Chap 1 :

Dans tout le chapitre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1_ Rappels sur les applications linéaires :

Définition :

Soient E et F deux e.v sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F

on dit que f est linéaire si : * $\forall (x,y) \in E^2 : f(x+y) = f(x) + f(y)$

* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

les deux assertions peuvent réunies en une seule :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} : f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F

et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E = endomorphisme

Proposition :

$\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$.e.v

Remarque : $f(0_E) = 0_F$; $f \in \mathcal{L}(E,F)$

* Image et Noyau :

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $f(E)$ est s.e.v de F, appelé image de f, noté $Im(f)$

Remarque :

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice (ou base) de E, alors : $Im(f) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, la dimension de $Im(f)$ est appelée le rang de f, et il est noté $rg(f)$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose : $Ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$

$Ker f$ est un s.e.v de E, appelé le noyau de f

* Injective, bijective et surjective :

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

* f est surjective ssi : $Im(f) = F$
* f est injective ssi : $Ker(f) = \{0\}$

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\{v_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E

a) Si f est injective et si $\{v_i\}_{i \in I}$ est libre, alors :
$\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est libre de F

b) Si f est surjective et si $\{v_i\}_{i \in I}$ est génératrice de E, alors : $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice de F

c) Si f est bijective, alors l'image d'une base de E est une base de F

Théorème du rang :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ (E et F de dimension finie)

$\Rightarrow \quad \dim(E) = rg(f) + \dim(Ker f)$

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont deux s.e.v de même dimension (finie)

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

f bijective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow Im(f) = E$

Proposition :

Soit $\mathcal{L}(E,F)$ (E et F de dimension finie)

$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(E)) = \dim^2(E)$

* Il faut aussi revoir :
  * Matrices / Matrices et endomorphismes
  * Matrices de passage
  * Changement de base
  * Rang d'une Matrice

Réduction des endomorphismes:

Pour une application linéaire f de E dans E ($\in \mathcal{L}(E)$) - resp une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ - réduire f - resp A - c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E - resp une matrice P inversible - telle que: $M(f, \mathcal{B})$ - resp $P^{-1}AP$ - soit triangulaire, ou diagonale, ...

2_ Elément propre d'un endomorphisme:

2-1_ Valeurs propres et vecteurs propres:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, E est e.v de dim finie

Définition:

on appelle valeur propre de la matrice A - resp de l'endo f - le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \neq 0$ tel que: $AX = \lambda X$

- resp $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ -

on dit que X - resp x - est un vecteur propre de A - resp de f - associé à λ

on dit que λ est une valeur propre de A - resp de f - associée à X - resp à x -

Le couple (λ, X) - resp (λ, x) - est appelé **élément propre** de A - resp de f -

Exemples:

Soit E un e.v sur $\mathbb{K}$

$f(x)=0$

1\ 0 est l'unique valeur propre de l'endomorphisme nul, et tout vecteur non nul est un vecteur propre de l'endomorphisme nul

$f(x)=x$

2\ 1 est l'unique valeur propre de Id_E (identité), et tout vecteur non nul est un vecteur propre de Id_E

3\ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (y+z, -x+y-z, x+y+3z)$

Vérifions que $(2,1,-1)$ et $(0,1,-1)$ sont des vecteurs propres de f:

- $f(2,1,-1) = (0,0,0) = 0(2,1,-1)$

Donc: $(2,1,-1)$ est un vecteur propre associé à 0

- $f(0,1,-1) = (0,2,-2) = 2(0,1,-1)$

Donc: $(0,1,-1)$ est un vecteur propre associé à 2

4\ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc, v_1 est un vecteur propre associé à 1

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, v_2 est un vecteur propre associé à 2

* Questions:

1\ Un vecteur propre associé à une valeur propre est-il unique?

$\Rightarrow$ Ce n'est pas unique

Soit $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{K}$

c-à-d, $f(x) = \lambda x$

Soit $\alpha \in \mathbb{K} \neq 0$.

$$f(\alpha x) = \underset{(f \text{ endo})}{\alpha f(x)} = \underset{(x \text{ vecteur propre})}{\alpha \lambda x} = \lambda \alpha x$$

2\ Comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres?

$\Rightarrow$ Généralement, on résoudre un système de type,

$$(A - \lambda I_n)\, x = 0$$

Proposition:

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f ssi: l'endomorphisme $(f - \lambda Id_E)$ n'est pas injective

Démonstration,

λ valeur propre de $f \iff \exists x \in E \setminus \{0\} : f(x) = \lambda x$

$\iff \exists x \in E \setminus \{0\} : (f - \lambda Id_E)x = 0$

$\iff \exists x \in E \setminus \{0\} : x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_E)$

$\iff (f - \lambda Id_E)$ n'est pas injectif

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors λ est une valeur propre de f ssi :

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

où A est la matrice associée à f (non inversible) dans la base canonique

Définition :

L'ensemble des valeurs propres d'un endo f est appelé spectre de f, et noté : $Sp(f)$

Exercice :

Soit : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (-2x-2y+2z, -3x-y+3z, -x+y+z)$

1\ Ecrire f sous forme d'une matrice :

2\ On suppose que : $v_1 = (1,1,0)$; $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$ trois vecteurs propres de f. Calculer $Sp(f)$

1\ Soit : $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ La forme matricielle de f

2\ On a :

- $f(v_1) = f((1,1,0)) = (-4,-4,0) = -4(1,1,0) = -4v_1$
- $f(v_2) = f((0,1,1)) = (0,2,2) = 2\cdot(0,1,1) = 2v_2$
- $f(v_3) = f((1,0,1)) = (0,0,0) = 0\cdot(1,0,1) = 0v_3$

Alors : $Sp(f) = \{-4, 0, 2\}$

3_ Sous-espaces propres

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie, et soient f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ un valeur propre de f.

Le sous-espace propre associé à λ, noté E_λ, et définie par :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E \,/\, f(x) = \lambda x\}$$

Remarque :

E_λ est donc formé des vecteur 0_E et les vecteurs propres associés à λ ↙

C'est un s.e.v de E : $\dim(E_\lambda) \geqslant 1$

* E_λ est stable par f, c-à-d, $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

En effet : $v \in E_\lambda$ alors $f(v) = \lambda v$

$f(\underbrace{f(v)}_{V}) = f(\lambda . v) = \lambda f(v) = \lambda . V \Rightarrow f(v) \in E_\lambda$

Exercice,

Soit, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longrightarrow (y+z, -x+y-z, x+y+3z)$

Calculer E_0 et E_2

Solution,

Théorème,

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distincts deux à deux de f, et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs propres de f associés resp. à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

alors, La famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre de E (on procède par récurrence),

Preuve,

* Pour $n = 1$,

Soit $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha_1 v_1 = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = 0$ Libre ✓

Soit $n \in \mathbb{N}$

* on suppose que c'est vrai pour $n > 1$ (H.R)

* Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ tel que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0_E \quad (*)$$

$$f((*)) - \lambda_{n+1} (*) = 0_E$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})v_2 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n + \cancel{\alpha_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1})v_{n+1}} = 0_E$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})v_2 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n = 0_E$$

D'après (H.R) + λ_i distincts deux à deux :

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Donc (*) devient, $\alpha_{n+1} v_{n+1} = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$ #

• Somme directe :

Rappel :

La somme $F=\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi tout vecteur $v\in F$ s'écrit de manière unique sous la forme $v=v_1+v_2+\dots+v_n$ où : $v_i\in E_i$; $i=1,\dots,n$

on note $F=E_1\oplus E_2\oplus\dots\oplus E_n$

Caractérisation : $E_i\cap\sum_{j\neq i}E_j=\{0\}$

Lemme :

Soit $f\in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des valeurs propres **distincts deux à deux**

Alors : $\sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$ est directe

Démonstration : (Par absurde)

Supposons que $E_{\lambda_1}+\dots+E_{\lambda_n}$ n'est pas directe

c-à-d : Il existe une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i=0 \quad (1) \quad \text{avec } x_i\in E_{\lambda_i}\setminus\{0\} \text{ et } \mu_i\neq 0 \text{ (tous non nul)}$$

Supposons qu'on a un nombre r minimal de scalaires $\mu_i\neq 0$ tel que $e=\sum_{i=1}^{r}\mu_i x_i=0 \quad (r\geqslant 2)$

Calculons : $f(e)-\lambda_1 e=0$

$$\Rightarrow \cancel{(\lambda_1-\lambda_1)\mu_1 x_1}+(\lambda_2-\lambda_1)\mu_2x_2+\dots+(\lambda_r-\lambda_1)\mu_r x_r=0$$

c-à-d : $\exists\,(r-1)$: $\bar{\mu}_i=(\lambda_i-\lambda_1)\mu_i\neq 0$; $i=2,\dots,r$

donc r n'est pas minimal (Absurde) #

Remarque :

Soient $f\in\mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in Sp(f)$ distincts deux à deux

Alors : $\bigoplus E_{\lambda_i} \Leftrightarrow (v_i)_i$ est libre

avec : $v_i\in E_{\lambda_i}$

Exercice :

Soit : $i\in[\![1,n]\!]$: $f_i(x)=\cos(ix)$

Montrer que $B=(f_1,\dots,f_n)$ est libre

Solution :

Posons : d_2 : $\text{vect}(B)\longrightarrow \text{vect}(B)$

$\qquad f_i \longrightarrow d_2(f_i)$

$d_2(f_i(x)) = f_i''(x) = (\cos(ix))'' = -i^2 \cos(ix)$

$d_2(f_i(x)) = -i^2 f_i(x)$

$\Rightarrow (-i^2, f_i)$ est un élément propre, $i = 1, \dots, n$

Les valeurs propres sont distincts 2 à 2

$\Rightarrow \cos(ix)$ est libre, $i \in [\![1, n]\!]$

* Polynôme d'endo et polynôme de matrice

Définition : (cas matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice

À X^k on associe A^k, et à $1 = X^0$ on associe I_n

Plus généralement, pour un polynôme,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$$

on définit la matrice $P(A)$ par :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P(X) = 1 + 2X - X^2$

$\Rightarrow P(A) = I_2 + 2A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition : (cas endo)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endo

à X^k on associe $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois), et à 1 on associe Id_E

Plus généralement, pour un polynôme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$$

on définit l'endo $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_n f^n \in \mathcal{L}(E)$$

Proposition : (Démonstration)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

Alors : $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$

De même pour $f \in \mathcal{L}(E)$

$$(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $f \in \mathcal{L}(E)$ et (λ, v) un élément propre de f

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$: (λ^k, v) est élément propre de f^k

Démonstration,

- Pour $k=1$, (λ, v) est élément propre de f (vrai)

c-à-d, $f(v) = \lambda v$

- Pour $k=2$: $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda^2 v$

donc, (λ^2, v) est élément propre de f^2 (vrai)

- Supposons que, $f^k(v) = \lambda^k v$ (H.R)

- $f^{k+1}(v) = f(f^k(v))$

$$= f(\lambda^k v)$$
$$= \lambda^k f(v)$$

$f^{k+1}(v) = \lambda^{k+1} v$ #

Proposition,

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée A soit inversible est: 0 ne soit pas valeur propre de A

Démonstration,

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ (l'endo associée n'est pas injective)

$\Leftrightarrow$ l'endo associée n'est pas bijective

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

En particulier:

Pour $\lambda = 0$, on a: $\det(A) = 0$ c-à-d A n'est pas inversible

- Polynôme caractéristique

Définition,

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme.

$$\chi_A(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

- Calcul des valeurs propres,

Les valeurs propres de A sont les racines de

Exercice :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x-y-z, -x+y-z, -x-y+z)$$

Donner la matrice associée et calculer $Sp(f)$

$$Sp(A) = \{-1, 2\}$$

Remarque :

1) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ une matrice carrée d'ordre 2

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= \lambda^2 - tr(A) + det(A)$$

2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire ou diagonale : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$

3) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + tr(A)\lambda^{n-1} + \dots + det(A)$$

Rappels

Une racine α de $P \in \mathbb{K}[X]$ est d'ordre de multiplicité K si et seulement si :

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(K-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(K)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Soit λ une valeur propre de f de multiplicité K si λ est une racine multiple de $P_f(X)$

* Calcul des vecteurs propres :

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ un vecteur propre de f associé à λ

Calculons x, c'est résoudre le système $(f - \lambda Id_E)x = 0_E$

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si P_f admet une racine λ de multiplicité k

alors : $\underbrace{1 \leq \dim(E_\lambda)}_{\text{déjà vu}} \leq k$ (E_λ admet au moins un vecteur)

Démonstration :

Posons : $r = \dim(E_\lambda)$

et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de E_λ qu'on complète en une base de E : $B = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$

La matrice de f dans la base B est :

Polynôme caractéristique ne dépend pas de la base

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \lambda & & A' \\ 0 & & \ddots \ \lambda & \\ \hline & 0 & & A'' \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$$f(e_i) = \lambda e_i \ , \quad i = 1, \dots, r$$

Donc : $P_f(X) = P_A(X) = (-1)^r (X - \lambda)^r \det(A'' - X I_{n-r})$

Donc, on a : $(X - \lambda)^r$ divise $P_f(X)$

Alors : $r \leq k$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad P_A(X) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda + 1)$$

Calculons les vecteurs propres E_{-1}, E_2

mult$(-1) = 1$; mult$(2) = 2$

- $E_{-1} = \ker(A + I_3)$

$x \in E_{-1} \Rightarrow (A + I_3) x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 & L_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & L_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 & L_1 \\ 0 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ 0 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_3 = x_2 = x_1 \ , \ \forall x_1$

$E_{-1} = vect\{(1,1,1)\} \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1 = mult(-1)$

* $E_2 = Ker(A - 2I_3)$

$x \in E_2 \Rightarrow (A - 2I_3)x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 - x_2 \ , \ \forall x_1, x_2$

$E_2 = vect\{(1,0,-1),(0,1,-1)\} \Rightarrow \dim(E_2) = 2 = mult(2)$

* $E_{-1} \perp E_2$: $\dim(E_{-1}) + \dim(E_2) = \dim(E)$

Soit F un s.e.v stable par un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$
$(\dim(F) < \dim(E))$
La restriction $f_{|F} : F \longrightarrow F \in \mathcal{L}(F)$

Lemme:
Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$
on suppose qu'il existe un s.e.v F de E stable par f
Alors: $P_{f_{|F}}(X)$ divise $P_f(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$

Démonstration:
Posons $B = (e_1, \dots, e_p)$, avec $p = \dim(F)$, une base de F
qu'on la complète en une base de E

$$B' = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$$

la matrice de f dans la base B' est :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) \dots f(e_p) & f(e_{p+1}) \dots f(e_n) \end{array} & \\ A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Donc :

$$P_f(X) = P_A(X) = \underbrace{P_{A_1}(X)}_{\text{degré } p} \times \underbrace{Q(X)}_{\text{degré } n-p}$$

$$P_f(X) = P_{f_{|F}}(X) \times Q(X)$$

Théorème : (Théorème Cayley-Hamilton)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $P_A(A) = 0$

De même, Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dim finie

alors : $P_f(f) = 0$

Remarque :

→ $P_A(A) = 0$ signifie que le polynôme caractéristique appliqué à A donne la matrice nulle

→ $P_f(f) = 0$ signifie que le polynôme caractéristique appliqué à f donne l'endo nul

Démonstration :

on suppose que E est de dim finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et soit : $1 \leq p \leq n$ le plus grand entier tel que : $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre

Alors, on a forcément que : $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x), f^p(x))$ est liée

c-à-d : $\exists c_0, \dots, c_{p-1}$ tel que :

$$f^{p}(x) = c_0 x + c_1 f(x) + \dots + c_{p-1} f^{p-1}(x) \quad (1)$$

Posons : $F = \text{vect}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$

Alors, on a forcément que : F est s.e.v stable par f

De plus, la matrice de $f_{|F}$ est donnée par :

Exercice

$P_A(X) = \pm(X^p + c_{p-1} X^{p-1} + \dots C_0)$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(x) & f^2(x) & & f^{p-1}(x) & f^p(x) \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -c_{p-1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^{p-1}(x) \end{array} \end{array}$$

D'après le lemme précédent, $P_{f_{|F}}(X) = P_A(X)$ divise $P_f(X)$

c-à-d : $\exists Q(X)$ de degré $n-p$ tel que,

$$P_f(X) = Q(X) \cdot P_{f_{|F}}(X)$$

Alors, $P_f(f)(x) = Q(f)(x) \circ P_{f_{|F}}(f)(x)$

$$= Q(f)\left(P_{f_{|F}}(f)(x)\right)$$

Or : $P_{f_{|F}}(f)(x) = P_A(f)(x)$

$$= \pm \left(\underbrace{f^p(x) + c_{p-1} f^{p-1}(x) + \dots + c_0}_{(1) = 0}\right)$$

$$P_{f_{|F}}(f)(x) = 0$$

Alors, $P_f(f)(x) = Q(f)(0) = 0$

- Polynôme annulateur,

Définition,

On dira qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de la matrice A (ou de l'endo f) si,

$$P(A) = 0_{matrice} \quad (\text{ou } P(f) = 0_{endo})$$

Exemple,

- Soit : $P : E \to E$ tel que $P^2 = P$ (Projection)

Alors, $Q(X) = X^2 - X$ est un annulateur de P

- Soit, $S : E \to E$ tel que $S^2 = Id_E$

Alors, $Q(X) = X^2 - 1$ est un annulateur de S

- Soit, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^{n_0} = 0$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (nilpotent)

Alors, $\forall n \geqslant n_0$, $Q(X) = X$ est annulateur de u

Théorème (Reformulation de Cayley Hamilton)

P_A (ou P_f) est annulateur de A (ou de f)

Proposition,

Si P est un polynôme annulateur de f

Alors, $Sp(f) \subset \{\text{racines de } P\}$

Théorème,

Si $\dim(E) = n < +\infty$, alors $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$

non nul tel que : $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Démonstration :

Soit : $\quad \ell_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

$\qquad\qquad\qquad P \longrightarrow \ell_f(P) = P(u)$

Alors : ℓ_f n'est pas injective

Si : ℓ_f est injective,

alors : $\quad \forall m \in \mathbb{N}, \ (\ell_f(1), \ell_f(X), \dots, \ell_f(X^m))$ est libre

Or : $\quad \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2 > m$

Contradiction : $\dim(\mathcal{L}(E)) < +\infty$

$\Rightarrow \ \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \subsetneq \operatorname{Ker} \ell_f$

Théorème :

Si $\dim(E) = n < +\infty$, Alors $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme $P_0 \subset \mathbb{K}[X]$ tel que : tout polynôme annulateur de f est un multiple de P_0

* Polynome minimal

Définition / Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme $\mu_f(X) \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifie les 3 conditions suivantes :

1) $\mu_f(X)$ est un poly annulateur de f
2) $\mu_f(X)$ est unitaire (le plus grand coefficient est 1)
3) Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un poly annulateur de f, alors :

$$\deg \mu_f \leq \deg P$$

Ce poly est appelé le poly minimal de f, c'est le poly unitaire de degré le plus petit qui annule f

De la m̂ façon, on définie le poly minimal d'une matrice

Proposition :

- Le poly minimal divise tous les poly annulateurs de l'end (matrice)
- En particulier : $\quad \mu_f(X)$ divise $P_f(X)$

Proposition :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors : $\quad \lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \mu_f(\lambda) = 0$

Proposition (Calcul de $\mu_f(X)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose que le poly caractéristique $P_A(X)$ est scindé.

$$P_A(X) = \pm (X - \lambda_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{m_r} \quad \text{où } m_1, \dots, m_r \geqslant 1$$

Alors: $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont 2 à 2 distincts

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \times \dots \times (X - \lambda_r)^{k_r}$$

où: $1 \leqslant k_i \leqslant m_r$, $i \in [\![1, r]\!]$

Exemple:

Soit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons le polynôme minimal de A

$$P(X) = \det(A - XI_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 1-X & 1-X & -X \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= (1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)^2 \left(1(-X+1) - 0 + 1(0-1)\right)$$

$$= (1-X)^2 (\cancel{1} - X - \cancel{1})$$

$$P(X) = -(X-1)^2 X$$

$$\mu_A(X) = -X^\alpha (X-1)^\beta \quad \text{avec } \alpha = 1 \text{ et } 1 \leqslant \beta \leqslant 2$$

$$= -X(X-1)^\beta$$

$\beta = 1$ et on vérifie:

$$\mu_A(A) = -A(A - I_3) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_A(A) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

Alors $\mu_A(X) = X(X-1)$

Chap 2 Diagonalisation et Trigonalisation

1_ Endomorphisme diagonalisable:

Soient E un $\mathbb{K}$ e.v, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_i, v_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments propres de f

Alors: Les vecteurs $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une famille libre de E, C'est un bon candidat pour être une base de E, il reste d'être génératrice

Si ~~le~~ c'est le cas, on dit que f est diagonalisable

Définition:

Soient E un $\mathbb{K}$ e.v de dim finie ou non, et $f \in \mathcal{L}(E)$

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

Ainsi: Diagonaliser f : c'est trouver cette base noté $\mathcal{B}$ tel que:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{où: } (a_{ii})_{1 \leq i \leq n} \text{ est valeur propre}$$

Définition:

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D. C'est-à-dire: s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, tel que:

$$\underset{\text{valeurs propres}}{D} = P^{-1}.A.\underset{\text{vecteurs propres}}{P}$$

Proposition:

Si A est la matrice de f dans une base - en général base canonique -. Alors:

$$f \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ est diagonalisable}$$

Remarque:

Dire une matrice rectangulaire est diagonalisable n'a pas de sens! Il faut qu'elle soit carrée

Exemple:

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie $n = r+s$

et Soient F et G deux e.v de dim r et s resp tel que:

$$E = F \oplus G$$

Soit P la projection sur F suivant G:

$$P : E = F \oplus G \longrightarrow E = F \oplus G$$
$$x + y \longrightarrow x$$

* $x \in F$: $P(x) = x = \lambda x \Rightarrow \lambda = 1$

  $y \in G$: $P(y) = 0 = \lambda y \Rightarrow \lambda = 0$

* $E_1 = \operatorname{Ker}(P - Id_E) = F$

  $E_0 = \operatorname{Ker}(P - 0Id_E) = G$

$\Rightarrow$ P est diagonalisable, car: * $F \oplus G$

* Ils coinsident avec les s.e.p

$\Rightarrow$ Matrice:

$$\begin{array}{cc|c} r & s & \\ \begin{pmatrix} I_{rr} & O_{sr} \\ O_{rs} & O_{ss} \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} \end{array}$$

Proposition:

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres de f distincts 2 à 2, et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_m}$ les s.e propres correspondantes.

Une condition nécessaire suffisante pour que f soit diagonalisable est que: $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$

Preuve:

$\Rightarrow$) Supposons que f est diagonalisable

* on sait que: $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}$ est directe
* f est diagonalisable, c-à-d: E admet une base de vecteurs propres noté B

Soit $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ avec B_i une base de E_{λ_i}

Donc, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$

$\Leftarrow$) Supposont que, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$

Soit, B_i une base de E_{λ_i} qui contient des vecteurs propres

Donc, $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ est une base de E formée de vecteurs propres de f

Alors, f est diagonalisable

Rappel,

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P \text{ est scindé} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ racine de } P} m(\lambda) = \deg(P)$$

où, $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ

Théorème,

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors, f est diagonalisable ssi,

* P_f est scindé sur $\mathbb{K}$
* Pour toute valeur propre λ de f, on a, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

Remarque,

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposons que A est diagonalisable

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A distincts 2 à 2 et de multiplicité $m(\lambda_i)$, $i \in [\![1, m]\!]$

Alors, $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

avec,

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{m(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\lambda_m \cdots \lambda_m}^{m(\lambda_m)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \overbrace{| \; | \; |}^{E_{\lambda_1}} & \overbrace{| \; | \; |}^{E_{\lambda_2}} & \cdots & \overbrace{| \; | \; |}^{E_{\lambda_m}} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(D) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{m(\lambda_i)} \; ; \; \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} (m(\lambda_i) \cdot \lambda_i)$$

Proposition, "Caractérisation"

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de f, et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_m}$ les espaces propres correspondant.

Une condition ~~ess~~ nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable et que:

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dots + \dim(E_{\lambda_m}) = \dim(E)$$

Corollaire:

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n

Si un endomorphisme f de E possède exactement n valeurs propres distincts deux à deux

Alors: f est diagonalisable

Même chose si $\chi_f(x) = \chi_A(x)$ est scindé et si les racines sont simples

Alors: f (repec A) est diagonalisable

3. Algorithme de diagonalisation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E et $A = \mathcal{M}_B(f)$

Diagonaliser f signifie trouver si elles existent $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que

$$A = P.D.P^{-1}$$

Diagonaliser A, il faut

1) Calculer le poly caractéristique P_A

2) Chercher les racines de P_A:

i) Si P_A n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable Stop

ii) Sinon, on le décompose comme suit:

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (X - \lambda_m)^{m(\lambda_m)}$$

3) Pour chaque λ_i, $i \in [\![1, m]\!]$, déterminer E_{λ_i}:

i) Si $\forall i \in [\![1, m]\!]$, on a $E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$, Alors A est diagonalisable

ii) Sinon, A n'est pas diagonalisable Stop

4) Pour le cas où A est diagonalisable:

$$\begin{cases} P \text{ est formé du vecteurs propres} \\ D = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{m(\lambda_1) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_m \dots \lambda_m}_{m(\lambda_m) \text{ fois}}) \end{cases}$$

Exemple :

Diagonalisons : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $P_A(X) = -(X-2)^2(X+1) \Rightarrow Sp(A) = \{-1, 2\}$

2) $E_2 = vect\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

$E_{-1} = vect\{(1,1,1)\}$

3) $\dim(E_{-1}) + \dim(E_2) = 3 = \dim(E)$

Alors : A est diagonalisable

$\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice :

Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable

on a : $P_A(X) = \det(A - XI_2)$

$$= \begin{vmatrix} a-X & b \\ b & c-X \end{vmatrix}$$

$$= (a-X)(c-X) - b^2$$

$$P_A(X) = X^2 - (a+c)X - b^2$$

$\Delta = (a+c)^2 + 4b^2 > 0$

Donc : P_A admet <u>deux</u> racines simples réelle $= \dim(E)$

Alors : A est diagonalisable

4- Cas d'endomorphisme nilpotente

Lemme :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice semblable à une matrice D diagonale

c-à-d : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $N = P.D.P^{-n}$

Alors : $N^k = P.D^k.P^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Démonstration :

Par recurrence sur k

* pour $k=1$, c'est donné

car N est semblable à D

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Scanné avec CamScanner

Supposont que : $N^K = PD^K P^{-1}$ (H.R)

$N^{K+1} = N.N^K = PD.\cancel{P^{-1}}\cancel{P}.D^K.P^{-1} = P.D.D^K.P^{-1} = P.D^{K+1}.P^{-1}$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ e.v de dim finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Supposons que f non identiquement nul

Si f est nilpotente, alors : f n'est pas diagonalisable

Démonstration :

Supposons que f soit nilpotente et diagonalisable

$\Rightarrow$ Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale

tel que : $A = P.D.P^{-1}$ avec A la matrice associée à f dans la base canonique.

$\Rightarrow$ $A^K = P.D^K.P^{-1}$; $K \geq$ l'indice de la nilpotence de A

$0 = P.D^K.P^{-1}$

$\Rightarrow$ $D^K = 0$

$\Rightarrow$ $D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ or A est semblable à D

Donc : A est nul (absurde)

5- Trigonalisation d'un endomorphisme :

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable ~~s'il existe~~ ~~...~~ si elle est semblable à une matrice triangulaire sup

Remarque :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base de E, alors

f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ A est trigonalisable

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors : f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme caractéristique est scindé

Démonstration :

$\Rightarrow$ Supposons que f est trigonalisable

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, la matrice A de f est triangulaire sup

c-à-d,

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc, $P_f(X) = \det(A - XI_n)$

$P_f(X) = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - X)$ qui est scindé

$\Leftarrow$ Par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, c'est vraie (il est trigonalisable)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Supposons que pour tout $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n : tout $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, est trigonalisable
- Mq, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim(E) = n+1$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est trigonalisable

En effet :

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim $n+1$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont $P_f(X)$ est scindé

Donc, $P_f(X)$ admet au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$

Soit e_1 un vecteur propre de f associé à λ

c-à-d, $f(e_1) = \lambda e_1$

D'après le théorème de la base incomplète :

Il existe $e_2, e_3, \dots, e_{n+1} \in E$ tel que

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+1})$ soit une base de E

Alors,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_{n+1}) \end{array} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = & \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{array} \end{array}$$

De plus, $P_f(X) = (X - \lambda) P_A(X)$

et puisque, P_f est scindé

Alors, $P_A(X)$ est scindé

Soit $E' = \text{vect}(e_2, \dots, e_{n+1}) \Rightarrow \dim(E') = n$

Donc : A est trigonalisable, d'après H.R c-à-d $f_{|E'}$ est trigonalisable

donc $\exists$ une base $\mathcal{B}' = (e'_2, \dots, e'_{n+1})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f_{|E'})$ est triangulaire sup

$\mathcal{B}'' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ est base de E : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & b'_2 \dots b'_{n+1} \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{T_{nn}} \\ 0 & \end{pmatrix}$

Conséquence :

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Alors P_f est scindé $\Rightarrow$ f est trigonalisable

6- Algorithme de trigonalisation :

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v de dim finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E

Notons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

Trigonaliser f c'est faire :

1) Calculer $P_A(X)$ est ses racines

- Si $P_A(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Stop!
- Sinon, on le décompose $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (X - \lambda_m)^{m(\lambda_m)}$

2) Pour chaque λ_i, on calcule E_{λ_i}, c-à-d trouver une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée des vecteurs propre

on obtient un système libre $S = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i = (v_1, \dots, v_p)$

- Si $p = n$, S est une base de E, donc f est diagonalisable et par suite elle est trigonalisable
- Si $p < n$, on complète $(v_1, \dots, v_p)$ en une base $B_1 = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ en utilisant les vecteurs de la base $\mathcal{B}$

Soit $A_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(v_1) & \dots & f(v_p) & f(v_{p+1}) & \dots & f(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & 0 & & & \boxed{A'} & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array}$

- Si $p = n-1$, Alors A est triangulaire, Donc f est trigonalisable
- Si $p < n-1$, on pose $\mathcal{B}'_1 = (v_{p+1}, \dots, v_n)$ et $E'_1 = \text{vect}(\mathcal{B}'_1)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_1}(f_{|E'_1})$

3) Calculer $P_{A'}$

...

Scanné avec CamScanner

Exemple :

Soit $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, trigonaliser-le

1) on a : $P_A(X) = -(X-2)^3$ et $Sp(A) = \{2\}$ et P_A est scindé

$\Rightarrow$ A est trigonalisable.

2) $E_2 = \ker(A - 2I_3) = vect(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

puisque : $\dim(E_2) \neq mult(2) \Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

on complète v_1 en une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3)

on pose : $v_2 = e_1$ et $v_3 = e_2$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \neq 0$$

donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculons : $\mathcal{M}_{(v_1, v_2, v_3)}(f)$

En effet :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ v_2 = e_1 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_2 \\ e_2 = v_3 \\ e_3 = -v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 = 2v_2 - 2v_3 \\ f(v_3) = f(e_2) = e_1 + 3e_2 - e_3 = v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

Alors : $= \mathcal{M}_{(v_1, v_2, v_3)}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$

on travaille maintenant sur $A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \in \mathcal{M}_{(v_2, v_3)}(f)$

1) $P_{A'}(X) = (X-2)^2$

2) $E_2 = \ker(A - 2I_2) = vect(w_3)$ avec $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on complète w_2 en une base de $\mathbb{R}^2$ en utilisant la base

(v_2, v_3) de $\mathbb{R}^2$

on pose, $w_3 = v_2$

Proposition,

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$

Alors,

1 - tout espace propre de u est stable par v (en particulier $\ker u$)

2 - $Im(u)$ est stable par v

3 - Si u et v sont diagonalisables (resp. trigonalisables), il existe une base commune de diagonalisation (resp de trigonalisation) de u et ~~v~~ v

on dit que u et v sont codiagonalisables (resp cotrigonalisables)

• Cas d'endomorphisme nilpotent:

Proposition,

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes,

1 - f est nilpotent

2 - $Sp(f) = \{0\}$

3 - $P_f(X) = (-1)^n X^n$

4 - il existe une base B de E tel que, $\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Chapitre 3 Réduction de Jordan et Danford

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dim finie n sur un corps $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$

Soit $P_f(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$

où : $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et les λ_k sont distincts 2 à 2

et Soit $\mu_f(X) = P_{\text{minimal}}(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$

avec : $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$

Définition :

Avec ces notations, on appelle sous-espaces caractéristique de f les sous-espaces vectoriels :

$$N_k = \ker(f - \lambda_k Id_E)^k, \text{ où } 1 \leq k \leq \alpha_k$$

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique P_f est scindé, alors on a :

i) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$

ii) $N_k = \ker(f - \lambda_k Id_E)^{\beta_k}$

iii) λ_k est la seule valeur propre de la restriction de f à N_k ($f_{|N_k}$)

iv) $\dim N_k = \alpha_k$

v) la restriction de $f - \lambda_k Id_E$ à N_k est nilpotente d'indice β_k

Définition :

Un Bloc de Jordan est une matrice de la forme :

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

où : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m > 0$

Remarque :

- $(J_{\lambda,m} - \lambda I_m)^k = 0$ si $k > m$
- Pour un bloc de Jordan, $J_{\lambda,m}$ on a : $P_{car}(X) = P_{min}(X)$
$$= (X-\lambda)^m$$

Définition :

Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_r \end{array}\right)$$

Théorème : " Réduction de Jordan (endomorphisme) "

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P_f(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors : il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \; J_p \end{pmatrix}$$

avec : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \{0, 1\}$

Théorème : " Réduction de Jordan (matrice) "

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, alors : A est **semblable** à une matrice de Jordan

c-à-d $\exists P$ inversible tel que : $J = P^{-1} . A . P$

Remarque :

- les λ qui apparaisent dans J sont les valeurs propres de A
- une même valeur propre peut apparaitre dans plusieurs blocs,
- Unicité : Cette décomposition est unique dans le sens qu'on peut permuter les blocs entre eux

- Le nombre de blocs associés à λ = $\dim(E_\lambda)$
- La somme des tailles des blocs associés à λ = $\text{mult}(\lambda)$ dans $P_A(X)$
- la taille du plus grand bloc associé à λ = $\text{mult}(\lambda)$ dans $P_{min}(X)$
(Dans ce cas on a un seul bloc associé à λ)

Algorithme de calcul de la réduction de Jordan :

~~1/ Polynôme caractéristique puis~~

1- Factoriser le polynôme caractéristique
2- Trouver une base de chaque espace propre
3- Compléter cette base s'il y a lieu, s'il n'y a que $\ell < \text{mult}(\lambda) = m$ vecteurs propres indépendants, il faut trouver $(m - \ell)$ vecteurs
- pour chaque vecteur v déjà trouver, résoudre le système $(A - \lambda I)w = v$ ~~$\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$~~
- s'il manque des vecteurs, vous allez résoudre le système $(A - \lambda I)w' = w$
- ... itérer pour obtenir une base de E

4- Calculer l'inverse de P
5- Vérifier vos calculs

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $P_A(X) = -(X-2)^2(X+1)$

$Sp(A) = \{-1, 2\} \Rightarrow \text{mult}(-1) = 1$ et $\text{mult}(2) = 2$

2) - $E_{-1} = \text{vect}(1,0,1) = \text{vect}(v_1)$

$\dim(E_{-1}) = 1 \Rightarrow$ on a un seul bloc de Jordan associé à -1 de taille 1

- $E_2 = \text{vect}\{(1,0,0)\} = \text{vect}(v_2)$

$\dim(E_2) = 1 \Rightarrow$ on a un seul bloc de Jordan associé à 2 de taille 2 donc,

$$\begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & \\ \left(\begin{array}{c} \boxed{-1} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}} \end{array} & & \left.\begin{array}{c} 0 \\ \\ \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

3- Calculons $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$f(v_3) = v_2 + 2v_3 \Rightarrow (f(v_3) - 2v_3) = v_2$$

$$\Rightarrow (A - 2I_3)v_3 = v_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y - 3z = 1 \\ \forall x \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \forall x \\ z = y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_3 = (1, 1, 1)$$

4- $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_3 \\ v_2 = e_1 \\ v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_2 \\ e_2 = -v_1 + v_3 \\ e_3 = v_1 - v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5- $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \#$$

Exemple 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $P_A(X) = (X-1)(X-2)^3$

  $Sp(A) = \{1, 2\} \Rightarrow \begin{cases} mult(1) = 1 \\ mult(2) = 3 \end{cases}$

- $E_1 = vect(1,1,1,0) = v_1$

  $dim(E_1) = 1 \Rightarrow$ un seul bloc de taille 1

  $E_2 = vect(0,1,1,0) = v_2$

  $dim(E_2) = 1 \Rightarrow$ un seul bloc de taille 3

donc:

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$$

- $(A - 2I_4)v_3 = v_2 \Rightarrow v_3 = (0,1,0,0)$

  $(A - 2I_4)v_4 = v_3 \Rightarrow v_4 = (0,1,1,1)$

- $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice :

Donner la forme de Jordan de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec: $P_A(X) = X(X-1)^3$

Solution :

on a: $P_A(X) = X(X-1)^3$

d'où: $Sp(A) = \{0, 1\}$ avec $mult(0) = 1$ et $mult(1) = 3$

- $E_0 = Ker(A)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow X \in Ker(A)$

$\Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-4z+9K=0 \\ -2x+2y-3z+6K=0 \\ x-y+2z-3K=0 \\ K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-4z=0 \\ -2x+2y-3z=0 \\ x-y+2z=0 \\ K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=4z \\ 4z-3z=0 \\ K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \quad \forall x \\ K=0 \end{cases}$$

donc, $E_0 = \text{vect}(1,1,0,0) = v_1$

et $\dim(E_0)=1 \Rightarrow$ Un seul bloc associé à 0 de taille 1

* $E_1 = \text{Ker}(A-I_4)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ K \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A-I_4)$

$\Leftrightarrow (A-I_4)X = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y-4z+9K=0 \\ -2x+y-3z+6K=0 \\ x-y+z-3K=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cancel{3x}+2y-4z+\cancel{3x}-3y+3z=0 \\ -\cancel{2x}+y-3z+\cancel{2x}-2y+2z=0 \\ 3K=x-y+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y-z=0 \\ -y-z=0 \\ 3K=x-y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=3K+2y \\ \forall y, K \end{cases}$$

donc: $E_1 = \text{vect}\{(2,1,-1,0);(3,0,0,1)\} = (v_3, v_2)$

Scanné avec CamScanner

et $\dim(E_1) = 2 \Rightarrow$ 2 bloc associés à 1 l'un de taille 1 et l'autre de taille 2

donc :

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Calculons v_4 :

on a : $(A - I_4) v_4 = v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 4z + 9K = 2 \\ -2x + y - 3z + 6K = 1 \\ x - y + z - 3K = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z - \cancel{9K} + 3 + 2y - 4z + \cancel{9K} = 2 \\ -2y + 2z - \cancel{6K} + 2 + y - 3z + \cancel{6K} = 1 \\ x = y - z + 3K - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y - z = -1 \\ -y - z = -1 \\ x = y - z + 3K - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - y \\ x = 2y + 3K - 2 \end{cases} \quad \forall y, K$$

d'où : $v_4 = (-2, 0, 1, 0)$

Alors :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = 3e_1 + e_4 \\ v_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ v_4 = -2e_1 + e_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = v_1 - e_1 \\ e_4 = v_2 - 3e_1 \\ v_3 = \cancel{2e_1} + v_1 - e_1 - v_4 - \cancel{2e_1} \\ e_3 = v_4 + 2e_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_3 - v_4 \\ e_2 = v_3 + v_4 \\ e_3 = 2v_1 - 2v_3 - v_4 \\ e_4 = -3v_1 + v_2 + 3v_3 + 3v_4 \end{cases}$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

Réduction de Jordan pour les matrices nilpotentes :

Lemme :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence k, et soit $v \in E$ un vecteur tel que

$f^{k-1}(v) \neq 0$, alors : $\{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$ est libre

Remarque

on a toujours $k \leq \dim(E)$, et donc $f^{\dim(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Cas particulier :

$f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent, d'indice de nilpotence $n = \dim(E)$

pour $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$, alors : $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$

est une **base** de E

la matrice associée à f dans la base $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$

est la réduction de Jordan

Réduction de Dunford :

Théorème :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$

Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphisme $d \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

i) $f = d + n$

ii) d est diagonalisable

iii) n est nilpotent

iv) $n \circ d = d \circ n$ (d et n commutent)

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polyonôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$

Alors il existe un couple unique (U, N) de matrice tel que :

i) $A = U + N$

ii) U est diagonalisable

iii) N est nilpotente

iv) $UN = NU$

De plus, U et N sont données par :

$$U = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_p P_p$$

$$N = (A - \lambda_1 I) P_1 + (A - \lambda_2 I) P_2 + \dots + (A - \lambda_p I) P_p$$

où : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A

et $P_1, \dots, P_p$ sont les matrices de projections sur les sous-espaces caractéristiques $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_p}$

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

* $P_A(X) = (-1)^3 (X+1)^3$
* $(A + I_3)^2 = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow P_{min}(X) = (X+1)^2$
* $F_2 = \operatorname{Ker}(A + I_3)^2 = \mathbb{R}^3$

On donne une base de $F_2 \neq$ base canonique

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = v_1 + v_2 - v_3 \\ e_3 = -v_1 + v_3 \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons : $\mathcal{B}_0 = P^{-1} . A . P = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 27 \\ 3 & 5 & 9 \\ -5 & -10 & -16 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}}$

$$A = P . \mathcal{B}_0 . P^{-1} = \underbrace{P . \mathcal{B} . P^{-1}}_{\text{Diagonalisable}} + \underbrace{P . N_1 . P^{-1}}_{\text{nilp}}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{N}$$

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $P_A(X) = (X-1)(X-2)^3$
- $P_{min}(X) = (X-1)(X-2)^2$
- On a : $\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2$

$E_1 = F_1 = \text{vect}(1,1,1,0) = v_1 \ (= \ker(A - I_4))$

$F_2 = \ker(A - 2I_4)^2$

$F_2 = \text{vect}\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

-

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posons $B_0 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$B_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N_1}$$

$$A = P.B_0.P^{-1} = \underbrace{P B . P^{-1}}_{\text{Diagonalisable}} + \underbrace{P N_1 P^{-1}}_{\text{nilp}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La composition de Dunfort de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$

Car $DN \neq ND$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4 : Applications

1_ Calcul de la puissance d'une matrice :

→ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors elle existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale tel que :

$$A = P.D.P^{-1} \implies A^k = P.D^k.P^{-1}$$

avec :

$$D^k = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1^k \cdots \lambda_1^k}_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_r^k \cdots \lambda_r^k}_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

α_i c'est la multiplicité de λ_i

→ De façon général, si A admet une décomposition de Dunford, alors : $A^m = (U+N)^m = \sum_{k=0}^{q-1} C_m^k U^{m-k} N^k$

où : q est l'indice de nilpotence de N

2_ Suite récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsque :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

on appelle équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 = ax + b \quad (1)$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ~~numérique~~ récurrente linéaire d'ordre 2

Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique

- Si $\Delta > 0$, (1) admet deux racines réelles distinct r_1 et r_2, et : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta = 0$, (1) admet une racine réelle double r, et $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta < 0$, (1) admet deux racines conjugués de la forme : $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$

et : $u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$

- Pour traiter ce problème de façon matricielle on procède comme suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n+1} \\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_{n+1} \\ u_{n+2} = b u_n + a u_{n+1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\iff \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}^n \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}}_{\text{donnés}}$$

puis on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et on la diagonalise ou...

Exemple:

la suite de Fibonacci:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

posons: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = X^2 - X - 1$

$$= \Big(X - \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{r_1}\Big)\Big(X - \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{r_2}\Big)$$

A est diagonalisable: $E_{r_1} = \text{vect}\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ et $E_{r_2} = \text{vect}\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} ; \; P = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Finalement, $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{2} r_1^n + \frac{5-\sqrt{5}}{2} r_2^n$$

3- Suites récurrentes linéaires d'ordre P.

Une telle suite est de la forme,

$$R_p: u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

Son équation caractéristique est donnée par:

$$r^p = a_1 r^{p-1} + a_2 r^{p-2} + \dots + a_p \quad (2)$$

Soit $(r_1, \dots, r_q) \in \mathbb{R}^q$ les racines de (2), avec

$mult(r_i) = s_i \; ; \; i = 1, \dots, q$

et les racines complexes conjugués : $\rho_1 e^{\pm \alpha_i}, \dots, \rho_\ell e^{\pm \alpha_\ell}$

avec une multiplicité $t_i \; ; \; i = 1, \dots, \ell$

Donc, $u_n = \sum_{i=1}^{q} \sum_{s=1}^{s_i - 1} \lambda_{i,s} \, n^s r_i^n + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{t=0}^{t_i - 1} \left(\mu_{i,t} \cos(n\alpha_i) + \gamma_{i,t} \sin(n\alpha_i) \right) n^t \rho_i^n$

l'ensemble des suites solution de la relation R_p, est sous-espace vectoriel de $\mathcal{Z}(\mathbb{K})$ noté $E(R_p)$ de dim p

Soit $\theta : E(R_p) \longrightarrow \mathbb{K}^p$

$u_n \longrightarrow (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$

On a, par construction, θ est bijective, car $u_n \in Ker(\theta)$

$\Rightarrow (u_0, \dots, u_{p-1}) = 0_{\mathbb{K}^p}$

une base de $E(R_p)$ est constitué de p suites satisfisant la relation R_p

Finalement, on transforme notre problème en un système matricielle.

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n+1} \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} = u_{n+p-1} \\ u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_p & \cdots & & \cdots & a_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}}_{U_n} \; p$$

$\Rightarrow U_{n+1} = A U_n$ avec $U_n = (u_n, \dots, u_{n+p-1})^t$

A est une matrice de compagnant

et, $P_A(X) = -a_1 - a_2 X - \dots - a_p X^{p-1} + X^p$

de plus $U_{n+1} = A^n U_0$

4- Systèmes de suites récurrentes.

Soient $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ et $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ p suites récurrentes linéaires telles que $u_0^1, u_0^2, \ldots, u_0^p$ sont donnés et :

$$\begin{cases} u_{n+1}^1 = a_{11} u_n^1 + \cdots + a_{1p} u_n^1 \\ u_{n+1}^2 = a_{21} u_n^2 + \cdots + a_{2p} u_n^2 \\ \vdots \\ u_{n+1}^p = a_{p1} u_n^p + \cdots + a_{pp} u_n^p \end{cases}$$

On pose :

$$u_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

Finalement : $u_n = A^n u_0 = P D^n P^{-1} u_0$ Si A est diagonalisa par exemple.

5_ L'exponentielle d'une matrice :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'exponentielle de A est définie par : $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Remarque :

Pour déterminer e^A, il faut parvenir à calculer A^n

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$: alors, $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

- $A = P.D.P^{-1} \Rightarrow e^A = P.e^D.P^{-1} = e^{P.D.P^{-1}}$
- Si $AB = BA$, alors, $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

En général : $e^{A+B} \neq e^A e^B$

- Si $A = D + N$ (N nilpotente d'indice p) avec $DN = ND$

alors, $e^A = e^{D+N} = e^D e^N = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Proposition :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ est de classe C^∞ et vérifie : $e^{0A} = I_n$; $(e^{tA})' = A e^{tA}$
$= e^{tA}.A$

6_ Résolution des systèmes différentielles:

on se donne des fonctions $b_1, \dots, b_n$ de la variable réelle t, continues sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$

et une famille $\{a_{i,j} ; 1 \leq i,j \leq n\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, et on se propose d'étudier le système :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_n(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

où les $x_i(t)$ sont les fonctions inconnues

on écrit ce système comme suit:

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (I)$$

avec: $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

et: $X : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$t \longrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

et: $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$

à l'équation (I) on associe l'équation homogène.

$$X'(t) = AX(t) \qquad (II)$$

Proposition:

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

alors: $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = P^{-1}.A.P.Y + P^{-1}.B$

$\Leftrightarrow$ X est solution de $X' = AX + B$

Proposition:

Toute solution X de (I) s'écrit $X = X_h + X_1$ où X_1 est une solution particulière de (I) et X_h est une solution de (II)