Analisi

Enrico

#materia # Analisi Matematica

[[Analisi-info]]

[[Analisi-appunti]]

2022-11-18

https://www.overleaf.com/project/637494482e5d81d38b74b34f/detacher

Teoria degli insiemi

Notazione Generale

Gli insiemi contengono **elementi** e si identificano tra parentesi graffe $\{\quad\}$ L'appartenenza si indica con $\in$. Il numero di elementi di un insieme A è detto **cardinalità** e si esprime come $|A| = n$. L'insieme vuoto è rappresentato con $\emptyset$

Notazioni:

1. **Elencazione:** ogni elemento è elencato e separato tramite , . In caso di insiemi infiniti si possono usare i "…" e la forma dell'elemento.
    - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ oppure $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...n, ...\}$
2. **Selezione**: Si evidenzia che due insiemi si prendono gli elementi *tali che* abbiano una certa proprietà:
    - $A = \{n \in \mathbb{N} | n$ è divisibile per $2\}$
3. **Funzionale:** Si evidenzia la forma che gli elementi assumono al variare di un parametro definito.
    - $A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ ## Operazioni tra insiemi

- **Intersezione**: $A \cap B \rightarrow$ Elementi che appartengono sia in A che in B
- **Unione**: $A \cup B \rightarrow$ Elementi che appartengono o in A o in B o in entrambi.
- **Differenza**: $A \setminus B \rightarrow$ Elementi che appartengono in A ma non in B.
- **Prodotto cartesiano**: $A \times B \rightarrow$ L'insieme delle coppie ordinate (a, b) $\forall a \in A \wedge \forall b \in B$ ## Relazioni tra insiemi
- **Inclusione**: $A \subseteq B \rightarrow$ tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. (A è sottoinsieme di B)

- L'insieme $\emptyset$ è sottoinsieme di tutti gli insiemi, incluso se stesso.

- **Disgiunzione**: $A \cap B = \emptyset \to$ due insiemi sono disgiunti quando nessun elemento di A è anche elemento di B e viceversa. ## Insiemi Notevoli
- **Numeri naturali**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Numeri interi:** $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- **Numeri razionali**: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ \ \forall a, b \in \mathbb{Z} \land b \neq 0\}$
- **Numeri reali**: $\mathbb{R}$
- **Numeri irrazionali**: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- **Numeri complessi**: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid \forall x, y \in \mathbb{R}\}$ Dunque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ## Insiemi notevoli definiti da prorietà
- **Circonferenza unitaria**: $S_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- **Sfera unitaria**: $S_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- **Superfici Algebriche**: $S_n : \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$
  - l'indice n indica la dimensione della superficie in uno spazio di $n + 1$ dimensioni.

Applicazioni

Definizione

> Dati due insiemi A e B, un'*applicazione* da A in B è una legge che ad ogni elemento di A associa un elemento di B

A è detto **Dominio**, mentre B è detto **Codominio**.

$$f : A \to B$$

Un'applicazione può essere descritta elencando come vengono mappati gli elementi, oppure attraverso l'esplicazione della legge che li mappa. >[!list]- Esempi > - $f : 0 \mapsto 1$ > - $f(0) = 1$ > - $f : 1 \mapsto 2$ > - $f(1) = 2$ > - $f : 2 \mapsto 3$ > - $f(2) = 3$

L'immagine di A rispetto ad f si scrive $f(a) = \{b \in B \mid \exists a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq B$
Proprietà ### Iniettività $F : A \to B$ è detta invettiva se:

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

> Una funzione si dice **iniettiva** se due elementi distinti del codominio hanno immagini distinte. Ossia $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$ e $a_1 = a_2$ implica $f(a_1) = f(a_2)$

ovvero:

$$\forall a_1, a_2 \in A(a_1 = a_2 \to f(a_1) = f(a_2) \land \forall b \in f(A) \exists a \in A \mid f(a) = b$$

[[43B40C39-5993-49F8-9F02-11CC7DCB49E6.png|200]]

Suriettività (surgettività)

$f : X \to Y$ è detta suriettiva se:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \mid f(x) = y$$

> Una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento del **codominio** è immagine di almeno un elemento del **dominio.** Si ha che l'immagine coincide con il codominio

ovvero:

$$f(a) = B \quad \land \quad \forall b \in B \quad f^{-1}(b) \neq \emptyset$$

[[7839874C-F0EA-4D7D-9098-5186D65E648D.png|200]] non esiste alcun elemento di Y che non sia puntato da un elemento di X

Biiettività (Biunivocità)

> una funzione f è detta biunivoca se e solo se è sia iniettiva sia suriettiva.

Controimmagine

Data $f : A \to B$ e un elemento $b \in B$, è detta *controimmagine di* b:

$$f(b)^{-1} = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

> La controimmagine di un insieme è l'insieme degli elementi del dominio che vengono mandati nell'insieme dalla funzione.

Composizione

```
Siano $A, B, C$ insiemi e siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$. La
   funzione $g \circ f: A \to C$ è detta "*g composto f* " ed è
   definita tramite la legge: $$\Large \forall a \in A \;\; g\;  \circ
   f(a) = {g(f(a))}$$
```

Inversa

Inversa Destra o Sezione

Data $f : A \to B$ è detta **inversa Destra** una funzione $g : B \to A$ se vale che:

$$\forall b \in B \quad f \circ g_{(b)} = b = id_B$$

e

$$\forall a \in A \;\; g \circ f_{(a)} = a = id_A$$

f ammette un'inversa Destra se e solo se è [[Analisi#Suriettività (surgettività)|suriettiva]].

Inversa Sinistra

Data $f : A \to B$ è detta **inversa sinistra** una funzione $g : B \to A$ se

$$\forall a \in A \;\; g \circ f(a) = a = id_A$$

e

$$\forall b \in B \;\; f \circ g(b) = b = id_B$$

f ammette un'inversa Sinistra se e solo se è [[Analisi#Iniettività|iniettiva]].

Inversa unica

Una funzione $f : A \to B$ biunivoca ammette un'unica Inversa Destra, che è anche l'unica Inversa Sinistra, detta: $f^{-1} : B \to A$ tale funzione vale

$$f \circ f^{-1} = id_B \qquad f^{-1} \circ f = id_A$$

Applicazione delle funzioni

Numerazione di elementi

- Dati due insiemi A e B si dice che hanno la stessa cardinalità se $\exists g : A \to B$ biettiva.
- $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$
- L'unione di insiemi numerabili è numerabile:

- $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ è numerabile $\forall i \in \mathbb{N}$

Principio dei cassetti

Se $card_{(A)} > card_{(B)}$ allora non esistono applicazioni iniettive $A \to B$.

$$\exists x_1, x_2 \in A \mid x_2 \neq x_2 \land f_{x_1} = f_{x_2}$$

[[Principio-Induzione]] # Principio di buon ordinamento > ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

Teorema di divisione euclidea

#todo