Séance 1

Histoire et épistémologie des mathématiques

* **Objectifs du modules :**

→ Sensibiliser l'étudiant aux rôles que peut jouer l'histoire des mathématiques aux niveaux culturels, pédagogiques et didactiques.

→ Développer et élargir la culture mathématique de l'étudiant et l'amener à appréhender les mathématiques d'une manière qui n'est pas seulement technique et formelle.

→ Amener l'étudiant à prendre connaissance du processus de la construction de l'édifice mathématique et des contributions des mathématiques de la civilisation arabo-islamique dans le développement de cette discipline.

→ Initier l'étudiant à une réflexion épistémologique sur les concepts mathématiques.

→ Faire des réflexions sur l'apport de l'histoire des mathématique avec l'enseignement.

→ Prendre connaissance de différentes approches utilisées dans l'enseignement.

* **Les axes du module :**

I_ L'émergence et le développement de certains concepts ou résultats fondamentaux.

II_ L'évolution historique des thèmes tels que : La géométrie analytique, l'axiomatique, le symbolisme, la démonstration, les crises des fondements des mathématiques, les problèmes classiques de la géométrie, ...

III_ L'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement

I. Introduction à l'histoire des mathématiques :

→ Les origines des mathématiques et les premières civilisations mathématiques.

→ Les grandes périodes de l'histoire des mathématiques.

→ Les mathématiciens et leurs contributions importantes à travers l'histoire.

* Les origines des mathématiques et les premières civilisation mathématiques :

Qu'est-ce que ça veut dire les mathématiques ?

Les mathématiques est une discipline fondamentale qui joue un rôle crucial dans le développement et l'évolution de la civilisation d'une société.

→ Les origines des mathématiques peuvent être retracées jusqu'aux premières civilisations qui ont émergé autour des fleuves Tigre (نهر دجلة) et Euphrate (نهر الفرات) et du Nil (نهر النيل), il y a plusieurs millénaires.

→ Ces sociétés anciennes utilisaient les mathématiques principalement pour des besoins pratiques tels que le mesure des termes agricoles.

* Les Egyptiens :

En Egypte, les mathématiques étaient étroitement liées à l'architecture et à la géométrie. Les égyptiens ont développé des techniques sophistiquées pour calculer les surfaces et les volumes, ainsi que des méthodes pour résoudre des problèmes d'algèbre élémentaire.

Les anciens égyptiens, entre 3000 et 1000 av. J.C, ont développé un système numérique fondé sur l'addition et la multiplication, utilisant des hiéroglyphes pour représenter les nombres.

Ils ont utilisé leurs connaissances mathématiques pour la construction de pyramides et d'autres structures monumentales, ainsi que pour des domaines tels que le commerce.

Les papyrus mathématiques égyptients, tels que le "papyrus Rhind" (il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5m de longueur et 32 cm de large) et le "papyrus de Moscou" (plus ancien que l'autre. Il contien 25 problèmes avec leurs solutions, dont les plus intéressants sont ceux traitant de la surface d'une demi-sphère et du volume d'une pyramide tronquée, d'environ 5,4 m de long et d'une largeur qui varie entre 4 et 7 cm), contiennent des problèmes de géométrie et d'arithmétique, ainsi que des méthodes de calcul et de mesure.

+ En Mésopotamie :

Les mathématiques mésopotamiennes font référence aux pratiques mathématiques des peuples de l'ancienne Mésopotamie qui s'étendent de l'époque sumérienne jusqu'à la chute de Babylone en 539 av. J.C, située dans l'actuel Irak.

Les sumériens, qui ont prospéré en Mésopotamie vers 3500 1900 av. J. C, ont laissé des traces des premiers systèmes numériques, tels que l'utilisation de l'écriture cunéiforme pour représenter des nombres, et la création de tablette d'argile contenant des tables de multiplication et de division.

Les babyloniens qui ont prospéré en Mésopotamie vers 1900-500 av. J.C, ont développé un système mathématiques sophistiqué, y compris des techniques d'algèbre, de trigonométrie et de calcul.

Leur système numérique était basé sur 400 tablettes d'argile et ils ont développé des méthodes pour résoudre des équations quadratiques et cubiques, ainsi que des tablettes d'argile contenant des tables de multiplication, de division et de racines carrés.

Ils ont développé un système numérique basé sur 60 (système sexagésimal), qui a influencé de nombreuses autres civilisations ultérieures.

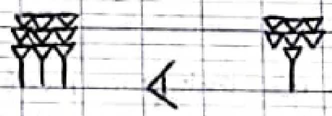
La tablette YBC 7289 fournit une approximation de $\sqrt{2}$ précise à six décimales près :

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296$$

Inscriptions babyloniennes	Valeurs décimales	Position
	30	Côté du carré
	1 24 51 10	Le long d'une diagonale
	42 25 35	Sous cette diagonale

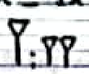
1 10 60 600 3600 36000 216000

Le nombre 577 qui correspond à 9 soixantaines et 37 unités

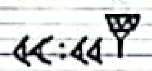


9 10 7

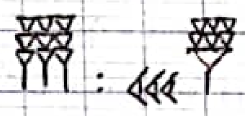
Pour comprendre
- $62 = 1 \times 60 + 2$



- $1224 = 20 \times 60 + 24$



Les spécialistes de mathématiques babyloniennes le notèrent 9:37. Ainsi 9 heures et 37 minutes correspondent à 577 minutes



577

Deux nombres étaient inverses l'un de l'autre lorsque leur produit était une puissance de soixante. Ainsi, l'inverse de 2 était 30, car $2 \times 30 = 60$. La table d'inverses classique était en base 60 avec deux points ":" pour séparateur des chiffres.

Dans la géométrie, pour calculer l'aire et le volume de certaines figures géométriques, ils calculaient la circonférence du cercle en prenant trois fois le diamètre.

L'aire du cercle en prenant un douzième du carré de la circonférence, ce qui revenait à prendre 3π maintenant.

Les Sumériens et Babyloniennes utilisaient des techniques de calcul pour des activités telles que le commerce, la construction et l'astronomie, la comptabilité et ils ont également résolu des problèmes géométriques et arithmétiques simples.

Séance 2

* En Inde :

L'Inde ancienne a apporté d'importantes contributions aux mathématiques, en particulier entre 300 av. J.C et 500 après J.C. Le système numérique indien, avec son utilisation du zéro et du système de position décimale, a été une avancée révolutionnaire dans l'histoire des mathématiques.

Système de numération utilisant la base 10

Les mathématiciens indiens, tel que Aryabhata, Brahmagupta et Bhaskara, ont développé des théories algébriques, géométriques et trigonométriques, et ont résolu des problèmes complexes liés à l'astronomie, à la géométrie et au calcul.

* La Grèce antique :

Principalement entre le 6ème siècle av. J.C et le 4ème siècle après J.C, a été l'une des époques les plus importantes dans le développement des mathématiques.

Les mathématiciens grecs ont posé les bases de la géométrie et ont exploré des concepts fondamentaux qui ont influencé les mathématiques occidentales pendant des siècles.

Ces mathématiciens grecs ont posé les fondements de nombreuses branches des mathématiques, y compris la géométrie, l'algèbre, ainsi que la méthode axiomatique, sans oublier la théorie des nombres et des mathématiques appliquées, tout en explorant les prémices de l'intégration.

Leurs travaux ont été une source d'inspiration pour les mathématiciens à travers les âges, et leur héritage perdure encore aujourd'hui dans de nombreux domaines des mathématiques et de la science.

- Les mathématiciens et leurs contributions importantes à travers l'histoire :

Plusieurs mathématiciens ont posé les fondements de nombreuses branches des mathématiques, y compris la géométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. Leurs travaux ont été une source d'inspiration pour les mathématiciens à travers les âges, et leur héritage perdure encore aujourd'hui dans de nombreux domaines des mathématiques et de la science.

- Pythagore : (570-495 av. J.C)

Pythagore, le fondateur de la célèbre école pythagoricienne, est surtout connu pour son théorème, qui établit une relation fondamentale entre les côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème, qui stipule que dans un triangle rectangle. Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, est l'un des résultats les plus célèbres et les plus influents de toute l'histoire des mathématiques

- Euclide : (vers 300 av. J.C)

Euclide est l'auteur des "Éléments", une oeuvre majeure qui a dominé l'enseignement des mathématiques pendant près de 2000 ans. Les "Éléments" sont une compilation d'axiomes, de définitions et de propositions géométriques qui établissent un système cohérent de géométrie euclidienne. Ce travail est non seulement une référence en géométrie, mais il a également jeté les bases de la logique mathématique.

- Archimède : (287-212 av. J.C)

Archimède a été l'un des mathématiciens les plus brillants de l'Antiquité, connu pour ses contributions à la géométrie, à l'arithmétique et à la mécanique. Il a développé des méthodes novatrices pour calculer les aires et les volumes de formes irréguliè ainsi que pour l'approximation de π. Ses travaux sur les leviers, les poulies et les machines simples ont été révolutionnaires dans le domaine de la mécanique.

- Apollonios de Perga : (262-190 av. J.C)

Apollonios de Perga est surtout connu pour son oeuvre "Conique dans laquelle il étudie les sections coniques (cercles, ellipses, paraboles et hyperboles) et leurs propriétés. Ses contributions ont eu un impact significatif sur la géométrie analytique et ont influencé les travaux ultérieurs en algèbre.

- Isaac Newton : (1642-1727)

Connu pour ses lois du mouvement et de la gravitation, Newton a également développé le calcul infinitésimal, inaugurant ainsi le calcul différentiel et intégral. Sa publication principale, "Philosoph-iae Naturalis Principia Mathematica", est considérée comme l'une des oeuvres scientifiques les plus influentes de tous les temps.

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Souvent désigné comme le "Prince des mathématiciens", Gauss a apporté des contributions majeures à de nombreux domaines des mathématiques, y compris l'algèbre, l'analyse et la théorie des nombr Ses travaux sur les courbes elliptiques et la distribution des nombres premiers sont particulièrement remarquables.

- Leonhard Euler : (1707-1783)

L'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps.

Euler a publié plus de 800 articles traitant de divers sujets mathématiques, allant de l'analyse à la théorie des graphes. Ses travaux ont été fondamentaux pour le développement de la notation mathématique moderne et de nombreuses branches des mathématiques, y compris la théorie des nombres, l'analyse complexe et la géométrie.

* **La civilisation arabo-islamique :**

La civilisation arabo-islamique, également connue sous le nom de l'âge d'or de l'Islam, a été une période de prospérité intellectuelle, scientifique et culturelle qui s'est étendue environ du 8ème au 14ème siècle dans les régions dominées par la civilisation islamique, notamment au Moyen-Orient (الشرق الأوسط), en Afrique du Nord (شمال إفريقيا), en Espagne islamique (الأندلس), en Asie centrale (آسيا الوسطى) et en Asie du Sud (جنوب آسيا).

Les textes sont rédigés en arabe, une langue qui était largement utilisée dans les domaines des sciences et de la culture à cette époque. C'est pourquoi l'on fait référence aux "sciences arabes" et aux "mathématiques arabes", indépendamment de l'origine linguistique, ethnique ou religieuse des savants.

* **Les traduction :**

L'une des caractéristiques les plus remarquables de cette période a été l'effort de traduction et de préservation des textes anciens. Les savants arabes ont traduit des oeuvres grecques, persanes (فارسية), indiennes et même chinoises dans le monde arabo-islamique ce qui a permis la diffusion et la préservation des connaissances mathématiques et scientifiques antique.

- Les "Éléments" d'Euclide, qui seront traduits par Al-Hajjaj.
- La Grande composition mathématique de Ptolémée connue sous le nom Almageste.
- Les "Coniques" d'Appolonios.

- "De la sphère et du cylindre" d'Archimède.
- l'"Arithmetica" de Diophante.

Ces traductions ont grandement enrichi le corpus de connaissances disponibles pour les savants de l'époque. C'est principalement par leurs traductions en arabe et leurs commentaires que l'Europe prit connaissance des ouvrages des mathématiciens grecs.

- Les institutions académiques :

Les califats et les sultanats de l'époque ont établi des institutions académiques telles que des bibliothèques, des madrasas et des observatoires, qui ont favorisé la recherche et l'éducation en mathématiques et en sciences.

- La création d'une "Maison de la sagesse" (بيت الحكمة) à Bagdad sous le règne du calife Al-Mamun
- "Al-Quaraouiyine" à Fès, la capitale culturelle et spirituelle du Maroc. Cet établissement éducatif considéré de nos jours comme étant le plus ancien dans le monde encore en activité.

- Les centres intellectuels :

Des centres intellectuels majeurs ont émergé dans le monde arabo-islamique, tels que Bagdad, Cordoue (قرطبة), Le Caire (القاهرة) Damas (دمشق) et Samarcande (سمرقند). Ces villes étaient des foyers d'échange intellectuel où les savants de diverses disciplines, y compris les mathématiques, se réunissaient pour discuter, débattre et collaborer sur des questions scientifiques et philosophiques.

- Équation du premier et du second degré :

Al-Khwarizmi rédige son ouvrage intitulé "Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala", dans lequel il expose les méthodes de résolution des équations du premier et du second degré.

Il entame son traité en définissant les concepts fondamentaux de son étude, tels que :

- Les nombres, appelés "al-shay" ou "al-adad".
- Le carré, désigné par "al-māl".
- L'inconnue, est également identifiée comme étant la racine du bien : "jedhr".

Par la suite, il présente les six cas canoniques auxquels on peut se ramener :

(1) $ax^2 = bx$ — الأموال التي تعدل الجذور

(2) $ax^2 = c$ — الأموال التي تعدل العدد

(3) $bx = c$ — الجذور التي تعدل العدد

(4) $ax^2 + bx = c$ — الأموال والجذور التي تعدل العدد

(5) $ax^2 + c = bx$ — الأموال والعدد التي تعدل الجذور

(6) $bx + c = ax^2$ — الجذور والعدد التي تعدل الأموال

Exemple : Résolution d'une équation de degré 2 à l'aide d'un gnomon

Ce gnomon illustre l'équation

$$x^2 + 4x = 96$$

En ajoutant un carré de côté 2, on obtient un carré de côté 10, ce qui permet de justifier l'existence de la solution positive $x = 8$

Séance 3

* Equation de degré trois :

Les mathématiciens arabes tentent de trouver des techniques universelles de résolution utilisant des radicaux, mais leurs efforts se soldent par un échec.

Résoudre les équation de manière approchée en les considérant comme l'intersection de deux coniques.

Cette méthode avait déjà été utilisée par Apollonius dans ses ouvrages sur les coniques.

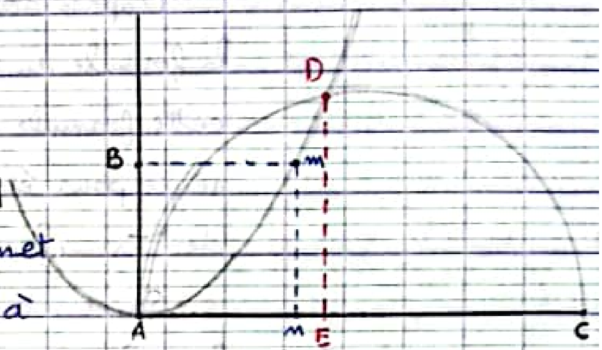
De nombreux mathématiciens arabes, parmi lesquels Al-Khazin (الخازن), Al-Quhi (الكوهي), Abu Al-Jud (أبو الجود), Ibn Al-Laith (ابن الليث), Al-Shanni (الشني), Al-Biruni (البيروني), explorent cette voie.

Cependant, c'est surtout Al-Khayyam qui fait progresser cette approche en l'étudiant de manière systématique. Il classe les équations selon le signe de leurs coefficients et présente une solution positive, lorsque possible, comme étant l'intersection de deux coniques, cherchant ensuite à en déterminer une valeur approximative.

Cette méthodologie est ensuite développée par Sharaf Al-Din Al-Tusi, qui démontre que les solutions peuvent être obtenues en considérant l'intersection de deux coniques parmi une parabole, une hyperbole équilatère et un cercle.

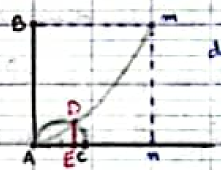
Exemple : Résolution de l'équation $x^3+ax=b$ selon la méthode d'Omar Al-Khayyam :

- $AB^2=a$; $AC\times AB^2=b$.
- ABMN est un carré.
- Le demi-cercle de diamètre [AC] rencontre la parabole, de sommet A, d'axe (AB) perpendiculaire à (AC) et passant par m, en D.
- Le point D se projette orthogonalement sur [AC] en E.
- La distance AE est solution de l'équation.



Ex : $x^3+3x=2$

$AB=\sqrt{3}$; $AC=\frac{2}{3}$



donc : $x=AE\simeq 0,5$

Al-Tusi va au-delà des contraintes d'homogénéité, s'intéresse également au nombre de solutions positives, et ramène les équations à la forme $f(x)=c$.

Il discute également du nombre de solutions en fonction des valeurs maximales prises par la fonction.

Pour trouver ces maximums, il utilise la dérivée formelle du polynôme f, sans toutefois expliquer le raisonnement qui l'a conduit à développer cette dérivation. De plus, il recourt à des changements de variable affines dans le calcul des valeurs approchées des solutions.

Les polynômes :

الكرجي

Al-Karaji est considéré comme le pionnier d'une approche qui émerge à partir du 11e siècle et qui met l'accent sur une "arithmé-tisation des polynômes".

الفخري في الجبر والمقابلة

Dans ses deux ouvrages "Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala", suivi de

البديع في الحساب

"Al-Badi' fi'l-hisab", il établit les règles de multiplication et de division pour les monômes avec des puissances entières positives ou négatives.

Expressions que l'on écrit aujourd'hui sous la forme : $\sum_{K=-m}^{n} a_K x^K$ par analogie avec l'écriture des nombres décimaux : $\sum_{K=-m}^{n} a_K 10^K$

السموأل

D'après son successeur Al-Samaw'al, Al-Karaji aurait démontré la formule du binôme jusqu'à la puissance 12 et aurait suggéré que cette formule pourrait être étendue indéfiniment en utilisant la règle pour établir les coefficients, désormais connue sous le nom de "Triangle de Pascal" : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

Son travail est poursuivi et approfondi par Al-Samaw'al qui donne les règles de calcul sur les monômes, les règles de divisibilité d'un polynôme par un autre et présente des techniques d'approximations d'un quotient de deux polynômes ou d'une racine carrée d'un polynôme.

Il est en effet difficile de définir précisément les apports de chaque individu dans le développement de l'algèbre, notamment en raison de la perte de nombreux manuscrits historiques. Cependant, on sait que cette branche des mathématiques était enseignée dans les universités andalouses jusqu'au 14e siècle. De plus, des traces de symbolisme algébrique, incluant des concepts tels que le calcul, les polynômes et les équations, ont été trouvées dans l'Occident

الغرب

arabe dès le 12e siècle, et plus précisément au Maghreb au 14e siècle. Des mathématiciens comme Ibn Qunfudh, Al-Qalasadi

ابن قنفذ القلصادي

et Ibn Ghazi Al-Miknasi ont contribué à cet héritage, et il semble

ابن غازي المكناسي

que ce symbolisme algébrique élaboré soit une originalité des mathématiques

$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

Al Karaji
↓
Al Samaw'al
↓
Chinois
↓
Italiens
↓
Pascal
(Français)

Un polynôme dont un seul coefficient est non nul de cette région à cette époque.

Nombres
Indien
↓
Arabes

Les nombres :

Plusieurs systèmes de numération ont coexisté dans le monde arabe médiéval.

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 : utilisés à Fès et Cordoue.
- ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ : utilisés à Bagdad.

On trouve chez Al-Khawarizmi comme chez les auteurs indiens des règles opératoires concernant le zéro mais uniquement en tant que symbole dans la numération décimale.

Les coefficients négatifs sont un élément commun dans les polynômes. Ceci a conduit Al-Samaw'al à énoncer des règles de signes similaires à celles présente dans les mathématiques indiennes, tout en maintenant le résultat ou la solution de l'équation dans le domaine des nombres positifs.

Un système de numération décimal multiplico-additif où les 9 unités les 9 dizaines, les 9 centaines et le millier sont identifiés par 28 lettres de l'alphabet arabe pris dans un certain ordre, le jummal :

$$3854 = 3 \times 1000 + 800 + 50 + 4$$

Ce système de numération est associé à un système de calcul mental appelé calcul digital. (en utilisant les articulations)

Dans ce système de numération, il n'existe que 8 types de fractions : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{9}$, les autres s'expriment par produit ou somme de fractions de ce type.

Les fractions dont le dénominateur comporte un facteur premier différent de 2, 3, 5, 7 sont appelées des fractions sourdes, c-à-d inexprimable dont on cherche à fournir une valeur approchée.

L'évolution la plus importante se trouve dans le traitement des quantités irrationnelles qui dès le 10 siècle.

Le nombre rationnel étant "al-adad al-muntica" et l'irrationnel "al-adad al-summa".

Abu Kamil donne-t-il la règle opératoire suivante sur la somme de deux irrationnels quadratiques :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$$

Exemple : Calculer $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+2)+2\sqrt{1\times 2}}$$
$$= \sqrt{1}+\sqrt{2}$$
$$= 1+\sqrt{2}$$

Les irrationnels issus de racines cubiques ou de racines n-ièmes sont calculés de manière approchée et ces approximations sont utilisées dans d'autres calculs pour construire des tables trigonométriques ou approcher π.

Calculs :

La méthode des maisons ou multiplication par jalousies qui est présenté dans l'ouvrage d'Al-Uqlidisi.

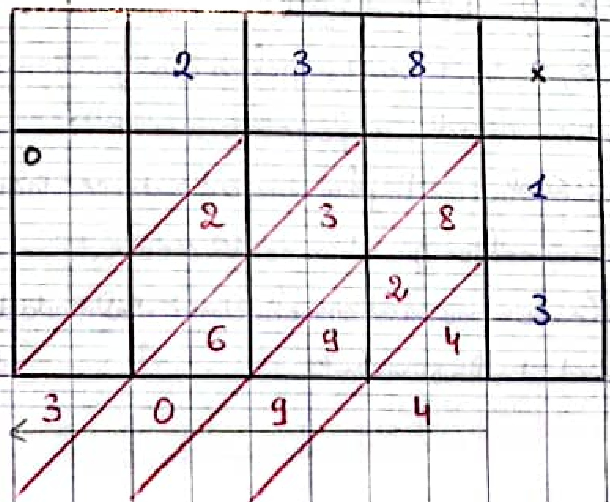
Exemple 1 : Multiplication de 238×13 :

On commence par tracer un tableau de 2 lignes (nombre de chiffres du second facteur) et 3 colonnes (nombre de chiffres du premier facteur).

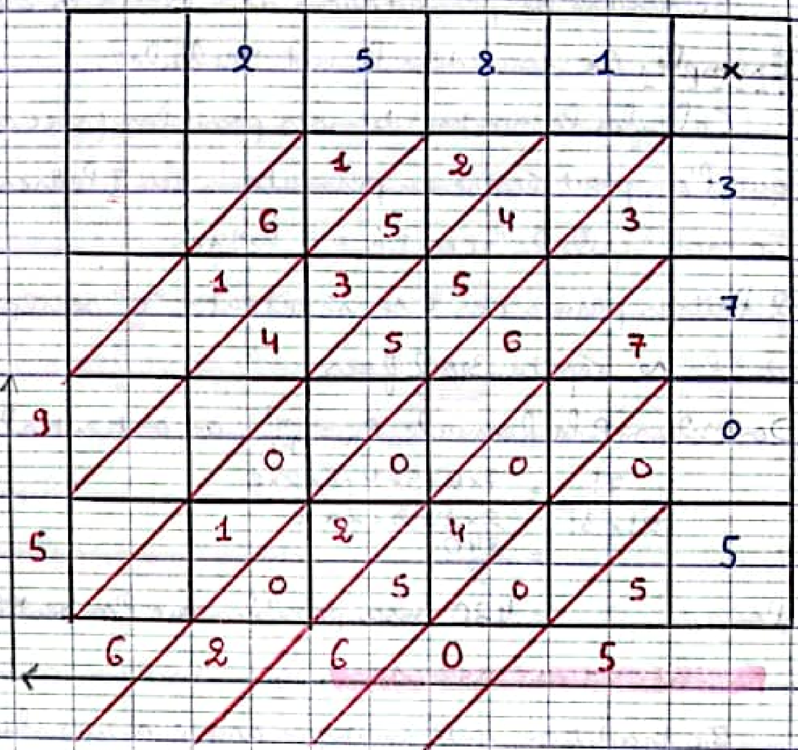
On coupe chaque case en deux selon une diagonale partant de son coin inférieur gauche à son coin supérieur droit.

Au dessus du tableau, on écrit le facteur de 3 chiffres (ici 238) en alignant chacun d'eux avec une colonne.

À la droite du tableau, on écrit le facteur de 2 chiffres (ici 13) en alignant chacun d'eux avec une ligne.



Exemple 2 : Multiplication de 2581 × 3705



* Dénombrement :

Les questions relatives au dénombrement trouvent leur origine dans le domaine de la linguistique, notamment dès le 8e siècle avec Khalil Ibn Ahmed, qui s'interrogeait par exemple sur le nombre de mots de 5 lettres pouvant être formés. Ces études étaient d'une grande utilité pour les lexicographes et les cryptographes.

Au 13e siècle, Nsir Ad-Din Al-Tusi et Ahmad Ibn Mun'im ont approfondi les formules de dénombrement.

Dans son ouvrage "Fiqh Al-Hisab", Ahmad Ibn Mun'im établit notamment les formules suivantes :

Séance 4

- Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n éléments et sans remise est : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- La permutation de n éléments pris parmi n éléments est :

$$n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

- Le cas où il existerait K répétitions d'un même élément parmi n éléments, le nombre de permutation possibles des n éléments doit être rapporté aux nombres de permutations des K éléments identiques.

Le nombre de permutation de n éléments est : $P_n = \frac{n!}{K!}$

Exemple : On considère le mot "cellule".

Calculer le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres.

Le mot "cellule" contient 7 lettres,

2 lettres parmis ces 7 se répètent : "e" se répète deux fois, et "l" se répète trois fois,

En utilisant la formule $P_n = \frac{n!}{K!}$, on obtient alors :

$$\frac{7!}{2! \times 3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{2\times1\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}$$
$$= \frac{840}{2}$$

d'où : $= 420$ mots possibles que l'on peut écrire depuis le mot "cellule"

• La théorie des nombres :

La tradition mathématique arabe a une histoire riche dans l'exploration de la théorie des nombres, s'inspirant des travaux de figures telles qu'Euclide, Diphante et Nicomaque de Gérase.

Dans le "Al-TaKmila Fi-L-Hisab", Ibn Tahir Al-Baghdada a défini les nombres abondants, les nombres déficients, les nombres parfaits et les nombres $\boxed{\text{équivalents}}$:

Deux nombres sont des équivalents lorsque la somme des diviseurs stricts du 1er nombre égale à la somme des diviseurs stricts du 2e.

Ex : 2 et 3 sont équivalents

• Un nombre parfait est un entier naturel égal à la moitié de la somme de ses diviseurs, ou encore à la somme de ses diviseurs stricts.

Par exemple, 6 est un nombre parfait, car ses diviseurs entiers sont 1, 2, 3 et 6, et il vérifie bien : $\frac{1+2+3+6}{2} = \frac{12}{2} = 6$ ou encore $1+2+3 = 6$

• Un nombre déficient est un nombre entier positif pour lequel la somme de tous ses diviseurs stricts est inférieure au nombre lui-même.

Par exemple, 21 est un nombre déficient, car la somme de ses diviseurs stricts est $1+3+7 = 11$, et elle est inférieure à 21.

• Un nombre abondant est un nombre entier positif pour lequel la somme de tous ses diviseurs stricts est supérieure au nombre lui-même.

Par exemple, le nombre 18 est abondant, car la somme de ses diviseurs stricts est $1+2+3+6+9=21$, et elle est supérieure à 18.

Il a proposé une innovation en identifiant le nombre abondant impair (et primitif) le plus bas comme étant 945, une découverte attribuée au mathématicien français du 17e siècle, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac.

Explication : Ibn Tahir innove en avançant que le premier nombre abondant impair est 945.

Il a réfuté également certaines erreurs de Nicomaque de Gerasa, des erreurs qui ont été acceptées comme des vérités par les mathématiciens européens jusqu'au 16e siècle.

* **Analyse numérique :**

Pour résoudre numériquement des équations, les mathématiciens arabes mettent en place des méthodes dont certaines sont issues des mathématiques grecques ou indiennes comme l'extraction de la racine carrée ou de la racine cubique. Le principe consiste à déterminer successivement les chiffres d'une solution en utilisant la propriété suivante : « Si X est une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(X)=N$, et si on pose $x=X+y$ et $g(y)=f(X+y)-f(X)$, alors x est une solution de $f(x)=N$ si et seulement si y est solution de $g(y)=N-f(X)$ »

* **La trigonométrie :**

Les mathématiciens arabes ont également apporté des contribution importantes à la trigonométrie. Ils ont développé des méthodes pour calculer les valeurs des fonctions trigonométriques, ainsi que des techniques pour résoudre des problèmes trigonométriques liés à l'astronomie et à la navigation.

Le désir d'améliorer la précision des tables trigonométriques pousse les mathématiciens arabes à affiner les méthodes d'interpolation. L'interpolation affine était déjà connue des Grecs et la traduction du Khandakhadyaka de Brahmagupta les familiarise avec l'interpolation quadratique.

*** L'astronomie :**

L'astronomie était une discipline hautement développée dans le monde arabo-islamique, étroitement liée aux mathématiques. Les astronomes arabes ont réalisé des observations précises, ont développé des instruments astronomiques sophistiqués et ont élaboré des modèles mathématiques pour prédire les mouvements célestes. Leurs travaux ont eu un impact significatif sur la cartographie, la navigation et le calendrier.

L'astrolabe, basé sur la projection de la sphère céleste et le mouvement du soleil, offrait une multitude de fonctions. Parmi celles-ci, il permettait de déterminer l'heure locale en mesurant la hauteur d'un astre (= céleste); de calculer la hauteur d'un édifice (= bâtiment), d'identifier l'heure de lever ou du coucher des astres, et bien d'autres applications, chaque version étant adaptée à des besoins spécifiques.

La manuscrit médiéval de Qutb-Al-Din Al-Shirazi représentant un modèle planétaire et ses épicycles (فلك التدوير).

Le modèle d'Ibn Al-Shatir pour mouvement de Mercure (عطارد), montrant multiplication des épicycles fondés sur l'hypocycloïde d'Al-Tusi.

Un objet qui de l'univers

Explication : كرة تخيلها الإنسان بشكل قطر متناه ومتحدة المركز مع الأرض ويدور حول نفس المحور

فلك التدوير: نموذج هندسي يفسر اختلافات السرعة والاتجاه في حركة القمر والشمس والكواكب

II- L'évolution historique des thèmes mathématiques :

*** Les problèmes classiques de la géométrie :**

a) La duplication du cube ou problème de Délos :

« à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, est-il possible de construire un cube de volume double ? »

$a = 1\ cm$

$V = 1\ cm^3$

$2V = 2\ cm^3$

$a = \sqrt[3]{2}\ cm$

$1\ cm^3 \rightarrow \sqrt[3]{2}$

*** Origine :**

Le problème de Délos tire son origine d'une légende rapportée par des auteurs tels qu'Ératosthène dans Le Platonicien, et Théon de Smyrne dans son ouvrage Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon. Selon cette légende, les habitants de Délos, confrontés à une épidémie de peste (الطاعون), consultèrent l'oracle (العراف) de Delphes pour trouver un moyen d'y mettre fin. L'oracle répondit qu'ils devaient doubler la taille de l'autel (مذبح) dédié à Apollon autel prenant la forme d'un cube parfait.

Les architectes se tournèrent alors vers Platon pour obtenir des conseils sur la manière de réaliser cette tâche, Platon leur fit remarquer que le Dieu n'avait sûrement pas besoin d'un autel agrandi, mais plutôt qu'il leur reprochait, par le biais de l'oracle, de négliger l'importance de la géométrie.

La question a suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens, dont Hippias d'Élis, Archytas de Tarente, Ménechme, Eudoxe de Cnide, Hélicon de Cyzique et Eutocius d'Ascalon. Plusieurs approches ont été envisagées, notamment celles impliquant l'intersection de coniques ou de figures spatiales. Par exemple, Archytas a suggéré d'utiliser l'intersection entre un cylindre (أسطوانة), un tore (حلقة) et un cône (مخروط).

En 1760, D'Alembert a noté qu'aucune solution plane n'avait été trouvée en utilisant uniquement une règle non graduée et un compas.

Bien qu'il soit possible de construire un cube dont le volume est approximativement le double d'un cube donné, il est impossible de réaliser cette construction de manière exacte uniquement avec une règle non gradué et un compas.

En 1837, le mathématicien français Pierre Wantzel a démontré que la duplication du cube n'était pas possible avec les outils de la géométrie classique (la règle non graduée et le compas).

Elle est cependant possible par d'autres méthodes, telles que l'utilisation de la règle graduée et du compas, ou par pliage de papier.

Sa démonstration reposait sur le fait que la construction d'un tel cube conduirait à la résolution d'une équation de degré 3 (cubique) avec des coefficients entiers, dont il a montré qu'elle était irréalisable à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

* Le théorème de Wantzel :

Le nombre réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite finie de corps ℓ_i telle que :

* $\ell_0 = \mathbb{Q}$
* ℓ_{i+1} est une extension quadratique de ℓ_i pour $0 \leq i < n$
* $a \in \ell_n$

Le théorème de Wantzel est souvent appliqué via le corollaire suivant : « Si a est un entier constructible, le degré de son polynôme minimal est une puissance de 2 ». Cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

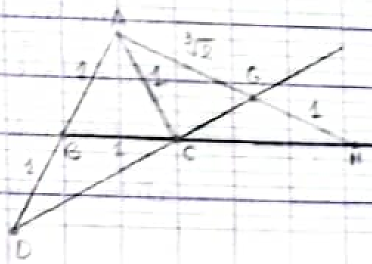
La résolution le problème de la duplication du cube revient à montrer que le nombre $\sqrt[3]{2}$ qui représente le rapport entre les côtés de deux cubes dont le premier a un volume double du second, n'est pas constructible à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. En effet :

* le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $x^3 - 2$
* et comme le polynôme $x^3 - 2$ ne peut pas se décomposer sur $\mathbb{Q}[x]$
* Donc $x^3 - 2$ est de degré 3
* Par suite, d'après le corollaire de Wantzel : $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible

* Construction de $\sqrt[3]{2}$:

_ Construire un triangle équilatéral ABC.

_ Le point D symétrique de A par rapport à B.



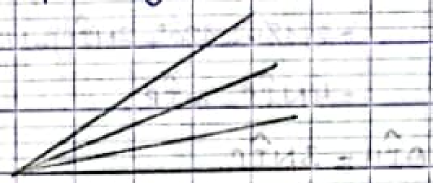
- Tracer la droite (DC).
- De A, mener avec la règle graduée, tracer la droite (AH) de façon qu'elle coupe les droites (DC) en G, et (BC) en H, et que GH soit égale au côté du triangle ABC.

=> Alors : $GA = \sqrt[3]{2}$

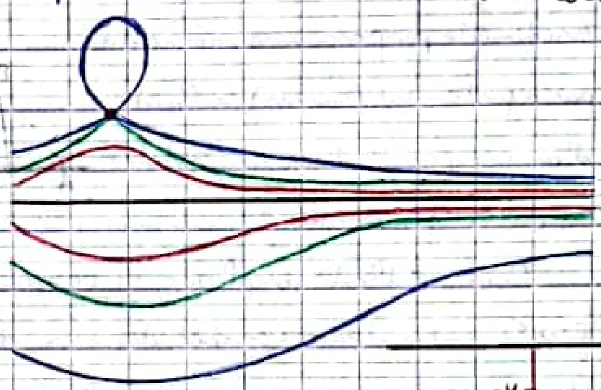
Séance 5

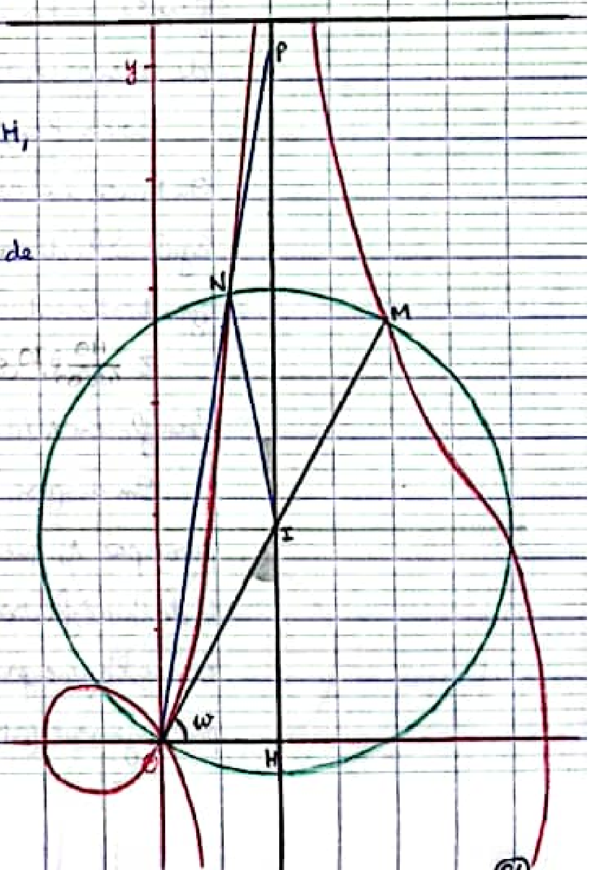
b) La trisection de l'angle :

- « À l'aide d'une règle et d'un compas, est-il possible de sectionner en trois parties égales n'importe quel angle ?



Au 2ème siècle avant J.C, Nicomède utilisa une courbe auxiliaire, la conchoïde de droite pour déterminer la solution : $\left(\rho = \frac{a}{\cos\theta} + d\right)$





- Construire un triangle OHI rectangle en H, tel que l'angle $O\hat{I}H$ est l'angle à trisecter.
- Construire la concoïde de la droite (IH) de pôle O et de module OI.
- on pose $I\hat{O}H = \omega$.
- on aura alors : $a = OH$ et $d = OI = \frac{a}{\cos\omega}$
- Donc l'équation de la conchoïde est :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{a}{\cos\omega}$$

- Construire le cercle de centre I passant par O.
- Soit M et N les points d'intersection de la

courbe et le cercle.

- Montrer que l'angle $N\hat{I}P$ est le tiers de l'angle $O\hat{I}H$.

1er méthode :

$O\hat{I}H = 180° - \underbrace{O\hat{I}N} - N\hat{I}P$

$= 180° - 180° + 2O\hat{N}I - N\hat{I}P$

$= 2\underbrace{O\hat{N}I} - N\hat{I}P$

$= 2(180° - \underbrace{I\hat{N}P}) - N\hat{I}P$

$= 2(180° - 180° + 2N\hat{I}P) - N\hat{I}P$

$= 4N\hat{I}P - N\hat{I}P$

$O\hat{I}H = 3N\hat{I}P$

2ème méthode :

$O\hat{I}H = y\hat{O}I$

$= \underbrace{y\hat{O}N} + N\hat{O}I$

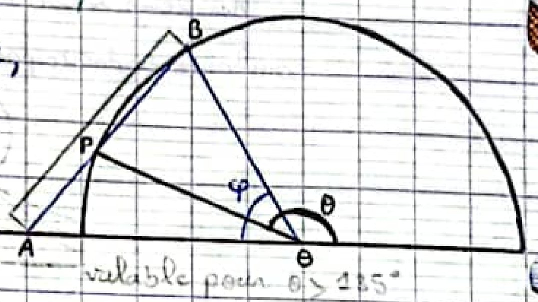
$= \underbrace{N\hat{P}I} + \underbrace{N\hat{O}I}$

$= N\hat{I}P + O\hat{N}I$

$= N\hat{I}P + 2N\hat{I}P$

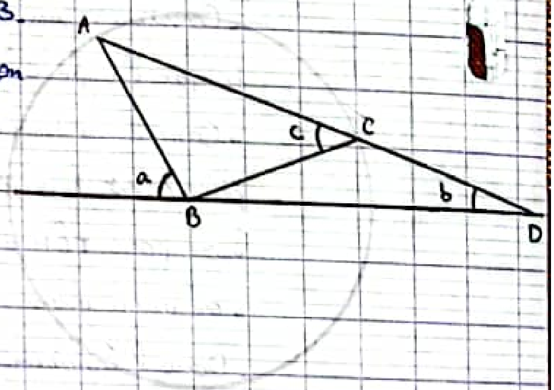
$O\hat{I}H = 3N\hat{I}P$

Dès le 3ème siècle avant J.C, Archimède proposa une méthode par ajustement (neusis), à l'aide d'un compas et d'une règle dotée de deux graduations.



Cette méthode implique la construction d'un segment de longueur fixée entre deux courbes données, de telle sorte que la droite support de ce segment passe par un point fixé.

Soit a l'angle à trisecter, de sommet B. On trace un cercle de centre B et de rayon égal à la distance séparant les deux graduation de la règle (soit r).



Ce cercle coupe l'un des côtés de l'angle en A (donc AB = r).

On dispose la règle de façon qu'elle passe par A, que l'une des graduations C de la règle soit disposée sur le cercle et que l'autre graduation D soit sur le prolongement (BD) de l'autre côté de l'angle (donc $CD = r$).

- Montrer que b de sommet D est le tiers de l'angle a.

Méthode 1 : $a = 180 - \underbrace{\widehat{ABC}} - b$

$= 180 - (180 - 2c) - b$

$= 2\underbrace{c} - b$

$= 2(180 - \underbrace{\widehat{BCD}}) - b$

$= 2(180 - (180 - 2b)) - b$

$= 4b - b$

$a = 3b$

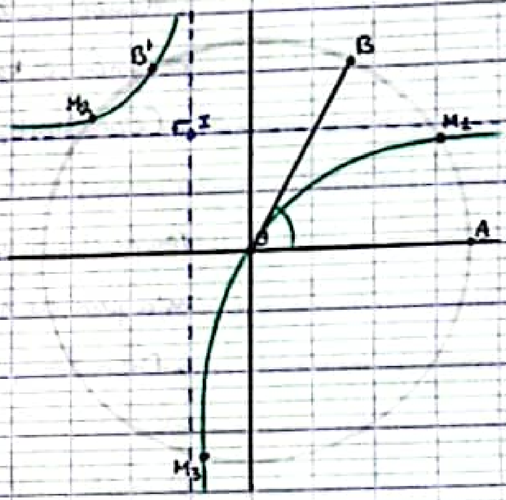
Méthode 2 : $\begin{cases} \widehat{ABC} = 180 - 2c \\ \widehat{ABC} = 180 - a - b \\ c = 180 - \widehat{BCD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ c = 180 - (180 - 2b) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2c - b \\ c = 2b \end{cases}$

$\Rightarrow a = 4b - b$

$\Rightarrow a = 3b$

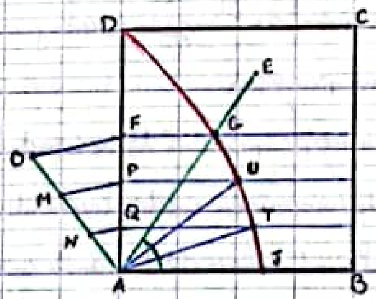
Depuis 4e siècle, Pappus d'Alexandrie détaille plusieurs approches de trisection en utilisant des intersections de cercles et d'hyperboles dans ses Collections mathématiques.



Les mathématiciens arabes ont également développé de nombreuses techniques de trisection, parmi lesquelles Al-Sijzi, qui propose une méthode de trisection utilisant un cercle et une hyperbole équilatère dans son traité de la trisection de l'angle rectiligne.

Différentes méthodes ont également été exploitées dans ce contexte, on peut mentionner :

- La quadratrice d'Hippias ;



- La trisectrice de Maclaurin ;

En 1837, le mathématicien français Pierre Wantzel a démontré que la trisection de l'angle n'était pas réalisable avec les seuls outils de la géométrie classique.

En effet :

- Considérons la tâche de construire à partir du point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$, où θ est l'angle à triséquer, le point de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ avec $\theta = 3\alpha$.
- En utilisant la formule trigonométrique.
- On a : $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- Donc $\cos\alpha$ doit être une solution de l'équation $4x^3 - 3x = a$, avec $a = \cos\theta$.
- Ainsi, la trisection de l'angle θ est réalisable si et seulement si le polynôme $4x^3 - 3x - a$ est réductible sur $\mathbb{Q}(a)$.
- Cependant, si a est transcendant (on dit que $a \in \mathbb{R}$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ s'il n'existe pas de polynôme non nul à coefficients entiers relatifs P tel que $P(a) = 0$) (en particulier si θ est algébrique non nul), cela signifie que le polynôme n'a pas de racine rationnelle et donc qu'il est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
- De même, même si a est algébrique (non transcendant / on dit que $a \in \mathbb{R}$ est algébrique de degré $d \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$ s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d tel que $P(a) = 0$ et si pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}_{d-1}[X] \setminus \{0\}$, $Q(a) \neq 0$), cela ne garantit pas toujours que le polynôme sera réductible.

En outre, d'autre méthode reposent sur l'utilisation de mécanisme articulés, une approche souvent plus pratique pour élaborer des schémas ou construire des composants mécaniques.

Par exemple le trisecteur de Laisant :

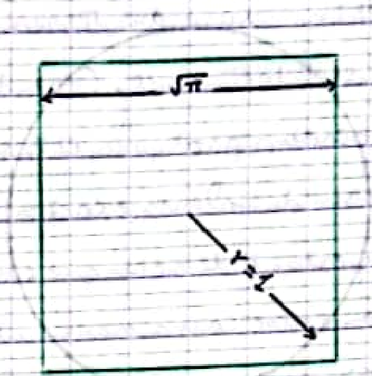
- En 1874, Brocard avait publié un mémoire sur divers problèmes de géométrie qui abordait la trisection de l'angle, soulignant ainsi l'importance d'avoir un instrument trisecteur pratique.
- Inspiré par ce travail, Laisant propose à Brocard l'idée d'un compas articulé simple permettant de réaliser cette trisection.
- Brocard présente cet outil le 31 mars 1875 à la société mathématique de

France.

D'autres exemples : le trisecteur de Kempe, le trisecteur de Sylvester, ...

c) Quadrature du cercle :

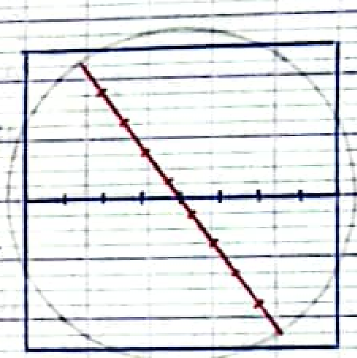
« À l'aide d'une règle et d'un compas, est-il possible de construire un carré dont l'aire égale celle d'un disque ? »



Ce problème mathématique a été le plus difficile à résoudre pour les mathématiciens, nécessitant plus de trois millénaires d'étude. Il a été officiellement reconnu comme insoluble par Ferdinand von Lindemann en 1882.

La résolution de la quadrature du cercle impliquerait la construction à la règle et au compas de la racine carré du π, ce qui s'avère impossible en raison de la transcendance de π.

• L'origine :



Les anciennes civilisations agraires de l'Orient, telles que les Babyloniens et les Égyptiens, avaient recours à des méthodes empiriques pour évaluer les surfaces circulaires. Leurs approches reposaient sur des approximations et des règles pratiques plutôt que sur des calculs mathématiques rigoureux.

Le papyrus Rhind, rédigé vers 1650 avant J.C, est l'un des exemples les plus célèbres de ces méthodes. Ce document contient de nombreux problèmes mathématiques et problèmes pratiques, y compris des questions liées à la géométrie et à la mesure des terres.

Un des problèmes donnés dans le papyrus Rhind compare la surface d'un carré de côté 8 à celle d'un cercle de diamètre 9, ce qui conduit à une estimation de π comme étant environ égal 3,16.

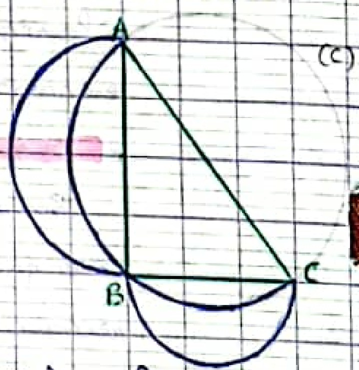
Ces approximations étaient souvent basées sur des observations empiriques et des règles pratiques qui étaient le fruit d'une longue pratiq

Par exemple, les Égyptiens avaient des connaissances avancées en géométrie et en mesure des terres, nécessaires pour leurs travaux agricoles et architecturaux. Cependant, ces estimations étaient suffisantes pour leurs besoins pratiques et économiques, et ils n'avaient pas nécessairement besoin de valeurs exactes comme celles que nous utilisons aujourd'hu

Il est important de noter que ces civilisations ne faisaient pas toujours la distinction entre connaissance utile et connaissance exacte, et leurs méthodes étaient souvant basées sur des règles de pouce et des approximations.

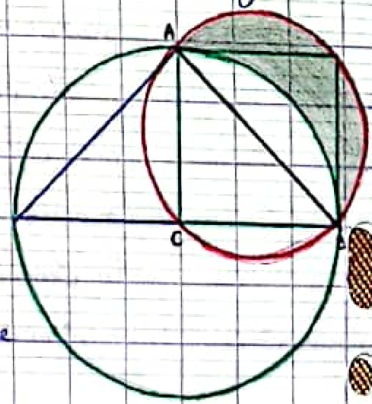
Cependant, ces connaissances empiriques ont jeté les bases de développements mathématiques ultérieurs, qui ont finalement conduit à une meilleure compréhension de concepts comme π et la géométrie des cercles.

La découverte de la lunule d'Hippocrate par Hippocrate de Chios vers 440 avant J.C, fut une avancée importante dans le domaine de la géométrie. Cette découverte démontrait que même certaines lignes courbes fermées pouvaient être exactement quadrées.



Soit le triangle ABC rectangle en B, et (C) le cercle circonscrit à ABC. Alors la somme des aires L_{AB} et L_{BC} est égale à l'aire du triangle ABC.

La lunule d'Hippocrate est une forme géométrique constituée de deux arcs de cercle se rejoignant à leurs extrémités pour former une sorte de croissant ou de lunule. Hippocrate a montré que cette lunule pouvait être exactement quadrée, c-à-d qu'un carré de



même aire pourrait être construit à l'intérieur de la lunule.

L'approche d'Hippocrate s'est basée sur l'axiome selon lequel les surfaces de deux segments circulaires sont dans le même rapport que les carrés de leurs cordes. En utilisant cette idée, il a construit une méthode pour quadrer exactement la lunule, en construisant des carrés dont les aires étaient proportionnelles aux aires des segments circulaires correspondants.

Cependant, il est important de noter que cette découverte ne signifiait pas nécessairement que la quadrature du cercle était résolue.

En effet, seules des lunules particulières, celles construites sur le côté d'un carré, étaient exactement quarrables selon la méthode d'Hippocrate.

Une autre méthode pour approximer l'aire d'un cercle en inscrivant et circonscrivant des polygones réguliers autour du cercle.

Cette méthode est une forme d'approximation qui repose sur le principe que plus le nombre de côtés des polygones est grand, plus ils se rapprochent de la forme du cercle. En prenant la valeur moyenne entre les périmètres des polygones inscrits et circonscrits, Bryson d'Héraclée a proposé une approximation de la circonférence du cercle.

Antiphon a proposé d'inscrire des polygones réguliers (par exemple des hexagones, des octogones, ...) à l'intérieur du cercle.

En augmentant le nombre de côtés du polygone, on se rapproche de plus en plus de la forme du cercle.

Bryson d'Héraclée a affiné la méthode en ajoutant des polygones réguliers circonscrits autour du cercle.

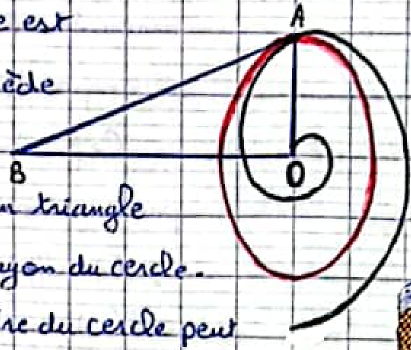
Ces polygones réguliers circonscrits ont le même nombre de côtés que les polygones inscrits correspondants.

En comparant les périmètres des polygones inscrits et circonscrits à celui du cercle, on peut obtenir une approximation de la circonférence du cercle.

Bryson d'Héraclée a ensuite pris la valeur moyenne entre les périmètres des polygones inscrits et circonscrits comme une estimation de la circonférence du cercle.

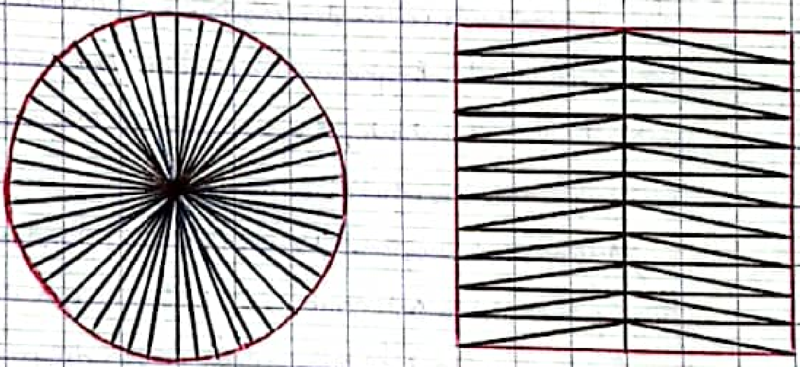
même avec un grand nombre de côtés, les polygones restent des formes polygonales, ce qui signifie que l'approximation de la circonférence du cercle obtenue avec cette méthode est toujours une estimation.

Le problème de la quadrature du cercle est devenu plus célèbre à l'époque d'Archimède (3e siècle avant notre ère), qui a montré que l'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle équilatéral dont la hauteur est égale au rayon du cercle.



Bien qu'Archimède ait prouvé que l'aire du cercle peut être encadrée entre les aires de polygones réguliers inscrits et circonscrits, il n'a pas fourni une solution exacte au problème.

La quadrature proposée par Francon de Liège : diviser le cercle en 44 secteurs, puis les recoller pour recomposer un rectangle.



Albrecht Dürer : « Dessine un quadrilatère et divise sa diagonale en dix parties. Trace ensuite un cercle dont le diamètre comporte huit de ces parties, dont la quadrature en comporte dix, ainsi que je l'ai représenté ci-dessous. »

La fascination pour la quadrature du cercle a persisté à travers les siècles, malgré le fait que les mathématiciens ont réalisé qu'il était impossible de résoudre le problème avec les seules constructions à la règle et au compas.

En 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré que π est un nombre transcendant, ce qui signifie que le cercle ne peut pas être quadraté de manière exacte à l'aide de constructions géométriques élémentaires.

Malgré cette preuve, le problème de la quadrature du cercle continue de fasciner et d'inspirer les mathématiciens, les amateurs de mathématiques et les philosophes, et il est parfois utilisé comme un exemple de la manière dont les problèmes non résolus peuvent persister dans l'histoire des math-ématiques.