Ortogonalità fra vettori in $\mathbb{R}^n$

La definizione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ viene data tramite il prodotto scalare

DEFINIZIONE

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali (notazione: $v \perp w$) se il loro prodotto scalare $v \cdot w = w^T v$ è zero.

In particolare

$$v \perp v \quad \Rightarrow v = \vec{0}$$

LEMMA

k vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ non nulli e a due a due ortogonali sono indipendenti

(**Dim**) Dobbiamo mostrare che nessun vettore fra i v_i è combinazione lineare degli altri vettori. Se ad esempio $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ si avrebbe:

$$0 = v_1 \cdot v_2 = (\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) \cdot v_2 =$$

$$= \lambda_2 (v_2 \cdot v_2) + \lambda_3 (v_3 \cdot v_2) + \dots + \lambda_k (v_k \cdot v_2).$$

Dall'ortogonalità dei v_i segue allora che tutti i termini, tranne il primo, della somma si annullano. Quindi $0 = \lambda_2 (v_2 \cdot v_2) = \lambda_2 ||v_2||^2$, da cui $\lambda_2 = 0$, perché v_2 non è nullo. In modo simile, moltiplicando scalarmente per v_i, si dimostra che $\lambda_i = 0$, per ogni i. Quindi $v_1 = 0 v_2 + \dots + 0 v_k = \vec{0}$, una contraddizine.

BASI ORTONORMALI

DEFINIZIONE

Una base $B = [v_1 \dots v_k]$ di un sottospazio W si dice ortonormale se i vettori che la compongono sono a due a due ortogonali e di norma 1.

Ad esempio, la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale e così la seguente base di $\mathbb{R}^2$: $B = (v_1, v_2)$ dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

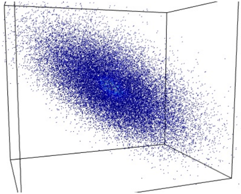
Come vedremo, le basi ortonormali sono molto importanti ad esempio per ottenere le "proiezioni ortogonali". Più avanti vedremo che ogni sottospazio possiede delle basi ortonormali.

Proiezioni Ortogonali e Principal Component Analysis

Supponiamo di avere tre termometri in una stanza, in tre differenti posizioni. Ogni misurazione dei tre termometri

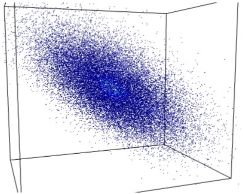
$$x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

è un punto dello spazio. L'insieme di un grande numero di misurazioni corrisponde ad una nuvola di punti di $\mathbb{R}^3$.



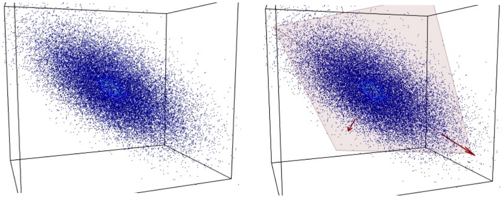
Proiezioni Ortogonali e Principal Component Analysis

Se la temperatura della stanza dipende solo da un termostato e dalla temperatura esterna, avremo probabilmente troppi dati, perché le tre misurazioni potranno essere espresse usando solo due variabili.
Geometricamente questo significa che la nuvola di punti giace principalmente lungo un piano (due dimensioni invece di tre).
Le misurazioni che giacciono (appena fuori) dal piano sono probabilmente effetto di errori di misura.



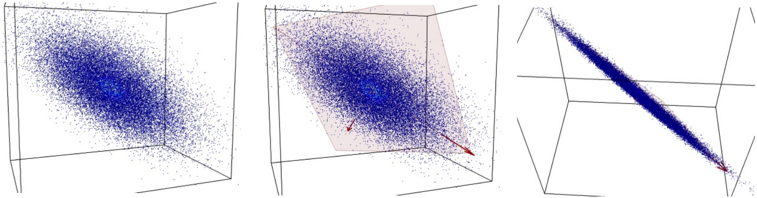
Proiezioni Ortogonali e Principal Component Analysis

Se la temperatura della stanza dipende solo da un termostato e dalla temperatura esterna, avremo probabilmente troppi dati, perché le tre misurazioni potranno essere espresse usando solo due variabili.
Geometricamente questo significa che la nuvola di punti giace principalmente lungo un piano (due dimensioni invece di tre).
Le misurazioni che giacciono (appena fuori) dal piano sono probabilmente effetto di errori di misura.



Proiezioni Ortogonali e Principal Component Analysis

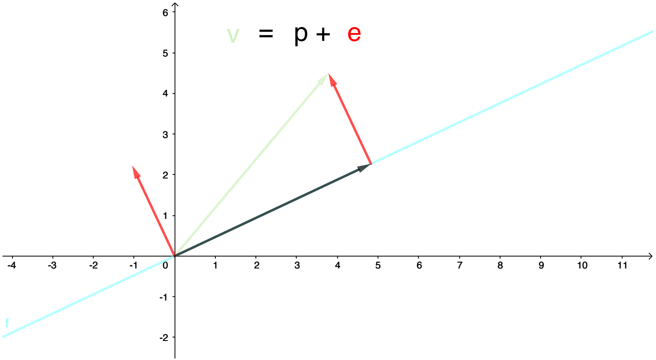
Se la temperatura della stanza dipende solo da un termostato e dalla temperatura esterna, avremo probabilmente troppi dati, perché le tre misurazioni potranno essere espresse usando solo due variabili.
Geometricamente questo significa che la nuvola di punti giace principalmente lungo un piano (due dimensioni invece di tre).
Le misurazioni che giacciono (appena fuori) dal piano sono probabilmente effetto di errori di misura.



Si può usare la PCA per trovare questo piano direttamente dalla matrice dei dati.
Proiettando su questo piano otteniamo una matrice che è più semplice da memorizzare in un computer.

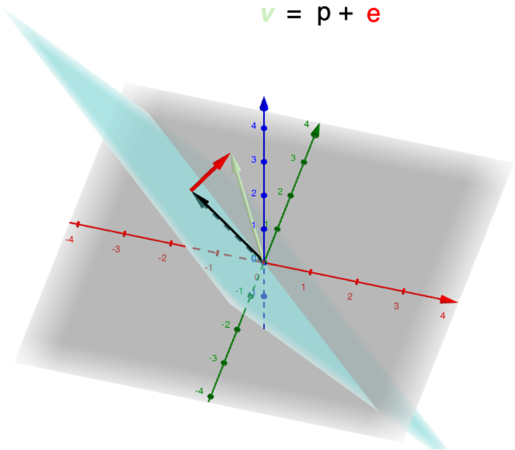
Perché Proiettare Ortogonalmente?

La proiezione ortogonale *p* del vettore *v* sulla retta azzurra è il vettore sulla retta azzura per cui il vettore "errore" *e* ha norma minima.
In pratica, cerchiamo il vettore sulla retta che più si “avvicina“ al vettore di partenza,

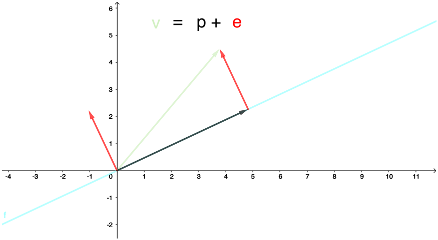


Perché Proiettare Ortogonalmente?

La proiezione ortogonale *p* del vettore *v* sul piano azzurro è il vettore sul piano azzurro per cui il vettore "errore" *e* ha norma minima.



Proiezioni Ortogonali su Rette



Sia w un vettore che ha la stessa direzione della retta r. Vogliamo trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che se $p = xw$ allora $v = p + e = xw + e$, con $e \perp w$.

Avremo:

$$e \perp w \Leftrightarrow e \cdot w = 0 \Leftrightarrow (v - xw) \cdot w = 0 \Leftrightarrow w^T(v - xw) = 0 \Leftrightarrow w^Tv - xw^Tw = 0$$

Ma $w^Tw = ||w||^2 > 0$, quindi $x = \frac{w^Tv}{w^Tw}$ e otteniamo:

Proiezione Ortogonale p di un vettore v su una retta $SPAN(w)$

$$p = \left(\frac{w^Tv}{w^Tw}\right)w$$

Esempio

Data la retta r per l'origine in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{trovare la proiezione ortogonale del vettore } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ sulla retta } r.$$

Esempio

Data la retta r per l'origine in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{trovare la proiezione ortogonale del vettore } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ sulla retta } r.$$

La retta r è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1. Il vettore $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ha la stessa direzione della retta r. La proiezione di v su r sarà dunque:

$$p = \left(\frac{w^T v}{w^T w}\right) w$$

Si ha:

$$w^T v = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 9 = 9, \quad w^T w = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$$

Quindi il vettore p, proiezione ortogonale di v sulla retta r è

$$p = \frac{9}{14} w = \frac{9}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/14 \\ -9/14 \\ 27/14 \end{bmatrix}$$

Matrice di proiezione su una retta

Se w è un vettore della retta, allora la proiezione è

$$p = (\frac{w^T v}{w^T w})w$$

Vogliamo ora trovare una matrice P per cui la proiezione p del vettore v sulla retta si scriva come $p = Pv$.
Siccome $w^T v \in \mathbb{R}$ allora $(w^T v)w = w(w^T v) = (ww^T)v$. Notare che ww^T (outer product) è una matrice $n \times n$.
Quindi $p = (\frac{1}{w^T w} ww^T)v$.
Se

$$P = (\frac{1}{w^T w})ww^T$$

allora P è una matrice $n \times n$ e possiamo ottenere il vettore proiezione ortogonale p come prodotto della matrice P per il vettore v:

Matrice di Proiezione Ortogonale P di un vettore v su una retta $SPAN(w)$

$$P = (\frac{1}{w^T w})ww^T; \quad p = Pv$$

Esempio

Data la retta r per l'origine in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{trovare la matrice di proiezione ortogonale } P$$

e la proiezione Pv del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sulla retta r. **Sol.** Abbiamo già visto in una precedente slide che $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ è un vettore che ha la direzione della retta e $w^T w = 14$. Inoltre:

$$ww^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$P = (\frac{1}{14}) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Pv = (\frac{1}{14}) \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/14 \\ -9/14 \\ 27/14 \end{bmatrix}$$

Proiezioni Ortogonali su Piani

Dato un piano $SPAN(w_1, w_2)$ ed un vettore v di $\mathbb{R}^n$, vogliamo trovare la proiezione p del vettore v sul piano, ovvero

$$v = p + e, \quad \text{con } \ p \in SPAN(w_1, w_2) \ \text{ ed } \ e \perp SPAN(w_1, w_2)$$

Le formule si semplificano se i vettori w_1, w_2 sono ortogonali fra loro ($w_2^T w_1 = 0$). Supponiamo quindi che w_1, w_2 sia una base ortogonale del piano $SPAN(w_1, w_2)$.

Cerchiamo x_1, x_2 tali che $p = x_1 w_1 + x_2 w_2$. Si ha

$$e \perp SPAN(w_1, w_2) \Leftrightarrow e \perp w_1 \text{ ed } e \perp w_2$$

Sccome $e = v - p = v - (x_1 w_1 + x_2 w_2)$ avremo

$$e \perp w_1 \text{ e } e \perp w_2 \ \Leftrightarrow \ v - (x_1 w_1 + x_2 w_2) \perp w_1 \text{ e anche } \ v - (x_1 w_1 + x_2 w_2) \perp w_2 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} w_1^T(v - (x_1 w_1 + x_2 w_2)) = 0 \\ w_2^T(v - (x_1 w_1 + x_2 w_2)) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo: $w_1^T v = (x_1 w_1^T w_1 + x_2 w_1^T w_2)$. Dalla ortogonalità di w_1 e w_2 segue $w_1^T w_2 = 0$, quindi $x_1 = \dfrac{w_1^T v}{w_1^T w_1}$. In modo analogo si dimostra che $x_2 = \dfrac{w_2^T v}{w_2^T w_2}$.
Quindi

Proiezione Ortogonale p di un vettore v su un piano $SPAN(w_1, w_2)$

$$p = \left(\frac{w_1^T v}{w_1^T w_1}\right) w_1 + \left(\frac{w_2^T v}{w_2^T w_2}\right) w_2$$

Esempio

Considerare il piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$ che ha per base i vettori ortogonali

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

trovare la proiezione ortogonale p del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ su tale piano.

Esempio

Considerare il piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$ che ha per base i vettori ortogonali

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

trovare la proiezione ortogonale p del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ su tale piano.

Si ha $w_1^T w_1 = 5$, $w_2^T w_2 = 14$, $w_1^T v = 5$, $w_2^T v = 11$, quindi

$$p = \left(\frac{w_1^T v}{w_1^T w_1}\right) w_1 + \left(\frac{w_2^T v}{w_2^T w_2}\right) w_2 = w_1 + \frac{11}{14} w_2$$

Matrice di proiezione su un piano

Se $[w_1, w_2]$ è una base del piano composta da vettori ortogonali fra loro ($w_2^T w_1 = 0$) e di norma 1 allora

$$p = (w_1^T v)w_1 + (w_2^T v)w_2$$

Possiamo calcolare la matrice di proiezione P per cui vale

$$p = Pv$$

Infatti, poiché $w_1^T v$ è uno scalare, abbiamo $(w_1^T v)w_1 = w_1(w_1^T v) = (w_1 w_1^T)v$; analogamente $(w_2^T v)w_2 = w_2 w_2{}^T v$, quindi

$$p = (w_1^T v)w_1 + (w_2^T v)w_2 = w_1 w_1{}^T v + w_2 w_2{}^T v = (w_1 w_1{}^T + w_2 w_2{}^T)v$$

Quindi $P = w_1 w_1{}^T + w_2 w_2{}^T$.
Un altro modo per esprimere la matrice di proiezione P si ottiene considerando la matrice $B = [w_1\, w_2]$ che ha come colonne i vettori w_1, w_2. Infatti:

Matrice di Proiezione Ortogonale P di un vettore v su un piano $SPAN(w_1, w_2)$ con $[w_1, w_2]$ base ortonormale per W:

$$P = BB^T = [w_1\, w_2]\begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{bmatrix}$$

Nota bene: nel caso in cui la base $[w_1, w_2]$ non sia ortonormale, la matrice di proiezione sul piano $SPAN(w_1, w_2)$ diventa più complicata: se $B = [w_1\, w_2]$ si dimostra che la matrice $B^T B$ è invertibile e P si esprime come $P = B(B^T B)^{-1} B^T$.

Esempio

Considerare il piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$ che ha per base i vettori ortogonali e di norma 1

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

trovare la matrice di proiezione ortogonale P su tale piano e la proiezione Pv del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ su tale piano.

Esempio

Considerare il piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$ che ha per base i vettori ortogonali e di norma 1

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

trovare la matrice di proiezione ortogonale P su tale piano e la proiezione Pv del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ su tale piano.

Quindi, se $B = [w_1 \, w_2]$ si ha

$$P = BB^T = w_1 w_1^T + w_2 w_2^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad Pv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Proiezioni su Sottospazi in Generale

Dato un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ e un vettore v di $\mathbb{R}^n$ la proiezione ortognale di v su W è il vettore $p \in W$ per cui il vettore $v - p$ è ortogonale a tutti i vettori di W.

Vedremo che tale vettore è unico, si ottiene per moltiplicazione per un'opportuna matrice P e che la proiezione ortogonale p del vettore $v \in \mathbb{R}^n$ sullo spazio W è il vettore di W per cui l'errore $e = v - p$ ha norma minima.
La matrice di proiezione P dei vettori di $\mathbb{R}^n$ su W deve verificare, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$:

$$Pv \in W, \quad Pv - v \perp W$$

Se $B = [w_1 \dots w_k]$ è (la matrice che corrisponde ad) una base ortonormale di W (ovvero B è la matrice che ha come colonne i vettori della base) si dimostra :

Matrice di Proiezione Ortogonale P di un vettore v su un sottospazio $W = SPAN(w_1, \dots, w_k)$ dove $[w_1 \dots w_k]$ è una base ortonormale per W è:

$$P = BB^T = [w_1 \dots w_k] \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_k^T \end{bmatrix}$$

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale di v su W è il vettore Pv.

Lemma

La proiezione ortogonale p del vettore $v \in \mathbb{R}^n$ sullo spazio W è il vettore di W per cui l'errore $e = v - p$ ha norma minima

Dim Sia $e = v - p$ l'errore nella proiezione ortogonale, ovvero $v = p + e$ ed e è ortogonale a tutti i vettori di W. Sia w un vettore qualsiasi di W. Si ha

$$||v - w||^2 = ||v - p + p - w||^2 = ||e + p - w||^2 = (e + p - w) \cdot (e + p - w) =$$

$$e \cdot e + e \cdot (p - w) + (p - w) \cdot e + (p - w) \cdot (p - w) = ||e||^2 + ||(p - w)||^2$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché il vettore e è ortogonale ai vettori di W e $p - w \in W$ (W è un sottospazio e $p, w \in W$).

Quindi

$$||v - w||^2 = ||e||^2 + ||(p - w)||^2$$

da cui segue che la norma $||v - w||$ è sempre maggiore o uguale della norma di $||e||$, ed è uguale ad $||e||$ solo se $w = p$.

Esempio

In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il sottospazio W generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \; w_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Trova la matrice P di proiezione ortogonale su W e la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ su W. Quanto vale Pw_3?

(soluzione nella prossima slide)

Esempio

Soluzione: se $B = [w_1 w_2 w_3]$ la matrice di proiezione P è:

$$P = BB^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$Pv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$Pw_3 = w_3$ perché la proiezione ortogonale è l'identità sui vettori di W.

Proprietà delle Proiezioni Ortogonali

- La richiesta di partire da una base di W formata da vettori a due a due ortogonali e di norma 1 (una base detta ortonormale) non è restrittiva: si dimostra che ogni sottospazio ha una base ortonormale, ottenuta modificando una base qualsiasi di W attraverso un procedimento noto come "di Gram-Schmidt" (vedi più avanti nelle slides).
- Una matrice B $n \times k$ si dice ortogonale se le sue colonne $w_1, \dots, w_k$ sono vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali e di norma 1. Le colonne di B generano allora un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k di cui sono una base ortonormale. La proiezione su W è data da BB^T, mentre il prodotto $B^T B$ è l'identità:

$$B^T B = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_k^T \end{bmatrix} [w_1 \dots w_k] = \begin{bmatrix} w_1^T w_1 & w_1^T w_2 & \dots & w_1^T w_k \\ w_2^T w_1 & w_2^T w_2 & \dots & w_2^T w_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ w_k^T w_1 & w_k^T w_2 & \dots & w_k^T w_k \end{bmatrix} = Id$$

- La matrice di proiezione è simmetrica (se $P = BB^T$ allora $P^T = (BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T = P$).
Inoltre, vale $P^2 = P$: $\quad BB^T BB^T = B(B^T B)B^T = BId_n B^T = BB^T = P$.

ESISTENZA DI BASI ORTONORMALI

Come abbiamo visto, una base ortonormale di un sottospazio è utile per semplificare la matrice di proiezione sul sottospazio. Dimostriamo ora che ogni sottospazio ha basi ortonormali.

TEOREMA

Ogni sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale.

Dim. Una base ortonormale di un sottospazio W può essere ottenuta da una base qualsiasi di W attraverso un procedimento noto come ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Questo procedimento consiste nei seguenti passi.
Data una base $B = [v_1, \dots, v_k]$ di W costruiamo una base ortonormale $B' = [u_1, \dots, u_k]$ di W come segue:

1. $u_1 = v_1/||v_1||$.
2. Proiettiamo v_2 sulla retta $SPAN(u_1)$ ottenendo il vettore p_2. Sia $u_2 = (v_2 - p_2)/||v_2 - p_2||$. Notare che $SPAN(v_1, v_2) = SPAN(u_1, u_2)$ e che $[u_1, u_2]$ è una base ortonormale di $SPAN(u_1, u_2)$.
3. Proiettiamo v_3 sul sottospazio $SPAN(u_1, u_2)$ (di cui $[u_1, u_2]$ è base ortonormale) ottenendo il vettore p_3. Sia $u_3 = (v_3 - p_3)/||v_3 - p_3||$. SI ha $SPAN(v_1, v_2, v_3) = SPAN(u_1, u_2, u_3)$.
4. Al passo h avremo creato una base ortonormale $[u_1, \dots, u_h]$ del sottospazio $SPAN(u_1, \dots, u_h) = SPAN(v_1, \dots, v_h)$.
5. All'ultimo passo k il procedimento termina con una base ortonormale per il sottospazio iniziale perché $SPAN(u_1, \dots, u_k) = SPAN(v_1, \dots, v_k)$.

Per quanto detto sopra, la base $[u_1, \dots, u_k]$ è una base ortonormale di W.

Esempio

Applichiamo il procedimento precedente per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, partendo dalla base $B = (v_1, v_2, v_3)$ dove

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 1: $u_1 = v_1/||v_1|| = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. **Passo 2:** proiettiamo v_2 su u_1:

$p_2 = (u_1^T v_2)u_1 = (1/\sqrt{2})u_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e consideriamo l'errore "normalizzato" , ponendolo uguale ad u_2:

$$u_2 = (v_2 - p_2)/||v_2 - p_2|| = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

Passo 3: proiettiamo v_3 su $SPAN(u_1, u_2)$ usando la matrice $P = AA^T$ dove $A = [u_1 \, u_2]$:

$$P = AA^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la proiezione p_3 di v_3 su $SPAN(u_1, u_2)$: $p_3 = Pv_3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ e definiamo

$$u_3 = (v_3 - p_3)/||v_3 - p_3|| = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}.$$

Controllare che la base $B' = [u_1, u_2, u_3]$ sia una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Ortogonalità fra sottospazi

Come definire la nozione di ortogonalità fra sottospazi?

DEFINIZIONE

Se W, W' sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$, diremo che W è ortogonale a W' (notazione $W \perp W'$) se ogni vettore di W è ortogonale ad ogni vettore di W':

$$W \perp W' \quad \Leftrightarrow \quad < w, w' >= 0, \forall w \in W, \forall w' \in W'$$

- In particolare, se $W \perp W'$ allora $W \cap W' = \{\vec{0}\}$, perché se $w \in W \cap W'$ allora $w \cdot w = 0$ e $w = \vec{0}$.

Esempi

1. In $\mathbb{R}^3$ il piano xy (di equazione $z = 0$) è ortogonale all'asse delle z: infatti se v appartiene al piano xy allora $v = (a, b, 0)$, mentre se w è un vettore sull'asse delle z allora $w = (0, 0, t)$, quindi $< v, w >= 0$.
2. In $\mathbb{R}^3$ il piano xy e il piano yz non sono perpendicolari perché entrambi contengono l'asse delle y.

Complemento ortogonale

L'asse x e l'asse y sono ortogonali in $\mathbb{R}^3$, ma l'asse x non contiene tutti i vettori ortogonali all'asse y.

DEFINIZIONE

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, il complemento ortogonale $W^\perp$ di W è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \ : \ u \perp w, \forall w \in W\}$$

Si dimostra facilmente che $W^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, perché è chiuso per combinazioni lineari (e contiene il vettore nullo):

$$u, u' \in W^\perp, a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad au + bu' \in W^\perp$$

infatti, se $w \in W$ si ha $(au + bu') \cdot w = a(u \cdot w) + b(u' \cdot w) = 0$.

- Il complemento ortogonale di una retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$ è un piano per l'origine. Se $v = (a, b, c)$ appartiene alla retta, il piano ha equazione

Complemento ortogonale

L'asse x e l'asse y sono ortogonali in $\mathbb{R}^3$, ma l'asse x non contiene tutti i vettori ortogonali all'asse y.

DEFINIZIONE

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, il complemento ortogonale $W^\perp$ di W è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \ : \ u \perp w, \forall w \in W\}$$

Si dimostra facilmente che $W^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, perché è chiuso per combinazioni lineari (e contiene il vettore nullo):

$$u, u' \in W^\perp, a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ au + bu' \in W^\perp$$

infatti, se $w \in W$ si ha $(au + bu') \cdot w = a(u \cdot w) + b(u' \cdot w) = 0$.

- Il complemento ortogonale di una retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$ è un piano per l'origine. Se $v = (a, b, c)$ appartiene alla retta, il piano ha equazione $ax + by + cz = 0$.
- Il complemento ortogonale di un piano in $\mathbb{R}^4$? Vediamo prima che dimensione deve avere il complemento ortogonale di un sottospazio.

TEOREMA

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ allora

$$dim(W) + dim(W^\perp) = n$$

Dim Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e P è la matrice di proiezione ortogonale su W allora abbiamo visto che vale:

$$v = Pv + e \text{ dove } e \perp W, \text{ ovvero } e \in W^\perp$$

Quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si scrive come somma del vettore Pv di W e del vettore $e \in W^\perp$.
Se $B = [w_1, \ldots, w_k]$ è una base di W e $B' = [u_1, \ldots, u_r]$ è una base di $W^\perp$, abbiamo allora:

- i vettori $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_r$ generano tutto $\mathbb{R}^n$ (perché possiamo scrivere $v = p + e$ con $p \in W$ e $e \in W^\perp$);
- i vettori $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_r$ sono indipendenti: se

$$t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k + s_1 u_1 + \ldots + s_r u_r = \vec{0} \Rightarrow$$

$$t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k = -(s_1 u_1 + \ldots + s_r u_r) \in W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$$

$$\text{quindi } t_1 w_1 + \ldots + t_k w_k = s_1 u_1 + \ldots + s_r u_r = \vec{0} \text{ da cui} t_1 = \ldots = t_k = s_1 = \ldots = s_r = 0.$$

Quindi $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_r$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $n = k + r$.

COME TROVARE $W^\perp$

LEMMA

Se $W = SPAN(w_1, \ldots, w_k)$ allora

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow u \cdot w_1 = 0, \ldots, u \cdot w_k = 0$$

DIMOSTRAZIONE L'implicazione da sinistra a destra vale perché i vettori w_i sono particolari vettori di W, quindi se $u \in W^\perp$ allora u deve essere ortogonale a questi vettori.

Se invece vale $< u, w_i >= 0$ per ogni $i = 1, \ldots k$, vogliamo dimostrare che $u \in W^\perp$; dato $w \in W$ si avrà:

$$w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k$$

per certi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e

$$u \cdot w = u \cdot (\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k) = \lambda_1 (u \cdot w_1) + \ldots + \lambda_k (u \cdot w_k) = 0.$$

Quindi, $u \cdot w = 0$ per ogni $w \in W$ e da questo segue che $u \in W^\perp$.

ESEMPIO

Il sottospazio $W = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione due e una sua base è, ad esempio, $B = [w_1, w_2]$ con $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quindi $W = L(w_1, w_2)$ e $W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : u \cdot w_1 = 0, u \cdot w_2 = 0\}$.

Se $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ allora $u \cdot w_1 = 2x_1 + x_2, \; u \cdot w_2 = 2x_1 + u_2 + x_3$.

Quindi un vettore $u = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}$ apparterrà a $W^\perp$ se e solo se le sue coordinate verificano il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo $x_3 = 0$ e $x_2 = -2x_1$, quindi

$$W^\perp = \{(\begin{bmatrix} h \\ -2h \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; h \in \mathbb{R}\}$$

Questo sottospazio ha dimensione 1 ed una sua base è data, ad esempio, da $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.