# Algèbre de base

# Sommaire

# I). Polynômes sur $\mathbb{K}$

## 1. Définitions et notations

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Définition**

On appelle polynôme sur $\mathbb{K}$ une expression de la forme

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les $a_i$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ (appelés coefficients) et $X$ est l'indéterminée.
L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ est noé $\mathbb{K}[X]$.

**Exemple :**

1. $X^5 + \pi X^4 - \sqrt{2}X^2 + 3$ est un polynôme sur $\mathbb{R}$.
2. $X^6 + \mathrm{i}X^4 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}X^2 + 2\mathrm{i}$ est un polynôme sur $\mathbb{C}$.

## Définition

Soit $P$ un polynôme donné par
$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

i) Sous cette forme, il est ordonné suivant les puissances décroissantes.

ii) Sous la forme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$, il est dit ordonné suivant les puissances croissantes.

iii) Si $a_n \neq 0$, on l'appelle coefficient dominant de $P$ et $n$ est appelée degré de $P$ ; on note : $\deg(P) = d^o P = n$.

iv) Si $a_n = 1$, on dit que le polynôme est unitaire.

v) Une constante $a \neq 0$ est appelée polynôme de degré 0.

vi) La constante 0 est appelée **polynôme nul**. Par convention il est de degré $-\infty$

## Définition

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ donnés par
$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$,
$Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$, où $n \geq m$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on définit $P+Q$, $\lambda P$ et $PQ$ comme suit :

1. $$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = \sum_{i=0}^{n} c_iX^i, \quad \text{où} \quad c_i = a_i + b_i.$$
2. $$(\lambda P)(X) = \lambda P(X) = \sum_{i=0}^{n} c_iX^i, \quad \text{où} \quad c_i = \lambda a_i.$$
3. $$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k, \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

**Remarques :**

- Le quotient de deux polynômes n'est pas, en général, un polynôme.
- Un polnôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

## Définition

Soit $P = a_r X^r + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$ un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$. On appelle valuation de $P$ et on le note $\mathrm{val}(P)$, le plus petit des entiers naturels $m$ tels que $a_m \neq 0$. Ici, si $a_r \neq 0$ alors $\mathrm{val}(P) = r$ et si $a_n \neq 0$ alors $\deg(P) = n$.
On a toujours $r \leq n$. C'est à dire que $\mathrm{val}(P) \leq \deg(P)$.

## Proposition

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors

1. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\operatorname{val}(PQ) = \operatorname{val}(P) + \operatorname{val}(Q)$.
2. $\deg(P+Q) \leq \max\left(\deg(P); \deg(Q)\right)$
3. $\operatorname{val}(P+Q) \geq \min\left(\operatorname{val}(P); \operatorname{val}(Q)\right)$

Remarques :

- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ on a $\deg(P+Q) = \max\left(\deg(P); \deg(Q)\right)$
- Si $\operatorname{val}(P) \neq \operatorname{val}(Q)$ on a $\operatorname{val}(P+Q) = \min\left(\operatorname{val}(P); \operatorname{val}(Q)\right)$.
- les inégalités de **2)** et **3** peuvent être strictes : $(1 + X + X^2) + (-1 - X^2) = X$.

## Exercice

Déterminer le degré et la valuation des polynôme $P+Q$, $P+R$, $PQ$ et $PR$ dans le cas suivant : $P(X)=X^4-X^3+2X^2+X+6$, $Q(X)=X^2-X+1$ et $R(X)=2X^3-1$
Les polynômes sont-il unitaire ?

# 2. Division euclidienne

**Théorème**

Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B$ non nul. Il existe un unique polynôme $Q$ et un unique polynôme $R$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que : $A = QB + R, \quad \deg(R) < \deg(B)$. Si $R = 0$, on dit que $B$ divise $A$, où bien $A$ est divisible par $B$, ou encore $B$ est un diviseur de $A$.

Démonstration : **Unicité :**

Supposons que nous ayons $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $d^oR_1 < d^oB$ et $d^oR_2 < b^oB$. Alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Si $Q_1 \neq Q_2$, i.e. $Q_1 - Q_2 \neq 0$, on a
$d^o\big(B(Q_1 - Q_2)\big) = d^oB + d^o(G_1 - Q_2) \geq d^oB$ et
$d^o(R_2 - R_1) \leq \max(d^oR_1, d^oR_2) < d^oB$ d'où contradiction.

**Existance :**

1. Si $B \in \mathbb{K}^*$, on a : $A = (\frac{1}{B}A).B + 0$, donc $Q = \frac{1}{B}A$ et $R = 0$ et $d^oR < d^oB$
2. Si $d^oB \geq 1$, posons
   $B = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$.
   Si $A = 0$, on a : $A = 0.B + A$ et $d^oA \leq 0 < d^oB$.
   Supposons que la propriété est vérifiée pour tout polynôme A de degré $\leq n$ et montrons la pour $d^oA = n + 1$. Posons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1}$ avec $a_{n+1} \neq 0$.

- Si $n+1 < m$ alors $A = 0.B + A$ avec $d^oA < d^oB$
- Si $n+1 \geq m$, on a
  $A - \frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}.B = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \ldots + c_nX^n = C$
  avec $d^oC \leq n$. Donc par hypothèse de récurrence il existe $(Q_1, R_1)$ tel que $C = Q_1B + R_1$ et $d^oR_1 < d^oB$. Donc
  $A = (Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}).B + R_1$, posons alors
  $Q = Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}$ et $R = R_1$. CQFD

**Exemple :** Division de $A(X) = X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $B(X) = X^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + 2X^2 + X + 1 & X^2 + 1 \\ \hline
 & X + 2 \\
-X^3 - X & \\ \hline
2X^2 + 1 & \\
-2X^2 - 2 & \\ \hline
\text{-1} &
\end{array}$$

Le résultat s'écrit : $X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 2) - 1$, d'où $Q(X) = X + 2$ et $R(X) = -1$.

### Exercice

Effectuer la division euclidienne de $A$ par $B$ dans les cas suivants : $A = X^4 - 2X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X$.
$A = X^6 + 5X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2$.

# 3. Fonctions polynômiales

## Définition

On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{K}$ toute fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \end{array}$$

Le polynôme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$ est appelé polynôme associé à la fonction $f$.

**Remarque :**

- Ne jamais confondre la variable $x$ de la fonction polynômiale $f$ et l'indéterminé $X$ du polynôme associé.
- Pour $a \in \mathbb{K}$, on note $P(a)$ la valeur prise par la fonction $f$ au point $a$.

## Proposition

Le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P$ par $X-\beta$ est le polynôme constant égal à $P(\beta)$.

**Démonstration :** d'après la division euclidienne de $P$ par $X-\beta$, il existe un unique polynôme $Q$ et un unique polynôme $R$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$P(X)=Q(X)(X-\beta)+R(X), \quad \deg(R)<\deg(X-\beta)=1.$$

Comme $\deg(R)<1$ alors le polynôme $R$ est une constante $c$ dans $\mathbb{K}$ et $P(\beta)=c.\diamondsuit$

# 4. Polynôme dérivé

## Définition

Soit

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de $P$ le polynôme :

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + \ldots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}X^i$$

On note $P''$, $P'''$, $P^{(4)}$,. . ., $P^{(k)}$ la suite des polynômes dérivés successifs. On pose également $P^{(0)} = P$.

Les propriétés usuelles des dérivés s'appliquent également aux polynômes.

# 5. Racines d'un polynôme

## Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine (ou un zéro) de $P$ si $P(\alpha) = 0$.

## Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Un élément $\alpha$ de $\mathbb{K}$ est racine de $P$ si, et seulement si, $P$ est divisible par $X - \alpha$.

**Démonstration :** On a : $P(X) = Q(X)(X - \alpha) + P(\alpha)$. Par conséquent $P(X)$ est divisible par $X - \alpha$ si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$.$\diamondsuit$

## Exercice

Soit $P$ le polynôme sur $\mathbb{R}$ défini par $P(X) = X^3 - X^2 - 3X + 3$.

1. Déterminer une racine évidente de $P$.
2. En déduire une expression de $P$ sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.
3. En déduire l'ensemble des racines de $P$.

## Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que $\alpha$ est une racine d'ordre $r$, ou de multiplicité $r$, de $P$ si $P(X) = (X - \alpha)^r Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

- Lorsque $r = 1$, on dit que la racine est simple.
- Lorsque $r = 2$, on dit que la racine est double.
- Lorsque $r = 3$, on dit que la racine est triple.

### Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de $P$ est de multiplicité $r$ si et seulement si, pour tout $k$, $0 \leq k \leq r-1$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple : $P = X^3 - X^2 - X + 1$, $P' = 3X^2 - 2X - 1$, $P'' = 6X - 2$, $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$ donc 1 est une racine double de $P$

### Théorème (Théorème de D'Alembert - admis)

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine.

### Corollaire

Tout polynôme $P$, de degré $n \geq 1$, de $\mathbb{C}[X]$ admet exactement $n$ racines complexes (comptés avec leur ordre de multiplicité).

## Exemples :

- $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2.(x+1)$
- $X^4 - 1 = (x+i)(x-i)(x-1)(x+1)$
- $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{5i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4})$

### Exercice

1. Montrer que $\mathrm{i}$ est une racine double du polynôme
$$P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$
2. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que le polynôme
$$P(X) = X^5 + aX^4 + bX^3 - bX^2 - aX - 1$$
admette 1 comme racine de plus grande multiplicité possible.

# 6. Polynômes irréductibles

## Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, on dit que $P$ est irréductible (ou premier) si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant $P$, alors, soit $Q \in \mathbb{K}^*$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

## Théorème

Les polynômes de degré 1 sont les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

**Démonstration :** D'après le théorème de D'Alembert, tout polynôme $P$, de degré $\geq 2$, admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. $P$ est donc divisible par $(X - \alpha)$, et il n'est pas irréductible.$\diamondsuit$

## Théorème

Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

- les polynômes de degré 1.
- les polynômes de degré 2, dont le discriminant $\triangle = b^2 - 4ac$ est strictement négatif.

**Démonstration :** Soit $P \in \mathbb{P}[X]$ un polynôme de degré 2.

1. Si $\triangle = b^2 - 4ac \geq 0$, alors $P$ admet deux racines rélles (distinctes ou confondues) et s'écrit $P(X) = a(X - \alpha)(X - \beta)$. Il n'est pas irréductible.
2. Si $P$ est une polynôme de degré $> 2$, d'après le théorème de D'Alembert, il adment au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$

- Où bien $\alpha \in \mathbb{R}$, $P$ est divisible par $(X - \alpha)$, et il n'est pas irréductible.
- Où bien $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de $P$.
  $P$ est divisible par $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$ qui est un polynôme à coefficient réels. Par conséquent, $P$ n'est pas irréductible. $\diamondsuit$

**Exemples :**

- $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas irréductible.
- $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

# II) Décomposition d'un polynôme en polynômes irréductibles

## Théorème

Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme $P$ non constant se décompose en produit de polynômes irréductibles.

## Proposition (Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$)

La décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme :

$$P(X) = \beta(X-\alpha_1)^{r_1}\dots(X-\alpha_p)^{r_p}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, $r_i \in \mathbb{N}^*$ et $r_1 + \dots + r_p = n = deg(P)$.

## Proposition (Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$)

La décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme de degré $n \geq 1$ de $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$P(X) = \gamma(X-\alpha_1)^{r_1} \dots (X-\alpha_p)^{r_p}(X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{s_1} \dots (X^2+\beta_k X+\gamma_k)^{s_k},$$

avec $r_1 + \ldots + r_p + 2(s_1 + \ldots + s_k) = n = deg(P)$, et $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ pour $i = 1, \ldots, k$.

**Exemples :**

- $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2(X-j)(X-\bar{j})$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

- Soit $P(X) = X^4 + 1$.
  Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2 + i)(X^2 - i)$. Les racines de $P$ sont donc les racines carrées complexes de $i$ et $-i$. Ainsi $P$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ :

$$P(X) = \left(X-\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X+\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X-\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(X+\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right).$$

  Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme **à coefficient réels**, si $\alpha$ est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :

$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right] \\ &\quad \left[\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right] \\ &= \left[X^2 + \sqrt{2}X + 1\right]\left[X^2 - \sqrt{2}X + 1\right], \end{aligned}$$

  qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

# III). PGCD

**Proposition**

Soient $A, B \in [X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois $A$ et $B$.

Cet unique polynôme est appelé le **pgcd** (plus grand commun diviseur) de $A$ et $B$ que l'on note $pgcd(A, B)$.

Remarques :

- $pgcd(A, B)$ est un polynôme unitaire.
- Si $A|B$ et $A \neq 0$, $pgcd(A, B) = \frac{1}{\lambda}A$, où $\lambda$ est le coefficient dominant de $A$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $pgcd(\lambda A, B) = pgcd(A, B)$.
- Si $A = BQ + R$ alors $pgcd(A, B) = pgcd(B, R)$. C'est ce qui justifie **l'algorithme d'Euclide**.

**Algorithme d'Euclide :**
Soient $A$ et $B$ des polynômes, $B \neq 0$.
On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{ll}
A = BQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg B \\
B = R_1 Q_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg R_1 \\
R_1 = R_2 Q_3 + R_3 & \deg R_3 < \deg R_2 \\
\vdots & \\
R_{k-2} = R_{k-1} Q_k + R_k & \deg R_k < \deg R_{k-1} \\
R_{k-1} = R_k Q_{k+1} &
\end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division. On arrête l'algorithme lorsque le reste est nul. Le pgcd est le dernier reste non nul $R_k$ (rendu unitaire).

Exemples :

- Calculons le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

$$\begin{array}{rcl} X^4 - 1 & = & (X^3 - 1) \times X + X - 1 \\ X^3 - 1 & = & (X - 1) \times (X^2 + X + 1) + 0 \end{array}$$

  Donc $pgcd(X^4 - 1, X^3 - 1) = X - 1$.

- Calculons le pgcd de $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$.
  $X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2 =$
  $(X^4 + 2X^3 + X^2 - 4) \times (X - 1) + 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2$

  $X^4 + 2X^3 + X^2 - 4 =$
  $(3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4) - \frac{14}{9}(X^2 + X + 2)$

  $3X^3 + 2X^2 + 5X - 2 = (X^2 + X + 2) \times (3X - 1) + 0$

  Ainsi $pgcd(A, B) = X^2 + X + 2$.

## Définition

Soient $A, B \in [X]$. On dit que $A$ et $B$ sont premiers entre eux si $pgcd(A, B) = 1$.

textbfExemple : $pgcd(X^4 + 1, X^3 - 1) = 1$. En effet :

$$
\begin{aligned}
X^4 + 1 &= X(X^3 - 1) + X + 1 \\
X^3 - 1 &= (X + 1)(X^2 - X + 1) - 2 \\
X + 1 &= -2(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}) + 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, $pgcd(X^4 + 1, X^3 - 1) = \frac{1}{-2}(-2) = 1$ par conséquent, ils sont premiers entre eux.

# Division suivant les puissances croissantes

**S**

oit deux polynômes $A$ et $B$ avec $B(0) \neq 0$ et un entier naturel $n$. Alors il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tel que

$$A = BQ + X^{n+1}R \quad \text{et} \quad d^oQ \leq n.$$

$Q$ et $R$ sont respectivement le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de par $A$ par $B$ à l'ordre $n$.

**Exemple** : $A = 4X + 6X^2 + X^3$, $B = 2 + 3X + 2X^2$, $n = 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
4X+6X^2+X^3 & 2+3X+2X^2 \\
\hline
 & 2X-\dfrac{3}{2}X^3 \\
-4X-6X^2-4X^3 & \\
\cline{1-1}
-3X^3 & \\
3X^3+\dfrac{9}{2}X^4+3X^5 & \\
\cline{1-1}
X^4(\dfrac{9}{2}+3X) &
\end{array}
$$

Ainsi $A = B(2X - \dfrac{3}{2}X^3) + X^4(\dfrac{9}{2} + 3X)$

# IV). Décompossition en éléments simples

**Définition**

On appelle fraction rationnelle à une indéterminée tout couple $(P, Q)$ de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. On note $\dfrac{P}{Q}$ cette fraction rationnelle.
**L'ensemble des fractions rationnelles est noté** $\mathbb{K}(X)$.
On appelle les pôles de la fraction rationnelle $R = \dfrac{P}{Q}$, les racines du polynôme $Q$.
Si $a$ est une racine d'ordre $r$ de $Q$, on dit que $a$ est un pôle d'ordre $r$ de $F$.

**Exemple :** $F = \dfrac{X^2}{(X^2-1)^2}$
1 et $-1$ sont deux pôles d'ordre 2 de $F$

# Partie entière d'une fraction rationnelle

## Définition

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction écrite sous forme irréductible ($pgcd(P, Q) = 1$). Il existe un unique polynôme $E$ (appelé partie entière de la fraction $R$) et un unique polynôme $P_1$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q} \quad et \quad \deg(P_1) < \deg(Q).$$

Cette écriture est équivalente à $P = QE + P_1$ ce qui est équivalent à dire que $P_1$ est le reste de la division euclidienne de $P$ par $Q$ et $E$ est le quotient de cette division.

**Exemple :** La division euclidienne de $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X + 1$ par $Q(X) = X^2 - 3X + 1$ s'écrit :

$$2X^4+3X^3-X+1 = (X^2-3X+1)(2X^2+9X+25)+(65X-24)$$

on a donc

$$\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1} = 2X^2 + 9X + 25 + \frac{65X - 24}{X^2 - 3X + 1}.$$

D'après la définition présidente on voit qu'on peut toujours se ramener à une fraction $F = \dfrac{P}{Q}$ telle que $\deg(P) < \deg(Q)$ et $pgcd(P, Q) = 1$

# 1. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

## Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ telle que $\deg(P) < \deg(Q)$ et $pgcd(P, Q) = 1$ et $a_i$ un pôle d'ordre $r_i$ de $F$ $(1 \leq i \leq n)$, c'est à dire $F = \dfrac{P}{(X-a_1)^{r_1}(X-a_2)^{r_2}\dots(X-a_n)^{r_n}}$.
Alors il existe une suite de complexes $(\lambda_{ij})$ $(1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r_i)$ de complexes tels que

$$F = \sum_{j=1}^{r_1} \frac{\lambda_{1j}}{(X-a_1)^j} + \sum_{j=1}^{r_2} \frac{\lambda_{2j}}{(X-a_2)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{r_n} \frac{\lambda_{nj}}{(X-a_n)^j}$$

$\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j} = \frac{\lambda_{i1}}{(X-a_i)} + \frac{\lambda_{i2}}{(X-a_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{ir_i}}{(X-a_i)^{r_i}}$ est appelée partie polaire associée au pôle $a_i$, et les éléments $\frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}$ sont appelés éléments simples de la fraction $F$.

**Exemple :** $F = \frac{2X}{(X-1)^2(X+2)^3} =$

$$\underbrace{\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}}_{\text{partie polaire de 1}} + \underbrace{\frac{c}{X+2} + \frac{d}{(X+2)^2} + \frac{e}{(X+2)^3}}_{\text{partie polaire de 2}}$$

## Techniques de calcul des coefficients d'une décomposition :

- $\lambda_{ir_i}$ (le coefficient de l'élément simple de plus grand degré dans une partie polaire) se calcule comme suit :
$\lambda_{ir_i} = \lim\limits_{X \longrightarrow a_i} (X - a_i)^{r_i} F(X)$

$$F = \frac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+2}$$

$$b = \lim_{X \longrightarrow 1} (X-1)^2 F(X) = 2$$

$$c = \lim_{X \longrightarrow -2} (X+2) F(X) = 3 \quad \text{(pôle simple)}$$

D'où $\dfrac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{3}{X+2}$

- On peut substituer à $X$ des valeurs particulières et résoudre le système obtenu. Par exemple pour calculer a dans la décomposition : $\dfrac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{3}{X+2}$, on remplace $X$ par 0 puis on déduit $a=-1$.
- Parfois on calcule des limites en $\infty$. Par exemple $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(X-1)F(X) = a+c = 2$. ainsi $a=-1$

**Détermination pratique :** Supposons que

$$F = \frac{P}{(X-a)^r Q_1} = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r} + F_0.$$

Pour déterminer les coefficients de la décomposition associés au pôle $a$ d'ordre $r$, on effectue la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $P(X+a)$ par $Q_1(X+a)$ à l'ordre $r-1$ (càd jusqu'à obtenir un reste qui est un multiple de $X^r$).

Alors le quotient de la division euclidienne est :
$\lambda_r + \lambda_{r-1}X + \cdots + \lambda_2 X^{r-1} + \lambda_1 X^r$

**Exemple :** $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X+1)} =$

$$\frac{\lambda_1}{(X-1)} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\lambda_4}{(X-1)^4} + \frac{b}{X+1}$$

$P(X) = X^2+1$, $Q_1(X) = X+1$, $P(X+1) = 2+2X+X^2$, $Q_1(X+1) = 2+X$. le quotient de la DESPC de $P(X+1)$ par $Q_1(X+1)$ à l'ordre 3 est $1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{8}X^3$. Donc

$$F = \frac{X^2+1}{(X-1)^4(X+1)} =$$

$$\frac{-\frac{1}{8}}{(X-1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4} + \frac{b}{X+1}$$

# Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

## Théorème

Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur $Q$ peut s'écrire sous la forme du produit $\lambda(X-a_1)^{p_1}(X-a_2)^{p_2}\dots(X-a_k)^{p_k}(X^2+b_1X+c_1)^{q_1}(X^2+b_2X+c_2)^{q_2}\dots(X^2+b_\ell X+c_\ell)^{q_\ell}$, où les $p_i$ et $q_i$ sont des entiers et les $a_i$, $b_i$,$c_i$ et $\lambda$ des réels tels que $b_i^2-4c_i<0$.
Il existe alors un polynôme $E$, des éléments $d_{ij}$ de $\mathbb{R}$ et des polynômes $A_{ij}$ de degré inférieur ou égal à 1 tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{d_{11}}{(X-a_1)} + \frac{d_{12}}{(X-a_1)^2} + \ldots + \frac{d_{1p_1}}{(X-a_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{d_{kp_k}}{(X-a_k)^{p_k}} + \ldots + \frac{A_{11}}{(X^2+b_1X+c_1)} + \frac{A_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1q_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{q_1}} + \ldots + \frac{A_{\ell q_\ell}}{(X^2+b_\ell X+c_\ell)^{q_\ell}}.$$

- le polynôme $E$ s'appelle la **partie entière** de $\frac{P}{Q}$,
- les fractions de la forme $\frac{d_{ij}}{(X-a_i)^j}$ s'appellent des **éléments simples de première espèce**,
- les fractions de la forme $\frac{A_{ij}}{(X^2+b_iX+c_i)^j}$ des **éléments simples de seconde espèce.**

**Exemple :** Soit $F(X) = \dfrac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^3}$ une fraction rationnelle.
Une décomposition théorique de la fraction rationnelle $F(X)$ est donnée par

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

Par un calcul élémentaire, nous trouvons $a=-1$, $b=1/2$, $c=1$, $d=-1$, $e=1$ et $f=0$. Dans ce cas, on a

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$