Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes,

On définit $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ la distance entre $z_1$ et $z_2$

**Preuve :**

Voir le TD

---

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = Re(z) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = Im(z)$$

**Preuve :**

$\Rightarrow$/ Supposons que $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |Re(z_n) - Re(z)| \leqslant |z_n - z|$

donc, d'après le théorème de Gendarme :

$$\lim_{n\to+\infty} |Re(z_n) - Re(z)| = 0$$

alors : $\lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = Re(z)$

de la même manière :

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |Im(z_n) - Im(z)| \leqslant |z_n - z|$

donc, d'après le théorème de Gendarme :

$$\lim_{n\to+\infty} |Im(z_n) - Im(z)| = 0$$

alors : $\lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = Im(z)$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = Re(z)$ et $\lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = Im(z)$

on a, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n - z|^2 = (Re(z_n) - Re(z))^2 + (Im(z_n) - Im(z))^2$

par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - z|^2 = 0$$

alors : $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$

---

Les règles du calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables

Preuve :

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites dans $\mathbb{C}$ avec :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

• **Somme :**

On a. $\forall \varepsilon>0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $\varepsilon > 0$

on pose : $n = \max(n_1, n_2)$

donc, pour tout $n \geq n$

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a+b)| &= |a_n + b_n - a - b| \\
&= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

donc : $\forall \varepsilon>0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n \quad |(a_n+b_n) - (a+b)| < \varepsilon$

alors : $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$

• **Différence :**

On a : $\forall \varepsilon>0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $\varepsilon > 0$

on pose : $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$

donc, pour tout $n \geqslant \eta$

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |a_n - b_n - a + b| \\ &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\leqslant |a_n - a| + |b - b_n| \\ &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \eta \quad |(a_n - b_n) - (a - b)| \leqslant \varepsilon$

alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = a - b$

- Produit :

on a : la suite $(b_n)$ converge vers b

d'où : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leqslant M$

et on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \eta_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \eta_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$

Soit $\varepsilon > 0$

on pose : $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$

donc, pour tout $n \geqslant \eta$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &= |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)| \\ &\leqslant |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \end{aligned}$$

$$\leq |a_n - a| M + |a| |b_n - b|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \varepsilon$$

donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad |a_n b_n - ab| < \varepsilon$

alors $\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = ab$

• <u>Quotient:</u>

on a: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{4|a|}$

d'où (pour $\varepsilon = \frac{2|a|}{|b|} > 0$) $\exists \eta_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta_2 \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$$\Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$,

on pose: $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$

donc, pour tout $n \geq \eta$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|} |a_n b - a b_n|$$
$$= \frac{1}{|b_n||b|} |(a_n - a) b + a(b - b_n)|$$
$$\leq \frac{1}{|b_n||b|} |a_n - a| |b| + \frac{1}{|b_n||b|} |a| |b - b_n|$$
$$\leq \frac{1}{|b_n|} |a_n - a| + \frac{|a|}{|b_n||b|} |b - b_n|$$
$$< \frac{2}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon |b|}{4} + \frac{2|a|}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{4|a|}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \varepsilon$$

donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$

alors: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

---

• $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ si et seulement si $\frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Preuve:

$\Rightarrow$/ Supposons que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$

c-à-d: $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

on a: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \quad |z_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \quad z_n \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$

on pose: $\eta = \max(N_1, N_2)$

donc, pour tout $n \geq \eta$

$$\left|\frac{1}{z_n}\right| = \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon$$

donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad \left|\frac{1}{z_n}\right| < \varepsilon$

alors. $\frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on a: $\forall A > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad \left|\frac{1}{z_n}\right| < \frac{1}{A}$

c-à-d $\forall A > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad \frac{1}{|z_n|} < \frac{1}{A}$

d'où $\forall A > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq \eta \quad |z_n| > A$

donc $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$

• $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ implique $z_n + w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$

Preuve:

On a: $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Soit $A>0$,

on a $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 \quad |w_n - a| < 1$

d'où $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 \quad |w_n| > a - 1$

et on a $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2 \quad |z_n| > A + a - 1$

on pose : $N = \max(N_1, N_2)$

donc, pour tout $n \geqslant N$

$$\begin{aligned} |z_n + w_n| &\geqslant \big| |z_n| - |w_n| \big| \\ &\geqslant |z_n| - |w_n| \\ &> A + \cancel{a} - \cancel{1} - \cancel{a} + \cancel{1} \end{aligned}$$

donc $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad |z_n + w_n| > A$

alors $(z_n + w_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

- $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$ et $w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \neq 0$ implique $z_n w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

Preuve :

on a $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$ et $w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \neq 0$

Soit $A > 0$

on a $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 \quad |w_n - a| < \frac{a}{2}$

d'où, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 \quad |w_n| > \frac{a}{2}$

et on a $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2 \quad |z_n| > \frac{2A}{a}$

on pose $N = \max(N_1, N_2)$

donc, pour tout $n \geqslant N$

$$\begin{aligned} |z_n w_n| &= |z_n| \, |w_n| \\ &> \frac{\cancel{2}A}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \\ &> A \end{aligned}$$

donc $\forall A>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad |z_n w_n| > A$

alors $z_n w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

Quand la limite existe, elle est unique.

Preuve :

Soit $f$ une fonction complexe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

Supposons que $f$ admet $l$ et $l'$ comme limites en $z_0$ tels que $l \neq l'$

Soit $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{4} > 0$

$\exists \delta_1 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z-z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z)-l| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z-z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z)-l'| < \varepsilon$

on pose : $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-z_0| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|l-l'| &= |l-f(z)+f(z)-l'| \\
&\leq |l-f(z)| + |f(z)-l'| \\
&\leq |f(z)-l| + |f(z)-l'| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon \\
&< 2 \cdot \frac{|l-l'|}{4}
\end{aligned}
$$

d'où $|l-l'| < \frac{|l-l'|}{2}$ "Absurde

alors $l = l'$

Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit, et d'un rapporteur de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe.

Preuve :

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $z_0$ avec

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = \ell'$$

• Somme :

on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $\varepsilon > 0$

on pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |(f+g)(z) - (\ell + \ell')| &= |f(z) + g(z) - \ell - \ell'| \\ &= |(f(z) - \ell) + (g(z) - \ell')| \\ &\leq |f(z) - \ell| + |g(z) - \ell'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |(f+g)(z) - (\ell + \ell')| < \varepsilon$

alors, $\lim_{z \to z_0} (f+g)(z) = \ell + \ell'$

• Produit :

on a la fonction $g$ possède une limite finie en $z_0$

d'où, $\exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C} \quad |g(z)| \leq M$

Scanné avec CamScanner

et on a $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall z\in\mathbb{C}$ $|z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2M}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_2>0, \forall z\in\mathbb{C}$ $|z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(z)-\ell'|<\frac{\varepsilon}{2|\ell|}$

Soit $\varepsilon>0$

on pose $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|<\delta$

$$\begin{aligned}
|(fg)(z)-\ell\ell'| &= |f(z)g(z)-\ell\ell'| \\
&= |f(z)g(z)-\ell g(z)+\ell g(z)-\ell\ell'| \\
&= |(f(z)-\ell)g(z)+\ell(g(z)-\ell')| \\
&\leq |f(z)-\ell||g(z)|+|\ell||g(z)-\ell'| \\
&\leq |f(z)-\ell|M+|\ell||g(z)-\ell'| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+|\ell|\frac{\varepsilon}{2|\ell|} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

donc $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta \Rightarrow |(fg)(z)-\ell\ell'|<\varepsilon$

alors $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=\ell\ell'$

- <u>Rapporteur</u>:

on a $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-\ell|<\frac{\varepsilon|\ell'|}{4}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_2>0, \forall z\in\mathbb{C}, |z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(z)-\ell'|<\frac{\varepsilon|\ell'|^2}{4|\ell|}$

d'où (pour $\varepsilon=\frac{2|\ell|}{|\ell'|}>0$) $\exists \delta_2>0, \forall z\in\mathbb{C}$ $|z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(z)|>\frac{|\ell'|}{2}$

Soit $\varepsilon>0$

on pose $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|<\delta$

Scanné avec CamScanner

$$\left|\left(\frac{f}{g}\right)(z)-\frac{\ell}{\ell'}\right| = \left|\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{\ell}{\ell'}\right|$$
$$= \frac{1}{|g(z)||\ell'|}\left|f(z)\ell' - \ell g(z)\right|$$
$$= \frac{1}{|g(z)||\ell'|}\left|(f(z)-\ell)\ell' + \ell(\ell'-g(z))\right|$$
$$\leq \frac{1}{|g(z)||\ell'|}|f(z)-\ell||\ell'| + \frac{1}{|g(z)||\ell'|}|\ell||\ell'-g(z)|$$
$$\leq \frac{1}{|g(z)|}|f(z)-\ell| + \frac{|\ell|}{|g(z)||\ell'|}|g(z)-\ell'|$$
$$< \frac{2}{|\ell'|}\cdot\frac{\varepsilon|\ell'|}{4} + \frac{2|\ell|}{|\ell'|^2}\cdot\frac{\varepsilon|\ell'|^2}{4|\ell|}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \varepsilon$$

donc $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall z\in\mathbb{C} \quad |z-z_0|<\delta \Rightarrow \left|\left(\frac{f}{g}\right)(z)-\frac{\ell}{\ell'}\right|<\varepsilon$

alors $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{\ell}{\ell'}$

---

• Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\ell$ alors $\lim\limits_{z\to z_0}\overline{f(z)}=\overline{\ell}$

Preuve :

on a $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\ell$

d'où $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall z\in\mathbb{C} \quad |z-z_0|<\eta \Rightarrow |f(z)-\ell|<\varepsilon$

Soit $\varepsilon>0$

pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|<\eta$,

$$|\overline{f(z)}-\overline{\ell}| = |\overline{(f(z)-\ell)}|$$
$$= |f(z)-\ell|$$
$$<\varepsilon$$

donc $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall z\in\mathbb{C} \quad |z-z_0|<\eta \Rightarrow |\overline{f(z)}-\overline{\ell}|<\varepsilon$

alors $\lim\limits_{z\to z_0}\overline{f(z)}=\overline{\ell}$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \iff \lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(\ell)$ et $\lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(\ell)$

Preuve :

$\Rightarrow$/ Supposons que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$

on a : $0 \leq |Re(f(z)) - Re(\ell)| \leq |f(z) - \ell|$

$0 \leq |Im(f(z)) - Im(\ell)| \leq |f(z) - \ell|$

donc, d'après le théorème de Gendarme

$$\lim_{z \to z_0} |Re(f(z)) - Re(\ell)| = 0 \text{ et } \lim_{z \to z_0} |Im(f(z)) - Im(\ell)| = 0$$

alors
$$\lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(\ell) \text{ et } \lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(\ell)$$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(\ell)$ et $\lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(\ell)$

on a $0 \leq |f(z) - \ell| \leq |Re(f(z)) - Re(\ell)| + |Im(f(z)) - Im(\ell)|$

donc, d'après le théorème de Gendarme

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = 0$$

alors
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$$

---

Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $z_0 \in E$ et $f : E \to \mathbb{C}$

Les énoncés suivants sont équivalentes :

1/ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{(\varepsilon, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \ |z - z_0| < n_{(\varepsilon, z_0)} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

2/ Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $E$ convergeant vers $z_0$,
la suite $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$

3/ L'image réciproque de tout ouvert de $f(E)$ est un ouvert de $E$

Preuve :

1/ $\Rightarrow$ 2/ Supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{(\varepsilon, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \ |z - z_0| < n_{(\varepsilon, z_0)}$
$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $z_0$

donc $\forall \varepsilon' > 0, \exists N_{(\varepsilon', z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{(\varepsilon', z_0)} \quad |z_n - z_0| < \varepsilon'$

on prend $\varepsilon' = \eta_{(\varepsilon, z_0)}$

d'où : $\exists N_{(\varepsilon, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{(\varepsilon, z_0)} \quad |z_n - z_0| < \eta_{(\varepsilon, z_0)} \Rightarrow |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{(\varepsilon, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{(\varepsilon, z_0)} \quad |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$

alors $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $f(z_0)$

2/ => 3/ Supposons que pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E$ convergeant vers $z_0$, la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $f(E)$

on pose $V = f^{-1}(\mathcal{U})$

montrons que $V$ est un ouvert de $E$

Soit $z_0 \in V$

d'où $f(z_0) \in \mathcal{U}$

donc $\exists r > 0 \quad B(f(z_0), r) \subset \mathcal{U}$

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $z_0$

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{(\varepsilon, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{(\varepsilon, z_0)} \quad |z_n - z_0| < \varepsilon$

la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$

donc : $\forall \varepsilon' > 0, \exists N'_{(\varepsilon', z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'_{(\varepsilon', z_0)} \quad |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon'$

pour $\varepsilon' = r > 0$

$\exists N'_{(r, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'_{(r, z_0)} \quad f(z_n) \in B(f(z_0), r) \subset \mathcal{U}$

$\exists N'_{(r, z_0)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'_{(r, z_0)} \quad f(z_n) \in \mathcal{U}$

donc $\exists N_{(\varepsilon,z_0)} \in \mathbb{N}, \forall z_n \in B(z_0, N_{(\varepsilon,z_0)})$ $f(z_n) \in \mathcal{U}$

$\exists N_{(\varepsilon,z_0)} \in \mathbb{N}, \forall z_n \in B(z_0, N_{(\varepsilon,z_0)})$ $z_n \in f^{-1}(\mathcal{U})$

d'où : $B(z_0, N_{(\varepsilon,z_0)}) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$

$B(z_0, N_{(\varepsilon,z_0)}) \subset V$

d'où : $V$ est un voisinage de $z_0$

et puisque $z_0$ est un point arbitraire de $V$

donc $V$ est un voisinage de chaqu'un de ces points

alors $V$ est un ouvert de $E$

3/ => 1/ Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de $f(E)$ est un ouvert de $E$

Soit $\varepsilon > 0$

on considère $\mathcal{U} = B(f(z_0), \varepsilon)$ dans $f(E)$

donc $V = f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de $E$

Soit $z_0 \in V$

d'où $\exists r > 0,\ B(z_0, r) \subset V \Rightarrow f(B(z_0, r)) \subset \mathcal{U}$

Supposons que $|z - z_0| < n_{(\varepsilon,z_0)} \Rightarrow z \in B(z_0, n_{(\varepsilon,z_0)})$

on pose $n_{(\varepsilon,z_0)} = r$

donc, $z \in B(z_0, r)$

d'où : $f(z) \in \mathcal{U} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{(\varepsilon,z_0)} \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < n_{(\varepsilon,z_0)} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient) sont les même que celles utilisées en analyse réelle.

Preuve :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$,

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables en $z_0$

- Somme :

on a : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)+g(z)-(f(z_0)+g(z_0))}{z-z_0}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \left( \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \right)$

d'où : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)+g'(z_0)$

donc : $f+g$ est dérivable en $z_0$, et :

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$$

- Produit :

on a : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z)+f(z_0)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \frac{(f(z)-f(z_0))g(z)+f(z_0)(g(z)-g(z_0))}{z-z_0}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \left( \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \right)$

d'où : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{(fg)(z)-(fg)(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$

donc : $fg$ est dérivable en $z_0$, et :

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

- Quotient : on suppose dans ce cas que $g(z_0) \neq 0$,

on a : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(z)-\left(\frac{f}{g}\right)(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z-z_0}$

Scanné avec CamScanner

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \cdot \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \cdot \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0) + f(z_0)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \cdot \frac{(f(z) - f(z_0))g(z_0) - f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= \frac{1}{g(z_0)g(z_0)} \left( f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0) \right)$$

d'où : $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\left(\frac{f}{g}\right)(z) - \left(\frac{f}{g}\right)(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

donc : $\frac{f}{g}$ est dérivable en $z_0$, et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

---

- Toute fonction dérivable sur $\mathbb{C}$ est continue

Preuve :

Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{C}$,

d'où : $f$ est dérivable en tout point de $\mathbb{C}$,

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$,

on a : $f$ est dérivable en $z_0$,

de plus : $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$

$$= f'(z_0)(z_0 - z_0)$$

$$= 0$$

d'où : $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$

donc : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

alors : $f$ est continue en $z_0$

• La réciproque est fausse.

Preuve :

on considère la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \bar{z}$$

on a : $f$ est continue sur $\mathbb{C}$

d'autre part :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$,

on a : $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0+h} - \bar{z}_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } Re(h) = 0 \\ 1. & \text{si } Im(h) = 0 \end{cases}$$

donc : $f$ n'est pas dérivable en $z_0$

alors : $f$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$

---

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $U$, alors :

1/ $f+g$ est holomorphe sur $U$

2/ $fg$ est holomorphe sur $U$

3/ $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus A$ avec $A = \{z \in \mathbb{C} / g(z) = 0\}$

4/ si $f$ est holomorphe au voisinage de $z_0$, et $g$ est holomor-phe au voisinage de $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est holomorphe au voisinage de $z_0$

5/ Les règles usuelles de dérivation s'appliquent:

$(f+g)' = f' + g'$ ; $(fg)' = f'g + fg'$ ; $(\lambda f)' = \lambda f'$ ; $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ; $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$

Preuves:

1/ on a: $f$ et $g$ sont holomorphe sur $\mathcal{U}$

d'où: $f$ et $g$ sont dérivables en tout point de $\mathcal{U}$

Soit $z_0 \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) + g(z) - f(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= f'(z_0) + g'(z_0)$$

d'où: $f+g$ est dérivable en $z_0$

donc: $f+g$ est dérivable en tout point de $\mathcal{U}$

alors: $f+g$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$

2/ on a: $f$ et $g$ sont holomorphe sur $\mathcal{U}$

d'où: $f$ et $g$ sont dérivables en tout point de $\mathcal{U}$

Soit $z_0 \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))g(z) + f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left( \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \right)$$
$$= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

d'où : $fg$ est dérivable en $z_0$

donc : $fg$ est dérivable en tout point de $U$

alors : $fg$ est holomorphe sur $U$

3/ on a : $f$ et $g$ sont holomorphes sur $U$

d'où : $f$ et $g$ sont dérivable en tout point de $U$

Soit $z_0 \in U \setminus A$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(z) - \left(\frac{f}{g}\right)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \cdot \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \frac{(f(z)-f(z_0))g(z_0) - f(z_0)(g(z)-g(z_0))}{z-z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left( \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \right)$$
$$= \frac{1}{(g(z_0))^2} \left( f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0) \right)$$
$$= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

d'où : $\frac{f}{g}$ est dérivable en $z_0$

donc : $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point de $U \setminus A$

alors : $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur $U \setminus A$