Séries Numériques

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels. On définit les sommes partielles par: $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$ et on s'intéresse à la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Définitions et convergence

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels. On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum_{n\geq n_0} u_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$.*

Exemples 1.2.

1. *La série $\sum \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *La série $\sum \frac{1}{n!}$ de terme général $\frac{1}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
3. *La série $\sum n$ de terme général n pour $n \in \mathbb{N}$.*
4. *La série géométrique $\sum a^n$ de terme général a^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.3. *Une série de terme général u_n est dite convergente, si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente. Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée la somme de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, et on note: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.*
Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque 1.4.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge vers } l \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = l \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \geq n_0 : (n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n_0}^{n} u_k - l| < 0).\end{aligned}$$

Exemple 1.5.

1. *<u>Série géométrique</u>: Soit $a \in \mathbb{R}^*$*
   $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & si\ a \neq 1 \\ n+1, & si\ a = 1. \end{cases}$
   Alors la série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
2. *<u>Série exponentielle</u>: La série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.*
3. *<u>Série harmonique</u>: On va montrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Pour cela, montrons qu'elle n'est pas de Cauchy.*
   Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   On a $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$ pour $k = 1, 2, \cdots, n$.
   Donc $S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.
   Donc la suite (S_n) n'est pas de Cauchy. D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
   Puisque la suite (S_n) est strictement croissante, on déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Remarque 1.6 (Cas complexe)**.**
Si le terme général u_n est complexe $u_n = a_n + ib_n$; la somme partielle
$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} (a_n + ib_n) = \sum_{k=n_0}^{n} a_n + i \sum_{k=n_0}^{n} b_n$.
Alors on a le résultat suivant: $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} a_n$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ convergent en même temps.

Théorème 1.7. *Si la série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* 0.

Démonstration: Remarquer que $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Remarques 1.8.
- La contraposée du théorème est souvent utilisée: une série dont le terme général ne tend pas vers 0*, ne peut pas converger.*
- Le fait que le terme général tend vers 0 *n'est qu'une condition nécessaire de convergence. De nombreuse séries divergente ont un terme général qui tend vers* 0*. Par exemple, la série harmonique* $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ *est divergente, avec un terme général* $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.9. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes, de sommes respectives* S *et* S'*. Soient* a *et* b *deux réels. Alors la série* $\sum(au_n + bv_n)$ *est convergente, et sa somme égale à* $aS + bS'$.

Exemple 1.10. *Les séries* $\sum \frac{1}{2^n}$ *et* $\sum \frac{1}{5^n}$ *sont convergentes.*
Donc la série $\sum \frac{-3}{2^n} + \frac{2}{5^n}$ *est convergente, et* $\sum \frac{-3}{2^n} + \frac{2}{5^n} = -3\sum \frac{1}{2^n} + 2\sum \frac{1}{5^n} = -\frac{7}{2}$.

2 Séries à termes positifs et comparaison

Définition 2.1. *Une série* $\sum u_n$ *est dite à terme positif, si le terme général* u_n *est positif à partir d'un certain rang.*

Remarques 2.2.
- Si $\sum u_n$ *est une série à terme positif, alors la suite* (S_n) *est croissante.*
- Une suite croissante n'a que deux comportements. Soit elle est majorée et elle converge; soit elle tend vers $+\infty$.

Proposition 2.3. *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positif. Alors*

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (S_n) \text{ est bornée.}$$

Théorème 2.4 (Règle de comparaison)**.**
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $u_n \leq v_n$*. Alors*

1. $\sum v_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $\sum u_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Exemples 2.5.

1. *On s'intéresse au développement décimal d'un réel* $x \in]0, 1[$.

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots\dots \quad \text{où } a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

   Puisque $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.
   Donc, l'écriture 1 correspond en fait à la série de terme général $u_n = \frac{a_n}{10^n}$*. La somme partielle* S_n *est l'approximation décimale de* x *par défaut à* 10^{-n} *près.*
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{9}{10^n}$.
   Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$ *converge (c'est une série géométrique de raison* $q = \frac{1}{10} \in]-1, 1[$*).*
   Alors $\sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n}$ *est une série convergente.*
   D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ *converge.*

2. *On considère la série* $\sum \sin(\frac{1}{2^n})$.
   On a $0 \leq \sin(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et la série* $\sum \frac{1}{2^n}$ *converge.*
   Donc $\sum \sin(\frac{1}{2^n})$ *est une série convergente.*

Théorème 2.6 (Règle de comparaison logarithmique)**.**
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *à partir duquel* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$*. Alors*

1. $\sum v_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $\sum u_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Théorème 2.7 (Critère d'équivalence)**.**
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ *avec* $l \neq 0$ *et* $l \neq +\infty$*. Alors les deux séries sont de même nature.*

Démonstration: $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow |\frac{u_n}{v_n} - l| < \epsilon)$.
On choisit $\epsilon = \frac{l}{2}$, alors $\forall n \geq N$, $\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3l}{2}$.
Donc $\forall n \geq N$, $\frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3l}{2} v_n$ converge, ce qui implique que $\sum u_n$ converge.
Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum \frac{l}{2} v_n$ diverge, ce qui implique que $\sum u_n$ diverge.
On en déduit que les deux séries ont la même nature.

Exemples 2.8.

1. *On considère les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *de termes généraux respectifs* $u_n = \ln(1+\frac{1}{2^n})$ *et* $v_n = \frac{1}{2^n}$.
   C'est clair que u_n *et* v_n *sont strictement positifs.*
   $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\ln(1+\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2^n}} = 1$.
   Donc $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de la même nature.*
   Puisque la série $\sum v_n$ *converge, la série* $\sum u_n$ *l'est aussi.*

2. *Soient les séries* $\sum_{n>0} \frac{n+\ln n}{n^2}$ *et* $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$.
   On a $\lim \frac{\frac{n+\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2+n\ln n}{n^2} = 1$ *et la série* $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ *diverge, alors la série* $\sum_{n>0} \frac{n+\ln n}{n^2}$ *diverge.*

Exercice 2.9. *Que se passe-t-il si* $l = 0$ *ou* $l = +\infty$*?*

Théorème 2.10 (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction continue décroissante. On pose* $u_n = f(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $\sum u_n$ *et* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *sont de même nature.*

Démonstration: Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$.

$$
\begin{aligned}
x \in [k, k+1] &\Longrightarrow k \leq x \leq k+1 \\
&\Longrightarrow u_{k+1} \leq f(x) \leq u_k \\
&\Longrightarrow \int_k^{k+1} u_{k+1}dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} u_k dx \\
&\Longrightarrow u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq u_k \\
&\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq \sum_0^n u_k \\
&\Longrightarrow S_{n+1} - u_0 \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq S_n
\end{aligned}
$$

Si $\sum u_n$ est convergente, alors (S_n) est majorée.
Donc $\int_0^{n+1} f(x)dx$ est majorée, et puisqu'elle est croissante, on déduit que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
Réciproquement, si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\int_0^{n+1} f(x)dx$ est majorée, et S_n l'est aussi, par suite $\sum u_n$ converge.

Remarque 2.11. *Le résultat du théorème2.10 est encore valable si la fonction* f *est positive, continue et décroissante sur un intervalle* $[a, +\infty[$ *en considérant la série* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *avec* $n_0 \geq a$.

Exemple 2.12. *On considère la fonction* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
f *est continue, décroissante et positive sur* $[1, +\infty[$.
On a $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt = [\ln t - \ln(1+t)]_1^x = \ln(\frac{x}{x+1}) + \ln 2$.
Donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \ln 2$.
On déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pour $x \in [1, +\infty[$.
Soit $t \in [1, +\infty[$, $\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$
Donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$
D'où le résultat suivant.

Théorème 2.13 (Série de Riemann)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha > 1$, *alors la série* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge.*
Si $\alpha \leq 1$, *alors la série* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge.*

Proposition 2.14 (Règle de Riemann)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positifs.*

1. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)$ *soit majorée par une constante* $M > 0$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

2. *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)$ *soit minorée par une constante* $m > 0$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Théorème 2.15 (Règle de D'Alembert)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme strictement positifs.*

1. *S'il existe une constante réelle* $r < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

2. *S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

En pratique on utilise le résultat suivant.

Corollaire 2.16. *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme strictement positifs, telle que* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. *Si* $l < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Si $l = 1$ *on ne peut pas conclure.*

Exemples 2.17.

1. *On considère la série* $\sum \frac{1}{n!}$.
   On a $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.
   Donc la série $\sum \frac{1}{n!}$ *converge.*
2. *Soit la série* $\sum \frac{n^n}{n!}$.
   $\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim (\frac{n+1}{n})^n = \lim e^{n \ln(\frac{n+1}{n})} = \lim e^{\frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e > 1$.
   Donc la série $\sum \frac{n^n}{n!}$ *diverge.*

Théorème 2.18 (Critère de Cauchy)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

1. *S'il existe une constante réelle* $r < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} < r < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

En pratique on utilise le résultat suivant.

Corollaire 2.19. *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme strictement positifs, telle que* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. *Si* $l < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Si $l = 1$ *on ne peut pas conclure.*

Exemples 2.20.

1. *On considère la série* $\sum (\frac{2n+1}{3n+4})^n$.
   On a $\lim \sqrt[n]{(\frac{2n+1}{3n+4})^n} = \lim \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$.
   Donc la série $\sum (\frac{2n+1}{3n+4})^n$ *converge.*
2. *Soit la série* $\sum (\frac{2n+4}{2n+1})^n$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{(\frac{2n+4}{2n+1})^n} = \frac{2n+4}{2n+1}$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+4}{2n+1} > 1$.
   Donc la série $\sum (\frac{2n+1}{3n+4})^n$ *diverge.*

3 Séries à termes quelconques

Lorsqu'une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'étudier la nature de la série des valeurs absolues, ou des modules s'il s'agit de nombres complexes.

Définition 3.1. *On dit qu'une série* $\sum u_n$ *est absolument convergente, si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Exemple 3.2. *On considère la série suivante:* $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^3}$.
$\sum_{n>0} |\frac{(-1)^n}{n^3}| = \sum_{n>0} \frac{1}{n^3}$ *c'est une série de Riemann avec* $\alpha > 1$. *Donc converge.*
D'où la série $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^3}$ *est absolument convergente.*

Théorème 3.3. *Une série absolument convergente est convergente.*

Démonstration: Soit $\sum u_n$ une série de nombres réels.
Posons $u_n^+ = \begin{cases} u_n, & \text{si } u_{n \geq 0} \\ 0, & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$ et $u_n^- = \begin{cases} 0, & \text{si } u_{n \geq 0} \\ -u_n, & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.
Si $\sum |u_n|$ converge, alors les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
Or $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$, d'où la série $\sum u_n$ converge.

Remarque 3.4. *Il existe des séries convergentes, mais qui ne sont pas absolument convergente.*

Exemple 3.5. *Soit* $\sum u_n$ *la série de terme général* $u_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & si\ n = 2k \\ -\frac{1}{k+1}, & si\ n = 2k+1 \end{cases}$.
$S_{2n} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ *et* $S_{2n+1} = 0$.
Donc $\sum u_n$ *converge.*
Par contre $\sum_{k=0}^{2n} |u_k| = 2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}) + \frac{1}{n+1} \longrightarrow +\infty$ *et* $\sum_{k=0}^{2n+1} |u_k| = 2\sum_{k=1}^{n+1}(\frac{1}{k}) \longrightarrow +\infty$.
Ce qui implique que la série $\sum |u_n|$ *diverge.*

Théorème 3.6 (Règle d'Abel)**.** *On considère la série* $\sum_{n\geq n_0} u_n v_n$ *telle que:*

1. $A_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$ *est bornée.*
2. (u_n) *tend vers* 0.
3. *La série* $\sum_{n\geq n_0} |u_{n+1} - u_n|$ *converge.*

Alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n v_n$ *converge.*

Démonstration: Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p > n_0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} u_k v_k &= \sum_{k=p}^{q} u_k(A_k - A_{k-1}) \\ &= \sum_{k=p}^{q} A_k(u_k - u_{k+1}) + A_q u_{q+1} - A_{p-1}u_p. \end{aligned}$$

On va montrer que $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k v_k$ est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} |S_q - S_p| &= |\sum_{k=n_0}^{q} u_k v_k - \sum_{k=n_0}^{p} u_k v_k| \\ &= |\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k| \\ &= |\sum_{k=p+1}^{q} A_k(u_k - u_{k+1}) + A_q u_{q+1} - A_p u_{p+1}| \\ &= \sum_{k=p+1}^{q} |A_k||u_k - u_{k+1}| + |A_q||u_{q+1}| + |A_p||u_{p+1}|. \end{aligned}$$

Puisque $(A_n)_{n\geq n_0}$ est bornée, alors $\exists M \in]0, +\infty[$, $\forall n \geq n_0$, $|A_n| \leq M$.
Donc

$$|S_q - S_p| \leq M(\sum_{k=p+1}^{q} |u_k - u_{k+1}| + |u_{q+1}| + |u_{p+1}|). \tag{2}$$

On a $\lim u_n = 0$, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |u_n| < \frac{\epsilon}{3M}. \tag{3}$$

Puisque la série $\sum_{n\geq n_0} |u_{n+1} - u_n|$ converge, alors la suite $\sum_{n=n_0}^{p} |u_{n+1} - u_n|$ est de Cauchy.
Donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : q > p > N_2 \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} |u_{k+1} - u_k| < \frac{\epsilon}{3M}. \tag{4}$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$.
De (2),(3) et (4) on déduit que $q > p > N_2 \Rightarrow |S_q - S_p| < M(\frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3M}) = \epsilon$.
Donc $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k v_k$ est une suite de Cauchy.

Corollaire 3.7. *Soient* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *deux séries telles que:*

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite décroissante de réels positifs, et tend vers* 0.
2. *Les sommes partielles de la suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *sont bornées.*

Alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n v_n$ *converge.*

4 Séries alternées

Définition 4.1. *On appelle série alternée, toute série de la forme* $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n v_n$ *avec* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *est une suite positive.*

Exemples 4.2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Théorème 4.3. *Soit* $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n v_n$ *une série alternée. Si* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *est une suite décroissante et tend vers* 0*, alors la série* $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n v_n$ *converge. De plus* $\forall n \geq n_0$, $| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k v_k | \leq |(-1)^n v_n|$.