Chapitre 1

Espaces topologiques

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble non vide. Une topologie sur E est une famille τ de parties de E qui vérifie les axiomes suivants :*

i) $\emptyset \in \tau$, $E \in \tau$,

ii) l'intersection de deux éléments de τ est un élément de τ,

iii) la réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de τ est un élément de τ.

Les éléments de τ sont appelés des ouverts ou des parties ouvertes et le couple (E, τ) est appelé un espace topologique.

Exemples 1.1.2.

1. ***la topologie discrète :***
   Soit E un ensemble non vide. $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E est une topologie sur E, on la note τ_d.
   Dans l'espace topologique discrèt (E, τ_d),on a
   A est un ouvert, si et seulement si A est une partie de E.
2. ***la topologie grossière :***
   Soit E un ensemble non vide. On pose $\tau_g = \{\emptyset, E\}$. τ_g est une topologie sur E.
3. *Soit $E = \{a, b\}$.*
   La famille $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$ est une topologie sur E.
   La famille $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, E\}$ définie une topologie sur E.
4. *Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et les réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ définie une topologie sur $\mathbb{R}$ s'appelle la topologie usuelle, notée τ_u.*

Exercice 1.1.3. *Montrer que la famille formée de $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et les intervalles de la forme $]a, b[$ n'est pas une topologie sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.1.4. *Montrer que pour toute topologie sur un ensemble non vide soit discrète, il faut et il suffit que toute partie réduite à un seul élément est un ouvert.*

Définition 1.1.5. *Soit (E, τ) un espace topologique. Un fermé (ou une partie fermée) de E est une partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert.*

Exemples 1.1.6.

1. *Pour la topologie grossière, les fermés sont $\emptyset, E$.*
2. *Pour la topologie discrète, toute partie de E est fermée.*

3. *Posons $E = \{a,b\}$. On a vu que les familles $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, E\}$ sont des topologies sur E, alors pour τ_1, les fermés sont $\emptyset, \{b\}, E$ et pour τ_2 les fermés sont $\emptyset, \{a\}, E$.*

Remarques 1.1.7. *Soit (E,τ) un espace topologique.*

1. *Les ouverts de (E,τ) sont stables par réunion quelconque et par intersection finie.*
2. *Les fermés de (E,τ) sont stables par intersection quelconque et par réunion finie.*
3. *Si une partie de (E,τ) n'est pas ouverte, on ne peut pas dire qu'elle est fermée :*
   (a) *Pour la topologie discrète, toute partie à la fois ouverte et fermée.*
   (b) *Si on considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle : $]a,b[$ est ouvert et n'est pas fermé, $[a,b]$ est fermé et n'est pas ouvert et $]a,b]$ n'est ni fermé ni ouvert.*
4. *$\emptyset$ et E sont à la fois fermés et ouverts.*
5. *L'intersection infinie des ouverts en général n'est pas un ouvert : dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\bigcap\limits_{n\in N}$ est une famille des ouverts, par contre $\bigcap\limits_{n\in N}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ est un fermé.*
6. *La réunion infinie des fermés en général n'est pas un fermé : dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\bigcup\limits_{n\in N} [\frac{-1}{n}, 1]$ est une famille des fermés, mais $\bigcup\limits_{n\in N} [\frac{-1}{n}, 1] =]0,1]$ ne l'est pas.*

Définition 1.1.8. *Soit (E,τ) un espace topologique et $x \in E$. On appelle* ***voisinage*** *de x toute partie U de E contenant un ouvert W ($W \in \tau$) tel que $x \in W$.*
On note V_x l'ensemble de tous les voisinages de x.

Exemples 1.1.9.

1. *Posons $E = \{a,b\}$ et $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$. Alors :*
   (a) *E et $\{a\}$ sont des voisinages de a.*
   (b) *E est un voisinage de b.*
   (c) *$\{b\}$ n'est pas un voisinage de b.*
2. *Soit E un ensemble non vide muni de la topologie discrète et $x \in E$. Alors toute partie contient x est un voisinage de x.*

Propriétés 1.1.10. *Soit (E,τ) un espace topologique et $x \in E$.*

1. *$E \in V_x$.*
2. *$\emptyset \notin V_x$.*
3. *Si $V \in V_x$ et $V \subset W \subset E$ alors $W \in V_x$.*
4. *Si $V \in V_x$ et $W \in V_x$ alors $W \cap V \in V_x$.*
5. *L'intersection finie des voisinages de x est un voisinage de x.*
6. *La reunion quelconque des voisinages de x est un voisinage de x.*

Théorème 1.1.11. *Soit (E,τ) un espace topologique et $A \subset E$. Alors, A est un ouvert si et seulement si A est un voisinage de tous ses points.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Évident.
$\Longleftarrow$) Supposons que A est un voisinage de tous ses points.
Soit $x \in A$.
Alors il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset A$.
Alors $\bigcup\limits_{x\in A} O_x \subset A$.
Or $A \subset \bigcup\limits_{x\in A} O_x$.
Donc $A = \bigcup\limits_{x\in A} O_x$.
D'où A est un ouvert. □

Définition 1.1.12. *Soit (E,τ) un espace topologique, $x \in E$ et B est une famille d'éléments de τ.*

1. *On dit que B est **une base d'ouverts** (de τ) si et seulement si tout ouvert est réunion d'éléments de B.*
2. *Une partie B_x de V_x est dite **base de voisinage** de x (Système fondamentale de voisinage de x) si et seulement si $\forall V \in V_x\ \exists b \in B_x\ x \in b \subset V$.*

Exemples 1.1.13.

1. *Une topologie discrète possède une base constitue des singletons.*
2. *L'ensemble des intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble des intervalles de type $]-\infty,a[$ ou $]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ n'est pas une base d'ouverts de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.*
4. *Soit $x \in \mathbb{R}$, $(]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de voisinage de x pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 1.1.14. *Soit (E,τ) un espace topologique. Soit B une famille d'éléments de τ. Alors, B est une base d'ouverts si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille B_x des éléments de B contenant x est une base de voisinage de x.*

Démonstration. Montrons que

$$B \text{ est une base de } \tau \iff \forall x \in E, B_x = \{b \in B / x \in b\} \text{ est une base de voisinage de } x.$$

$\Longrightarrow$) Supposons que B est une base d'ouverts.
Soit $x \in E$ et soit $V \in V_x$.
Alors $\exists W \in \tau$ tel que $x \in W \subset V$.
Puisque B est une base d'ouverts, $W = \bigcup\limits_{i\in I} b_i$ avec $b_i \in B$, $\forall i \in I$.
$x \in W \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in b_{i_0}$.
Donc $x \in b_{i_0} \subset W \subset V$.
D'où la famille B_x est une base de voisinage de x.
$\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $x \in E$, la famille B_x est une base de voisinage de x.
Soit O un ouvert. Soit $x \in O$.
Alors, O est un voisinage de x.
Alors, $\exists b_x \in B$ tel que $x \in b_x \subset O$.
Donc, $\bigcup\limits_{x\in O} b_x \subset O$.
Or, $O \subset \bigcup\limits_{x\in O} b_x$.
D'où, $O = \bigcup\limits_{x\in O} b_x$.
D'où, B_x est une base de voisinage de x. □

Définition 1.1.15. *On dit qu'un espace topologique (E,τ) est séparé (Espace de Hausdorff), si pour tous $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$, il existe $(W,W') \in V_x \times V_{x'}$ tels que $W \cap W' = \emptyset$.*

Exemples 1.1.16.

1. *L'espace topologique grossier n'est pas séparé.*
2. *L'espace topologique discret est séparé.*
3. *$(\mathbb{R}, \tau_u)$ est un espace topologique séparé.*

Remarque 1.1.17. *Un espace topologique (E,τ) est séparé, si pour tous $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$, il existe $(O,O') \in \tau^2$ tels que $x \in O$, $x' \in O'$ et $W \cap W' = \emptyset$.*

Proposition 1.1.18. *Dans un espace topologique séparé, les singletons sont fermés.*

Démonstration. Soit (E, τ) un espace topologique séparé.
Soit $x \in E$.
Montrons que $\{x\}$ est fermé. C'est pour cela qu'on va montrer que $\{x\}^c$ est un ouvert.
Soit $x' \in \{x\}^c$.
Donc $x \neq x'$.
Alors $\exists (W, W') \in \tau^2$, $W \cap W' = \emptyset$ avec $x \in W$ et $x' \in W'$.
Donc $x \notin W'$.
D'où $W' \subset \{x\}^c$.
Donc $\{x\}^c$ est un voisinage de x'.
On en déduit que $\{x\}^c$ est un voisinage de tous ses points.
D'où $\{x\}^c$ est un ouvert.
Donc $\{x\}$ est un fermé. □

1.2 Intérieur, adhérence, frontière, point isolé et point d'accumulation

Définition 1.2.1. *Soient (E, τ) un espace topologique et A une partie non vide de E. Soit $a \in E$.*

1. *On dit que a est* ***intérieur*** *à A si A est un voisinage de a. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A. $\mathring{A}$ est appelé l'intérieur de A.*
2. *On dit que a est* ***adhérent*** *à A si tout voisinage de a rencontre A i.e $\forall V \in V_a$, $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A. $\bar{A}$ est appelé l'adhérence (la fermeture) de A.*
3. *On dit que a est un* ***point d'accumulation*** *de A si $forall V \in V_a$, $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.*
4. *On dit que a est un* ***point isolé*** *de A si $\exists V \in V_a$, $V \cap A = \{a\}$.*
5. *La* ***frontière*** *de A notée ∂A est définie par $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.*

Exemples 1.2.2.

1. $E = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$. *Posons $A = \{b\}$. Alors*
   - $\mathring{A} = \emptyset$.
   - $\bar{A} = \{b\}$.
   - *A n'a aucun point d'accumulation.*
   - $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{b\}$.
   - *b est un point isolé de A.*
2. (E, τ_d). *Soit $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$. Alors*
   - $\mathring{A} = A$.
   - $\bar{A} = A$.
   - $\partial A = \emptyset$.
   - *A est l'ensemble des points isolés de A.*
3. *On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle τ_u et posons $A =]a, b]$ avec $a < b$. Alors*
   - $\mathring{A} =]a, b[$.
   - $\bar{A} = [a, b]$.
   - *$[a, b]$ est l'ensemble des points d'accumulations de $]a, b]$.*
   - *Pas de point isolé.*

Propriétés 1.2.3. *Soient (E, τ) un espace topologique et A une partie non vide de E.*

1. $\mathring{A} \subset A$.
2. *$\mathring{A}$ est un ouvert.*
3. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. C'est à dire $\mathring{A} = \bigcup\limits_{O \subset A} O$ avec O ouvert.*

4. *$A \subset \bar{A}$.*
5. *$(\bar{A})^c = \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}$ et $\bar{A}$ est un fermé.*
6. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contient A. C'est à dire $\bar{A} = \bigcap\limits_{A \subset F} F$ avec F fermé.*

Démonstration.

1. Évident.
2. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$ et montrons que $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de a.
   Puisque $a \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert W tel que $a \in W \subset A$.
   Montrons que : $W \subset \overset{\circ}{A}$.
   Si $x \in W$, alors A est un voisinage de x.
   Alors $x \in \overset{\circ}{A}$.
   Donc $W \subset \overset{\circ}{A}$.
   Donc $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de a.
   D'où $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
3. Soit U un ouvert de (E, τ) tel que $U \subset A$.
   Soit $x \in U$.
   Donc $x \in U \subset A$.
   Alors A est un voisinage de x.
   D'où $x \in \overset{\circ}{A}$.
   D'où $U \subset \overset{\circ}{A}$.
4. Évident.
5. $\bar{A}$ est fermé ?
   Montrons que : $(\bar{A})^c = \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}$.

$$
\begin{aligned}
x \in (\bar{A})^c &\iff x \neq \bar{A}. \\
&\iff \forall V \in V_x, \quad V \cap A \neq \emptyset. \\
&\iff \forall V \in V_x, \quad V \subset A^c. \\
&\iff x \in \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}.
\end{aligned}
$$

   Donc $(\bar{A})^c = \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}$.
   Or $(A^c)^o$ est un ouvert.
   Donc $\bar{A}$ est fermé.
6. Soit F un fermé tel que $A \subset F$.
   Montrons que $\bar{A} \subset F$.
   Puisque $A \subset F$, alors $F^c \subset A^c$.
   Or F^c est un ouvert.
   Donc $F^c \subset \overset{\circ}{\overbrace{A^c}} = (\bar{A})^c$.
   D'où $\bar{A} \subset F$.

□

Propriété 1.2.4. *Soient A et B deux parties d'un espace topologique (E, τ) alors*

1. *$\partial A = \bar{A} \cap \bar{A^c}$.*
2. *$A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
3. *$\overset{\circ}{A} = E \backslash \bar{A^c} = \overbrace{\overline{A^c}}^{c}$ et $\bar{A} = E \backslash (A^c)^o = \overbrace{(\overset{\circ}{A^c})}^{c}$.*

Démonstration.
1) $\partial A = \bar{A} \backslash \mathring{A} = \bar{A} \cap (\mathring{A})^c$.
Montrons que $(\mathring{A})^c = \bar{A}^c$.
$(\mathring{A})^c = (\overbrace{(A^c)^c}^{\circ})^c = (\overbrace{B^c}^{\circ})^c$ avec $B = A^c$.
Donc $(\mathring{A})^c = ((\bar{B})^c)^c = ((\overline{(A^c)})^c)^c = \overline{(A^c)}$. $\square$

Propriétés 1.2.5. *Soient U et F deux parties d'un espace topologique(E, τ). Alors*

1. *U est ouvert $\Longleftrightarrow \mathring{U} = U$.*
2. *F est fermé $\Longleftrightarrow \bar{F} = F$.*

Propriétés 1.2.6. *Soient A et B deux parties non vides d'un espace topologique (E, τ). Alors*

1. *$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*
2. *$\overbrace{A \cap B}^{o} = \mathring{A} \cap B^o$.*
3. *$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.*
4. *$\mathring{A} \cup B^o \subset \overbrace{A \cup B}^{o}$.*

1.3 Topologie induite, topologie quotient, topologie produit

1.3.1 Topologie induite

Proposition 1.3.1. *Soient A une partie non vides d'un espace topologique (E, τ). La famille $\tau_A = \{O \cap A \backslash O \in \tau\}$ définie une topologie sur A.*

Démonstration. $\emptyset \in \tau_A$ car $\emptyset = A \cap \emptyset$ avec $\emptyset \in \tau$.
$A \in \tau_A$ car $A = A \cap E$ avec $E \in \tau$.
Soient $U, V \in \tau_A$.
Donc $U = O_1 \cap A$ et $V = O_2 \cap A$ avec $O_1, O_2 \in \tau$.
Donc $U \cap V = O_1 \cap A \cap O_2 \cap A = (O_1 \cap O_2) \cap A = O_3 \cap A$ avec $O_3 = O_1 \cap O_2 \in \tau$.
Soit $(u_i)_{i \in I} \in \tau_A$.
Alors $\forall i \in I, \quad u_i = O_i \cap A$ avec $O_i \in \tau$.
Donc $\bigcup_{i \in I} u_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} O_i) \cap A$.
D'où $\bigcup_{i \in I} u_i \in \tau_A$.‘ $\square$

Définition 1.3.2. *La topologie de la proposition 1.3.1 est appelée **topologie induite** sur A et le couple (A, τ_A) est apple un sous-espace topologique de (E, τ).*

Remarque 1.3.3. *En général, les ouverts dans τ_A ne sont pas des ouverts dans (E, τ).*

Exemple 1.3.4. *On considère $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Soit $A = [-1, 1]$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur A. Alors $w =]0, 1]$ est un ouvert dans (A, τ_A) car $w = A \cap]0, +\infty[$. Par contre w n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

Proposition 1.3.5. *Soit (A, τ_A) un sous espace topologique d'un espace topologique (E, τ) et $a \in A$. Alors, une partie V de A est un voisinage de a dans (A, τ_A) si et seulement si $V = W \cap A$ avec W est un voisinage de a dans (E, τ).*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Soit W un voisinage de a dans (E, τ).
Donc, $\exists U \in \tau, \quad a \in U \subset W$.

Alors $a \in U \cap A \subset W \cap A$.
Puisque $U \in \tau$ alors $U \cap A \in \tau_A$.
Posons $V = W \cap A$. Donc $U \cap A \subset V$.
D'où V est un voisinage de a dans (A, τ_A).
$\Longleftarrow$) Soit V un voisinage de a dans (A, τ_A).
Alors $\exists U \in \tau_A, \quad a \in U \subset V$.
Puisque $U \in \tau_A$, alors $U = W \cap A$ avec $W \in \tau$.
Donc $a \in W$, alors W est un voisinage de a dans (E, τ).
Posons $O = W \cup V$, donc $W \subset O$.
Alors O est un voisinage de a dans (E, τ).
Donc $O \cap A = (W \cup V) \cap A = (W \cap A) \cup (V \cap A) = U \cup V = V$. □

1.3.2 Topologie quotient et topologie produit

Proposition 1.3.6. *Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique (E, τ). On note $[x] = \{x' \in E : \ x'\mathfrak{R}x\}$ la classe d'équivalence d'un élément x de E et $\widehat{E} = E\backslash_{\mathfrak{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalences de la relation $\mathfrak{R}$. Soit* $\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & \widehat{E} \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$ *la surjection canonique. La famille $\widehat{\tau} = \{U \subset \widehat{E} / q^{-1}(U) \in \tau\}$ est une topologie sur $\widehat{E}$.*

Définition 1.3.7 (Topologie quotient)**.**
*La topologie de la proposition 1.3.6 est appelée la **topologie quotient** sur E.*

Proposition 1.3.8. *Soit $(E_i, \tau_i)_{1 \leq i \leq n}$ n espaces topologiques. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Soit τ_π la famille des parties de E qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ avec $u_i \in \tau_i$. Alors τ_π est une topologie sur E.*

Définition 1.3.9 (Topologie produit)**.**
*La topologie de la proposition 1.3.8 est appelée la **topologie produit** sur E.*

1.4 Applications continues dans les espaces topologiques

Définition 1.4.1. *Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une application, $a \in E$ et $b \in F$. On dit que f tend vers b quand x tend vers a, si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. b est appelé la limite de f lorsque x tend vers a, si cette limite est unique, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.*

Remarque 1.4.2. *Si l'espace d'arrivé (F, tau') n'est pas séparé, une application f peut avoir au même point plusieurs limites.*

Exemple 1.4.3. *Si (F, τ') est l'espace toplogique grossier, alors tout point b de F est limite de f en a.*

Théorème 1.4.4. *Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques. On suppose que (F, τ') est séparé. Si une application $f : E \to F$ admet une limite en un point, alors cette limite est unique.*

Démonstration. On suppose que f admet deux limites $b, b' \in F$ en un point $a \in E$ avec $b \neq b'$.
Puisque (F, τ') est séparé, il existent $V \in V_b$ et $V' \in V_{b'}$ tels que $V \cap V' = \emptyset$.
Puisque f tend vers b quand $x \to a$, alors, il existe $U \in V_a$ tel que $f(U) \subset V$.
D'une manière $U' \in V_a$ tel que $f(U') \subset V'$.
Alors $f(U) \cap f(U') \subset V \cap V'$.
Donc $f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U') \subset \emptyset$.

Donc $f(U \cap U') = \emptyset$.
Or $a \in U \cap U'$.
Donc $f(a) \in f(U \cap U')$.
D'où $f(U \cap U') \neq \emptyset$, ce qui est absurde. $\square$

Définition 1.4.5. *Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

i) On dit que f est continue en un point $a \in E$ si f tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

ii) On dit que f est continue sur une partie A de E, si f est continue en tout point de A.

iii) On dit que f est continue, si f est continue sur E.

Théorème 1.4.6. *Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) f est continue.

b) Pour tout ouvert $U \subset F$, $f^{-1}(U)$est ouvert.

c) Pour tout fermé $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ est fermé.

d) Pour toute partie $A \subset E$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Démonstration.
Montrons que $a \Rightarrow d$.
Soit $A \subset E$, montrons que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Soit $a \in \bar{A}$ et $W \in V_{f(a)}$.
Puisque f est continue en a, il existe $U \in V_a$ tel que $f(U) \subset W$.
Puisque $a \in \bar{A}$, alors $U \cap A \neq \emptyset$.
Donc $f(U \cap A) \neq \emptyset$.
Puisque $f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A)$.
Alors $f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$.
Or $f(U) \cap f(A) \subset W \cap f(A)$. Donc $W \cap f(A) \neq \emptyset$.
D'où $f(a)$ est un point adherent à $f(A)$. On en déduit que $f(A) \subset \overline{f(A)}$.
Montrons que $d \Rightarrow c$.
Soit V un fermé de F et posons $W = f^{-1}(V)$.
Puisque $f(W) = f(f^{-1}(V)) \subset V$, alors $\overline{f(W)} \subset \overline{V} = V$.
Soit $x \in \overline{W}$, alors $f(x) \in f(\overline{W})$.
Puisque $f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$, alors $f(x) \in \overline{f(W)}$.
Donc $f(x) \in V$.
Ce qui implique que $x \in W$.
Donc $\overline{W} \in W$. D'où $W = \overline{W}$.
Montrons que $c \Rightarrow b$.
Soit U un ouvert de F, alors U^c est un fermé de F.
Donc $f^{-1}(U^c)$ est fermé.
Or $f^{-1}(U^c) = \{x \in E / f(x) \in U^c\} = \{x \in E / f(x) \neq U\} = E \backslash f^{-1}(U)$.
D'où $f^{-1}(U)$ est un ouvert.
Montrons que $b \Rightarrow a$.
Soit $x_0 \in E$ et $V \in V_{f(x_0)}$.
Donc il existe $W \in \tau'$ tel que $f(x_0) \in W \subset V$.
Posons $U = f^{-1}(W)$. Alors $x_0 \in U$ et $U \in \tau$.
Donc U est un voisinage de x_0 et $f(U) \subset V$.
Donc f est continue en x_0. D'où f est continue. $\square$

Corollaire 1.4.7. *La composition de deux applications continues est une application continue.*

Démonstration. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow H$ deux applications continues.
Soit V est un ouvert de H. $(gof)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$.
Puisque g est continue, alors $g^{-1}(V)$ est un ouvert.
De même $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est ouvert.
Donc $(gof)^{-1}(V)$ est un ouvert. D'après le theoreme 1.4.6 gof est une application continue. □

Définition 1.4.8. *Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques.*

i) Une application $f : E \longrightarrow F$ est un ***homéomorphisme*** *si f est bijective bicontinue (f et f^{-1} continues).*

ii) E et F sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de E dans F.

Exercice 1.4.9.

1. *Montrer que* $\begin{array}{lcl} Id : (E, \tau) & \to & (E, \tau') \\ x & \mapsto & x \end{array}$ *est un homéomorphisme si et seulement si $\tau = \tau'$.*
2. *Montrer que l'application $f : (E, \tau) \longrightarrow (F, \tau')$ est un homéomorphisme si et seulement si*

   l'application $\begin{array}{lcl} \tau & \to & \tau' \\ U & \mapsto & f(U) \end{array}$ *est bijective.*

Chapitre 2

Espaces Compacts - Espaces Connexes

2.1 Espaces compacts

Définition 2.1.1. *Soit (E, τ) un espace topologique.*

*i) On appelle un **recouvrement** de E, toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de E tel que :*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = E.$$

*ii) On appelle **sous-recouvrement** d'un recouvrement, tout recouvrement formé de parties appartenant au premier recouvrement.*

*iii) Un **recouvrement** de E est **fini** s'il est formé d'un nombre fini de parties de E.*

*iv) Un **recouvrement** est **ouvert** si tous ses éléments sont ouverts.*

Exemple 2.1.2. $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.3. *Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement d'un espace topologique (E, τ), alors*

$$\forall a \in E,\ \exists i_0 \in I :\ a \in U_{i_0}.$$

Définition 2.1.4. *Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que E est **compact** si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

i) (E, τ) est séparé.

*ii) De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous recouvrement fini de E (axiome de **Borel-Lebesgue**).*

Exemple 2.1.5. *On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Alors $(]-\infty, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais il n'existe aucun sous-recouvrement fini de $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ n'est pas compact.*

Remarques 2.1.6.

1. *L'hypothèse de la séparation est essentielle. Un espace muni de la topologie grossière vérifie la propriété de **Borel-Lebesgue**, mais il n'est pas séparé, donc elle n'est pas compact.*
2. *Si (E, τ) est un espace topologique compact et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ouverts dont la réunion égale E ($E = \cup V_n$). Alors pour un entier convenable n_0, V_{n_0} est identique à E.*

Théorème 2.1.7. *Un espace topologique (E, τ) est **compact** si et seulement si pour toute famille de fermés dont l'intersection est vide il existe un nombre fini de ces fermés dont l'intersection est vide.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Supposons que E est compact.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E tel que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$.
Alors $(\bigcap\limits_{i\in I} F_i)^c = E$.
Donc $\bigcup\limits_{i\in I} F_i^c = E$.
Puisque F_i est fermé alors F_i^c est ouvert.
Donc $(F_i^c)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E.
Puisque E est compact, il existe $F_{i_1}^c, F_{i_2}^c, \ldots, F_{i_n}^c$ tels que $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_i^c = E$.
Donc $(\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_i)^c = E$.
D'où $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_i = \emptyset$.
$\Longleftarrow$) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E.
Donc $\bigcup\limits_{i\in I} O_i = E$.
Donc $(\bigcup\limits_{i\in I} O_i)^c = \emptyset$.
Donc $\bigcap\limits_{i\in I} O_i^c = \emptyset$ avec O_i^c est fermé pour tout $i \in I$.
Alors, il existe $O_{i_1}^c, O_{i_2}^c, \ldots, O_{i_n}^c$ tels que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} O_i^c = \emptyset$.
D'où $(\bigcup\limits_{k=1}^{n} O_i)^c = \emptyset$.
Alors $\bigcup\limits_{k=1}^{n} O_i = E$.
D'où E est compact. □

Corollaire 2.1.8.

1. *Pour qu'un espace topologique (E, τ) soit* ***compact*** *il faut et il suffit que toute famille de fermés de E dont toutes les intersections finies sont non vide a une intersection non vide.*
2. *Soit (E, τ) un espace topologique. Si F_n est une suite décroissante de fermés de E dont l'intersection est vide, alors il existe un entier convenable n_0 tel que $F_{n_0} = \emptyset$.*

Définition 2.1.9. *Soit (E, τ) un espace topologique séparé et A une partie non vide de E. On dit que A est compacte, si A est compacte par rapport à la topologie induite τ_A.*

Proposition 2.1.10. *Soit (E, τ) un espace topologique séparé et A une partie non vide de E. Alors A est compacte, si et seulement si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, il existe $U_{i_1}, U_{i_2} \ldots U_{i_n}$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Supposons que A est compacte.
Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts dans (E, τ) telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
Donc $A = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap U_i)$.
Or $A \cap U_i$ est ouvert dans (A, τ_A).
Donc $(A \cap U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A dans (A, τ_A).
Donc il existe $A \cap U_{i_1}, A \cap U_{i_2} \ldots A \cap U_{i_k}$ tels que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(A \cap U_{i_k})$.
Alors $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

$\Longleftarrow$) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A par rapport à τ_A.
Donc $A = \bigcup\limits_{i\in I}(O_i)$.
Puisque O_i est un ouvert par rapport à τ_A, alors $O_i = U_i \cap A$ avec $U_i \in \tau$.
Donc $A = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap U_i)$.
Ce qui implique que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
Donc, il existe $I_0 \subset I$ finie tel que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$.
D'où $A = \bigcup\limits_{i\in I_0}(A \cap U_i) = \bigcup\limits_{i\in I_0} O_i$.
On en déduit que A est compacte. □

Théorème 2.1.11. *Toute partie compacte d'un espace topologique sépare est fermée.*

Démonstration.
Soit (E,τ) un espace topologique séparé. Soit A une partie compacte de E.
Cas 1 Si $A^c = \emptyset$, alors $A = E$ donc A est fermé.
Cas 2 Supposons que $A^c \neq \emptyset$.
Soit $x \in A^c$ et $y \in A$, alors $x \neq y$.
Donc $\exists O_{xy} \in \tau, \;\; \exists O_y \in \tau, \;\; x \in O_{xy}, \;\; y \in O_y$ et $O_y \cap O_{xy} = \emptyset$.
Or $A \subset \bigcup\limits_{y\in A} O_y$.
Donc, il existe $O_{y_1}, O_{y_2}, \ldots, O_{y_n}$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{y_i}$.
Posons $O = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_{xy_i}$. Donc O est un ouvert contenant x.
Puisque $\forall i = 1, 2, \ldots, n, \; O_{xy_i} \cap O_{y_i} = \emptyset$.
Alors, pour $i = 1, 2, \ldots, n \; O_{xy_i} \cap A = \emptyset$.
D'où $O \cap A = \emptyset$. Ce qui implique que $O \subset A^c$.
On en déduit que A^c est un voisinage de tous ses points. Ce qui affirme que A est fermé. □

Théorème 2.1.12. *Tout fermé dans un espace topologique compact est compact.*

Démonstration. Soit (E,τ) un espace topologique compact. Soit F un fermé de E.
Montrons que (F,τ_F) est séparé.
Soit $x, y \in F$ tels que $x \neq y$.
Donc $\exists O_x \in \tau, \; \exists O_y \in \tau$ tel que $O_x \cap O_y = \emptyset$ avec $x \in O_x$ et $y \in O_y$.
Posons $U_x = F \cap O_x$ et $U_y = F \cap O_y$.
Donc $U_x \in \tau_F$ et $U_y \in \tau_F$.
De plus $U_x \cap U_y = (F \cap O_x) \cap (F \cap O_y) = F \cap (O_x \cap O_y) = F \cap \emptyset$.
Donc (F,τ_F) est séparé.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés dans (F,τ_F) tel que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$.
Puisque F_i est un fermé de (F,τ_F) et F un fermé de (E,τ), alors F_i est fermé dans E.
Donc $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés dans (E,τ).
D'où, il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $\bigcap\limits_{i\in I_O} F_i = \emptyset$.
D'où F est compact. □

Proposition 2.1.13.

1. *Une intersection quelconque de sous espaces compacts est un sous-espace compact.*
2. *Une Réunion finie de sous espaces compacts est un sous-espace compact.*

Démonstration.

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces compacts.
   Alors F_i est fermé pour chaque $i \in I$.
   Donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est fermé.
   Or $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset F_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$.
   Puisque F_{i_0} est compact.
   Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est compact.
2. Soit $A_1, \ldots, A_n$ n sous-espaces topologiques compacts. Montrons que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est compact.
   Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
   Alors, pour $p = 1, \ldots, n$, $A_p \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
   Puisque A_p est compacte, il existe $I_p \subset I$ finie telle que $A_p \subset \bigcup\limits_{i\in I_p} O_i$.
   Donc $A \subset \bigcup\limits_{p=1}^{n} \bigcup\limits_{i\in I_p} O_i$.
   D'où A est compact.

□

2.2 Espaces localement compacts

Définition 2.2.1. *Soit (E,τ) un espace topologique. On dit que E est* ***localement compact****, si (E,τ) est séparé et tout point de E possède un voisinage compact.*

Exemple 2.2.2.

1. *$\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est un espace localement compact.*
2. *Tout espace topologique compact est localement compact.*

Proposition 2.2.3. *Soit (E,τ) un espace localement compact. Alors tout point $a \in E$ admet un système fondamental compact.*

Démonstration. Soit $a \in E$ et $V \in \mathcal{V}_a$.
Puisque E est localement compact, il existe un voisinage H compact de a.
Donc $V \cap H$ est un voisinage de a dans H.
Puisque H est compact.
Alors il existe un voisinage W fermé de a compact dans H tel que $W \subset V \cap H$.
Donc $W \subset V$, de plus W est un voisinage compact de a dans E.
On en déduit que a admet un système fondamental compact. □

Théorème 2.2.4 (Le compactifié d'Alexandroff).
Soit (E,τ) un espace localement compact, il existe un espace topologique $\widehat{E}$ qui est compact tel que E est un sous-espace topologique complémentaire d'un point w de $\widehat{E}$.

Remarque 2.2.5.

1. *Le résultat est valable quand E est compact, mais il n'offre alors pas d'intérêt.*
2. *On donne souvent à w le point à l'infini de E, $\widehat{E}$ s'appelle* ***le compactifié d'Alexandroff*** *de E.*
3. *Le compactifié d'Alexanfroff permet de définir la* ***convergence vers l'infini****.*
4. *On dit qu'une suite (x_n) de point d'un espace* ***localement compact*** *E tend vers l'infini si cette suite tend vers le point w de $\widehat{E}$.*
5. *Si E est compact, une suite de E ne tend jamais vers l'infini.*

2.3 Continuité et compacité

Théorème 2.3.1. *Soit (E,τ) et (F',τ') deux espaces topologiques séparés et $f : E \to F$ une application continue. Si A est une partie compacte de E, alors $f(A)$ est compacte dans F.*

Démonstration. Soit A une partie compacte de E. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F telle que $f(A) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
Donc $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} U_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i)$.
Puisque f est continue, alors $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est une famille d'ouverts dans E.
Or A est compact. Donc il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} f^{-1}(U_i)$.
Donc $f(A) \subset f(\bigcup\limits_{i\in I_0} f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$.
D'où $f(A)$ est compacte. □

Remarque 2.3.2.

1. *Il serait faux de croire que l'image réciproque d'un compact pour une application continue est compact. Par exemple : Soit E un espace topologique non compact. Soit F un espace topologique séparé. On considère l'application*
$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto b \end{aligned}$$
avec $b \in F$. Alors $\{b\}$ est compact dans F, par contre $f^{-1}(\{b\}) = E$ n'est pas compact.
2. *Si $f : E \to F$ est une application continue, se sont les images réciproques des ouverts ou des fermés qui sont des ouverts ou des fermés et les images directes des compactes qui sont des compactes.*

Corollaire 2.3.3. *Soient (E,τ) un espace topologique compact et (F,τ') un espace topologique séparé. Si $f : E \to F$ une application bijective continue, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application bijective et continue. Pour montrer que f est un homéomorphisme, il suffit de montrer que f^{-1} est continue.
On sait que f^{-1} est continue $\Longleftrightarrow$ pour tout U fermé dans E, $f(U)$ est un fermé dans F.
Soit U un fermé dans E.
Alors U est une partie compacte de E.
Puisque f est continue, alors $f(U)$ est compact dans F.
Alors $f(U)$ est fermé dans E.
D'où f^{-1} est continue. □

Corollaire 2.3.4. *Soit (E,τ) un espace topologique compact et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si $(\hat{E},\hat{\tau}$ est séparé, il est compact.*

Théorème 2.3.5 (Tychnoff)**.** *Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ n espaces topologiques séparés. Alors, $E = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, E_i est compact.*

Théorème 2.3.6. *Toute application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ admet un **maximun** et un **minimum**.*

Démonstration. Soit (E,τ) un espace topologique compact. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue.
Donc $f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}$.
Donc $f(E) = [a,b]$ avec a et b deux réels.
Alors $f(E)$ admet un maximum et un minimum. □

2.4 Espaces Connexes

Définition 2.4.1. *On dit qu'un espace topologique* (E, τ) *est connexe, si* E *n'admet pas de partition formée de deux parties ouvertes.*

Théorème 2.4.2. *Soit* (E, τ) *un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) E *est connexe.*

b) E *n'admet pas de partition formée de deux parties fermées.*

c) *Les seules parties à la fois fermées et ouvertes de* E *sont et* E.

d) *Toute application* f *continue de* E *dans* $\{0, 1\}$ *discrete est constante.*

Démonstration. $(a \Longrightarrow b)$
Si $E = F \cup F'$ avec F et F' sont deux fermés de E et $F \cap F' = \varnothing$.
Alors $E = F^c \cup F'^c$ avec F^c et F'^c sont deux ouverts de E et $F^c \cap F'^c = \varnothing$, ce qui est contradictoire avec E est connexe.
$(b \Longrightarrow c)$
Supposons que F est une autre partie que E et à la fois ouverte et fermée.
Alors $E = F \cup F^c$ avec F et F^c sont deux fermés de E et $F \cap F^c = \varnothing$, ce qui est absurde.
$(c \Longrightarrow d)$
Sil existe une application continue et non constante $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ discrèt.
Donc $f^{-1}(\{0\})$ est une partie autre que E à la fois ouverte et fermée, ce qui est contradictoire.
$(d \Longrightarrow a)$
Supposons que E est non connexe.
Alors $E = F \cup F'$ avec F et F' sont deux ouverts de E et $F \cap F' = \varnothing$.

On considère l'application
$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \text{ discrèt} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin F \\ 1, & \text{si } x \in F. \end{cases} \end{array}$$
Donc f est une application continue et non constante.
D'où la contradiction. □

Exemple 2.4.3. $\mathbb{R}$ *est connexe.*

Définition 2.4.4. *Soit* (E, τ) *un espace topologique connexe. Une partie* F *de* E *est dite connexe, si en tant q'espace muni de la topologie induite,* F *est connexe.*

Théorème 2.4.5. *L'image directe d'un espace topologique connexe par une application continue est un espace connexe.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue.
Supposons que E est connexe et montrons que $f(E)$ est connexe.
Si $f(E)$ n'est pas connexe.
Alors $f(E)$ admet une partition formée de deux parties ouvertes A et B de F i.e $f(E) = A \cup B$ avec $A \cap B = \varnothing$.
Donc $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont deux ouverts de E.
On a $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.
Or $E \subset f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Donc $E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
On en déduit que E admet une partition de deux ouverts, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que E est connexe. □

Corollaire 2.4.6. *Tout espace topologique quotient d'un espace connexe, est un espace connexe.*

2.5 Espaces connexes par arcs

Définition 2.5.1. *Soit (E, τ) un espace topologique. On appelle arc ou chemin joignant un point a à un point b de E, toute application continue f d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans E, telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. On dit que a et b sont l'origine et l'extrémité du chemin.*

Théorème 2.5.2. *Soit (E, τ) un espace topologique, tel que deux quelconques de ses points puissent être joints par un chemin, alors E est connexe.*

Démonstration. Supposons que E n'est pas connexe.
Alors $E = U \cup V$ avec U et V deux ouverts disjoints.
Soient $a \in U$ et $b \in V$.
Soit f un chemin d'origine a et d'extrémité b. Posons $K = Im(f) = \{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\}$.
D'après l'exercice (21), $[\alpha, \beta]$ est connexe de $\mathbb{R}$.
Puise que l'application f est continue.
Alors K est une partie connexe de E.
Donc $K = (K \cap U) \cup (K \cap V)$ et $(K \cap U)$ et $(K \cap V)$ sont deux ouverts disjoints de K, ce qui est contradictoire avec le fait que K est connexe. □

Définition 2.5.3. *On dit qu'un espace topologique (E, τ) est connexe par arc, si deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin.*

Exemples 2.5.4.

1. *$\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.*
2. *Tout segment de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.*
3. *Tout pavé de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.*
4. *L'espace grossier est connexe par arc. Il suffit de considérer le chemin*

$$\begin{cases} h(t) = x, & si\ 0 \leq t < 1 \\ h(1) = y, & \end{cases}$$

Remarque 2.5.5. *Un espace connexe par arc est connexe.*

Théorème 2.5.6. *L'image directe d'un espace topologique connexe par arc par une application continue est connexe par arc.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue.
Supposons que E est connexe par arc et montrons que $f(E)$ l'est aussi.
Soient $x', y' \in f(E)$.
Donc il existe $x, y \in E$ tels que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.
Puisque E est connexe par arc, il existe un chemin g définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tels que $g(a) = x$ et $g(b) = y$.
Posons $h = fog$.
Alors h est une application continue sur $[a, b]$, de plus $h(a) = x'$ et $h(b) = y'$. Ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 3

Espaces Vectoriels Normés et Espaces de Banachs

3.1 Définitions et exemples des espaces vectoriels normés

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.1. *Une normé sur E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ on ait :*

i) $p(x) = 0 \iff x = 0.$ *(condition de séparation)*

ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$ *(condition d'homogénéité)*

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(inégalité triangulaire)*

On note $p(x) = \|x\|$ ou encore $p(x) = \|x\|_E$. $\|x\|$ s'appelle la norme de x.
Le couple $\big(E, \|.\|\big)$ est appelé espace vectoriel normé.

Remarque 3.1.2. *Si la condition i) est remplacé par $p(0) = 0$, on dit que p est une semi-normé.*

Exemples 3.1.3.

1. $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}$.
2. $E = \mathbb{C}$, $\|x\| = |x|$ *(le module) est une norme sur* $\mathbb{C}$.
3. $l_1 = \big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\big\}$.

   $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} |x_i|$ *est une norme sur* l_1.
4. $l_2 = \big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty\big\}$.

   $\|x\|_2 = \big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ *est une norme sur* l_2.
5. $l_\infty = \big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < +\infty\big\}$.

   $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ *est une norme sur* l_∞.
6. $C_0 = \big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / x_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0\big\}$.

   $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ *est une norme sur* C_0.
7. $E = \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ *l'ensemble des fonctions continues de* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$.
   - $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *est une norme sur* E.

- $\|f\|_\alpha = \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha \geq 1)$ *est une norme sur* E.
  "L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Minkowski".

8. $E = \mathbb{K}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = max(|x|,|y|)$ *et* $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ *sont des normes sur* $\mathbb{K}^2$.

Définition 3.1.4. *Soit* $\big(E, \|.\|\big)$ *un espace vectoriel normé. On dit qu'un vecteur* x *de* E *est unitaire si* $\|x\| = 1$.

Remarque 3.1.5. *Si* $x \neq 0$, *alors le vecteur* $\dfrac{x}{\|x\|}$ *est unitaire.*

Exercice 3.1.6. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des vecteurs unitaires.*

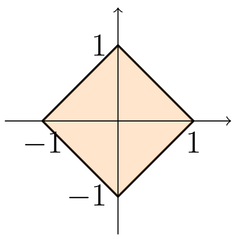
Proposition 3.1.7. *Soit* $\big(E, \|.\|\big)$ *un espace vectoriel normé. Alors :*

1. $\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
2. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in E, \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|x_k\|$.

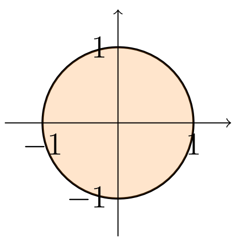
Définition 3.1.8 (Boule ouverte-Boule fermée)**.**
Soit $\big(E, \|.\|\big)$ *un espace vectoriel normé. Soit* $a \in E$.

1. *On appelle boule ouverte de centre* a *et de rayon* $r > 0$, *et l'on note* $B(a,r)$ *l'ensemble :*
$$B(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| < r\}.$$
2. *On appelle boule fermée de centre* a *et de rayon* $r > 0$, *et l'on note* $B_F(a,r)$ *l'ensemble :*
$$B_F(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| \leq r\}.$$
3. *On appelle sphère de centre* a *et de rayon* $r > 0$, *et l'on note* $S(a,r)$ *l'ensemble :*
$$S(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| = r\}.$$

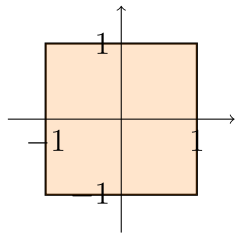
Exemples 3.1.9. *On muni* $\mathbb{R}^2$ *les normes suivantes :*
$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|(x,)\|_\infty = \max(|x|,|y|).$$



Boule unité pour la norme $\| \cdot \|_1$



Boule unité pour la norme $\|.\|_2$



Boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$

Remarque 3.1.10. *les exemples précédentes montre que les boules dépendent de la norme considérée sur E : une partie de E peut être une boule pour une norme et non pour une autre.*

Définition 3.1.11. *Soit A une partie d'un e.v.n $\big(E, \|.\|\big)$. On dit que A est bornée s'il existe une boule fermée centrée à l'origine qui la contient.*

Exemple 3.1.12. *Dans $\big(\mathbb{R}, |.|\big)$, tout segment $[a, b]$ est bornée puisque $[a, b] \subset B_F\big(0, max(|a|, |b|)\big)$.*

Proposition 3.1.13. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|.\|\big)$.*

1. *A est bornée $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall a \in A,\ \|a\| \leq M$.*
2. *A est bornée $\Leftrightarrow$ A est inclus dans une boule.*

Théorème 3.1.14. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. La condition suivante :*

$$A \subset E \text{ est un ouvert } \iff A = \varnothing \text{ ou } \forall a \in \mathbf{A}, \exists r > 0,\ B(a, r) \subset A. \quad (*)$$

définie une topologie sur E appelé topologie induite par la norme $\|.\|$.

Démonstration. • $\varnothing$ et E vérifie $(*)$.

• A et B deux parties de E vérifiant $(*)$.
Soit $x \in A \cap B$.
Alors, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et $B(x, r_2) \subset B$.
Donc $B(x, r) \subset A \cap B$ où $0 < r < \min\{r_1, r_2\}$.
D'où $A \cap B$ vérifie $(*)$.

• Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E vérifiant $(*)$.
Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
Donc, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.
D'où, il existe $r_{i_0} > 0$ tel que $B(x, r_{i_0}) \subset A_{i_0}$.
Donc $B(x, r_{i_0}) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ vérifie $(*)$.

□

Corollaire 3.1.15. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules ouvertes sont des ouverts.*
2. *$\{B(x, r)/x \in E,\ r > 0\}$ constitue une base de la topologie induite par la norme $\|.\|$.*
3. *Pour $a \in E, \{B(a, r)/\ r > 0\}$ constitue une base de voisinage de a pour la topologie induite par la norme $\|.\|$.*

Proposition 3.1.16. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E, alors A est est ouvert si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

Proposition 3.1.17. *Soit a un élément d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|.\|\big)$. Alors la famille $\{B(a, \frac{1}{n})/\ n \in \mathbb{N}^*\}$ constitue une base de voisinage de a.*
"On dit que la topologie induite par la norme vérifie le premier degré de la dénombrabilitée".

Proposition 3.1.18. *La topologie induite par la norme est une topologie séparée.*

Démonstration. Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Soit $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.
Posons $r = \dfrac{\|x-y\|}{2}$.
Alors $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$. □

Proposition 3.1.19. *Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|.\|\big)$. Alors (a_n) converge vers $a \in E$ si, et seulement si la suite réelle $(\|a_n - a\|)_n$ converge vers 0.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a_n) \text{ converge vers } a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow a_n \in B(a, \epsilon).\\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \|a_n - a\| < \epsilon.\\ &\Leftrightarrow \|a_n - a\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.20. *Dans un espace vectoriel normé, si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Propriétés 3.1.21. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|.\|\big)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\lim a_n = a$ et $\lim b_n = b$, alors $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$.*
2. *Si (α_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $\lim \alpha_n = \alpha$ et $\lim a_n = a$, alors $\lim \alpha_n a_n = \alpha a$.*
3. *Si $\lim a_n = a$, alors $\lim \|a_n\| = \|a\|$.*

Proposition 3.1.22. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Alors*

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.*

Proposition 3.1.23. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.*

1. $a \in \mathring{A} \Leftrightarrow\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset A.$
2. $a \in \bar{A} \Leftrightarrow\ \forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset.$

Théorème 3.1.24 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)**.** *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Alors, un point a de E est adhérent à A si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.*

Démonstration. Soit $x \in \bar{A}$.
$\Rightarrow$) Alors $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$.
Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A, de plus $\|x_n - x\| < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$.
D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
$\Leftarrow$) Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers x.
Donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon$.
Donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon) \cap A$.
Alors $\forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.
D'où $x \in \bar{A}$. □

Remarque 3.1.25. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

1. *L'adhérence d'une partie $A \neq \emptyset$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.*
2. *Une partie A est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.*
3. *Toute boule fermée est un fermé.*

Proposition 3.1.26. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $K \subset E$. Alors K est compacte si, et seulement si, de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K.*

Proposition 3.1.27. *Un compact dans un espace vectoriel normé est une partie bornée fermée.*

Proposition 3.1.28. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $x_0 \in E$ et $l \in F$ et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \left(\|x_0 - x\| < r \Rightarrow \|f(x_0) - f(x)\|' < \epsilon\right).$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)(x) = l$ *si, et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset E$ qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.*

Proposition 3.1.29. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normé. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *f est continue en x_0* $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \left(\|x_0 - x\| < r \Rightarrow \|f(x_0) - f(x)\|' < \epsilon\right).$
2. *f est continue en x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset E$ converge vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Définition 3.1.30. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite uniformément continue si,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \left(\|x - y\| < r \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|' < \epsilon\right).$$

Remarque 3.1.31. *Toute application uniformément continue est continue.*

Corollaire 3.1.32. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Alors, l'application $x \longmapsto \|x\|$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on choisit $r \in]0, \epsilon[$.
Alors, $\|x - y\| < r \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < r < \epsilon$. □

Proposition 3.1.33. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$. Les applications $x \longmapsto u + x$ et $x \longmapsto \lambda x$ sont des homéomorphismes de E.*

Remarque 3.1.34. *La première application est intéressante, car pour connaître les voisinages d'un point, il suffit par translation de connaître les voisinages de l'origine.*

Définition 3.1.35. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normé. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite k-lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k si :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\|' \leq k\|x - y\|.$$

Si $k \in]0, 1[$ on dit que f est une application contractive.

Proposition 3.1.36. *Toute application lipschitzienne est uniformément continue.*

3.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Définition 3.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{C}$. On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ tells que, pour tout $x, y \in E$, on ait :*

i) f *est bilinéaire.*

ii) $f(x, y) = \overline{f(x, y)}$.

iii) $f(x, x) \geq 0$.

iv) $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Notation : $f(x, y)$ se note $\langle x, y\rangle$ est s'appelle produit scalaire de x et y.

Proposition 3.2.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, si $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur E, on ait :*

1. $\forall x \in E$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.
2. ***Inégalité de Cauchy - Schwartz***

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle,$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont linéairement dépendants.

Proposition 3.2.3.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, si $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \longrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$ est une norme sur E.
L'inégalité de Cauchy-Schwartz dans ce cas s'écrit :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|,\ \textit{pour tout } x, y \in E.$$

Définition 3.2.4. *Soit E un espace vectoriel. Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont dites équivalentes, s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que, pour tout vecteur $x \in E$*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Exemple 3.2.5. *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les normes ci-dessous sont équivalentes :*

$$\|(x_1, x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \|(x_1, x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \sup_{i=1,\cdots,n} |x_i|.$$

Théorème 3.2.6. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\|.\|$ une norme sur E.
On considère $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E.

Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Donc $\|x\| = \|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|\|e_k\|$.
Posons $b = \displaystyle\max_{1\leq k\leq n} \|e_k\|$.

Donc $\|x\| \leq b\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

L'application $p : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ est une norme sur E.
Donc $\|x\| \leq bp(x)$.

Montrons que l'application $\begin{array}{rcl} \|.\| : (E, p) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ est continue.
En effet :
Si $(x_n) \subset E$ qui converge vers x pour la norme p, alors

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \leq bp(x_n - x).$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} p(x_n - x) = 0$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |\|x_n\| - \|x\|| = 0$.
D'où $\|.\|$ est continue pour la norme p.

On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) & \longrightarrow & (E, p) \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \end{array}$.

Alors f est continue.

Posons $M = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| = 1\}$.
Puisque M est une partie bornée fermée de $\mathbb{R}^n$.
Alors M est compacte dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$.
Donc $K = f(M) = \{x \in E / \ p(x) = 1\}$ est compact dans (E, p).
Puisque l'application $\|.\| : (E, p) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
Alors $\|,\|$ admet un minimum sur K.
Donc, il existe $x_0 \in K$ tel que $\inf\limits_{x \in K} \|x\| = \|x_0\| = a$.
Alors $a \leq \|x\|$ pour tout $x \in K$.
Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$.
Alors $\dfrac{x}{p(x)} \in K$.
Donc $\|x\| = p(x)\|\dfrac{x}{p(x)\|} \geq p(x).a$.
Si $x = 0$, $\|x\| = 0 \geq 0 = a.p(x)$.
Donc, pour tout $x \in E$, $a.p(x) \leq \|x\| \leq bp(x)$.
On en déduit que $\|.\|$ et p sont équivalentes. □

Corollaire 3.2.7. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ une base de E. Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, on muni E de la norme

$$\|x\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \text{ où } x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

L'application $\begin{array}{rcl} h : (E, \|.\|) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty) \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k & \longmapsto & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{array}$ est bijective bicontinue sur E. □

Proposition 3.2.8. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $A \subset E$ est compact de E si, et seulement si A est fermé borné.*

Remarque 3.2.9. *Le résultat devenir faux en dimension infinie.*

Proposition 3.2.10. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.*

Théorème 3.2.11 (Théorème de Riesz)**.**
Tout espace vectoriel normé localement compacte est de dimension finie.

Corollaire 3.2.12. *Un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement s'il est localement compact.*

Corollaire 3.2.13. *Un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si la boule unité fermée $B_F(0,1)$ est compacte.*

3.3 Applications linéaires continues

Définition 3.3.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si :*

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Remarque 3.3.2.

1. *f est lineaire si, et seulement si, $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*
2. *Si $F = \mathbb{K}$, f est dite une forme linéaire.*

Théorème 3.3.3 (Critère de continuité)**.**
Soient $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue à l'origine.

b) $\exists M > 0,\ \forall x \in B(0,1),\ \|f(x)\|' \leq M$.

c) $\exists M > 0,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|' \leq M\|x\|$.

d) f est uniformément continue sur E.

Démonstration.
$a \Rightarrow b$) Supposons que f est continue à l'origine.
Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que $\|x\| < r \Rightarrow \|f(x)\|' < 1$.
Soit $x \in B(0,1)$ tel que $x \neq 0$ et posons $y = r.x$.
Donc $\|y\| = r\|x\| < r$.
Donc $\|f(y)\|' = \|rf(x)\|' < 1$.
D'où $\|rf(x)\|' < \dfrac{1}{r}$.
Posons $M = \dfrac{1}{r}$.
Donc $\forall x \in B(0,1), \quad \|f(x)\|' \leq M$.
$b \Rightarrow c$) Supposons que $\exists M > 0,\ \forall x \in B(0,1),\ \|f(x)\|' \leq M$.
Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$.
Donc $\dfrac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$.
Donc $\|f(\frac{x}{\|x\|})\|' \leq M$.
D'où $\|f(x)\|' \leq M\|x\|$.
$c \Rightarrow d$) Si (c) est vérifiée, alors f est M-lipschitzienne.
Donc f est continue.
$d \Rightarrow a$) Evident. □

Proposition 3.3.4. *Soient $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Si la dimension de E est finie, alors f est lipschitzienne.*

Démonstration. Soit n la dimension de E. Soit $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ de E.
Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, on muni E de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \text{ où } x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Posons $M = \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|'$.

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ et $x' = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k e_k$ deux éléments de E.

Alors

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x')\|' &= \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k e_k\|' \\ &= \|\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha'_k) e_k\|' \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \alpha'_k| \|e_k\|' \\ &\leq M\|x - x'\|.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3.5. *Soient $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Si la dimension de E est finie, alors f est uniformément continue.*

Remarque 3.3.6. *Si E est de dimension infinie, donc il peut exister des applications linéaires non continues.*

Contre-Exemple 3.3.7. *$E = F = \{f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}/ \ \ f$ est de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]\}$. Alors E est un esoace vectoriel réel.*
On muni E de la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$.

On considère l'application $\begin{array}{rcl}\varphi : E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f'\end{array}$.
Alors φ est une application linéaire.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ définies sur $[0, 2\pi]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$.
Alors $\|f_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Donc la suite $(f_n)_{n>0}$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|.\|)$.
Or $\varphi(f_n) = f'_n : x \longmapsto \sqrt{n} \cos(nx)$.
Alors $\|\varphi(f_n)\| = \|f'_n\| = \sqrt{n}$ ne tend pas vers 0.
Donc $\varphi(f_n)_{n>0}$ ne converge pas vers la fonction nulle. Ce qui implique que φ n'est pas continue.

Remarques 3.3.8. *Soient $\big(E, \|.\|\big)$ et $\big(F, \|.\|'\big)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés*

1. *Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si elle est continue en un point $x_0 \in E$.*
2. *Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, ou bien est continue en tout point de E, ou bien est discontinue en tout point de E.*

3.4 Espaces de Banach

Définition 3.4.1. *Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Une suite $(x_n) \subset E$ est dite de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \epsilon.$$

2. *E est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Remarque 3.4.2. (x_n) *est de Cauchy* $\Leftrightarrow \lim_{p,q\to+\infty} \|x_p - x_q\| = 0$.

Exemple 3.4.3. $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des espaces vectoriels normés complets.*

Proposition 3.4.4. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Définition 3.4.5. *On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet.*

Exemples 3.4.6.

1. $(\mathbb{K}, |.|)$ *est un espace de Banach.*
2. $C([a,b],\mathbb{K})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *muni de la norme* $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *est un espace de Banach.*
3. *L'espace* $C([a,b],\mathbb{K})$ *définie ci-dessus muni de la norme* $\|f\|_\alpha = (\int_a^b |f(x)|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ $(\alpha \geq 1)$ *n'est pas un espace de Banach.*

Remarque 3.4.7. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Définition 3.4.8. *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(F, \|.\|')$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés. On dit que E et F sont isométriques, s'il existe une application* $\varphi : E \longrightarrow F$ *linéaire bijective telle que*

$$\forall x \in E,\ \|\varphi(x)\|' = \|x\|.$$

Théorème 3.4.9. *Tout espace vectoriel normé isométrique à un espace de Banach est un espace de Banach.*

3.5 Sous-espace et produit fini d'espaces vectoriels normés

3.5.1 Sous-espace vectoriel normé

Définition 3.5.1. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Soit A un sous-espace vectoriel de E, alors la restriction de* $\|.\|$ *à A notée* $\|.\|_A$ *est une norme sur A. Le couple* $(A, \|.\|_A)$ *est appelé sous-espace vectoriel normé de* $(E, \|.\|)$.

Corollaire 3.5.2. $(A, \|.\|_A)$ *est sous-espace topologique de* $(E, \|.\|)$.

3.5.2 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Soit $(E_i, \|.\|_i)_{1\leq i\leq n}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Posons $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ et soit $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in E$.

- L'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $p(x) = \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_i$ est une norme sur E.
- L'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $p(x) = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est une norme sur E.

Proposition 3.5.3. (E, p) *est le produit topologique de* $(E_i, \|.\|_i)_{1\leq i\leq n}$.

Corollaire 3.5.4. *Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.*