*Université Abdelmalek Essaadi*
*Ecole Normale Supérieure de Tétouan*
*Département de Mathématiques*

**Année Universitaire**
**2024 – 2025**
**Semestre 4**

## Série d'exercices : Espaces euclidiens

### Exercice 1

1. Les formes quadratiques suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$Q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2,$$
$$Q_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2,$$
$$Q_3(x) = 5x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + 7x_2x_3.$$

2. Les formes bilinéaires suivantes sont-elles des produits scalaires sur $\mathbb{R}_3[X]$ ?

$$(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt,$$
$$(P,Q) \mapsto \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\cos(t)\,dt.$$

### Exercice 2

1. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

2. Orthonormaliser la base suivante de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel :

$$v_1 = (0,0,-1), \quad v_2 = (4,-2,0), \quad v_3 = (2,1,0).$$

### Exercice 3 :

1. Soit $\Phi$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. On définit alors une application $\Psi$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Psi(x,y) = a\Phi(x,x) + b\Phi(x,y) + c\Phi(y,y).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\Psi$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \implies (x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.
   b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \implies (x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.

### Exercice 4 :

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^T B).$$

1. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
2. Soit $F$ l'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques de $E$.

(a) Donner une base et la dimension de $F$.

(b) Déterminer $F^{\perp}$, l'orthogonal de $F$ pour $\varphi$.

**Exercice 5 :**

Montrer que dans chacun des cas suivants, la forme bilinéaire symétrique $f$ définit un produit scalaire.

1. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tous $P, Q \in E$ :

$$f(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

2. $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et pour toutes $h, g \in E$ :

$$f(h,g) = h(0)g(0) + \int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt.$$

3. $E = M_n(\mathbb{R})$ et pour toutes $A, B \in E$ :

$$f(A,B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}B).$$

**Exercice 6 :**

Soit $E$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda > 0$. On dit que $f$ est une similitude de rapport $\lambda$ si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda\|x\|.$$

1. **Question préliminaire** : Si $u + v \perp u - v$, montrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Montrer que $f$ est une similitude de rapport $\lambda$ ssi :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle.$$

3. Montrer que $f$ est une similitude ssi $f$ est non-nulle et préserve l'orthogonalité.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Pour la réciproque, utiliser une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ et montrer $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

**Exercice 7 :**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

**Exercice 8 :**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(u, v, w)$ avec :

$$u = (1,-1,1), \quad v = (2,1,-2), \quad w = (-1,-1,1).$$

**Exercice 9 :**

1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

**Exercice 10 :**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

1. Soient $u$ et $v$ deux vecteurs unitaires de $E$. Montrer que :

$$(u + v \mid u - v) = 0.$$

2. soit $f \in L(E)$ tel que $(x \mid y) = 0$ implique que $(f(x) \mid f(y)) = 0$
   a) Montrer que si $u$ et $v$ sont deux vecteurs unitaires, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.
   b) En déduire qu'il existe un réel $k$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.
   b) Montrer alors que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $(f(x) \mid f(y)) = k^2(x \mid y)$.

**Exercice 11 :**

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ muni d'une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$, et $H$ l'hyperplan de $E$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Déterminer une base orthonormale de $H$.