

Contrôle surveillé
Analyse numérique

LE-Math

Durée 2h00

Semestre 4
2022–2023

Documents non autorisés & Téléphone éteint

Exercice 1. (4 pts)

On considère la formule de dérivation suivante :

$$f'(x) = \alpha f(x-h) + \beta f(x) + \gamma f(x+h)$$

Déterminer avec deux méthodes les paramètres α , β et γ pour que la formule de dérivation soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 2. (6 pts)

Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, tels que $x_1 < x_2$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On définit, pour f une fonction continue sur $[-1, 1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

1. Montrer que T est au moins d'ordre 1 sur $[-1, 1]$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2-x_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1-x_2}$
2. Pour quelles valeurs de x_1, x_2, λ_1 et λ_2 , T est-elle au moins d'ordre 3?
Quel est alors l'ordre de la méthode?
3. Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration d'ordre 3 sur un segment quelconque $[a, b]$.

Exercice 3. (10 pts)

Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et f une fonction de classe $C^3([0, 1])$. On note $a = f(0)$ et $b = f(1)$.

1. Déterminer le polynôme de Newton P_ε qui interpole f aux points $(0, f(0))$, $(1 - \varepsilon, f(1 - \varepsilon))$ et $(1, f(1))$.
2. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[0, 1]$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon = a + (b-a)(2x-x^2) + f'(1)(x^2-x). \quad \text{On note cette limite } P(x).$$

3. Vérifier que P est l'unique polynôme de degré 2 qui vérifie $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P'(1) = f'(1)$.
4. Pour $x \in]0, 1[$ fixé, on considère la fonction ϕ sur $[0, 1]$ définie par : $\phi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x(x-1)^2} t(t-1)^2$
Vérifier que $\phi(0) = \phi(1) = \phi(x) = \phi'(1) = 0$.
5. En déduire qu'il existe $\zeta_x \in]0, 1[$ tel que $\phi^{(3)}(\zeta_x) = 0$ et que $f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\zeta_x)}{6} x(x-1)^2$.
6. Déterminer la formule de quadrature associé à P , on cette formule $\mathcal{I}(f)$.
7. Déterminer l'ordre de précision de $\mathcal{I}(f)$.
8. Donner une majoration de $\left| \int_0^1 f(x) - \mathcal{I}(f) \right|$
9. A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature sur un segment quelconque $[a, b]$.



Examen
Analyse numérique

LE-Math

Durée 2h00

Semestre 4
2022–2023

Documents non autorisés & Téléphone éteint

Exercice 1. (15 pts)

Soit

$$f(x) = x^3 - 8x + 8$$

- 1 Sans faire les calculs donner l'interpolant de Newton P_3 qui interpole f aux points : $(-1 - \sqrt{5}, f(-1 - \sqrt{5}))$, $(0, f(0))$, $(\sqrt{5} - 1, f(\sqrt{5} - 1))$ et $(2, f(2))$.
- 2 En utilisant la question 1., donner (juste l'expression) de l'interpolant de Newton P_4 qui interpole f aux points : $(-1 - \sqrt{5}, f(-1 - \sqrt{5}))$, $(0, f(0))$, $(\sqrt{5} - 1, f(\sqrt{5} - 1))$, $(2, f(2))$ et $(3, f(3))$.
3. Donner l'expression de l'erreur pour les questions 1. et 2.
- 4 Montrer que f admet une racine unique $\alpha \in [-4, -3]$.
- 5 Si on veux utiliser la méthode de la Dichotomie pour trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-4, -3]$ avec une précision de 10^{-4} , donner le nombre d'itération possible.
- 6 Écrire la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue à partir de la méthode de Newton. Soit $x_0 = -3.7$, calculer x_1 , x_2 et x_3 puis calculer l'ordre numérique.
Commenter le résultat obtenu. ?
- 7 Pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$, on ne peut pas appliquer la méthode de Newton sur f .
8. Montrer que f admet une racine unique $\alpha \in [\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$.

9. L'équation $x = g(x)$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$, où $g(x) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{x-1} & \text{cas 1} \\ \frac{x^3}{8} + 1 & \text{cas 2} \end{cases}$

Étudier la convergence de la suite (x_n) définie par la fonction g pour rechercher $\alpha \in [\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$. Dans le cas où il y a convergence, donner un intervalle I_0 inclus dans $[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$ tel que la méthode converge pour tout choix de $x_0 \in I_0$.

10. Maintenant, discuter suivant les valeur de ρ , les cas douteux, attractif et répulsif, pour les trois points fixes ($\alpha_1 = -1 - \sqrt{5}$, $\alpha_2 = 2$, et $\alpha_3 = \sqrt{5} - 1$), de la fonction g donnée par $g(x) = x - \rho f(x)$.
Dans les cas attractif (pour chaque point fixe) donner l'ordre de convergence maximal qu'on peut atteindre (Justifier vos réponses).

Exercice 2. (5 pts)

1. Montrer l'unicité du polynôme d'interpolation polynomiale p_n passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$.
- 2 Trouver la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$ aux points 0; 1; 2.
3. Borner l'erreur d'interpolation pour tout $0 \leq x \leq 2$.

Rattrapage
Analyse numérique

LE-Math
Durée 2h00

Semestre 4
2022–2023

Documents non autorisés & Téléphone éteint

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique de 8. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(x) = x^3 - 8. \quad (1)$$

1. Montrer que l'équation (1) admet une solution unique $\alpha \in [0, +\infty[$.
2. En utilisant la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[1, 5]$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer le zéro α de la fonction f avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-5}$.
3. Posons $g_1(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{x^2} + x \right)$.
Montrer que $|g'_1(x)| < 1$, $\forall x \in [2, 4]$ et que $g_1([2, 4]) \subset [2, 4]$.
4. En déduire que la méthode du point fixe définie par g_1 converge pour tout choix $x_0 \in [2, 4]$.
5. Calculer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe définie par g_1 .
6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f . Que remarque-t-on ?
7. Pour $-\frac{2}{3} < \lambda < 0$ posons $g_2(x) = \lambda \left(x - \frac{8}{x^2} \right) + x$.
Soit $[a, b] \subset [0, +\infty[$ tel que $g_2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 avec $a \leq 2 \leq b$.
Montrer que $\alpha = 2$ est un point fixe attractif pour g_2 dans $[a, b]$.
8. Que remarque-t-on pour $\lambda = -\frac{1}{3}$.
9. Que se passe t'il si $\lambda = -\frac{2}{3}$.
10. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$.
Calculer explicitement le polynôme d'interpolation de Lagrange P_{g_2} associé à g_2 aux points a_0 , a_1 et a_2 .
11. Montrer que $|g_2(x) - P_{g_2}(x)| \leq \frac{|g_2^{(3)}(\xi)|}{9\sqrt{3}}$ avec $\xi \in [a_0, a_2]$.
12. Pour $\lambda = -14$, calculer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe définie par P_{g_2} .
13. Pour $x_0 = 2.75$ calculer les trois premières itérations de la suite $(x_{n+1} = g_1(x_n))_{n \geq 0}$.
14. Pour $y_0 = 2.75$ et $\lambda = -14$, calculer les trois premières itérations de la suite $(y_{n+1} = P_{g_2}(y_n))_{n \geq 0}$.

12/05/2023

Contrôle continu: Analyse 6

Durée 2h

Exercice 1. (6 points)

Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n} \text{ et } I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{\pi}{2e}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

b) Vérifier que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers f .

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 2. (6 points)

Soit p et q deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q}.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

2. a) Montrer que: $\forall x \in]0, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = (-1)^n x^{nq+p-1}$.

b) Montrer que u_n est intégrable sur $]0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1]$. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1], |S_n(x)| \leq 2f(x).$$

d) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$.

Exercice 3. (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par: $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$.

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par: $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$.

1. a) Vérifier que: $\forall a > 0, \frac{te^{-at}}{\sqrt{1+t}} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$.

b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

c) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Vérifier que: $\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \frac{te^{-at}}{\sqrt{1+t}}$.

d) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

e) Déduire que $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

2. a) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Vérifier que: $\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, |f(x, t)| \leq e^{-at}$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

3. a) Donner le tableau de variation de la fonction F .

b) Construire dans un repère orthonormé la représentation graphique de la fonction F .

Exercice 1. (4 points)

Soit f une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{2n} f(t) dt.$$

1. Justifier la définition de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (On fournira le résultat sous la forme d'une intégrale faisant intervenir f)

On donne: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ et $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Exercice 2. (6 points)

On considère deux réels fixés $a > 0$ et b et on pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) dt.$$

1. Justifier la définition de g sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer g' puis g .

On donne: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Exercice 3. (6 points)

Pour $x > 1$ on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$.

2. Montrer que: $\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.

3. Montrer que: $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Exercice 4. (4 points)

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 1 \leq xy \leq 9, x \leq y \leq 4x\}$ (on peut effectuer le changement de variables $u = \sqrt{\frac{y}{x}}$ et $v = \sqrt{xy}$).

2. $\iint_D \frac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2} dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 1. (6 points)

Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right)e^{-x^n} \text{ et } I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{+1}{e}, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

b) Vérifier que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers f .

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 2. (8 points)

On considère la fonction $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

1. a) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = x$.

b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

d) Déduire que la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} .

2. a) Montrer que la fonction $\phi(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 3. (6 points)

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}$.

2. $\iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 1 \leq xy \leq 9, x \leq y \leq 4x\}$ (on peut effectuer le changement de variables $u = \sqrt{\frac{y}{x}}$ et $v = \sqrt{xy}$).

3. $\iint_D \frac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2} dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.



جامعة عبد الله العسوي
Université Abdellah Essaïdi



المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE SUPÉRIEURE DES PROFESSEURS
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE Mathématiques
Année : 2022-2023

Dualité, Espace euclidiens,
Espace hermitiens
2h

Exercice 1 : (8 points)

Soit f une forme quadratique définie par : $q_A(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

1. Donner la matrice A associée à la forme quadratique q_A . (1 pt)
2. Trouver D la matrice diagonale constituée par les valeurs propres de A , en indiquant la matrice de passage. (3 pt)
3. Déduire la forme quadratique sous une forme réduite. (1 pt)
4. Quelle est la signature de q_A . (1 pt)
5. Retrouver la forme quadratique réduite par la méthode de Gauss. (2 pt)

Exercice 2 : (3.5 points)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ on définit une application $f(\dots)$ de E vers \mathbb{R} par :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \\ f(P, Q) = \langle P, Q \rangle = \int_0^2 P(X)Q(X)dX$$

1. Montrer que $f(\dots)$ définit un produit scalaire. (1.5 pt)
2. Déterminer l'orthonormalisé de la famille $\{1, 2X, 3X^2\}$. (2 pt)

Exercice 3 : (5.5 points)

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel. (1.5 pt)

2. Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E .

Montrer que :

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. (2 pt)

3. Soit f une fonction définie de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} par :

$$f(x, y) = x^2 - \cos(y)$$

f admet elle un point extremum? Justifier votre réponse en indiquant dans le cas de réponse par oui ce point extremum. (2 pt)

Exercice 4 : (3 points)

Soit H un espace de préhilbertien, et F un sous-espace de H , non réduit à 0.

On note p la projection orthogonale de H sur F .

1. Démontrer que $p \circ p = p$. (1.5 pt)

2. $\forall (x, y) \in H^2, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$. (1.5 pt)

3. $\|p\| = 1$. (1 pt Bonus)

Exercice 5. (5pts)

- On considère la variable "temps vécu dans le logement" pour laquelle on a obtenu le tableau d'effectifs suivants :

x_i	[0, 1[[1, 2[[2, 3[[3, 4[[4, 5[[5, 6[[6, 7[[7, 8[
n_i	35	36	32	25	20	18	16	7

1. Quel est le type de cette variable ?
2. Déterminer les valeurs de tendance centrale : Moyenne, Classe modale .
3. Déterminer la médiane ainsi que les 1^{er} et 3^{ème} quartiles.
4. A cause d'une erreur de saisie, la borne supérieure 8 a été remplacée par 18 , cela a-t-il un impact sur la détermination de la médiane ?
5. Déterminer les indicateurs de dispersion : Ecart type Etendue , Intervalle interquartile
6. Tracer la boîte à moustaches et interpréter ces différents indices .

29/05/2023

Examen
Durée 2h

: Probabilités et Statistique

Exercice 1. (8pts)

Dans un village de vacances situé en montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 .

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.

On note:

E : l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».

F : l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».

1. Calculer les probabilités suivantes: $P(E)$, $P(F/E)$ et $P(F/\bar{E})$.
2. Calculer $P(E \cap F)$ et $P(F \cap \bar{E})$.
3. En déduire $P(F)$.

Exercice 2. (2pts)

1. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a:

$$C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} = C_k^n.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n - 1$, on a:

$$C_{k-2}^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_k^{n-2} = C_k^n.$$

Exercice 3. (7ls)

On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os, le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

fémur	38	56	59	64	74
humérus	41	63	70	72	84

- Tracer le nuage de point correspondant à ces données. Pensez-vous que les 5 spécimens peuvent appartenir à la même espèce et ne différer en taille que parce que certains sont plus jeunes que d'autres ?
- Calculer à l'aide de votre calculette m_x , m_y , s_x , s_y et cov_{xy} . En déduire l'équation de la droite des moindres carrés. Contrôler vos calculs en superposant son graphique au nuage de points.
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire r . Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4. (3pts)

Soit n un entier naturel et (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de réels. On souhaite trouver un réel x minimisant la somme des écarts ou la somme des écarts au carré. On définit donc sur \mathbb{R} les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

Minimisation de G .

- En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur \mathbb{R} et indiquer en quelle valeur de x il est atteint.
- Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question précédente?

Examen S4 - 2022/2023

Module : Structure des données

Exercice 1 :

Écrire une fonction remplacer qui remplace les éléments dans un tableau de flottants, qui sont supérieurs à 10 par 0 et qui les autres qui sont inférieur à 10 par 1. Cette fonction prendra en paramètre le tableau et sa taille.

Exercice 2 :

Écrire une fonction inverse qui inverse l'ordre des éléments dans un tableau de flottants. Cette fonction prendra en paramètre le tableau et sa taille. Après l'appel à la fonction inverse, le tableau contient les mêmes valeurs mais placées dans l'ordre inverse. Ainsi si le tableau contient les valeurs [2.1, 3.4, 5.6, 7.8, 9.1, 7.4], il devra ensuite contenir les valeurs [7.4, 9.1, 7.8, 5.6, 3.4, 2.1].

Exercice 3 :

Écrire une fonction calculespace qui calcul le nombre des espaces dans une chaîne de caractères.
Le morceau de code :

```
char s[] = "bonjour à tous";  
calculespace(s);
```

Doit afficher : le nombre des espaces est : 2

Exercice 4 :

Question : En fonction des déclarations suivantes, que donne l'affichage de "p2" ?

```
int A = 5;  
int *p1 = &A; // p1 pointe sur A  
int **p2 = &p1; // p2 pointe sur p1  
     La valeur de nombre  
     L'adresse de p1  
     L'adresse de A
```

Question : Soit le code suivant :

```
int main() {  
    int a, b; int *ptr1, *ptr2;  
    a = 5; b = a;  
    *ptr1 = &a;  
    *ptr2 = ptr1;  
    b = (*ptr2)++;  
    printf("a = %d, b = %d, *ptr1 = %d, *ptr2 = %d\n", a, b, *ptr1, *ptr2);  
    return 0;  
}
```

- ne compile pas
- provoque une erreur à l'exécution
- affiche a = 6, b = 5, *ptr1 = 6, *ptr2 = 6
- affiche a = 5, b = 5, *ptr1 = 5, *ptr2 = 5
- affiche a = 6, b = 6, *ptr1 = 6, *ptr2 = 6

I- Concepts de base de la didactique générale:

1) Cocher la bonne réponse: "Selon Herbert, la situation scolaire peut être définie comme suit : "

Un seul adulte est en rapport régulier avec un groupe d'enfants dont la présence est obligatoire.

2) Affecter à chaque définition un numéro du concept correspondant:

* Multidimensionnalité fait référence à la quantité d'événements et de tâches qui sont accomplis dans les classes;

* Simultanéité renvoie au fait que plusieurs de ces événements arrivent en même temps;

* Immédiateté rappelle la rapidité du rythme où ceux-ci se déroulent

* Imprévisibilité se rattache à l'inattendu de ces événements;

* Visibilité souligne la dimension publique, plus spécifiquement du geste de l'enseignant;

* Historicité manifeste l'impact de ce geste sur les événements à venir dans la classe.

3) Affecter à chaque définition un numéro du concept correspondant:

* Connaissances déclaratives: connaissances qui sont reconnues comme savoir au cours de l'évolution d'une société.

* Connaissances procédurales: connaissances qui correspondent aux étapes d'une action.

* Connaissances conditionnelles: connaissances qui correspondent aux classifications et aux catégorisations.

4) Choisir la bonne définition pour chacun des concepts suivants:

* Enseignement: l'ensemble des stimuli exercés par un enseignant à l'égard d'un élève et visant à susciter l'atteinte d'objectifs d'apprentissage par celui-ci

* Apprentissage: le processus par lequel une personne acquiert des connaissances, maîtrise des habiletés ou développe des attitudes

* **Formation**: Forme d'apprentissage à la fois organisé et institutionalisé. Elle peut se définir d'une manière générale comme "l'action d'un formateur s'exerçant sur une ou plusieurs personnes en vue de les adapter à leurs futures fonctions".

5) Affectuer à chaque définition un numéro du concept correspondant:

* **Pédagogie**: Une méthodologie de l'éducation qui étudie les situations éducatives, les sélectionne, puis en organise et en assure l'exploitation selon des méthodes appropriées.

* **Didactique**: Une discipline qui se propose d'étudier sur des bases scientifiques, les principes et les méthodes de l'acte pédagogique quand il concerne l'acquisition des connaissances.

* **Contrat didactique**: L'ensemble des comportements spécifiques de l'enseignant qui sont attendus de l'apprenant, et l'ensemble des comportements de l'apprenant attendus par l'enseignant.

* **Transposition didactique**: L'ensemble des mécanismes généraux permettant le passage d'un objet de savoir à un objet d'enseignement.

* **Situation scolaire**: Le résultat d'une construction entre les différents acteurs concernés, c'est à dire l'enseignant et les apprenants, où chacun développe des stratégies pour que la situation aille dans le sens qui lui paraît d'avantage souhaitable et acceptable.

* **Apprenant**: Toute personne engagée activement dans un processus d'acquisition ou de perfectionnement des connaissances et de leur mise en œuvre.

* **Enseignant**: La personne qui enseigne une science donnée ou un art. Toutefois, elle est celle à qui elle lui est reconnue une habilité extraordinaire à propos de la matière qu'elle instruit.

6) Cocher la bonne réponse: "Enseigner c'est: "

Transmettre des connaissances ; Accompagner l'apprenant dans ses apprentissages ; Organiser le travail dans la classe ; Evaluer ;

Travailler en équipe ; Agir dans l'environnement

7) Affecter à chaque définition un numéro du concept correspondant :

* **Style** : La manière personnelle de pratiquer un art, un sport, ..., définie par un ensemble de caractères.

* **Style d'apprentissage** : La manière dont chaque apprenant commence à se concentrer sur une information nouvelle et difficile, la traite et la retient.

* **Style d'enseignement** : La manière dominante personnelle d'être, d'entrer en relation et de faire de l'enseignement.

* **Style transmissif** :

Version moins efficace : Le formateur communique un maximum d'information dans le temps imparti ; son exposé transpose directement un texte écrit sans l'adapter aux circonstances et au public.

Version plus efficace : Le formateur fait un exposé, mais en l'adaptant aux circonstances et au public.

* **Style incitatif** :

Version moins efficace : Le formateur a le souci constant de faire participer les individus ; il sollicite des réponses ponctuelles mais sans exploitation effective.

Version plus efficace : Le formateur a le souci constant de faire participer le groupe ; il sollicite des avis ; il stimulate des interventions spontanées ; il utilise les réponses.

* **Style associatif** :

Version moins efficace : Le formateur n'accorde qu'une confiance relative aux apprenants ; il entend les faire travailler, mais n'attend pas grand chose de cette collaboration.

Version plus efficace : Le formateur fait confiance aux apprenants ; il se considère et est perçu comme une "personne-ressource" dont le rôle essentiel est de faciliter les apprentissages individuels et collectifs.

* Style permissif :

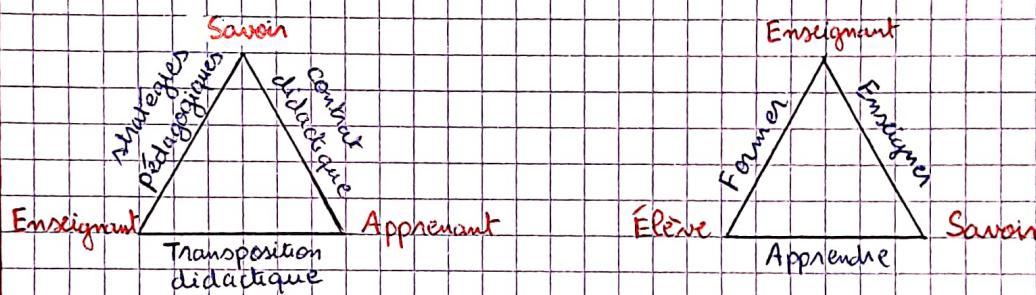
Version moins efficace : Le formateur reste passif, voire fasciste ; il se contente de meubler le temps qui lui est imparti sans considération réelle pour les apprenants et pour les objectifs.

Version plus efficace : Le formateur met à la disposition des apprenants des documents de qualité bien adaptés à leur niveau ; il intervient très peu mais répond aux demandes explicites.

8) Compléter les schémas suivants en prenant en considération les interactions (processus) entre les trois pôles du triangle classique.



9) Comparer entre les 2 schémas en se basant sur le triangle classique.



Le triangle à gauche est le triangle didactique, et celui à droite est le triangle pédagogique.

Les points communs : Ces trois triangles ont les mêmes pôles :

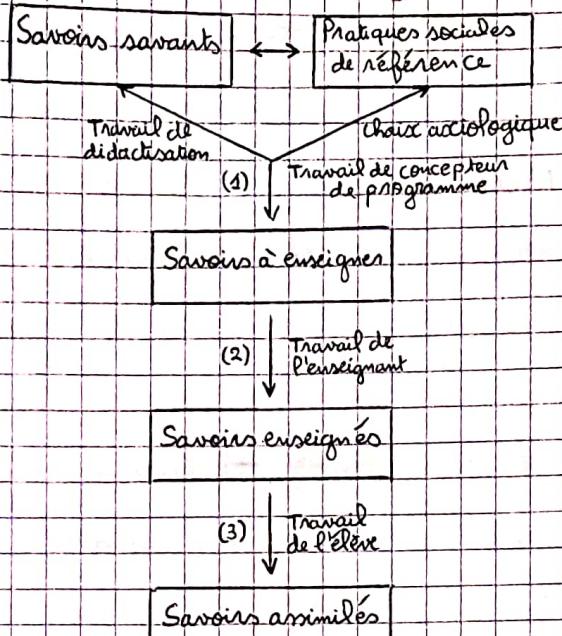
Enseignant ; Apprenant / Élève ; Savoir.

Les points différents sont les interactions entre les pôles : pour le triangle didactique, ils sont : Stratégies pédagogiques ; Transposition didactique ; Contrat didactique. Pour le triangle pédagogique, ils sont : Former ; Apprendre ; Enseigner.

10) Comparer entre les deux schémas en se référant à la transposition de Chevalard.

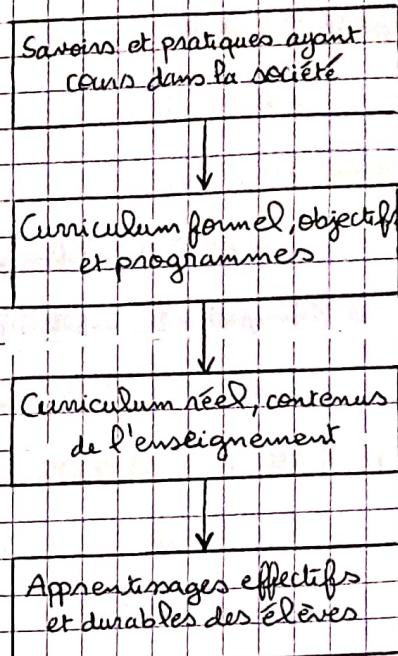
La transposition didactique

Selon Developay



La transposition didactique

Selon Martinand



Comparons Developay avec Martinand :

Pour les points communs : Toute les deux ont 3 étapes, et ayant la transposition didactique comme une 2^{ème} étape. Pour les points différents : elles diffèrent dans la 3^{ème} étape (Developay : "Savoirs assimilés"; Martinand : "Apprentissages effectifs et durables des élèves")

Comparons Developay et Martinand avec Chevalard :

Pour les points communs : Toute les trois admettant la transposition didactique comme 2^{ème} étape. Pour les points différents : Chevalard n'a que 2 étapes tandis que Developay et Martinand ont 3.

11) En se basant sur les différents style d'enseignement, interpréter le schéma :

Dans la zone P "Style permissif" : intérêt pour les apprenants
Z'intérêt est faible pour la matière et aussi pour les apprenants.

Dans la zone T "Style transmissif" :
Z'intérêt est fort pour la matière, mais faible pour les apprenants.

Dans la zone A "Style associatif" : Forte
Z'intérêt est faible pour la matière, mais fort pour les apprenants.

Dans la zone I "Style i-citatif" :
Z'intérêt est fort pour la matière et aussi pour les apprenants.

A	I
Style associatif techniques de travail en groupe travaux pratiques...	Style incitatif exposé oratoire, étude de cas, débats...

P	T
Style permissif auto-didactisme assisté ou non	Style transmissif enseignement frontal exposé ex cathedra

Faible	Forte	intérêt pour la matière

II - Modèles pédagogiques

1) Affecter à chaque définition le modèle correspondant.

* **Modèle de l'empreinte (Action: Mémoiser)**: Théorie qui qualifie la conception la plus traditionnelle de l'apprentissage par l'apprenant.

* **Modèle de conditionnement/comportement (Action: Appliquer)**: Théorie qui considère les structures mentales comme une boîte noire à laquelle on n'a pas accès, et qu'il est plus efficace de s'intéresser aux "entrées" et aux "sorties" qu'aux processus eux-mêmes.

* **Modèle inductiviste (Action: Expérimenter)**: Théorie qui repose sur la croyance que l'observation et la mesure sont à la base de la "mise en évidence" des lois physiques et qu'il est possible de créer un cadre sicilien artificiel où l'apprenant, bien dirigé, serait apte à faire en parcourir ce même cheminement.

* **Modèle constructiviste (Action: Construire)**: Théorie pour laquelle les connaissances se construisent. Que ce soit de façon progressive et continue, ou bien par sautées, l'activité du sujet conduit aux remodelages et aux réorganisations qui implique l'apprentissage.

* **Modèle socioconstructiviste (Action: Partager)**: Théorie liée en général à l'apprentissage. Elle est basée sur la théorie du constructivisme en introduisant le processus social de l'apprentissage.

* **Modèle gestaltiste (Action: Percevoir)**: Théorie qui s'attache à mettre en évidence le caractère relatif de la perception qu'on peut avoir d'un objet.

* **Modèle cognitiviste (Action: Traiter)**: Théorie pour laquelle l'apprentissage désigne tout processus susceptible de modifier un comportement ultérieur. La mémoire désigne la capacité de retrouver des expériences passées.

* **Modèle connectiviste (Action: Inter-réagir)**: Théorie qui s'intéresse à l'appart des nouvelles technologies dans l'apprentissage et plus particulièrement à l'interaction des communautés humaines en réseau.

2) Affecter à chaque définition un numéro du concept correspondant.

pédagogique:

***Modèle**: Une construction théorique articulant, de façon cohérente, un ensemble de situations didactiques projetées ou effectives, et qui (la construction théorique) leur donne un sens et spécifie les conditions de leur mise en œuvre dans le cadre d'un cursus d'ensemble.

***Composante psychologique**: Ses représentations que s'est construit l'enseignant sur la façon dont s'effectue mentalement un apprentissage.

***Composante épistémologique**: Le rapport personnel qu'il entretient avec le savoir, vu plutôt comme des concepts abstraits à construire et à réinvestir, ou plutôt comme des données objectives à faire acquérir.

***Composante psychosociologique**: La façon dont la classe est considérée et gérée en tant que groupe, dans ses interactions et ses projets.

***Composante axiologique**: Les finalités que l'on assigne à la formation scientifique, les valeurs auxquelles on cherche à faire accéder les apprenants et la vision de l'homme qui est à l'arrière plan.

3) En considérant le schémas suivant (p.23), à quelles conditions les choix de l'enseignant en modèles et stratégies doivent prendre en considération, et pourquoi?

En fonction du contexte et de la situation, on choisit un modèle pédagogique. Donc, on travaille avec un modèle didactique et non pas un modèle pédagogique.

III. Modèles, stratégies, méthodes et techniques d'enseignement

1) Indiquer le type d'enseignement correspondant pour chaque concept, (général) → Particulier

Modèles	Stratégies	Méthodes	Techniques
Développement de la personne	Etude indépendante	Exposé	Evaluation
Interaction sociale	Apprentissage expérientiel	Enquête	Présentation
Modification du comportement	Enseignement interactif	Débat	Démonstration
Traitement de l'information	Enseignement direct	Contrats	Plémification
	Enseignement indirect	Simulations	Questionnement
		Etudes de cas	Directive
		Apprentissage coopératif	
		Visualisation guidée	

2) Classer chaque modèle dans la famille de modèles correspondant:

Familles de modèle "socialisation"	Familles de modèle "Traitement d'information"	Familles de modèle "Individualité"	Familles de modèle "Systèmes behavioristes"
Enquête jurisprudentielle	Enquête scientifique	Apprentissage non directe	Apprentissage par simulation
Jeux de rôle	Techniques de mémorisation		Instruction directe
Partenariat d'apprentissage	Pensée inductive		Appropriation des connaissances, instruction programmée

3) Affecter chaque méthode d'enseignement à la stratégie correspondante.

Enseignement direct	Enseignement indirect	Enseignement interactif	Apprentissage expérientiel	Etude indépendante
Exposé / Comparaison / Démonstration / Questionnement didactique / Vue d'ensemble / Enseignement explicite	Enquête / Etude de cas / Résolution de problème / Discussion de lecture / Formation réfléchie / Formation de concepts / Objectivation / Acquisition de concepts / Cléture	Débats / Jeux de rôles / Résolution de problème / Techniques de lecture / Formation objective / Acquisition de concepts / Céleste	Apprentissage coopératif / Remue-méninges / Discussion / Entrées / Groupes de laboratoire / Enseignement par les pairs / Cercles de discussion / Questions et réponses	Simulations / Visualisation / Expériences / Synesthésie / sondage / Exposition / Exercices
				Contrats / Devoirs / Projets de recherche / Centres d'apprentissage / Cours par élaboration de modèles correspondance / Enseignement assisté par ordinateur / Comptes rendus (exris) / Exercices

4) Affecter à chaque définition un numéro du concept correspondant:

- * **Infrastructure de l'enseignement**: Son but est d'inciter les enseignants à s'interroger sur leur propre pratique de l'enseignement.
- * **Évaluation réfléchie** de l'utilisation des stratégies, méthodes et techniques peut conduire les enseignants à élargir et à approfondir leur répertoire d'approches pédagogiques.
- * **Modèles d'enseignement**: permettent de sélectionner et de structurer les stratégies, les méthodes et les techniques d'enseignement ainsi que les activités des apprenants dans une situation pédagogique bien précise.
- * **Stratégies d'enseignement**: déterminent l'approche que doit suivre un enseignant pour atteindre les objectifs d'apprentissage.
- * **Méthodes d'enseignement**: on se sert pour créer un environnement pédagogique et pour préciser la nature de l'activité à laquelle l'apprenant et l'enseignant vont participer pendant le cours.
- * **Techniques d'enseignement**: le niveau le plus spécifique des comportements d'un enseignant.
- * **Traitement de l'information**: Ce modèle fait ressortir l'acquisition, la maîtrise et le traitement de l'information. Il est axé sur le fonctionnement cognitif de l'apprenant.
- * **Développement de la personne**: Ce modèle met l'accent sur le développement du concept de soi.
- * **Interaction sociale**: Ce modèle insiste sur la modification des comportements visibles de l'apprenant, pour qu'ils soient conformes au développement du concept de soi.
- * **Enseignement direct**: stratégie principalement axée sur l'enseignant. Elle sert à informer ou à développer progressivement certaines habiletés chez les apprenants.

* **Enseignement indirect**: stratégie axée sur l'apprenant. Elle demande aux apprenants d'observer, de faire des recherches, de tirer des conclusions à partir de données ou de formuler des hypothèses.

* **Enseignement interactif**: il repose en grande partie sur la discussion et le partage. Il exige de l'enseignant comme de l'apprenant le raffinement de compétences d'observation, d'écoute et d'intervention, et des compétences dans le domaine des relations personnelles.

* **Apprentissage expérientiel**: stratégie axée sur l'apprenant et les activités.

* **Etude indépendante**: la grande méthode d'enseignement qui encouragent chez l'apprenant l'initiative personnelle, la confiance en soi et l'autoperfectionnement. Elle peut consister à apprendre en coopération avec un autre apprenant ou au sein d'un petit groupe.

* **Apprentissage coopératif**: Des apprenants travaillent en petits groupes hétérogènes pour atteindre un but commun. Ils développent en même temps des relations interpersonnelles plus positives.

* **Débat**: Discussion structurée où différents groupes d'apprenants défendent différents points de vue.

* **Discussion**: Partage d'informations ou d'opinions sur un sujet, recherche de solutions à un problème, exploitation d'un concept.

* **Enseignement par les pairs**: Des apprenants renforcent activement leur propre apprentissage en participant à l'apprentissage de leurs pairs.

* **Entrevue**: Des apprenants recueillent des données sur un sujet ou des renseignements sur les sentiments ou les attitudes d'individus ou de groupes en les interviewant.

* **Jeux de rôles**: L'apprenant adapte ses attitudes d'un personnage dans une situation donnée pour clarifier des points de vue ou pour mieux comprendre la perception, l'attitude ou les idées d'un autre.

* **Remue méninges**: Les apprenants recherchent des idées pour ensuite les organiser et les classer.

* **Divergent**: Il préfère les phases d'expérience concrète et de réflexion sur cette expérience. Il apprécie apprendre par l'expérience.

* **Amimulateur**: Il préfère les phases de réflexion sur une expérience et de conceptualisation abstraite et théorique d'une expérience. Il apprécie les cours théoriques.

* **Convergent**: Il préfère les phases de conceptualisation abstraite et théorique de l'expérience et de la mise en application de l'idée/aktion. Il apprécie les projets et les activités autogénérées.

* **Accommodateur**: Il préfère les phases d'expérience concrète et de mise en application de l'idée/aktion fondée sur cette expérience. Il apprécie les exercices en petits groupes.

5) Interpréter ce schéma en prenant en considération les deux axes verticale et horizontale:

Par rapport à l'axe horizontal:

En haut, l'accommodateur diverge vers

l'émission d'hypothèses et converge vers

l'expérimentation, et le divergent diverge vers l'observation réfléchie et converge

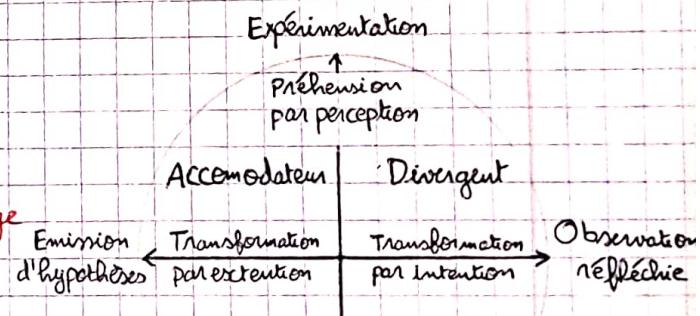
vers l'expérimentation. En bas, le convergent

diverge vers l'émission d'hypothèses et converge

vers la conceptualisation, et l'assimilateur

diverge vers l'observation réfléchie et converge

vers la conceptualisation.



Convergent | Assimilateur
préhension
par compréhension

↓
Conceptualisation

Observation
réfléchie

↑
Préhension
par perception

Accommodateur | Divergent
Transformation
par exécution

Emission
d'hypothèses ← Transformation
par intention

↑
Experimentation

↓
Observation
réfléchie

↑
Préhension
par perception

↓
Conceptualisation

Par rapport à l'axe vertical :

À gauche, l'accommodateur converge vers l'émission d'hypothèses et diverge vers l'expérimentation, et le convergent converge vers l'émission d'hypothèses et diverge vers la conceptualisation. À droite, le divergent converge vers l'observation réfléchie et diverge vers l'expérimentation, et l'assimilateur converge vers l'observation réfléchie et diverge vers la conceptualisation.