Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE Maths 2022/2023
Analyse 6

Série d'exercices 2

Exercice 1. *On pose* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. *Calculer*

$$I_1 = \iint_D dxdy, \quad I_2 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy, \quad I_3 = \iint_D xy(x+y)dxdy.$$

Exercice 2. *Calculer* $\iint_D f(x,y)dxdy$ *dans les cas suivants:*

1. $f(x,y) = x+y$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y > 2, x+y < 5\}$.
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq 2\}$.
4. $f(x,y) = x$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, 0 \leq x-y+1, x+2y-4 \leq 0\}$.
5. $f(x,y) = xy$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, xy+x+y \leq 1\}$.

Exercice 3.

1. *Calculer les aires des domaines suivants:*
   (a) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4-x^3\}$.
   (b) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, -\sin x \leq y \leq \sin x\}$.
   (c) $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x-y+1 \geq 0, y \leq -x^2+2x+1\}$.
   (d) $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x^2+y^2 < 3, y > 0\}$.
2. *Soient* $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$. *Calculer le volume de l'ellipsoïde d'equation:* $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} < 1$.
3. *Calculer le volume du domaine suivant:*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \geq z^2\}.$$

Exercice 4. *On pose* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$ *ou* $b > a > 0$. *Calculer l'intégrale de la fonction* $f : (x,y) \longmapsto (y^2-x^2)^{xy}(y^2+x^2)$ *sur le domaine D, on peut effectuer le changement de variables* $u = xy$ *et* $v = y^2 - x^2$.

Exercice 5. *Calculer les intégrales suivantes:*

1. $\iiint_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} dxdydz$ *avec* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.
2. $\iiint_D (x^2+y^2+z^2) dxdydz$ *avec* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq z^2\}$.
3. $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$ *avec* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}$.
4. *Posons* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. *Calculer* $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz$ *pour* $\alpha \in]0,+\infty[$.

Exercice 6. *En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de la fonction f sur le domaine D dans les cas suivants:*

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$, $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ *avec* $a,b > 0$, $f(x,y) = x^2+y^2$;
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 \leq y \leq 2x^2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$, $f(x,y) = x+y$ *(changement de variable:* $u = \frac{y}{x^2}$, $v = xy$*);*
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$, $f(x,y) = xy$ *(le changement de variable:* $x = r\cos^3(\theta)$ *et* $y = r\sin^3(\theta)$ *pour* $r \geq 0$*).*
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$ *avec* $h > 0$, $f(x,y,z) = z$; cylindrique
6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, $f(x,y,z) = xyz$; sphérique
7. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$, $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$. sphérique