UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
École Normale Supérieure Tétouan

Contrôle surveillé	LE-Math	**Semestre 4**
Analyse numérique	**Durée 2h00**	2023–2024
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Exercice 1. (4 pts)
Soit $\{x_i\}$, $i = 0, \cdots, n$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$. Pour une fonction f continue on note
$I(f) = \int_a^b f(x)dx$ et $J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.

1. On choisit $w_i = \int_a^b \mathscr{L}_{i,n}(x)dx$, avec $\mathscr{L}_{i,n}$ est les polynôme de la base de Lagrange associée aux points $\{x_i\}$, $i = 0, \cdots, n$.
   Montrer que $I(p) = J(p)$, $\forall\ p \in \mathbb{P}_n$.
2. On suppose que $I(p) = J(p)$, $\forall\ p \in \mathbb{P}_n$, montrer que $w_i = \int_a^b \mathscr{L}_{i,n}(x)dx$.
3. Si on note par $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{P}_n$, montrer que
$$I(p) = J(p),\ \forall\ p \in \mathbb{P}_n \iff I(e_i) = J(e_i),\ i = 0, \cdots, n.$$

Exercice 2. (6 pts)
On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^3(\mathbb{R})$.

1. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 associé à f aux points $x_0 = -\frac{1}{3}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.
2. Donner l'expression de l'erreur $E(x) = f(x) - P_2(x)$.
3. Montrer que $|E(x)| \leq \frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{\cancel{18\sqrt{3}}} \times c_1$ (Calculer c)
4. Construire la formule de quadrature $\mathscr{I}_2(f)$ associée à P_2.
5. Calculer l'ordre de la formule de quadrature $\mathscr{I}_2(f)$.

Exercice 3. (6 pts)
Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ et P_g sont polynôme d'interpolation de Lagrange aux points : $(0, g(0))$, $(\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2}))$ et $(1, g(1))$.

1. Calculer P_g et puis calculer $P_g''(\frac{1}{2})$.
2. Posons $D_2 g = 4g(0) - 8g(\frac{1}{2}) + 4g(1)$
   (a) Montrer que $\forall\ Q \in \mathbb{P}_2$ on a $D_2 Q = Q''(\frac{1}{2})$.
   (b) Montrer que $g[0, \frac{1}{2}, 1] = \frac{1}{2} D_2 g$.
3. On pose pour tout $x \in [0, 1]$, $r(x) = g(x) - P_g(x)$
   (a) Montrer qu'il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que $r''(\xi) = 0$
   (b) Montrer que $g''(\frac{1}{2}) - D_2 g = r''(\frac{1}{2})$
   (c) Écrire $r(x)$ en fonction de l'erreur d'interpolation et en déduire une majoration de $|g''(\frac{1}{2}) - D_2 g|$.

Exercice 4. (4 pts)
Soit la formule de quadrature
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha f(-x_0) + \beta f(0) + \gamma f(x_0)$$

1. Déterminer les constantes α, β, γ et x_0 pour que cette formule soit d'ordre maximal.
2. Quel est alors l'ordre de cette formule?

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

LE MATH
Année:2023-2024

Dualité
2h

Exercice 1 (7 pt)

I Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$
2. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$
3. $A^{\perp} = \text{vect}(A)^{\perp}$
4. $vect(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$
5. On suppose E est de dimension finie. Démontrer que $vect(A) = (A^{\perp})^{\perp}$

II Soit E un espace préhilbertien et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille orthonormale, montrer que $\forall x \in E$, on a $\sum_{i=1}^{n} |< x, e_i >| \leq \|x^2\|$

Exercice 2 (6 pt)

On considère dans $(\mathbb{R}^3)^*$ les formes linéaires : $f_1(x, y, z) = x + y + z$ $f_2(x, y, z) = x + 2y + 3z$ $f_3(x, y, z) = x + 3y + +2z$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
2. Trouver sa base préduale.
3. Trouver toutes les formes linéaires sur $(\mathbb{R}^3)^*$ qui s'annulent en $(1, 2, 3)$ et $(1, 1, 0)$ mais pas en $(2, 1, 3)$

Exercice 3 (7 pt)

Soit q la forme quadratique définie sur R^3 par $q(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2y^2 + z^2$.

1. Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2. Construire une base orthonormée P formée de vecteurs propres de A.

3. Déterminer la matrice B associée à q dans la base P. En déduire l'expression de la forme réduite de $q(x, y, z)$.

4. Utiliser la méthode de Gauss pour trouver une forme réduite de q.

UAE | Statistiques & Probabilités | LEM
ENS Tétouan | | Année 2023-2024

Contrôle continu
1h45

Exercice 1

La gendarmerie effectue un contrôle radar sur une route nationale, limitée à 90 km/h. Les vitesses observées sont consignées dans le tableau ci-dessous :

vitesse (km/h)	]50 ;70[	]70 ; 90]	]90 ; 100]	]100 ; 130]	]130 ; 150]
Effectif	15	55	20	8	2

1. Quelle est la fréquence des automobilistes en excès de vitesse ? Exprimer en pourcentage.
2. Une infraction est commise dès lors que la vitesse dépasse de 30 km/h la limite autorisée. Cela a pour conséquence une rétention du permis de conduire. Quel est le nombre d'automobilistes concernés ?
3. Calculer la médiane et le premier quartile Q_1, interpréter vos résultats.
4. Calculer la vitesse moyenne contrôlée, ainsi que l'écart-type.
5. Représenter cette série statistique. Déterminer le mode de cette série statistique.

Exercice 2

Une course oppose 20 concurrents, dont Ahmed fait partie.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Ahmed est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Ahmed fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 3

Un laboratoire pharmaceutique met au point un test de dépistage du virus "Covid19" et fournit les renseignements suivants : La population testé comporte 3% de personnes malades. De plus :

- Si la personne n'est pas malade, alors le test est positif avec une probabilité de 0.2%.
- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 98%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la constante k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Pour les valeurs de k obtenues à partir de la question précédente. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. X admet-elle une espérance ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

1 5 40

17 38

UAE
ENS Tétouan

Statistiques & Probabilités

LEM
Année 2023-2024

Examen (2h)

Exercice 1

Le taux normal de glycémie est de 1,0 g/L. Quand ce taux est au-dessous de 0,70 g/L, il s'agit d'hypoglycémie. Tandis qu'au-dessus de 1,1 g/L, on parle plutôt d'hyperglycémie. Sur une population de 200 personnes rencontrées dans un laboratoire, on a collecté les résultats suivants :

8

0

Taux de glycémie (g/L)	[0,6 ;1,1[	[1,1 ;1,6[	[1,6 ;2,1[	[2,1 ;2,6[	[2,6 ;3,1[
Effectifs	10	n_2	75	60	n_5

1. Déterminer la population statistique et le caractère étudié ainsi que son type.
2. Sachant que le glucose moyen sur cette population est égal exactement à 2.1125 g/l, déterminer les deux effectifs partiels manquants n_2 et n_5.
3. Déterminer le mode et la médiane. Interpréter vos résultats à propos de l'état de cette population.
4. Calculer la variance et l'écart type.

Exercice 2

1. Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires.

i) Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

ii) Quelles sont les probabilités des événements suivants :

a) il est tout en noir ;

b) une seule pièce est noire sur les trois.

2. Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, ..., 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?

Exercice 3

1. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, ..., N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$$

2. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité. Pour ces valeurs de a déterminer la fonction de répartition associée.

Examen	LE-Math	**Semestre 4**
Analyse numérique	**Durée 2h00**	2023–2024

Documents non autorisés & Téléphone éteint & Calculatrice autorisée

Exercice 1. (6 pts)
On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^3(\mathbb{R})$ et soient $x_0 = 0$, $x_1 = h$ et $x_2 = 2h$ avec $h > 0$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_f associé à f aux points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.
2. On note par $\mathscr{D}_f(x) = P''_f(x)$, montrer que $\forall\ Q \in \mathbb{P}_2$ on a $\mathscr{D}_Q(x) = Q''(x)$.
3. Montrer que $\mathscr{D}_f(x) = 2f[x_0, x_1, x_2]$.
4. Psosons $g(x) = f(x_0) + \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$, avec $\Delta_h f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$.
   Montrer que g interpole f aux points x_0, x_1 et x_2.
5. Montrer que $|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}}|f^{(3)}(\xi)|$ avec $\xi \in [x_0,\ x_2]$.

Exercice 2. (14 pts)
Notre but est de déterminer numériquement : $\sqrt[3]{27} = 3$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^3 - 27$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2.25,\ 4]$.
2. Estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer le zéro α de f avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-5}$ en appliquant la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[2.25,\ 4]$.
   Que ce passe t-il lorsqu'on utilise l'intervalle $[2,\ 4]$, Commenter.
3. Posons $g_1(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{27}{x^2} + x\right)$. Edudier la méthode de point fixe définie par $x_{n+1} = g_1(x_n)$, sur l'intervalle $[2.25,\ 4]$. Si elle converge, déterminer son ordre de convergence théorique.
4. Pour $x_0 = 2.25$, calculer les trois premières itérations de la suite $(x_{n+1} = g_1(x_n))_{n\geq 0}$.
   Calculer son ordre de convergence numérique. Commenter.
5. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f. Que remarque-t-on?
6. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2(x) = \lambda\left(x - \frac{27}{x^2}\right) + x$. Montrer que $g_3(x) = -\frac{15}{8}\lambda x^2 + (1 + \frac{247}{16}\lambda)x - \frac{471}{16}\lambda$ interpole g_2 aux points d'abscisses $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_1 = 3$ et $a_2 = 4$.
7. Pour $\lambda = -\frac{16}{67}$, calculer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe définie par $z_{n+1} = g_3(z_n)$.
8. Pour $\lambda = -\frac{16}{67}$ et $z_0 = 2.25$ calculer les trois premières itérations de la suite $z_{n+1} = g_3(z_n)$, puis calculer son ordre de convergence numérique.
9. Pour $-\frac{1}{17} < \lambda < 0$, édudier la méthode de point fixe définie par $y_{n+1} = g_2(y_n)$, sur l'intervalle $[\frac{3}{2},\ 4]$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 4

07/06/2024 **Examen de la session normale: Analyse 6** **Durée 2h**

Exercice 1. (6 *points*)

1. *Montrer que:* $\forall x > 0,\ \dfrac{\sin x}{1+e^x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} \sin x.$

2. *Montrer que:* $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e^{-kx} \sin x \right| \leq 2e^{-x}.$

3. *Montrer que:* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+\cancel{n}}{1+n^2}.$ $\sum (-1)^{k-1} \frac{1}{1+n^2}$

Exercice 2. (8 *points*)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt.$

1. *Montrer que le domaine de définition de la fonction f est* $[0, +\infty[$.
2. *Montrer que la fonction f est continue sur* $[0, +\infty[$.
3. (a) *Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur* $[0, +\infty[$.
   (b) *Calculer* $f'(1)$.
   (c) *Montrer que:* $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{1-x} \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right).$
   (d) *Déduire les variations de la fonction f.*

Exercice 3. (6 *points*)

1. *Calculer les intégrales suivantes:*
   (a) $\displaystyle\iiint_\Gamma xyz\,dxdydz$, *avec* $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0,\ 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}.$
   (b) $\displaystyle\iint_D xy^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, *avec* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$
2. *Calculer le volume du domaine suivant:* $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}.$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$\sin^2\theta = \dfrac{2 * \sin 2\theta}{2}$

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI

École Normale Supérieure Tétouan

Rattrapage	LE-Math	**Semestre 4**
Analyse numérique	**Durée 2h00**	2023–2024

Documents non autorisés & Téléphone éteint & Calculatrice autorisée

Exercice 1. (10 pts)

On se propose de résoudre numériquement l'équation : $f(x) = x - \frac{2}{x+1} = 0.$

1. Montrer que f admet une racine unique $\alpha \in [0, 2]$.
2. Posons $g(x) = \frac{2}{x+1}$, donner les tableaux de variations de g' et g sur l'intervalle $[0, 2]$.
3. Déterminer un intervalle $I_0 \subset [0, 2]$, pour le quel on a : $\begin{cases} |g'(x)| < 1, & \forall\, x \in I_0 \\ g(I_0) \subset I_0 \end{cases}$
4. En déduirer que la méthode du point fixe définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge pour tout choix $x_0 \in I_0$.
5. Déterminer l'ordre de convergence théorique de la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que la racine exacte est 1.
6. En partant de $x_0 = \frac{2}{3}$, calculer x_1, x_2, x_3 et x_4. Calculer ensuite l'ordre de convergence numérique. Commenter le résultat obtenue.
7. Calculer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de la méthode de Newton. Calculer les quatres premières itérations sachant que $y_0 = \frac{3}{2}$.
8. Calculer la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de la méthode de la sécante. Calculer les trois premières itérations, sachant que $z_0 = \frac{5}{2}$ et $z_1 = \frac{4}{3}$.

Exercice 2. (10 pts)

Soit $[p,\ q]$ un intervalle sur lequel f est définie, $m = \frac{p+q}{2}$ son milieu et $y = ax^2 + bx + c$ la prabole passant (interpole) par les 3 points $(p,\ f(p))$, $(q, f(q))$ et $(m, f(m))$.

1. Ecrire les 3 équations traduisant le fait que ces 3 points sont sur la parabole.
2. Déterminer a, b et c en fonction de p et q.
3. Calculer $I = \int_p^q (ax^2 + bx + c)\,dx$, (on mettra $\frac{q-p}{6}$ en facteur).
4. Montrer que $I = \frac{q-p}{6}\left(f(p) + 4f\left(\frac{p+q}{2}\right) + f(q)\right)$.
5. La formule de quadrature est-elle exacte pour les polynômes de degré 3?
6. Exprimer l'intégral $\int_0^1 f(t)\,dt$.
7. A l'aide d'un changement de variable, exprimer l'intégral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,dt$.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 4

25/06/2024 **Examen de la session de rattrapage: Analyse 6** **Durée 1h30**

Exercice 1. (6 *points*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx$.

1. *Montrer que la fonction* $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & si\ x \in [0,1] \\ \frac{\pi}{2}e^{-x}, & si\ x > 1 \end{cases}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Déduire que* I_n *est bien définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
3. *Montrer que la fonction* f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & si\ x \in]0,1[\\ \frac{\pi}{2e}, & si\ x = 1 \\ 0, & si\ x > 1 \end{cases}$ *est continue par morceau sur* $[0,+\infty[$.
4. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2. (8 *points*)

On considère la fonction f *définie par:* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}dt$.

$\frac{1}{t}$

1. a) *Montrer que:* $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 1, \left|\frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\right| \leq e^{-t}$. $|\sin(xt)| \leq 1$

   b) *Montrer que:* $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t} = x$.

   c) *Déduire que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
3. a) *Montrer que:* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   b) *Déduire que:* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 3. (6 *points*)

1. *Calculer les intégrales suivantes:*

   (a) $\iiint_\Gamma xyz\,dxdydz$, *avec* $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0,\ 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$.

   (b) $\iint_D xy^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, *avec* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.
2. *Calculer le volume du domaine suivant:* $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 4

11/05/2023 **Contrôle continu: Analyse 6** **Durée 2h**

Exercice 1. (8 *points*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,dx$.

1. *Montrer que la fonction* $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & si\ x \in [0,1] \\ \frac{\pi}{2}e^{-x}, & si\ x > 1 \end{cases}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.

2. *Déduire que* I_n *est bien définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Montrer que la fonction* f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & si\ x \in]0,1[\\ \frac{\pi}{2e}, & si\ x = 1 \\ 0, & si\ x > 1 \end{cases}$ *est continue par morceau sur* $[0,+\infty[$.

4. *Déterminer* $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 2. (12 *points*)

I) On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1) *Montrer que* F *est définie sur* $]0,+\infty[$.

2) *Soit* $[a,b] \subset]0,+\infty[$. *On considère la fonction*
$$\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} t^{a-1}|\ln t|, & si\ t \in]0,1] \\ e^{-t}t^{b-1}|\ln t|, & si\ t \in]1,+\infty[\end{cases}$$

i. *Montrer que* $\varphi(t) \underset{0}{=} o(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}})$ *et* $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$.

ii. *Déduire que* φ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$.

3) *Montrer que la fonction* F *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.

4) *Déduire que* $\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln(t)dt$.

5) *Déduire les variations de la fonction* F. *(On admet que* F' *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$ *et s'annule en un* $\alpha \in]1,2[$*)*

II) 1) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,+\infty[$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}dt = \frac{F(x)}{n^x}$.

2) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}dt = F(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

On donne: $\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

Examen de rattrapage (2h)

Exercice 1

On présente dans le tableau statistique suivant la répartition des salaires mensuelles d'une entreprise :

1500 1700 1850 2000 2250

Salaires en euros	[700,800[	[800,900[	[900,950[	[950,1050[	[1050,1200[
Effectif	42	49	74	19	16

1. Définir population, le caractère, duquel type s'agit il ? et représenter cette série statistique.
2. Dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 900 euros ?
3. Calculer de manière précise la médiane. Donner vos interprétations.
4. Dans cette série statistiques se rajoute une sixième catégorie d'employés dont les salaires appartiennent à la classe [1200 ;1400[. Quel est l'effectif de cette classe sachant que le salaire moyen au sein de cette entreprise est alors de 1100 euros.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition s'ecrit

$$F_X(x) = \begin{cases} \alpha - e^{-x}(1+x) & si \quad x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de α ?
2. Calculer $P(-2 < X < 3)$.
3. Déterminer la fonction de densité associée.

Exercice 3

L'épreuve de statistiques et probabilité d'une licence $LE - Math$ est organisé en lots de 3 sujets tirés au sort parmi 80 sujets portant sur ce cours. L'étudiant doit traiter un des sujets de son choix.

1. Combien d'épreuves différentes peut-on organiser ?
2. Un candidat se présente en n'ayant révisé que 50 sujets. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse traiter :
   (a) les 3 sujets,
   (b) deux sujets,
   (c) un sujet,
   (d) aucun sujet.
3. Combien de sujets un étudiant doit-il réviser pour avoir une probabilité de 0.99 de répondre au moins à un sujet (indication $C_{18}^3 \approx 821$)

Exercice 4

Dans un hôtel il arrive en moyenne 1,25 personne par 10min entre 15h et 21h. Soit X le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel chaque 10min dans cet horaire particulier.

1. De quel loi de probabilité s'agit-il ? Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive k personnes ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 2 personnes ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 4 personnes au plus ?