
Feuille de TD n° 3

Exercice 1. Décomposer en éléments simples dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{C} les fractions rationnelles suivantes:

$$F = \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)}$$

$$G = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

$$H = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$$

Exercice 2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur \mathbb{R}

1. À l'aide de divisions euclidiennes successives:

$$F = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 4X^2 + 2X + 3}{X(X^2 + 1)^3}$$

2. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes:

$$G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X - 1)^2}$$

3. A l'aide du changement d'indéterminée $X = Y + 1$:

$$H = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}$$

Exercice 3. 1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante

$$F = \frac{5X^2 + 21X + 22}{(X - 1)(X + 3)^2}$$

2. En déduire la primitive de $f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$ sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 4. Décomposer dans \mathbb{C} les fractions suivantes tel que $n, m \in \mathbb{N}$

$$F = \frac{X}{X^n - 1} \quad \text{et} \quad G = \frac{X^m}{(X - 1)^n}$$