SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{R}$

SPAZIO VETTORIALE SUI REALI

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è costituito da un insieme V non vuoto (l'insieme dei *vettori*) con due operazioni: la somma $u + v$ fra vettori e il prodotto av fra uno scalare a (elemento di $\mathbb{R}$) e un vettore v. Queste operazioni devono soddisfare, per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cc} u + v = v + u & (a+b)v = av + bv \\ u + (v + w) = (u + v) + w & a(u+v) = au + av \\ \vec{0} + v = v & a(bv) = (ab)v \\ v + (-1v) = \vec{0} & 1v = v \end{array}$$

(il vettore $-1v$ si indica più semplicemente con $-v$).

ESEMPI

Sono esempi di spazi vettoriali reali:

- fissato $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari che abbiamo visto nelle lezioni precedenti;
- fissati $n, m \in \mathbb{N}$, l'insieme $MAT_{n\times m}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times m$ a coefficienti reali con la somma fra matrici e il prodotto per reali visti nelle lezione precedenti;
- l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali, con l'usuale somma e prodotto per un numero reale;
- fissato $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad n, con l'usuale somma e prodotto per un numero reale;

Combinazioni Lineari

In questo corso studieremo principalmente gli spazi vettoriali di tipo $\mathbb{R}^n$, ma molte delle considerazioni che faremo sono valide per un generico spazio vettoriale.
Ad esempio, la definizione di combinazione lineare si può dare in un qualsiasi spazio vettoriale sui reali.

COMBINAZIONI LINEARI

Dati i vettori $v_1, \dots, v_k$ di uno spazio vettoriale V, l'insieme delle loro combinazioni lineari si indica con $SPAN(v_1, \dots, v_k)$ ed è definito da:

$$SPAN(v_1, \dots, v_k) = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

Lemma (PRIME PROPRIETÀ)

1. *I vettori $v_1, \dots, v_k$ appartengono all'insieme $SPAN(v_1, \dots, v_k)$, per ogni $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.*
2. *per ogni $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_h \in \mathbb{R}^n$:*

$$SPAN(v_1, \dots, v_k) \subseteq SPAN(w_1, \dots, w_h) \quad \Leftrightarrow \quad v_1, \dots, v_k \in SPAN(w_1, \dots, w_h).$$

3. *L'insieme $SPAN(v_1, \dots, v_k)$ è chiuso per combinazioni lineari, per ogni $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$:*

se $w_1, \dots, w_h \in SPAN(v_1, \dots, v_k)$ e $s_1, \dots, s_h \in \mathbb{R}$ allora

$$s_1 w_1 + \dots + s_h w_h \in SPAN(v_1, \dots, v_k).$$

Dimostrazione lasciata per esercizio.

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) = \{(0, t, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) = \{(0, t, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, e_2) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) = \{(0, t, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, e_2) = \{(t, s, \dots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) = \{(0, t, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, e_2) = \{(t, s, \dots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, \dots, e_n) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$SPAN(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_2) = \{(0, t, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, e_2) = \{(t, s, \dots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$SPAN(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$$

Sottospazi Vettoriali

Definizione

Un sottoinsieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V che è chiuso per combinazioni lineari si dice un sottospazio (vettoriale) di $\mathbb{R}^n$. In altre parole, W è un sottospazio di V se è non vuoto e
- $v_1, \ldots, v_k \in W \;\; t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \Rightarrow t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k \in W$, dove le operazioni sono quelle di V.

In particolare

1. un sottospazio è chiuso per somma di vettori e per moltiplicazione di un vettore per uno scalare;
2. se $v \in W$ allora anche $-v = (-1)v \in W$;
3. W è non vuoto e quindi esiste $v \in W$; ne segue $-v \in W$ e $v + (-v) = \vec{0} \in W$. Quindi ogni sottospazio contiene il vettore nullo.

Se W è un sottospazio di V scriveremo $W \leq \mathbb{V}$

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V allora $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazo di V (in questo caso si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ *generano* W).
- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, ivi compreso $\mathbb{R}^n = SPAN(e_1, \ldots, e_n)$.

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V allora $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazo di V (in questo caso si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ *generano* W).
- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, ivi compreso $\mathbb{R}^n = SPAN(e_1, \ldots, e_n)$.
- Esistono spazi vettoriali in cui la precedente proprietà è falsa. Ad esempio, nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ l'intero spazio non può essere generato da un numero finito di vettori, perché...

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.
- Se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V allora $SPAN(v_1, \dots, v_k)$ è un sottospazo di V (in questo caso si dice che i vettori $v_1, \dots, v_k$ *generano* W).
- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = SPAN(v_1, \dots, v_k)$ per $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, ivi compreso $\mathbb{R}^n = SPAN(e_1, \dots, e_n)$.
- Esistono spazi vettoriali in cui la precedente proprietà è falsa. Ad esempio, nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ l'intero spazio non può essere generato da un numero finito di vettori, perché...esistono polinomi di grado arbitrariamente alto, mentre le combinazioni lineari di un numero finito di polinomi hanno grado limitato (dal massimo grado dei polinomi).
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (cioè: la colonna dei termini noti è il vettore nullo) con m incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V allora $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazo di V (in questo caso si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ *generano* W).
- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, ivi compreso $\mathbb{R}^n = SPAN(e_1, \ldots, e_n)$.
- Esistono spazi vettoriali in cui la precedente proprietà è falsa. Ad esempio, nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ l'intero spazio non può essere generato da un numero finito di vettori, perché... esistono polinomi di grado arbitrariamente alto, mentre le combinazioni lineari di un numero finito di polinomi hanno grado limitato (dal massimo grado dei polinomi).
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (cioè: la colonna dei termini noti è il vettore nullo) con m incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.
- L'insieme delle matrici triangolari superiori $n \times n$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $MAT_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Esempi di sottospazi

- In uno spazio vettoriale V ci sono sempre due sottospazi banali: il sottospazio che contiene solo il vettore nullo $W = \{\vec{0}\}$ e quello che contiene tutti i vettori $W = V$.
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V allora $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazo di V (in questo caso si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ *generano* W).
- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, ivi compreso $\mathbb{R}^n = SPAN(e_1, \ldots, e_n)$.
- Esistono spazi vettoriali in cui la precedente proprietà è falsa. Ad esempio, nello spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ l'intero spazio non può essere generato da un numero finito di vettori, perché. . . esistono polinomi di grado arbitrariamente alto, mentre le combinazioni lineari di un numero finito di polinomi hanno grado limitato (dal massimo grado dei polinomi).
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (cioè: la colonna dei termini noti è il vettore nullo) con m incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.
- L'insieme delle matrici triangolari superiori $n \times n$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $MAT_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado $\leq n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esempi di sottospazi in $\mathbb{R}^n$

- Come abbiamo visto, le rette per l'origine degli assi in $\mathbb{R}^n$ sono del tipo $SPAN(v) = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ per un vettore non nullo v. Quindi le rette per l'origine sono sottospazi. Analogamente, un piano per l'origine ($SPAN(v_1, v_2)$ con v_1, v_2 indipendenti) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$).
- Poiché, come abbiamo visto, ogni sottospazio deve contenere il vettore nullo, una retta del piano o dello spazio che non contiene l'origine degli assi non sono sottospazi.

Esempio

Consideriamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere l'insieme delle soluzioni W del sistema con il metodo di Gauss:

$$W = \{ \begin{bmatrix} h \\ k \\ 0 \end{bmatrix} : h, k \in \mathbb{R}\},$$

ovvero, W è un piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad h, k \in \mathbb{R}$$

Si ha $W = SPAN(v_1, v_2)$ con , ad esempio, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, perché

$$SPAN(v_1, v_2) = \{hv_1 + kv_2 : h, k \in \mathbb{R}\} == \{ \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}) : h, k \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{bmatrix} h \\ k \\ 0 \end{bmatrix} : h, k \in \mathbb{R}\} = W.$$

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.
Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss otteniamo che W è un piano per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = h + k \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Troviamo $v_1, \ldots, v_k$ di W tale che $SPAN(v_1, \ldots, v_k) = W$.
In questo caso è facile convincersi che i vettori cercati sono, ad esempio,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

perché

$$SPAN(v_1, v_2) = \{hv_1 + kv_2 : h, k \in \mathbb{R}\} == \{ \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix} : h, k \in \mathbb{R}\} = W.$$

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.
Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss otteniamo che W è una retta per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2t \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Avremo quindi $W = SPAN(v)$ per $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Come abbiamo visto, a volte servono meno di k vettori per generare $SPAN(v_1, \dots, v_k)$:

$$SPAN(e_1, 2e_1) = SPAN(e_1), \quad SPAN(e_1, e_2, e_1 + e_2) = SPAN(e_1, e_2).$$

Inoltre, se

$$SPAN(v_1, \dots, v_k, v) = SPAN(v_1, \dots, v_k) \Leftrightarrow v \in SPAN(v_1, \dots, v_k)$$

Ricordiamo che:

DEFINIZIONE

- Se $v \in SPAN(v_1, \dots, v_k)$ diremo che v dipende linearmente da $v_1, \dots, v_k$.
- I vettori $w_1, \dots, w_h$ si dicono linearmente dipendenti (o dipendenti) se uno di loro dipende linearmente dagli altri (nel caso di un singolo vettore w diremo che è dipendente se $w = \vec{0}$).
- I vettori $w_1, \dots, w_h$ si dicono linearmente indipendenti (o indipendenti) se non sono dipendenti, ovvero se nessuno di loro dipende linearmente dagli altri.

Nota bene: $\vec{0} \in SPAN(v_1, \dots, v_k)$ per ogni $v_1, \dots, v_k$. Quindi i vettori $\vec{0}, v_1, \dots, v_k$ sono sempre dipendenti.

Prime proprietà dei vettori dipendenti di uno spazio vettoriale

La proprietà espressa nel seguente lemma viene spesso usata come definizione di dipendenza di un insieme di vettori.

LEMMA

$v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti se e solo se esistono $t_1, \ldots, t_k$, non tutti nulli, con $t_1 v_1 + \ldots t_k v_k = \vec{0}$.

Nota bene: questo lemma (dimostrazione per esercizio) ci permette di verificare l'indipendenza o meno di un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_k$ nel modo seguente: se A è la matrice che ha come colonne i vettori $v_1, \ldots, v_k$ allora i vettori sono indipendenti se e solo se il sistema $Ax = \vec{0}$ ha come unica soluzione il vettore nullo.

Ad esempio, considerando i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ed il sistema $Ax = \vec{0}$, dove A ha come colonne i vettori v_1, v_2, v_3:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

si trova che l'insieme delle soluzioni è dato da tutti i vettori della forma $\begin{bmatrix} -t \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$. In particolare, il vettore $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è soluzione, quindi $-v_1 + 2v_2 + v_3 = \vec{0}$ e i vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti.

Esercizio

Dimostrare che il rango di una matrice $n \times m$ a scala è uguale al numero di righe non nulle della matrice.

LEMMA

- $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti se e solo se $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ può essere generato da meno di k vettori (anche non appartenenti a $v_1, \ldots, v_k$).
- $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti se $SPAN(v_1, \ldots, v_k)$ non può essere generato da meno di k vettori.

L'implicazione ($\Rightarrow$) viene lasciata per esercizio, mentre vedremo una dimostrazione completa dell'implicazione($\Leftarrow$) più avanti, quando parleremo di basi.

Verifichiamone ora un caso particolare, supponendo che $SPAN(v_1, v_2, v_3) = SPAN(w_1, w_2)$. Se w_1, w_2 hanno la stessa direzione allora i vettori v_1, v_2, v_3 sono tutti sulla stessa retta, quindi sono dipendenti. Se invece w_1, w_2 sono indipendenti, generano un piano. Poiché $SPAN(v_1, v_2, v_3) = SPAN(w_1, w_2)$, vettori v_1, v_2, v_3 non possono avere tutti la stessa direzione e almeno due di loro, ad esempio v_1, v_3 saranno indipendenti e genereranno tutti i vettori del piano, compreso v_2. Quindi v_1, v_2, v_3 sono dipendenti.

LEMMA

Il rango di una matrice è il minimo numero di vettori che serve per generare lo spazio delle righe (o delle colonne).

Dim Se la matrice ha rango h, ha h righe indipendenti e le altre sono combinazioni lineari di queste. Quindi lo spazio generato dalle righe può essere generato da h righe indipendenti ma non da meno di h per il lemma precedente.

Un altro modo per controllare la dipendenza o indipendenza di un insieme di vettori

LEMMA

I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono dipendenti se e solo se possiamo raggiungere tramite le trasformazioni elementari una matrice con una riga nulla partendo dalla matrice che ha come righe i vettori $v_1, \dots, v_k$.
I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti se e solo se possiamo trasformare la matrice che ha per righe i vettori $v_1, \dots, v_k$ in una matrice a scala senza righe nulle.

Dimostrazione Le trasformazioni elementari non cambiano lo spazio generato dalle righe delle matrici . Partendo dalla matrice che ha come righe i vettori $v_1, \dots, v_k$, lo spazio generato dalle righe della matrice raggiunta B è uguale allo spazio generato da $v_1, \dots, v_k$. Se la matrice B ha una riga nulla, lo spazio generato dalle righe della matrice può essere generato dalle righe non nulle, che sono meno di k, quindi da un lemma precedente segue che $v_1, \dots, v_k$ sono dipendenti.
Se invece non raggiungiamo mai una matrice con righe nulle, possiamo arrivare ad una matrice a scala senza righe nulle.
Siccome il rango di una matrice a scala (senza righe nulle) è pari al numero delle sue righe ed è uguale al rango della matrice di partenza, le k righe della matrice di partenza (i vettori $v_1, \dots, v_k$) sono indipendenti.

COROLLARIO

1) Se $k > n$ allora k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono sempre dipendenti.
2) Se A è una matrice $n \times m$ con $n < m$ allora il sistema $Ax = \vec{0}$ ha una soluzione diversa da $x = \vec{0}$ (una soluzione *non banale*).

Dimostrazione 1) La matrice che ha per righe i vettori ha più righe (k) che colonne (n) e mettendo la matrice a scala otterremo sicuramente righe nulle.
2) Le colonne di A sono $m > n$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e quindi sono dipendenti, ovvero, esistono $c_1, \dots, c_m$, non tutti nulli, con

$c_1 A(:,1) + \cdots + c_m A(:,m) = 0$. Ne segue $A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \vec{0}$, quindi il sistema $Ax = \vec{0}$ ha una soluzione non banale.

Esempio

Utilizzando l'ultima proprietà enunciata nella slide precedente, mostriamo che i vettori
$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti.
Trasformando a scala la matrice che ha come righe i vettori otteniamo una matrice a scala senza righe nulle, quindi i vettori sono indipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (R_3 \leftarrow R_3 - (1/2)R_2) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 2

Mostriamo invece che i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono dipendenti.

Consideriamo la matrice che ha per righe i vettori e operiamo con trasformazioni elementari fino a raggiungere una riga nulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota bene: arrivati alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ potevamo già capire che i vettori riga sono dipendenti perché abbiamo due righe uguali.

ESERCIZIO

Determinare se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti:

1. $v_1 = e_1, \ldots, v_n = e_n$;
2. $v_1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, $v_2 = e_2 + e_3 + \ldots + e_n$, $\ldots$, $v_n = e_n$;
3. per $n = 4$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;
4. per $n = 3$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

RICAPITOLAZIONE: Dipendenza e Indipendenza Lineare

Dipendenza

- (definizione di dipendenza lineare): I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste i tale che $v_i \in SPAN(v_1, \ldots, \cancel{v_i}, \ldots v_k)$;
- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste i tale che

$$SPAN(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = SPAN(v_1, \ldots, \cancel{v_i}, \ldots v_k)$$

- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste un vettore $v \in SPAN(v_1, \ldots v_k)$ che si scrive in due modi diversi come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$.
- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono dipendenti se $\vec{0}$ che si scrive in due modi diversi come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$.

Indipendenza

- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono indipendenti se e solo se per ogni i $v_i \notin SPAN(v_1, \ldots, \cancel{v_i}, \ldots v_k)$;
- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono indipendenti se e solo se per ogni i vale

$$SPAN(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \neq SPAN(v_1, \ldots, \cancel{v_i}, \ldots v_k)$$

- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono indipendenti se e solo sse ogni vettore $v \in SPAN(v_1, \ldots v_k)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$.
- I vettori $v_1, \ldots v_k$ sono indipendenti se se, dati $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ si ha: $t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = \vec{0}$ implica $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- l'insieme di vettori $\{v\}$ è dipendente se e solo se $v = \vec{0}$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- l'insieme di vettori $\{v\}$ è dipendente se e solo se $v = \vec{0}$.
- Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti, allora ogni loro SOTTOINSIEME non vuoto è ancora indipendente, ovvero

L'INDIPENDENZA SI TRASMETTE AI SOTTOINSIEMI

Ad esempio, se v_1, v_2, v_3, v_4 sono indipendenti, allora v_2, v_4 sono indipendenti: se $\lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4 = \vec{0}$ allora anche $0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \lambda_4 v_4 = \vec{0}$ e dall'indipendenza di v_1, v_2, v_3, v_4 segue $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- Se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti, allora ogni loro SOPRAINSIEME è ancora dipendente, ovvero

LA DIPENDENZA SI TRASMETTE AI SOPRAINSIEMI.

- La dipendenza, in generale, non si trasmette ai sottoinsiemi: se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, allora $\{v_1, v_2\}$ sono dipendenti, ma, ad esempio, $\{v_1\}$ non è un insieme di vettori dipendenti.
- L'indipendenza, in generale, non si trasmette ai sovrainsiemi:

  se $v_1 v_2$ sono i vettori del punto precedente, allora $\{v_1\}$ è un insieme di vettori indipendenti, mentre l'insieme $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di vettori dipendenti.

Base di uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE: BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dato uno spazio vettoriale V un insieme B di vettori si dice una base di V se:

1. I vettori di B sono indipendenti.
2. I vettori di B generano V, ovvero $SPAN(B) = V$.

Ad esempio, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Se consideriamo lo spazio $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base?

Base di uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE: BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dato uno spazio vettoriale V un insieme B di vettori si dice una base di V se:

1. I vettori di B sono indipendenti.
2. I vettori di B generano V, ovvero $SPAN(B) = V$.

Ad esempio, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Se consideriamo lo spazio $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base? Una base è data dalle matrici $n \times m$ con un solo coefficiente uguale ad 1 e gli altri coefficienti nulli.

Se consideriamo lo spazio $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi a coefficienti reali con grado minore o uguale ad n, cosa possiamo prendere come base?

Base di uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE: BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dato uno spazio vettoriale V un insieme B di vettori si dice una base di V se:

1. I vettori di B sono indipendenti.
2. I vettori di B generano V, ovvero $SPAN(B) = V$.

Ad esempio, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Se consideriamo lo spazio $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base? Una base è data dalle matrici $n \times m$ con un solo coefficiente uguale ad 1 e gli altri coefficienti nulli.

Se consideriamo lo spazio $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi a coefficienti reali con grado minore o uguale ad n, cosa possiamo prendere come base? Una base è data dai monomi $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$.

Nota bene

- Un insieme infinito di vettori si dice indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.
- Un insieme infinito B di vettori genera V se ogni vettore $v \in V$ si scrive come una combinazione lineare di un numero finito di elementi di B.
- Uno spazio vettoriale ha infinite basi: infatti se i vettori in B formano una base, anche i vettori di B moltiplicaxti per un coefficiente non nullo c formano una base (sono ancora indipendenti e generano lo spazio).
- Se consideriamo lo spazio $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base? Esiste una base con un numero finito di elementi?

Base di uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE: BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dato uno spazio vettoriale V un insieme B di vettori si dice una base di V se:

1. I vettori di B sono indipendenti.
2. I vettori di B generano V, ovvero $SPAN(B) = V$.

Ad esempio, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Se consideriamo lo spazio $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ delle matrici a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base? Una base è data dalle matrici $n \times m$ con un solo coefficiente uguale ad 1 e gli altri coefficienti nulli.

Se consideriamo lo spazio $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi a coefficienti reali con grado minore o uguale ad n, cosa possiamo prendere come base? Una base è data dai monomi $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$.

Nota bene

- Un insieme infinito di vettori si dice indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.
- Un insieme infinito B di vettori genera V se ogni vettore $v \in V$ si scrive come una combinazione lineare di un numero finito di elementi di B.
- Uno spazio vettoriale ha infinite basi: infatti se i vettori in B formano una base, anche i vettori di B moltiplicaxti per un coefficiente non nullo c formano una base (sono ancora indipendenti e generano lo spazio).
- Se consideriamo lo spazio $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali, cosa possiamo prendere come base? Esiste una base con un numero finito di elementi? Non ci sono basi finite. Una base infinita è data dai monomi $\dots, x^n, x^{n-1}, \dots, 1$.

Spazi Vettoriali di dimensione finita

Restringiamoci adesso a spazi vettoriali di dimensione finita ed in particolare a sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Per prima cosa dimostriamo che, come $\mathbb{R}^n$, questi spazi sono sempre generati da un numero finito di vettori.

LEMMA

Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita.

Spazi Vettoriali di dimensione finita

Restringiamoci adesso a spazi vettoriali di dimensione finita ed in particolare a sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Per prima cosa dimostriamo che, come $\mathbb{R}^n$, questi spazi sono sempre generati da un numero finito di vettori.

LEMMA

Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita.

Dim Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, da quanto visto sopra non può contenere più di n vettori indipendenti, perché in $\mathbb{R}^n$ non esistono insiemi di vettori indipendenti con più di n elementi. Sia $m \leq n$ il massimo numero di vettori indipendenti che W può contenere e siano $w_1, \ldots, w_m$ vettori indipendenti in W. Dimostriamo che allora si ha $SPAN(w_1, \ldots, w_m) = W$. Abbiamo $SPAN(w_1, \ldots, w_m) \subseteq W$, perché i vettori w_i sono in W e W è chiuso per combinazioni lineari. Inoltre, se $w \in W$, allora l'insieme dei vettori $\{w, w_1, \ldots, w_m\}$ è dipendente, perché m è il massimo numero di vettori indipendenti di W.
Quindi esistono $c, c_1, \ldots, c_m$ con $cw + c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m = \vec{0}$ e c deve essere non nullo (altrimenti i vettori w_i sarebbero dipendenti). Quindi $w = -(c_1/c)w_1 + \cdots - (c_m/c)c_m w_m$ e $w \in SPAN(w_1, \ldots, w_m)$. Quindi $SPAN(w_1, \ldots, w_m) = W$.

Spazi Vettoriali di dimensione finita

Abbiamo già dimostrato che m vettori di $\mathbb{R}^n$, se $m > n$, sono sempre dipendenti (basta considerare la matrice che ha per righe gli m vettori: trasformandola a scala otterremo almeno una riga nulla). Possiamo ora generalizzare questa proprietà a sottospazi di $\mathbb{R}^n$:

LEMMA

Se $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ è una base di W allora, se $m > k$, m vettori di W sono sempre dipendenti e ogni altra base di W ha k elementi.

Spazi Vettoriali di dimensione finita

Abbiamo già dimostrato che m vettori di $\mathbb{R}^n$, se $m > n$, sono sempre dipendenti (basta considerare la matrice che ha per righe gli m vettori: trasformandola a scala otterremo almeno una riga nulla). Possiamo ora generalizzare questa proprietà a sottospazi di $\mathbb{R}^n$:

LEMMA

Se $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di W allora, se $m > k$, m vettori di W sono sempre dipendenti e ogni altra base di W ha k elementi.

Dim Consideriamo m vettori $w_1, \dots, w_m$, con $m > k$. Siccome B è una base di W, ogni w_i si scrive come combinazione lineare dei vettori della base, ovvero $w_i = a_{1,i}v_1 + \cdots + a_{k,i}v_k$. Considerando la matrice $B = [v_1, \dots, v_k]$ (ovvero la matrice che ha come colonne i vettori $v_1, \dots, v_k$) si ha

$$w_i = B \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \end{bmatrix}$$

e la matrice $W = [w_1 \dots w_m]$ si scrive come prodotto BA dove $A = (a_{i,j})$ ha dimensione $k \times m$. La matrice A ha quindi ha meno righe di quante siano le sue colonne. Ne segue che $Ax = \vec{0}$ ha una soluzione non banale $\vec{c} \neq \vec{0}$.
Avremo allora $W\vec{c} = BA\vec{c} = \vec{0}$. Quindi esiste una combinazione non banale delle colonne di W, ovvero dei vettori $w_1, \dots, w_m$ che dà il vettore nullo, Quindi i vettori $w_1, \dots, w_{k+1}$ sono dipendenti.

Dimensione

Se uno spazio vettoriale ha una base finita di cardinalità n, tutte le altre basi hanno la stessa cardinalità.

DIMENSIONE

Se uno spazio vettoriale V ha una base finita, la cardinalità di una sua base si dice dimensione dello spazio e si indica con $dim(V)$.

Esempi:

$\mathbb{R}^n$ ha dimensione

Dimensione

Se uno spazio vettoriale ha una base finita di cardinalità n, tutte le altre basi hanno la stessa cardinalità.

DIMENSIONE

Se uno spazio vettoriale V ha una base finita, la cardinalità di una sua base si dice dimensione dello spazio e si indica con $dim(V)$.

Esempi:
$\mathbb{R}^n$ ha dimensione n,

lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione

Dimensione

Se uno spazio vettoriale ha una base finita di cardinalità n, tutte le altre basi hanno la stessa cardinalità.

DIMENSIONE

Se uno spazio vettoriale V ha una base finita, la cardinalità di una sua base si dice dimensione dello spazio e si indica con $dim(V)$.

Esempi:
$\mathbb{R}^n$ ha dimensione n,

lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione n,

lo spazio delle le matrici $M_{n\times m}$ ha dimensione

Dimensione

Se uno spazio vettoriale ha una base finita di cardinalità n, tutte le altre basi hanno la stessa cardinalità.

DIMENSIONE

Se uno spazio vettoriale V ha una base finita, la cardinalità di una sua base si dice dimensione dello spazio e si indica con $dim(V)$.

Esempi:

$\mathbb{R}^n$ ha dimensione n,

lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione n,

lo spazio delle le matrici $M_{n\times m}$ ha dimensione $n \times m$.

Una retta di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione 1, un piano di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione 2 ecc.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$ formano una base.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$ formano una base.

1. sono indipendenti: infatti

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

quindi se $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ allora $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori
$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ formano una base.

1. sono indipendenti: infatti
$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$
quindi se $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ allora $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.
2. $e_1, \dots, e_n$ generano $\mathbb{R}^n$, perché un vettore qualsiasi $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ si scrive come
$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Base Canonica

$\mathcal{E}_n = [e_1, \ldots, e_n]$ è una base, chiamata *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^n$ È n

TUTTE LE BASI DI $\mathbb{R}^n$ HANNO n VETTORI.

n vettori linearmente indipendenti formano una base

Base Canonica

$\mathcal{E}_n = [e_1, \ldots, e_n]$ è una base, chiamata *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^n$ È n

TUTTE LE BASI DI $\mathbb{R}^n$ HANNO n VETTORI.

n vettori linearmente indipendenti formano una base

Altre basi per $\mathbb{R}^n$. Se U è una matrice $n \times n$ triangolare superiore senza zeri sulla diagonale, i vettori riga (colonna) sono n vettori indipendenti quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$ (un qualsiasi altro vettore deve dipendere da questi).

Coordinate di un vettore rispetto ad una base

Per definire il concetto di coordinate di un vettore rispetto ad una base, abbiamo bisogno di dare un ordine agli elementi della base. Due basi con gli stessi elementi, ma elencate in ordine diverso saranno quindi considerate differenti.

COORDINATE

Se $B = [v_1 \ldots v_n]$ è una base (ordinata) di V e $v \in V$, allora v si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base B. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

definiamo il vettore delle coordinate di v rispetto alla base B come:

$$||v||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Esercizio

Se $V = \mathbb{R}^3$ e $B = [e_1 \, e_2 \, e_3]$ è la base canonica quali sono le coordinate $||v||^B$ del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Coordinate di un vettore rispetto ad una base

Per definire il concetto di coordinate di un vettore rispetto ad una base, abbiamo bisogno di dare un ordine agli elementi della base. Due basi con gli stessi elementi, ma elencate in ordine diverso saranno quindi considerate differenti.

COORDINATE

Se $B = [v_1 \ldots v_n]$ è una base (ordinata) di V e $v \in V$, allora v si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base B. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

definiamo il vettore delle coordinate di v rispetto alla base B come:

$$||v||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Esercizio

Se $V = \mathbb{R}^3$ e $B = [e_1 e_2 e_3]$ è la base canonica quali sono le coordinate $||v||^B$ del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

E se cambiamo base e consideriamo la base $B' = [e_2, e_1, e_3]$?

ESERCIZIO

Sia $W = \{(x, x + y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che i vettori $B = [w_1, w_2]$ dove

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formano una base. Dimostrare che i vettori

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

appartengono a W e trovarne le coordinate rispetto alla base B. Determinare se W è un punto, una retta, un piano o tutto $\mathbb{R}^3$.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

CON MENO DI n VETTORI NON SI PUÒ PER GENERARE UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

CON MENO DI n VETTORI NON SI PUÒ PER GENERARE UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n

n VETTORI INDIPENDENTI IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n FORMANO SEMPRE UNA BASE

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h-k, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h-k, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h-k, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h-k, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

- dimensione 0: perché W non è il sottospazio nullo $\{\vec{0}\}$.

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h-k, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

- dimensione 0: perché W non è il sottospazio nullo $\{\vec{0}\}$.

Quindi W ha dimensione 2, ed è sufficiente considerare due vettori indipendenti in W per formare una base di W. Ad esempio $B = [w_1, w_2]$.

Data una base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, per trovare le coordinate $||v||^B$ del vettore v rispetto alla base B è sufficiente trovare $t_1, \ldots t_k \in \mathbb{R}$ tali che $v = t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k$, perché in questo caso

$$||v||^B = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Esercizi

- Dimostrare che i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formano una base $B = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a tale base.

Esercizi

- Dimostrare che i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formano una base $B = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a tale base.**Risposta:** $||v||^B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$
- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:
$$W = \{(h, h+k, h-k, k) : h, k \in \mathbb{R}\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione.
- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:
$$W = \{(h+k, h+k, h+k) : h, k \in \mathbb{R}\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione.

Esercizi

- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

  $$W = \{(x, y, z) : x + z = 0\}.$$

  Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione. Determinare l'equazione parametrica di tale sottospazio.

  Determinare le coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ rispetto a tale base.