المدرسة العليا للأساتذة
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵉⵙⵍⵎⴰⴷⵏ
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵄⴱⴷⵍⵎⴰⵍⴽ ⴰⵙⵙⴰⵄⴷⵉ
Universidad Abdelmalek Essaadi

10 / 12

LE-Math S6
Année :2023-2024

Structures Algébriques2h

Exercice 1 : (8 points)

1. Soit H et K deux sous groupes normales d'un groupe G, montrer que $H \cap K \triangleleft G$
2. Caractériser les idéaux de $\mathbb{Z}$.
3. $21\mathbb{Z}$ est il un idéal premier?
4. Donner un exemple d'un idéal premier.

Exercice 2 : (4 points)

Soient G un groupe fini d'ordre $2n$ avec n un nombre premier et H un sous groupe de G.

1. Discuter selon n, l'ordre de H
2. Soit $H = \{h_1, h_2, \cdots h_n\}$ d'ordre n, et $y \in G \setminus H$
   a Montrer que $G = yH \cup H$ et $yH \cap H = \emptyset$
   b Montrer que H est normal dans G (discuter $xhx^{-1} \in H$ selon le cas de x dans H et dans yH).

Exercice 3 : (8 points)

Soient G un groupe et H un sous groupe normal dans G.

1. Montrer que pour tout sous groupe K de G, HK est un sous groupe de G.
2. Vérifier que $H \cap K \triangleleft K$
   Soient p la surjection canonique de K dans $K/H\cap K$, p' la surjection de HK vers HK/H
   f l'homomorphisme de $KversHK$ défini par $f(k) = ek = k$.
3. Vérifier que f est injective et $f(H \cap K) \subseteq H$.
4. Conclure qu'il existe un morphisme $\phi : K/(H \cap K) \to HK/H$ tel que $\phi op = p'of$
5. Montrer que $K/(H \cap K) \simeq HK/H$

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 5

09/01/2024 **Examen de la session normale: Topologie** **Durée 2h**

Exercice 1. (2 *points*)

Montrer que l'image directe d'un espace topologique connexe est connexe.

Exercice 2. (4 *points*)

Soit $X = C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$. *Pour* $f, g \in X$ *on pose*

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

1. *Montrer que* d *est une métrique sur* X.
2. *Montrer que* (X,d) *est complet.*

Exercice 3. (4 *points*)

Soient d *et* d' *deux métriques sur un ensemble non vide* E. *On dit que* d *et* d' *sont uniformément équivalentes si l'application* $Id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ *est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.*

1. *Montrer que si* (x_n) *est une suite converge vers* x *dans* (E,d'), *alors* (x_n) *converge vers* x *dans* (E,d).
2. *Montrer que toute suite de Cauchy dans* (E,d) *est une suite de Cauchy dans* (E,d').
3. *Déduire que si* d' *est complet alors* d *est complet.*
4. *Déduire que* d *est complet si et seulement si* d' *est complet.*

Exercice 4. (5 *points*)

Soit τ *la famille de sous-ensembles de* $\mathbb{N}$ *formée de* $\emptyset$ *et de toutes les parties de* $\mathbb{N}$ *de la forme* $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{N}$.
2. *Déterminer les voisinages d'un entier naturel* p.
3. τ *est-t-elle séparée?*
4. *Déterminer* $\overline{\{3,5,8\}}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{\{3,5,8\}}}$
5. *Montrer que* $\{4,5,6,\ldots\}$ *est dense dans* $\mathbb{N}$.

Exercice 5. (5 *points*)

On considère n *espaces topologiques* $(E_i,\tau_i)_{1\le i\le n}$ *et on pose* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$. *Soit* τ_π *la famille des parties de* E *qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme* $\prod_{i=1}^{n} O_i$ *avec* $O_i \in \tau_i$.

1. *Montrer que* τ_π *est une topologie sur* E.
2. *Montrer que l'application* $\begin{array}{rcl} Pr_i : E & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$ *(la projection sur* E_i*) est continue.*
3. *Montrer que* τ_π *est la topologie la moins fine rendant les applications* Pr_i *continues.*
4. *Montrer que si* E_i *est séparé, alors* E *est séparé.*
5. *Soit* $A_i \subset E_i$. *Montrer que* $\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} \overset{\subset}{=} \prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i=1}^{n} A_i}} \overset{\supset}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathring{A}_i$.
6. *Montrer que* E *est compact si et seulement si* E_i *est compact pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 5

07/02/2024 **Examen de la session de rattrapage: Topologie** **Durée 2h**

Exercice 1. (3 *points*)

Montrer que l'image directe d'un espace topologique connexe par arc par une application continue est connexe par arc.

Exercice 2. (6 *points*)

Soit $X =]0, +\infty[$. *Pour* $x, y \in X$ *on pose* $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

1. *Montrer que* d *est une métrique sur* X.
2. *Déterminer* $B(2,1)$.
3. (a) *Montrer que la suite* $(x_n)_{n>0}$ *avec* $x_n = n$ *est une suite de Cauchy dans* (X,d).
   (b) (X,d) *est-il complet?*
4. (a) *Montrer que la partie* $]0,1]$ *n'est pas bornée dans* (X,d).
   (b) *Montrer que la partie* $]0,1]$ *est fermée dans* (X,d).

Exercice 3. (5 *points*)

Soit (E,τ) *un espace topologique et* (x_n) *une suite d'éléments de* E. *On dit qu'un élément* $x \in E$ *est une valeur d'adhérence de la suite* (x_n), *si pour tout voisinage* V *de* x, *il existe une infinité d'indices* n *tels que* $x_n \in V$.

1. *Montrer que* x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si et seulement si* $x \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}$.
2. *On suppose que* (x_n) *est injective. Montrer que toute valeur d'adhérence de* (x_n) *est point d'accumulation de l'ensemble de ses termes.*

Exercice 4. (6 *points*)

Soit τ *la famille de sous-ensembles de* $\mathbb{N}$ *formée de* $\emptyset$ *et de toutes les parties de* $\mathbb{N}$ *de la forme* $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{N}$.
2. *Déterminer l'ensemble de voisinages d'un entier naturel* p *par la topologie* τ.
3. τ *est-t-elle séparée?*
4. *Montrer que* $\{5,6,7,\ldots\}$ *est dense dans* $\mathbb{N}$.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**CONTROLE EN MATHEMATIQUES** **(MESURE ET INTEGRATION)**	**Année scolaire : 2023/2024**

Exercice 1 : (4 points : 2× 2)

Soient A et B des parties mesurables d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, u)$ et u une mesure positive, montrer que

1) $u(B \cup A) = u(A) + u(B) - u(B \cap A)$.
2) Soit (A_n) une suite croissante, montrer que $u(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} u(A_n)$

Exercice 2 : (2 points)

Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{F}$ une tribu sur F et $\phi: E \to F$ une application. Montrer que $\mathcal{F}' = \{\phi^{-1}(A); A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur E

Exercice 3: (4 points : 3+1)

1) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, f *et* g deux applications mesurable de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que les applications suivantes sont mesurables (f, g), $f + ig$, $f + g$, $f \times g$, $|f|$, $max(f, g)$.
2) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, (f_n) une suite de fonctions mesurables Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que les applications suivantes sont mesurables

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n$$

Exercice 4 : (4 points: 2× 2)

Soit $T = \{A \subset \mathbb{R} ; A \subset \mathbb{Z} \text{ ou } A^c \subset \mathbb{Z}\}$

1) Montrer que T est une tribu. sur $\mathbb{Z}$
2) Monter que $T = \sigma(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A} = \{\{n\}, n \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 5: (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n: \Omega \to \overline{\mathbb{R}})$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que (f_n) admette une limite est mesurable.

Exercice 6: (2 points)

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**EXAMEN DE MATHEMATIQUES** **(MESURE ET INTEGRATION)**	**Année scolaire : 2023/2024** **Durée: deux heures**

Exercice 1 (8 points)

Soit f une fonction mesurable de E vers $\overline{\mathbb{R}}_+$. Considérons, maintenant, la suite définie comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in E$ on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & si\ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\ et\ k = 0, 1, \dots, n.2^n - 1 \\ n & si\ f(x) \geq n \end{cases}$$

1) Rappeler la tribus Borélienne $B_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. (1 pt)
2) Soit $x \in E$. Comment calculer $f_n(x)$? (1 pt)
3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, B_n = \{x \in E : f(x) \in [n, +\infty]\}$ et pour tout $k = 0, 1, \dots, n.2^n - 1$, $A_{n,k} == \{x \in E : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\}$.
   Montrer que les ensembles B_n et $A_{n,k}$ sont mesurables. (1 pt)
4) Montrer que $(f_n(x))$ est une suite de fonctions positives. (1 pt)
5) Montrer que $(f_n(x))$ est une suite de fonctions croissante. (1 pt)
6) Montrer que $E = \cup_{k=0}^{n.2^n-1} A_{n,k} \cup B_n$ avec $A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,n.2^n-1}$ et B_n sont disjoints deux à deux. (1 pt)
7) Montrer que $(f_n(x))$ est une suite de fonctions étagées. (1 pt)
8) Montrer que f est la limite simple de $(f_n(x))$. (1 pt)

__Exercice 2__: (4 points)

Calculer les limites suivantes :

1) $I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n d\lambda.$ (1 pt)
2) $. I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty]} \frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x^3} d\lambda$ (1 pt)
3) $I_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\, d\lambda.$ (2 pts)

Exercice 3: (2 points)

Soit μ une mesure finie sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[))$ et $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable.

Quelle est la limite de la suite $\left(\int_{[0,1]} f(x^n) d\mu(x)\right)_{n\in \mathbb{N}}$?

Exercice 4: (3 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \int_{[0,+\infty]} \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)} d\lambda(x)$$

1) Déterminer le domaine de définition D de f. (1 pt)
2) Montrer que f est dérivable sur D et calculer f' (2 pts)

Exercice 5: (3 points)

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

1) A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? (1 pt)
2) Montrer que si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (1 pt)
3) Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (1 pt)

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	RATTRAPAGE (MESURE ET INTEGRATION)	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **(4 points)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, u)$ un espace mesuré, f une fonction mesurable positive et $t > 0$.

1) Montrer que (inégalité de Markov) $u(f \geq t) \leq \frac{1}{t}\int_\Omega f du$. (1 pt)
2) Montrer que si $\int_\Omega f du < +\infty$ alors $f < +\infty$ $u - p.p$. (1 pt)
3) Montrer que $\int_\Omega f du = \int_\Omega g du$ si et seulement si $f = g$ $u - p.p$. (2 pts)

Exercice 2: (3 points)

Soit u une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $u(]a,b]) < \infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} u(]2,x]) & si \ x \geq 2. \\ -u(]x,2]) & si \ x \leq 2 \end{cases}$$

1) Montrer que F est croissante. (1 pt)
2) Montrer que F est continue à droite. (1 pt)
3) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $u(]a,b]) = F(b) - F(a)$. (1 pt)

Exercice 3 : (2 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est-elle Borélienne ?

Exercice 4: (4 points)

Soit f une fonction mesurable de Ω vers $\overline{\mathbb{R}}_+$. Considérons la fonction v de Ω vers $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$v(A) = \int_A f du$$

Où u est une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$

1) Montrer que v est une mesure. (1 pt).
2) Soit g une fonction mesurable de Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   a) Montrer que si $g = 1_A$ alors $\int_\Omega 1_A dv = \int_\Omega 1_A f du$. (1 pt)
   b) Montrer que si $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ une fonction étagée où $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ pour $i = 1, \dots, n$, alors (1 pt)
   $$\int_\Omega g dv = \int_\Omega g f du$$
   c) Soit g une fonction mesurable positive, montrer que $\int_\Omega g dv = \int_\Omega g f du$. (1 pt)

Exercice 5 : (4 points)

Calculer les limites suivantes :

1) $I_1 = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} 1 - e^{-2nx} d\lambda.$ (2 pts)
2) $I_2 = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty]} \frac{4x^2+12}{12x^4+5nt+3} d\lambda(x).$ (2 pts)

Exercice 6 : (3 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,t) = e^{-xt}\left(\frac{sin^2(x)}{x^3}\right) 1_{[0,+\infty[}(x)$$

1) Montrer que pour tout $t > 0$ la fonction $x \to f(x,t)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (1 pt)
2) Montrer que la fonction F définie par $F(t) = \int_\mathbb{R} f(x,t)dx$ est dérivable sur $[1, +\infty[$. (2 pts)

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Matril

LE Maths 2023/2024
Semestre 5

Examen de la session normale: Approches et Méthodes

Exercice 1(10 points)

Contrairement aux apparences, les équations du second degré n'ont pas été à l'origine des nombres complexes. $x^2 + 1$ est sans racines réelles: à quoi bon lui attribuer des racines imaginaires? En vérité, c'est en cherchant les racines réelles des équations du troisième degré que les algébristes ont rencontré les imaginaires.

Soit l'équation : (E) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$

1. soit $y = x + \frac{b}{3a}$

Déterminez p et q en fonction de a,b,c et d tels que : $(E) \Leftrightarrow (E_1)\ y^3 + py + q = 0$.

2. Posez $y = u + v$

a) Montrez que :$(E_1) \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.

b) Déduire que $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$

c) Montrez que u^3et v^3 sont solution de l'équation: $(E_2)\ t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.

d) Soit α la racine cubique de t_1 solution de (E_2) donnez les deux autres racines cubiques de α.

3. Application : Résoudre l'équation de Bombelli : $x^3 - 15x - 4 = 0$
4. Résoudre l'équation de Bombelli dans le cadre géométrique.
5. Après avoir définir l'approche par compétence; suggérez une activité constructive pour le concept du nombre imaginaires i et l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 2 (9 points) :

Dans un devoir surveillé ; un enseignant a proposé l'exercice suivant à une classe terminale scientifique :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n-4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq 1$.

1. Répond à cette question.
2. Compléter le tableau suivant :

Le contexte	
Le support	
Les consignes	
Les pré-requis (ou moins deux)	
Les compétences visées :	

3. un élève de cette classe a répondu comme suit :

Pour n=0 on $U_0 = 0$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $0 \leq U_n \leq 1$ Et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

D'après l'hypothèse de récurrence $0 \leq U_n \leq 1$

Alors : $0 \leq 2U_n \leq 2$ donc : $\begin{cases} 0 \leq 2U_n + 3 \leq 5 \\ 4 \leq U_n + 4 \leq 5 \end{cases}$

D'où : $\frac{0}{4} \leq \frac{2U_n+3}{U_n+4} \leq \frac{5}{5}$ ainsi : $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq 1$.

a) Donner la définition d'Erreur d'une source didactique.

b) Révéler l'erreur dans la réponse en précisant sa source et les raisons de cette erreur.

c) Déterminer des procédures pour la remédiation et le soutien de l'élève en fonction de l'erreur commise et expliquer comment surmonter l'erreur.