Théorie générale de la mesure :

Espaces Mesurables :

Définition d'une tribu/σ-Algèbre :

Une famille $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble X vérifiant 3 axiommes :

- $X \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T} : A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$ "Stabilité par complémentaire"
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$ "Stabilité par $\cup$ dénombrable"

Définition d'un espace mesurable :

L'ensemble X muni de la tribu $\mathcal{T}$: $(X, \mathcal{T})$

Définition d'une partie mesurable :

Toute élément de $\mathcal{T}$: $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A$ est une partie mesurable de X

Définition d'un anneau Booléen :

Une famille $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble X vérifiant 3 axiommes :

- $X \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T} : A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$ "Stabilité par complémentaire"
- $\forall A, B \in \mathcal{T} : A \cup B \in \mathcal{T}$ "Stabilité par $\cup$ finie"

Conséquences :

$\phi \in \mathcal{T}$	on sait que : $\phi = X^c$ avec $X \in \mathcal{T}$ donc : $\phi \in \mathcal{T}$
$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}$: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A_n \in \mathcal{T}$ d'où : $A_n^c \in \mathcal{T}$ donc : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c \in \mathcal{T}$ alors $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\right)^c \in \mathcal{T}$ comme : $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ donc : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$
$\mathcal{T}$ est stable par $\cap$ finie : $\forall (A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{T}$: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ * pour $n=2$: $A_1 \in \mathcal{T}$ et $A_2 \in \mathcal{T}$ d'où : $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, * on suppose que : $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{T}$ * montrons que : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ on a : $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{T}$ et $A_n \in \mathcal{T}$ d'où : $\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n \in \mathcal{T}$ or : $\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ donc : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ alors, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$
$\mathcal{T}$ est stable par $\cup$ finie : $\forall (A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{T}$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, d'où : $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{T}$ donc : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathcal{T}$ alors : $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c \in \mathcal{T}$ comme : $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ donc : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$
$\forall A, B \in \mathcal{T}$: $A \setminus B \in \mathcal{T}$	Soient $A, B \in \mathcal{T}$, d'où : $B^c \in \mathcal{T}$ donc : $A \cap B^c \in \mathcal{T}$ or : $A \cap B^c = A \setminus B$ alors : $A \setminus B \in \mathcal{T}$

Proposition sur les tribus :

Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ non vide,
Alors : $\mathcal{T}$ est une tribu sur X si et seulement si :

i) $\forall A \in \mathcal{T}$: $A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$
ii) $\forall A, B \in \mathcal{T}$: $A \cap B \in \mathcal{T}$
iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}$ disjointe : $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$ "Stabilité par $\cup$ dénombrable disjointe"

$\Rightarrow$/ On suppose que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X,
c-à-d : Les 3 axiommes de "Définition d'une tribu" sont satisfaites,

i) $\forall A \in \mathcal{T}$: $A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$ (satisfaite)
ii) $\forall A, B \in \mathcal{T}$: $A \cap B \in \mathcal{T}$ (d'après "Conséquence")
iii) on a : $\mathcal{T}$ et stable par $\cup$ dénombrable quelconque en particulier : $\mathcal{T}$ est stable par $\cup$ dénombrable disjointe,
donc : $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}$ disjointe : $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$

$\Leftarrow$/ On suppose que i, ii, et iii de "Proposition sur les tribus" sont satisfaites,
montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu,

i) on a : $\mathcal{T}$ est non vide,
c-à-d : $\phi \in \mathcal{T}$
d'où : $\phi^c \in \mathcal{T}$
or : $\phi^c = X$
donc : $X \in \mathcal{T}$

ii) $\forall A \in \mathcal{T}$: $A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$ (satisfaite)

iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}$,
Prenons : $B_1 = A_1$ et $\forall n \geq 2$: $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$
on a : $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}$ disjointe,

d'où: $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} B_m \in \mathcal{T}$

or: $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} B_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} A_m$

donc: $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} A_m \in \mathcal{T}$

Alors: $\mathcal{T}$ est une tribu.

Définition d'une tribu engendrée:

Soit F une famille de parties de X ($F \subset \mathcal{P}(X)$),

$\mathcal{S}(F) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ tribu sur } X \\ \text{tq: } F\subset\mathcal{M}}} \mathcal{M}$ est une tribu sur X, c'est la plus petite tribu contenant F; On l'appelle tribu engendrée par F.

Définition d'une topologie:

Une famille $\mathcal{M}$ de parties de X vérifiant 3 axiomes:

- $\phi, X \in \mathcal{M}$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall (O_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{M}$: $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{M}$ "Stabilité par $\cap$ finie"
- $\forall (O_i)_{i\in I} \in \mathcal{M}$: $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{M}$ "Stabilité par $\cup$ quelconque"

Définition d'ouvert:

Toute élément de $\mathcal{M}$: $O\in\mathcal{M} \Leftrightarrow O$ est un ouvert de X par rapport à $\mathcal{M}$

Définition d'un espace topologique:

L'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{M}$: $(X,\mathcal{M})$

Définition d'une tribu de Borél / tribu Borélienne?

Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace topologique,

La tribu engendrée par les ouverts de X (par rapport à $\mathcal{M}$) s'appelle la tribu de Borél sur X; On la note: $\mathcal{B}(X)$

Tribu de Borél sur IR:

Travaillons sur $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle,

la tribu de Borél sur $\mathbb{R}$ – notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – contient:

- Les ouverts de $\mathbb{R}$ (par rapport à la topologie usuelle),
- Les fermés de $\mathbb{R}$ (par rapport à la topologie usuelle),
- $\cup$ dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ (par rapport à la topologie usuelle),
- $\cup$ dénombrable de fermés de $\mathbb{R}$ (par rapport à la topologie usuelle),

Proposition sur la tribu de Borél sur IR:

> Travaillons sur $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]a,+\infty[$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Notons: $I = \{\,]a,+\infty[\,/\, a\in\mathbb{R}\}$

Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par I,

c-à-d, montrons que: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(I)$ où $\mathcal{S}(I)$ la tribu engendrée par I.

Soit $A\in I$: $A =]a,+\infty[$ où $a\in\mathbb{R}$

A est un ouvert de $\mathbb{R}$ (par rapport à sa topologie usuelle),

et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ (par rapport à sa topologie usuelle),

d'où: $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

donc: $I\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$

alors: $\mathcal{S}(I)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (1)

d'autre part:

on sait que: tout ouvert de $\mathbb{R}$ (par rapport à sa topologie usuelle) s'exprime comme $\cup$ fini ou dénombrable d'intervalles de la forme $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, $]a,b[$.

donc: pour montrer que $\mathcal{S}(I)$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ (par rapport à sa topologie usuelle), il suffit de montrer que $\mathcal{S}(I)$ contient $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ et $]a,b[$.

on a:

* $]a,+\infty[\in \mathcal{S}(I)$
* $]-\infty,a[= ([a,+\infty[)^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n},+\infty[\right)^c$

  comme: $]a-\frac{1}{n},+\infty[\in \mathcal{S}(I)$ et $\mathcal{S}(I)$ est une tribu,

  donc: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n},+\infty[\in \mathcal{S}(I)$

  d'où $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n},+\infty[\right)^c \in \mathcal{S}(I)$

  d'où: $]-\infty,a[\in \mathcal{S}(I)$
* $]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[$

  comme: $]-\infty,b[\in \mathcal{S}(I)$ et $]a,+\infty[\in \mathcal{S}(I)$

  donc: $]-\infty,b[\cap]a,+\infty[\in \mathcal{S}(I)$

  d'où: $]a,b[\in \mathcal{S}(I)$

alors: $\mathcal{S}(I)$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ (par rapport à sa topologie usuelle).

d'où: $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(I)$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(I)$

Fin de chapitre #

Mesure Positive :

Définition d'une mesure positive :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable,
Une mesure (positive) sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ vérifiant 2 axiommes :

$\mu(\emptyset) = 0$

$\forall (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2 : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$
"La σ-Additivité"

Définition d'un espace mesuré :

L'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ muni de la mesure μ : $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

Définition d'une mesure finie :

Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que : $\mu(\Omega) < +\infty$

Définition d'une probabilité / mesure de probabilité :

Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que : $\mu(\Omega) = 1$

Définition d'un espace probabilisé :

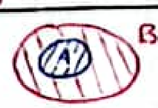
L'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ muni d'une probabilité.

Exemples de mesures :

Mesure de Dirac Soit $a \in \Omega$, l'application δ_a définie par : $\forall A \in \mathcal{T}$: $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$: C'est la mesure de Dirac.	i) on a : $\delta_a(\emptyset) = 0$, comme $a \notin \emptyset$ ii) Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2, 1er cas : Si $a \notin \dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n$ $\left(\Rightarrow \delta_a\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = 0\right)$ d'où : $\forall n \geq 1$: $a \notin A_n \Rightarrow \delta_a(A_n) = 0$ donc : $\sum_{n\geq 1} \delta_a(A_n) = 0 = \delta_a\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right)$ 2ème cas : Si $a \in \dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n$ $\left(\Rightarrow \delta_a\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = 1\right)$ d'où : $\exists n_0 \geq 1$: $a \in A_{n_0}$ puisque : $(A_n)_{n\geq 1}$ sont disjointes 2 à 2, d'où : $\exists! n_0 \geq 1$: $a \in A_{n_0} \Rightarrow \delta_a(A_{n_0}) = 1$ donc : $\sum_{n\geq 1} \delta_a(A_n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} \delta_a(A_n)}_{=0} + \delta_a(A_{n_0}) + \underbrace{\sum_{n\geq n_0+1} \delta_a(A_n)}_{=0}$ $\sum_{n\geq 1} \delta_a(A_n) = 1$ $\sum_{n\geq 1} \delta_a(A_n) = \delta_a\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right)$ Alors : $\delta_a\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \delta_a(A_n)$
Soit $(a_k)_{k\geq 1} \subset \Omega$, Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, l'application définie par : $\forall A \in \mathcal{T}$: $\mu(A) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \delta_{a_k}(A)$ où δ_{a_k} : mesure de Dirac est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.	i) on a : $\mu(\emptyset) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \delta_{a_k}(\emptyset) = 0$ comme $\forall k \geq 1$: $\delta_{a_k}(\emptyset) = 0 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \delta_{a_k}(\emptyset) = 0$ ii) Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2, On a : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \delta_{a_k}\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right)$; δ_{a_k} mesure $= \sum_{k\geq 1} \left(\alpha_k \sum_{n\geq 1} \delta_{a_k}(A_n)\right)$ $= \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} \alpha_k \delta_{a_k}(A_n)\right)$ $= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k\geq 1} \alpha_k \delta_{a_k}(A_n)\right)$ Alors : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$
Soit $(\mu_k)_{k\geq 1}$ une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$, Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, l'application définie par : $\forall A \in \mathcal{T}$: $\mu(A) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \mu_k(A)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.	i) on a : $\mu(\emptyset) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \mu_k(\emptyset) = 0$ comme $\forall k \geq 1$: $\mu_k(\emptyset) = 0 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \mu_k(\emptyset) = 0$ ii) Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2, on a : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \mu_k\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right)$; μ_k mesure $= \sum_{k\geq 1} \left(\alpha_k \sum_{n\geq 1} \mu_k(A_n)\right)$ $= \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} \alpha_k \mu_k(A_n)\right)$ $= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k\geq 1} \alpha_k \mu_k(A_n)\right)$ Alors : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$
Mesure de Comptage l'application définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: $\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \end{cases}$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: C'est la mesure de Comptage.	i) on a : $\mu(\emptyset) = \mathrm{card}(\emptyset) = 0$, comme $\emptyset$ est fini ii) Considérons : $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n = \{n\}$ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont disjointes 2 à 2, on a : $\mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ or : $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$, comme $\mathbb{N}$ est infini donc : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty$ et on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\})$; $\{n\}$ est fini $= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{card}(\{n\})$ $= \sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ $= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 1$ $= \lim_{n\to+\infty} n+1$ donc : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty$ Alors : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Propriétés générales de la mesure :

Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$,

L'Additivité Soit $n \geq 1$ fixé, Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2, Alors : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$	Soit $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2 telle que : $\forall i \geq n+1$: $A_i = \emptyset \Rightarrow \mu(A_i) = 0$ Comme μ est une mesure, donc : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$ (1) on a : $\dot{\bigcup}_{i\geq 1} A_i = \left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \underbrace{\left(\dot{\bigcup}_{i\geq n+1} A_i\right)}_{=\emptyset}$ $= \left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \emptyset$ d'où : $\dot{\bigcup}_{i\geq 1} A_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{i\geq 1} A_i\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right)$ (2) et on a : $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \underbrace{\sum_{i\geq n+1} \mu(A_i)}_{=0}$ $= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + 0$ d'où : $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (3) de (1), (2) et (3) on déduit que : $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
La croissance Soient $A, B \in \mathcal{T}$, Si : $A \subset B$ Alors : $\mu(A) \leq \mu(B)$	on a : $B = A \cup (B \setminus A)$  d'où : $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A))$ comme $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc : $\mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ (d'après l'additivité) d'où : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ alors : $\mu(B) \geq \mu(A)$, comme $\mu(B \setminus A) \geq 0$
Soient $A, B \in \mathcal{T}$,	on a : $B = A \cup (B \setminus A)$

Si : $A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$

Alors :

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

d'où : $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A))$

comme : $A \cap (B \setminus A) = \varphi$

donc : $\mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ (d'après l'additivité)

d'où : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, comme $\mu(A) < +\infty$

(En effet Si $\mu(A) = \mu(B) = +\infty \Rightarrow \mu(B) - \mu(A) = F.I$ donc il est nécessaire que $\mu(A) < +\infty$)

La monotonie

Soient $A, B \in \mathcal{T}$,

Alors :

$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

on a : $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$

A B

d'où : $\mu(A \cup B) = \mu\left((A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)\right)$

comme $A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus (A \cap B)$ et $A \cap B$ sont disjointes 2 à 2,

donc : $\mu\left((A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)\right)$ (d'après l'additivité)
$= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B)$

d'où : $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B)$

et comme $A \subset A \cap B$ et $B \subset A \cap B$ avec $\mu(A \cap B) < +\infty$

donc : $\mu(A \setminus (A \cap B)) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$

et $\mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B)$

$\Rightarrow \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

La continuité séquentielle ↗

Soit $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$ croissante,

Alors :

$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$

Considérons $(C_n)_{n \geq 1}$ une famille d'ensembles telle que : $C_1 = A_1$ et $\forall n \geq 2 : C_n = A_n \setminus A_{n-1}$

d'où : $(C_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2,

et : $\forall n \geq 1 :$ $A_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} C_i$

donc $\forall n \geq 1 :$ $\mu(A_n) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$

par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient : $\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$

$= \sum_{n \geq 1} \mu(C_n)$

$= \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \geq 1} C_n\right)$

or : $\dot{\bigcup}_{n \geq 1} C_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n \Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \geq 1} C_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)$

La continuité séquentielle ↘

Soit $(B_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$ décroissante telle que : $\exists n_0 \geq 1 /$ $\mu(B_{n_0}) < +\infty$

Alors :

$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n)$

Considérons $(D_n)_{n \geq 1}$ une famille d'ensembles telle que :

$\forall n \geq 1 :$ $D_n = B_1 \setminus B_n \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} D_n = B_1 \setminus \left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right)$

d'où : $(D_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$ croissante,

donc : $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} D_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(D_n)$

$\Rightarrow \mu\left(B_1 \setminus \left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_1 \setminus B_n)$

$\Rightarrow \mu\left(B_1 \setminus \left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_1 \setminus B_n)$ (1)

on a : $\forall n \geq n_0 :$ $B_n \subset B_{n_0}$, comme $(B_n)_{n \geq 1}$ décroissante

$\Rightarrow \bigcap_{n \geq n_0} B_n \subset B_{n_0} \subset B_1$

$\Rightarrow \bigcap_{n \geq n_0} B_n \subset B_1$

avec : $\bigcap_{n \geq n_0} B_n \subset B_{n_0} \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right) \leq \mu(B_{n_0}) < +\infty$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right) < +\infty$

donc : $\mu\left(B_1 \setminus \left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right)\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right)$ (2)

et on a : $\forall n \geq n_0$ $B_n \subset B_{n_0} \subset B_1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $B_n \subset B_1$

avec : $\forall n \geq n_0$ $B_n \subset B_{n_0} \Rightarrow \mu(B_n) \leq \mu(B_{n_0}) < +\infty$

$\Rightarrow \mu(B_n) < +\infty$

donc : $\forall n \geq n_0 :$ $\mu(B_1 \setminus B_n) = \mu(B_1) - \mu(B_n)$ (3)

de (1), (2) et (3) on déduit que :

$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_1) - \mu(B_n)$

Alors : $\mu\left(\bigcap_{n \geq n_0} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n)$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n)$

La sous-σ-additivité,

Soit $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$,

Alors :

$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$

Considérons $(E_n)_{n \geq 1}$ une famille d'ensembles telle que : $E_1 = A_1$ et $\forall n \geq 2 :$ $E_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

d'où : $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2,

et : $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \dot{\bigcup}_{n \geq 1} E_n$

donc : $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n)$

or : $\forall n \geq 1 :$ $E_n \subset A_n \Rightarrow \mu(E_n) \leq \mu(A_n)$

donc : $\sum_{n \geq 1} \mu(E_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$

Alors $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$

La sous-additivité,

Soit $n \geq 1$ fixé,

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}$,

Alors :

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Considérons $F_1, F_2, \dots, F_n$ des ensembles telles que : $F_1 = A_1$ et $\forall 2 \leq i \leq n :$ $F_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)$

d'où : $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{T}$ disjointes 2 à 2,

et : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} F_i$

donc : $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} F_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)\right)$

on a : $\forall 1 \leq i \leq n :$ $A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) = A_i \cap \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c\right)$

d'où : $\forall 1 \leq i \leq n :$ $\mu\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)\right) = \mu\left(A_i \cap \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c\right)\right)$

or : $\forall 1 \leq i \leq n :$ $A_i \cap \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c\right) \subset A_i$

$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n$ $\mu\left(A_i \cap \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c\right)\right) \leq \mu(A_i)$

donc $\forall 1 \leq i \leq n :$ $\mu\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)\right) \leq \mu(A_i)$

d'où $\sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Alors : $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Rappel sur la limite Sup et la limite Inf de suite d'ensembles :

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles,

* La limite Inf de $(A_n)_{n \geq 1}$:

$$\underline{\lim}\, A_n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Inf}(A_n) = \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right)$$

« c'est l'ensemble de tous les éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux »

* La limite Sup de $(A_n)_{n \geq 1}$:

$$\overline{\lim}\, A_n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Sup}(A_n) = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

« c'est l'ensemble de tous les éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n pour une infinité d'indices n »

Rappel sur la limite Sup et la limite Inf de suite numérique :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique,

* La limite Inf de $(u_n)_{n \geq 1}$:

$$\underline{\lim}\, u_n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Inf}(u_n) = \mathrm{Sup}_{n \geq 1}\left(\mathrm{Inf}_{k \geq n}(u_k)\right)$$

* La limite Sup de $(\mu_n)_{n\geq 1}$:

$$\overline{\lim}\, \mu_n = \lim_{n\to+\infty} Sup(\mu_n) = \underset{n\geq 1}{Inf}\left(\underset{k\geq n}{Sup}(\mu_k)\right)$$

Proposition de "Fatou" pour la limite Inf et la limite Sup :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$,

<table>
<tr>
<td>$\mu(\underline{\lim}\, A_n)$
$\leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$
$\leq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$

$\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)_{n\geq 1}$ croissante ?
pour 3 et 4 (3<4) :
$\bigcap_{k\geq 4} A_k = A_4 \cap \dots$
$\bigcap_{k\geq 3} A_k = A_3 \cap A_4 \cap \dots$
$= A_3 \cap \bigcap_{k\geq 4} A_k$
$\Rightarrow \bigcap_{k\geq 3} A_k \subset \bigcap_{k\geq 4} A_k$

$\underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$?
on a $\forall n\geq 1$:
$\mu(A_n) \leq Sup(\mu(A_n))$
et $\mu(A_n) \geq Inf(\mu(A_n))$
$\Rightarrow \forall n\geq 1$:
$Inf(\mu(A_n)) \leq Sup(\mu(A_n))$
Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$:
$\lim_{n\to+\infty} Inf(\mu(A_n))$
$\leq \lim_{n\to+\infty} Sup(\mu(A_n))$
$\Rightarrow \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$</td>
<td>on a : $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$
d'où : $\mu(\underline{\lim}\, A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)\right)$
Comme : $\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ croissante,
donc : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$
d'où : $\mu(\underline{\lim}\, A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$ (1)
on a : $\forall n\geq 1$, $\bigcap_{k\geq n} A_k \subset A_n$
d'où : $\forall n\geq 1$, $\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \mu(A_n)$
c-à-d : $\forall n\geq 1$, $\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$ est un minorant de $\mu(A_n)$,
or : $\forall n\geq 1$, $Inf(\mu(A_n))$ est le plus grand des minorants de $\mu(A_n)$,
donc : $\forall n\geq 1$: $\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq Inf(\mu(A_n))$
d'où : $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} Inf(\mu(A_n))$
or : $\underline{\lim}\, \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} Inf(\mu(A_n))$
donc : $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$ (2)
de (1) et (2), on déduit que :
$\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$
et comme : $\underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$
Alors : $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$</td>
</tr>
<tr>
<td>S'il existe $n_0 \geq 1$ tel que :
$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} A_n\right) < +\infty$
Alors :
$\overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n)$

$\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\geq 1}$ décroissante ?
pour 3 et 4 (3<4) :
$\bigcup_{k\geq 4} A_k = A_4 \cup \dots$
$\bigcup_{k\geq 3} A_k = A_3 \cup A_4 \cup \dots$
$= A_3 \cup \bigcup_{k\geq 4} A_k$
$\Rightarrow \bigcup_{k\geq 4} A_k \subset \bigcup_{k\geq 3} A_k$</td>
<td>on a : $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$
d'où : $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)\right)$
comme : $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \subset \mathcal{T}$ décroissante,
et : $\exists n_0 \geq 1 / \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} A_k\right) < +\infty$
donc : $\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$
d'où : $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ (1)
on a : $\forall n\geq 1$, $A_n \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$
d'où : $\forall n\geq 1$, $\mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$
c-à-d : $\forall n\geq 1$, $\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ est un majorant de $\mu(A_n)$,
or : $\forall n\geq 1$, $Sup(\mu(A_n))$ est le plus petit des majorants de $\mu(A_n)$,
donc : $\forall n\geq 1$: $\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq Sup(\mu(A_n))$
d'où : $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \lim_{n\to+\infty} Sup(\mu(A_n))$
or : $\overline{\lim}\, \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} Sup(\mu(A_n))$
donc : $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$ (2)
de (1) et (2), on déduit que :
$\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$
Alors : $\overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n)$</td>
</tr>
</table>

Fin de Chapitre II

Ensemble Négligeable - Complétion - Presque Partout :

Définition d'un ensemble μ-négligeable :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,
Soit $A \subset \Omega$,
A est dite μ-négligeable si :

$$\exists B \in \mathcal{T} \,/\, A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0$$

on note par N_μ l'ensemble de parties de Ω qui sont μ-négligeable :

$$A \in N_\mu \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{T} \,/\, A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0$$

Remarques sur les ensembles μ-négligeables :

$A \in N_\mu \not\Rightarrow A \in \mathcal{T}$	Considérons : $\Omega = \{1,2,3\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega, \{1,3\}, \{2\}\}$ $\forall X \in \mathcal{T} : \mu(X) = 0$ $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré, Pour $A = \{3\} \subset \Omega$ on a : $A \subset \{1,3\}$ où $\{1,3\} \in \mathcal{T}$ avec : $\mu(\{1,3\}) = 0$ donc : $A \in N_\mu$ or : $A \notin \mathcal{T}$
$\begin{cases} A \in N_\mu \\ A \in \mathcal{T} \end{cases} \Rightarrow \mu(A) = 0$	on a : $A \in N_\mu$ d'où : $\exists B \in \mathcal{T} \,/\, A \subset B$ et $\mu(B) = 0$ on a : $A, B \in \mathcal{T}$ avec $A \subset B$ donc : $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ or : $\mu(B) = 0$ d'où : $\mu(A) \leqslant 0$ (1) et comme : $\mu(A) \geqslant 0$ (2) de (1) et (2) : $\mu(A) = 0$
Toute partie d'un ensemble μ-négligeable est μ-négligeable : Soit $A \in N_\mu$, $\forall X \subset A : X \in N_\mu$	Soit $X \subset A$, on a : $A \in N_\mu$ d'où : $\exists B \in \mathcal{T} \,/\, A \subset B$ et $\mu(B) = 0$ donc : $X \subset B$ Alors : $X \in N_\mu$
Soit $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset N_\mu$, Alors : $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in N_\mu$	on a : $\forall n \geqslant 1 : A_n \in N_\mu$ d'où : $\forall n \geqslant 1, \exists B_n \in \mathcal{T} \,/\, A_n \subset B_n$ et $\mu(B_n) = 0$ donc : $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \subset \bigcup_{n \geqslant 1} B_n$ avec : $\bigcup_{n \geqslant 1} B_n \in \mathcal{T}$, comme $(B_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{T}$ de plus : $\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} B_n) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu(B_n)$ comme : $\sum_{n \geqslant 1} \mu(B_n) = 0$, car $\forall n \geqslant 1 \, \mu(B_n) = 0$ donc : $\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} B_n) \leqslant 0$ or : $\mu(\bigcup B_n) \geqslant 0$ d'où : $\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} B_n) = 0$ Alors : $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \subset \bigcup_{n \geqslant 1} B_n$ avec : $\bigcup_{n \geqslant 1} B_n \in \mathcal{T}$ et $\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} B_n) = 0$ d'où : $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in N_\mu$

Définition d'une mesure complète :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,
μ est dite complète sur $\mathcal{T}$ si :

$$\forall A \in N_\mu : A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow N_\mu \subset \mathcal{T}$$

Dans ce cas : l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est dit complet.

Définition proposition μ-presque partout (μ-p.p) / μ-presque sûrement (μ-p.s) :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,
Soit $x \in \Omega$,
Soit $P(x)$ une proposition dépendant de x,
$P(x)$ est vraie μ-presque partout si l'ensemble des points de Ω qui ne vérifient pas $P(x)$ est μ-négligeable. (vérifient donc non$(P(x))$)
Autrement dit :

$$P(x) \text{ vraie } \mu\text{-p.p} \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega \,/\, \text{non}(P(\omega))\} \in N_\mu$$
$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{T} \,/\, \{\omega \in \Omega \,/\, \text{non}(P(\omega))\} \subset B \text{ et } \mu(B) = 0$$

Fin de Chapitre #

Mesure de Lebesgue :

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que:

$$\lambda(]a,b[) = b-a$$

Remarque :

La mesure de Lebesgue est diffuse, c-à-d: $\lambda(\{x\})=0$

montrons que: $\{x\} = \bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$

on a: $\forall n\geq1$, $\{x\}\subset]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[$

d'où: $\{x\}\subset\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[$ (1)

d'autre part:

Soit $y\in\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[$

d'où: $\forall n\geq 1$, $x-\frac{1}{n}<y<x+\frac{1}{n}$

par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$,

on obtient: $x\leq y\leq x$

d'où: $y=x$

c-à-d: $y\in\{x\}$

donc: $\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[\subset\{x\}$ (2)

de (1) et (2): $\{x\}=\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[$

Alors $\{x\}=\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[$

d'où: $\lambda(\{x\}) = \lambda(\bigcap_{n\geq1}]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[)$

puisque: $(]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[)_{n\geq1}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est décroissante telle que: $\exists n_0\geq1$, $\lambda(]x-\frac{1}{n_0},x+\frac{1}{n_0}[)<+\infty$

et: λ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

donc: d'après la continuité séquentielle ↘:

$$\lambda(\bigcap_{n\geq1}]x-\tfrac{1}{n},x+\tfrac{1}{n}[) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]x-\tfrac{1}{n},x+\tfrac{1}{n}[) = \lim_{n\to+\infty} x+\tfrac{1}{n} - x+\tfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{2}{n}$$

$$\lambda(\bigcap_{n\geq1}]x-\tfrac{1}{n},x+\tfrac{1}{n}[)=0$$

d'où: $\lambda(\{x\})=0$

Conséquence :

$$\lambda([a,b])=\lambda(]a,b[)=\lambda([a,b[)=\lambda(]a,b])$$

on a:
- $\lambda(]a,b[)=b-a$, par définition
- $\lambda([a,b]) = \lambda(\{a\}\cup]a,b[\cup\{b\})$

  avec: $\{a\}$, $]a,b[$ et $\{b\}$ sont disjointe 2 à 2,

  et: λ est une mesure,

  donc: $\lambda(\{a\}\cup]a,b[\cup\{b\}) = \lambda(\{a\})+\lambda(\{b\})+\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b[)$

  $\lambda(\{a\}\cup]a,b[\cup\{b\}) = b-a$

  d'où: $\lambda([a,b]) = b-a$
- $\lambda([a,b[) = \lambda(\{a\}\cup]a,b[) = \lambda(\{a\})+\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b[) = b-a$
- $\lambda(]a,b]) = \lambda(]a,b[\cup\{b\}) = \lambda(]a,b[)+\lambda(\{b\}) = \lambda(]a,b[) = b-a$

Alors: $\lambda(]a,b[)=\lambda([a,b])=\lambda(]a,b])=\lambda([a,b[)$

Remarque :

on a: $\lambda(x+[a,b]) = \lambda([a,b])$

Cette propriété se généralise à tous les boréliennes B, et on a: $\lambda(x+B)=\lambda(B)$

Théorème :

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie:

i) $\mu([0,1])=1$

ii) $\mu(x+B)=\mu(B)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Alors: μ est une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que μ est une mesure de Lebesgue, on doit mq: $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$: $\mu(]a,b[)=b-a$

$]a,b[$ contient une infinité de réels, et d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, entre tous deux réels, il y'a un rationnel.

donc: Considérons $(r_n)_{n\geq1}$ et $(r'_n)_{n\geq1}$ deux suites de $\mathbb{Q}$ telles que:
- $(r_n)_{n\geq1}$ décroît vers a,
- $(r'_n)_{n\geq1}$ croît vers b;

d'où: $]a,b[= \bigcup_{n\geq1}]r_n, r'_n]$

alors: $\mu(]a,b[) = \mu(\bigcup_{n\geq1}]r_n,r'_n])$

puisque: $(]r_n,r'_n])_{n\geq1} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est croissante,

et: μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

donc: d'après la continuité séquentielle ↗:

$$\mu(\bigcup_{n\geq1}]r_n,r'_n]) = \lim_{n\to+\infty} \mu(]r_n,r'_n])$$

d'où: $\mu(]a,b[) = \lim_{n\to+\infty} \mu(]r_n,r'_n])$

Pour calculer $\mu(]r_n,r'_n])$, on doit calculer d'abord: $\mu(]\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}])$ où $\frac{k}{m}, \frac{k'}{m} \in \mathbb{Q}$

Pour calculer $\mu(]\frac{k}{m},\frac{k'}{m}])$, on doit calculer d'abord: $\mu(]0,\frac{1}{m}])$

Pour calculer $\mu(]0;\frac{1}{n}])$, on doit calculer d'abord $\mu(\{0\})$

Etape 1: mq: $\mu(\{0\})=0$

on a: $n\mu(\{0\})=\underbrace{\mu(\{0\})+\mu(\{0\})+\cdots+\mu(\{0\})}_{n\ fois}$

comme: $\{0\}^c=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$,

donc: $\{0\}=\bigcap_{n\geq1}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ est un fermé de $\mathbb{R}$,

d'où: $\{0\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

alors: on peut utiliser ii) :

$$n\mu(\{0\})=\mu(\tfrac{1}{n}+\{0\})+\mu(\tfrac{2}{n}+\{0\})+\mu(\tfrac{3}{n}+\{0\})+\cdots+\mu(\tfrac{n}{n}+\{0\})$$
$$=\mu(\{\tfrac{1}{n}\})+\mu(\{\tfrac{2}{n}\})+\mu(\{\tfrac{3}{n}\})+\cdots+\mu(\{\tfrac{n}{n}\})$$
$$=\sum_{K=1}^{n}\mu(\{\tfrac{K}{n}\})$$

comme: $(\{\frac{K}{n}\})_{1\leq K\leq n}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjointe 2 à 2,

donc: d'après l'additivité de μ :

$$\mu(\bigcup_{K=1}^{n}\{\tfrac{K}{n}\})=\sum_{K=1}^{n}\mu(\{\tfrac{K}{n}\})$$

d'où: $n\mu(\{0\})=\mu(\bigcup_{K=1}^{n}\{\frac{K}{n}\})$

or: $\bigcup_{K=1}^{n}\{\frac{K}{n}\}=\{\frac{1}{n}\}\cup\{\frac{2}{n}\}\cup\ldots\cup\{\frac{n}{n}\}$
$=\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\}$
$\subset[0,1]$

donc: $\mu(\bigcup_{K=1}^{n}\{\frac{K}{n}\})\leq\mu([0,1])$ avec $\mu([0,1])=1$

d'où: $\mu(\bigcup_{K=1}^{n}\{\frac{K}{n}\})\leq1$

alors: $n\mu(\{0\})\leq1$

d'où: $0\leq\mu(\{0\})\leq\frac{1}{n}$

par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$,

on obtient: $\mu(\{0\})=0$

Etape 2: mq $\mu(]0,\frac{1}{n}])=\frac{1}{n}$

on a: $n\mu(]0,\frac{1}{n}])=\underbrace{\mu(]0,\frac{1}{n}])+\mu(]0,\frac{1}{n}])+\cdots+\mu(]0,\frac{1}{n}])}_{n\ fois}$

comme: $\forall n\geq1$, $]0,\frac{1}{n}]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

alors: on peut utiliser ii) :

$$n\mu(]0,\tfrac{1}{n}])=\mu(0+]0,\tfrac{1}{n}])+\mu(\tfrac{1}{n}+]0,\tfrac{1}{n}])+\cdots+\mu(\tfrac{n-1}{n}+]0,\tfrac{1}{n}])$$
$$=\mu(]0,\tfrac{1}{n}])+\mu(]\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}])+\cdots+\mu(]\tfrac{n-1}{n},\tfrac{n}{n}])$$
$$=\sum_{K=1}^{n}\mu(]\tfrac{K-1}{n},\tfrac{K}{n}])$$

comme: $(]\frac{K-1}{n},\frac{K}{n}])_{1\leq K\leq n}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjointe 2 à 2,

donc: d'après l'additivité de μ :

$$\mu(\bigcup_{K=1}^{n}]\tfrac{K-1}{n},\tfrac{K}{n}])=\sum_{K=1}^{n}\mu(]\tfrac{K-1}{n},\tfrac{K}{n}])$$

d'où: $n\mu(]0,\frac{1}{n}])=\mu(\bigcup_{K=1}^{n}]\frac{K-1}{n},\frac{K}{n}])$

or: $\bigcup_{K=1}^{n}]\frac{K-1}{n},\frac{K}{n}]=]0,\frac{1}{n}]\cup]\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\cup\ldots\cup]\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}]$
$=]0,\frac{n}{n}]$
$=]0,1]$

donc: $\mu(\bigcup_{K=1}^{n}]\frac{K-1}{n},\frac{K}{n}])=\mu(]0,1])+\mu(\{0\})-\mu(\{0\})$
$=\mu(]0,1]\cup\{0\})-\underbrace{\mu(\{0\})}_{=0}$
$=\mu([0,1])$

d'où: $\mu(\bigcup_{K=1}^{n}]\frac{K-1}{n},\frac{K}{n}])=1$

Alors: $n\mu(]0,\frac{1}{n}])=1$

d'où: $\mu(]0,\frac{1}{n}])=\frac{1}{n}$

Etape 3: mq: $\mu(]\frac{K}{n},\frac{K'}{n}])=\frac{K'}{n}-\frac{K}{n}$

on a: $\mu(]\frac{K}{n},\frac{K'}{n}])=\mu(\bigcup_{i=K+1}^{K'}]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$
$=\sum_{i=K+1}^{K'}\mu(]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$

avec: $\mu(]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])=\mu(]\frac{i-1}{n},\frac{1}{n}+\frac{i-1}{n}])$
$=\mu(\frac{i-1}{n}+]0,\frac{1}{n}])$

comme: $]0,\frac{1}{n}]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\frac{i-1}{n}\in\mathbb{R}$

alors: on peut utiliser ii):

$\mu(\frac{i-1}{n}+]0,\frac{1}{n}])=\mu(]0,\frac{1}{n}])$

d'où: $\mu(]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])=\mu(]0,\frac{1}{n}])$
$=\frac{1}{n}$

donc: $\mu(]\frac{K}{n},\frac{K'}{n}])=\sum_{i=K+1}^{K'}\frac{1}{n}$
$=\frac{1}{n}\sum_{i=K+1}^{K'}1$
$=\frac{1}{n}(K'-(K+1)+1)$
$=\frac{K'-K}{n}$

d'où: $\mu(]\frac{K}{n},\frac{K'}{n}])=\frac{K'}{n}-\frac{K}{n}$

Etape 4: mq: $\mu(]a,b[)=b-a$

on a: $\mu(]a,b[)=\lim_{n\to+\infty}\mu(]r_n,r'_n])$

avec: • $(r_n)_{n\geq1}\subset\mathbb{Q}$ décroit vers a,
• $(r'_n)_{n\geq1}\subset\mathbb{Q}$ croit vers b;

d'où: $\mu(]r_n,r'_n])=r'_n-r_n$

donc: $\mu(]a,b[)=\lim_{n\to+\infty}r'_n-r_n$
$=b-a$

Alors: μ est une mesure de de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarque sur la mesure de Lebesgue-Stieltjes:

Il s'agit de la généralisation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition d'une mesure borélienne:

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
μ est dite mesure borélienne si $\mu(K)<+\infty$ pour tout K compact de $\mathbb{R}$.

Autrement dit:

μ est borélienne $\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}$, $\mu([-n,n])$ est fini

Théorème:

Soit μ une mesure borélienne,
La fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par:

$$F(x)=\begin{cases}\mu(]\alpha,x]) & si\ x\geq\alpha\\ -\mu(]x,\alpha]) & si\ x<\alpha\end{cases}$$

vérifie les propriétés suivantes:

i) F est croissante
ii) F est continue à droite
iii) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\mu(]a,b])=F(b)-F(a)$

i) montrons que F est croissante,

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que: $a < b$

1er cas: Si $\alpha \leq a < b$

d'où: $]\alpha, a] \subset]\alpha, b]$

Comme μ est une mesure,

donc: $\mu(]\alpha, a]) \leq \mu(]\alpha, b])$

or: $F(a) = \mu(]\alpha, a])$ car $a \geq \alpha$

et: $F(b) = \mu(]\alpha, b])$ car $b \geq \alpha$

d'où: $F(a) \leq F(b)$

2ème cas: Si $a < b < \alpha$

d'où: $]b, \alpha] \subset]a, \alpha]$

Comme μ est une mesure,

donc: $\mu(]b, \alpha]) \leq \mu(]a, \alpha])$

or: $F(a) = -\mu(]a, \alpha])$ car $a < \alpha$

et: $F(b) = -\mu(]b, \alpha])$ car $b < \alpha$

d'où: $-F(b) \leq -F(a)$

donc: $F(a) \leq F(b)$

Alors: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$

d'où: F est croissante.

ii) montrons que F est continue à droite,

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement décroissante vers x,

1er cas: Si $x \geq \alpha \Rightarrow F(x) = \mu(]\alpha, x])$

d'où: $\forall n \geq 1$: $x_n \geq \alpha \Rightarrow F(x_n) = \mu(]\alpha, x_n])$

on a: $]\alpha, x] = \bigcap_{n \geq 1}]\alpha, x_n]$

d'où: $\mu(]\alpha, x]) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1}]\alpha, x_n]\right)$

comme: $(]\alpha, x_n])_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est décroissante,

avec: $\forall n \geq 1$: $\mu(]\alpha, x_n]) < +\infty$ car μ est borélienne,

et: μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

donc: d'après la continuité séquentielle $\searrow$:

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1}]\alpha, x_n]\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(]\alpha, x_n]) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$$

d'où: $\mu(]\alpha, x]) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$

c-à-d: $F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$

2ème cas: Si $x < \alpha \Rightarrow F(x) = -\mu(]x, \alpha])$

Supposons que: $\forall n \geq 1$: $x_n < \alpha \Rightarrow F(x_n) = -\mu(]x_n, \alpha])$

on a: $]x, \alpha] = \bigsqcup_{n \geq 1}]x_n, \alpha]$

d'où: $\mu(]x, \alpha]) = \mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1}]x_n, \alpha]\right)$

comme: $(]x_n, \alpha])_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est croissante,

et: μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

donc: d'après la continuité séquentielle $\nearrow$:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1}]x_n, \alpha]\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(]x_n, \alpha]) = \lim_{n \to +\infty} -F(x_n)$$

d'où: $\mu(]x, \alpha]) = \lim_{n \to +\infty} -F(x_n)$

c-à-d: $-F(x) = \lim_{n \to +\infty} -F(x_n)$

d'où: $F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$

Alors: F est continue à droite.

iii) montrons que: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que: $a < b$

1er cas: Si $\alpha \leq a < b$

on a: $]a, b] =]\alpha, b] \setminus]\alpha, a]$

d'où: $\mu(]a, b]) = \mu(]\alpha, b] \setminus]\alpha, a])$

Comme: $]\alpha, a] \subset]\alpha, b]$

et: $\mu(]\alpha, a]) < +\infty$ car μ est borélienne

donc: $\mu(]\alpha, b] \setminus]\alpha, a]) = \mu(]\alpha, b]) - \mu(]\alpha, a])$

d'où: $\mu(]a, b]) = \mu(]\alpha, b]) - \mu(]\alpha, a])$

or: $F(a) = \mu(]\alpha, a])$ car $a \geq \alpha$

et: $F(b) = \mu(]\alpha, b])$ car $b \geq \alpha$

donc: $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$

2ème cas: Si $a < b < \alpha$

on a: $]a, b] =]a, \alpha] \setminus]b, \alpha]$

d'où: $\mu(]a, b]) = \mu(]a, \alpha] \setminus]b, \alpha])$

comme: $]b, \alpha] \subset]a, \alpha]$

et: $\mu(]b, \alpha]) < +\infty$ car μ est borélienne

donc: $\mu(]a, \alpha] \setminus]b, \alpha]) = \mu(]a, \alpha]) - \mu(]b, \alpha])$

d'où: $\mu(]a, b]) = \mu(]a, \alpha]) - \mu(]b, \alpha])$

or: $F(a) = -\mu(]a, \alpha])$ car $a < \alpha$

et: $F(b) = -\mu(]b, \alpha])$ car $b < \alpha$

donc: $\mu(]a, b]) = -F(a) - (-F(b)) = F(b) - F(a)$

3ème cas: Si $a < \alpha \leq b$

on a: $]a, b] =]a, \alpha] \cup]\alpha, b]$

d'où: $\mu(]a, b]) = \mu(]a, \alpha] \cup]\alpha, b]) = \mu(]a, \alpha]) + \mu(]\alpha, b])$

car: $]a, \alpha] \cap]\alpha, b] = \emptyset$

or: $F(a) = -\mu(]a, \alpha])$ car $a < \alpha$

et: $F(b) = \mu(]\alpha, b])$ car $b \geq \alpha$

donc: $\mu(]a, b]) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$

Alors: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$

Théorème (la réciproque du théorème précédent):

Soit $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct continue à droite et croissante,

Alors: Il existe une unique mesure μ_F sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$

μ_F s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F, on la note par λ_F.

Fin de Chapitre I

Fonctions mésurables :

Topologie de $\overline{\mathbb{R}}$:

Topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$:

La topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ est définie par la base de voisinages formée par les intervalles suivantes :

* Les intervalles $]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[; a\in\mathbb{R}, n\geq 1$ est un voisinage de a ;
* Les intervalles $[-\infty, n[; n\geq 1$ est un voisinage de $-\infty$;
* Les intervalles $]n,+\infty[; n\geq 1$ est un voisinage de $+\infty$

Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}$:

La tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}$, notée $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, est la tribu engendrée par $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Autrement dit : $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

Topologie induite sur $\overline{\mathbb{R}}$:

Soit $A\subset\overline{\mathbb{R}}$,

on écrit : $\tau_A = \{O\cap A : O\in\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ "ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$"$\}$

en particulier :

on a : $\mathbb{R}\subset\overline{\mathbb{R}}$, car $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$

d'où : $\tau_{\mathbb{R}} = \{O\cap\mathbb{R} : O\in\tau_{\overline{\mathbb{R}}}\}$

Remarques :

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$,

d'où : $O = \bigsqcup_{i\in I}]a_i, b_i[$

on a : $(a_i)_{i\in I}\subset\mathbb{R}$ et $(b_i)_{i\in I}\subset\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}\subset\overline{\mathbb{R}}$

donc : $(a_i)_{i\in I}\subset\overline{\mathbb{R}}$ et $(b_i)_{i\in I}\subset\overline{\mathbb{R}}$

d'où : $\forall i\in I$, $]a_i, b_i[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$,

donc : $\bigsqcup_{i\in I}]a_i, b_i[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$,

c-à-d : O est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

En effet : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_{\mathbb{R}})$

et : $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

on a : $\tau_{\mathbb{R}}\subset\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ $(\forall O\in\tau_{\mathbb{R}} : O\in\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

or : $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}\subset\sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

donc : $\tau_{\mathbb{R}}\subset\sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

d'où : $\sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$ est une tribu contenant $\tau_{\mathbb{R}}$,

comme $\sigma(\tau_{\mathbb{R}})$ est la plus petite tribu contenant $\tau_{\mathbb{R}}$

Alors : $\sigma(\tau_{\mathbb{R}})\subset\sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})$

d'où : $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Si V est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $V\cap\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit la fonction $\varphi : [-1,1]\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x=-1 \\ \tan(\frac{\pi}{2}x) & \text{si } x\in]-1,1[\\ +\infty & \text{si } x=1 \end{cases}$$

* φ est continue sur $[-1,1]$;

En effet :

i) Si $x=-1$: $\lim_{x\to-1^+}\varphi(x) = \lim_{x\to-1^+}\tan(\frac{\pi}{2}x)$
$= \lim_{X\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(X)$
$= -\infty$
$= \varphi(-1)$

d'où : φ est continue en -1 à droite.

ii) Si $x\in]-1,1[$:

la fct $x\longmapsto\tan(\frac{\pi}{2}x)$ est continue sur $]-1,1[$ (elle s'agit d'une fct trigonométrique)

d'où : φ est continue sur $]-1,1[$.

iii) Si $x=1$: $\lim_{x\to1^-}\varphi(x) = \lim_{x\to1^-}\tan(\frac{\pi}{2}x)$
$= \lim_{X\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(X)$
$= +\infty$
$= \varphi(1)$

d'où : φ est continue en 1 à gauche.

* φ réalise une bijection de $[-1,1]$ vers $\overline{\mathbb{R}}$;
* φ^{-1} existe, de plus elle est continue sur $\overline{\mathbb{R}}$;

$\Rightarrow$ φ est un homéomorphisme.

on :

* $[-1,1]$ est un compact, donc $\varphi([-1,1]) = \overline{\mathbb{R}}$ est aussi un compact, car φ est continue.
* $]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et $]-1,1[\subset[-1,1]$ donc : $]-1,1[$ est un ouvert de $[-1,1]$, d'où l'image réciproque de $]-1,1[$ par φ^{-1} est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, car φ^{-1} est continue.

Autrement dit : $(\varphi^{-1})^{-1}(]-1,1[) = \mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

* La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est métrisable : $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$d(x,y) = |\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)| = \frac{2}{\pi}|\arctan(x)-\arctan(y)|$$

Fonctions Mesurables :

Définition d'une fct mesurable :

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables (probabilisables),

Soit la fct $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$

la fct f est dite $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable (variable aléatoire) si : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$

c-à-d : $\forall B \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$

Remarques :

Soit $f : (\Omega_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ une fct $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable,
Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω_1 et Ω_2 respect
telles que : $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{T}_2$
Alors : f est $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$ mesurable

On a : $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{T}_2$ d'où : $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset f^{-1}(\mathcal{T}_2)$
Comme : f est $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable,
donc : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$
d'où : $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{F}_1$
donc : $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1$
Alors : f est $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$ mesurable.

Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ et $\mathcal{T}_2 = \{\phi, \Omega_2\}$, Alors : la fct $f : (\Omega_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ est toujours $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable

En effet : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \{f^{-1}(\phi), f^{-1}(\Omega_2)\}$
$f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \{\phi, \Omega_1\}$
or : $\{\phi, \Omega_1\} \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ c-à-d : $\{\phi, \Omega_1\} \subset \mathcal{T}_1$
donc : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$
Alors : f est $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable.

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux espaces topologiques,
avec : $\mathcal{T}_1 = \mathcal{B}(\Omega_1) = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{T}_2 = \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}_2$,
Alors : la fct $f : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ est $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_2$ mesurable
Dans ce cas : f est dite borélienne

Soit $f : (\Omega_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ une fct $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ mesurable,
Soit $A \subset \Omega_1$,
Soit $\mathcal{T}_1 \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{T}_1\}$ une tribu sur A,
Alors : $f_{|A}$ est $\mathcal{T}_1 \cap A$-$\mathcal{T}_2$ mesurable.

* montrons que : $\mathcal{T}_1 \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{T}_1\}$ est une tribu sur A.

i) on a : $A = \Omega_1 \cap A$ avec $\Omega_1 \in \mathcal{T}_1$
donc : $A \in \mathcal{T}_1 \cap A$

ii) Soit $O \in \mathcal{T}_1 \cap A$: $O = B \cap A$ avec $B \in \mathcal{T}_1$

on a : $O^c = A \setminus O = A \setminus (B \cap A)$
$O^c = A \cap (B^c \cup A^c)$
$O^c = (A \cap B^c) \cup \underbrace{(A \cap A^c)}_{=\phi}$
d'où : $O^c = B^c \cap A$
avec : $B \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow B^c \in \mathcal{T}_1$
donc : $O^c \in \mathcal{T}_1 \cap A$

iii) Soit $(O_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}_1 \cap A$: $\forall n \geq 1$, $O_n = B_n \cap A$ avec $B_n \in \mathcal{T}_1$

on a : $\bigsqcup_{n\geq 1} O_n = \bigsqcup_{n\geq 1} (B_n \cap A)$
d'où : $= \left(\bigsqcup_{n\geq 1} B_n\right) \cap A$
avec : $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}_1 \Rightarrow \bigsqcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{T}_1$
donc : $\bigsqcup_{n\geq 1} O_n \in \mathcal{T}_1 \cap A$
Alors : $\mathcal{T}_1 \cap A$ est une tribu sur A.

* mq : $f_{|A}$ est $\mathcal{T}_1 \cap A$-$\mathcal{T}_2$ mesurable.

$f_{|A}$ est la restriction de f à A,
c-à-d : $f_{|A} : A \longrightarrow \Omega_2$
$x \longmapsto f_{|A}(x) = f(x)$

on a : $x \in f_{|A}^{-1}(\mathcal{T}_2) \Rightarrow f_{|A}(x) \in \mathcal{T}_2$
$\Rightarrow x \in A$ et $f(x) \in \mathcal{T}_2$
$\Rightarrow x \in A$ et $x \in f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$
$\Rightarrow x \in \mathcal{T}_1 \cap A$

donc : $f_{|A}^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1 \cap A$, Alors : $f_{|A}$ est $\mathcal{T}_1 \cap A$-$\mathcal{T}_2$ mesurable

Exemples des fcts mesurables :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable,
Soit $A \subset \Omega$,
Soit la fct indicatrice de A définie par :

$$\mathbb{1}_A : (\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Alors : $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable $\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$

* Calculons : $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

on a : $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{\mathbb{1}_A^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

on a : $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega \,/\, \mathbb{1}_A(x) \in B\}$
$= \{x \in \Omega \,/\, 0 \in B \text{ ou } 1 \in B\}$

- Si $0 \in B$ et $1 \notin B$:
$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega \,/\, \mathbb{1}_A(x) = 0\}$
$= \{x \in \Omega \,/\, x \notin A\}$
$= A^c$

- Si $0 \notin B$ et $1 \in B$:
$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega \,/\, \mathbb{1}_A(x) = 1\}$
$= \{x \in \Omega \,/\, x \in A\}$
$= A$

- Si $0 \in B$ et $1 \in B$: $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \Omega$

- Si $0 \notin B$ et $1 \notin B$: $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \phi$

donc :

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B \\ A^c & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ \Omega & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \\ \phi & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \end{cases}$$

d'où : $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{\phi, A, A^c, \Omega\} = \sigma(\{A\})$

donc : $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(\{A\})$

Alors : $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable $\iff \mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$

$\iff \sigma(\{A\}) \subset \mathcal{T}$

$\iff \{A\} \subset \mathcal{T}$

$\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable $\iff A \in \mathcal{T}$

Toute application constante est mesurable

Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$x \longmapsto f(x) = \alpha$

montrons que f est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable,

c-à-d : $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

on a : $f^{-1}(B) = \{x \in \Omega / f(x) \in B\}$

or : $\forall x \in \Omega$; $f(x) = \alpha$

donc :
$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & \text{si } \alpha \in B \\ \phi & \text{si } \alpha \notin B \end{cases}$$

comme : $\Omega, \phi \in \mathcal{T}$, donc : $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$

d'où : $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$

Alors : f est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.

Proposition :

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{T}_3)$ des espaces mesurables,
Soient $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ deux applications mesurables,
Alors : $g \circ f$ est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3$ mesurable

montrons que $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3$ mesurable,

c-à-d : $(g \circ f^{-1})(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{T}_1$

on a : g est $\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_3$ mesurable,

d'où : $g^{-1}(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{T}_2$

Soit $O \in \mathcal{T}_3$,

donc : $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_2$

on a : f est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ mesurable,

d'où : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$

c-à-d : $\forall V \in \mathcal{T}_2$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$

en particulier : $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}_1$

c-à-d : $f^{-1} \circ g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$

$(g \circ f)^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$

d'où : $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{T}_1$

Alors : $g \circ f$ est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3$ mesurable

---

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables
Si : • $C \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ et $\sigma(C) = \mathcal{T}_2$
• $f : \Omega_1 \to \Omega_2$
Alors : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1 \iff f^{-1}(C) \subset \mathcal{T}_1$

$\Rightarrow$/ Supposons que : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$

on a : $\sigma(C) = \mathcal{T}_2$, d'où : $C \subset \mathcal{T}_2$

donc : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$

c-à-d : $f^{-1}(C) \subset \mathcal{T}_1$

$\Leftarrow$/ Supposons que : $f^{-1}(C) \subset \mathcal{T}_1$

Considérons $\mathcal{T} = \{B \subset \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1\}$

mq $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω_2,

i) on a : $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \mathcal{T}_1$

donc : $\Omega_2 \in \mathcal{T}$

ii) Soit $A \in \mathcal{T}$: $A \subset \Omega_2$ et $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$

on a : $A \subset \Omega_2 \Rightarrow A^c \subset \Omega_2$

et $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T}_1$

donc : $A^c \in \mathcal{T}$

iii) Soit $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}$: $\forall n \geq 1$, $A_n \subset \Omega_2$ et $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}_1$

on a : $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Omega_2 \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \Omega_2$

et : $\forall n \geq 1$, $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \in \mathcal{T}_1$

donc : $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{T}$

Alors : $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω_2,

et on a : $f^{-1}(C) \subset \mathcal{T}_1 \Rightarrow C \subset f(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}$
$\Rightarrow C \subset \mathcal{T}$

donc : $\mathcal{T}$ est une tribu contenant C,

d'où : $\sigma(C) \subset \mathcal{T}$

c-à-d : $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$

donc : $\forall B \in \mathcal{T}_2$, $B \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$

d'où : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$

Soient (Ω_1, B_1) et (Ω_2, B_2) deux espaces topologiques, telles que $B_1 = \mathcal{B}(\Omega_1)$; $B_2 = \mathcal{B}(\Omega_2)$
Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$
Alors :
f continue $\Rightarrow$ f borélienne

montrons que f est $B_1 - B_2$ mesurable,

on a : $B_2 = \sigma(\mathcal{T}_2)$ avec $\mathcal{T}_2$ la topologie sur Ω_2

montrons donc que : $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset B_1$

c-à-d : $\forall O \in \mathcal{T}_2$, $f^{-1}(O) \in B_1$

Soit $O \in \mathcal{T}_2$,

donc O est un ouvert de Ω_2,

et comme f est continue,

alors : $f^{-1}(O)$ est un ouvert de Ω_1,

d'où : $f^{-1}(O) \in B_1$

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux applications,
Soit :
$h : \Omega \to \mathbb{R}^2$
$w \mapsto (f(w), g(w))$
Alors :
h mesurable $\iff$ f et g sont $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables

$\Rightarrow$/ Supposons que h est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable

Considérons les applications :

$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x$ $\quad (x,y) \longmapsto y$

π_1 et π_2 sont continues, d'où elles sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables,

or : h est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable,

donc : $\pi_1 \circ h$ et $\pi_2 \circ h$ sont $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables,

et comme : $f = \pi_1 \circ h$ et $g = \pi_2 \circ h$

Alors f et g sont $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables

$\Leftarrow$/ Supposons que f et g sont $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables ;

donc : $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$: $f^{-1}(]a,b[) \in \mathcal{T}$
et $g^{-1}(]c,d[) \in \mathcal{T}$

d'où : $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$: $f^{-1}(]a,b[) \cap g^{-1}(]c,d[) \in \mathcal{T}$

c-à-d : $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$: $h^{-1}(]a,b[\times]c,d[) \in \mathcal{T}$

donc : $h^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{T}$

car $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{]a,b[\times]c,d[\,/ a,b,c,d \in \mathbb{R}\})$

Alors : h est mesurable.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable,
Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$,
Alors :
$f + ig : \Omega \to \mathbb{C}$ est mesurable $\iff f$

$\Rightarrow$/ Supposons que $f+ig$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mesurable,

Considérons les applications :

$P_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $P_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x+iy \longmapsto x$ $\quad x+iy \longmapsto y$

P_1 et P_2 sont continues, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{C})-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables,

et g sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables	or : $h = f+ig$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mesurable, donc : $P_1\circ h$ et $P_2\circ h$ sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables, et comme : $f = P_1\circ h$ et $g = P_2\circ h$ Alors f et g sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables. $\Leftarrow$/ Supposons que f et g sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables, d'où : (f,g) est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable, Considérons l'application : $\mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ $(x,y) \longmapsto x+iy$ μ est continue, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mesurable, donc : $\mu\circ(f,g)$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mesurable or : $\mu\circ(f,g) = f+ig$ Alors : $f+ig$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mesurable
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un e.m, Soient $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 2 appl Alors : f et g mesurables $\Rightarrow f+g$ mesurable	Considérons l'application : $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto x+y$ h est continue, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable or : (f,g) est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable, car f et g sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables, donc : $h\circ(f,g)$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, c-à-d : $f+g$ " " " "
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m, Soient $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 2 appl, Alors : f et g mesurables $\Rightarrow f\times g$ mesurable	Considérons l'application : $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto xy$ h est continue, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable or : (f,g) est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable, donc : $h\circ(f,g) = f\times g$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m, Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, Alors : f mesurable $\Rightarrow af$ $(a\in\mathbb{R})$ est mesurable	Considérons l'application : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto ax$ h est continue, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable or : f est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, donc : $h\circ f = af$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m, Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, Alors : f mesurable $\Rightarrow$ $\|f\|$ mesurable	Considérons l'application : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $x \longmapsto \|x\|$ h est continue, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ mesurable, or : f est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, donc : $h\circ f = \|f\|$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ mesurable
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m, Soient $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ 2 appl, Alors : f et g mesurables $\Rightarrow \max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont mesurables	Considérons les applications : $h_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \max(x,y)$ et $h_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \min(x,y)$ h_1 et h_2 sont continues, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables, or : (f,g) est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable, donc : $h_1\circ(f,g) = \max(f,g)$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable, et $h_2\circ(f,g) = \min(f,g)$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable.

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ Alors : f mesurable $\Rightarrow$ $f^+=\max(f,0)$ et $f^-=\min(f,0)$ mesurables	Considérons les applications : $h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \max(x,0)$ et $h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \min(x,0)$ h_1 et h_2 sont continues, d'où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables, or : f est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, donc : $h_1\circ f = \max(f,0) = f^+$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, et $h_2\circ f = \min(f,0) = f^-$ est $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.
Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ e.m Soit $(f_n)_{n\geq1}$ une suite de fcts mesurables à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$, Alors : $\sup_{n\geq1}(f_n)$, $\inf_{n\geq1}(f_n)$, $\lim_{+\infty}\sup_{n\geq1}(f_n)$ et $\lim_{+\infty}\inf_{n\geq1}(f_n)$ sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurables. (Au lieu de $\overline{\mathbb{R}}$ on peut avoir $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$)	* $\sup_{n\geq1}(f_n) : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ montrons que $(\sup_{n\geq1}(f_n))^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{T}$ on a : $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty,a] / a\in\mathbb{R}\})$ donc, il suffit de montrer que : $(\sup_{n\geq1}(f_n))^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ Soit $x \in (\sup_{n\geq1}(f_n))^{-1}([-\infty,a])$ $\Rightarrow \sup_{n\geq1}(f_n(x)) \in [-\infty,a]$ $\Rightarrow \sup_{n\geq1}(f_n(x)) \leq a$ $\Rightarrow \forall n\geq1,\ f_n(x) \leq a$ $\Rightarrow \forall n\geq1,\ f_n(x) \in [-\infty,a]$ $\Rightarrow \forall n\geq1,\ x \in f_n^{-1}([-\infty,a])$ $\Rightarrow x \in \bigcap_{n\geq1} f_n^{-1}([-\infty,a])$ donc : $(\sup_{n\geq1}(f_n))^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap_{n\geq1} f_n^{-1}([-\infty,a])$ or : $(f_n)_{n\geq1}$ sont $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurables d'où : $\forall n\geq1,\ f_n^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ donc : $\bigcap_{n\geq1} f_n^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ Alors : $(\sup_{n\geq1} f_n)^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ * $\inf_{n\geq1}(f_n) : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on a : $\inf_{n\geq1}(f_n) = -\sup_{n\geq1}(-f_n)$ donc : $(\inf_{n\geq1}(f_n))^{-1}([-\infty,a])$ $= (-\sup_{n\geq1}(-f_n))^{-1}([-\infty,a])$ Soit $x \in (-\sup_{n\geq1}(-f_n))^{-1}([-\infty,a])$ $\Leftrightarrow -\sup_{n\geq1}(-f_n(x)) \leq a$ $\Leftrightarrow \sup_{n\geq1}(-f_n(x)) \geq -a$ $\Leftrightarrow \exists n\geq1,\ -f_n(x) \geq -a$ $\Leftrightarrow \exists n\geq1,\ f_n(x) \leq a$ $\Leftrightarrow \exists n\geq1,\ x \in f_n^{-1}([-\infty,a])$ $\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\geq1} f_n^{-1}([-\infty,a])$ donc : $(-\sup_{n\geq1}(-f_n))^{-1}([-\infty,a]) = \bigcup_{n\geq1} f_n^{-1}([-\infty,a])$ d'où : $(-\sup_{n\geq1}(-f_n))^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ Alors : $(\inf_{n\geq1}(f_n))^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}$ * $\lim_{+\infty}\sup_{n\geq1}(f_n)$: on a : $\lim_{+\infty}\sup_{n\geq1}(f_n) = \inf_{n\geq1}(\sup_{k\geq n}(f_k))$ avec : $\sup_{k\geq n}(f_k) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{T}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable,

Scanné avec CamScanner

d'où $\underset{n\geq 1}{\mathrm{Inf}}\left(\underset{k\geq n}{\mathrm{Sup}}(f_k)\right)$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable

Alors: $\lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Sup}}(f_n)$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable.

* $\lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Inf}}(f_n)$:

on a: $\lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Inf}}(f_n) = \underset{n\geq 1}{\mathrm{Sup}}\left(\underset{k\geq n}{\mathrm{Inf}}(f_k)\right)$

on poursuit de la même manière

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ e.m, Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fcts mesurables à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$, Alors: $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $f \Rightarrow f$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable

(Au lieu de $\overline{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ ou $\overline{\mathbb{R}}^+$)

$(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f,

donc: $f = \lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Sup}}(f_n) = \lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Inf}}(f_n)$

Or: $\lim\limits_{+\infty} \underset{n\geq 1}{\mathrm{Sup}}(f_n)$ est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable,

Alors: f est $\mathcal{T}-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique Soient $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables, Alors: f et g sont toute les 2 positives ou toute les 2 finies $\Rightarrow \{f<g\}$, $\{f=g\}$ et $\{f\leq g\}$ sont mesurables

* $\{f<g\}$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in \{f<g\} &\Leftrightarrow f(x) < g(x)\\
&\Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0\\
&\Leftrightarrow \exists n\geq 1,\ n(g(x)-f(x)) \geq 1\\
&\Leftrightarrow \exists n\geq 1,\ g(x)-f(x) \geq \tfrac{1}{n}\\
&\Leftrightarrow \exists n\geq 1,\ g(x)-f(x) \in [\tfrac{1}{n}, +\infty]\\
&\Leftrightarrow \exists n\geq 1,\ (g-f)(x) \in [\tfrac{1}{n}, +\infty]\\
&\Leftrightarrow \exists n\geq 1,\ x \in (g-f)^{-1}([\tfrac{1}{n}, +\infty])\\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\geq 1} (g-f)^{-1}([\tfrac{1}{n}, +\infty])
\end{aligned}$$

donc: $\{f<g\} = \bigcup_{n\geq 1} (g-f)^{-1}([\tfrac{1}{n}, +\infty])$

Comme $g-f$ est mesurable, car elle s'agit de somme d'une fct mesurable et d'une fonction mesurable multipliée par un réel;

et: $\forall n\geq 1$, $[\tfrac{1}{n}, +\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$,

car: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a,+\infty],\ a\in\mathbb{R}\})$

donc: $(g-f)^{-1}([\tfrac{1}{n}, +\infty]) \in \mathcal{T}$, $\forall n\geq 1$

d'où: $\bigcup_{n\geq 1}(g-f)^{-1}([\tfrac{1}{n}, +\infty]) \in \mathcal{T}$

c-à-d: $\{f<g\} \in \mathcal{T}$

donc $\{f<g\}$ est mesurable.

* $\{f=g\}$

on a:
$$\begin{aligned}
\{f=g\} &= \{f\geq g \text{ et } f\leq g\}\\
&= \{f<g \text{ ou } f>g\}^c\\
&= (\{f<g\}\cup\{g<f\})^c\\
&= \{f<g\}^c \cap \{g<f\}^c
\end{aligned}$$

donc: $\{f=g\} = \{f<g\}^c \cap \{g<f\}^c$

comme $\{f<g\}, \{g<f\} \in \mathcal{T}$

donc: $\{f<g\}^c, \{g<f\}^c \in \mathcal{T}$

d'où: $\{f<g\}^c \cap \{g<f\}^c \in \mathcal{T}$

c-à-d: $\{f=g\} \in \mathcal{T}$

Alors: $\{f=g\}$ est mesurable.

* $\{f\leq g\}$

on a:
$$\begin{aligned}
\{f\leq g\} &= \{f<g \text{ ou } f=g\}\\
&= \{f<g\}\cup\{f=g\}
\end{aligned}$$

donc: $\{f\leq g\} = \{f<g\}\cup\{f=g\}$

comme: $\{f<g\}, \{f=g\} \in \mathcal{T}$

d'où: $\{f<g\}\cup\{f=g\} \in \mathcal{T}$

c-à-d: $\{f\leq g\} \in \mathcal{T}$

Alors: $\{f\leq g\}$ est mesurable.

Propositions :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable,

Soit $f: \Omega \to \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ ou $\mathbb{R}^n$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f \text{ est mesurable} &\Leftrightarrow \forall a,b\in\mathbb{R}: f^{-1}(]a,b[) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a,b\in\mathbb{R}: f^{-1}(]a,b]) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a,b\in\mathbb{R}: f^{-1}([a,b[) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]-\infty,a]) \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

car: f mesurable $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$
$\Leftrightarrow \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$

avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a,b[\ /a,b\in\mathbb{R}\})$
$= \sigma(\{]a,b]\ /a,b\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a,b[\ /a,b\in\mathbb{R}\})$
$= \sigma(\{[a,+\infty[\ /a\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty,a]\ /a\in\mathbb{R}\})$

Si $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned}
f \text{ est mesurable} &\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]a,+\infty]) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}([-\infty,a[) \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

car f mesurable $\Leftrightarrow \forall B\in\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),\ f^{-1}(B)\in\mathcal{T}$

et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu engendrée à la fois par $[a,+\infty]$, $]a,+\infty]$, $[-\infty,a]$, $[-\infty,a[$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
f \text{ est mesurable} &\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}_+: f^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}_+: f^{-1}([0,a]) \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\begin{aligned}
f \text{ est mesurable} &\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}_+: f^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}_+: f^{-1}([0,a]) \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
f \text{ est mesurable} &\Leftrightarrow \forall 1\leq i\leq n,\ \forall a_i,b_i: f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}]a_i,b_i[\right) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \quad '' \quad\quad '' \quad f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i,b_i]\right) \in \mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow \dots
\end{aligned}$$

Fin de Chapitre #