	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : calcul différentiel	SERIE 1	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie n et $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit N_1 la norme usuelle définie par :

$$N_1 : E \to \mathbb{R}^+$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1) Montrer que N_1 est une norme sur E.
2) Soit N une norme quelconque définie sur E.
   a) Montrer que $N(x) \leq \beta N_1(x)$.
   b) Montrer que $|N(x) - N(y)| \leq \beta N_1(x - y)$.
3) Soit l'ensemble $S = \{x \in E,\ N_1(x) = 1\}$.
   a) Montrer que S est un compact.
   b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\alpha = inf_{x \in S} N(x)$, en déduire que $N(x) \geq \alpha N_1(x)$.
4) Montrer que les normes N_1 et N sont équivalentes.

Exercice 2

1) Montrer que si N_1 et N_2 sont équivalentes alors elles définissent la même topologie.
2) Montrer que si N_1 et N_2 sont équivalentes sur un $\mathbb{k}$ espace vectoriel, si (E, N_1) est complet alors (E, N_2) l'est.
3) En déduire que tous les espaces de dimensions finies sont des espaces de Banach.

Exercice 3

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel de dimension quelconque alors toute application linéaire de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$ est continue.

Exercice 4

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications Lipchitziennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $N: E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall f \in E, N(f) = \|f\|_\infty + sup_{x,y\in([a,b])^2 \, et \, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

est une norme.

2) (E,N) est- il complet ?

Exercice 5

On note $U = \{z \in \mathbb{C} \, / \, |z| = 1\}$

1) Montrer que l'application $N: \mathbb{C}(X) \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}(X), N(P) = sup_{z\in U} |P(z)|$$

est une norme.

2) $(\mathbb{C}(X), N)$ est- il complet ?

Exercice 6

Soit $L_c(E;\, F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F

1) Montrer que

$$\|u\| = sup_{x\in E/\|x\|<1} \|u(x)\|_F$$

est une norme sur $L_c(E;\, F)$.

2) Montrer que

$$\|u\| = sup_{x\in E/\|x\|=1} \|u(x)\|_F = sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

3) Montrer que

$$\forall u \, L_c(E;\, F);\ \forall x \in E;\ \|u(x)\|_F \leq \|u\|\|x\|_E$$

et

$$\|u\| = inf\{\, k \in \mathbb{R} / \forall x \in E;\ \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}.$$

4) Montrer que

$$\forall u \, L_c(E;\, F) \, \forall u \, L_c(F;\, G) \, \|uv\| \leq \|u\|\|v\|.$$

Exercice 7

Soit l'application $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x,y) = (3x+y,\, x-3y,\, 4y)$

1) montrer que T est linéaire borné

2) Trouver la norme de T

Exercice 8

Considérons l'espace normé $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ et définissons $T : C[0,1] \to C[0,1]$ par la formule

$$(Tx)(t) = f(t)x(t) \quad \text{où } f \in C[0,1] \text{ et } t \in [0,1]$$

montrez que T est linéaire borné. Trouvez $\|T\|$

Exercice 1 :

1) Simple.

2) a- on a : $N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$

$\leqslant \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i)$

d'où : $N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i)$

Soit $\beta = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} N(e_i)$

donc : $N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \beta$

$\leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

alors : $N(x) \leqslant \beta N_1(x)$

2) b- puisque N est une norme

on a : $\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y) \leqslant \beta N_1(x-y)$

3) a- S est un compact.

3) b- S est compact et N est continue,

donc : $N(S)$ est un compact,

N atteint ses bornes, en particulier la borne inf

d'où : $\exists x_0 \in\ ,\ N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x)$

puisque $0_E \notin S$,

donc : $N(x_0) = \alpha > 0$

alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha = \inf_{x \in S} N(x)$

Soit $y = \frac{x}{N_1(x)}$

puisque : $N_1(y) = 1$

donc : $y \in S$

d'où : $N(y) \geqslant \alpha \Rightarrow \frac{N(x)}{N_1(x)} \geqslant \alpha$

$\Rightarrow N(x) \geqslant \alpha N_1(x)$

4) puisque : $\exists \alpha, \beta > 0,\ \alpha N_1(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_1(x)$

d'où : N_1 et N sont équivalentes.

Exercice 2 :

1) Evident !

2) N_1 et N_2 sont équivalentes

Alors : $\exists \alpha, \beta > 0,\ \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$ (*)

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, N_1)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}, \; p, q > N \Rightarrow N_1(x_p - x_q) < \varepsilon$

d'après $(*)$, on a : $\alpha N_2(x_p - x_q) \leqslant N_1(x_p - x_q) < \varepsilon$

$$N_2(x_p - x_q) < \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon'$$

donc : $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (E, N_2),

et puisque (E, N_1) est complet,

donc : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ dans (E, N_1)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall n > \eta \Rightarrow N_1(x_n - x) < \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha N_2(x_n - x) < \varepsilon$

$\Rightarrow N_2(x_n - x) < \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon'$.

donc : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ dans (E, N_2)

d'où : (E, N_2) est complet.

3) Evident !

Exercice 3 :

Soit $u : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

on pose : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\|u(x)\|_F = \|u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\|_F$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|u(e_i)\|_F$

$\beta = \sup_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|_F$

donc : $\|u(x)\|_F \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\Rightarrow \|u(x)\|_F \leqslant \beta N_1(x) \leqslant \beta \alpha \|x\|_E$

d'où : $\|u(x)\|_F \leqslant \beta \alpha \|x\|_E$

on pose $K = \beta \alpha$

alors : $\|u(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$

donc : u est continue.

Exercice 4 :

1) Simple.

2) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans (E, N)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N_0, \; |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant N(f_p - f_q) < \varepsilon$

d'où: $\forall \varepsilon>0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N_0, \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$

donc: $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

puisque $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet,

donc: $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

montrons que $f \in E$,

$$\|f_n\|_\infty + \sup \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|} = N(f_n) \leq C$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x-y|$$

par passage à la limite: $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$

d'où f est lipschitzienne de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,

montrons que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans (E, N),

on a: $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \quad N(f_p - f_q) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(y) - f_q(y))| < \frac{\varepsilon}{2}|x-y| \end{cases}$$

pour $q \to +\infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f_p(x) - f(x) - (f_p(y) - f_q(y))| < \frac{\varepsilon}{2}|x-y| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{|f_p(x) - f(x) - (f_p(y) - f_q(y))|}{|x-y|} < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(f_n - f) < \varepsilon$$

donc: $f_n \longrightarrow f$ dans (E, N)

alors: c'est un espace complet.

Exercice 7:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (3x+y,\ x-3y,\ 4y)$$

1) T est linéaire.

$$\|Tx\|_2 = \sqrt{(3x+y)^2 + (x-3y)^2 + 16y^2}$$
$$= \sqrt{10x^2 + 26y^2}$$
$$\leq \sqrt{26}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\|Tx\|_2 \leq \sqrt{26}\,\|x\|_2$$

2) $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{26}$

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2}, x \neq 0\right\}$$

pour $x_0 = (0,1)$: $\dfrac{\|Tx_0\|_2}{\|x_0\|_2} = \dfrac{\sqrt{(1,-3,4)}}{\sqrt{0+1}} = \sqrt{26}$

$$\Rightarrow \|T\| \geq \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sqrt{26}$$

Exercice 8 :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |(Tx)(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)x(t)|$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|f\|_\infty$$

On considère : $x_0 : t \longmapsto x_0(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \|x_0\|_\infty = 1$$

$$\|Tx_0\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|T\| \geq \|f\|_\infty$$

d'où, $\|T\| = \|f\|_\infty$

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Matière : calcul différentiel	SERIE 2	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1

Soit l^2 l'ensemble de toutes les suites complexes $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ qui sont carré sommables, c'est-à-dire satisfont $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2 < +\infty$; on écrit

$$l^2 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots)/\ x_i \in \mathbb{C}, \quad \forall i \in \mathbb{N}\ et\ \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2 < +\infty\right\}$$

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, \dots, x_n, \dots)/\ x_i \in \mathbb{C},\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ *avec* $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$

$$\alpha x = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots.)$$

1) Montrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2) Montrer que $(l^2, \|.\|_2)$ est un espace normé, où $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 2

Soit l^1 l'ensemble de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ qui sont carré sommables, c'est-à-dire satisfont $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty$; on écrit

$$l^1 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots)/\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\ et\ \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty\right\}$$

Pour $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, on considère $F : l_1(\mathbb{R}) \to l_1(\mathbb{R}),\ x \to F(x) = (f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$.

Montrer que F est bien définie et partout différentiable et calculer F'.

Exercice 3

Montrer que l'application f: $\|.\|_2^2 : l_1(\mathbb{R}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et de classe C^1, et calculer f'.

Exercice 4

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui sont C^1 sur $]0,1[$ et dont les composantes sont continument dérivables à gauche en 0 et à droite en 1. On prolonge f' par continuité en 0 et en 1. On munit cet espace de la norme $\|f\| = sup_{0\le t\le 1}\|f(t)\| + \|f'(t)\|$. Montrer que :

$F: E \to \mathbb{R}, f \to \int det(f(t), f'(t))dt$ est C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 5

Soit

$$\phi :]0,\infty[\to C^0([0,1]), \alpha \to (\phi_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, t \to t^\alpha).$$

On munit $C^0([0,1])$ de la norme$\|.\|_1$. Montrer que ϕ est différentiable et calculer ϕ'.

Exercice 6

La fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to \frac{x^3y}{x^4+y^2}$, prolongée par 0 à l'origine, est-elle continue, différentiable, C^1 ?

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, démontrer que l'application $f: E \to E$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définit en tout point de E un C^1-difféomorphisme local, mais que f n'est pas un C^1-difféomorphisme global.

Exercice 8

1) Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, l'application : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) \to (x + a \sin y, y + b \sin x)$ est-elle un difféomorphisme local en tout point ?
2) Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = x + a\sin(v - b\sin x)$. Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'alors c'est un C^1-difféomorphisme de$\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 9

Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1,1)$ Calculer alors $\frac{df}{dy}$ en ce point.

Exercice 10

Soit E un espace de Banach et $\phi \in L_c(E,E)$ une application linéaire continue vérifiant $\|\phi - idE\| < 1$. Alors ϕ est inversible et $\phi^{-1} \in L_c(E,E)$.

Exercice 11

Soient E et F deux espaces de Banach. L'ensemble $L_c^*(E,F)$ des isomorphismes de E sur F est ouvert et l'application $T \to T^{-1}$de $L_c^*(E,F)$ dans $L_c^*(E,F)$ est continue.

Exercice 12

Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, l'application $L(E) \to L(E), u \to u^k$ est C^1 et calculer sa différentielle.

Montrer que si E est un espace de Banach, alors l'application $L(E) \to L(E), u \to u^{-1}$ est C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 2 :

* Bien définie :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ donc: } \exists M \geq 0 \ |f(x)| \leq M|x| \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_i)| \leq M|x_i|$$

$$\Rightarrow \|F\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |f(x_i)| \leq M\|x\|_1 < +\infty$$

donc F est bien définie

* montrons que $\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|F(a+h)-F(a)-d_aF.h\|_1}{\|h\|_1} = 0$

or, on a: $\|F(x+h) - F(a) - d_aF.h\| = \sum_{i=1}^{+\infty} |f(a_i+h_i) - f(a_i) - f'(a_i)h_i|$ (α)

$f(a_i+h_i) - f(a_i) - f'(a_i)h_i = \int_0^{h_i} f'(a_i+t) - f'(a_i)\, dt$

f' est continue sur $[0, h_i]$, donc elle est uniformément continue,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ \|h\| < \delta \Rightarrow |f'(a_i+t) - f'(a_i)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^{h_i} |f'(a_i+t) - f'(a_i)|\, dt < \varepsilon h_i$$

$$\Rightarrow (\alpha) < \varepsilon \sum_{i=1}^{+\infty} h_i < \varepsilon \|h\|_1$$

donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ \|h\| < \delta \Rightarrow \frac{\|F(a+h) - F(a) - d_aF.h\|_1}{\|h\|_1} < \varepsilon$

alors: F est différentiable, et on a: $d_aF = (f'(a_i))_{i \in \mathbb{N}}$

Exercice 3 :

$$f : \ell^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2$$

on pose: $\gamma : x \longmapsto (x, x)$

$$\varphi = \langle , \rangle : (x_i, y_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$$

donc $f = \varphi \circ \gamma$

on a: $\|\langle x, y \rangle\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$, donc φ est bien définie, et comme elle est bilinéaire, φ est de classe C^1,

γ est de classe C^1,

donc f est de classe C^1

$$d_x f = d_{\gamma(x)} \varphi \circ d_x \gamma$$

or: $d_{(x,y)} \varphi(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$

donc: $d_x f h = d_{(x,x)} \varphi(h, h)$

$$= \varphi(x, h) + \varphi(x, h)$$

$= 2\varphi(x,h)$

$= 2\langle x,h\rangle$

$= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i h_i$

Exercice 4:

on considère: $I: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int f(t)\,dt$

$D: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f,g) \longmapsto \det(f,g)$

$u: E \longrightarrow E\times E$

$f \longmapsto (f,f')$

I, D et u sont de classe C^1 et comme $F = I\circ D\circ u$, donc F est de classe C^1.

$d_f F = d_f(I\circ D\circ u)$

$= d_{(f,f')}(I\circ D)\circ u$

$= d_{\det(f,f')} I\circ(d_{(f,f')}D)\circ u$

$d_f F.h = I\circ(d_{(f,f')}D)\circ(h,h')$

$= I\circ(\det(f,h')+\det(h,f'))$

$= \int \det(f(t),h'(t)) + \det(h(t),f'(t))\,dt$

Exercice 5:

$\phi:]0,\infty[\longrightarrow C^0([0,1])$

$\alpha \longmapsto \phi_\alpha$

$\phi_\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto t^\alpha$

$(t^\alpha)' = (e^{\alpha\ln(t)})'$

$= \ln(t)\,t^\alpha$

montrons que: $\lim_{h\to 0} \frac{\|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)-d_\alpha\phi.h\|_1}{h} = 0$

$\|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)-d_\alpha\phi.h\|_1 = \int_0^1 |t^{\alpha+h}-t^\alpha-\ln t\, t^\alpha h|\,dt$

$= \int_0^1 t^\alpha|t^h-1-\ln(t).h|\,dt$

or: $t^h-1-h\ln(t) = e^{h\ln(t)}-1-h\ln(t)$

$= e^x-1-x \geqslant 0,\ \forall x\geqslant 0$ avec $x = h\ln t$

donc: $\|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)-d_\alpha\phi.h\|_1 = \int_0^1 t^{\alpha+h}-t^\alpha-\ln(t)h t^\alpha\,dt$

$= \left[\frac{t^{\alpha+h+1}}{\alpha+h+1}-\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 - h\int_0^1 \ln(t)t^\alpha\,dt$

$$= \left[\frac{t^{\alpha+h+1}}{\alpha+h+1} - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 - h\left[\frac{\ln(t)}{\alpha+1}t^{\alpha+1} - \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+h+1} - \frac{1}{\alpha+1} + h\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\alpha^2}+\cancel{2\alpha}+\cancel{1}-\cancel{\alpha^2}+\alpha h-\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}-\cancel{h}-\cancel{1}+\alpha h+h^2+\cancel{h}}{(\alpha+1)^2(\alpha+h+1)}$$

$$= \frac{h^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+h+1)}$$

Exercice 7 :

Propriété : C^1 - difféomorphisme

* $\phi : U \to V$ de classe C^1
* $\det(J(\phi)) \neq 0 \Leftrightarrow \phi$ est bijective
* Si ϕ est bijective $\phi(U) = V \Rightarrow C^1$-diff global
  ↳ Sinon : C^1-diff local

On a : $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f : E \to E$$
$$(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$$

montrons que f est C^1 - difféomorphisme local et non globale

• f est de classe C^1

•• $J(f) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$\det(J(f)) = 4x^2 + 4y^2 \neq 0 \Leftrightarrow f$ est bijective

$\Leftrightarrow f$ est C^1-diff local

••• $f(-1,1) = (0,-2)$ et $f(1,-1) = (0,-2)$

donc f n'est pas injective $\Rightarrow f$ n'est pas C^1-diff global

Exercice 8 :

1\ • f est de classe C^1

•• $J(f) = \begin{pmatrix} 1 & a\cos y \\ b\cos x & 1 \end{pmatrix}$

$\det(J(f)) = 1 - ab\cos x\cos y$

On a : $|1 - ab\cos x \cos y| \geq 1 - |ba||\cos x\cos y|$

donc : * Si $|ab| > 1 \Rightarrow f$ est C^1 diff local

3\ f est C^1 - difféomorphime global

$$\begin{cases} x + a\sin y = u \\ y + b\sin x = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a\sin(v - b\sin x) = u \\ y = v - b\sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = u \\ y = v - b\sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(u) \\ y = v - b\sin(g^{-1}(u)) \end{cases}$$