Chap 1 : Espace de Banach

I- Espace vectoriel normés :

1- Définition :

Une norme sur le $\mathbb{K}$.e.v E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $N(x) = 0$ ssi $x = 0_E$ "Séparation"

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ "Homogénéité"

iii) $\forall (x, y) \in E \times E$: $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ "Inégalité triangulaire"

Exemples :

* Sur $E = \mathbb{R}^n$, on a les normes usuelles suivantes :

$\|\cdot\|_1 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|\cdot\|_2 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\|\cdot\|_p : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\|\cdot\|_\infty : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

* Si (E, N_E) et (F, N_F) sont deux espaces vectoriels normés, Sur l'espace $E \times F$, on peut définir les normes suivantes :

$N_1 : (x, y) \longmapsto N_E(x) + N_F(y)$

$N_2 : (x, y) \longmapsto \sqrt{N_E^2(x) + N_F^2(y)}$

$N_\infty : (x, y) \longmapsto \max(N_E(x), N_F(y))$

Contre exemples :

Soit $E = \{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continue} \}$.

* L'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ n'est pas une norme sur E, car elle

$f \longmapsto |f(0)|$

ne satisfait pas i)

* L'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ n'est pas une norme.

$f \longmapsto \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|^2$

II- Topologie des espaces vectoriels normés :

1- Introduction :

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide ; munir $\mathcal{E}$ d'une topologie, c'est se donner une famille $\mathcal{T}$ de parties de $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :

Scanné avec CamScanner

i) Les parties $\mathcal{E}$ et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{F}$, "$\emptyset, \mathcal{E} \in \mathcal{F}$"

ii) La réunion d'une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$, "$\forall (U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F}, \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{F}$"

iii) Toute intersection finie d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$, "$\forall n \geq 1, \forall (U_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{F}$"

- Les parties U de $\mathcal{F}$ est appelés ouvert de $\mathcal{E}$,
- Une partie est dite fermé si son complémentaire est ouvert.

2- Définitions :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n,

- On appelle boule ouverte de rayon $r>0$ et de centre $x \in E$, l'ensemble. $B(x,r) = \{y \in E ; \|y-x\| < r\}$
- On appelle boule fermée de rayon $r>0$ et de centre $x \in E$, l'ensemble $\overline{B}(x,r) = B^f(x,r) = \{y \in E ; \|y-x\| \leq r\}$
- On appelle ouvert de E, toute partie U de E, qui est :

i) Soit vide,

ii) Soit non vide tq $\forall x \in U, \exists r>0, B(x,r) \subset U$

3- Proposition :

Toute boule ouverte est un ouvert

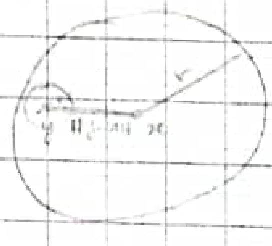
Preuve :

Soit $B = B(x,r)$ avec $r>0$,

Soit $y \in B$,

on pose $r' = r - \|x-y\| > 0$

$$\begin{aligned} z \in B(y,r') &\Rightarrow \|z-y\| < r' \\ &\Rightarrow \|z-y\| < r - \|x-y\| \\ &\Rightarrow \|z-y\| + \|x-y\| < r \\ &\Rightarrow \|z-x\| < r \\ &\Rightarrow z \in B \end{aligned}$$



donc : B est un ouvert.

III - Convergence, continuité :

Dans toute cette section, les espaces $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés.

1_ Définition :

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E,

On dit que (x_n) tend vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}, \; n\geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n-\ell\|_E<\varepsilon$$

2_ Définition :

Soit $\varphi : E \to F$, et soit $x_0\in E$,

on dit que φ est continue en x_0 ssi : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall x\in E)$:

$$\|x-x_0\|_E<\eta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|_F<\varepsilon$$

3_ Proposition :

Soit φ une application de E dans F, continue en tout point de E, et soit V un ouvert de F.

Alors : $\varphi^{-1}(V)=\{x\in E,\ \varphi(x)\in V\}$ est un ouvert de E

IV_ Espaces normés complets :

1_ Définition :

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n et soit $(x_n)_n$ une suite de E,

On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, \; p,q\geq N \Rightarrow \|x_p-x_q\|\leq\varepsilon$$

2_ Définition :

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n,

On dit que $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach, ou bien un e.v.n complet, ssi toute suite de Cauchy est convergente

(1) Exercice :

Montrer que $\mathbb{R}^m$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach.

Solution : Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^m$

donc : $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, \; p,q\geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_p-x_q\|_1=\sum_{i=1}^{m}|x_p^i-x_q^i|\leq\varepsilon$

donc : $(x_n^i)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

et puisque : $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est complet,

alors : $x_n^i \longrightarrow \ell^i$

donc : $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon^i\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, \quad p\geq N_\varepsilon^i \Rightarrow |x_p^i-\ell^i|\leq\frac{\varepsilon}{m}$

Scanné avec CamScanner

on pose: $n_\varepsilon = \max_{1\leq i\leq m} N_\varepsilon^i$

alors: $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, \quad p\geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_p^i - \ell^i| < \varepsilon$

donc: (x_n) converge vers ℓ dans $\mathbb{R}^m$,

d'où: $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ est complet.

(2) Exercices:

Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et on définie $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \longmapsto \|P\|_\infty = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$$

et on considère la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Montrer que (P_n) est une suite de Cauchy qui ne converge pas.

Solution: Supposons que $n > m$

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!} \right\|_\infty$$
$$= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{X^k}{k!} \right\|_\infty$$
$$= \max_{m+1\leq k\leq n} \left| \frac{1}{k!} \right|$$
$$= \frac{1}{(m+1)!} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

d'où: $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall m,n\geq N, \|P_n - P_m\| < \varepsilon$

donc: (P_n) est une suite de Cauchy.

Supposons par l'absurde que $(P_n)_n$ converge vers P,

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \quad \text{et } n > d$$

on a. $\quad P_n - P = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!} - \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

$$\|P_n - P\|_\infty = \max_{0\leq i\leq n} \left| \frac{1}{i!} - a_i \right| \geq \max_{0\leq i\leq d} \left| \frac{1}{i!} - a_i \right|$$

$\Rightarrow \forall 0\leq i\leq d, \quad a_i = \frac{1}{i!}$

$\|P_n - P\|_\infty = \frac{1}{(d+1)!} \not\to 0$ "Absurde"

3_ Proposition:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit $(x_n)_n$ une suite de E,

On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente,

Alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge, et $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$

V - Applications linéaires continues :

1 - Proposition :

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriel normés,
Soit u une application linéaire de E dans F,
Les propriétés suivantes sont équivalente :

i) u est continue sur E
ii) u est continue en 0_E
iii) u est bornée sur $\overline{B}(0_E, 1)$
iv) u est bornée sur $S = \{x \in E ; \|x\|_E = 1\}$
v) $\exists K > 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq K\|x\|_E$
vi) u est lipschitzienne
vii) u est uniformément continue.

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii) puisque u est continue sur E,
donc u est continue en tout point de E,
en particulier, u est continue en 0_E.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que u est continue en 0_E

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x\|_E < \eta \Rightarrow \|u(x)\|_F < \varepsilon$$

Soit $x \in \overline{B}(0_E, 1)$: $\|x\|_E \leq 1$

on pose : $y = \frac{x\eta}{2}$

$$\Rightarrow \|y\|_E = \frac{\|x\|_E \eta}{2} \leq \frac{\eta}{2} < \eta$$

posons $\varepsilon = 1$, on a : $\|u(y)\|_F < 1$

$$\Rightarrow \|u(x)\|_F < \frac{2}{\eta} = K$$

donc u est bornée sur $\overline{B}(0_E, 1)$

iii) $\Rightarrow$ iv) puisque u est bornée sur la boule fermée,
alors u est bornée sur le sphère.

iv) $\Rightarrow$ v) Soit $x \in E$,

- Si $x \in S \Rightarrow \exists K > 0 \; \|u(x)\|_F \leq K\|x\|_E$
- Si $x \notin S$ et $x \neq 0_E$, on pose : $y = \frac{x}{\|x\|_E}$

$$\Rightarrow \|y\|_E = 1 \Rightarrow \exists K' > 0, \|u(y)\|_F \leq K'$$

$$\Rightarrow \|u(x)\|_F \leq K'\|x\|_E$$

$\Rightarrow \exists C>0, \forall x\in E, \ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$

v) $\Rightarrow$ vi) Evident!

vi) $\Rightarrow$ vii) Evident!

vii) $\Rightarrow$ i) Evident!

2_ Définition :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés,
On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires continues de E dans F.
C'est un $\mathbb{K}$.e.v et on le munit de la norme $u \longmapsto \|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E\leq 1}\|u(x)\|$

Remarque :

$$\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1}\|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_F = \sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Si $E=F$, on note la norme $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ par $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E)}$

(3) Exercice :

On considère l'espace $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme
$\|\cdot\| : f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$
et l'application $u : f \longmapsto f(0)$
Calculer $\|u\|$

Solution : $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})} = \sup\limits_{f\neq 0}\dfrac{\|u(f)\|_{\mathbb{R}}}{\|f\|_E} = \sup\limits_{f\neq 0}\dfrac{|f(0)|}{\|f\|_\infty}$ (0 : fct nulle)

$$\Rightarrow \|u\| = \sup\left\{\frac{|f(0)|}{\|f\|_\infty}, f\neq 0 \text{ et } f\in E\right\}$$

on a : $|f(0)| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)| = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \dfrac{|f(0)|}{\|f\|_\infty} \leq 1$

$\Rightarrow \|u\| \leq 1$

Soit $f_0(t) = 1, \ \forall t\in[0,1]$, on a : $\|f_0\|_\infty = 1$

$\Rightarrow \dfrac{|f_0(0)|}{\|f_0\|_\infty} = 1 \Rightarrow \|u\| \geq 1$

donc : $\|u\| = 1$

Remarque :

* Pour tout $x\in E$, on a : $\|u(x)\|_F \leq \|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \cdot \|x\|_E$
en particulier, si E, F et G sont trois espaces vectorielles normés, et $u\in\mathcal{L}_c(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}_c(F,G)$, alors :

Scanné avec CamScanner

$$\|v \circ u\|_{\mathcal{L}_c(E,G)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}_c(F,G)} \times \|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$$

5_ Proposition :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés,
Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est un espace de Banach.

Preuve :

1ère étape

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N, \quad \|u_n-u_m\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad '' \quad '' \quad , \|u_n-u_m\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \times \|x\|_E < \varepsilon\|x\|_E$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad '' \quad '' \quad , \|u_n(x)-u_m(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E$$

pour $x\neq 0$, on pose $\varepsilon' = \varepsilon\|x\|_E$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon'>0, \exists N'\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N', \quad \|u_n(x)-u_m(x)\|_F < \varepsilon'$$

donc : $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F

puisque F est complet,

alors : $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$ dans F

2ème étape

Mq u est linéaire :

$$\forall x,y\in E, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \quad u_n(\alpha x+\beta y) = \alpha u_n(x)+\beta u_n(y)$$

par passage à la limite : $\forall x,y\in E, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \quad u(\alpha x+\beta y) = \alpha u(x)+\beta u(y)$

donc : u est linéaire

3ème étape

Mq u est continue :

$$\forall x\in E, \quad \|u_n(x)\|_F \leq \|u_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \times \|x\|_E$$

puisque (u_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

alors : (u_n) est borné : $\exists M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + 1$

$$\Rightarrow \forall x\in E, \quad \|u_n(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on a :

$$\forall x\in E, \quad \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

donc : u est continue.

4ème étape

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N ; \quad \|u_n-u_m\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad '' \quad '' \quad ; \|u_n(x)-u_m(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|_E$$

pour $m\to+\infty$, on a :

$$'' \quad '' \quad '' \quad ; \|u_n(x)-u(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|_E$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n-u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup \frac{\|u_n(x)-u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}$

$< \varepsilon$

$\Rightarrow u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

Scanné avec CamScanner

Chap 2 : Différentielle d'une application :

I - Définition :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés,
Soit U un ouvert de E,
On dit qu'une application $f : U \longrightarrow F$ est différentiable en x de U s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que l'on ait $\lim\limits_{\substack{\|h\|_E \to 0 \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$
Ce que l'on notera plus simplement :

$$(*) \quad f(x+h) = f(x) + L(h) + o(\|h\|_E) \quad \text{où } \|h\|_E \longrightarrow 0$$

2 - Remarque :

La condition de la différentiabilité introduite dans $(*)$ est inchangé lorsqu'on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes.

En effet : Supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tel que :

$$\alpha\|x\|_{E,1} \leqslant \|x\|_{E,2} \leqslant \beta\|x\|_{E,1} \quad \text{et} \quad \gamma\|y\|_{F,1} \leqslant \|y\|_{F,2} \leqslant \delta\|y\|_{F,1}$$

Supposons que : $\lim\limits_{\substack{\|h\|_E \to 0 \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|_{F,1}}{\|h\|_{E,1}} = 0$

on a :

$$0 \leqslant \frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|_{F,2}}{\|h\|_{E,2}} \leqslant \frac{\delta\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|_{F,1}}{\alpha\|h\|_{E,1}}$$

par passage à la limite quand $\|h\| \longrightarrow 0$, donc :

$$\lim\limits_{\substack{\|h\|_E \to 0 \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(x+h)-f(x)-L(h)\|_{F,2}}{\|h\|_{E,2}}$$

3 - Proposition :

Soient E et F deux-espaces-vectoriels normés et U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable en un point $x \in U$. Alors il existe une unique application $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ satisfaisant $(*)$. Cette application linéaire est appelée différentiable de f au point x, on la note $d_x f$

Preuve.

Supposons qu'il existe L_1 et L_2 tels que :

$$f(x+h) = f(x) + L_1(h) + o(\|h\|)$$
$$f(x+h) = f(x) + L_2(h) + o(\|h\|)$$

$\Rightarrow \quad L_1(h) - L_2(h) = o(\|h\|)$

donc : $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in U, \ \|h\| \leqslant \delta \Rightarrow \|L_1(h) - L_2(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$

Soit $h \in E \setminus \{0\}$ tq $\|h\| \leqslant 1 \Rightarrow \delta\|h\| \leqslant \delta$

$$\|L_1(\delta h)-L_2(\delta h)\|\leqslant \varepsilon\|\delta h\|$$

$\forall \varepsilon>0$ et $\|h\|\leqslant 1$, on a. $\|L_1(h)-L_2(h)\|\leqslant \varepsilon\|h\|$

$\Rightarrow \sup\limits_{\|h\|\leqslant 1}\|L_1(h)-L_2(h)\|\leqslant \varepsilon$

$$\|L_1-L_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}\leqslant \varepsilon \ , \ \forall \varepsilon>0$$

donc. $\|L_1-L_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}=0 \Rightarrow L_1=L_2$

4- Proposition:

Soient E, F deux espaces vectoriels normé, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $f:\mathcal{U}\to F$ une application différentiable en un point x de $\mathcal{U}$.

Alors elle est continue

Preuve:

Supposons que f est différentiable,

donc $f(x+h)=f(x)+d_xf(h)+o(\|h\|)$

$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=d_xf(h)+o(\|h\|)$

$\|f(x+h)-f(x)\|\leqslant\|d_xf\|\cdot\|h\|+C\|h\|$

$\Rightarrow \lim\limits_{\|h\|\to 0}\|f(x+h)-f(x)\|=0$

donc, f est continue.

Exemple:

1) Soient E, F deux espaces vectoriel normé. On considère $f:x\to L(x)$ où L est une application linéaires, alors f est différentiable en tout point $x\in E$, et on a. $d_xf(h)=L(h)$

2) Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}$, on considère l'application bilinéaire.

$f:(x,y)\longrightarrow f(x,y)=xy$.

On muni E de la norme $\|\cdot\|_2$

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y) &= (x+h)(y+k)-xy \\ &= \cancel{xy}+xk+yh+hk-\cancel{xy} \\ &= xk+yh+hk \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\|h,k\|_2\to 0\\ (h,k)\neq(0,0)}}\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-(xk+yh)|}{\|h,k\|_2}=\lim_{\substack{\|h,k\|_2\to 0\\ (h,k)\neq(0,0)}}\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leqslant \lim_{\substack{\|h,k\|\to 0\\ (h,k)\neq(0,0)}}\sqrt{h^2+k^2}=0$$

donc f est différentiable au point (x,y) quelconque de $\mathbb{R}^2$ et

$d_{(x,y)}f(k,h) = xk + yh$

<u>En général</u>: Si $B: E\times F \to G$ une application bilinéaire, alors elle est différentiable en tout point $(x,y)\in E\times F$, et on a:

$d_{(x,y)}B(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$

3) Si $f: \mathcal{U} \to F$, où $\mathcal{U}$ un ouvert de E, une application constante, elle est différentiable et $df(h) = 0$

II – Dérivés directionnelles:

1 – Définition:

Soient E et F 2 e.v.n, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et v un vecteur non nul de E. On dit qu'une application $f: \mathcal{U} \to F$ admet au point x de $\mathcal{U}$ une dérivée de la direction de v ssi $\varphi_x : t \to \varphi_x(t) = f(x+tv)$ est dérivable en $t=0$. On note alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = Df(x,v) = \varphi'_x(0)$$

2 – Proposition:

Si f est différentiable au sens de Fréchet en x, alors pour tout $v \neq 0$, on a: $Df(x,v) = d_x f(v)$

Preuve: Exercice

III – Différentielles partielles:

On considère 2 e. de Banach (E_1, N_1) et (E_2, N_2), et on considère l'espace vectoriel produit $E_1 \times E_2$, muni de

$\|\cdot\| : (x,y) \longrightarrow \|(x,y)\| = N_1(x) + N_2(y)$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $E_1\times E_2$, F un espace de Banach et $f: \mathcal{U} \to F$ une application $(x_1,x_2) \to f(x_1,x_2)$. Pour chaque $a=(a_1,a_2)$ de $\mathcal{U}$, on considère: $\mathcal{U}_1 = \{x_1 \in E_1 : (x_1,a_2) \in \mathcal{U}\}$

$\mathcal{U}_2 = \{x_2 \in E_2 : (a_1,x_2) \in \mathcal{U}\}$

et les applications $f_{a_2} : x_1 \longrightarrow f(x_1,a_2)$ et $f_{a_1} : x_2 \longrightarrow f(a_1,x_2)$

1 – Définition:

Avec les notations précédentes et lorsqu'elles existent, les différentielles $d_{a_1} f_{a_2}$ et $d_{a_2} f_{a_1}$ sont appelées différentielles partielles de f au point $a=(a_1,a_2)$

2 – Proposition:

Si f est une application différentiable en $a=(a_1,a_2)$, alors f_{a_1} et f_{a_2} sont différentiables en a_2 et a_1, et on a:

$$d f_{(a_1,a_2)} f(h_1,h_2) = d_{a_2} f_{a_2}(h_1) + d_{a_2} f_{a_1}(h_2)$$

Preuve:

f est différentiable au point $a=(a_1,a_2)$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + d_{(a_1,a_2)} f(h_1,h_2) + o(\|h_1,h_2\|)$$

Pour $h=0$ $\Rightarrow f_{a_2}(a_1+h_1) = f_{a_2}(a_1) + d_{(a_1,a_2)} f(h_1,0) + o(\|h_1\|)$

$\Rightarrow f_{a_2}$ est différentiable, et que: $d_{a_1} f_{a_2}(h_1) = d_{(a_1,a_2)} f(h_1,0)$

de même: $d_{a_2} f_{a_1}(h_2) = d_{(a_1,a_2)} f(0,h_2)$

IV- Opérations sur les applications différentiables:

1- Composée d'application différentiables:

Théorème:

Soient E, F et G des espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F et $g: V \to G$ tel que $b=f(a)$.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en b, alors $h=g\circ f$ est différentiabl en a et l'on a:

$$d_a h = d_b g \circ d_a f = d_{f(a)} g \circ d_a f$$

Preuve:

f est différentiable en point a donc:

$$f(a+u) - f(a) - d_a f(u) = \varphi(u) \quad \text{où } o(\|u\|) = \|\varphi(u)\|$$

g est différentiable au point $b=f(a)$, donc:

$$g(b+v) - g(b) - d_b g(v) = \psi(v) \quad \text{où } o(\|v\|) = \|\psi(v)\|$$

$\Rightarrow g(f(a+u)) - g(f(a)) - d_b g(f(a+u)-f(a)) = \psi(f(a+u)-f(a))$

$\Rightarrow g(f(a+u)) - g(f(a)) - d_b g(d_a f(u) + \varphi(u)) = \psi(f(a+u)-f(a))$

$\Rightarrow g(f(a+u)) - g(f(a)) - d_b g(d_a f(u)) = d_b g(\varphi(u)) + \psi(f(a+u)-f(a))$

$$\|d_b g(\varphi(u))\| \le \|d_b g\| \cdot \|\varphi(u)\| \xrightarrow[\|u\|\to 0]{} 0$$

$$\underbrace{\frac{\|\psi(f(a+u)-f(a))\|}{\|f(a+u)-f(a)\|}}_{\downarrow \|u\|\to 0 \\ 0} \times \underbrace{\frac{\|f(a+u)-f(a)\|}{\|u\|}}_{\le \frac{\|d f_a\|\|u\|}{\|u\|} + \frac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|}}$$

2- Dérivée d'un somme de deux applications:

a- Proposition:

Scanné avec CamScanner

Soient E et F 2 K. e.v.n sur $\mathbb{K}$ et $a \in E$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de E, $f, g : \mathcal{U} \to F$ deux applications différentiables en a, alors. $f+g$ et λf sont aussi différentiables en a et on a :

$$d_x(f+g) = d_x f + d_x g$$
$$d_x(\lambda f) = \lambda d_x f$$

Preuve : Exercice

3_ Dérivée d'un produit de deux applications.

a_ Proposition :

Soit $f, g : \mathcal{U} \subset E \to \mathbb{K}$ deux applications différentiables sur $\mathcal{U}$.
On définie l'application $f \cdot g$ de la manière suivante :

$$f \cdot g : \mathcal{U} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) g(x)$$

alors fg est différentiable en x, et on a : $d_x(f \cdot g) h = f(x) d_x g(h) + g(x) d_x f(h)$

Preuve :

On décompose $f \cdot g$ en :

$$\gamma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad ; \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f(x), g(x)) \qquad (f(x), g(x)) \longmapsto f(x) g(x)$$

alors, on a :

- γ est différentiable, et $d_x \gamma(x) = (d_x f(x), d_x g(x))$
- φ est bilinéaire et continue, donc différentiable, et on a,

$$d_{(a,b)} \varphi(h_1, h_2) = \varphi(a, h_2) + \varphi(h_1, b)$$

- $f \times g = \varphi \circ \gamma$

$$d_x(f \cdot g) = d_{\gamma(x)} \varphi \circ d_x \gamma$$
$$d_x \gamma = (d_x f, d_x g)$$
$$d_x(f \cdot g) = d_{(f(x), g(x))} \varphi \circ (d_x f, d_x g)$$
$$= \varphi(f(x), d_x g) + \varphi(d_x f, g(x))$$
$$= f(x) \cdot d_x g + g(x) d_x f$$

Théorème des fonctions implicites :

Soit $\mathcal{U}$ (resp V) un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (resp $\mathbb{R}^n$) et la fonction

$$f : \mathcal{U}\times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x=(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_{p+n}) \longmapsto f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))$$

$$J(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}} \end{array}\right)$$

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_p)} \qquad \frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_{p+1},\dots,x_{p+n})}$$

Soit $(a,b)\in\mathcal{U}\times V$ tel que $f(a,b)=0$

Si $\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_{p+1},\dots,x_{p+n})}(a,b)$ est inversible, alors il existe : $\mathcal{U}_a$ voisinage de a dans $\mathcal{U}$, et V_b voisinage de b dans V.

$\varphi : \mathcal{U}_a \longrightarrow V_b$ est de classe C^1 unique telle que :

$$f(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_{p+n})=0 \Leftrightarrow (x_{p+1},\dots,x_{p+n})=\varphi(x_1,\dots,x_p)$$

de plus, il existe $\mathcal{U}'_a$ un voisinage de a dans $\mathcal{U}_a$, et V'_b un voisinage de b dans V_b tel que :

$$J(f)(x_1,\dots,x_p) = \left[\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_{p+1},\dots,x_{p+n})}(x_1,\dots,x_p,\varphi(x_1,\dots,x_p))\right]^{-1}$$

$$\times\left[\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_p)}(x_1,\dots,x_p,\varphi(x_1,\dots,x_p))\right]$$

Exercice 1 :

Montrer que la relation $x^4+x^3y^2-y+y^2+y^3=1$ définit y comme une fonction de x au voisinage de $(-1,1)$ et calculer $\frac{dy}{dx}(-1,1)$

Solution : on pose $f(x,y)=x^4+x^3y^2-y+y^2+y^3-1$

- f est de classe $C^\infty \Rightarrow C^1$
- $f(-1,1)=1-1-1+1+1-1=0$
- $\partial f=\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(4x^3+3x^2y^2 \quad 2x^3y-1+2y+3y^2\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -2-1+2+3 = 2 \neq 0$$

Alors : $\exists \mathcal{U}_{-1}$ un voisinage de -1 dans $\mathbb{R}$

et : $\exists V_1$ un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$

et : $\varphi : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$ telle que : $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1)} \times \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 2 :

Démontrer que la relation $x+y+z+\sin(xyz)=0$ définit z comme fonction de x et y au voisinage du point $(0,0,0)$ et calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solution : on pose : $f(x,y,z) = x+y+z+\sin(xyz)$

- f est de classe C^1
- $f(0,0,0)=0$
- $\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(1+yz\cos(xyz) \quad 1+xz\cos(xyz) \quad \frac{1+xy}{\cos(xyz)}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$$

Alors : $\exists \mathcal{U}_{(0,0)}$ un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$

et : $\exists V_0$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$

et : $\varphi : \mathcal{U}_{(0,0)} \longrightarrow V_0$ telle que : $f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow z=\varphi(x,y)$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(0,0) = \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -1 \times 1 = -1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -1$$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et : $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$$

on suppose que : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial y}(u,y) \neq 0$, $\forall (u,y) \in \mathcal{U}$

Soient $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_0, y_0) \in \mathcal{U}$ telle que :

$$x_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u_0, y_0) \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, y_0)$$

Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,y) \\ y = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,y) \end{cases}$$

Montrer que : * Il existe $\mathcal{U}_1$ un voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$
* Il existe $\mathcal{U}_2$ un voisinage de (u_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$
* Il existe $\psi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ de classe C^1 telle que
$(x, y, u, v) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ est solution de (S')
ssi $(u, v) = \psi(x, y)$

déterminer $\partial\psi(x_0, y_0)$

Solution : on pose : $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, u, v) \longmapsto \Big(\underbrace{x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u, y)}_{F_1}, \underbrace{v - \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, y)}_{F_2}\Big)$$

• F est de classe C^1

•• $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = \left(x_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u_0, y_0), v_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, y_0)\right)$

••• $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y} \neq 0$

donc, d'après le T.F.I : $\exists \mathcal{U}_1$ voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$
$\exists \mathcal{U}_2$ voisinage de (u_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$
$\exists \psi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ de classe C^1 telle que
$(u, v) = \psi(x, y)$

Calculons $J(\psi)(x_0, y_0)$:

$$J(\psi)(x_0, y_0) = \left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}\right)^{-1} \times \left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right)$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(u, y) \\ 0 & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}(u, y) \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}} \begin{pmatrix} \frac{-\partial^2\varphi}{\partial u\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J(\psi)(x_0, y_0) = \frac{1}{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}(u_0, y_0) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u_0, y_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(u_0, y_0) \\ 0 & \frac{-\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}(u_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$