Trasposta di una matrice

$$\text{Se } A = (a_{i,j})_{n\times m} \text{ allora } A^T = (a_{j,i})_{m\times n}$$

ESEMPI:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Se v è un vettore (una colonna) allora v^T è un vettore ‘ ‘ riga”:

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Operazioni e trasposta

- $(A^T)^T = A$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Dimostriamo l'ultima proprietà prima nel caso particolare di una matrice per un vettore colonna :

$$Ab = ([A(:,1) \ldots A(:,n)] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix})^T = (b_1 A(:,1) + \ldots + b_n A(:,n))^T = b_1 (A(:,1))^T + \ldots + b_n (A(:,n))^T$$

$$b^T A^T = [b_1 \ldots b_n] \begin{bmatrix} (A^T)(1,:) \\ \vdots \\ (A^T)(n,:) \end{bmatrix} = [b_1 \ldots b_n] \begin{bmatrix} (A(:,1))^T \\ \vdots \\ (A(:,n))^T \end{bmatrix} = b_1 (A(:,1))^T + \ldots + b_n (A(:,n))^T$$

Poi, in generale:

$$(AB)^T = (A[B(:,1) \ldots B(:,n)]^T = [AB(:,1) \ldots AB(:,n)]^T = \begin{bmatrix} (AB(:,1))^T \\ \vdots \\ (AB(:,n))^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(:,1)^T A^T \\ \vdots \\ B(:n)^T A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(:,1)^T \\ \vdots \\ B(:n)^T \end{bmatrix} A^T =$$

$$= B^T A^T.$$

Inner product (prodotto scalare) e outer product fra due vettori

Dati due vettori $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} R^n$, possiamo scrivere il loro prodotto scalare (inner product) o dot-product come prodotto di matrici fra il vettore riga w^T e v:

$$v \cdot w = w^T v = \begin{bmatrix} b_1 \dots b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \dots a_n b_n \in \mathbb{R}$$

Analogamente, possiamo definire il loro "outer product"

$$vw^T = v \begin{bmatrix} b_1 \dots b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 v \dots b_n v \end{bmatrix}$$

dove l'ultima matrice è una matrice di colonne (prima colonna $b_1 v$, ultima colonna $b_n v$).

Matrici di rango 1 e outer product

Esercizio

Se v e w sono vettori non nulli, che rango ha la matrice vw^T?

Matrici di rango 1 e outer product

Esercizio

Se v e w sono vettori non nulli, che rango ha la matrice vw^T?
SOL. Le colonne di vw^T sono tutte multipli di v che è un vettore non nullo. Quindi la matrice vw^T ha rango 1.

Matrici di rango 1 e outer product

Esercizio

Se v e w sono vettori non nulli, che rango ha la matrice vw^T?
SOL. Le colonne di vw^T sono tutte multipli di v che è un vettore non nullo. Quindi la matrice vw^T ha rango 1.
Viceversa, se una matrice A ha rango 1, tutte le sue colonne sono multipli di un singolo vettore v:

$$A(:1) = b_1 v, \ldots, A(:, m) = c_m v$$

quindi $A = vw^T$ dove $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$.

I quattro sottospazi fondamentali di una matrice $n \times m$

Se A è una matrice $n \times m$, possiamo definire quattro spazi vettoriali:

1. Lo spazio delle colonne di A, ovvero $Col(A) = SPAN(A(:,1), \ldots, A(:,m))$. È un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e coincide con l'insieme dei vettori $b \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $Ax = b$ ha soluzione.
2. Lo spazio delle righe di A, ovvero $Row(A) = SPAN(A(1,:), \ldots, A(n,:)$. È un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.
3. Il "NULL SPACE" di A, detto anche $Ker(A)$: è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = \vec{0}$. È un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.
4. Il "NULL SPACE" di A^T, $Ker(A^T)$. È un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Chiaramente $Row(A) = Col(A^T)$ e $Col(A) = Row(A^T)$, ma i legami fra questi sottospazi sono molto più profondi.

ESEMPIO

Trovare i quattro spazi fondamentali della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determinandone una base e la dimensione.
- Determiniamo spazio delle righe $Row(A)$: se trasformiamo la matrice a scala tramite le operazioni elementari sulle righe lo spazio delle righe non cambia:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio delle righe $Row(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 ed una sua base è data dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

- Anche lo spazio delle colonne ha dimensione 3 (perché il rango per righe è uguale al rango delle colonne) ma, attenzione, non è uguale allo spazio delle colonne della matrice a scala (le trasformazioni per riga non cambiano la dimensione dello spazio delle colonne, ma lo spazio delle colonne può cambiare). Si ha $Col(A) = \mathbb{R}^3$.
- $Ker(A)$: possiamo trovare le soluzioni del sistema omogeneo risolvendo il sistema che ha per matrice dei coefficienti la matrice a scala: $\begin{cases} x + 2y + 2w = 0 \\ -8y + z - 7w = 0 \\ z - 7w = 0 \end{cases}$ ottenendo $Ker(A) = \{ \begin{bmatrix} -2h \\ 0 \\ 7h \\ h \end{bmatrix} : h \, \mathbb{R}\}$. Il $Ker(A)$ è quindi una retta e una sua base è data ad esempio da $[\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}]$.

Più in generale, la dimensione dei quattro sottospazi fondamentali di una matrice $A_{n\times m}$ è legata al rango r di A, al numero n di equazioni nel sistema $Ax = \vec{0}$ (il numero di righe della matrice A) e al numero delle variabili del sistema $Ax = \vec{0}$ (il numero di colonne della matrice A):

TEOREMA

Se A è una matrice $n \times m$ e $rg(A) = r$ allora

$$dim(Col(A)) = dim(Row(A)) = r, \quad dim(Ker(A)) = m - r \quad dim(Ker(A^T)) = n - r$$

Dim Abbiamo già dimostrato che il rango per righe coincide con il rango per colonne ed il massimo numero di colonne (righe) indipendenti della matrice ci dà la dimensione dello spazio delle colonne (delle righe).
Dimostrazione di $dim(Ker(A)) = m - r$: trasformando il sistema in un sistema a scala possiamo individuare dei vettori indipendenti che generano l'insieme delle soluzioni del sistema a scala (e quindi del sistema originario) dando valori $0, 1$ alle variabili libere: se ad esempio la soluzione trovata assegnando parametri alle variabili libere (in rosso) è:

$$\begin{cases} x = 2h - 3k \\ y = h \\ z = h - k \\ w = k \end{cases} \qquad h, k \in \mathbb{R}$$

possiamo trovare due vettori indipendenti v_1, v_2 considerando prima $h = 1, k = 0$ e poi $h = 0, k = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e tutte le altre soluzioni si ottengono considerando $hv_1 + kv_2$, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. In generale, considerando i vettori ottenuti, al variare delle variabili libere, assegnando 1 ad una variabile libera e 0 al resto delle variabili libere, avremo tanti vettori quante sono le variabili libere che sono indipendenti e generano tute le altre soluzioni. Queste soluzioni formano quindi una base del $Ker(A)$, quindi la dimensione di $Ker(A)$ è uguale al numero di variablili libere (ovvero di variabili “non pivot") del sistema. Notiamo infine che il numero di variabili "pivot" corrisponde al numero di righe non nulle della matrice ridotta a scala, ed è quindi uguale al rango r della matrice. Quindi la dimensione di $Ker(A)$ è $m - r$.
Analogamente, si dimostra che $dim(Ker(A^T) = n - r$.

Soluzioni sistema completo come traslati del $Ker(A)$

Il precedente teorema sulla dimensione dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo ci permette di dare una stima della "grandezza" dell'insieme delle soluzioni senza risolvere il sistema. Per ottenere un risultato simile nel caso non omogeneo dobbiamo prima risolvere il problema di definire la dimensione di un tale insieme di soluzioni, perché queste formano un sottospazio vettoriale solo nel caso di un sistema omogeneo. D'altra parte, si ha:

LEMMA

Se v_0 è una soluzione del sistema $Ax = b$, allora l'insieme $SOL(Ax = b)$ di tutte le soluzioni del sistema $Ax = b$ è ottenibile all'insieme $SOL(Ax = 0)$ delle soluzioni del sistema omogeneo $SOL(Ax = \vec{0})$ e a v_0 nel modo seguente:

$$SOL(Ax = b) = \{v + v_0 \ : \ Av = \vec{0}\} = SOL(Ax = \vec{0}) + v_0 = Ker(A) + v_0$$

Dim. Se $v \in SOL(Ax = b)$ è una soluzione di $Ax = b$, allora $(v - v_0) \in Ker(A)$ perché

$$A(v - v_0) = Av - Av_0 = b - b = \vec{0}.$$

Siccome $v = (v - v_0) + v_0$, abbiamo che $v \in Ker(A) + v_0$.
Viceversa, se $v \in Ker(A) + v_0$ allora $v = w + v_0$ dove $w \in Ker(A)$ e $Av = A(w + v_0) + Aw + Av_0 = \vec{0} + b = b$. Quindi $v \in SOL(Ax = b)$.

Esempio

Consideriamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right. \text{ e il sistema om. associato } \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss troviamo l'insieme delle soluzioni del sistema completo:

$$SOL(Ax = b) = \{1 - h, -2, h) \ : \ h \in \mathbb{R}\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo, invece, troviamo:

$$SOL(Ax = \vec{0}) = \{-h, 0, h) \ : \ h \in \mathbb{R}\}$$

Se consideriamo una soluzione del sistema completo, come $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ otteniamo

$$SOL(Ax = b) = SOL(Ax = \vec{0}) + v_0$$

(vedi animazione geogebra)

Sottospazi Affini

Abbiamo visto che, supponendo che il sistema $Ax = b$ abbia almeno una soluzione v_0, le soluzioni di un sistema lineare $SOL(Ax = b)$ qualsiasi si ottengono come un sottospazio (il $Ker(A)$) "traslato" dal vettore v_0. Questo tipo di insiemi si chiama sottospazio affine

DEFINIZIONE

Se $v_0 \in \mathbb{R}^n$ e W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ allora l'insieme $W + v_0 = \{w + v_0 \ : \ w \in W\}$ si dice un *sottospazio affine*. La dimensione di un sottospazio affine è, per definizione, la dimensione di W. Il sottospazio W si chiama *giacitura* del sottospazio affine.

Per quanto detto precedentemente, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $SOL(Ax = b)$ qualsiasi, se non è vuoto, è quindi un sottospazio affine, di dimensione $m - rg(A)$. Rimane però ancora da stabilire un criterio per stabilire quando un sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione, senza dover necessariamente risolvere il sistema. Una soluzione viene data dal seguente Teorema di Rouche-Capelli (caso generale).

Teorema di Rouché Capelli

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Data una matrice $n \times m$,

$$\text{il sistema } Ax = b \text{ ha soluzione} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = rg(A; b)$$

dove la matrice $A; b$ (detta matrice completa o orlata del sistema) è ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A dei coefficienti del sistema.
Inoltre, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$Ax = b \quad (m \text{ incognite, } n \text{ equazioni}),$$

se non è vuoto, è un sottospazio affine di dimensione $m - rg(A)$ (m è il numero delle incognite e $rg(A)$ è il rango della matrice A). Si dice anche che il sistema ha $\infty^{m-rg(A)}$ soluzioni.

Dim Abbiamo già dimostrato la seconda parte nelle slides precedenti. Per la prima parte:

$$Ax = b \text{ ha soluzione} \quad \Leftrightarrow \quad b \in Col(A) \quad \Leftrightarrow \quad Col(A) = Col(A; b) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(A; b)$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y - 5z = 1 \\ x + y - 4z = 5 \\ 2x - 10y - 11z = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

che, operando con operzioni elementari sulle righe, si riduce a

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2 (ha una riga nulla) mentre quella completa ha rango tre. Quindi il sistema non ha soluzione.

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + 7z = 3 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che, operando con operzioni elementari sulle righe, si riduce a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno tre righe indipendenti, quindi il rango è per entrambe 3 e il sistema originario ha soluzione. L'insieme delle soluzioni ha dimensione pari al numero delle incognite meno il rango ovvero $3 - 3 = 0$; il sistema ammette quindi un'unica soluzione ovvero il punto $(-2/3, -2/3, 1)$, come si vede risolvendo il sistema che corrisponde alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 2z = 0 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Usando il Teorema di Rouché Capelli possiamo fare alcune considerazioni sull'insieme delle soluzioni del sistema. La matrice dei coefficienti del sistema ha due colonne uguali e le prime due colonne indipendenti, quindi ha rango due. Anche la matrice completa ha rango 2, quindi il sistema ammette soluzioni.

L'insieme delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione

$$(\textit{numero incognite}) \;-\; (\textit{rango matrice coefficienti}) = 3-2=1,$$

quindi è una retta.

Il sistema omogeneo associato è:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Risolvendo troviamo le soluzioni del sistema omogeneo: $\{(-h,0,h) : h\in\mathbb{R}\}$.

Si trova facilmente una soluzione del sistema non omogeneo, ad esempio $v_0=(1,0,0)$. Quindi le soluzioni del sistema iniziale sono:

$\{(-h,0,h) : h,k\in\mathbb{R}\}+(1,0,0)=\{(-h+1,0,h) : h,k\in\mathbb{R}\}$.

QUANTE SOLUZIONI HA $Ax = b$?

Il teorema precedente sulla risoluzione dei sistemi generali ha le seguenti conseguenze per l'insieme delle soluzioni di un sistema $Ax = b$ con A matrice $n \times m$ e $rg(A) = r$.

1. $n = m = r$: A è una matrice quadrata e A ha rango massimo.
Il sistema ha tante equazioni quante incognite e la matrice A è invertibile (perché ha rango massismo). Il sistema $Ax = b$ ha come unica soluzione $x = A^{-1}b$. Esempio: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$.
2. $r = n < m$: il rango di A è pari al numero delle righe, che è minore del numero delle colonne. Il sistema ha più incognite che equazioni e il rango di A è pari al numero delle equazioni. La matrice A è corta e larga e $Ax = b$ ha sempre infinite soluzioni che formano uno spazio affine di dimensione $m - r > 0$, qualsiasi sia b.
Esempio: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.
Infatti in questo caso si ottiene $rg(Ab) = rg(A) = n$ (il rango di Ab non può che aumentare, ma non può neanche superare il numero di righe della matrice).
3. $r = m < n$: il rango di A è pari al numero delle colonne, che è minore del numero delle righe. Il sistema ha più equazioni che incognite. La matrice A è lunga e stretta e $Ax = b$ ha zero o una soluzione. infatti, se b appartiene allo spazio delle colonne (ovvero $m = r = rg(A) = rg(Ab)$) il sistema ha un'unica soluzione perché $m - r = m - m = 0$. Se invece b non appartiene allo spazio delle colonne (ovvero $m = r = rg(A) < rg(Ab)$) allora il sistema non ha soluzioni.
Esempi: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $rg(A) = 2$, $rg(Ab) = 3$, 0 soluzioni. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $rg(A) = 2$, $rg(Ab) = 2$, una soluzione.
4. $r < n$ e $r < m$: il sistema $Ax = b$ ha zero o infinite soluzioni: zero, se $r = rg(A) < rg(Ab)$, infinite che formano uno spazio affine di dimensione $m - r$ se $r = rg(A) = rg(Ab)$.
Esempi: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $rg(A) = 1$, $rg(Ab) = 2$, 0 soluzioni. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$ $rg(A) = 1$, $rg(Ab) = 1$ infinite soluzioni,
spazio affine di dimensione $2 - 1 = 1$ (una retta).

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

- Nel piano $\mathbb{R}^2$ un' equazione $ax + by = c$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b) = rg(a, b, c)$. L'unico caso in cui non ha soluzione è quando $a = b = 0$ e $c \neq 0$. Se invece ha soluzione:
  - se $a, b = 0$ allora $c = 0$ ed il sistema ha $\infty^{2-0} = \infty^2$ soluzioni, ovvero è tutto il piano.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni e rappresenta una retta nel piano. La sua giacitura è la retta per l'origine.
- Nello spazio $\mathbb{R}^3$ un'equazione $ax + by + cz = d$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b, c) = rg(a, b, c, d)$. L'unico caso in cui non ha soluzione è quando $a = b = c0$ e $d \neq 0$. Se invece ha soluzione si ha:
  - se $a, b, c = 0$ allora $d = 0$ ed il sistema ha $\infty^{3-0} = \infty^3$ soluzioni, ovvero è tuttolo spazio.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b, c è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni e rappresenta una piano nello spazio. La sua giacitura è il piano per l'origine di equazione $ax + by + cz = 0$.

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

- Nello spazio $\mathbb{R}^3$ un sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se

$$rg \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}$$

Se il sistema ha soluzione, allora

  - Se il rango delle matrici di cui sopra è 1, i vettori (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono uno multiplo dell'altro e il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni ed è quindi un piano (di equazione $ax + by + cz = d$).
  - Se il rango delle matrici di cui sopra è 2, il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni ed è quindi una retta con giacitura

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

Nello spazio, due rette possono appartenere ad uno stesso piano (essere complanari) oppure no.

In quest'ultimo caso si dicono "sghembe" e non hanno punti in comune.

Se appartengono allo stesso piano allora sono parallele oppure si incontrano in un punto.

(animazione: sghembe)

ESEMPIO

Consideriamo le rette r, s dello spazio di equazione parametrica, rispettivamente:

$$r := \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t, \ \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + u, \ \ u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La retta r ha direzione uguale al vettore $u = (1, -1, 3)$ mentre la retta s ha direzione uguale al vettore $v = (1, 1, 1)$.

I vettori u, v sono indipendenti, quindi r ed s non hanno la stessa direzione. Quindi, se le due rette appartengono allo stesso piano si intersecano, oppure non appartengono allo stesso piano (sono sghembe) e non si intersecano.
Le equazioni cartesiane di r ed s sono, rispettivamente:

$$r := \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - z = 2 \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

ESEMPIO, segue

Per capire se le rette r ed s hanno un punto in comune (e quindi sono complanari) o se sono sghembe, applichiamo il Teorema di Rouché-Capelli al sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-z=2 \\ x-y=1 \\ x-z=-1 \end{cases} \quad \text{con matrice dei coefficienti} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{che ha rango 3 :}$$

$$rg \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

mentre la matrice completa ha rango 4, perché i 4 vettori riga sono indipendenti:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi il sistema non ha soluzione e le due rette r, s sono sghembe.

RICAPITOLANDO...

- Per capire se un sistema $Ax = b$ ha soluzione e, se ne ha almeno una, per calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni, basta confrontare il rango della matrice dei coefficienti con quello della matrice completa del sistema.
- Il sistema ha soluzione se e solo se il rango della matrice completa del sistema (chiamata anche *matrice orlata*) coincide con il rango della matrice dei coefficienti A del sistema.
- In questo caso lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione $m - rg(A)$ dove m è il numero delle incognite del sistema.