Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE Maths 2024/2025
Analyse 4

Série d'exercices: Suites et Séries de Fonctions

Exercice 1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) dans les cas suivants:*

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = (x + \frac{e^{-x}}{n})^2$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0, +\infty[$.
3. $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_n(x) = n(\arctan(x + \frac{1}{n}) - \arctan(x - \frac{1}{n}))$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *soit* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par:*

$$f_n(x) = (1 + \tfrac{x}{n})^{-n}.$$

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers une fonction* f.
2. *Vérifier que:* $\forall n \geq 1,\ f_n \geq f$.
3. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}^+$.
4. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(t)dt$ *avec* $a \in]0, +\infty[$.

Exercice 3.

1. *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par:*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & si\ x \in [0, \frac{1}{n}[. \\ \frac{1}{x}, & si\ x \in [\frac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$$

   Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. *Soit* (f_n)*une suite de fonctions croissantes définies sur* I *qui converge simplement vers une fonction* f. *Montrer que* f *est croissante.*
3. *Pour tout entier* $n > 1$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$. *Etudier la convergence uniforme de* (f_n).
4. *Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions* (f_n), *où* f_n *est définie sur* $[0, 1]$ *par:*

$$f_n(x) = x^n(1 - x).$$

Exercice 4. *Soit* $(f_n)_{n>1}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0, 1]$ *par:*

$$f_n(x) = \frac{2^nx}{1 + 2^nnx^2}.$$

1. *Déterminer la limite simple de la suite* $(f_n)_{n>1}$ *sur* $[0, 1]$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$. *Y-a-t-il convergence uniforme de la suite* $(f_n)_{n>1}$ *sur* $[0, 1]$*?*

Exercice 5. *Soit* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. *Vérifier que* f *est bien définie sur* $]1, +\infty[$.
2. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]1, +\infty[$ *et dresser son tableau de variation.*

Exercice 6. *Pour $x > 0$, on pose* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. *Démontrer que* $S(x)$ *est bien définie.*
2. *Montrer que* S *est de classe* $\mathcal{C}^1$.
3. *Donner une relation entre* $S(x)$ *et* $S(x+1)$.
4. *Donner un équivalent de* S *en* 0.
5. *Donner un équivalent de* S *en* $+\infty$.

Exercice 7. *Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+x^2n)}$.

1. *Déterminer* $D \subset \mathbb{R}^+$ *le domaine de définition de la fonction* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. *Étudier la continuité de* f *sur* D.

Exercice 8. *Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $u_n(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^n \ln x}{n}, & si\ x \in]0,1] \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$.

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n>0} u_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$.
2. *Calculer* $I = \int_0^1 \ln x . \ln(1-x) dx$.

Exercice 9. *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

1. *Déterminer les domaines de définitions* D_h *et* D_g *de* h *et* g.
2. *Étudier la continuité de* h *et* g.
3. *Donner une relation entre* $g(x)$ *et* $h(x)$ *pour* $x \in D_h \cap D_g$.
4. *En déduire un équivalent simple de* $h(x)$ *au voisinage de* 1.

Exercice 10.

1. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

   (a) *Calculer* $B_n(f)$ *quand* f *est la fonction* $x \longmapsto 1$, *quand* f *est la fonction* $x \longmapsto x$, *quand* f *est la fonction* $x \longmapsto x(x-1)$.
   (b) *En déduire que* $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$.

2. *Montrer que la suite de fonctions* $(B_n(f))$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers* f.
3. *Soit* f *une application continue sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de polynômes.*