Série d'Exercices: $N^{\circ}1$
Algèbre 1

Exercice 1 . Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0,$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0,$
3. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x,$
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ |x| < \alpha \implies |x^2| < \varepsilon.$
5. $\exists!\, x \in \mathbb{R}, x - 1 = 0.$

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 2 .

1. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$
   En déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies a = a$ et $b = b'$
2. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+})^2\ :\ a + b = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall \epsilon > 0, \quad |a| \leq \epsilon \Rightarrow a = 0.$$
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \iff x = y = 0$$
5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, Montrer que : $|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$

Exercice 3 .

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ n^3 + 2n \text{ est divisible par } 3.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$2^n - 1 \leq n! \leq n^n.$$

Exercice 4 . Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. Calculer ses six premiers termes de cette suite.

2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n et la démontrer

Exercice 6. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :

1. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. Le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3. La racine carré d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 8 . On rappelle que l'on note

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que
$$(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap C \cap \overline{B}$$
2. En déduire que
$$(A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = A \cap (B \vartriangle C)$$

Exercice 9 . Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$;
2. fg;
3. $f + g - fg$.

Exercice 10. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de E et C et D deux parties de F.

1. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. Démontrer que $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. La réciproque est-elle vraie ?
5. Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
6. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
7. $A \subset f^{-1}(f(A))$.