Chapitre 0 : Rappels et notation

I - Préliminaire :

montrons que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

* mq $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

i) $$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+c, b+d)+(e,f)$$
$$= (a+c+e, b+d+f)$$
$$= (a,b)+(c+e, d+f)$$
$$= (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$

ii) $(a,b)+(0,0) = (0,0)+(a,b) = (a,b)$

iii) $(a,b)+(-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$

iv) $$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$= (c+a, d+b)$$
$$= (c,d)+(a,b)$$

* mq $\times$ est distributive par rapport à $+$ à gauche.

$$(a,b)\times[(c,d)+(e,f)] = (a,b)\times(c+e, d+f)$$
$$= (a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e))$$
$$= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)$$
$$= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be)$$
$$= (a,b)\times(c,d)+(a,b)\times(e,f)$$

* mq $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \times)$ est un groupe commutatif.

i) $$[(a,b)\times(c,d)]\times(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\times(e,f)$$
$$= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e)$$
$$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$
$$= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df))$$
$$= (a,b)\times(ce-df, cf+de)$$
$$= (a,b)\times[(c,d)\times(e,f)]$$

ii) $(a,b)\times(1,0) = (1,0)\times(a,b) = (a,b)$

iii) $$(a,b)\times(a',b') = (1,0) \Leftrightarrow (aa'-bb', ab'+a'b) = (1,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa'-bb' = 1 \\ ab'+a'b = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'\left(a+\frac{b^2}{a}\right) = 1 \\ b' = -\frac{a'b}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ b' = -\dfrac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

d'où : $(a,b)\times\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$

iv) $(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$= (ca-db, cb+da)$

$= (c,d)\times(a,b)$

* mq $\times$ est distributive par rapport à $+$ à droite.

puisque $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \times)$ est commutatif :

donc : $[(a,b)+(c,d)]\times(e,f) = (e,f)\times[(a,b)+(c,d)]$

$= (e,f)\times(a,b) + (e,f)\times(c,d)$

$= (a,b)\times(e,f) + (c,d)\times(e,f)$

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'équation : $(a,b)^2 = (-1,0)$

$(a,b)^2 = (-1,0) \Leftrightarrow (a,b)\times(a,b) = (-1,0)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2, 2ab) = (-1,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -1 \\ a=0 \text{ ou } b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-1 \\ a=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2-b^2=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2=-1 \\ a=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2=-1 \\ b=0 \end{cases} \text{ Impossible (dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2=1 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=-1 \\ a=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (a,b) = (0,1)$ ou $(a,b) = (0,-1)$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$z^4 = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $z^2+2zi-4i-1=0$

$z^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2} + i\frac{9\sqrt{2}}{2}$; $4z^2+3z+7=0$

$z^2 = 16i$

Solution:

- $4z^2+3z+7=0$

$\Delta = 9-4\times4\times7$

$=9-112$

$=-103<0$

donc: $z_1=-\frac{3+i\sqrt{103}}{8}$; $z_2=-\frac{3-i\sqrt{103}}{8}$

- $z^4=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$z^4=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=16\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$=16e^{i\frac{\pi}{6}}$

posons: $z=re^{i\theta}$

$$\begin{cases} r^4=16 \\ 4\theta=\frac{\pi}{6}+2K\pi \text{ avec } 0\leqslant K<4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=2 \quad (r \text{ toujours } >0) \\ 4\theta=\frac{\pi}{6}+2K\pi \text{ avec } 0\leqslant K<4 \end{cases}$$

donc: $z_0=2e^{\frac{\pi}{24}i}$; $z_1=2e^{\frac{13\pi}{24}i}$; $z_2=2e^{\frac{25\pi}{24}i}$; $z_3=2e^{\frac{37\pi}{24}i}$

- $z^2=\frac{9\sqrt{2}}{2}+i\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$z^2=\frac{9\sqrt{2}}{2}+i\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$=9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=9\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=9e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{cases} r^2=9 \\ 2\theta=\frac{\pi}{4}+2K\pi\ ;\ 0\leqslant K\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=3 \\ 2\theta=\frac{\pi}{4}+2K\pi\ ;\ 0\leqslant K\leqslant 1 \end{cases}$$

donc: $z_0=3e^{i\frac{\pi}{8}}$; $z_1=3e^{i\frac{9\pi}{8}}$

- $z^2=16i$

$z^2=16i$

$=16(0+i1)$

$=16\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$=16e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} r^2=16 \\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2K\pi\ ;\ 0\leqslant K\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=4 \\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2K\pi\ ;\ 0\leqslant K\leqslant 1 \end{cases}$$

donc: $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_1 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2ème méthode: on pose: $z = a + ib$

$$z^2 = 16i \iff (a+ib)^2 = 16i$$

$$\iff a^2 + 2iab - b^2 = 16i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 16 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b \\ ab = 8 \end{cases} \text{ ou } \cancel{\begin{cases} a = -b \\ ab = 8 \end{cases}} \text{ Impossible (car a et b m̂ signe)}$$

$$\iff a = b = \pm 2\sqrt{2}$$

donc: $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $z_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

• $z^2 + 2iz - 4i - 1 = 0$

$$\Delta = (2i)^2 - 4(-4i-1)$$
$$= -4 + 16i + 4$$
$$= 16i$$

on pose: $t^2 = 16i$

d'où: $t_0 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{4\sqrt{2}}{2}$

$t_1 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -4\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{4\sqrt{2}}{2}$

donc:

$$z_1 = \frac{-b + t_0}{2a} = \frac{-2i + \frac{4\sqrt{2}}{2} + i\frac{4\sqrt{2}}{2}}{2} = -i + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$z_2 = \frac{-b + t_1}{2a} = \frac{-2i - \frac{4\sqrt{2}}{2} - i\frac{4\sqrt{2}}{2}}{2} = -i - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} - (\sqrt{2}+1)i$$

2ème méthode: $z^2 + 2iz - 4i - 1 = 0$

$$z^2 + 2iz - 1 - 4i = 0$$

$$(z+i)^2 - 4i = 0$$

$$(z+i)^2 - t^2 = 0 \quad \text{avec } t = 4i$$

$$(z+i-t)(z+i+t) = 0$$

$$z + i - t = 0 \text{ ou } z + i + t = 0$$

$$z = t - i \text{ ou } z = -t - i$$

Chapitre préliminaire : Rappel et Notations

I_ L'ensemble des nombres complexes :

1_ Un nombre complexe :

Un nombre complexe peut être vu de différente manière, il provient de l'impossibilité de trouver une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = -1$

On peut définir $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ muni des opérations :

- Addition : $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$
- Multiplication : $(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Algébriquement, nous pouvons montrer que $\mathbb{C}$ muni de ces deux lois est un corps commutatif (tout polynôme non constant à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet au moins une solution).

De plus, on a : $(0,1)^2 = (0,1)\times(0,1)$
$= (-1,0)$

en posant $i = (0,1)$ et en définissant un homomorphisme surjectif :

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b) \longmapsto a$$

on identifie $\mathbb{R}$ par $p(\mathbb{R}^2)$:

$$p_1(1,0) = 1 \quad ; \quad p_2(0,1) = i$$

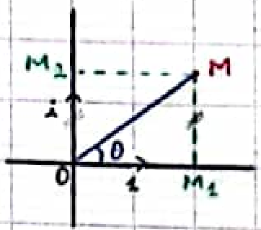
$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy$$

$$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$$

Géométriquement, lorsqu'on rapporte le plan complexe à un repère (O,I,J) avec $OI = 1$ et $OJ^2 = -1$,
Le nombre complexe $z = x+iy$ est représenté par un point unique M tel que $M_1(x,0)$ est la projection de M sur (O,OI) et $M_2(0,y)$ est la projection de M sur (O,OJ).

- (x,y) sont les affixes de M, notons : $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 ; C'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de diension 2, engendré par $\{(1,0),(0,1)\}$

• Donc, on peut rapporter l'espace complexe $\mathbb{C}$ à un plan vectoriel, et on a:



Lorsqu'on considère que le repère est orthonormé, on a:

$$OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2$$
$$= OM_1^2 + OM_2^2$$
$$= x^2 + y^2$$

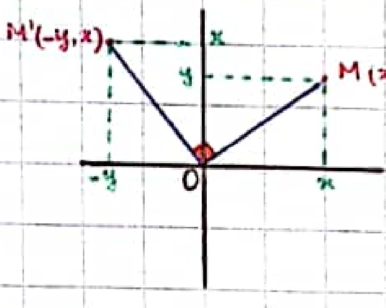
d'où. $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Par conséquent: $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$ avec. $\frac{x^2}{|z|^2} + \frac{y^2}{|z|^2} = 1$

posons: $\frac{x}{|z|} = \cos\theta$ et $\frac{y}{|z|} = \sin\theta$ avec: $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM}})$

• C'est ainsi, on trouve l'écriture trigonométrique (forme polaire) d'un nombre complexe: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec. $r \in \mathbb{R}^+$ et $0 \leq \theta < 2\pi$

• Lorsqu'on multiple le nombre complexe par i nous transformons son image M par une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$:



Analytiquement:

• Soient $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

On définit le conjugué de z par $\bar{z} = x - iy$, et on a.

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

• Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes,

On définit $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ la distance entre z_1 et z_2 (Voir TD 1)

a- Opérations:

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes,

Selon la construction algébrique, on définit:

- $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$; $(Re(z_1+z_2)=Re(z_1)+Re(z_2)$ et $Im(z_1+z_2)=\dots$
$\dots Im(z_1)+Im(z_2))$
- $z_1\times z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$; $(Re(z_1z_2)=Re(z_1)Re(z_2)-Im(z_1)Im(z_2)$
et $Im(z_1z_2)=Re(z_1)Im(z_2)+Re(z_2)Im(z_1))$
- $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$;
- $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$
- $z_1=z_2 \iff x_1=x_2$ et $y_1=y_2$

b- Convergence d'une suite :

On dit qu'une suite (z_n) converge vers z et on note.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z \text{ ou } z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} z \iff \lim_{n\to+\infty}|z_n-z|=0$$
$$\iff \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, |z_n-z|<\varepsilon$$

Proposition :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=z \iff \lim_{n\to+\infty} Re(z_n)=Re(z) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Im(z_n)=Im(z)$$ (Voir Recherch)

- Les règles du calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables. (Voir Recherche)

- Infini Complexe : Le plan achevé $\overline{\mathbb{C}}$ s'obtient du plan complexe $\mathbb{C}$ par adjonction d'un point ∞ à l'infini : $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

Définition :

$$z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty \iff |z_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

Proposition :

- $z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$ si et seulement si $\frac{1}{z_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$
- $z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$ et $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$ implique $z_n+w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$
- $z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$ et $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a\neq0$ implique $z_nw_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$
- Toute suite de points de $\overline{\mathbb{C}}$ contient donc une sous-suite convergeant vers un point de $\overline{\mathbb{C}}$.
- De plus muni de la distance $|\cdot|$, $(\mathbb{C},|\cdot|)$ est un espace métrique complet, c-à-d que le critère de Cauchy est validé : $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\iff \lim_{n,m\to+\infty}|z_n-z_m|=0$

Définition :

- Le disque ouvert de centre a et de rayon r est :

$$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C} / |z-a|<r\} \quad (a\in D(a,r))$$

- Le disque fermé de centre a et de rayon r est :

$$\bar{D}(a,r)=\{z\in\mathbb{C} / |z-a|\leq r\} \quad (a\in \bar{D}(a,r))$$

- Le disque pointé de centre a et de rayon r est :

$$D'(a,r)=\{z\in\mathbb{C} / 0<|z-a|<r\} \quad (a\notin D'(a,r))$$

II - Fonction continue :

1 - Limite de fonction :

On dit que $f(z)$ tend vers une limite ℓ lorsque z tend vers z_0, et on écrit : $\lim_{z\to z_0} f(z)=\ell \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-\ell|<\varepsilon$

Proposition :

- Quand la limite existe, elle est unique.

Soit f une fonction complexe,

Soit $z_0\in\mathbb{C}$,

Supposons que f admet ℓ et ℓ' comme limites en z_0 avec $\ell\neq\ell'$,

Soit $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{4}>0$,

$\exists \delta_1>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-\ell|<\varepsilon$

$\exists \delta_2>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |f(z)-\ell'|<\varepsilon$

On pose : $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

donc : pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|<\delta$:

$$\begin{aligned}|\ell-\ell'| &= |\ell-f(z)+f(z)-\ell'|\\ &\leq |f(z)-\ell|+|f(z)-\ell'|\\ &< \varepsilon+\varepsilon\\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

d'où $|\ell-\ell'|<\frac{|\ell-\ell'|}{2}$ "Absurde"

Alors $\ell=\ell'$

d'où l'unicité.

- Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un rapport de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe. (Voire Recherche)

2 - Fonction continue :

- Soit z_0 un point où la fonction f prend la valeur $f(z_0)$.

On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

c-à-d. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

- La fonction $f(z)$ est continue dans Ω si et seulement si elle est continue en tout point de Ω, où Ω est une partie de $\mathbb{C}$.

Remarque :

Le point à l'infini est définie par l'image de l'origine par la transformation $t = \frac{1}{z}$

- $\lim_{z \to \infty} f(z) = \ell$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$
- Notons que : Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$ alors : $\lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \bar{\ell}$ (Voir Recherche)

Proposition :

Soient $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $z_0 \in E$, et $f : E \to \mathbb{C}$,

Les énoncés suivants sont équivalents :

1/ $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon, z_0) \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < n \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

2/ Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E convergeant vers z_0, la suite $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$

3/ L'image réciproque de tout ouvert de $f(E)$ est un ouvert de E.

Remarque :

Si le nombre $n(\varepsilon, z_0)$ peut être choisi indépendamment de z_0, on dit que f est uniformément continue sur E

Chapitre 1 : Forme différentielle et Holomorphe

I – Dérivé et forme différentielle :

1 – Dérivé d'une fonction complexe :

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathcal{U}$,

Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si le nombre $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ (tel que $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, et $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) existe et fini.

Cette limite, notée $f'(z_0)$, est appelée la dérivée de f en z_0.

2 – Différentiabilité d'une fonction complexe :

La fonction f est différentiable en z s'il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que, $\forall h \in \mathbb{C}$, $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|)$

Remarque :

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient) sont les même que celles utilisées en analyse réelle.

II – Holomorphe :

1 – Définition :

Une fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.

Remarque :

On note $H(\Omega)$ (ou $\mathcal{O}(\Omega)$) l'ensemble de fonctions holomorphes.

Exercice :

Montrer que :
- $H(\Omega)$ est un espace vectoriel.
- $H(\Omega)$ est un anneau.
- $H(\Omega)$ est un sous-algèbre de $C^1(\Omega)$.

Proposition :

Toute fonction dérivable en $\mathbb{C}$ est continue ; la réciproque est fausse.

f est dérivable en $\mathbb{C}$,
d'où f est dérivable en tout point de $\mathbb{C}$,
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$,

donc : f est dérivable en z_0,

on a : $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)$

$$= \left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)\left(\lim_{z \to z_0} z - z_0\right)$$

$$= f'(z_0) \cdot 0$$

d'où : $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$

donc : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Alors : f est continue

Exemples :

Soit : $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (f est continue)

$z \longmapsto \bar{z}$

montrer que f n'est pas dérivable en z_0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0} + \bar{h} - \overline{z_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } Re(h) = 0 \Rightarrow \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\overline{Im(h)i}}{Im(h)i} = \frac{-Im(h)i}{Im(h)i} = -1 \\ -1 & \text{si } Im(h) = 0 \Rightarrow \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\overline{Re(h)}}{Re(h)} = \frac{Re(h)}{Re(h)} = 1 \end{cases}$$

donc : f n'est pas dérivable en z_0,

Remarque :

Malgré que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, la dérivabilité d'une fonction en $\mathbb{R}^2$ n'implique pas qu'elle est dérivable en $\mathbb{C}$.

III - Opérations sur les fonctions holomorphes :

1 - Proposition :

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$,

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U,

Alors :

1/ $f+g$ est holomorphe sur U ;

2/ fg est holomorphe sur U ;

3/ $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur $U \setminus A$ avec $A = \{z \in \mathbb{C} / g(z) = 0\}$;

4/ Si f est holomorphe au voisinage de z_0, et g au voisinage de $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est holomorphe au voisinage de z_0 ;

5/ Les règles usuelles de dérivation s'appliquant.

$$(f+g)' = f'+g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad (g\circ f)' = f' \cdot g'\circ f$$

2 - Ensemble connexes

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{C}$ est connexe si elle vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

1/ Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.

2/ Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.

3/ Les seules parties ouvertes et fermés de E sont $\emptyset$ et E

4/ Toute application continue de E dans $\{0,1\}$ est constante

3 - Théorème :

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ un holomorphe. Si $f' = 0$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

4 - Corollaire :

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$,
Une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ dont la dérivée est nulle et constante sur chaque composante connexe de $\mathcal{U}$.

IV - Linéarité de la différentielle :

Soit f une fonction sur $\mathbb{C}$ holomorphe, et considérons l'application :

$$d_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{au voisinage de } z_0$$
$$z \longmapsto f'(z_0)\,z$$

Cette application d_f est linéaire

Trois espaces d'applications linéaires interviennent :

- $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

Les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (où $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$, en effet : $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Donc, c'est identique à l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ noté $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

La différentielle $df(x_0,y_0)$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par : $f(x+h_1, y+h_2) = f(x,y) + df(x_0,y_0)(h_1,h_2) + o(\|h_1,h_2\|)$ appartient à cette espace.

- $L_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$:

Les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (dimension = 2). Notons d_x et d_y les applications qui à $z = x+iy$ associe $Re(z)$ et $Im(z)$ respectivement, c-à-d : $Re(z) = d_x(z) = d_x(x+iy) = x$ et $Im(z) = d_y(z) = y$

Comme : $\begin{cases} d_x(1) = 1 & ; \ d_x(i) = 0 \\ d_y(1) = 0 & ; \ d_y(i) = 1 \end{cases}$

Le couple (d_x, d_y) forme une $\mathbb{C}$-base de $L^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

La considération de $d_z = d_x + i d_y$ et $d_{\bar{z}} = d_x - i d_y$ permet de désigner le couple $(d_z, d_{\bar{z}})$ comme étant $\mathbb{C}$-base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

- $L^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (dimension = 1) :

Les applications de la forme $z \longmapsto \alpha z$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$,

Donc : d_z est une base de $L^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

La multiplication par $f'(z_0)$ définit une similitude du plan complexe de rapport $|f'(z_0)|$ et d'angle $\arg f'(z_0)$

1 _ Applications $\mathbb{C}$ - linéaires :

Les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$-linéaire sont de la forme $f(z) = \alpha z$ tel que : $\alpha z = (ax - by) + i(bx + ay)$

On peut définir $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ par :

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2 _ Lemme :

Une application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui lui est associée est $\mathbb{R}$ linéaire et dont la matrice dans une base de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

3 _ Proposition :

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$

f est holomorphe en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et sa différentielle $d_{z_0} f$ au z_0 est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

4 _ Théorème : "Cauchy Riemann"

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit $z_0 = x_0 + i y_0 \in U$ et f une fonction telle que $f = P + iQ$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1\ La fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est différentiable en z_0

2\ L'application $\tilde{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-différentiable, et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x_0, y_0) = - \dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

3\ L'application $\tilde{f}$ est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0), et sa matrice jacobienne est la représentation d'une similitude directe : $df_z(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$

Chapitre 2 : Intégration complexe

I_ Arcs paramétriques :

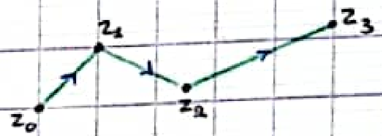
1_ Définitions :

- On appelle arc paramétré, une application γ continue, définie sur un intervalle $[t_0, t_1]$ compact et à valeur dans $\mathbb{C}$.
- L'origine de l'arc γ est un point $z_0 = \gamma(t_0)$ et son extrémité est le point $z_1 = \gamma(z_1)$
- Lorsque $z_0 = z_1$, on dit que γ est un lacet
- Le support de γ est l'ensemble des points $\gamma(t)$ avec $t \in [t_0, t_1]$, on le note $supp(\gamma)$

Exemples :

1\ lignes polygonales :

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)z_0 + tz_1 \\ (1-t)z_1 + tz_2 \\ (1-t)z_2 + tz_3 \end{cases}$$



2\ Cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ avec $R > 0$

on définit le lacet γ par : $\gamma = Re^{it}$ tel que $0 \leq t \leq 2\pi$

2_ Remarques :

- L'orientation d'un arc est primordial dans le traitement de l'intégration dans le corps $\mathbb{C}$. C'est pour cela on définit le sens direct à partir de l'origine et par l'arc $\gamma(t) = Re^{it}$
- Le sens inverse par l'arc $\gamma(t) = Re^{-it}$
- Le fait de prendre $0 \leq t \leq 2\pi$ signifie que l'arc est parcourt une seule fois, on dit que c'est un lacet simple ou une courbe de Jordan.

3_ Opérations sur les chemins :

a_ Cas 1 :

Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tel que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Le chemin juxtaposé $\gamma_2 + \gamma_1$ (concaténé) de cette ordre est le chemin défini sur $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ par :

$$(\gamma_2+\gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & : \text{ si } t\in[a_1,b_1] \\ \gamma_2(t_2+a_2-b_1) & \text{si } t\in[b_1, b_1+b_2-a_2] \end{cases}$$

Dans ce cas : $Im(\gamma_2+\gamma_1) = Im(\gamma_2) \cup Im(\gamma_1)$; Im signifie le chemin

b_ Cas 2 : Le chemin opposé :

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin,

On définit le chemin opposé δ par : $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\delta = -\gamma$ $\quad t \longmapsto \gamma(a+b-t)$

Exemple :

La courbe $C = \{e^{it} ; t\in[0,\frac{\pi}{2}]\} \cup \{(1-t)i + t(-1+i) ; t\in[0,1]\}$ est un composé d'un arc et un segment.

4_ Définition :

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe C^1 par morceaux,

On appelle longueur de γ le nombre $L(\gamma) = \int_t |\gamma'(t)| dt$

II_ Intégration le long d'un chemin (ou une courbe ou curviligne) :

1_ Définition :

Soit D un chemin non vide de $\mathbb{C}$, et soit C une courbe paramétrique par un chemin de classe C^1 $\gamma : [a,b] \to D$

$t \longmapsto \gamma(t)$

et soit f une fonction de D vers $\mathbb{C}$ continue sur tout point du chemin C. On appelle intégrale de f le long de la courbe C, et on la note $\int_C f(z)dz$, le nombre complexe : $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

2_ Propriétés des intégrales :

Les propriétés classiques d'intégration dans $\mathbb{R}$ reste valables pour l'intégration sur un chemin dans $\mathbb{C}$:

1\ $\int_\gamma (F_1(z)+F_2(z))dz = \int_\gamma F_1(z)dz + \int_\gamma F_2(z)dz$

2\ $\int_\gamma \lambda F(z)dz = \lambda \int_\gamma F(z)dz$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$

3\ $\int_{\gamma_1+\gamma_2} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz + \int_{\gamma_2} F(z)dz$

4\ $\int_{-\gamma} F(z)dz = -\int_\gamma F(z)dz$

Sous la condition d'existence et γ un chemin de $\mathbb{C}$.

3_ Lemme :

On a : $\left|\int_C F(z)dz\right| \leqslant L(\gamma) \sup_{z\in supp(\gamma)} |F(z)|$

III _ Fonctions analytiques :

1 _ Définition :

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathcal{U}$

- on dit que f est analytique en z_0 ssi $\exists r > 0$, $D(z_0, r) \subset \mathcal{U}$, et il existe une série entière $\sum_K a_K z^K$ de rayon de convergence $\geqslant r$ telle que :

$$f(z) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K (z - z_0)^K \ , \forall z \in D(z_0, r)$$

- on dit que f est analytique sur $\mathcal{U}$ si f est analytique en tout point de $\mathcal{U}$

? 2 _ Proposition :

- Si f est analytique sur $\mathcal{U}$, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$
- le développement en série de f coïncide avec son développement en Taylor, et on a : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

3 _ Définition :

Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ s'appelle une fonction entière.

4 _ Théorème :

Soient $\mathcal{U}$ et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{U} \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ deux fonction tel que f (resp g) est analytique sur $\mathcal{U}$ (resp V)

Alors : $g \circ f$ est analytique sur $\mathcal{U}$

IV _ Primitive sur un ouvert étoilé :

1 _ Ensemble étoilé :

Soit E une partie de $\mathbb{C}$ (plan complexe). On appelle le centre de E, tout point $z_0 \in E$ qui vérifie la condition suivante : $\forall z \in E$, $[z_0, z] \subset E$

S'il en est ainsi, on dit que E est étoilé par rapport à z_0

- Un ensemble est dit étoilé s'il a au moins un centre
- Un ensemble convexe est étoilé (car toutes ses points sont des centres)
- Un ensemble peut avoir plusieurs centres.

Exemple :

- $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé
- Le disque $D(0, r)$ est étoilé, et tout point de $D(0, r)$ est un centre

2 _ Primitive d'une fonction :

Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω. On appelle primitive de f dans Ω, toute fonction F définie et holomorphe dans Ω telle que : $F' = f$

Si F est une primitive de f, il en est de même pour $F + c$, $\forall c \in \mathbb{C}$

3_ Proposition :

Soit f une fonction complexe continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit F une primitive de f. Etant donné un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z) - F(z_0)$

4_ Remarque :

L'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru par z

5- Proposition :

Une fonction admet une primitive dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ Pour tout λ un lacet de $\mathbb{C}$ $\int_\lambda f(z)\,dz = 0$

6_ Changement de paramètre ou changement de circuit :

Soit un chemin $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ et soit φ une fonction de classe C^1 qui, surjectivement sur un intervalle $[u_0, u_1]$ avec $u_0 < u_1$, et de sorte que $\varphi(u_0) = t_0$ et $\varphi(u_1) = t_1$, on peut lui faire correspondre un autre chemin $\delta = \gamma \circ \varphi$. On dit que δ est obtenu par changement de paramètre : $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = \int_{u_0}^{u_1} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$

? 7_ Proposition :

Soit f une fonction complexe continue dans un ouvert étoilé Ω. Pour que f admette des primitives dans Ω, il suffit qu'on ait $\int_\theta f(z)\,dz = 0$ pour tout circuit triangulaire θ tracé dans Ω

V_ Primitive sur un domaine :

1_ Définition d'un domaine :

On appelle domaine, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ tel que deux points quelconques de Ω puissent toujours être relié par un chemin tracé dans Ω

2_ Lemme :

Si f est une fonction complexe continue sur un domaine D, deux primitives de f dans D diffèrent d'une constante.

? 3_ Proposition :

Soit f une fonction complexe continue dans un domaine D. Pour

que f ait des primitives dans D, il suffit qu'on a : $\int_\gamma f(z)dz = 0$
avec γ un circuit tracé dans D