Série d'Exercices: $N^\circ 2$
Algèbre 1

Exercice 1 . Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

1. g est-elle bijective ?

2. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) g devienne bijective.

Exercice 2. On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives} \iff f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}.$$

Exercice 3. Si $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.

2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x + y = x' + y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff \frac{x}{1 + x^2} \geq \frac{y}{1 + y^2}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la relation $\leq$ définie sur E par : pour tout $f, g \in E$,

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x).$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre. Est-elle partielle ?

Exercice 6. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff xe^x = ye^y$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.