	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : Analyse	SERIE (2)	Année scolaire : 2023/2024 Semestre : 2 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 (Fonctions primitives)

Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt, \quad B = \int_0^x \frac{tan^3(t)}{cos^2(t)}\,dt, \quad C = \int_0^x |t^2 - t|\,dt$$

Exercice 2 (Intégration par partie)

Soit $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$

1) Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}
2) Calculeru_n.
3) En déduire que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \frac{2^{2n}\,(n!)^{\,2}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 3 (Changement de variables)

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt, \quad B = \int_0^e \frac{1}{t(t+1)} ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt, \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{4sin(t)+13}\,dt$$

Exercice 4:

1) Calculer selon la valeur de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale suivante :

$$A(x) = \int \frac{1}{(t-a)^n}\,dt$$

2) En déduire les valeurs de

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(t-3)^4} dt \quad et \quad J = \int_1^2 \frac{2}{t-3} dt$$

<u>Exercice 5</u>:

Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$I = \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^n} dx$$

1) Déterminer p et q tels que

$$I = \int \frac{\alpha x + \beta}{((x-p)^2 + q)^n} dx$$

2) En utilisant le changement de variable $x = p + qt$, montrer que

$$I = \alpha' \int \frac{t}{(t^2+1)^n} dt + \beta' \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$$

3) Par la suite, posons

$$I_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n} dt \; et \; J_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$$

a) Montrer que

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + cte & si\ n \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} ln(t^2+1) + cte & si\ \ n = 1 \end{cases}$$

b) Calculer J_{n+1} en fonction de J_n.

4) <u>Application</u> : calculer

$$A = \int \frac{x^3+1}{x^2 - x - 2} dx \quad et\ B = \int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2} dx$$

<u>Exercice 6</u>:

1) Montrer que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(a+b-t)\, dt$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} \frac{tsint}{cos^2(t)} dt \; et \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\big(1 + tan(t)\big)\, dt$$

<u>Exercice 7</u>:

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par un

$$u_n = \sum_{\mathrm{k}=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{k}}$$

1) Soit k ∈ $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq u_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}dx$$

3) Que peut-on en conclure sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

<u>Exercice 8</u>:

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$$