Suite de fonctions

Pour tous ce qui suit, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur I. Soit f une fonction réelle définie sur I.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f, si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit aussi que f est la limite simple sur I de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemples 2.

1. *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$.*
   - Si $x \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   - Si $x = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.
   Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [0,1[\\ 1, & si\ x = 1. \end{cases}$
2. *Sur $\mathbb{R}^+$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x > 0 \end{cases}$$
   Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x > 0. \end{cases}$

Exercice 3. *Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n>0}$.*

Propriétés 4. *Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions réelles convergent simplement sur I vers f et g respectivement. Alors*

1. *pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, la suite $(af_n + bg_n)$ converge simplement vers $af + bg$,*
2. *la suite $(f_n g_n)$ converge simplement vers fg.*
3. *si on suppose que (f_n) et f sont non nulles sur I, $(\dfrac{1}{f_n})$ converge simplement sur I vers $\dfrac{1}{f}$ et $(\dfrac{g_n}{f_n})$ converge simplement sur I vers $\dfrac{g}{f}$.*

Définition 5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur I. Soit f une fonction réelle définie sur I.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} = 0.$$

On dit aussi que f est la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si on pose $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\}$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, si et seulement si, la suite (M_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exemples 6.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$.*
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [0,1[\\ 1, & si\ x = 1. \end{cases}$ (voir l'exemples(2)).
   On vérifie aisément que $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n \neq 0$.
   D'où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f.

2. *Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction* $\begin{array}{rcl} f_n : [0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,a]\} = \sup\{x^n : x \in [0,a]\} = a^n$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
   D'où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Remarques 7.

1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur le domaine I, si et seulement si, pour chaque $x \in I$,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

2. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le domaine I, si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \Longrightarrow (\forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)).$$

Pour la convergence simple, le rang N dépend de ϵ et x, et peut changer quand on change x, par contre, le rang N de la convergence uniforme ne dépend que de ϵ, il est valable pour tous les x en même temps.

Propriétés 8. *Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions réelles convergent uniformément sur I vers f et g respectivement, alors*

1. *pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, la suite $(af_n + bg_n)$ converge uniformément vers $af + bg$.*
2. *si f et g sont bornées sur I, la suite $(f_n g_n)$ converge uniformément sur I vers fg.*
3. *si (f_n) et f sont non nulles sur I et $\frac{1}{f}$ et g sont bornées sur I, les suites $(\frac{1}{f_n})$ et $(\frac{g_n}{f_n})$ converge uniformément et respectivement vers les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$.*

Proposition 9. *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f, alors pour tout $B \subset I$, la suite (f_n) converge uniformément sur B vers la fonction f.*

Proposition 10. *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I.*

La réciproque de la proposition 10 est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

On a vu que la suite de fonctions suivante $\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge simplement vers la fonction

$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1[\\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$ mais ne converge pas uniformément vers cette fonction.

Théorème 11 (Critère de Cauchy de la convergence uniforme)**.**
Pour qu'une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit converge uniformément sur I vers une fonction réelle f, il faut et il suffit que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : (p, q \geq N \Longrightarrow \forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon).$$

Démonstration. Si (f_n) converge uniformément vers f, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I : (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2}).$$

Alors

$$\begin{aligned} p, q \geq N \quad &\Longrightarrow \quad |f_p(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } |f_q(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Longrightarrow \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

<u>Réciproquement</u>, supposons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall (p,q)\,;\ (p, q \geq N \Longrightarrow \forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon)$ $(*)$.
On fixe $x \in I$, alors $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Donc $(f_n(x))$ converge vers un réel $f(x)$.
c-à-d on a trouvé une fonction f qui est limite simple de la suite (f_n).
On fait tendre $q \longrightarrow +\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in I\,;\ (p \geq N \Longrightarrow |f_p(x) - f(x)| < \epsilon).$$

D'où, (f_n) converge uniformément vers f. □

Théorème 12. *[Interversion de limites]*

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles converge uniformément sur I vers la fonction f. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = b_n$ existe. Alors, les limites $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ existent et elles sont égales.
Autrement dit $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x))$.

Démonstration. Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : (p, n \geq N \Longrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| < \epsilon)$.
Faisons $x \longrightarrow x_0$, alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : (p, n \geq N \Longrightarrow |b_n - b_p| < \epsilon)$.
Donc (b_n) est une suite de Cauchy.
Alors (b_n) converge vers $b = \lim\limits_{n \to +\infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$.

$$\begin{aligned} |f(x) - b| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - b_n + b_n - b| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|. \end{aligned}$$

$f_n \overset{C.U}{\longrightarrow} f \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall x \in I, (n \geq N' \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3})$ (1).
$f_n(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} b_n \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : (|x - x_0| < r \Rightarrow |f_n(x) - b_n| < \frac{\epsilon}{3})$ (2).
$b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N" \in \mathbb{N} : (n \geq N" \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{3})$ (3).
En combinant (1), (2) et (3) et on en déduit que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0 : (\left\{ \begin{array}{l} x \in I, \\ |x - x_0| < r \end{array} \right. \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. □

Remarque 13.

1. *x_0 peut être une extrémité d'un intervalle, ou ∞.*
2. *Le résultat reste valable si $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.*

Exemple 14. *Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{n}{n + e^x}$.*
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
Donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.
D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x))$.
Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante 1.

Définition 15. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I si, pour tout $[a, b] \subset I$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.*

Remarque 16. *Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I, elle converge uniformément sur tout segment de I. La réciproque est en general fausse.*

Théorème 17. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction f. Si les fonctions f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.*

Remarque 18. *Ce résultat fournit une méthode pour prouver la non-convergence uniforme ; en effet, si les f_n sont continues et f n'est pas continue, alors il n'y a pas de convergence uniforme.*

Exemple 19. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$ *:* $f_n(x) = x^n$.
On a vu que $f_n \overset{C.S}{\longrightarrow} f$, telle que $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & si\ x \in [0, 1[\\ 1, & si\ x = 1. \end{array} \right.$
C'est clair que les f_n sont continues en 1 à gauche, et puisque f n'est pas continue en 1 à gauche.
Alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

Théorème 20 (Intégrabilité et convergence uniforme)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[a, b]$. On définie la suite de fonctions (F_n) par :

$$\forall x \in [a, b], F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f, alors, la suite (F_n) converge uniformément vers la fonction F définie sur $[a, b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, $f_n \overset{C.U}{\longrightarrow} f \Longrightarrow (\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \forall t \in [a,b], |f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a})$.
Donc $\int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^x \frac{\epsilon}{b-a} dt$ pour $n \geq N$.
Donc $| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt| \leq \frac{x-a}{b-a}\epsilon \leq \epsilon$ pour $n \geq N$.
Ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$.
Donc la suite (F_n) converge simplement vers F sur $[a,b]$.
Or l'entier naturel N ne dépend pas de x, donc la convergence est uniforme. □

Corollaire 21. *Si (f_n) est une suite de fonctions réelles continues converge uniformément sur l'intervalle $[a,b]$ vers la fonction f, alors*

$$\forall x \in [a,b], \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

Théorème 22. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $I = [a,b]$. On suppose que*

1. *Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge vers un réel a.*
2. *La suite (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction g.*

Alors

1. *La suite la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.*
2. *$f' = g$ et $f(x_0) = a$.*

Démonstration. Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = a + \int_{x_0}^x g(t)dt$.
Donc f est l'unique fonction derivable sur I dont la dérivée g telle que $f(x_0) = a$.
Puisque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $\forall x \in I$, $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$.
Alors $f_n(x) - f(x) = (f_n(x_0) - a) + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t))dt$.
Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - a| + | \int_{x_0}^x f'_n(t)dt - \int_{x_0}^x g(t)dt|$.
Soit $\epsilon > 0$.
Puisque (f'_n) est une suite de fonctions continues converge uniformément sur I vers la fonction g et d'après le théorème17, on déduit que la suite $(\int f'_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $\int g$.
Donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow | \int_{x_0}^x f'_n(t)dt - \int_{x_0}^x g(t)dt| < \frac{\epsilon}{2}$.
D'autre part, $(f_n(x_0))$ converge vers a.
Donc, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N_2 \Rightarrow |f_n(x_0) - a| < \frac{\epsilon}{2}$.
D'où, pour $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in I$.
Ce qui achève la démonstration. □

Du théorème 22 découlent plusieurs corollaires, le premier par unicité de la limite.

Corollaire 23. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f et g deux fonctions réelles définies sur I. On suppose que :*

i. *(f_n) converge simplement vers f sur I.*

ii. *(f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers g.*

Alors

i. *(f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.*

ii. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.*

Le second corollaire se déduit du corollaire 23 par récurrence.

Corollaire 24. *$k \in \mathbb{N}^*$. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. On suppose que :*

i. *pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, la suite $(f_n^{(p)})$ converge simplement.*

ii. *La suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction g.*

Alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$. De plus $f^{(k)} = g$.