimensione $n \times k$ ed è definito da:

$$C(i,j) = A(i,:) \cdot B(:,j)$$

ovvero, l'elemento in posizione (i,j) della matrice prodotto si ottiene come "dot product" fra l'i-esima riga di A e la j-esima colonna di B.

È importante notare che questa regola permette di moltiplicare due matrici solo se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

Altri modi per calcolare un prodotto AB

Applicando la regola del prodotto al caso di una matrice A per un vettore colonna $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ritroviamo la moltiplicazione già vista: $A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,:) \cdot b \\ \vdots \\ A(n,:) \cdot b \end{bmatrix}$.

. Possiamo anche interpretare un prodotto usando le colonne di B o le righe di A, come segue:

1. La j-esima colonna del prodotto AB si ottiene moltiplicando A per la j-esima colonna di B: $(AB)(:,j) = A \cdot B(:,j)$
   Infatti, per definizione di prodotto AB abbiamo che
   $$(AB)(:,j) = \begin{bmatrix} (AB)(1,j) \\ \vdots \\ (AB)(n,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1:-)B(:,j) \\ \vdots \\ A(n:-)B(:,j) \end{bmatrix} = A \cdot B(:,j)$$
   dove l'ultima uguaglianza si ottiene ricordando la versione "per righe" del prodotto di una matrice A per un vettore colonna $B(:,j)$.
2. In modo analogo si dmostra che la i-esima riga del prodotto AB si ottiene moltiplicando l'i-esima riga di A per B: $(AB)(i,:) = A(i,:) \cdot B$.

PRODOTTO NON COMMUTATIVO

L'operazione di prodotto fra matrici non gode di tutte le proprietà che siamo abituati a vedere nel prodotto fra numeri reali.

In particolare, non è in generale *commutativa*:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PRODOTTO ASSOCIATIVO

Il prodotto fra matrici è associativo:

PRODOTTO ASSOCIATIVO

Il prodotto fra matrici è associativo:

se A è una matrice $n \times m$, B è una matrice $m \times k$ e C è una matrice $k \times h$ allora sia il prodotto $A \cdot (B \cdot C)$ che il prodotto $(A \cdot B) \cdot C$ sono definiti, e non è difficile verificare che

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

MATRICI IDENTITÀ

Dato un numero naturale n, I_n è la matrice quadrata che ha tutti i coefficienti uguali a 0 tranne che sulla diagonale prinicipale, dove le entrate sono tutte uguali ad 1.
Ad esempio

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATRICI IDENTITÀ

Dato un numero naturale n, I_n è la matrice quadrata che ha tutti i coefficienti uguali a 0 tranne che sulla diagonale prinicipale, dove le entrate sono tutte uguali ad 1.
Ad esempio

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se A è una matrice $n \times m$ e B è una matrice $m \times n$ allora

$$I_n \times A = A, \qquad B \times I_n = B.$$

(scriveremo anche I per le matrice identità, sottointendendone la dimensione).

MATRICI IDENTITÀ

Dato un numero naturale n, I_n è la matrice quadrata che ha tutti i coefficienti uguali a 0 tranne che sulla diagonale prinicipale, dove le entrate sono tutte uguali ad 1.
Ad esempio

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se A è una matrice $n \times m$ e B è una matrice $m \times n$ allora

$$I_n \times A = A, \qquad B \times I_n = B.$$

(scriveremo anche I per le matrice identità, sottointendendone la dimensione).
Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1/2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1/2 & -3 \end{bmatrix}$$

DISTRIBUTIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE SULLA SOMMA

se A è una matrice $n \times m$ e B, C sono matrici $m \times k$ allora sia $A(B + C)$ che $AB + AC$ sono definite e vale

$$A(B + C) = AB + AC;$$

DISTRIBUTIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE SULLA SOMMA

se A è una matrice $n \times m$ e B, C sono matrici $m \times k$ allora sia $A(B+C)$ che $AB+AC$ sono definite e vale

$$A(B+C) = AB + AC;$$

analogamente, vale

$$(B+C)A = BA + CA,$$

quando le operazioni sono definite.

ATTENZIONE

Facendo calcoli con le matrici bisogna prestare attenzione alla mancanza di commutatività:

ATTENZIONE

Facendo calcoli con le matrici bisogna prestare attenzione alla mancanza di commutatività:
ad esempio, nei numeri reali siamo abituati a scrivere $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mentre nelle matrici la mancanza di commutatività fa sì che questa regola debba essere sostituita con: $(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$.

ATTENZIONE

Facendo calcoli con le matrici bisogna prestare attenzione alla mancanza di commutatività:
ad esempio, nei numeri reali siamo abituati a scrivere $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mentre nelle matrici la mancanza di commutatività fa sì che questa regola debba essere sostituita con: $(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$.
Anche equazioni del tipo $AB = AC$ possono trarre in inganno: infatti non è detto che in questo caso si possa dedurre $B = C$. Ad esempio, consideriamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AC$$

ma $B \neq C$.

DIVISIONE A BLOCCHI DI UNA MATRICE

Una divisione *a blocchi* di una matrice consiste nel ripartire la matrice in un certo numero di "sottomatrici". Ad esempio, la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

si può vedere come $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ dove

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, Q := \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; R := (0, 1, 0), \; S := (2, 1)$$

PRODOTTO DI MATRICI DIVISE A BLOCCHI

Se due matrici sono divise a blocchi, possiamo effettuare la moltiplicazione fra le matrici come se i blocchi fossero dei singoli coefficienti, a patto che la moltiplicazione fra i blocchi sia compatibile. Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} T \\ Z \end{bmatrix}$$

dove A è la matrice precedente e

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo svolgere la moltiplicazione AB per blocchi:

$$AB = \begin{bmatrix} PT + QZ \\ RT + SZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

perché i prodotti PT, QZ, RT, SZ sono tutti compatibili

Rango di una matrice

Data una matrice A

1. Il rango per colonne di A è il massimo numero di colonne indipendenti di A.
2. Il rango per righe di A è il massimo numero di righe indipendenti di A.

Dimostreremo che, in ogni matrice A, il rango per righe è uguale al rango per colonne.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché le tre colonne di A sono vettori dipendenti

$$A(:,1) + (1/2)A(:,2) = A(:,3)$$

ma le prime due colonne sono indipendenti

(non hanno la stessa direzione),

il rango per colonne di A è 2.

Anche il rango per righe della matrice è 2 (le due righe di A sono indipendenti).

Il fatto che il rango per righe sia uguale al rango per colonne non è casuale e vale per ogni matrice. Questo è il primo risultato importante che vediamo di Algebra Lineare e lo dimostreremo nelle prossime slides usando la cosidetta fattorizzazione CR.

Interpretazione del prodotto fra due matrici

Vogliamo introdurre una prima fattorizzazione importante delle matrici, la fattorizzazione *CR*.

Ricordiamo che dalla definizione della moltiplicazione di una matrice C di dimensione $m \times r$ per una matrice R di dimensione $r \times n$ segue che la matrice $A = CR$ di dimensione $m \times n$ è tale che:

1. Le colonne di A sono combinazioni lineari delle colonne di C;
2. Le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di R.

Ad esempio:

$$A(:,3) = CR(-,3) = \sum_{j=1}^{r} C(-,j)R(j,3), \qquad A(2,:) = C(2,:)R = \sum_{j=1}^{r} C(2,j)R(j,:)$$

ed, in generale:

$$A(:,i) = CR(-,i) = \sum_{j=1}^{r} C(-,j)R(j,i),$$

$$A(i,:) = C(i,:)R = \sum_{j=1}^{r} C(i,j)R(j,:)$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = CR$$

$$A(:,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = CR(:,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2C(:,1) + 2C(:,2) =$$

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(1,:) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C(1,:)R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1R(1,:) + 1R(2,:) =$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Fattorizzazione $A = CR$ di una matrice

Visto che in una fattorizzazione $A = CR$ le colonne di A sono combinazioni lineari delle colonne di C, le colone di C "generano" lo spazio delle colonne di A.
Definizione di C: se il rango per colonne di A è r, scegliamo r colonne indipendenti di A e formiamo una matrice C. Ogni colonna di A si scrive come combinazione lineare delle colonne di C.

Definizione di R: la i-esima colonna della matrice R è data dai coefficienti che esprimono l'i-esima colonna di A (cioè $A(:, i)$) come combinazione lineare delle colonne di C.
Ad esempio:
Ad esempio, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, il rango per colonne di A è 2. Scegliendo la prima e la terza colonna di A (che sono indipendenti, mentre la seconda dipende dalle altre due) otteniamo la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Poiché

$$\begin{array}{lcrcr} A(:,1) & = & 1C(:,1) & + & 0C(:,2) \\ A(:,2) & = & -2C(:,1) & + & 2C(:,2) \\ A(:,3) & = & 0C(:,1) & + & 1C(:,2) \end{array}$$

avremo $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (controllare che $A = CR$, vedi slide precedente).

Un altro esempio di fattorizzazione CR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

il rango per colonne è 2 (la terza colonna è la somma delle prime due). Scegliendo le prime due colonne per costruire C, avremo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre, poiché $A(:,3) = C(:,1) + C(:,2)$ la matrice R è:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificare che $A = CR$.

Rango per Righe = Rango per Colonne

TEOREMA

Il rango per colonne di una matrice A è uguale al suo rango per righe.

Dimostrazione (quasi) : Data una matrice A, consideriamo la sua fattorizzazione $A = CR$ (vedi slide precedente).
Per definizione, C ha rango per colonne uguale al rango per colonne di A.
Le righe di R sono indipendenti: infatti, supponiamo che le r colonne indipendenti di A usate per costruire C abbiano indici $i_1 < \ldots < i_r$. Ne segue che

$$R(:, i_1) = e_1, \ldots, R(:, i_r) = e_r.$$

Ogni riga di R quindi contiene una posizione in cui la colonna corrispondente ha un solo coefficiente non nullo. Nessuna i riga di R può essere allora combinazione lineare delle altre righe e quindi le r righe di R sono indipendenti. Ne segue che il rango per righe di R è r. Le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di R, quindi anche il rango per righe di A è r.

Nota bene: nell'ultimo passaggio abbiamo un po' barato: chi ci dice che il massimo numero di righe indipendenti di A è r, sapendo che le righe di A sono combinazioni lineari di r righe indipendenti (quelle di R)? Questo fatto lo dimostreremo per bene nella parte del corso dedicata ad indipendenza e dipendenza, per il momento abbiate fede.