ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE – TÉTOUAN

Janvier 2025

Durée : 2 heures | Semestre : 3

Licence : 2ème année

Partie I : Questions à Choix Multiples (QCM) (5 points)

Cochez la bonne réponse (1 point par question).

1. Qui est considéré comme le père de l'éducation moderne ?
   - a) Jean-Jacques Rousseau
   - b) John Dewey
   - c) Maria Montessori
   - d) Socrate
2. Quelle période historique a vu l'apparition des universités en Europe ?
   - a) L'Antiquité
   - b) Le Moyen Âge
   - c) La Renaissance
   - d) L'Époque contemporaine
3. Quelle théorie de l'apprentissage est associée à Jean Piaget ?
   - a) Le béhaviorisme
   - b) Le constructivisme
   - c) L'apprentissage social
   - d) Le connectivisme
4. Qui a développé la théorie du "conditionnement opérant" ?
   - a) Lev Vygotsky
   - b) B.F. Skinner
   - c) Albert Bandura
   - d) Émile Durkheim
5. Quel texte de Rousseau aborde l'éducation ?
   - a) Le Contrat Social
   - b) Les Confessions
   - c) Émile ou De l'Éducation
   - d) Discours sur l'origine de l'inégalité

Partie II : Questions ouvertes (5 points)

Répondez de manière concise, en respectant le nombre de mots minimum indiqué.

1. Quels sont les grands moments historiques qui ont marqué l'évolution de l'éducation ?
   Minimum : 50 mots.
   (Inclure deux exemples significatifs avec une explication succincte pour chacun.)
   - 2 points-
2. Expliquez la différence entre le béhaviorisme et le constructivisme.
   Minimum : 50 mots.
   (Décrire les concepts clés des deux théories et souligner la différence principale.)
   - 1,5 points-
3. Nommez deux chercheurs qui ont influencé l'éducation et décrivez brièvement leur contribution.
   Minimum : 50 mots.
   (Présenter deux chercheurs avec une phrase ou deux sur leur impact respectif.)
   - 1,5 points-

Année : 2024-2025

Examen de fin de semestre

Sciences de l'éducation – Pr Younes KOUTAYA

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE – TÉTOUAN
Janvier 2025

Durée : 2 heures | Semestre : 3
Licence : 2ème année

Partie III : Analyse de texte (5 points)

Lisez le texte ci-dessous et répondez aux questions qui suivent.

Texte :
"Pour Jean-Jacques Rousseau, l'éducation doit être naturelle et adaptée aux besoins de l'enfant. Dans son ouvrage *Émile ou De l'Éducation*, il critique l'éducation traditionnelle, qu'il juge contraignante et artificielle. Rousseau propose que l'enfant apprenne à travers ses expériences et ses interactions avec la nature."

Questions :

1. (1,5 point) Quel aspect de l'éducation traditionnelle Rousseau critique-t-il dans ce texte ?
2. (1,5 point) Expliquez ce que Rousseau entend par une éducation "naturelle".
3. (2 points) Comparez les idées de Rousseau avec celles d'un autre penseur de l'éducation étudié en cours.

Partie IV : Rédaction thématique (5 points)

Rédigez une réponse argumentée d'environ 150 mots sur l'un des sujets suivants : (5 points)

1. **Sujet 1 :** "Expliquez comment les théories d'apprentissage étudiées (béhaviorisme, constructivisme, etc.) peuvent être appliquées dans une salle de classe contemporaine."
2. **Sujet 2 :** "Discutez de l'impact de l'éducation moderne sur les inégalités sociales à travers l'histoire."

Critères d'évaluation :

- Structure et clarté de l'argumentation (1,5 point).
- Pertinence des idées et exemples (3 points).
- Orthographe et style (0,5 point).

Barème total :

- Partie I : 5 points.
- Partie II : 5 points.
- Partie III : 5 points.
- Partie IV : 5 points.

Total : 20 points.

BONNE CHANCE

Année : 2024-2025
Examen de fin de semestre
Sciences de l'éducation – Pr Younes KOUTAYA

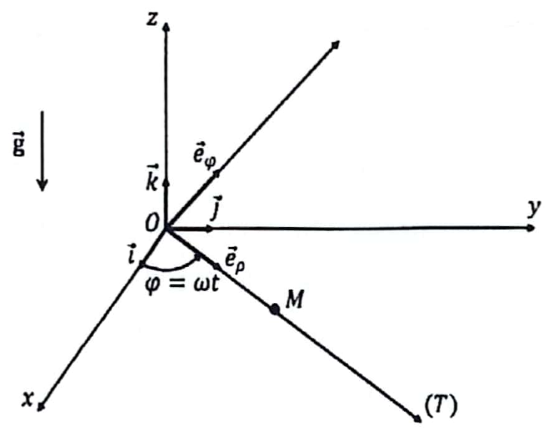
Université Abdelmalek Essaâdi
Ecole Normale Supérieure

Année universitaire 2024/2025
Filière LE-MATH, Semestre S3

Epreuve de Mécanique du point matériel et Mécanique du solide
Durée 2h

Partie I : Mécanique du point matériel

Soit $\Re(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$\vec{k}$ $\vec{e}_\rho$ $\vec{e}_\varphi$

5) Déterminer $E_c(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

Partie II : Mécanique du solide

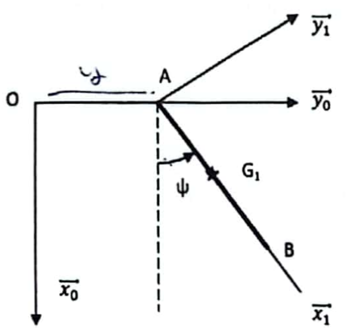
Dans le plan vertical$(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ où $\overrightarrow{Ox_0}$ est la verticale descendante, on considère le mouvement d'un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (T_1) de longueur L et de centre de gravité G_1.

L'extrémité A de la tige est astreinte à se déplacer sur l'axe $\overrightarrow{Oy_0}$.

On posera $OA = y$ et $\psi = (\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{AB})$.

1) Quels sont les paramètres nécessaires et suffisants pour connaître la position de (T_1) ?
2) Quel est le vecteur vitesse de rotation de (T_1) par rapport à R_0 ; noté : $\vec{\Omega}\,({}^{T_1}/_{R_0})$
3) Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique$[\tau]_{G_1}$ de (T_1) au point G_1 par rapport à R_0 en fonction des données du problème.
4) Déterminer le vecteur vitesse de l'extrémité B de (T_1) par rapport à R_0 :
   a. Par la méthode directe, $V_B = V_A + \Omega \wedge AB$
   b. En utilisant la loi de distribution des vitesses dans un solide indéformable.
   c. Ecrire les éléments de réduction du torseur cinématique en B par rapport à R_0.
5) Calculer les accélérations des points A et B dans R_0.

<u>N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u>$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$



Université Abdelmalek Essaâdi

Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année universitaire 2024/2025

Filière LE-MATH, Semestre S3

Epreuve de Mécanique
Session de rattrapage
Durée 2h

Partie I :

On considère un référentiel absolu fixe $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$ de base orthonormée directe $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ et un référentiel relatif $R_2(O, X_2, Y_2, Z_1)$ de base orthonormée directe$(\vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k_1})$.

L'axe (OX_2) tourne autour de (OZ_1) avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k_1}$

La position d'une particule M sur l'axe (OX_2) est donnée par : $\overrightarrow{OM} = a\cos(\omega t)\,\vec{i_2}$ (a est une constante positive).

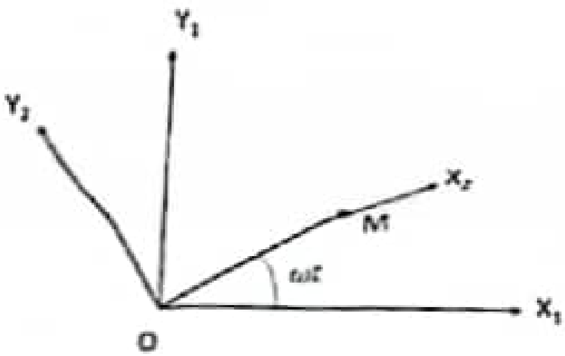
Dans la base$(\vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k_1})$, exprimer :

1) La vitesse relative $\vec{V_r}$ et l'accélération $\vec{\gamma_r}$ de la particule M.

2) Sa vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ et son accélération d'entrainement $\vec{\gamma_e}$.

3) Son accélération de Coriolis $\vec{\gamma_c}$.

4) Sa vitesse absolue $\vec{V_a}$ et son accélération absolue $\vec{\gamma_a}$



Partie II :

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\begin{cases} r = a \\ \theta = 2t^3 \end{cases}$$

Ou a est une constante.

1) Donner le vecteur position, la vitesse et l'accélération dans le système des coordonnées polaires. Ainsi que leur module.

2) Donner le vecteur position, la vitesse et l'accélération dans le système de coordonnées cartésiennes.

Contrôle surveillé | LE-Math | **Semestre 3**
Algèbre | **Durée 2h00** | 2024–2025

Documents non autorisés & Téléphone éteint

Exercice 1. **(10 pts)**

On considère l'application

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x+5y-z \\ -2x+2y+2z \\ -2x+5y-z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$.
2. (a) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (b) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
3. On note $e'_1 = 2e_1+e_2+e_3$, $e'_2 = e_1+e_2+e_3$ et $e'_3 = e_1+e_3$.
   (a) Monter que $B'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.
   En déduire la matrice A' de f dans B'.
4. (a) Donner la matrice de passage P de B à B'.
   (b) Exprimer A' en fonction de A et retrouver l'expression de A'.
   (c) Calculer P^{-1}.
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (8 pts)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(X-1) - 2P(1)(X-1)^2$.
Posons $Q_1 = 1$, $Q_2 = X-1$ et $Q_3 = (X-1)^2$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
4. Montrer que 2 et -2 sont des valeurs propres de f et déterminer les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_{-2} associés.
5. L'endomorphisme f peut-il admettre d'autres valeurs propres?
6. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ où la matrice de f est diagonale.

Exercice 3. (2 pts)
Question de cours
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Montrer que A est inversible si et seulement si $0 \notin \operatorname{sp}(A)$, où $\operatorname{sp}(A)$ désigne le spectre de A.

Université Abdelmalek Essaâdi
École Normale Supérieure Tétouan

Examen	LE-Math	Semestre 3
Algèbre	Durée 2h00	2024–2025
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Exercice 1. (15 pts)
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ et f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+\alpha z+\beta t \\ y+t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et donner sa matrice A dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$. f est-elle bijectif ? Justifié.
2. Sans calcul, donner le polynôme caractéristique P_A.
3. Montrer que $v_1 = (0, -\alpha, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 0, 0)$ sont deux vecteurs propres de A.
4. Déterminer la dimension de l'espace propre associé à 1. En déduire le nombre de blocs de Jordan dans la forme réduite de Jordan de A.
5. Calculer la taille du plus grand bloc de Jordan et donner toutes les formes possibles de la matrice J de Jordan.
6. Soient $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $v_4 = (0, -\beta, 0, 1)$. Montrer que $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ et $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. Donner la matrice A' de f dans la base B'. Que remarquez-vous ?
8. Déterminer e_1, e_2, e_3 et e_4 en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire les matrices de passage P et P^{-1}. Puis écrire A en fonction de A'.
9. Calculer A'^n puis A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
10. Déterminer les suites x_n, y_n, z_n et t_n telles que

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n + \alpha z_n + \beta t_n, \\ y_{n+1} &= y_n + t_n, \\ z_{n+1} &= z_n, \\ t_{n+1} &= t_n, \end{cases} \qquad \text{avec } x_0 = y_0 = -1, z_0 = -t_0 = \beta - \alpha.$$

Exercice 2. (5 pts)
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Supposons que f admet deux vecteurs propres $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ associés aux valeurs propres distinctes α et β, respectivement.

1. Montrer que la somme des vecteurs propres $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$ ne peut pas être un vecteur propre de f.
2. Démontrer que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont associés à des valeurs propres distinctes, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont linéairement indépendants.
3. Si $\alpha = \beta$, montrer que la somme $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$ peut être un vecteur propre de f.

Rattrapage | LE-Math | **Semestre 3**
Algèbre | Durée 1h30 | 2024–2025

Documents non autorisés & Téléphone éteint

Exercice 1. (8 pts)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de la matrice A.
2. Vérifier si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Si A n'est pas diagonalisable, déterminer sa forme de Jordan J (Sans Calcul).
4. Déterminer P et P^{-1} telles $A = P\,J\,P^{-1}$.
5. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (6 pts)
Soit $A \in M_8(\mathbb{R})$ telle que :

$$P_A(\lambda) = (\lambda-2)^5(\lambda-4)^3, \quad P_m(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-4)^2.$$

1. Justifier brièvement les contraintes imposées par le polynôme minimal.
2. Déterminer le nombre des réduites de Jordan possibles pour A.
3. Déterminer toutes les formes de Jordan possibles en les présentant sous la forme suivante (illustration par un exemple) :

$$J = \begin{pmatrix} J_{3\times3}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{2\times2}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{2\times2}(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{1\times1}(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

où les blocs $J_{k\times k}(\lambda_i)$, ($i = 1$ ou 2) sont des blocs de Jordan associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$.
4. En déduire les valeurs possibles pour les dimensions des espaces propres de A.

Exercice 3. (6 pts)
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme :

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3,$$

où $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que :

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 2^n, \quad P(-2) = (-2)^n.$$

3. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**CONTROLE EN MATHEMATIQUES** **(ANALYSE)**	**Année scolaire : 2024/2025**

Exercice 1 **: (6 points : 3× 2)**

1) Donner la définition de la limite notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$ avec $a \in \bar{A}$
2) Montrer que si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$ alors pour tout voisinage W de l, il existe V un voisinage de a, tels que $\forall x \in V \cap A$ alors $f(x) \in W$
3) Montrer que si tout voisinage W de l, il existe V un voisinage de a, tels que $\forall x \in V \cap A$ alors $f(x) \in W$ alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l.$$

Exercice 2 **: (3 points)**

Calculer la limite des suites suivantes :

$$U_n = \left(\frac{sin(n)}{n},\ \frac{n^2+1}{n^3-1},\ \frac{2+n}{n+3}, (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)$$

Exercice 3 **: (3 points)**

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\ si\ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 **: (2 points : 1× 2)**

Soient $(E;\ d)$ un espace métrique et f, g deux fonctions continues les ensembles suivants sont-ils fermés ou ouverts.

1) $A = \{x \in E\ ,\ \ f(x) = 1\}$.
2) $B = \{x \in E\ ,\ \ f(x) < g(x)\}$.

Exercice 5: **(6 points: 3× 2)**

Soit E $= \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\}$, on pose pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|, \qquad N_2(f) = |f'(0)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)| \quad et \quad N_3(f) = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$$

1) Montrer que N_1, N_2 et N_3, sont des normes sur E.
2) a) Montrer qu'il existe $C > 0$ $N_1(f) \leq CN_2(f)$
   b) Montrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	EXAMEN DE MATHEMATIQUES	Année scolaire : 2024/2025 Durée: deux heures

***Exercice 1*: (5 points)**

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante

$$\begin{cases} f(x,y) = 2x\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (1 pt)
2) f admet-elle des dérivées partielles premières en $\mathbb{R}^2$? (2 pts)
3) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? (2 pts)

***Exercice 2*: (2 points)**

Soient α un nombre réel strictement positif et f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Déterminer, suivant la valeurs de α, si la fonction f admet une limite en (0,0).

***Exercice 3*: (2 points)**

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables. Montrer que l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(x+xy, y-g(x,y)) \end{array}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 4*: (2 points)**

Soit (x_n) une suite de Cauchy d'une espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ ayant une valeur d'adhérence $x \in X$. Montrer que $x_n \to x$.

***Exercice 5*:** **(3 points: 3×1)**

On note $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et f la fonction continue de U à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (y, e^x + y)$$

1) Déterminer $V = f(U)$.
2) Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

***Exercice 6*:** **(6 points: 6×1)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie n et $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit N_1 la norme usuelle définie par :

$$N_1 : E \to \mathbb{R}^+$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1) Montrer que N_1 est une norme sur E.
2) Soit N une norme quelconque définie sur E.
   a) Montrer que $N(x) \leq \beta N_1(x)$.
   b) Montrer que $|N(x) - N(y)| \leq \beta N_1(x - y)$.
3) Soit l'ensemble $S = \{x \in E,\ N_1(x) = 1\}$.
   a) Montrer que S est un compact.
   b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\alpha = inf_{x \in S} N(x)$, en déduire que $N(x) \geq \alpha N_1(x)$.
4) Montrer que les normes N_1 et N sont équivalentes.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**EXAMEN DE RATTRAPAGE EN MATHEMATIQUES (Analyse)**	**Année scolaire : 2024/2025**

Exercice 1 **: (2 points)**

Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est continue.

Exercice 2**: (3 points)**

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{g'(x) - g'(y)}{x - y} & si\ x \neq y \\ f(x,x) = g''(x) & si\ x = y \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$

Exercice 3**: (6 points)**

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (2 pts)
2) f admet-elle des dérivées partielles premières en $\mathbb{R}^2$? (2 pts)
3) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? (2 pts)

Exercice 4**: (3 points)**

Soient $\alpha\ et\ \beta$ des nombres réels strictement positifs et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha\ et\ \beta$ pour lesquelles la fonction f est continue en (0,0).

Exercice 5 **: (2 points)**

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrer que l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(xy - 2cos(x+y)) \end{array}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 6 **(2 points)**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, pour $x, y \in E$, on définit $x + B^f(y,r) = \{x + z / z \in B^f(y,r)\}$.
Démontrer que $x + B^f(y,r) = B^f(x+y,r)$.

Exercice 7 **: (2 points)**

Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f l'application définie par :

$$f : (E, \|.\|_2) \longrightarrow (E, \|.\|_1)$$
$$f \longrightarrow f^2$$

f est-elle continue?

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2024/2025
Semestre 3

18/01/2025 **Examen de la session de normale: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (7 *points*)

Déterminer la nature des séries numériques suivantes:

1) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+3}\right)^{2n}$, $\sum \frac{\cos(\frac{1}{n})}{n^2+\sqrt{n}}$.

2) $\sum \sin\left(\frac{n^2+2}{n}\pi\right)$, $\sum \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$, $\sum \frac{a^n}{C_{2n}^n}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.

Exercice 2. (4 *points*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}^+$, *on pose* $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

1) *Étudier la convergence simple de la suite* $(f_n)_n$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

2) *Étudier la convergence uniforme de la suite* $(f_n)_n$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. (9 *points*)

Pour $x \in]0,+\infty[$, *on pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)^2}$.

1) *Montrer que* f *est bien définie sur* $]0,+\infty[$.

2) a) *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.

   b) *Déduire les variations de* f *sur* $]0,+\infty[$.

3) *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4) a) *Calculer* $\lim_{x\to 0^+} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)^2}\right]$.

   b) *Déduire* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

5) *Construire la representation graphique de la fonction* f *dans un repère orthonormale.*

6) *Montrer que* $\int_1^2 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$.

15/02/2025 **Examen de la session de rattrapage: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (6 *points*)

Déterminer la nature des séries numériques suivantes:

$$\sum(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \sum\left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^{3n}, \qquad \sum\frac{n^n}{n!}, \qquad \sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. (5 *points*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

1) *Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.*
2) *Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.* =]0,+
3) *Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$.*
4) *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^3 f_n(x)dx$.*

Exercice 3. (9 *points*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

1) *Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
2) *Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*
3) a) *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n>0}\frac{2(-1)^{n+1}x}{(n+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[a, b]$ avec $b > a \geq 0$.*
   b) *Déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*
   c) *Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.*
4) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.*

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAIDI
École Normale Supérieure – Tétouan
Filière : LE MATHEMATIQUE

Examen

Module : Algorithmique et Programmation

Exercice 1

Ecrire un programme qui calcule et affiche l'aire d'un triangle dont il faut entrer les longueurs des trois côtés. Utilisez la formule :

S2 = P(P-A)(P-B)(P-C)

où A, B, C sont les longueurs des trois côtés (type int) et P le demi-périmètre du triangle.

Exercice 2 :

Ecrire un programme qui affiche un triangle isocèle formé d'étoiles de N lignes (N est fourni au clavier):

```
Nombre de lignes : 8
       *
      ***
     *****
    *******
   *********
  ***********
 *************
***************
```

Exercice 3 :

Écrire un programme calculant la somme des *n* premiers termes de la série ci-dessous :

1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/n .

La valeur de *n* sera lue en donnée.

Exercice 4 :

On souhaite écrire une fonction qui permet de résoudre une équation du second degré. Voici le prototype de la fonction:

```
int resoudre2(int a, int b, int c, float *x1, float *x2);
```

La fonction retourne le nombre de solution trouvé (0: pas de solution, 1: une solution, 2: une solutions, -1: tout x est solution). Dans le cas où l'équation a une solution, la fonction retourne la solution dans x1. Dans le cas où l'équation a deux solutions, la fonction retourne les solutions dans x1 et x2.

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAIDI
École Normale Supérieure – Tétouan
Filière : LE MATHEMATIQUE

Examen de rattrapage

Module : Algorithmique et Programmation

Exercice 1

Écrivez un programme qui affiche le triangle de Floyd.

1
01
101
0101
10101

Exercice 2

Écrivez une fonction qui calcule la somme de la série 1 + 11 + 111 + 1111 + .. n termes.

Exercice 3

Écrivez une fonction qui fait le pré incrémentation d'un nombre passé comme paramètre de type pointeur.

for(i=1 ; i<=