

Matrici come trasformazioni

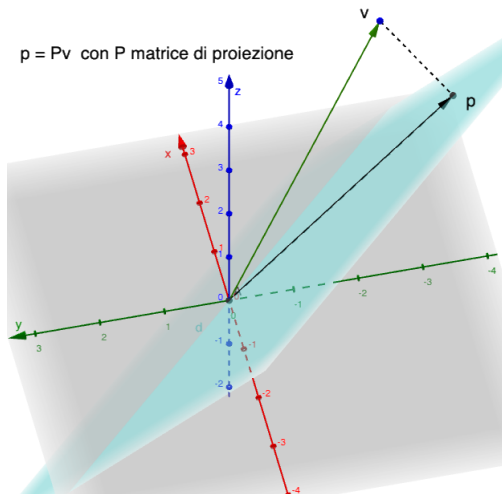
Una matrice A di dimensione $n \times m$ *trasforma* vettori di \mathbb{R}^m in vettori di \mathbb{R}^n tramite moltiplicazione:

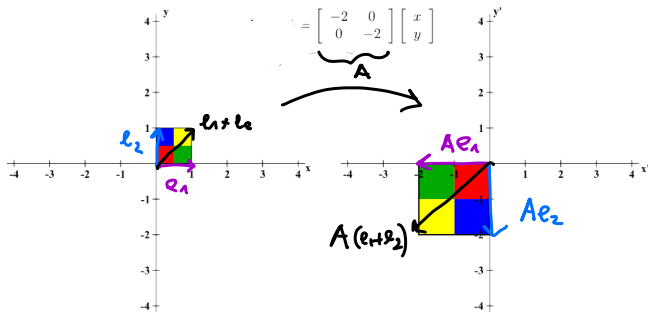
$$v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Av \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, possiamo associare alla matrice A una funzione

$$\begin{array}{rclcl} T_A & : & \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & v & \mapsto & Av \end{array}$$

Esempio: Proiezioni Ortogonali

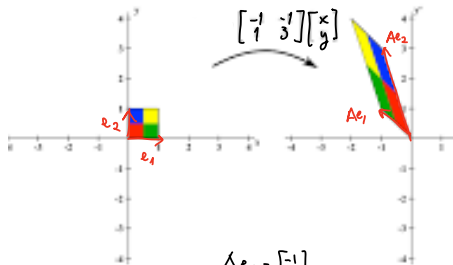




$$Ae_1 = A(-,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ae_2 = A(-,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2$$

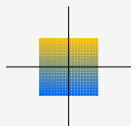


$$Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Example 2.22 (Linear Transformations of Vectors)

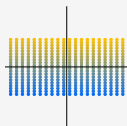
Figure 2.10 Three examples of linear transformations of the vectors shown as dots in (a); (b) Rotation by 45° ; (c) Stretching of the horizontal coordinates by 2; (d) Combination of reflection, rotation and stretching.



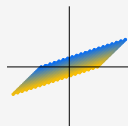
(a) Original data.



(b) Rotation by 45° .



(c) Stretch along the horizontal axis.



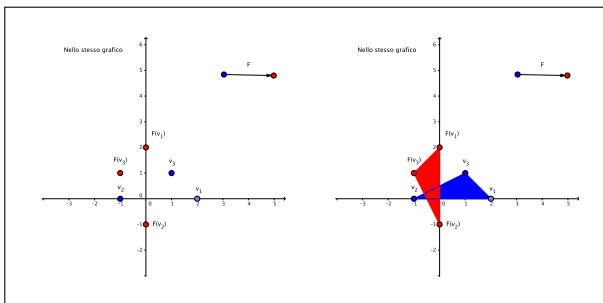
(d) General linear mapping.

We consider three linear transformations of a set of vectors in \mathbb{R}^2 with the transformation matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

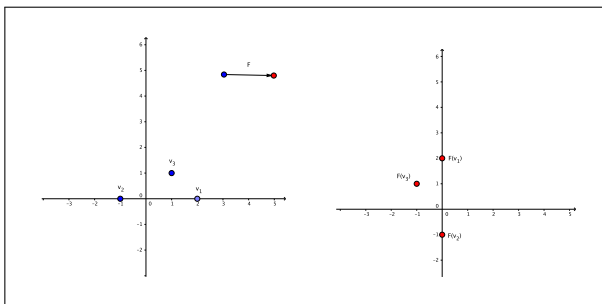
esempio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine:

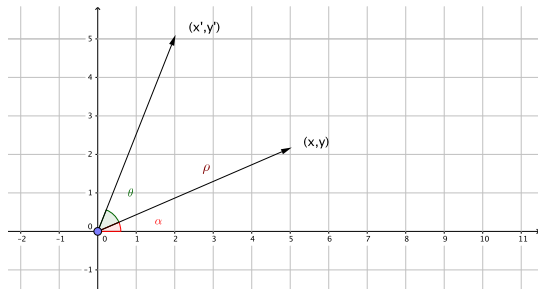


esempio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine (su grafici distinti):



Rotazioni nel piano



$$\begin{cases} x = \rho \cos(\alpha) \\ y = \rho \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \rho \cos(\alpha + \theta) = \rho(\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta)) = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' = \rho \sin(\alpha + \theta) = \rho(\sin(\alpha) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(\alpha)) = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}$$

Rotazioni nel piano

Se

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

allora moltiplicare per la matrice A ha l'effetto di ruotare il vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ di un angolo θ .

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

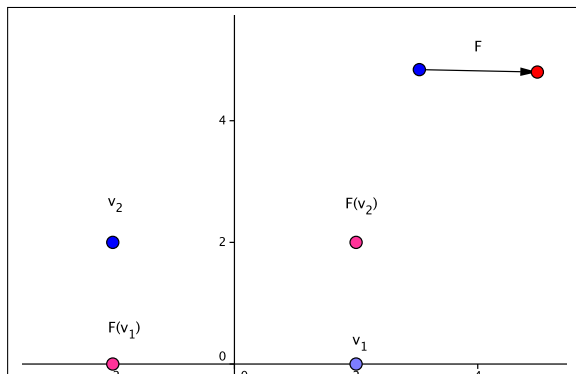
Ad esempio, se $\theta = \pi/4$ allora la matrice di rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario è

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

SIMMETRIE

La simmetria rispetto all'asse y è descritta dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Infatti

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



Esempio

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

allora

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ -y + 2z \end{bmatrix}$$

quindi

$$T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_A(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -y + 2z).$$

Esercizio

Considera le seguenti matrici di \mathbb{R}^2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 1 Per ognuna delle matrici A_i , calcola la funzione $T_{A_i} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- 2 Considera il quadrato unitario di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$ di \mathbb{R}^2 e descrivi l'immagine di tale quadrato tramite T_{A_i} .

Esercizio

Considera le seguenti matrici di \mathbb{R}^2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 1 Per ognuna delle matrici A_i , calcola la funzione $T_{A_i} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- 2 Considera il quadrato unitario di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$ di \mathbb{R}^2 e descrivi l'immagine di tale quadrato tramite T_{A_i} .

Sol. per la matrice A_1 $T_{A_1}(x, y) = (x, -y)$,

$T_{A_1}(A) = (0, 0)$, $T_{A_1}(B) = (1, 0)$, $T_{A_1}(C) = (1, -1)$, $T_{A_1}(D) = (0, -1)$. Il quadrato unitario viene quindi ribaltato rispetto all'asse x dalla funzione T_{A_1} .

Le TRASFORMAZIONI DEFINITE DA MATRICI SONO LINEARI

È facile verificare che la funzione $T_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla matrice A come nella scheda precedente, soddisfa, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $T_A(v + v') = T_A(v) + T_A(v')$,

infatti,

$$A(v + v') = AA v + A v',$$

perché la moltiplicazione fra matrici è distributiva rispetto alla somma.

- $T_A(\lambda v) = \lambda T_A(v)$,

infatti

$$A(\lambda v) = \lambda A v$$

perché gli scalari commutano nella moltiplicazione fra matrici.

TRASFORMAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE

Una funzione $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice una *trasformazione lineare* se vale, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(v + v') = T(v) + T(v'), \quad T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

o, equivalentemente se T rispetta le combinazioni lineari:

$$T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n),$$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

TRASFORMAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE

Una funzione $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice una *trasformazione lineare* se vale, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(v + v') = T(v) + T(v'), \quad T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

o, equivalentemente se T rispetta le combinazioni lineari:

$$T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n),$$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

Sono esempi di trasformazioni lineari, sia nel piano che nello spazio, le rotazioni intorno all'origine, le simmetrie rispetto ad una retta per l'origine, le proiezioni ortogonali su un piano o su una retta, e più in generale, le trasformazioni T_A , per A matrice.

TRASFORMAZIONI LINEARI E MATRICI

Tutte le trasformazioni lineari sono del tipo T_A , dove A è una matrice:

TEOREMA

Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare e A è la matrice di dimensione $n \times m$ che ha come colonne le coordinate i vettori $T(e_1), \dots, T(e_m)$ allora $T = T_A$.

Dim. Dato $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ abbiamo $v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$. Quindi:

$$\begin{aligned} Av = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} &= [T(e_1), \dots, T(e_m)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 T(e_1) + \dots + x_m T(e_m) = \\ &= T(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m) = T(v). \end{aligned}$$

Quindi $T(v) = T_A(v)$ per ogni vettore v e $T = T_A$.

Esercizio

Stabilire quali fra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari; in caso positivo determinare la matrice corrispondente alla trasformazione.

- 1 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(x, y) = (x + y, x, x - y)$;
- 2 $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F(x, y, z) = (x + y + z, \sqrt{2}x + 1)$;
- 3 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $F(x, y) = x + y$;
- 4 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $F(x, y) = (x + y)^2$.

Proprietà delle Trasformazioni Lineari

TEOREMA

- 1 Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
- 2 Se w_1, \dots, w_m sono vettori qualsiasi di \mathbb{R}^n , esiste un'unica trasformazione lineare

$$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che $T(e_1) = w_1 \dots T(e_m) = w_m$, dove e_1, \dots, e_m sono i vettori della base canonica.

Dim. Se A è la matrice che ha per colonne i vettori w_1, \dots, w_m , la trasformazione lineare T_A ha le proprietà richieste.

Composizione e Prodotto di Matrici

Se, compongo le applicazioni lineari relative alle matrici A e B ottengo una trasformazione lineare relativa alla matrice BA

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^k \\ & n \times m & & k \times n & \\ x & \mapsto & Ax & \mapsto & B(Ax) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{BA} & \mathbb{R}^k \\ & k \times m & \\ x & \mapsto & (BA)x \end{array}$$

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$

Esercizio

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare le trasformazioni lineari associate T_A , T_B , calcolare la composizione e verificare che coincide con la trasformazione lineare T_{BA} .

Esercizio

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare le trasformazioni lineari associate T_A, T_B , calcolare la composizione e verificare che coincide con la trasformazione lineare T_{BA} .

Sol.

$$T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_A(x, y, z) = (x + 2y, y - z), \quad T_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_B(x, y) = (-x, x + 3y),$$

$$T_B \circ T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T_B \circ T_A(x, y, z) = T_B(x + 2y, y - z) = (-x - 2y, x + 5y - 3z)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad BA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - 2y \\ x + 5y - 3z \end{bmatrix}$$

Nucleo e Immagine di una trasformazione Lineare

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e la matrice A per cui vale $T = T_A$ possiamo individuare due importanti sottospazi, già visti per la matrice A :

- 1 Il nucleo di T è l'insieme di tutti i vettori del dominio che hanno come immagine il vettore nullo. Corrisponde al nucleo della matrice A per cui vale $T = T_A$. In simboli

$$\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) = \{v \in \mathbb{R}^m : T(v) = \vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R}^m : Av = \vec{0}\}$$

Nucleo e Immagine di una trasformazione Lineare

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e la matrice A per cui vale $T = T_A$ possiamo individuare due importanti sottospazi, già visti per la matrice A :

- 1 Il nucleo di T è l'insieme di tutti i vettori del dominio che hanno come immagine il vettore nullo. Corrisponde al nucleo della matrice A per cui vale $T = T_A$. In simboli

$$\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) = \{v \in \mathbb{R}^m : T(v) = \vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R}^m : Av = \vec{0}\}$$

- 2 L'immagine o "Range" di T , $\text{Range}(T)$ è l'insieme di tutti i vettori del codominio che sono immagine di almeno un elemento del dominio. Corrisponde allo spazio delle colonne della matrice A per cui vale $T = T_A$.

$$\text{Range}(T) = \text{COL}(A) = \{T(v) : v \in \mathbb{R}^m\} = \{Av : v \in \mathbb{R}^m\}$$

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$.

La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$.

La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{0, 3t, t\} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, generato ad esempio dal vettore $(0, 3, 1)$.

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$.

La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolviendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{0, 3t, t\} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, generato ad esempio dal vettore $(0, 3, 1)$. Per quanto riguarda $\text{Range}(T)$ si ha:

$$\text{Range}(T) = \{(x - y + 3z, -x) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Poiché $\text{Range}(T) = \text{Col}(A)$, abbiamo $\dim(\text{Range}(T)) = \dim(\text{Col}(A)) = \text{rg}(A) = 2$. Quindi $\text{Range}(T) = \mathbb{R}^2 = \text{codominio di } T$ e la funzione T è suriettiva,

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (y, x + z, x + z, y)$. La

matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y, x + z, x + z, y) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (y, x + z, x + z, y)$. La

matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y, x + z, x + z, y) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -k \\ z = k \end{cases} \quad \text{per } k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{(-k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, una retta, generata ad esempio dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (y, x + z, x + z, y)$. La

matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y, x + z, x + z, y) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -k \\ z = k \end{cases} \quad \text{per } k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{(-k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, una retta, generata ad esempio dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Per quanto riguarda $\text{Range}(T)$ si ha $\dim(\text{Range}(T)) = \dim(\text{Col}(A)) = 2$, quindi $\text{Range}(T)$ è un sottoinsieme proprio di \mathbb{R}^4 , che è il codominio di T e la funzione T non è suriettiva.

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -h \\ y = -k \\ z = h \\ w = k \end{cases} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{(-h, -k, h, k) \in \mathbb{R}^4 : h, k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 2 generato ad esempio dai vettori $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$.

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. La matrice che corrisponde a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) \in \text{Ker}(T) &\Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -h \\ y = -k \\ z = h \\ w = k \end{cases} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $\text{Ker}(T)$ della trasformazione, è dato da

$$\text{Ker}(T) = \{(-h, -k, h, k) \in \mathbb{R}^4 : h, k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio di dimensione 2 generato ad esempio dai vettori $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$.

Per quanto riguarda $\text{Range}(T)$ si ha $\dim(\text{Range}(T)) = \dim(\text{Col}(A)) = 2$, quindi $\text{Range}(T) = \mathbb{R}^2 = \text{codominio di } T$ e la funzione T è suriettiva.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Dim

- Se T è iniettiva, un solo vettore può avere come immagine $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$; poiché vale $T(\vec{0}) = \vec{0}$, questo vettore è $\vec{0}$ e, visto che tutti i vettori di $\text{Ker}(T)$ hanno immagine $\vec{0}$, otteniamo $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Dim

- Se T è iniettiva, un solo vettore può avere come immagine $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$; poiché vale $T(\vec{0}) = \vec{0}$, questo vettore è $\vec{0}$ e, visto che tutti i vettori di $\text{Ker}(T)$ hanno immagine $\vec{0}$, otteniamo $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

Viceversa, se $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$, supponiamo che $T(v) = T(v')$: allora $T(v) - T(v') = T(v - v') = \vec{0}$ e $v - v' \in \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$. Quindi $v - v' = \vec{0}$ e $v = v'$. Quindi T è iniettiva.

Suriettività di una Trasformazione Lineare

Dalla definizione di suriettività e da quanto visto sulle matrici segue che

LEMMA

Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare allora:

- T è suriettiva $\Leftrightarrow \dim(\text{Range}(T)) = n$.
- Se A è la matrice che rappresenta T , ovvero se $T = T_A$, i vettori colonna di A generano $\text{Range}(T)$ e vale:
$$T \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

Il prossimo teorema lega la dimensione del $\text{Ker}(T)$ a quella del $\text{Range}(T)$ e del dominio.

TEOREMA

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ vale:

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Range}(T)) = m$$

Dim Segue dal corrispondente risultato sulle matrici dimostrato nelle slides sul Teorema di Rouché-Capelli. Sia A una matrice tale che $T = T_A$ (sappiamo che tale matrice esiste perché T è lineare). Si ha che $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A)$ e $\text{Range}(T) = \text{Range}(A)$ ed il teorema segue dal teorema analogo dimostrato per le matrici.

Inoltre:

COROLLARIO

Sia T una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e A la matrice che la rappresenta (ovvero $T = T_A$). Si ha:

T è iniettiva se e solo se $rg(A) = m$.

Dim. Dal precedente teorema vediamo che $rg(A) = m$ se e solo se $\dim(Ker(T)) = 0$ se e solo se (vedi teorema su iniettività e $Ker(T)$) T è iniettiva.

Il teorema precedente lega la dimensione del $\text{Ker}(T)$ a quella del $\text{Range}(T)$ e del dominio ed è molto utile per velocizzare la risoluzione di un esercizio. Se abbiamo già calcolato la dimensione del nucleo $\text{Ker}(T)$ di una trasformazione, abbiamo automaticamente la dimensione dell'immagine e viceversa. Ad esempio, se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è definita da $T(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y, x + y)$ allora l'immagine ha dimensione 1 (è generata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$) e quindi la dimensione del $\text{Ker}(T)$ è $3 - 1 = 2$.

Il teorema precedente lega la dimensione del $\text{Ker}(T)$ a quella del $\text{Range}(T)$ e del dominio ed è molto utile per velocizzare la risoluzione di un esercizio. Se abbiamo già calcolato la dimensione del nucleo $\text{Ker}(T)$ di una trasformazione, abbiamo automaticamente la dimensione dell'immagine e viceversa. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è definita da $T(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y, x + y)$ allora l'immagine ha dimensione 1 (è generata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$) e quindi la dimensione del $\text{Ker}(T)$ è $3 - 1 = 2$.

Un ulteriore corollario del teorema precedente ci dice che gli spazi vettoriali hanno un comportamento simile a quello degli insiemi finiti: se X è un insieme finito, una funzione da X a X è iniettiva se e solo se è suriettiva, proprietà che non vale in generale per gli insiemi infiniti. Nel caso di spazi vettoriali si ha:

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (quindi con dominio e codominio della stessa dimensione) è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Dimostrazione $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Range}(T)) = m \Leftrightarrow \text{Range}(T) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow T$ è suriettiva.