

TD 2

Exercice 1

Énoncé On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega) = \{-3; -2; 1; 4\}$.

1) Donner la loi de X .

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.

3) Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y .

4) Calculer $E(Y)$ de deux façons différentes

Exercice 2

Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit contrôlé lors d'un trajet est p . On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de contrôles d'un voyageur lors de N trajets

1. Déterminer la loi de X (c'est-à-dire les $P(X = k)$), puis calculez son espérance.
2. Un voyageur envisage de ne jamais acheter de ticket ; soit Y la variable aléatoire de son gain relatif après N trajets. Exprimez Y puis calculez son espérance. En déduire la probabilité p de contrôle nécessaire pour dissuader de frauder.

Exercice 3

Un livre de 800 pages contient 1200 erreurs d'impression, réparties au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre d'erreurs dans une page donnée.

1. Quelle est la loi exacte de X .
2. Peut-on approximer la loi exacte de X , par une autre loi discrète. Justifier.
- 3 : Calculer alors les probabilités, que dans cette page :
 - (a) il n'y ait aucune erreur,
 - (b) il y ait au moins 3 erreurs,

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et ν . Calculer la loi de $X+Y$, puis reconnaître celle de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 5

Soit X une VAR qui suit une loi uniforme sur $[a, b]$. Montrer que X admet une espérance et une variance et la calculer.

Exercice 6

Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

1. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
3. Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ? Calculer la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 7

On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0.001 de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 8

La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ . On utilisera pour les calculs $\ln 2 \approx 0,7$.

a. La densité de probabilité associée à cette loi est la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0; 5] \\ 5e^{-5t} & \text{si } t \in [0; 5] \end{cases} \quad (1)$$

b. On suppose que 50% des clients ont été dépannés durant la garantie. La durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.

c. On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manière indépendante et on appelle X le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

La probabilité d'avoir $X \geq 1$ est $P(X \geq 1) = e^{-4}$.

d. On est dans les mêmes conditions qu'au c. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = 10e^{-\frac{2}{5}}$.

Exercice 9

La taille d'une femme française suit une loi normale de moyenne 167cm et d'écart-type 5cm.

1. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille supérieure à 1m70 ?

2. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille inférieure à 1m60 ?

3. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille comprise entre 1m63 et 1m69 ?

4. Pour une place de pilote d'avion, 50 femmes ont postulé et 23 ont été refusées parce qu'elles étaient trop grandes et 2 ont été refusées parce qu'elles étaient trop petites.

(a) Calculer le pourcentage de femmes refusées parce qu'elles étaient trop grandes et celui des femmes refusées parce qu'elles étaient trop petites.

(b) En supposant que l'on obtiendrait des résultats identiques (en proportion) en considérant l'ensemble des femmes françaises, donner la taille minimale et la taille maximale imposées pour être pilote d'avion.