Les Applications et Les relations

Applications : Généralités

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides. Toute relation f qui associe chaque élément $x \in E$ à un et un seul élément $y \in F$ est appelée une **application** de E vers F.

$$f : E \to F, \quad f(x) = y$$

Applications : Généralités

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides. Toute relation f qui associe chaque élément $x \in E$ à un et un seul élément $y \in F$ est appelée une **application** de E vers F.

$$f : E \to F, \quad f(x) = y$$

Vocabulaire

- E : Ensemble de départ (source).
- F : Ensemble d'arrivée (but).
- $x \in E$: Antécédent.
- $y \in F$: Image.

Exemples

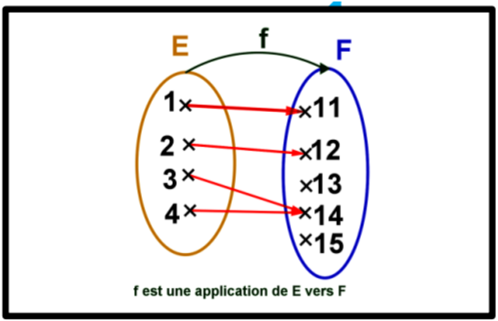
Exemple

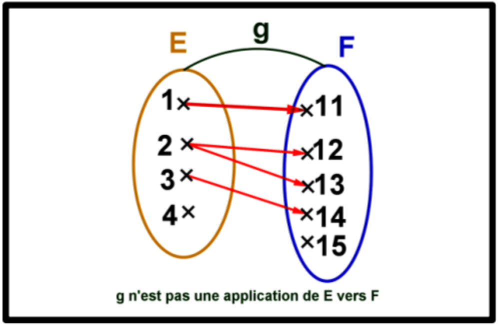
Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{11, 12, 13, 14\}$.

Exemples

Exemple

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{11, 12, 13, 14\}$.




g
E
F
1
2
3
4
11
12
13
14
15
g n'est pas une application de E vers F

Remarques

- On note souvent $F(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Remarques

- On note souvent $F(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
- On parle plus généralement de **fonctions** : Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à chaque élément $x \in E$ un élément $y \in F$ **au plus**. L'ensemble des éléments $x \in E$ auxquels elle associe un $y \in F$ est appelé le **domaine de définition** de la fonction f, noté D_f.

Remarques

- On note souvent $F(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
- On parle plus généralement de **fonctions** : Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à chaque élément $x \in E$ un élément $y \in F$ **au plus**. L'ensemble des éléments $x \in E$ auxquels elle associe un $y \in F$ est appelé le **domaine de définition** de la fonction f, noté D_f.
- Si $x \in D_f$, l'élément y qui lui est associé est noté $y = f(x)$. On peut alors construire l'application (encore notée f par abus de langage) :

$$f : D_f \to F, \quad x \mapsto f(x),$$

et c'est cette application que l'on étudie.

Exemple

La fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, alors :

$$D_f = \mathbb{R}^*, \quad f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dans ce cas f est une application.

Égalité des applications

Définition

Deux applications f et g sont **égales** si :

- Elles ont le même ensemble de départ E,
- Elles ont le même ensemble d'arrivée F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Exemples: Égalité des applications

Soient les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^n \cdot n$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad g(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -n, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Question : Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(n) = g(n).$$

1. On considère l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; f(n) = n^2$.
    1. Déterminer les images de 0, -2 et 3.
    2. Déterminer les antécédents de 1, 0, et 3.
    3. Est-ce que l'implication $f(n) = f(n') \implies n = n'$ est vraie ?

Injectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est injective si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Injectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est injective si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Montrer que f est injective.

Injectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est injective si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Montrer que f est injective.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 4$. g est-elle injective ?

Injectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est injective si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Montrer que f est injective.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 4$. g est-elle injective ?
3. $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer que $n > m \implies h(n) > h(m)$. En déduire que h est injective.

3 **Écriture de $h(n)$ et $h(m)$:** Si $n > m$, alors :

$$h(n) = h(m) + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

3 **Écriture de $h(n)$ et $h(m)$:** Si $n > m$, alors :

$$h(n) = h(m) + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

On a chaque fraction $\frac{1}{k}$ pour $k > m$ est strictement positive, alors puisque on ajoute un terme strictement positif à $h(m)$, on a :

$$n > m \implies h(n) > h(m).$$

Définition de l'injectivité : Une application h est injective si :

$$h(n) = h(m) \implies n = m.$$

Définition de l'injectivité : Une application h est injective si :

$$h(n) = h(m) \implies n = m.$$

Contraposée : La contraposée de cette définition est :

$$n \neq m \implies h(n) \neq h(m).$$

Définition de l'injectivité : Une application h est injective si :

$$h(n) = h(m) \implies n = m.$$

Contraposée : La contraposée de cette définition est :

$$n \neq m \implies h(n) \neq h(m).$$

Preuve :

- Si $n > m$, on a montré que $h(n) > h(m)$.
- Si $m > n$, on a $h(m) > h(n)$ en inversant les rôles de n et m.
- Ainsi, $h(n) = h(m)$ ne peut jamais se produire si $n \neq m$.

Définition de l'injectivité : Une application h est injective si :

$$h(n) = h(m) \implies n = m.$$

Contraposée : La contraposée de cette définition est :

$$n \neq m \implies h(n) \neq h(m).$$

Preuve :

- Si $n > m$, on a montré que $h(n) > h(m)$.
- Si $m > n$, on a $h(m) > h(n)$ en inversant les rôles de n et m.
- Ainsi, $h(n) = h(m)$ ne peut jamais se produire si $n \neq m$.

Et comme $n \neq m \implies h(n) \neq h(m)$, on en déduit que h est injective.

Surjectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est surjective si :

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ f(x) = y.$$

Surjectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est surjective si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. f est-elle surjective ?

Surjectivité

Définition

Une application $f : E \to F$ est surjective si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. f est-elle surjective ?
2. $g : \mathbb{R} \to [2, +\infty[,\ g(x) = x^2 - 2x + 3$. Montrer que g est surjective. g est-elle injective ?

Bijection

Définition

Une application $f : E \to F$ est une bijection si elle est injective et surjective.

Bijection

Définition

Une application $f : E \to F$ est une bijection si elle est injective et surjective.

Propriété

f est une bijection si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

Bijection

Définition

Une application $f : E \to F$ est une bijection si elle est injective et surjective.

Propriété

f est une bijection si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

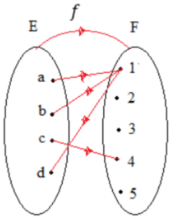
Exemple

$$f : [1, +\infty[\to [2, +\infty[,\ f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

- Montrer que f est une bijection.
- Trouver la bijection réciproque f^{-1}.

Image directe et réciproque

Soit f l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-dessous



1. Déterminer les images directes des ensembles : $\{a, b, c\}$, $\{b, c\}$, et E.
2. Déterminer les antécédents des éléments appartenant aux ensembles : $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$.

Image directe et réciproque

Définition

Soit f une application de E dans F, A une partie de E, et B une partie de F.

- **Image directe :** L'image directe de l'ensemble A est définie par :
$$f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}.$$
- **Image réciproque :** L'image réciproque de l'ensemble B est définie par :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Image directe et réciproque

Remarque

Soit f une application de E dans F, A une partie de E, et B une partie de F.

$$f(A) = B \iff \begin{cases} f(A) \subseteq B, \\ B \subseteq f(A). \end{cases}$$

Cela équivaut à :

$$f(A) = B \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ f(x) \in B, \\ \forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y. \end{cases}$$

Image directe et réciproque

Suite de Remarque

- $f(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$,
- Si $f^{-1}(B) = \emptyset$, on ne peut pas conclure que $B = \emptyset$.

Contre Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ définie par :

$$f(x) = x^2.$$

Dans ce cas, on a :

$$f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset.$$

Image directe et réciproque

Propriété

Soit f une application de E dans F. f est surjective si et seulement si :

$$f(E) = F.$$

Preuve

1. f étant une application de E dans F, on a toujours $f(E) \subseteq F$.
2. Si f est surjective, alors :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y,$$

   donc $F \subseteq f(E)$.
3. Par conséquent, $f(E) = F$.

Image directe et réciproque

Suite de la preuve

Réciproquement : Si $f(E) = F$, alors $F \subseteq f(E)$, ce qui signifie que :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Ainsi, f est surjective.

Restriction et prolongement d'une application

Définition

Soit f une application de E dans F :

Restriction et prolongement d'une application

Définition

Soit f une application de E dans F :

- **Restriction :** Soit $A \subset E$. La restriction de f sur A est l'application :

$$f|_A : A \to F, \quad x \mapsto f(x).$$

Restriction et prolongement d'une application

Définition

Soit f une application de E dans F :

- **Restriction :** Soit $A \subset E$. La restriction de f sur A est l'application :
$$f|_A : A \to F, \quad x \mapsto f(x).$$
- **Prolongement :** Soit Γ tel que $E \subset \Gamma$. Un prolongement de f est une application :
$$f_\Gamma : \Gamma \to F, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ g(x) & \text{si } x \in \Gamma \setminus E, \end{cases}$$
où $g(x)$ est une fonction définie pour $x \notin E$.

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = x^2.$$

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = x^2.$$

Restriction : Prenons $A = [0, +\infty[$. La restriction de f à A est :

$$f|_A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f|_A(x) = x^2.$$

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = x^2.$$

Restriction : Prenons $A = [0, +\infty[$. La restriction de f à A est :

$$f|_A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f|_A(x) = x^2.$$

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Prolongement : Si $\Gamma = \mathbb{R}$, on peut définir un prolongement f_Γ par :

$$f_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\Gamma(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Restriction et prolongement d'une application

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Prolongement : Si $\Gamma = \mathbb{R}$, on peut définir un prolongement f_Γ par :

$$f_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\Gamma(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ce prolongement permet d'étendre f à tout $\mathbb{R}$, même si les valeurs négatives de x n'ont pas de sens pour la racine carrée réelle.

Composition d'applications

Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$.

Composition d'applications

Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$. L'application h définie par :

$$h : E \to H, \quad h(x) = g(f(x)) \text{ pour tout } x \in E,$$

s'appelle la **composition** de f et g. Elle se note :

$$g \circ f : E \to H, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Composition d'applications

Exemple

Soient

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = y + 1$.

Composition d'applications

Exemple

Soient

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = y + 1.$

La composition $g \circ f$ est donnée par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Calculons :

$$f(x) = x^2 \implies g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Composition d'applications

Exemple

Soient

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = y + 1$.

La composition $g \circ f$ est donnée par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Calculons :

$$f(x) = x^2 \implies g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Alors

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 1.$$

Définition d'une relation

Définition : Soient E et F deux ensembles. Une **relation** R de E vers F est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire :

$$R \subseteq E \times F.$$

Définition d'une relation

Définition : Soient E et F deux ensembles. Une **relation** R de E vers F est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire :

$$R \subseteq E \times F.$$

Exemple : Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$. Une relation R peut être définie par :

$$R = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}.$$

Définition d'une relation

Définition : Soient E et F deux ensembles. Une **relation** R de E vers F est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire :

$$R \subseteq E \times F.$$

Exemple : Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$. Une relation R peut être définie par :

$$R = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}.$$

Représentation : Diagramme en flèches entre E et F :

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & \longrightarrow & a \\ 2 & \longrightarrow & b \\ 3 & \longrightarrow & a \end{array}$$

Définition d'une relation binaire

Définition

Une **relation binaire** est une relation d'un ensemble E dans lui-même, c'est-à-dire :

$$R \subseteq E \times E.$$

Définition d'une relation binaire

Définition

Une **relation binaire** est une relation d'un ensemble E dans lui-même, c'est-à-dire :

$$R \subseteq E \times E.$$

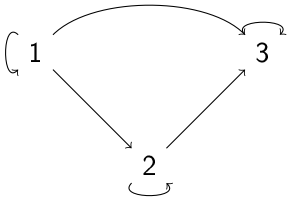
Exemple

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La relation R définie par "être inférieur ou égal" est donnée par :

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}.$$

Définition d'une relation binaire

Représentation : Diagramme orienté (boucles pour réflexivité) :



Relation totale ou partielle

Définition

Soit R une relation binaire sur E.

- On dit que x et y de E sont **comparables** par R si : $x\,R\,y$ ou $y\,R\,x$.
- On dit que la relation R est **totale** si deux éléments quelconques de E sont comparables :

$$\forall x, y \in E,\ x\,R\,y \text{ ou } y\,R\,x.$$

- On dit que la relation R est **partielle** dans le cas contraire.

Relation totale ou partielle

Exemple

- Les relations $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{R}$ sont **totales**, car on peut toujours comparer deux réels.
- Les relations $<$ et $>$ sont **partielles** car on ne peut pas comparer deux éléments identiques.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}^*$ est **partielle** : par exemple, on ne peut pas comparer 3 et 5, car aucun n'est le diviseur de l'autre.

Définition d'une relation réflexive

Définition

Une relation R sur un ensemble E est dite **réflexive** si pour tout $x \in E$, on a :

$$(x, x) \in R.$$

Autrement dit

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

Définition d'une relation réflexive

Définition

Une relation R sur un ensemble E est dite **réflexive** si pour tout $x \in E$, on a :

$$(x, x) \in R.$$

Autrement dit

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

Interprétation : Chaque élément de E est en relation avec lui-même.

Exemple classique : Relation d'égalité

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La relation R définie par "égalité" est donnée par :

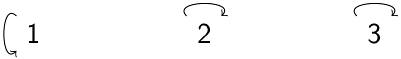
$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}.$$

Exemple classique : Relation d'égalité

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La relation R définie par "égalité" est donnée par :

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$

Diagramme orienté : Chaque élément possède une boucle réflexive.



Exemple : Relation "inférieur ou égal"

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La relation R définie par "inférieur ou égal" ($\leq$) est donnée par :

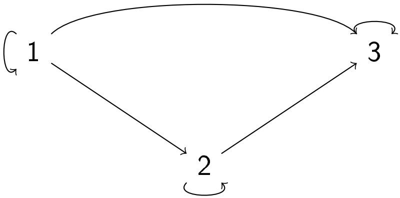
$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}.$$

Exemple : Relation "inférieur ou égal"

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La relation R définie par "inférieur ou égal" ($\leq$) est donnée par :

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

Diagramme orienté : Les boucles montrent la réflexivité.



Exemple : Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. La relation R définie par "divise" (notée $x \mid y$) est réflexive car tout entier divise lui-même :

$$x \mid x \quad \forall x \in E.$$

Définition d'une relation symétrique

Définition

Une relation R sur un ensemble A est dite **symétrique** si pour tous $x, y \in A$, on a :

$$x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

Définition d'une relation symétrique

Définition

Une relation R sur un ensemble A est dite **symétrique** si pour tous $x, y \in A$, on a :

$$x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

Exemple

- Si $E = \mathbb{N}$. La relation binaire définie dans E par $\forall(n, m) \in E^2 : n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n = m$ est une relation symétrique.
- Soit $E = P(X)$ avec X un ensemble non vide. La relation binaire définie par $\forall(A, B) \in E^2 : A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ n'est pas symétrique.

Définition d'une relation transitive

Définition

Une relation binaire R sur un ensemble E est dite **transitive** si pour tous $x, y, z \in A$, on a :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z.$$

Définition d'une relation transitive

Définition

Une relation binaire R sur un ensemble E est dite **transitive** si pour tous $x, y, z \in A$, on a :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemple La relation "être plus petit ou égal à" ($\leq$) sur $\mathbb{N}$.

- Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

Relation d'équivalence

Définition

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- **Symétrie** : pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.
- **Transitivité** : pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Exemple général 1 : La relation d'égalité $x = y$ est une relation d'équivalence.

Exemple classique 2 : Congruence modulo n Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x-y)$$

est une relation d'équivalence.
D'abord, montrons que $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $x \equiv x \pmod{n}$.

Exemple classique 2 : Congruence modulo n Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x - y)$$

est une relation d'équivalence.
D'abord, montrons que $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $x \equiv x \pmod{n}$.

- Par définition, $x - x = 0$.

Exemple classique 2 : Congruence modulo n Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x-y)$$

est une relation d'équivalence.
D'abord, montrons que $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $x \equiv x \pmod{n}$.

- Par définition, $x - x = 0$.
- Comme $n \mid 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x \equiv x \pmod{n}$.

Exemple classique 2 : Congruence modulo n Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x - y)$$

est une relation d'équivalence.
D'abord, montrons que $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $x \equiv x \pmod{n}$.

- Par définition, $x - x = 0$.
- Comme $n \mid 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x \equiv x \pmod{n}$.

La propriété de **réflexivité** est donc vérifiée.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$, donc $n \mid (x - y)$.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$, donc $n \mid (x - y)$.
- Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $x - y = kn$.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$, donc $n \mid (x - y)$.
- Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $x - y = kn$.
- En prenant l'opposé, on a $y - x = -kn$, donc $n \mid (y - x)$.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$, donc $n \mid (x - y)$.
- Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $x - y = kn$.
- En prenant l'opposé, on a $y - x = -kn$, donc $n \mid (y - x)$.

Par conséquent, $y \equiv x \pmod{n}$.

Relation d'équivalence

Symétrie : Montrons que si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$, alors $y \equiv x \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$, donc $n \mid (x - y)$.
- Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $x - y = kn$.
- En prenant l'opposé, on a $y - x = -kn$, donc $n \mid (y - x)$.

Par conséquent, $y \equiv x \pmod{n}$. La propriété de **symétrie** est donc vérifiée.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$.
- Cela signifie que $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod n$ et $y \equiv z \pmod n$, alors $x \equiv z \pmod n$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod n$ et $y \equiv z \pmod n$.
- Cela signifie que $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$.
- En additionnant ces deux relations :

$$(x - y) + (y - z) = x - z.$$

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$.
- Cela signifie que $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$.
- En additionnant ces deux relations :

$$(x - y) + (y - z) = x - z.$$

- Comme $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$, on a $n \mid (x - z)$.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$.
- Cela signifie que $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$.
- En additionnant ces deux relations :

$$(x - y) + (y - z) = x - z.$$

- Comme $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$, on a $n \mid (x - z)$.

Par conséquent, $x \equiv z \pmod{n}$.

Relation d'équivalence

Transitivité : Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire si $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$, alors $x \equiv z \pmod{n}$.

- Par hypothèse, $x \equiv y \pmod{n}$ et $y \equiv z \pmod{n}$.
- Cela signifie que $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$.
- En additionnant ces deux relations :

$$(x - y) + (y - z) = x - z.$$

- Comme $n \mid (x - y)$ et $n \mid (y - z)$, on a $n \mid (x - z)$.

Par conséquent, $x \equiv z \pmod{n}$. La propriété de **transitivité** est donc vérifiée.

Définition d'une classe d'équivalence

Définitions

- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. La **classe d'équivalence** de $x \in E$ par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par

$$\bar{x} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

- L'ensemble des classes d'équivalence pour R forme une **partition** de E
    - Leur réunion forme E,
    - Elles sont deux à deux disjointes.
- L'ensemble des classes d'équivalence de E pour R est appelé l'**ensemble quotient** de E par R, noté E/R.

Définition d'une classe d'équivalence

Interprétation : La classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x.

Exemple 1 : Congruence modulo n

Considérons la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, notée $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n}$.

Exemple 1 : Congruence modulo n

Considérons la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, notée $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n}$. **Classe d'équivalence de x :**

$$\bar{x} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n}\}.$$

Exemple 1 : Congruence modulo *n*

Considérons la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, notée $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n}$. **Classe d'équivalence de x :**

$$\bar{x} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n}\}.$$

Exemple : Pour $n = 3$ et $x = 1$, la classe d'équivalence de 1 est :

$$\bar{1} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}.$$

Exemple 1 : Congruence modulo n

Considérons la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, notée $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \pmod{n}$. **Classe d'équivalence de x :**

$$\bar{x} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n}\}.$$

Exemple : Pour $n = 3$ et $x = 1$, la classe d'équivalence de 1 est :

$$\bar{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}.$$

Représentation : Les classes d'équivalence modulo 3 sont :

$$\bar{0} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},$$

$$\bar{2} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

Exemple 2 : Relation d'égalité des parties

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties d'un ensemble E.
Définissons la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B.$$

Exemple 2 : Relation d'égalité des parties

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties d'un ensemble E.
Définissons la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B.$$

Classe d'équivalence de A :

$$\bar{A} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid B = A\} = A.$$

Exemple 2 : Relation d'égalité des parties

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties d'un ensemble E. Définissons la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B.$$

Classe d'équivalence de A :

$$\bar{A} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid B = A\} = A.$$

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $A = \{1, 2\}$, alors la classe d'équivalence de A est :

$$\bar{A} = \{\{1, 2\}\}.$$

Exemple 2 : Relation d'égalité des parties

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties d'un ensemble E. Définissons la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B.$$

Classe d'équivalence de A :

$$\bar{A} = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid B = A\} = A.$$

Exemple : Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $A = \{1, 2\}$, alors la classe d'équivalence de A est :

$$\bar{A} = \{\{1, 2\}\}.$$

Remarque : Dans ce cas, chaque classe d'équivalence contient un seul élément.

Relation d'ordre

Définition

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E est une relation d'ordre si elle vérifie les propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- **Antisymétrie** : pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.
- **Transitivité** : pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Relations d'ordre sur les ensembles

Exemples

- Les relations $\leq, \geq$ sur $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre tandis que $<$ et $>$ ne le sont pas par manque de réflexivité.
- La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ (mais pas sur $\mathbb{Z}^*$):
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n|n$ donc $|$ est réflexive.
  - $n|n'$ et $n'|n$ $\exists k, k' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n' = kn$ et $n = k'n' \Rightarrow kk' = 1 \Rightarrow k, k' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow n = n'$ donc $|$ est antisymétrique.
  - $n|n'$ et $n'|n''$ $\exists k, k' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n' = kn$ et $n'' = k'n' \Rightarrow n'' = kk'n$ donc $|$ est transitive.