Cours : Analyse I

Pr : **OUAISSA Hamid**

Licence Education
Spécialité : Enseignement secondaire Mathématiques

Année universitaire : 2023-2024

1

Nombres réels

1.1 Introduction

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$$

Puisque chaque entier naturel n admet un successeur $n+1$, on se convainc facilement que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls. Étant donné deux entiers naturels x et y on définit les opérations algébriques suivantes

$$x+y, \quad x-y, \quad x \cdot y \text{ et } \frac{x}{y} \quad \text{si } y \neq 0$$

On remarque que l'addition et la multiplication sont des opérations qui donnent des résultats dans $\mathbb{N}$. Tandis que le résultat d'une soustraction ou d'une division n'est pas nécessairement un entier naturel. Pour cela, de nouveaux ensembles ont été élaboré pour recouvrir les solutions de différentes équations par exemple celles de type

$$x + m = 0 \quad \text{où } m \in \mathbb{N}$$

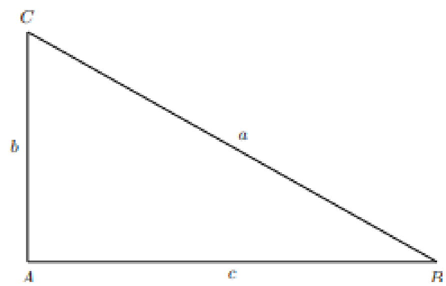
Il s'agit en fait de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ donné par

$$Z = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...,$$

on notera aussi $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, Également, la même question s'est posé pour les solutions des équations de type

$$nx = m, \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}\ m \in \mathbb{N}^*$$

(particulièrement quand n et m sont premiers entre eux, càd n'admettent pas de diviseurs communs.)



L'ensemble permettant de recouvrir ces solutions est appelé l'ensemble des nombres rationnels noté par

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \quad | \quad a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in Z^*\}$$

l'ensemble des nombres rationnels dans lequel on identifie la fraction $\frac{a}{b}$ avec $\frac{an}{bn}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{Z}^*$.
On peut bien remarquer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ contient l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme:

$$\mathbb{D} = \{\frac{\alpha}{10^p}, p \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

appelé l'ensemble des nombres décimaux.
On a bien entendu les inclusions suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

et les quatre opérations élémentaires $+, -, \cdot$ et $/$ peuvent s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Proposition 1.1.1. Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple 1.1.1.

$$\frac{3}{5} = 0.6 \quad \frac{1}{3} = 0.3333... \quad 1.179325325325...$$

Les Grecs classiques ont cru longtemps que toutes les quantités s'exprimaient par des nombres rationnels. Ils se sont aperçu que ce n'est pas toujours le cas. En effet, on peut construire des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un triangle ABC rectangle en A. Si on note a la longueur du segment BC, b celle de CA et c celle de AB, alors le théorème de Pythagore dit qu'on a la relation

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi on obtient que la longueur de la diagonale d'un carré de côté $b = c = 1$ est égale à $a = \sqrt{2}$.

Proposition 1.1.2. Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers positifs a, b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2. En simplifiant par 2 autant que possible, on arrive au cas où au moins un des deux entiers a ou b est impair. C'est-à-dire que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.
En élevant au carré l'égalité $2 = a/b$ et en chassant le dénominateur, on arrive à

$$2b^2 = a^2.$$

Donc a^2 est pair.
Or, si a est impair, on peut écrire $a = 2k + 1$, alors $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est impair.
Par contraposée, on en déduit donc que a est pair, donc on peut écrire $a = 2k$, ce qui donne $2b^2 = 4k^2$ et en simplifiant par 2, on obtient

$$b^2 = 2a^2.$$

Le même raisonnement montre alors que b est aussi pair. On a donc une contradiction et $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

Voici d'autres exemples de nombres irrationnels.

1. Le nombre $\pi = 3,1415...$ défini comme la circonférence d'un cercle de diamètre 1.

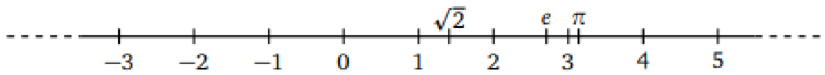
2. Le nombre d'Euler $e = 2,718...$, la base de l'exponentielle, défini comme somme infinie
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} + ...$$

3. Les racines carrés $\sqrt{n}$ si n est un entier qui n'est pas un carré, c'est-à-dire qui n'est pas de la forme $n = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

La proposition 1.1.2 dit que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Cependant nous savons que le nombre $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme d'un développement décimal infini $\sqrt{2} = 1,41421356...$ Dans ce chapitre nous prenons cette représentation décimale comme définition d'un nombre réel.

Définition 1.1.1. (nombre réel) Un nombre réel est une collection de chiffres $\{c_0, ..., c_m\}$ et $\{d_1, d_2, ...\}$ compris entre 0 et 9. Les chiffres c_i sont en nombre fini et les chiffres d_j peuvent être en nombre infini. On fait correspondre à cette collection le nombre donné par le développement décimal

$$x = c_m c_{m-1} ... c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 ... d_n ...$$



l'ensemble des réels est noté par $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1. -Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de 2, π et e.
-On a les inclusions suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- On notera très souvent $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls.

On représente souvent les nombres réels sur une « droite réelle » : Il est souvent pratique de rajouter les deux extrémités à la droite réelle appelée la droite réelle achevée.

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Exercice 1.1.1.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. Qu'en est-il pour les irrationnels ?

2. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction :

$$0,1212; \quad 0,12\,12\,12...; \quad 78,33456456...$$

3. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

4. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Propriété de $\mathbb{R}$

1.2.1 Addition et multiplication

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$a + b = b + a \quad a \times b = b \times a$$

$$0 + a = a \quad 1 \times a = asia \neq 0$$

$$a + b = 0 \Longleftrightarrow a = -b; \quad ab = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{b}$$

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

$$a\times b = 0 \Longleftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0)$$

On résume toutes ces propriétés en disant que :
Propriété ($\mathbb{R}$).
$(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif.

1.2.2 Ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est ordonné, ceci veut dire que cet ensemble admet une relation d'ordre notée par $\leq$. C'est la relation habituelle sur les réels. La notion d'ordre est générale, on la définit sur un ensemble quelconque comme suit:

Définition 1.2.1. Soit E un ensemble.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble $E\times E$. Pour $(x,y)\in E\times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

2. Une relation R est une relation d'ordre si
   - R est réflexive : pour tout $x\in E$, $x\mathcal{R}x$,
   - R est antisymétrique : pour tout $x,y\in E$, $\quad (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$,
   - R est transitive : pour tout $x,y,z\in E$, $\quad (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Définition 1.2.2. Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si pour tout $x,y\in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que (E,R) est un ensemble totalement ordonné.

L'ensemble $\mathbb{R}$ satisfait la propriété suivante :
Propriété La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Remarque 1.2.1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a par définition

$$x\leq y \Longleftrightarrow y-x\in\mathbb{R}^+$$

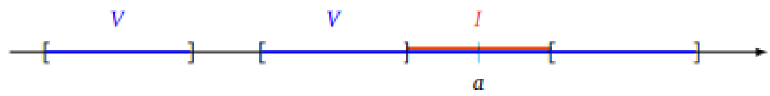
$$xy \Longleftrightarrow x\leq y \text{ et } x\neq y$$

1.2.3 Intervalles

Définition 1.2.3. Soient a,b deux réels tels que $a\leq b$. L'ensemble I donné par

$$I=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\leq x\leq b\}$$

définit un intervalle fermé, noté $I=[a,b]$, il est appelé aussi un segment.



Définition 1.2.4. Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\, a < x < b\},$$

où a et b sont des éléments de $\bar{R}$.

Remarque 1.2.2. Tout intervalle ouvert est appelé directement un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.1. *Soit a, b deux réels tels que $a \leq b$:*
-$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ et $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ sont des ouverts.
- Les intervalles de type $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$ et $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$ sont appelés des semi-ouverts. on peut ajouter les intervalles de type $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.
-Par définition $I = \emptyset$ est un intervalle.
-les singletons $\{a\} = [a, a]$
- $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est un intervalle.

On peut pas parler d'ouvert sans évoquer la notion de voisinage qui est utile et essentiel pour les limites.

Définition 1.2.5. Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

1.2.4 Valeur absolue

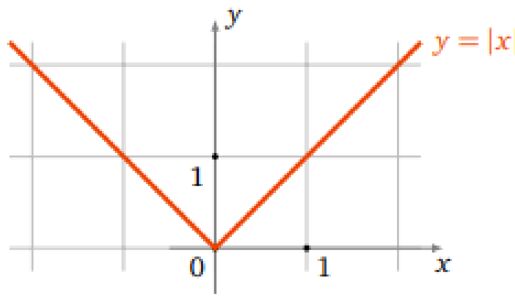
Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par :

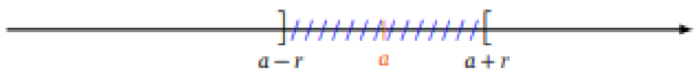
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Voici le graphe de la fonction $x \to |x|$:

Propriétés 1.2.1. Soient x, y deux réels.

1. $|x| \geq 0; \quad |-x| = |x|; \quad |x| > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. $|xy| = |x||y|$
4. L'inégalité triangulaire $|x + y| \leq |x| + |y|$





5. Seconde inégalité triangulaire $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
6. Soit $a > 0$, alors on a $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$, on retrouve la même inégalité pour le sens strict $(<)$.
7. On a également

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

On retrouve la même chose au sens strict.

Remarque 1.2.3. Sur la droite réelle, pour deux réelles $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0. De plus, on a

$$|x - a| < r \Longleftrightarrow a - r < x < a + r$$

ou encore,

$$|x - a| < r \Longleftrightarrow]a - r, a + r[$$

$]a - r, a + r[$ représente un voisinage de a.

1.2.5 Majorants, minorants

On vient de voir que $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné, on définit ainsi la notion de majorants, minorants comme suit :

Définition 1.2.6. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Un réel M est dit un majorant de A si

$$\forall x \in A \qquad x \leq M.$$

on dit aussi que A est majorée par M.

- Un réel m est dit un minorant de A si
$$\forall x \in A \qquad x \geq m.$$
on dit aussi que A est minorée par m.
- On dit que A est bornée, si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1.2.2. 1. *Soit* $D =]0,1[$, *alors* 1 *est majorant de* D *tandis que* 0 *est un minorant de* D.

2. *On considère* $A = [3,4]$, *alors 4 est un majorant de* A. *l'ensemble des majorants de* A *est* $[4,+\infty[$, *tandis que 3 est un minorant de* A *et* $]-\infty,3]$ *désigne l'ensemble des minorants de* A.
3. *Soit* $B = \{1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}\}$, *montrer que* B *est majoré par* 2
4. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est minoré par 0.*
5. *Soit* $C = [2,+\infty[$, *on montre par absurde que* C *n'est pas majorée: supposons qu'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que*
$$\forall x \in C \quad x \leq m$$
or $2 \in C$. *Donc* $2 \leq m$, *ainsi* $2 \leq 3 \leq m+1$, *par-suite* $m+1 \in C$. *D'où* $m+1 \leq m$ *(car* m *est un majorant de* C*) càd* $1 \leq 0$ *ce qui est impossible. Donc* C *n'est pas majorée.*
6. *Soit* $E =]-\infty,1[$, *montrer de la même manière (par absurde) que* E *n'est pas minorée.*
7. *Puisque* $\forall x \in \mathbb{R}; \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$ *alors l'ensemble*
$$F = \{\sin(x)/x \in \mathbb{R}\}$$
est majoré par 1 et minoré par -1, donc F *est borné.*

Remarque 1.2.4. A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, si et seulement s'il existe un réel positif k tel que:
$$\forall a \in A \qquad |a| \leq k.$$

Définition 1.2.7. (Plus grand élément) Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide et A une partie non vide de E.
L'élément M de E est dit un plus grand élément de A si

1. $\forall x \in A, \qquad x \leq M$
2. $M \in A$

Notation : Si A possède un plus grand élément, il est appelé également maximum et noté par $\max(A)$

Exemple 1.2.3. *On considère l'ensemble* $(\mathbb{R}, \leq)$:
1. *l'ensemble* $\mathbb{N}$ *n'est pas majoré, donc ne possède pas de plus grand élément.*
2. *tout intervalle* $]a, b]$ *admet comme maximum* b.

Exercice : Montrer que $A =]0, 1[$ n'admet pas de plus grand élément.

Proposition 1.2.1. Le plus grand élément d'une partie non vide, s'il existe, est unique.

Démonstration. Soient $(E, \leq)$ un ensemble non vide et A une partie non vide de E. supposons que A admet deux plus grand éléments M_1 et M_2 distincts.
Comme $M_1 \in A$ et M_2 est un majorant de A par définition, on a

$$M_1 \leq M_2 \tag{1.1}$$

De même, $M_2 \in A$ et M_1 est un majorant de A. Donc

$$M_2 \leq M_1 \tag{1.2}$$

D'après (1.1) et (1.2), on obtient

$$M_1 = M_2$$

Maintenant, On définit le plus petit élément

Définition 1.2.8. (Plus petit élément) Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide et A une partie non vide de E.
L'élément m de E est dit un plus petit élément de A si
i) $\forall x \in A, \qquad x \geq m.$
ii) $m \in A.$
Notation : Si A possède un plus petit élément, il est appelé également le minimum de A et noté par $\min(A)$

Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple 1.2.4.
1. *Soit* $A = [0, 1]$, *alors l'ensemble des minorants de* A *est* $]-\infty, 0]$, *comme* $0 \in A$ *alors* $\min(A) = 0$.
2. $B =]3, 4]$, *on montre que* B *ne possède pas de plus petit élément. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe et notons le par* $l = \min(B)$ *alors*

$$l \leq 3$$

car l *est un minorant de* B.
Or $l \in B$ *donc* $l > 3$, *ce qui est impossible.*

3. $\min(\mathbb{N}) = 0$, *Généralement, tout partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*

4. $\max([a, b]) = b, \min([a, b]) = a$.

5. *L'intervalle* $]a, b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*

6. *L'intervalle* $[0, 1[$ *a pour plus petit élément 0 et n'a pas de plus grand élément.*

Proposition 1.2.2. Soit A une partie non vide, le plus petit élément, s'il existe, est unique.

Démonstration. Par absurde (Exercice)

1.2.6 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.2.9. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que l est la borne inférieure de A (s'il existe) si l est le plus grand des minorants de A et on note $l = \inf(A)$.
- On dit que s est la borne supérieure de A (s'il existe) si s est le plus petit des majorants de A et on note $s = \sup(A)$.

Exemple 1.2.5.

- $A = [0, 1[$, *l'ensemble des minorants de* A *est* $]-\infty, 0]$. *Donc* $\inf(A) = 0$ *tandis que l'ensemble des majorants est* $[1, +\infty[$ *alors* $\sup(A) = 1$.
- *Généralement, soient* a, b *deux réels* $(a < b)$*, alors on a*

$$\inf([a, b]) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b]) = \inf(]a, b[) = a$$

$$\sup([a, b]) = \sup([a, b[) = \sup(]a, b]) = \sup(]a, b[) = b$$

- $]0, +\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure.*
- $\inf(]0, +\infty[) = 0$
- $\sup\{\sin(x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = 1$.
- *Soit* $A = \{x \in \mathbb{Q}, 0 < x \leq 1\}$. *Alors* $\sup(A) = 1$ *et* $\inf(A) = 0$.

Théorème 1.2.1. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. D'ailleurs, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Remarque 1.2.5. C'est tout l'intérêt de la borne supérieure par rapport à la notion de plus grand élément, dès qu'une partie est bornée elle admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Ce qui n'est pas le cas pour le plus grand ou plus petit élément. Gardez à l'esprit l'exemple $A = [0, 1[$.

Proposition 1.2.3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. La borne supérieure (resp. inférieure) de A s'il existe est unique.

Démonstration. Par unicité du plus grand élément (plus petit élément) qu'on retrouve dans la définition de la borne supérieure (resp la borne inférieure).

Proposition 1.2.4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A possède un maximum (resp. minimum), alors

$$\sup(A) = \max(A) \quad (resp. \inf(A) = \min(A)).$$

Démonstration. Soit $l = \min(A)$ (il existe par hypothèse), soit m un minorant de A, puisque $l \in A$ alors $m \leq l$. Donc l est le plus grand minorant de A, ainsi $l = \inf(A)$. On démontre de la même manière le résultat pour le maximum.

Remarque 1.2.6. La réciproque de la proposition 1.2.4 est fausse comme le montre le contre-exemple suivant: $A = [0, 1[$, alors $\sup[0, 1[= 1$, mais A n'a pas de maximum.

Maintenant, on passe aux caractérisations des bornes supérieure et inférieure.

Proposition 1.2.5. (Caractérisation de la borne supérieure)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $s = \sup(A)$ tel que

$$s = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A, & & x \leq s, \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0 & \exists x_\varepsilon \in A & s - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.2.6. (Caractérisation de la borne inférieure)
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. La borne inférieure de A est l'unique réel $l = \inf(A)$ tel que

$$l = \inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A, & & l \leq x, \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0 & \exists x_\varepsilon \in A & x_\varepsilon < l + \varepsilon. \end{cases}$$

A part la définition, on peut déterminer la borne supérieure (resp inférieure) en utilisant la caractérisation.

Exemple 1.2.6. *1. On considère la partie $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid, n \in \mathbb{N}^*\}$. On montre que la borne supérieure de A vaut 1.*

- *Première méthode : en utilisant la définition de la borne supérieure. Soit M un majorant de A alors $M \geq 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc à la limite $M \geq 1$. Réciproquement si $M \geq 1$ alors M est un majorant de A. Donc les majorants sont les éléments de $[1, +\infty[$. Ainsi le plus petit des majorants est 1 et donc* $\sup(A) = 1$.

- *Deuxième méthode pour* $\sup(A)$ *en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.*
  i) Si $x \in A$, alors $x \leq 1$ (1 est bien un majorant de A);
  ii) Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $1 - \varepsilon < x_\varepsilon$: en effet si on suppose qu'un tel x_ε existe alors $x_\varepsilon = 1 - \frac{1}{n_\varepsilon}$ pour $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < x_\varepsilon &\iff 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_\varepsilon} \\ &\iff \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon} \\ &\iff n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

  Donc, il suffit de prendre $n_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.

D'autre part, on a bien $\min(A) = 0$, *car 0 est un minorant de A et $0 \in A$, alors le plus petit élément existe, d'après la proposition 1.2.4*

$$\inf(A) = \min(A) = 0$$

On considère maintenant $B = \{2 + \frac{1}{n}, \quad /n \in \mathbb{N}*\}$, on montre que $\inf(B) = 2$, *en effet:*
i) on pour tout $x \in B$, $x > 2$.
ii) Soit $\varepsilon > 0$, Montrons qu'il existe $x_\varepsilon = 2 + \frac{1}{n_\varepsilon} \in B$ où $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 + \varepsilon > x_\varepsilon$.
Or si on suppose que x_ε existe, alors

$$\begin{aligned} 2 + \varepsilon > x_\varepsilon &\iff 2 + \varepsilon > 2 + \frac{1}{n_\varepsilon} \\ &\iff \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon} \\ &\iff n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $n_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.

1.2.7 Propriété d'Archimède

Théorème 1.2.2. ($\mathbb{R}$ est archimédien)
Étant donné deux réels x et y, x est strictement positif, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y < nx$

Démonstration. Soient deux réels x et y, où x est strictement positif,

1. Si $y \leq 0$, il suffit de prendre $n = 1$.

2. Si $y > 0$, soit $x > 0$ on démontre le résultat par absurde, en supposant que que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y \geq nx$. on pose

$$A = \{nx, \ n \in \mathbb{N}\}$$

alors A est majoré par y. La construction de $\mathbb{R}$ implique alors que $\alpha = \sup(A)$ existe. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad (n+1)x \leq \alpha,$$

d'où, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$nx < \alpha - x.$$

Ainsi $\alpha - x$ est un majorant de A et de plus on a

$$\alpha - x < \alpha = \sup(A) \quad \text{c'est absurde,}$$

car la borne sup est le plus petit des majorants! Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < nx$.

Corollaire 1.2.1. On a

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\exists n \in \mathbb{N}) : \quad x < n.$$

Remarque 1.2.7. En faite $\mathbb{R}$ hérite de beaucoup des propriétés de $\mathbb{Q}$, à titre d'exemple $\mathbb{Q}$ est aussi archimédien.

Exercice 1.2.1. Montrons les deux assertions suivantes :
1. $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.
2. $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée ni minorée.

Démonstration. 1. Soit $m \in \mathbb{N}$, alors $m \in \mathbb{R}$.
D'après le corollaire1.2.1, $\exists n \in \mathbb{N} : \quad m < n$. Donc $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.
2. Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majorée et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, alors $\mathbb{Z}$ n'est pas majorée.
Montrons que $\mathbb{Z}$ n'est pas minorée.
Soit $m \in \mathbb{Z}$, alors $-m \in \mathbb{Z}$. D'après le corollaire 1.2.1, il existe $n \in \mathbb{N} : \quad -m < n$.
D'où $m > -n$ avec $-n \in \mathbb{Z}$. Ce qui implique que Z n'est pas minorée.

Cette propriété d'archiméde peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel.

Proposition 1.2.7. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$n \leq x < n+1$$

Démonstration. :
Unicité : Si n et m vérifiant $n \leq x < n+1$ et $m \leq x < m+1$ alors

$$m < n+1 \qquad n < m+1$$

Nous avons donc deux entiers tels que

$$m < n+1 < m+2$$

Donc $n = m$.
Existence : Si $x = 0$ il n'y arien à démontrer : $n = 0$.
Si x est un entier, il suffit de prendre $n = x$. Sinon lorsque $x > 0$, on applique le théorème précédant à x et 1 : il existe $m \in \mathbb{N}$ non nul tel que $x < n \cdot 1$. Ainsi l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \quad x < n\}$$

est non vide. Soit l'entier n_0 son plus petit élément. Alors $x < n_0$ car $n_0 \in A$ et $n_0 - 1 \leq x$ car sinon $x < n_0 - 1$ et n_0 ne serait plus le plus petit élément. On a aussi $n_0 - 1 \neq x$ car x n'est pas entier donc $n_0 - 1 < x < n_0$. L'entier $n = n_0 - 1$ convient.
Si $x < 0$, on raisonne de la même manière en considérant cette fois $-x$.

Définition 1.2.10. On appelle partie entière de x et on note E(x) l'entier tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exemple 1.2.7.

$$E(1.3) = 1, E(-1.1) = -2$$

On représente le graphe de la fonction $x \to E(x)$ dans la figure 1.1.

1.3 Résultats de densité dans $\mathbb{R}$

La propriété d'Archimède de l'ensemble des réels, nous a permet de prouver le résultat de densité suivant:

Théorème 1.3.1. (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) : Entre deux réels distincts , il existe un rationnel c-à-d

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}) \quad (a < b \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b)).$$

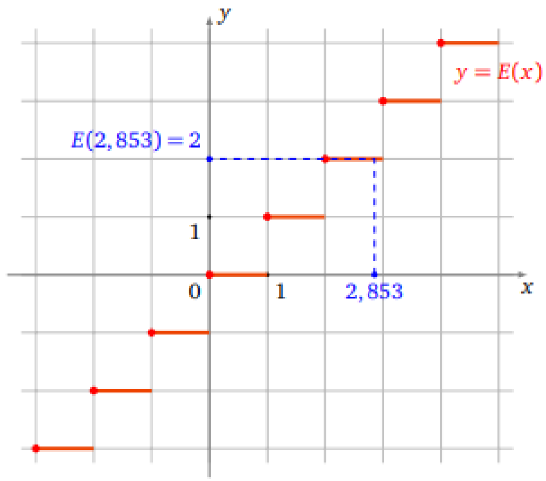


Figure 1.1: La courbe de la fonction $x \to E(x)$

Démonstration. Soit a, b deux réels tels que $a < b$.
Il s'agit d'exhiber un rationnel $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < \frac{p}{q} < b$. En appliquant la propriété d'Archimède, on voit qu'il existe un entier q tel que

$$\frac{1}{b-a} < q$$

(on prend $x = 1$ et $y = 1/(b-a)$). On obtient

$$qa + 1 < qb. \quad (1)$$

Soit p le plus petit entier relatif tel que $p > qa$. On a alors

$$p - 1 \leq qa < p, \qquad (2)$$

donc $p \leq qa + 1$ et $qa < p \leq qa + 1 < qb$. En divisant par q on a le résultat désiré.

Théorème 1.3.2. L'ensemble des nombres irrationnels noté $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit i un nombre irrationnel.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On applique le théorème précédent à $]a - i, b - i[$: il existe un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a - i < r < b - i.$$

Alors $a < i + r < b$. Le nombre $x = i + r$ est irrationnel, sinon $i = x - r$ serait rationnel contrairement à l'hypothèse. Le théorème est donc démontré.

Corollaire 1.3.1. Tout intervalle ouvert (non vide) de R contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.

Démonstration. Nous avons démontré qu'entre deux réels distincts a et b il existait un rationnel et un irrationnel.
Soit n un entier naturel supérieur à 1. Si l'on partage l'intervalle $]a, b[$ en n sous-intervalles, nos démonstrations restent valides pour chacun de ces sous-intervalles.
Par conséquent, tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient n rationnels et n irrationnels.
Si l'on considère $n+1$ sous-intervalles de $]a; b[$, la démonstration se vérifie encore.
Par conséquent, on peut considérer une infinité de sous-intervalles : il existe une infinité de rationnels et d'irrationnels dans n'importe quel intervalle $]a; b[$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

Maintenant, on s'intéresse à l'approximation décimale des nombres réels, en se servant de la partie entière vu précédemment.

1.4 Approximation décimale

Parmi les rationnels, les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels.

Définition 1.4.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie décimale de x et on note $D(x)$, la différence de x avec sa partie entière $E(x)$.

$$D(x) = x - E(x)$$

où $D(x) \in [0, 1[$.

A partir de la définition ci-dessous. on remarque que :

Remarque 1.4.1. Un nombre réel est un nombre décimal s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k d \in \mathbb{Z}$.

alors pour approcher un nombre réel, on procède comme suit : soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in N$. Considérons La partie entière de $10^n x$

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1.$$

Donc

$$10^{-n} E(10^n x) \leq x < 10^{-n} E(10^n x) + 10^{-n}.$$

Notons $d_n = 10^{-n} E(10^n x)$ satisfait alors

$$d_n \leq x < d_n + 10^{-n}.$$

Alors le nombre décimal d_n est appelé l'approximation décimale de x par défaut a 10^{-n} près. Tandis que $d_n + 10^{-n}$ est appelé l'approximation décimale de x par excès à 10^{-n} près.

Exemple 1.4.1. *On considère $x = \pi$, alors*

$$d_0 = 3, \quad d_1 = 3.1 \quad d_2 = 3.14, \quad d_3 = 3.141, \quad d_4 = 3.141, \quad d_5 = 3.14159$$

Remarque 1.4.2. :

1. $d_n \leq d_{n+1} \leq x < d_{n+1} + 10^{-(n+1)} < d_n + 10^{-n}$.
2. d_n et d_{n+1} coïncide jusqu'à le dernier décimal de d_n.
3. En théorie, on peut approcher un réel x par un nombre décimal à n'importe quelle précision. En pratique, la précision habituelle sur des calculs d'ordinateurs est de l'ordre de 10^{-15}.