Série n° 1

Exercice 1. Écrire la négation des assertions suivantes :

1. Toute les applications impaires sont monotones.
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ |x + \frac{3}{2}| < \alpha \Rightarrow |2x + 3| < \varepsilon$.
3. $\bar{P} \vee Q$, $\bar{P} \wedge \bar{Q}$, $P \vee (Q \wedge R)$, $P \wedge (Q \wedge R)$

Exercice 2. Soient les assertions suivantes :

a $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

b $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;

c $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;

d $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.
3. Montrer que les assertions $P \wedge \bar{Q}$ et $\overline{P \Rightarrow Q}$ sont équivalentes.
4. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(n \geqslant N \Rightarrow 3 - \varepsilon < \frac{3n+1}{n+1} < 3 + \varepsilon \right).$$

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n^2 est impair $\Rightarrow$ n est impair.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \cancel{\left(\frac{n^2(n+1)}{4}\right)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, montrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
4. Soit l'assertion $P(x)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 1 \neq 0$. Montrer que $P(x)$ est fausse.
5. E étant un ensemble non vide. Montrer de façon directe et par contraposition que :

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

Exercice 4. Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G \Leftrightarrow \complement_E(F) \cup G = E$.
2. En déduire que $F \subset G \Leftrightarrow F \cap G = F \Leftrightarrow F \cap \complement_E(G) = \varnothing$.

Exercice 5. On appelle fonction caractéristique de A, partie de l'ensemble E, une application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin A$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A$$

Soit A et B deux parties de E et leurs fonctions caractéristiques f et g.
Quels sont les ensembles A_1, A_2, A_3 dont les fonctions caractéristiques sont :
a) $1 - f$
b) fg ;
c) $f + g - fg$.

Exercice 6. Soit un ensemble E et deux parties A et B de E.
a) Démontrer que $A\Delta B = \complement_A(A\cap B) \cup \complement_B(A\cap B)$.
b) Démontrer que quelles que soient les parties A, B, C de E

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$$

c) Démontrer qu'il existe une partie unique X de E telle que
i) pour toute partie A de E : $A\Delta X = X\Delta A = A$
ii) il existe une partie unique A' de E telle que

$$A\Delta A' = A'\Delta A = A.$$

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une application, A, B deux parties de E et C, D deux parties de F.
Montrer les proprietés suivantes :
1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$.
3. $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.
4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C\cup D) = f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.
6. $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.
7. $f^{-1}(\overline{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$
8. $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 8. Soit E un ensemble et $a \in E$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$

$$X \mapsto \begin{cases} X\cup\{a\} & \text{si } a \notin X \\ X - \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases}.$$

1) Déterminer $f^{-1}(\{\emptyset\})$ et $f^{-1}(\{E\})$.
2) Montrer que f est bijective.

Exercice 9. Soit $\Re$ une relation binaire définie sur l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque élément $a \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire une partition de $\mathbb{Z}$.

Exercice 10. Soit $f : X \to Y$ une application.
a. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

b. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X, $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
c. Montrer que si f est injective, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
Montrer par un contre-exemple que l'égalité précédente est fausse en général

Exercice 11. Vérifier si les applications suivantes sont injectives? Surjectives?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3 - x$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x + y, x - y)$
3. $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \to 2^m 3^n$

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Série n° 2

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.
2- Trouver la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

Exercice 2. Montrer que la relation binaire définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Est une relation d'ordre.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{1+y^2}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 4.
On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ par $p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, q=p^k$.
Montrer que $\mathcal{R}$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\Re_n$ définie-par :

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x\Re_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-y=kn$$

1. Montrer que $\Re_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant r < n$ et $\overline{x}=\overline{r}$
3. En déduire que l'ensemble des classes d'équivalences qu'on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Exercice 6. Soit $\Re$ une retation définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\forall a,b \in \mathbb{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : b=a^k$.
1. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. L'ordre est il total ?

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année 2021-2022
LE-Maths
Algèbre 1

Série n° 3

Exercice 1. Soit $E := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère la relation $\leqslant$ définie sur E par : pour tout $f, g \in E : f \leqslant g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)$
Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E. Cet ordre est-il partiel ? total ?

Exercice 2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 3. Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2- Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathcal{P}(E)$

Exercice 4. Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$:
1. $2x + 3 \equiv 10[13]$;
2. $\begin{cases} 2x + 3y \equiv 5[7] \\ 5x + 2y \equiv 2[7]; \end{cases}$
3. $x^2 + 2x + 14 \equiv 0[17]$.

Exercice 5.
Soit $p = 2m + 1$ un nombre premier. Montrer que :
1. $(p-1)! \equiv -1[p]$;
2. $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1}[p]$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Pour n pair donner le reste de cette division.

Exercice 7. On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/256\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/256\mathbb{Z} \\ x &\mapsto 137x + 187 \end{aligned}$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la fonction f itérée n-fois, c'est-à-dire $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1- Calculer $f^{(2)}$
2- Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ qu'il existe des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$ telles que : $f^{(2^k)}(x) = a_k x + b_k$, pour tout $x \in \mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$ (on précisera la valeur de a_{k+1} en fonction de a_k, et celle de b_{k+1} en fonction de a_k et de b_k).
3- Calculer les valeurs de a_k et de b_k pour $0 \leqslant k \leqslant 8$ (il est conseillé de présenter le résultat sous la forme d'un tableau). En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$, on a $f^{(256)}(x) = x$.

Exercice 8.
1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 9.
1- Démontrer que a | b si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}, a \mid (b - ka)$.
2- Déterminer les entiers relatifs a, tels que $(a-5) \mid (a+7)$.
3- Calculer pour tout entier naturel n non nul :
— $PGCD(n, 2n+1)$ et $PPCM(n, 2n+1)$,
— $PGCD(2n+2, 4n+2)$ et $PPCM(2n+2, 4n+2)$.