	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : Analyse	SERIE -1-	Année scolaire : 2024/2025 Semestre : 2 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout segment inclus dans I.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $]a, b[$ et bornée sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$

Exercice 2

1) Soient f et g deux fonctions intégrables, montrer que $f + g$ est intégrable et que
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
2) Soient f une fonction intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que λf est intégrable et que
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Exercice 3

Soit f une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, montrer que $f(x) = 0,\ \ \forall x \in [a, b]$.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions intégrables, on pose $f^+ = max(f, 0)$ et $f^- = max(-f, 0)$.

1) Ecrire f^+ et f^- en fonction de f.
2) Calculer f et $|f|$ en foncton de f^+ et f^-.
3) Montrer que $|f|$ est intégrable et que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
4) a) On suppose que f et g deux fonctions positives, montrer que fg est intégrable.

b) On suppose que f et g deux fonctions de signes quelconques, montrer que fg est intégrable.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[a, b]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1 & si\ \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
f est-elle intégrable ?

Exercice 6

On admet que la fonction $f \,:\, x \;\rightarrow \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ est décroissante sur $[0\,,+\infty[$: Pour tout entier naturel n; on pose

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

1) Prouver que pour entier naturel n, $f\;(n+1)\;\leq\; I_n \leq\; f\;(n)$.
2) En déduire que la suite $(\,I_n)$ est convergente.

Exercice 7

Calculer la limite de $\int_a^{3a} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$ lorsque a tend vers 0.

Exercice 8

Calculer la limite de $\int_a^{a^2} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ lorsque a tend vers 1.

Exercice 9

Soit $f\colon X \rightarrow Y$ une fonction bornée.

1) Montrer que f est intégrable si et seulement si $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists\; \psi_n, \phi_n \in \zeta([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\psi_n \geq f \geq\; \phi_n \text{ et } \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx < \frac{1}{n}$$

2) Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx$.
3) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ est intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$.

Exercice 10

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que : $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots . + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2) En déduire que $\int_0^1 x^3\,dx$.

.***Exercice 11***

Calculer la limite des suites de terme général suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}. \qquad 2)\; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} tan\left(\frac{k}{n}\right) \qquad 3)\; u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 12

Soient f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. On pose $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, pour tout $x \in [a,b]$.

1) Montrer que si f admet une limite à droite en $x_0 \in [a,b]$ alors F est dérivable à droite en x_0 et

$$F'_d(x_0) \;= \lim_{x\to(x_0)^+} f(x).$$

2) Montrer que si f admet une limite à gauche en $x_0 \in [a,b]$ alors F est dérivable à gauche en x_0 et

$$F'_g(x_0) \;= \lim_{x\to(x_0)^-} f(x).$$

3) Que peut-on conclure si f est contnue en x_0.