MA0748 - FISICA PER I DISPOSITIVI IOT

Lorenzo Santi

AA 2022/23 – Lezione 10 04/04/2023

Argomenti della lezione di oggi

- Il circuito RL in corrente alternata
- Filtri passa basso e passa alto
  - Il circuito RC in serie
  - Il circuito RL in serie
- Circuiti risonanti

Il circuito RL in corrente alternata

Anche per il circuito RL in corrente alternata la teoria è perfettamente simile a quella con un alimentatore a tensione costante.

Dalla legge delle maglie otteniamo

$$\epsilon_L + \Delta V_R + \varepsilon = 0$$

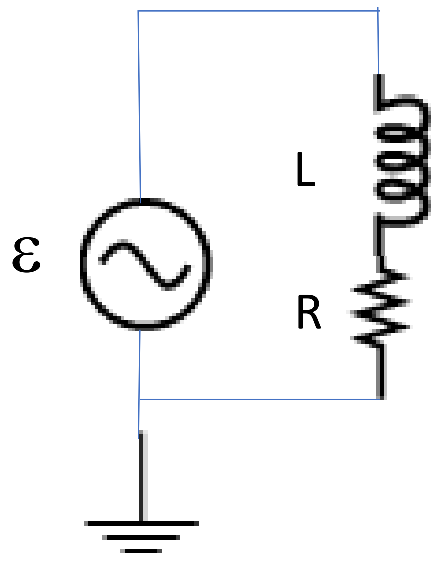
da mettere a sistema con

$$R\, I = -\,\Delta V_R$$

$$\epsilon_L \cong -L\, \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Si ottiene

$$L\, \frac{\Delta I}{\Delta t} + R\, I \cong \epsilon_0 \cos(\omega t)$$



$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = \epsilon_0\cos(\omega t)$$

(abbiamo considerato il limite Δt→0 per il rapporto incrementale della corrente nel tempo)

Ancora una volta cercheremo una soluzione stazionaria per l'andamento della corrente nel tempo, del tipo

$$I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

e considereremo l'equivalente equazione in campo complesso

$$L\frac{d\,\mathbb{I}}{dt} + R\,\mathbb{I} = \epsilon_0\exp(\mathbb{i}\,\omega t)$$

con $$\mathbb{I}(t) = \mathbb{I}_0\exp(\,\mathbb{i}(\omega t + \varphi_0))$$

Poiché

$$\frac{d\mathbb{I}}{dt} = \frac{dI_0\exp(\,\mathbb{i}(\omega t + \varphi_0))}{dt} = \mathbb{i}\omega I_0\exp\left(\,\mathbb{i}(\omega t + \varphi_0\right) = \mathbb{i}\omega\mathbb{I}$$

L’equazione a valori complessi diventa così

$$L\frac{d\mathbb{I}}{dt} + R\ \mathbb{I} = \mathbb{i}\ \omega\ L\ \mathbb{I} + R\ \mathbb{I} = \epsilon_0 \exp(\mathbb{i}\ \omega t)$$

La precedente relazione può essere riscritta come

$$\mathbb{Z}\ \mathbb{I} = \epsilon(\mathrm{t})$$

con

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_R = \mathbb{i}\ \omega\ L + R$$

Anche per l’induttore possiamo introdurre un termine di impedenza complessa $\mathbb{Z}_L = \mathbb{i}\ \omega\ L$, ed operare nello stesso modo in cui abbiamo fatto per il circuito RC.

Con un po’ di calcoli, risolvendo la precedente equazione, si ottiene

$$\varphi_0\ = \mathrm{atan}\left(\frac{Im\ \mathbb{Z}}{Re\ \mathbb{Z}}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$I_0\ = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\frac{\epsilon_0}{R}}{\sqrt{(\frac{\omega L}{R})^2 + 1}}$$

Alla fine abbiamo ottenuto l'espressione

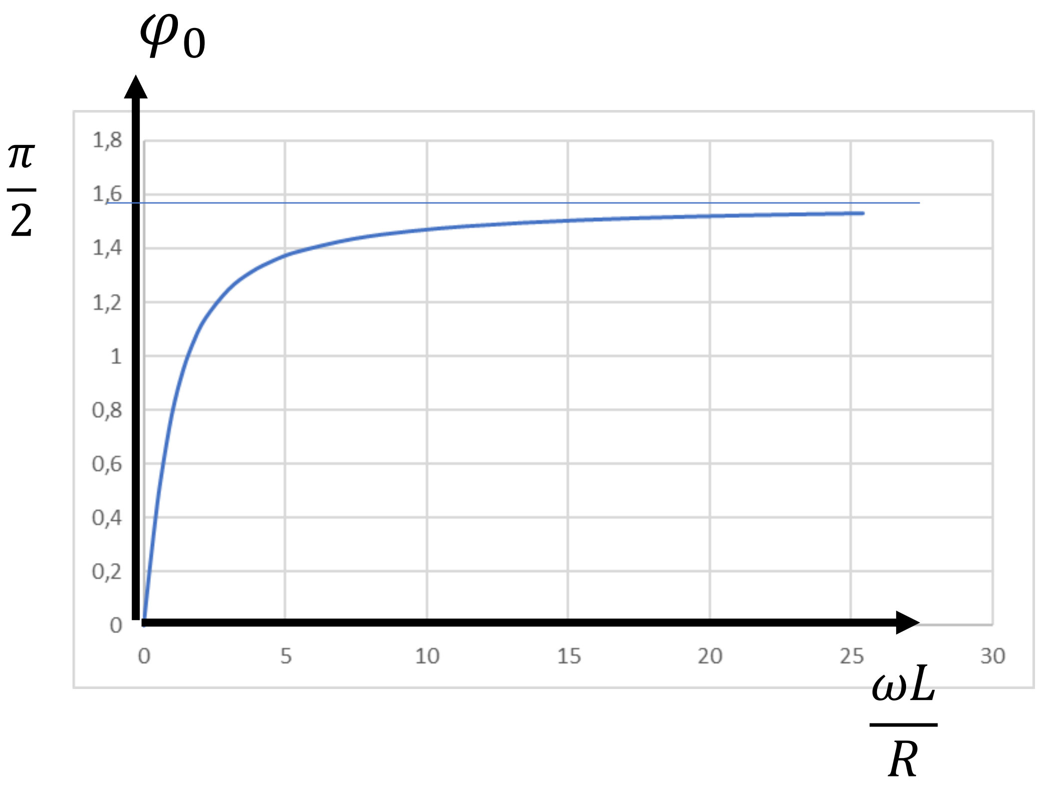
$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

con

$$\varphi_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Esaminiamo come varia la fase φ_0 della corrente, rispetto a quella della tensione ϵ prodotta dal generatore, variando la frequenza angolare ω della tensione erogata da quest'ultimo (Notate come anche $\frac{\omega \mathrm{L}}{R}$ sia adimensionale)

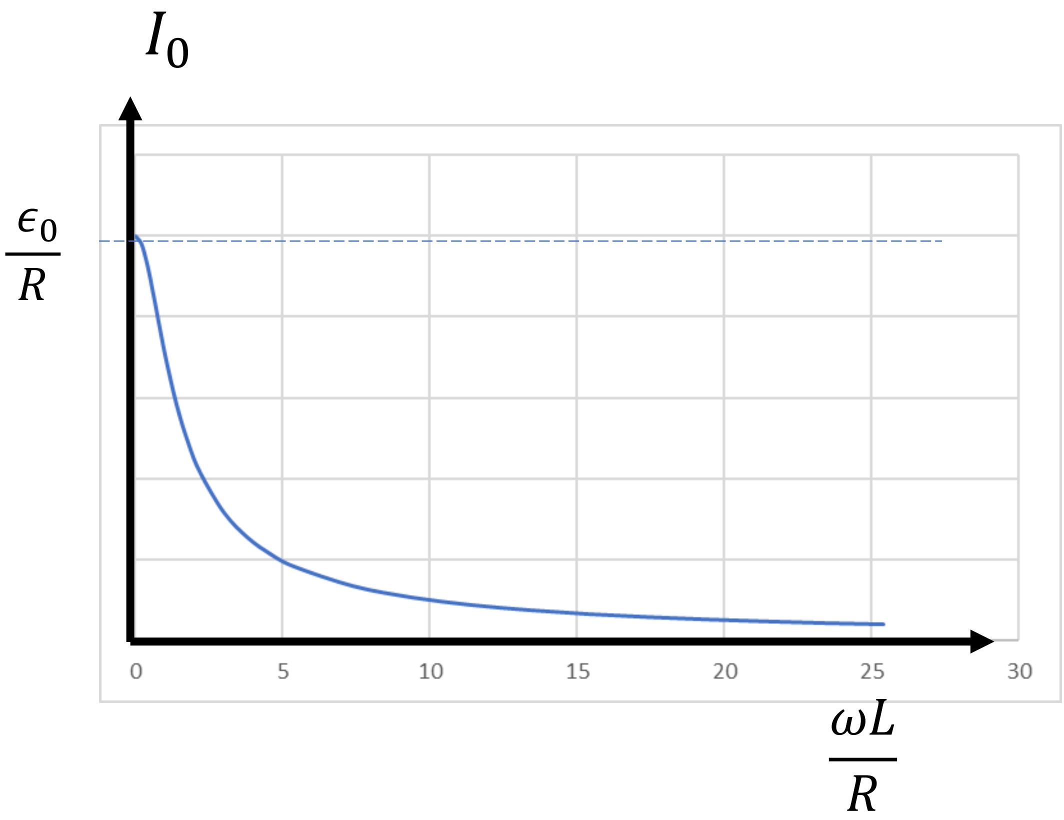
φ_0 parte da un valore pari a 0 quando $\frac{\omega \mathrm{L}}{R}$ tende a 0, mentre φ_0 tende a $\frac{\pi}{2}$ quando $\frac{\omega \mathrm{L}}{R}$ tende all'infinito.



$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Esaminiamo ora come varia l'ampiezza dell'oscillazione della corrente, sempre in funzione di $\frac{\omega \mathrm{L}}{R}$

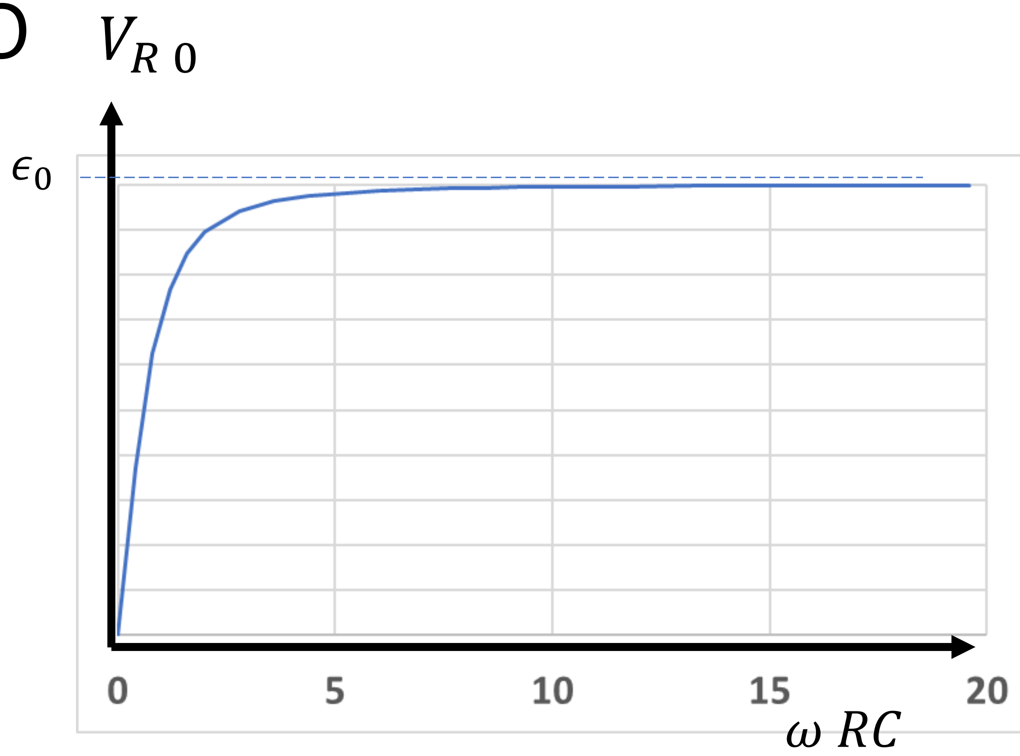
$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\frac{\epsilon_0}{R}}{\sqrt{(\frac{\omega L}{R})^2+1}}$$



Per $\frac{\omega L}{R}$ tendente a 0 abbiamo un valore massimo $I_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$ per la corrente di picco, mentre per $\frac{\omega L}{R}$ tendente ad infinito, I_0 tende a 0 ($\frac{\epsilon_0}{R}$ è ancora il valore della corrente in un circuito con la sola resistenza R).

Filtri passa basso e passa alto

il circuito RC in serie



Esaminando il circuito RC abbiamo ottenuto che la corrente circolante nel circuito aumenta all’aumentare della frequenza angolare ω.

Ciò significa che il segnale in tensione sul resistore aumenta all’aumentare di ω.

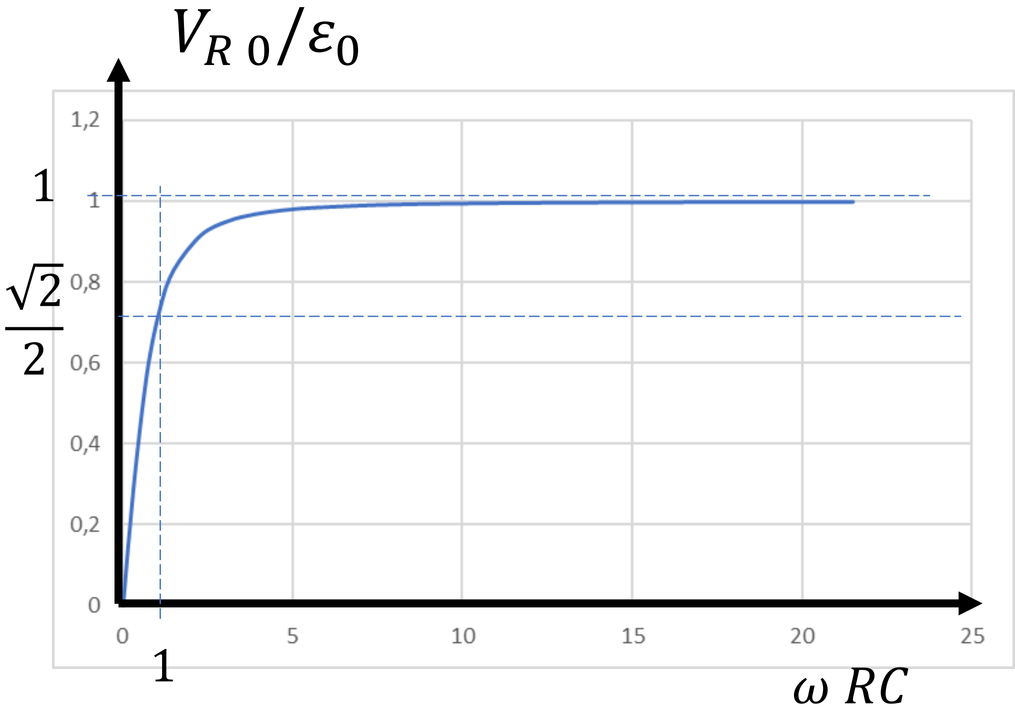
Considerando il valore di picco della tensione sul resistore abbiamo

$$V_{R\,0} = R\, I_0 = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}\,\epsilon_0$$

$$V_{R\,0} = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \epsilon_0$$

Dalla figura si vede come il segnale sul resistore viene fortemente depresso per bassi valori di ωRC.

Viene così realizzato il cosiddetto **filtro passa-alto**: i segnali con una frequenza angolare inferiore ad un valore di **soglia** ω_0 vengono eliminati, mantenendoli invece per valori maggiori della soglia (con qualche attenuazione del segnale).

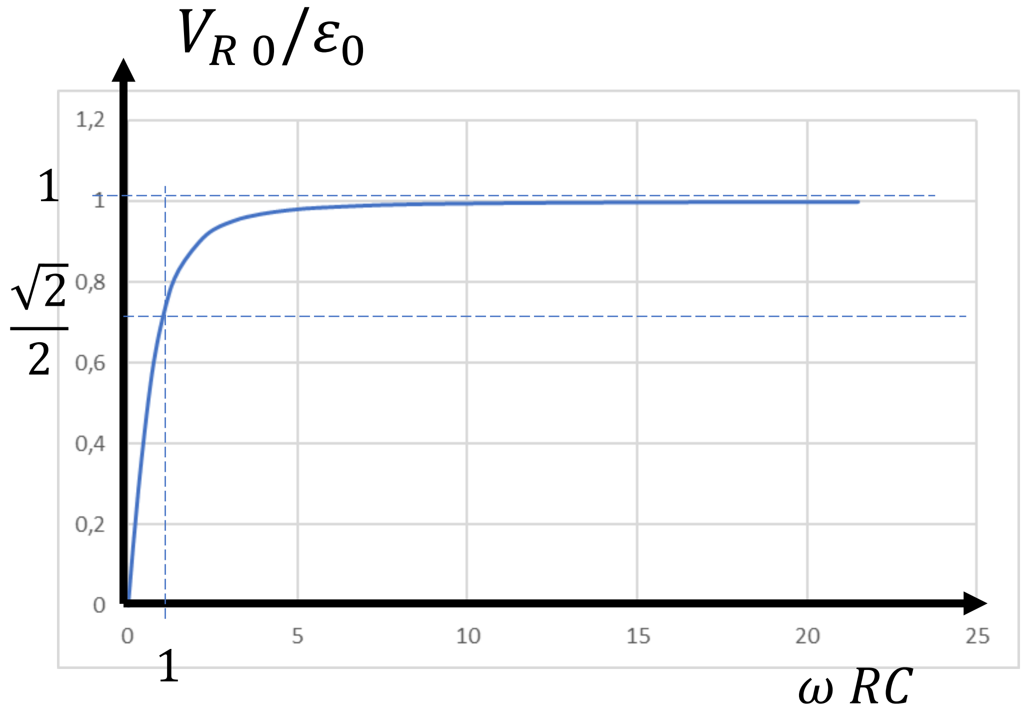


Per convenzione il valore di soglia ω_0 è fissato in modo tale che $\frac{V_{R\,0}}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Il rapporto $\frac{V_{R\,0}}{\varepsilon_0}$ viene chiamato guadagno del filtro.

Una nota: si sceglie un valore di guadagno $\frac{V_{R\,0}}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ come valore per determinare la soglia ω_0, perché per questo valore di guadagno la potenza associata al segnale è pari alla metà di quella massima.



Infatti, dalla definizione di potenza

$$P = V\ I$$

nel caso del resistore abbiamo $P = V^2/R$

P dipende quindi dal quadrato di V. La potenza di picco P_0 sarà allora

$$P_0 = \frac{{V_{R\,0}}^2}{R}$$

e quindi si riduce di un fattore 2 quando $\frac{V_{R\,0}}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

In maniera analoga si può analizzare il **segnale in tensione ai capi del condensatore**.

Un modo semplice di calcolare il valore di picco della potenza del segnale sul condensatore è quello di effettuare il calcolo con le grandezze complesse e poi prenderne il modulo

$$\mathbb{V}_C = \frac{\mathbb{Q}}{C} = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{i}\omega C}$$

(poiché $\mathbb{I} = \frac{d\mathbb{Q}}{dt} = \mathbb{i}\omega\mathbb{Q}$)

Il valore di picco sarà

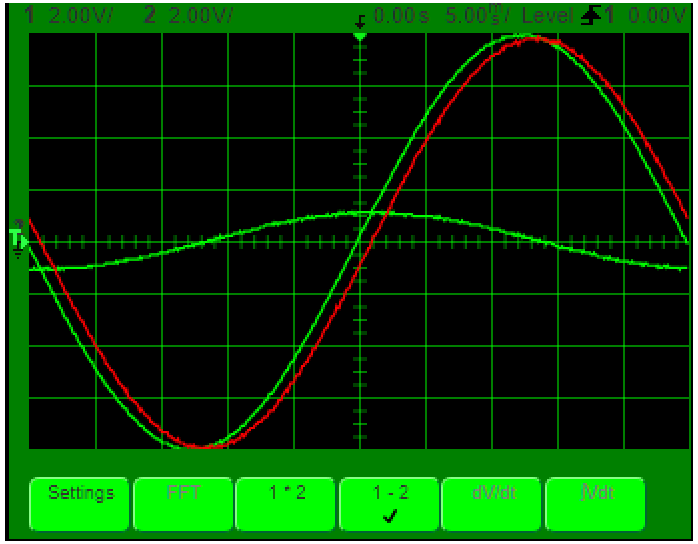
$$V_{C\,0} = |\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{i}\omega C}| = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\varepsilon_0$$

Nelle schermate dell'oscilloscopio riportate accanto vediamo i due casi limite, per $\omega\, RC \ll 1$ e per $\omega\, RC \gg 1$.

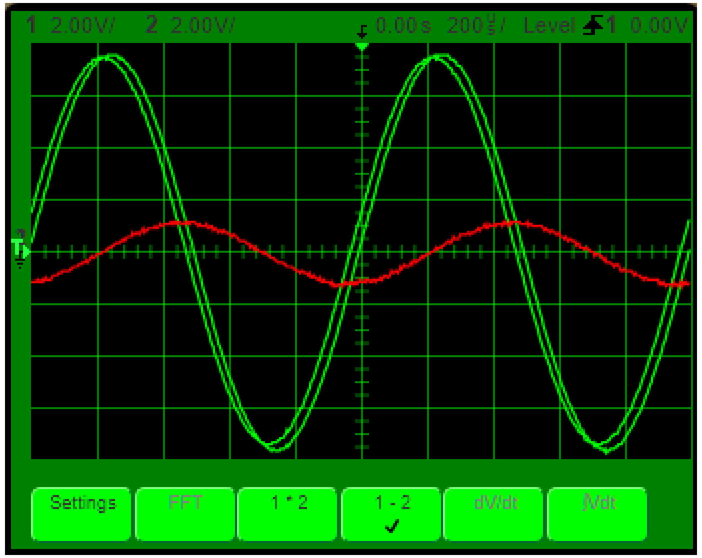
Come nelle precedenti schermate, il segnale del generatore è quello della traccia verde con tensione nulla all'istante t = 0, mentre l'altra traccia verde si riferisce al segnale sul resistore. La traccia in rosso è la differenza tra i due segnali.

Vediamo che per $\omega\, RC \ll 1$ il segnale sul condensatore praticamente coincide con quello del generatore, con un piccolo ritardo.

Per $\omega\, RC \gg 1$ invece il segnale sul condensatore è fortemente depresso, con un ritardo circa pari ad un quarto di periodo.



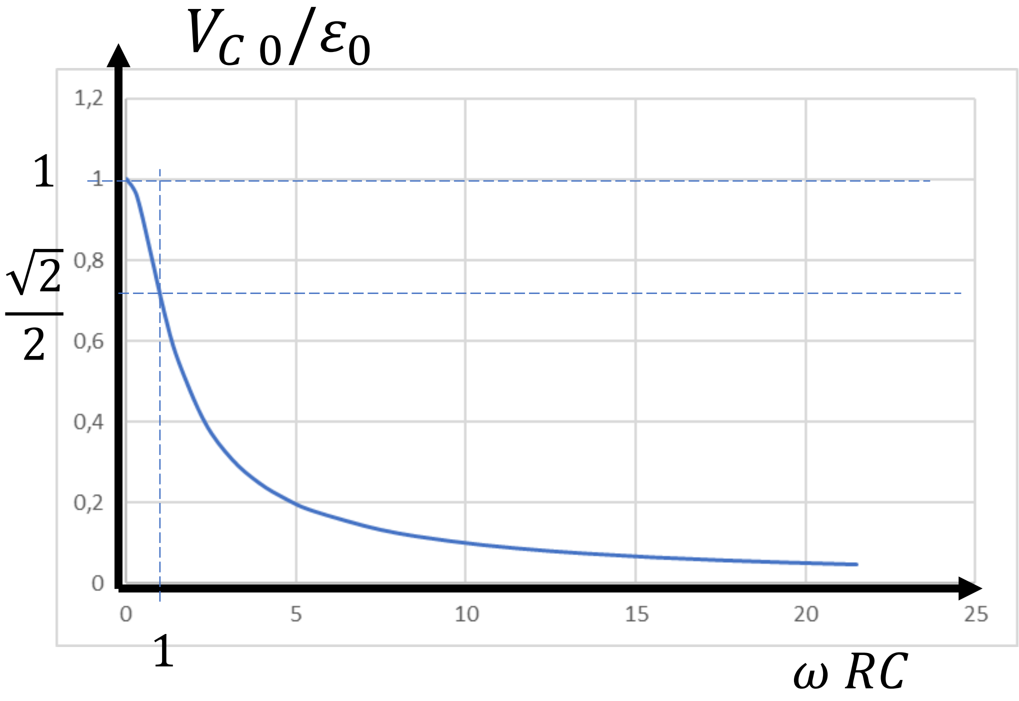
$\omega\, RC \cong 0.126$



$\omega\, RC \cong 6.28$

$$V_{C\,0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}\varepsilon_0$$

Riportando i valori di picco del segnale sul condensatore in funzione di $\omega\, RC$, otteniamo il grafico accanto.



In questo caso viene realizzato un **filtro passa-basso**: vengono attenuanti i segnali di frequenza angolare superiore al valore di taglio

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

mentre quelli di frequenza inferiore sopravvivono.

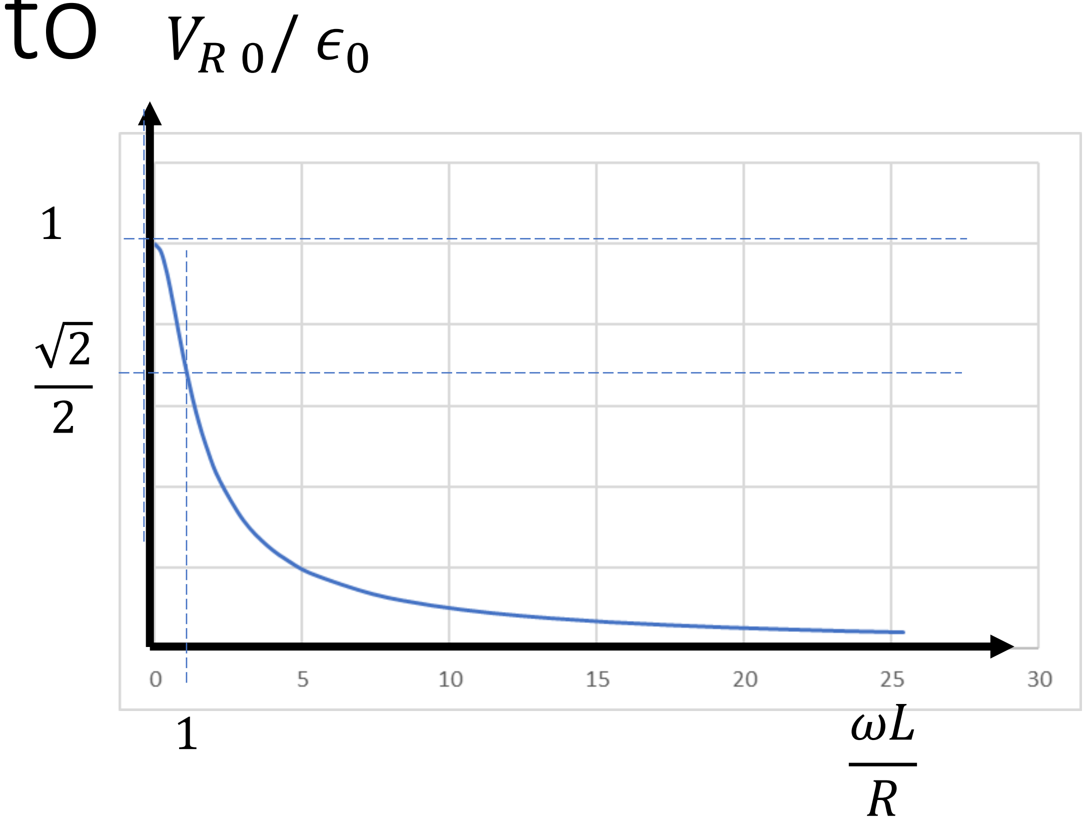
Filtri passa basso e passa alto

il circuito RL in serie

Anche col **circuito RL in serie** si possono realizzare filtri passa-basso e passa-alto.

Consideriamo il risultato che abbiamo ottenuto per il valore di picco della corrente e calcoliamo il valore di piccolo del segnale sul resistore

$$V_{R\,0} = R\,I_0 \;= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{(\frac{\omega L}{R})^2+1}}$$



Ciò significa che **il segnale in tensione sul resistore** diminuisce all’aumentare di ω: considerando tale segnale abbiamo un **filtro passa-basso**, con una frequenza angolare di soglia pari a

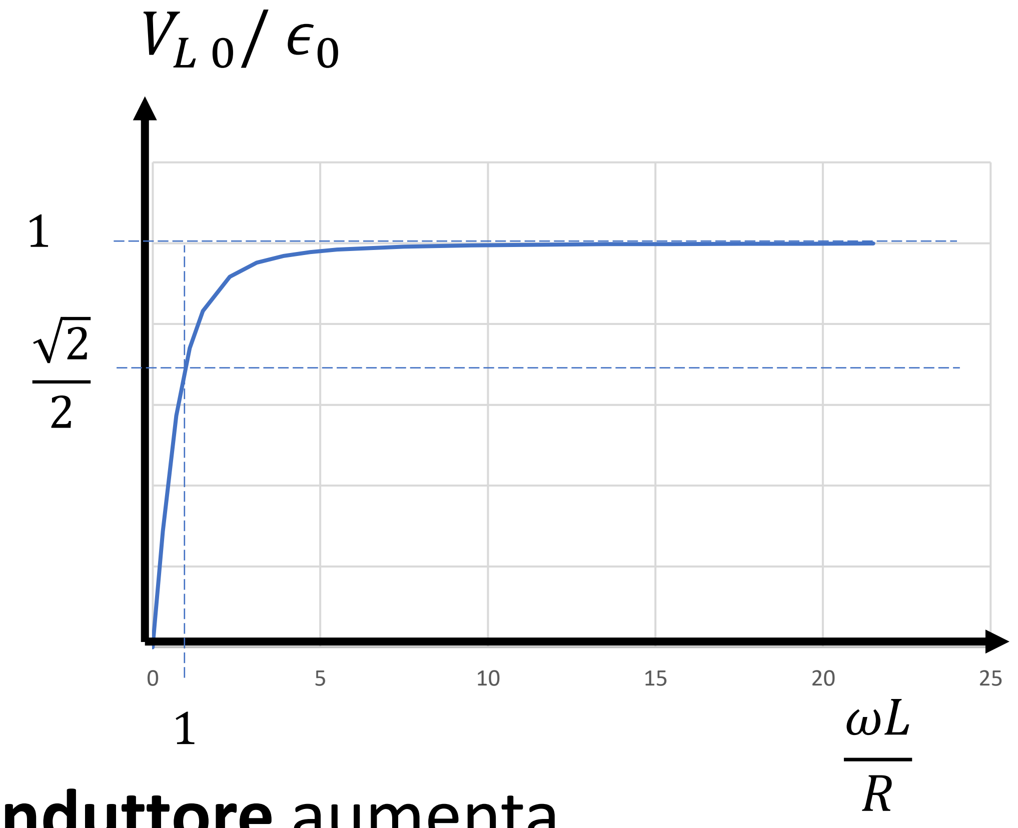
$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

Per quanto riguarda il segnale in tensione sull'induttore, si ottiene (i dettagli in tonalità sfumati non sono da ricordare!)

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\,Re\left(\frac{d\mathbb{I}}{dt}\right) = L\,Re(\mathbb{i}\omega\mathbb{I})$$

Prendendo il valore di picco avremo

$$V_{L\,0} = L|\mathbb{i}\omega\mathbb{I}| = L\,\omega I_0 = \frac{\frac{\omega L}{R}}{\sqrt{(\frac{\omega L}{R})^2+1}}\,\epsilon_0$$



Ciò significa che **il segnale in tensione sull'induttore** aumenta all'aumentare di ω: considerando tale segnale abbiamo un **filtro passa-alto**, con una frequenza angolare di soglia pari a

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

Riassumiamo i risultati in una tabella

	Segnale su R	Segnale su C (o L)	ω_0 di soglia
Circuito RC in serie	Filtro passa-alto	Filtro passa-basso	1/RC
Circuito RL in serie	Filtro passa-basso	Filtro passa-alto	R/L

Ci possiamo porre la domanda: se consideriamo un circuito in cui sono presenti contemporaneamente R, L, C, realizziamo ancora un filtro di qualche tipo?

Circuiti risonanti

Consideriamo un circuito RLC in serie in corrente alternata, come in figura

L'impedenza complessiva del circuito è data da

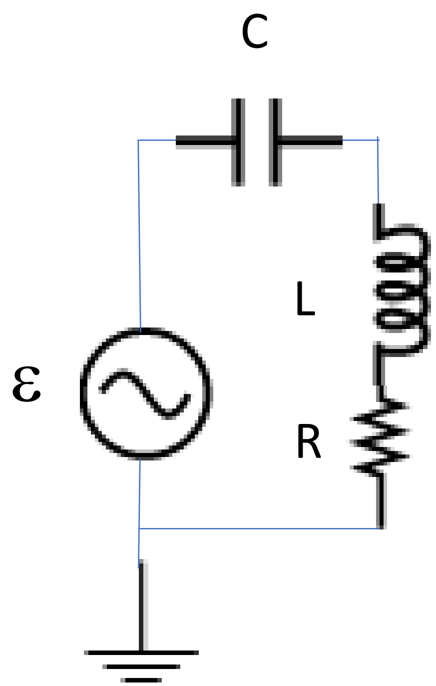
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_C + \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_R = -\frac{\mathbb{i}}{\omega C} + \mathbb{i}\,\omega\, L + R$$

e l'equazione complessa del circuito è

$$\mathbb{Z}\,\mathbb{I} = \epsilon_0 \exp(\mathbb{i}\,\omega t)$$

La corrente di picco (l'ampiezza dell'oscillazione della corrente nel tempo) risulta essere

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega\, L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$



Consideriamo il segnale in tensione sul resistore: avrà un valore di picco

$$V_{R\,0} = RI_0 = R\frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega\, L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 + (\frac{L}{R})^2(\omega - \frac{1}{\omega LC})^2}}$$

In questa espressione vi è un parametro importante, chiamato frequenza (angolare) di risonanza ω_0

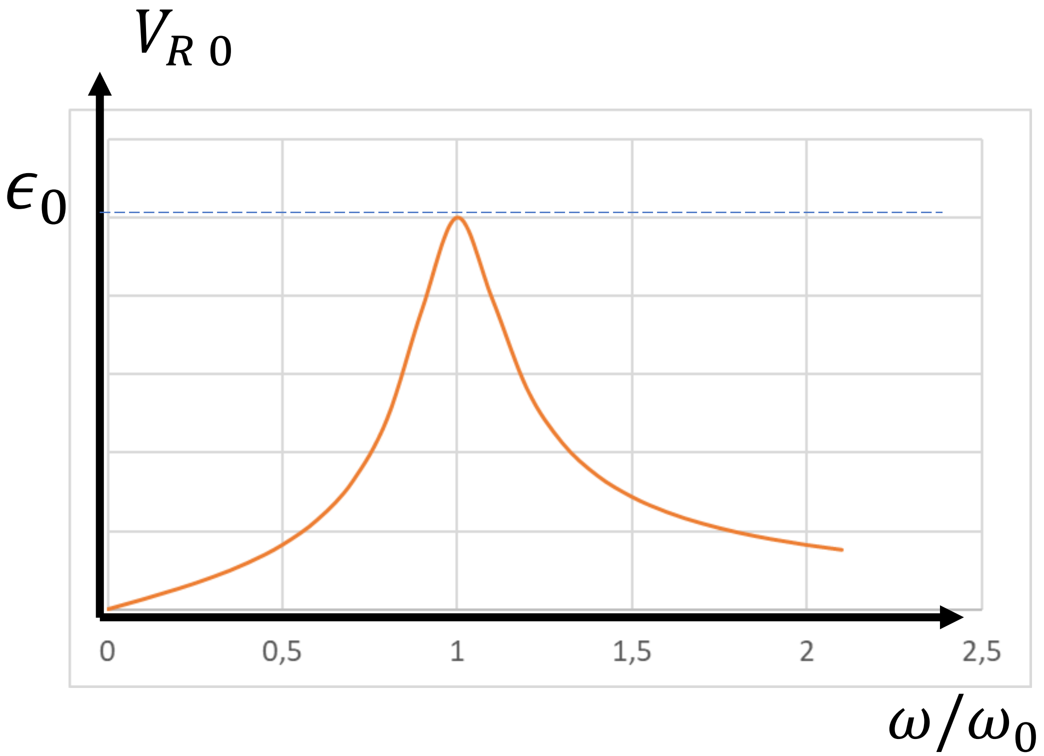
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Per $\omega = \omega_0$ nella radice al denominatore dell’espressione per $V_{R\,0}$ il secondo addendo si annulla e quindi la frazione assume il valore massimo

Sostituendo LC con ω_0 nell'espressione di $V_{R\,0}$ e riarrangiando i termini otteniamo

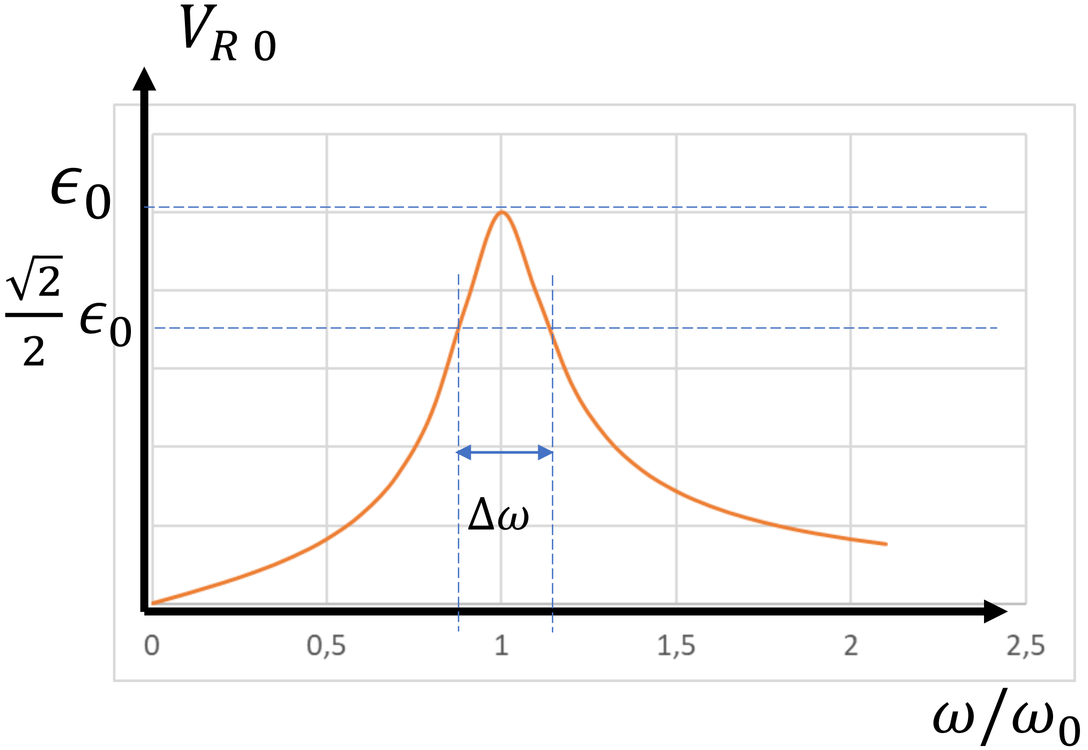
$$V_{R\,0} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R})^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

Il segnale risulta quindi avere un valore massimo ϵ_0 per $\omega = \omega_0$e decresce sia per $\omega < \omega_0$ che per $\omega > \omega_0$.



Il circuito realizza il cosiddetto **filtro passa banda**, in cui i segnali con una frequenza angolare ω al di fuori di un intervallo centrato sulla frequenza di risonanza ω_0 vengono depressi

La larghezza della banda passante $\Delta\omega$ del filtro può essere definita chiedendo che ai suoi estremi il segnale sia pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_0$.



Ciò implica che nell'espressione

$$V_{R\,0} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

si deve imporre la condizione

$$(\frac{\omega_0 L}{R})^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 = 1$$

oppure

$$\frac{\omega_0 L}{R}(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = \pm 1$$

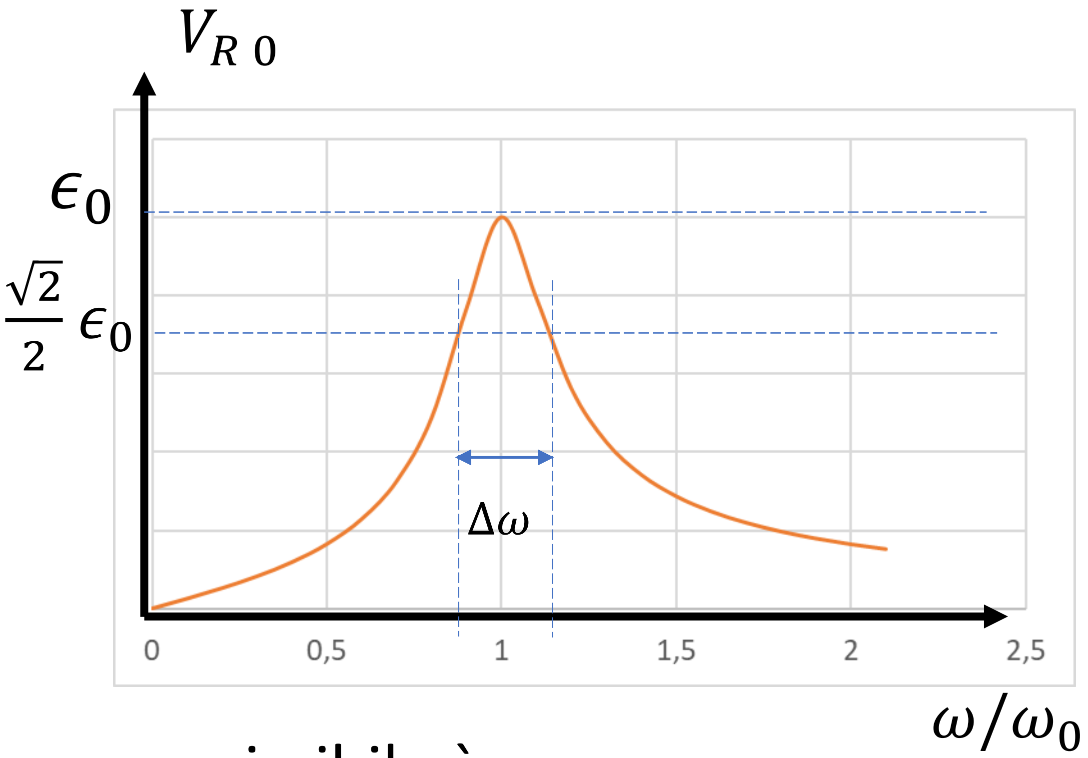
$$\frac{L}{R}\,\omega^2 \mp \omega - \frac{{\omega_0}^2 L}{R} = 0$$

$$\frac{L}{R}\,\omega^2 \mp \omega - \frac{{\omega_0}^2 L}{R} = 0$$

Per discutere le soluzioni di questa equazione, esaminiamo dapprima il caso $\mp = +$.

Poiché ω deve essere positivo, l'unica soluzione ammissibile è

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}{2L/R}$$



Nel caso in cui invece $\mp = -$, l'unica soluzione ammissibile è

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}{2L/R}$$

Complessivamente, la differenza tra le due soluzioni risulterà

$$\Delta\omega = 2\,\frac{1}{2L/R} = \frac{R}{L}$$

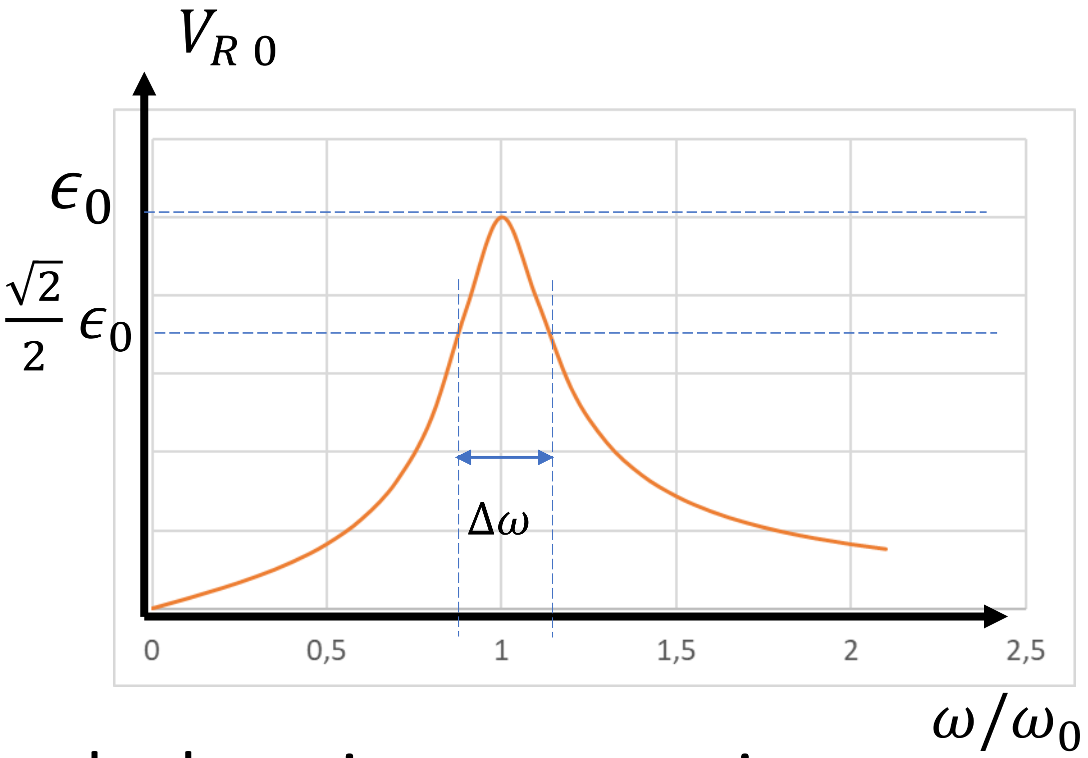
Riassumendo: il filtro passa banda realizzato con un circuito RCL in serie ha

- Una frequenza di risonanza pari a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Una larghezza di banda pari a

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

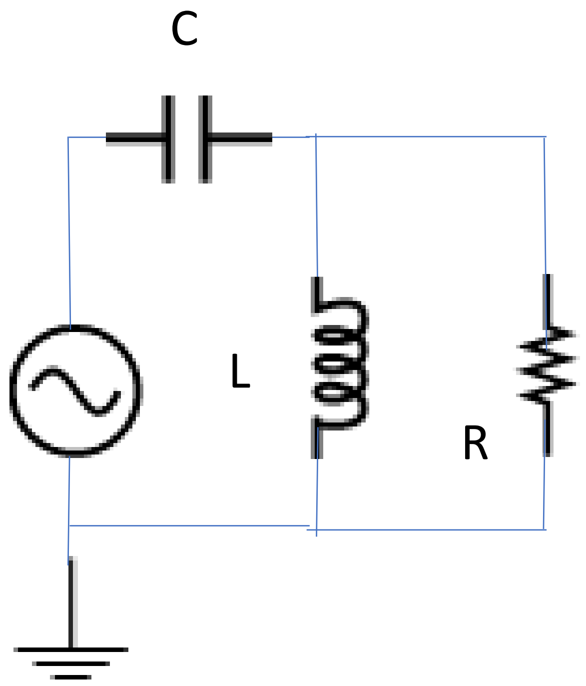


Una nota: nella teoria esposta si suppone che la resistenza propria dell'induttore sia trascurabile rispetto a quella del resistore inserito nel circuito.

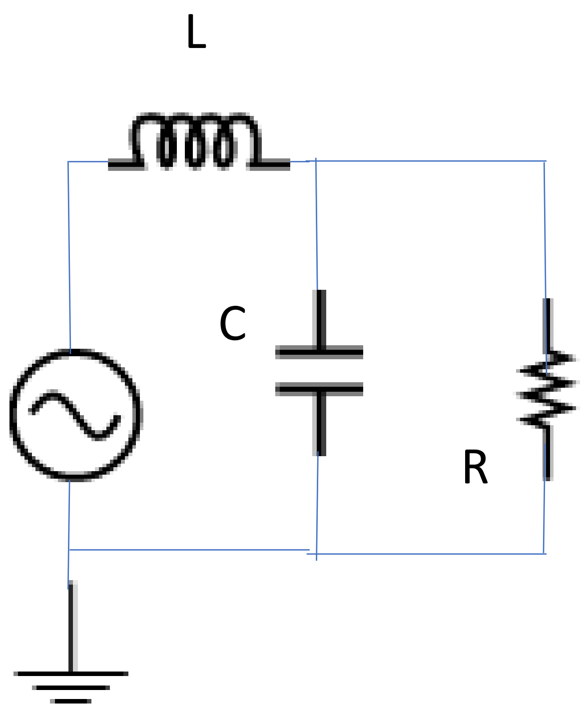
Se così non fosse, viene meno la relazione che fornisce la larghezza della banda $\Delta\omega$, dovendosi tener conto anche della resistenza dell'induttore.

Il circuito RLC in serie è solo uno dei circuiti realizzabili con queste componenti.

Ad esempio, è possibile realizzare il circuito in figura. Analizzandolo in corrente alternata, si ottiene che il segnale sul resistore ha le caratteristiche di un filtro passa-alto (questo perché la f.e.m. nell’induttore è tanto maggiore quanto maggiore è la variazione della corrente nel tempo. Il resistore, in parallelo all’induttore, si trova alla stessa sua tensione).



Viceversa, scambiando il condensatore con l’induttore, si ottiene sul resistore un segnale che è tipico di un filtro passa-basso (questo perché per basse frequenze il condensatore ha il tempo di caricarsi fino ad alti valori di tensione. Il resistore, in parallelo al condensatore, si trova alla stessa sua tensione).



ATTENZIONE

A causa di un aggiornamento del software di gestione del laboratorio remoto, non è più possibile utilizzare induttori nei circuiti (o meglio è possibile, ma solo con un numero limitato di circuiti e parametri predefiniti).

Questo per aggiungere una salvaguardia ai componenti circuitali, che a causa dei possibili grandi valori di f.e.m. generata dagli induttori, rischiano di essere danneggiati.

È possibile che in un prossimo futuro questa funzionalità venga recuperata almeno per i circuiti in corrente alternata: in ogni caso, considerate gli induttori off-limits.