المدرسة العليا للأساتذة
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE-Mathématiques S6

Année : 2024-2025

Examen Final du Module :

Histoire et Epistémologie des Mathématiques

Mai 2025 (Durée : 2h)

Exercice 1 : (5 points)

Cochez la bonne réponse :

1- Le nombre d'or ϕ est solution de l'équation :

A. $x^2 - x - 1 = 0$
B. $x^2 - x + 1 = 0$
C. $x^2 + x + 1 = 0$

2- Qui a popularisé la suite de Fibonacci en Europe dans son livre Liber Abaci (1202) ?

A. Leonardo de Pise
B. René Descartes
C. Euclide

3- Quelle est la relation de récurrence qui définit la suite de Fibonacci

A. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
B. $F_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
C. $F_n = F_{n+1} + F_{n+2}$

4- Le nombre e est également la limite de :

A. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
B. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
C. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

5- L'identité d'Euler relie les nombres fondamentaux e, i, et π avec l'équation :

A. $e^{i\pi} + 1 = 0$
B. $e^{i\pi} - 1 = 0$
C. $e^{i} - 1 = 0$

6- Le concept d'infini potentiel chez les Grecs signifie :

A. Une quantité qu'on peut toujours augmenter sans jamais l'atteindre
B. Un infini mesurable
C. Un ensemble vide

7- Quel est l'apport principal de René Descartes dans l'histoire des mathématiques ?

A. La théorie des ensembles
B. L'invention du calcul infinitésimal
C. La fondation de la géométrie analytique

8- Quelle civilisation a joué un rôle fondamental dans la transmission des savoirs mathématiques de l'Antiquité au Moyen Âge ?

A. La civilisation mésopotamienne
B. La civilisation arabo-islamique
C. Les Égyptiens

9- Quel concept mathématique a été révolutionné par l'introduction du zéro ?

A. Le calcul intégral
B. Le système de numération positionnelle
C. La géométrie euclidienne

10- Quel savant musulman a combiné l'observation empirique et le raisonnement mathématique dans ses travaux scientifiques ?

A. Al-Biruni
B. Omar Khayyam
C. Archimède

***<u>Exercice 2 :</u>* (5 points)**

"إذا قيل لك: شيء ضرب في نفسه، وزيد عليه عشرة أمثال الشيء، وكان ذلك مساوياً لأربعة وثمانين، فاعلم أن المسألة هي: مربع الشيء مع عشرة أشياء تساوي أربعة وثمانين. فأكمل المربع، وخذ الجذر، ثم انقص نصف الأمثال »

1. Traduisez le texte en langage mathématique moderne. *(1 pt)*
2. Écrivez l'équation algébrique correspondante. *(0,5 pt)*
3. Résolvez l'équation en utilisant la méthode d'Al-Khwarizmi (complétion du carré). *(1 pt)*
4. Résolvez l'équation avec la formule quadratique moderne et comparez les résultats. *(1 pt)*
5. Discutez ce que cette méthode révèle sur la pensée mathématique de l'époque. *(1,5 pt)*

***<u>Exercice 3:</u>* (6 points)**

Zénon d'Élée, philosophe grec du Ve siècle av. J.-C., propose un paradoxe célèbre : Achille, un coureur très rapide, poursuit une tortue qui a une longueur d'avance. Zénon affirme qu'Achille ne peut jamais la rattraper, car chaque fois qu'il atteint l'endroit où était la tortue, celle-ci a légèrement avancé. Ainsi, il lui faudrait une infinité d'étapes pour la rejoindre.

Supposons qu'Achille court à 10 m/s et que la tortue avance à 1 m/s, avec une avance initiale de 100 mètres.

1. Modélisez le paradoxe à l'aide d'une série géométrique. *(2 pts)*
2. Montrez que cette série converge et interprétez ce résultat. *(2 pts)*
3. Que révèle ce paradoxe sur la compréhension de l'infini dans l'Antiquité ? *(1 pt)*
4. Comment un enseignant peut-il utiliser ce paradoxe pour introduire la notion de limite ou d'infini aux élèves ? *(1 pt)*

***<u>Exercice 4:</u>* (4 points)**

L'histoire des mathématiques peut jouer un rôle essentiel dans la classe.

1. Citez deux avantages de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement secondaire des mathématiques. *(1 pt)*
2. Donnez un exemple concret d'activité pédagogique intégrant l'histoire d'un concept (ex. : équation, infinité, zéro…). *(2 pts)*
3. Pourquoi est-il important d'introduire les contributions de la civilisation arabo-islamique dans les cours de mathématiques ? *(1 pt)*

Bon Courage.

المدرسة العليا للأساتذة
ⵜⴰⵙⵓⵔⵉⵏⵜ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵉⵙⵍⵎⴰⴷⵏ
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

LE MATH
Année:2024-2025

EXAMEN FINAL

Analyse Complexe (2h)

Exercice 1 :(8 Points) (Les questions de l'exercice 1 sont indépendentes)

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2-2z+4}{z-1-\sqrt{3}i} \quad , \quad \lim_{z\to -i} \frac{iz^3+1}{z^2+1} \quad \text{et} \lim_{z\to 0} \frac{Im(z)}{z}$$

2. Résoudre les équations suivantes

   (a) $z+\bar{z}=4$

   (b) $z^2+(1+i)z+1=0$

3. Montrer que si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{C}$, alors $|f(z)|$ est aussi continue sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :(4 Points)
Calculer les integrales curvilignes suivantes

1.
$$\int_\gamma \frac{z^2-1}{z}dz \quad \text{où} \quad \gamma=\{\gamma(t)=2e^{it}, t\in[0,\pi]\} \quad \text{orienté dans le sens négatif.}$$

2.
$$\int_\gamma |z|\bar{z}dz \quad \text{où.} \quad \text{où} \quad \gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2 \quad \text{et} \quad Im(z)>0\} \quad \text{orienté dans le sens positif.}$$

Exercice 3 : (4 Points)
Soient $m,n\in\mathbb{Z}^*$, et soient γ_1 et γ_2 deux lacets de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$0\notin \mathrm{Im}(\gamma_1)\cup\mathrm{Im}(\gamma_2).$$

Pour tout $t\in[0,1]$, on définit :

$$\gamma(t)=[\gamma_1(t)]^m\cdot[\gamma_2(t)]^n.$$

1. Vérifier que γ est de classe C^1 et que $0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$.

2. Montrer que l'indice de γ en 0 vérifie :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = m \cdot \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) + n \cdot \mathrm{Ind}(\gamma_2, 0).$$

Exercice 4 : (4 Points)
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe continue

1. Montrer que f admet une primitive dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si et seulement si $\forall \lambda$ un lacet de $\mathbb{C}$ $\int_\lambda f(z)\, dz = 0$.

2. Montrer que pour que f admet une primitive dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$ il suffit qu'on a $\int_\lambda f(z)\, dz = 0$ pour tout circuit λ tracé fermé dans Ω.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	**EXAMEN**	Année scolaire : 2024/2025 Matière : calcul différentiel

<u>Exercice 1</u> (8 points :4× 2)

1) Soit E un espace de Banach et $\phi \in \mathcal{L}_c(E,E)$ une application linéaire continue vérifiant $\|\phi - id_E\| < 1$.
   Montrer que ϕ est inversible et $\phi^{-1} \in \mathcal{L}_c(E,E)$.
2) Soient E et F deux espaces de Banach et $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F
   a-Montrer que $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ est ouvert de $\mathcal{L}_c(E,E)$.
   b- Montrer que l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ dans $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ est continue.
   c- Montrer que l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ dans $\mathcal{L}_c^*(E,F)$ est différentiable et que
$$d_u f(h) = -u^{-1} oh\, ou^{-1}$$

<u>Exercice 2</u> (3 points :3× 1)

On considère l'équation :$xe^y + ye^x = 0$ $(*)$

1) Vérifier que cette équation définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2) En déduire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ au point 0.
3) Calculer les nombres $y(0)$ et $y''(0)$.

<u>Exercice 3</u> (3 points :3× 1)

Soit f_m l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_m(x,y) = \left(y - \frac{1}{2}x, x + m \sin y\right), m \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a $|sin(a) - sin(b)| \leq |a - b|$.
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ il existe des voisinages au U et V de (a,b) et de f_m respectivement tels que f_m est un C^1-difféomorphisme de U sur V.)
3) L'application $f_1$est-elle C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4 (2 points)

On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|.\|$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \|M\| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |[M]_{i,j}|$$

On définit l'application $f : GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A) = A^2$

Démontrer que f est différentiable en A et calculer sa différentielle.

Exercice 5 (4 points :2× 2)

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \to (x/y)$ et de norme associée

$x \to \|x\| = \sqrt{(x/x)}$. Soit u un endomorphisme continu, auto-adjoint de E. (C'est-à-dire, pour tout $x, y \in E$ $(x/u(y)) = (u(x)/y)$). Soit

$$f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \frac{(x/u(x))}{(x/x)}$$

1) Démontrer que $x \to (x/u(x))$ est différentiable en x et calculer sa différentielle.
2) Démontrer que f est différentiable en x et calculer sa différentielle.

Examen de la session normale : Approches et Méthodes

Exercice 1 (4pts):

I. Relie par une flèche entre chaque mot et sa définition :

Pédagogie par projet		a. Approche qui vise à répondre aux besoins de tous les apprenants, en tenant compte de leur diversité (capacités, rythmes, origines, etc.).
Pédagogie de la résolution de problème		b. Approche qui place les élèves face à des situations complexes qu'ils doivent résoudre, mobilisant ainsi des savoirs et compétences en contexte.
Pédagogie différenciée		c. Approche centrée sur la réalisation collective ou individuelle d'un projet concret, qui donne du sens aux apprentissages.
Pédagogie inclusive		d. Approche qui adapte les moyens et les parcours pédagogiques aux besoins spécifiques de chaque élève pour favoriser sa réussite.

II. Illustrer l'une des pédagogies avec un exemple concret en classe.

Exercice 2(6pts):

En classe de terminale, l'enseignant prévoit de traiter les suites numériques, il inscrit sur sa fiche pédagogique « A la fin de la séance, les élèves sauront ce qu'est une suite géométrique ? »

Questions :

1) Critiquez la formulation de cet objectif selon les critères de la pédagogie par objectifs.
2) Reformuler cet objectif en un objectif pédagogique opérationnel.
3) Proposez une activité d'évaluation formative et une activité de remédiation adaptées
4) À partir d'un exemple en mathématiques, comparez la mise en œuvre de la PPO et de l'APC.

Exercice 3(6pts):

Une équipe enseignante propose un projet interdisciplinaires mathématiques-physique-sciences social Objectif, résoudre un problème complexe autour de la consommation d'énergie dans les foyers marocains.

Les élèves, en groupe doivent collecter des données, modéliser une fonction représentant la consommation, proposer des solutions économiques, et présenter leurs résultats dans une exposition ouverte

1) Compléter le tableau suivant :

Les prérequis المكتسبات القبلية	
Les compétences visées الكفاية المستهدفة	

2) EN quoi cette situation relève-t-elle de la pédagogie de projet ?

Bonne chance et bon courage

Examen de la session normale : Approches et Méthodes

3) Quels obstacles les élèves peuvent-ils rencontrer dans ce type de projet, et comment les surmonter ?
4) Expliquez comment elle mobilise la pédagogie de la résolution de problème.
5) Proposez deux modalités de différenciation pédagogique possibles dans ce type de projet.

Exercice 4(4pts):

En classe de la 1ère, un élève résout incorrectement une équation : $(x-2)(x+3)=0$

L'élève développe ainsi : $x^2-6=0$. Il affirme que $(x-2)(x+3)=x^2-6$

L'enseignant intervient immédiatement et donne la bonne réponse sans revenir sur la démarche de l'élève

1) Analysez la gestion de l'erreur dans cette situation, quels manques pédagogiques identifiez-vous ?
2) Proposez une démarche alternative valorisant l'erreur comme outil d'apprentissage.
3) Quels sont deux avantages à long terme d'une pédagogie qui intègre les erreurs dans le processus d'apprentissage ?

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2024/2025
Semestre 6

29/05/2025 **Examen de la session normale: Algèbre et Géométrie** **Durée 2h**

Exercice 1. (3 *points*)

Montrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1\}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *En déterminant un point et la direction.*

Exercice 2. (4 *points*)

On considère l'application affine $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$(x, y, z) \longmapsto \begin{cases} x' = & 2x + y - z + 3 \\ y' = & -2x - y + 2z - 6 \\ z' = & x + y + 3. \end{cases}$$

1) *Montrer que* s *est une symétrie.*

2) *Déterminer la base et la direction de* s.

Exercice 3. (4 *points*)

1) *Soient* E *un espace affine euclidien,* $D = A + \mathbb{R}\vec{u}$ *une droite de* E *et* P_D *la projection orthogonale sur* D. *Montrer que*

$$\forall M \in E, \ \ P_D(M) = A + \frac{< \overrightarrow{AM}, \vec{u} >}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}.$$

2) *On se place dans* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale sur la droite affine* $D : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$ *de rapport* -3.

Exercice 4. (4 *points*)

1) *Soit* E *un espace affine euclidien,* F *un sous-espace affine de* E *et* $S = S(O, r)$ *la sphère de centre* O *et de rayon* r.

   a) *Soit* H *le projeté orthogonal de* O *sur* F. *Vérifier que :* $\forall M \in F,\ OM^2 = OH^2 + HM^2$.

   b) *Etudier l'intersection de* S *et* F.

2) *Application:* $E = \mathbb{R}^4$, $O(1, 2, 0, -1)$, $r = 5$ *et* $F : x + y - z + 3t - 5 = 0$.

Exercice 5. (5 *points*)

Soit E *un espace affine euclidien de dimension* 3. *Soit* P *un plan et* D *une droite orthogonale à* P *en un point* O.

1) *Montrer que* D *est orthogonale à toute droite de* P.

2) *Soient* $A \in D \backslash \{O\}$, D' *une droite de* P *ne passant pas par* O *et* $A' \in D'$. *Vérifier que* $A \neq A'$ *et* $O \neq A'$.

3) *Montrer que* $(AA') \perp D'$ *si, et seulement si,* $(OA') \perp D'$.