Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Série d'exercices: Intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 1. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ on réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si pour tout segment $[a,b] \subset I$ la restriction de f à $[a,b]$ est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur I.*

Exercice 2. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J\times I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ avec $x \in J$.*

1. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites:*
   - i) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J,*
   - ii) *pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
   - iii) *pour tout $[a,b] \in J$, il existe une fonction φ positive et intégrable sur I telle que :*
   $$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$
   - (a) *Montrer que F est bien définie sur J.*
   - (b) *Montrer que F est continue sur J.*
2. *Soit c un réel ou infini, adhèrent à J. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*
   - i) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ a une limite $l(t)$ quand $x \to c$, de plus la fonction l est continue par morceaux sur I,*
   - ii) *pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
   - iii) *il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*
   $$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$
   - (a) *Si c est un réel, montrer que $\lim\limits_{x\to c} \int_I f(x,t)dt = \int_I l(t)dt$.*
   - (b) *Vérifier la question (1) si $c = +\infty$.*

Exercice 3. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x} e^{-x} dx$.*

1. *Montrer que :* $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leq t$.
2. *Justifier l'existence de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.*

Exercice 4. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n e^{\frac{t}{2}} dt$.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $1_{[0,n]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$ et l'on considère

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-\frac{t}{n})^n e^{\frac{t}{2}} 1_{[0,n]}. \end{array}$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2$.*

Exercice 5.
Soit p et q deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $]0,1]$ par:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q}.$$

1. *Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.*
2. a) *Montrer que:* $\forall x \in]0,1],\ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *avec* $u_n(x) = (-1)^n x^{nq+p-1}$.
   b) *Montrer que u_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   c) *Posons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. Vérifier que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\ |S_n(x)| \leq 2f(x).$$

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$.

Exercice 6.

1. *Montrer que:* $\forall x > 0,\ \dfrac{\cos(x)}{1+e^x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x)$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $u_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x)$.

2. *En appliquant le T.C.D, montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.

3. *Quelle est la nature de la série* $\sum \int_{]0,+\infty[} |u_n|$*? Le théorème d'integration terme à terme s'applique-t-il à la série* $\sum u_n$ *sur* $]0,+\infty[$*?*

Exercice 7.

Pour $x > 0$ *on pose* $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. *Montrer que:* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$.

2. *Montrer que:* $\dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.

3. *Montrer que:* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Exercice 8. *Soit* $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^x} dt$.

1. *Vérifier que* F *est bien définie sur* $]0,2[$.

2. *Montrer que:* $\forall x \in]0,2[,\ \ F(x) = x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{x+1}} dt$.

3. *Montrer que* F *est continue sur* $]0,2[$.

Exercice 9. *Soit* f *la fonction définie sur* $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ *par:*

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}.$$

On définie la fonction F *sur* $]0,+\infty[$ *par:* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.

1. *Vérifier que:* $\forall a > 0,\ \ \dfrac{te^{-at}}{\sqrt{1+t}} \underset{+\infty}{=} o(\dfrac{1}{t^2})$.

2. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.

3. *Déduire que* $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$ *pour* $x \in]0,+\infty[$.

4. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

Exercice 10. *On considère deux réels fixés* $a > 0$ *et* b *et on pose*

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt) dt.$$

1. *Justifier la définition de* g *sur* $]0,+\infty[$.

2. *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.

3. *Calculer* g' *puis* g.

Exercice 11.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{sh(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(1+2n)^2 + x^2}$.

2. *Soit* p *et* q *deux réels strictement positifs. Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}$.