Chapitre 1

Intégrales Dépendant d'un Paramètre

1.1 Fonction continue par morceaux

Définition 1.1.1. *Une subdivision d'un segment* $[a, b]$ *est une suite finie* $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *des reels telle que*

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

Définition 1.1.2.

i) On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue par morceaux sur* $[a, b]$*, s'il existe une subdivision* $a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b$*, telle que pour toute* $i \in \{0, 1, , n-1\}$ *la restriction de* f *à* $]a_i, a_{i+1}[$ *est prolongeable par continuité sur* $[a_i, a_{i+1}]$*. Une telle subdivision est dite adaptée à* f*.*
Dans le cas où $f_{[a_i, a_{i+1}[}$ *est constante pour* $i = 0, \ldots, n-1$*, on dit que* f *est une fonction en escalier.*

ii) Une fonction f *est continue par morceaux sur un intervalle quelconque si, et seulement si elle est continue par morceaux sur chaque segment de cet intervalle.*

Exemples 1.1.3.

1. *Toute fonction continue est continue par morceaux.*
2. *Toute fonction en escalier est continue par morceaux.*
3. *Les fonctions* $x \mapsto E(x)$ *et* $x \mapsto -E(x)$ *sont continues par morceaux.*

Définition 1.1.4. *Soit* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$*. Soient* $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *et* $(a_i^{'})_{0 \leq i \leq m}$ *deux subdivisions de* $[a, b]$*. On dit que* $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *est plus fine que* $(a_i^{'})_{0 \leq i \leq m}$ *si, et seulement si,* $n \geq m$*.*

Propriétés 1.1.5.

1. *Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction* f *continue par morceaux sur un segment est aussi adaptée à* f*.*
2. *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues par morceaux. Alors il existe une subdivision adaptée au deux fonctions.*
3. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Démonstration.
3) Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, la fonction $f_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue et admet une limite finie à droite en x_i et une limite finie à gauche en x_{i+1}.
Donc $f_{]x_i, x_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, qui est donc **bornée** par une constante que l'on notera M_i. Ainsi , $f_{]x_i, x_{i+1}[}$ est également **bornée** par M_i.
Alors, f est **bornée** par $\max\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, |f(x_0)|, \ldots, |f(x_n)|\}$. □

Remarque 1.1.6. *Une fonction continue par morceaux peut avoir une infinité des points de discontinuité. Mais pas sur un segment.*

Définition équivalente

Une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

a) La restriction de f sur $]a_i, a_{i+1}[$ est une fonction continue.

b) Pour tout $a_i \neq a$, f admet une limite finie à droite en a_i.

c) Pour tout $a_{i+1} \neq b$, f admet une limite finie à gauche en a_{i+1}.

Exemples 1.1.7.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & , si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , si\ x > 0 \end{cases}$
   Puisque $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, *alors* f *n'est pas continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.
2. $x \in [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & , x \geq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$
   On a $x_n = \frac{1}{2n\pi} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = sin(2n\pi) = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = sin((2n+1)\pi) = -1$.
   Alors, f *n'admet pas une limite à droite en* 0.
   Donc, f *n'est pas continue par morceaux.*
3. $f(x) = \dfrac{1}{x + E(1-x)}$ *avec* $x \in [-1, 1]$.
   On a $-1 \leq x \leq 1 \implies -1 \leq -x \leq 1 \implies 0 \leq 1 - x \leq 2$.
   — *Pour* $x \in [0, 1]$, $E(1-x) = 0$.
   — *Pour* $1 - x \in [-1, 0]$, $E(1-x) = 1$.

   Alors $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & si\ x \in [-1, 0[\\ \frac{1}{x} & si\ x \in [0, 1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$
   Donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
   On en déduit que f *n'est pas continue par morceaux sur* $[-1, 1[$.

Proposition 1.1.8. *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues par morceaux et* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on ait*

1. $f + g$ *est continue par morceaux.*
2. $f \times g$ *est continue par morceaux.*
3. αg *est continue par morceaux.*

Exercice 1.1.9. *On note* $\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur* $[a, b]$ *à valeur réelles. Montrer que* $\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Remarque 1.1.10. *La composition peut ne conserver pas la continuité par morceaux*

Contre-Exemple 1.1.11. $f(x) = \begin{cases} xsin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , si\ non \end{cases}$ ***et*** $g(x) = E(x)$.

- *g est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x$ *est continue et non nulle sur* $\mathbb{R}^*$.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est continue et non nulle sur* $\mathbb{R}*$.

Alors, $x \mapsto xsin(\frac{1}{x})$ *est continue et non nulle sur* $\mathbb{R}^*$.
Puisque $\forall x \neq 0\ , |xsin(\frac{1}{x})| \leq |x|$.
Alors $\lim_{x \to 0} xsin(\frac{1}{x}) = 0$.
Donc f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.
D'autre part

$$g \circ f(x) = \begin{cases} E\left(xsin(\frac{1}{x})\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Posons $x_n = \frac{1}{n\pi}$ *et* $y_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\lim_{n\to+\infty} g\circ f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi)\right) = \lim_{n\to+\infty} E(0) = 0.$
Et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} g\circ f(y_n) &= \lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{2}{(4n-1)\pi} sin(\frac{(4n-1)\pi}{2})\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{2}{(4n-1)\pi} sin(2n\pi - \frac{\pi}{2})\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{-2}{(4n-1)\pi}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{(4n-1)\pi} = 0.$
Alors $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow 0 < \frac{2}{(4n-1)\pi} < \epsilon.$
Pour $\epsilon = 1,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Longrightarrow 0 < \frac{2}{(4n-1)\pi} < 1.$
Alors $\forall n \geq N_1,\ -1 < \frac{-2}{(4n-1)\pi} < 0.$
Donc $E\left(\frac{-2}{(4n-1)\pi}\right) = -1$ *pour* n *assez grand.*
Donc $\lim_{n\to+\infty} g\circ f(y_n) = -1.$
D'où $g\circ f$ *n'a pas de limite en* 0 *à droite.*
Alors $g\circ f$ *n'est pas continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.

1.2 Théorème de la convergence dominée

Théorème 1.2.1. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées*

a) (f_n) *converge simplement sur* I *vers une fonction* f,

b) f *est continue par morceaux sur* I,

c) il existe une fonction ϕ *positive et intégrable sur* I *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq \phi(t).$$

Alors

i) Pour chaque n, f_n *est intégrable sur* I.

ii) f *est intégrable sur* I.

iii) $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f.$

Exemple 1.2.2. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t} dt.$

— *Si* $t \in [0,1[$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$

— *Si* $t = 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{1}{1+e}.$

— *Si* $t > 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0.$

Donc (f_n) *converge simplement vers la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in [0,1[\\ \frac{1}{1+e} & t = 1 \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

— *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue par morceaux sur* $[0,+\infty[$ *car elle est continue sur* $[0,+\infty[$.

— *Puisque* $t \mapsto e^{-t}$ *est continue sur* $[0,1[$, *et la fonction nulle continue sur* $]1,+\infty[$.
Alors, il suffit de calculer la limite à droite et à gauche de 1.
Donc $\lim\limits_{t\to 1^-} e^{-t} = \dfrac{1}{e}$ *et* $\lim\limits_{t\to 1^-} 0 = 0$.
Alors f *est continue par morceaux sur* $[0,+\infty[$.

—

$$\begin{aligned} t\in[0,+\infty[&\implies t^n \geq 0 \\ &\implies e^t + t^n \geq 0 + e^t \\ &\implies \left|\frac{1}{e^t+t^n}\right| \leq \frac{1}{e^t} \\ &\implies f_n(t) \leq \frac{1}{e^t}. \end{aligned}$$

On a $t \mapsto e^{-t}$ *est une fonction positive et intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.
Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n+e^t} dt &= \int_0^{+\infty} f(t)dt. \\ &= \int_0^1 e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} 0dt. \\ &= \int_0^1 e^{-t}dt. \\ &= 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x)dx$ *?*

Remarques 1.2.4.

1. *Il ne faut pas oublier la continuité par morceaux de* f. *En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers une fonction n'est pas continue par morceaux.*
2. *L'hypothèse de domination est nécessaire, comme le montre le contre-exemple suivant :*
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ *définie sur* $[0,1[$ *par* $f_n(x) = n^2x^{n-1}$.
Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, f_n *est continue par morceaux sur* $[0,1[$.
Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) &= \lim_{n\to+\infty} n^2x^{n-1}. \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{2\ln n + (n-1)\ln x}. \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(2\frac{\ln(n)}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\ln x\right)}. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $x=0$ *on a* $f_n(0) = 0$.
Donc (f_n) *converge simplement sur* $[0,1[$ *vers la fonction nulle qui est continue par morceaux sur* $[0,1[$.
Alors $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$.
D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2x^{n-1}dx &= \lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 nx^{n-1}dx. \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left[x^n\right]_0^1. \\ &= \lim_{n\to+\infty} n = +\infty. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.5. *Soit (f_n) une suite des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) Pour chaque n, f_n est intégrable sur I.

b) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f.

c) La série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|dt$ converge.

Alors, on ait

i) f est intégrable sur I.

ii) $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$

Exemple 1.2.6. *Montrons que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

Soit $x \in [0,1[$, alors $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$

Donc $\displaystyle\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x).$

Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^n \ln(x)$.
On a f_n est continue sur $]0,1[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = 0$.
Donc f_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
Alors f_n est intégrable sur $[0,1]$.

On a pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}.$

Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$.
La fonction f est continue sur $]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x)|dx &= \int_0^1 -\ln(x)x^n dx \\
&= \left[\frac{1}{1+n}x^{n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}dx \\
&= \left[\frac{1}{(1+n)^2}x^{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ *est une série convergente.*
Donc, la fonction f est intégrable sur $]0,1[$. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln(x)x^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(1+n)^2} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.7. *Montrons que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$

1.3 Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_I f(x,t)dt$. Dans ce qui suit on s'intéresse à la continuité et la dérivabilité de la fonction de F sur J.

Théorème 1.3.1. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J.

b) Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

c) Pour tout $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I;\quad |f(x,t)| \leq \phi(t).$$

Alors

i) Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

ii) la fonction F est continue sur J.

Exemple 1.3.2. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose* $\displaystyle F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1-cos(xt)}{t}e^{-t}dt.$
Etudions la continuité de la fonction F.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [1,+\infty[$ on pose $f(x,t) = \frac{1-cos(xt)}{t}e^{-t}$.
Soit $t \in [1,+\infty[$, alors la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$.
Soit $[a,b] \in \mathbb{R}$, soit $x \in [a,b]$ et $t \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \frac{|1-cos(xt)|}{t}e^{-t} \\ &\leq \frac{2e^{-t}}{t} \leq 2e^{-t}. \end{aligned}$$

Posons $\phi(t) = 2e^{-t}$ pour $t \in [1,+\infty[$.
Alors $t \longmapsto \phi(t)$ est positive et intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3.3. *Etudions la continuité de la fonction* $\displaystyle\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *sur* $]0,+\infty[$.

Remarques 1.3.4.

1. *Dans l'hypothèse de domination sur tout segment, la fonction ϕ dépend a priori du segment $[a,b]$. Il va de soi qu'il suffit d'avoir une* ***hypothèse de domination globale****, c'est-à-dire l'existence d'une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :*

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Lorsque une telle hypothèse de domination globale est vérifiée, il est inutile de repasser par la domination sur tout segment pour pouvoir appliquer le théorème.

2. *L'hypothèse de domination est essentielle, ce qui est demontré par le contre-exemple suivant :*
Posons $J = \mathbb{R}$, $I =]0,1]$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$.
On vérifie sans difficulté les deux premières hypothèses.
Calculons $F(x) = \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\ dt$.
On a $F(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:

$$F(x) = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \arctan(1/x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\pi/2 \quad et \quad \lim_{x\to 0^-} F(x) = -\pi/2;$$

la fonction F n'est donc pas continue en 0.

Théorème 1.3.5. *Soit c, réel ou infini, adhérent à J. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) Pour chaque $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ admet une limite $l(t)$ en c.

b) l est une fonction continue par morceaux sur I.

c) Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

d) Il existe une fonction ϕ positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \phi(t).$$

Alors, $\displaystyle\lim_{x\to c}\int_I f(x,t)\ dt = \int_I l(t)\ dt$. *C'est-à-dire :* $\displaystyle\lim_{x\to c}\int_I f(x,t)\ dt = \int_I \lim_{x\to c} f(x,t)\ dt$.

Exemple 1.3.6. *Calculons* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ dt$.

On pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ *pour $x \in J$ et $t \in I$ avec $J = I = \mathbb{R}^+$.*

— $l(t) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t = 0 \\ 0 & , \text{ si } t > 0. \end{cases}$

— *La fonction l est continue sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to0^+} l(t) = 0$ alors l est continue par morceaux sur I.*

— *Soit $x \in J$. $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*

— *Soit $x \in I$ et $t \in J$.*

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \\ &\leq \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

— *La fonction* $\phi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *est positive et intégrable sur J.*

— *Alors :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt &= \int_0^{+\infty} l(t)dt \\ &= \int_0^{0} l(t)dt + \int_0^{+\infty} l(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} 0dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 1.3.7. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ dt$.

Théorème 1.3.8. *On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur $J \times I$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

b) Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

c) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur J.

d) Pour chaque $[a,b] \subset J$, il existe une fonction ϕ positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \phi(t).$$

Alors

i) Pour tout $x \in J$*, la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur* I.

ii) la fonction F *est de classe* C^1 *sur* J *et l'on a :* $\forall x \in J,\ F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$.

Exemple 1.3.9. *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{sin(t)}{t+x}\ dt$*. Montrons que* F *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.

Corollaire 1.3.10. *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

a) Pour tout $t \in I$*, la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est de classe* C^k *sur* J.

b) Pour tout $x \in J$ *et tout* $p \in \{0,1,\ldots,k-1\}$*, la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ *est intégrable sur* I.

c) Pour tout $x \in J$*, la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I*,*

d) Pour tout segment $[a,b] \subset J$*, il existe une fonction* $\phi : I \to \mathbb{R}$ *intégrable sur* I *telle que :*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction F *est de classe* C^k *sur* J *et l'on a, pour tout* $p \in \{0,1,\ldots,k\}$ *:*

$$\forall x \in J, \quad F^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,dt.$$

Exercice 1.3.11. *Montrer que la fonction* $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\ dt$ *est de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$.

Chapitre 2

Intégrales Multiples

2.1 Intégrale d'une fonction de plusieurs variables

Définition 2.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ($P \subset \mathbb{R}^n$) qui est le produit cartésien de n segments : $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.*

Le volume de P est défini par : $Vol(P) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$.

Exemples 2.1.2.

1. *Dans $\mathbb{R}^2$, un pavé fermé est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. P est appelé un rectangle fermé, son air est : $Vol(P) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$.*
2. *Dans $\mathbb{R}^3$, un pavé fermé est une partie de $\mathbb{R}^3$ de la forme $P' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Le volume de P' est : $Vol(P') = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times (b_3 - a_3)$.*

Remarque 2.1.3. *Notons que $\mathring{P} = \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[$. L'intérieur de P est appelé un pavé ouvert.*

Définition 2.1.4. *Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit σ_k une subdivision de $[a_k, b_k]$ $\left(\sigma_k = \{a = a_k^0, a_k^1, \ldots, a_k^m = b_k\}\right)$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Alors le n-uplet $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ est appelé une subdivision de P. On note $\mathcal{S}(P)$ l'ensemble des subdivisions de P.*

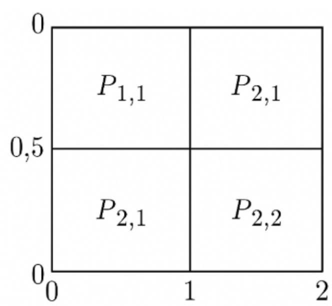
Exemples 2.1.5.

1. *Soit le pavé fermé $P = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. On subdivise l'intervalle $[0, 2]$ en deux sous-intervalles de même longueur, et l'intervalle $[0, 1]$ également :*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5, \quad y_2 = 1$$

On obtient une subdivision de P en $2 \times 2 = 4$ sous-pavés rectangulaires :

$$P_{1,1} = [0, 1] \times [0, 0{,}5],$$
$$P_{1,2} = [0, 1] \times [0{,}5, 1],$$
$$P_{2,1} = [1, 2] \times [0, 0{,}5],$$
$$P_{2,2} = [1, 2] \times [0{,}5, 1].$$

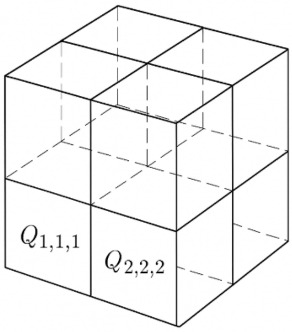


2. *Soit maintenant le pavé fermé* $Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$. *On subdivise chaque intervalle en deux parties égales :*

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1 \\ y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2 \\ z_0 = 0, \quad z_1 = 0.5, \quad z_2 = 1 \end{aligned}$$

Cela donne une subdivision en $2 \times 2 \times 2 = 8$ *petits pavés :*

$$\begin{aligned} Q_{1,1,1} &= [0, 0{,}5] \times [0,1] \times [0, 0{,}5], \\ Q_{2,2,2} &= [0{,}5, 1] \times [1,2] \times [0{,}5, 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$



Intégrale d'une fonction de plusieurs variables

— Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\begin{array}{rcl} f : P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha \end{array}$ une fonction constante sur P. On définit l'intégrale de f sur P par :

$$\int_p f(x)\,dx = \alpha \times Vol(P).$$

— On note par $\begin{array}{rcl} 1_P : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases} \end{array}$ la fonction indicatrice de P.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier si elle est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de pavés, c'est-à-dire, il existe des pavés $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$, tels que :

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{P_i}.$$

L'intégrale de f est définie par :

$$\int f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \times Vol(P_i).$$

— Soient P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P et γ une subdivision de P. Pour chaque sous-pavé $P_i \in \mathcal{D}(\gamma)$, on choisit $x_i \in P_i$. La somme de Riemann est définie par :

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \times \mathrm{vol}(P_i) \text{ avec } k = card(\mathcal{D}(\gamma)).$$

On dit alors que f est intégrable sur P, si la somme de Riemann tend vers un réel I quand le nombre de sous-pavés de P tend vers l'infini "$card(\mathcal{D}(\gamma)) \longrightarrow +\infty$" (les longueurs des côtés des sous-pavés tend vers 0) indépendamment du choix de la subdivision Γ. On écrit

$$\int_P f(x)dx = I.$$

— Ce qui précède permet de définir l'intégrabilité et l'intégrale d'une fonction sur un pavé. Par linéarité, on peut étendre sans difficulté la définition à une union de pavés.

— Soient $\mathcal{D}$ un domaine ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $\mathcal{D}$. On peut trouver une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des pavés fermé inclus dans $\mathcal{D}$ deux à deux disjoints tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$, x appartient à un P_k. On dit que f est intégrable sur $\mathcal{D}$ si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{P_k} f(x)dx$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle l'intégrale de f sur $\mathcal{D}$ la somme de cette série. On écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{P_k} f(x)dx.$$

— Soit E un ensemble borné de $\mathbb{R}^3$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur E. Soit P un pavé fermé contenant P, on définit la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \in P\backslash E \end{cases}$. La fonction f est dite intégrable sur E, si la fonction $\tilde{f}$ est intégrable sur P et on ait : $\int_E f(x)dx = \int_P \tilde{f}(x)dx.$

Propriétés 2.1.6. *Soient $\mathcal{D}$ un domaine ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f,\ g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathcal{D}$. Alors*

1. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$, est intégrable sur $\mathcal{D}$, et on ait :*

$$\int_{\mathcal{D}} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_{\mathcal{D}} f(x)dx + \beta \int_{\mathcal{D}} g(x)dx.$$

2. *Si $f \geq 0$ sur $\mathcal{D}$, alors,* $\int_{\mathcal{D}} f(x)dx \geq 0.$
3. *Si $|f|$ est intégrable sur $\mathcal{D}$, alors,* $\left|\int_{\mathcal{D}} f(x)dx\right| \leq \int_{\mathcal{D}} |f(x)|\, dx.$

2.2 Intégrale double

Interprétation géométrique

L'intégrable double d'une fonction de deux variables sur un domaine $\mathcal{D}$ est interprété comme le volume algébrique de la portion de l'espace comprise entre le graphe de la fonction et le plan (XOY).

Théorème 2.2.1 (Fubini).
Si $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on ait :

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2. $I = \iint_D \frac{1}{(1+x+2y)^2}dxdy$ *avec* $D = [0,1] \times [2,5].$

Remarque 2.2.3. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Si la fonction indicatrice 1_D est intégrable sur $\mathcal{D}$, alors, $\iint_{\mathcal{D}} dxdy$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$.*
2. *Si $\mathcal{D}$ est un point, un segment, un cercle, ou plus général une courbe régulière, alors Aire($\mathcal{D}$)=0.*

Corollaire 2.2.4. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, alors*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy.$$

Exemple 2.2.5. $\displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} cos(x)sin(y)dxdy.$

Théorème 2.2.6 (Fubini).

Soit $\mathcal{D}$ *un domaine borné de* $\mathbb{R}^2$*, et soit* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\mathcal{D}$*. S'il existe* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *, tel que* $a < b$ *et* $c < d$ *, et des fonctions* $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ *vérifiant :*

i. ϕ_1, ϕ_2 *sont continues sur* $[a,b]$ *et* $\phi_1 \leq \phi_2$ *tel que :* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$,

ii. ψ_1, ψ_2 *sont continues sur* $[c,d]$ *et* $\psi_1 \leq \psi_2$ *tel que :* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq x \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

Alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemple 2.2.7. $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dxdy$ *avec* $\mathcal{D}$ *est le triangle de sommets (0,1) , (0,-1) , (1,0).*

Remarque 2.2.8. *Soit* $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{D}_i$*. Si* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p$ *sont d'intérieurs deux à deux disjoints, c'est-à-dire* $\forall i \neq j : \quad \overset{\circ}{\mathcal{D}_i} \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}_j} = \emptyset$ *et chaque* $\mathcal{D}_i$ *se représente de la même manière que dans le théorème précédent, on ait :*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{p} \iint\limits_{\mathcal{D}_i} f(x,y)dxdy.$$

Théorème 2.2.9 (Changement de variable).

Soient $\mathcal{D}$ *et* Δ *deux domaines bornés de* $\mathbb{R}^2$*, et* $\phi : \Delta \longrightarrow \mathcal{D}$ *une fonction bijective de classe* C^1 *. Soit* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} f \circ \phi(u,v) \left| \det \mathbb{J}_\phi(u,v) \right| dudv.$$

Où $\mathbb{J}_\phi(u,v)$ *est le jacobien de la fonction* ϕ *en* (u,v)*.*

Exemple 2.2.10. $\iint_{\mathcal{D}} (x-1)^2 dxdy$ *avec* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x+y \leq 1 \quad ; \quad -2 \leq x-y \leq 2\}$.

Corollaire 2.2.11 (Intégration en coordonnées polaires).

Avec les mêmes notations du thórème 2.2.9, si $\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (rcos\theta, rsin\theta) \end{array}$ *, alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} f \circ \phi(r,\theta) r dr d\theta.$$

Exemple 2.2.12. $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{x^2+y^2} dxdy$ *avec* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4; \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

2.3 Intégrales triples

Remarque 2.3.1. *Toutes les propriétés des intégrales doubles peuvent se généraliser en cas des intégrales triples.*

Exemples 2.3.2.

1. $I = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x + 3yz)dxdydz$ *avec* $\mathcal{D} = [0,1] \times [1,2] \times [1,3]$.

2. $I = \iiint_{\mathcal{D}} x dx dy dz$ *avec* $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0, \ x+y+z < 1\}$.

Théorème 2.3.3 (**Calcul en coordonnées cylindriques**).

On considère la fonction $\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (rcos\theta, rsin\theta, z) \end{array}$. *Si* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction intégrable sur un domaine* $\mathcal{D}$, *on ait :*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f \circ \phi(r,\theta,z) r dr d\theta dz.$$

Avec $\mathcal{D} = \phi(\Delta)$.

Exemple 2.3.4. $\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+1) dx dy dz$ *avec* $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 2\}$.

Théorème 2.3.5 (**Calcul en coordonnées sphériques**).

On considère la fonction $\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\rho) & \longmapsto & (rsin\theta cos\rho, rsin\theta sin\rho, rcos\theta) \end{array}$. *Si* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction intégrable sur un domaine* $\mathcal{D}$, *on ait :*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f \circ \phi(r,\theta,\rho) r^2 \left| sin\theta \right| dr d\theta d\rho.$$

Avec $\mathcal{D} = \phi(\Delta)$.

Exemple 2.3.6. $\iiint_{\mathcal{D}} z dx dy dz$ *avec* $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq R, \ 0 \leq z\}$.

Exercice 2.3.7. *Calculer le volume de la sphère de centre* $\mathcal{C}(a,b,c)$ *et de rayon* R.