Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE Maths 2024/2025
Analyse 4

Série d'exercices: Séries Numériques

Exercice 1. *Étudier la convergence des séries suivantes :*

1) $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{n^2+1}{n^2}$ 2) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2}{\sqrt{n}}$ 3) $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$ 4) $\sum\limits_{n\geq 1}(1-\frac{1}{n})^n$ 5) $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^a+(-1)^n}, a\in]0,+\infty[$
6) $\sum\limits_{n\geq 1}(ne^{\frac{1}{n}}-n)$ 7) $\sum\limits_{n\geq 0}\ln(1+e^{-n})$ 8) $\sum\limits_{n\geq 1}(\cos\frac{1}{n})^{-n^3}$ 9) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 10) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$
11) $\sum\limits_{n\geq 0}|\sin(\pi\sqrt{n^4+1})|^{\frac{3}{4}}$ 12) $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n+n}$ 13) $\sum\limits_{n\geq 1}\ln(\frac{n+1}{n})$ 14) $\sum\limits_{n\geq 0}n^{-(1+\frac{1}{n})}$ 15) $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
16) $\sum\limits_{n\geq 0}(\frac{n+3}{2n+1})^n$ 17) $\sum\limits_{n\geq 0}(\frac{n}{2n+1})^{n^2}$ 18) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(\ln n)^n}{n!}$ 19) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^2\sin^{2n}(\alpha)}, \alpha\in\mathbb{R}$ 20) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$
21) $\sum\limits_{n\geq 1}\sin(\frac{n^2+1}{n}\pi)$

Exercice 2. *Etudier la nature des séries suivantes:*

$$1)\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^n}}{n^a}\ \textit{avec } a\in\mathbb{R},\ 2)\sum_{n\geq 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\exp(-\sqrt{\ln t})\sin t\,dt,\ 3)\sum_{n\geq 0}\sin(\pi\sqrt{n^2+an+b})\ \textit{avec } a,b\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.*

1. *Montrer que pour tout $\alpha>1$, la série $\sum u_n^\alpha$ converge.*
2. *Montrer que les séries $\sum\sin(u_n)$ et $\sum\arctan(u_n)$ convergent.*
3. *Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une application telle que $f(0)=0$, admettant une dérivée à droite en 0. Montrer que la série $\sum f(u_n)$ converge.*

Exercice 4. *Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha>0$.*

1. *Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.*
2. *Déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.*

Exercice 5. *On considère la série $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $n\geq 2$.*

1. *Vérifier que $\lim a_n=0$.*
2. *Montrer que la série de terme général $w_n=(-1)^n(\frac{1}{\sqrt{n}}-a_n)$ diverge.*
3. *Déduire que la série $\sum(-1)^n a_n$ est divergente.*
4. *Conclure.*

Exercice 6. *Etant donné deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit la série produit (produit de Cauchy) comme la série de terme général*

$$w_n=\sum_{i+j=n}u_iv_j=\sum_{i=0}^{n}u_iv_{n-i}.$$

1. (a) *Montrer que les séries suivantes $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $\sum\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ sont convergentes.*
   (b) *Déterminer la nature de la série produit de $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $\sum\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$.*
2. (a) *Etudier la convergence des séries suivante:*
   $$\sum x_n \textit{ avec } x_0=2 \textit{ et } x_n=2^n, \textit{ si } n>0.$$
   $$\sum y_n \textit{ avec } y_0=-1 \textit{ et } y_n=1, \textit{ si } n>0.$$
   (b) *Etudier la convergence de la série produit de $\sum x_n$ et $\sum y_n$.*
3. *Conclure.*
4. (a) *On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ l'est aussi.*
   (b) *On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes. Montrer que la série produit $\sum w_n$ est absolument convergente.*

Exercice 7.

1. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n+nx=1$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.*
2. *Etudier la nature de la série $\sum n!(\frac{1}{n}-x_n)$.*