UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE TETOUAN

03/12/2022 — **LE-M(S3): CONTRÔLE Algèbre 4** — Durée 2h

DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, PORTABLES ÉTEINTS, CALCULATRICES NON-AUTORISÉES
L'UTILISATION DU CORRECTEUR « BLANCO » EST INTERDITE.

Exercice 1. (8 pts)

Soient E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients reéls et f l'application linéaire de E vers E définie par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X),$$

où $P \in E$, P' et P'' désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de P.

1. Calculer la matrice A de f par rapport à la base canonique de $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ de E.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de la matrice A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 2. (8 pts) 4 p.t < note < 6 p.t

Soit f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)^2$, $(A - I_3)^3$ et $(A - I_3)^n$ pour $n \geq 4$.
2. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_k = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^k$, démonter que $\dim(E_k) = k$, $(1 \leq k \leq 3)$
3. Soit $g = f - id_{\mathbb{R}^3}$, on considère les vecteurs $e'_1 = (gog)(e_3)$, $e'_2 = g(e_3)$ et $e'_3 = e_1$.
   3-1. Vérifier que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   3-2. Déterminer $P = Pass(B, B')$ puis calculer P^{-1}.
   3-3. Écrire la matrice A' de f relativement à la base B'.
4. ? Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ (On donne uniquement la forme).

Exercice 3. (Questions de cours 4 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme nilpotent non nul de E.

1. Montrer que la seule valeur propre de u est zéro.
2. Montrer que u n'est jamais diagonalisable.

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE TETOUAN

EXAMEN: ALGÈBRE 4

17/01/2023 | LE-MATH(S3) | Durée 2h

DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, PORTABLES ÉTEINTS

Exercice 1. (11 pts)

On considère l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$ e.v. $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha z \\ \beta y \\ \alpha x \end{pmatrix}$$

avec $0 < \alpha < \beta$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que A est diagonalisable, et déterminer P, P^{-1} et D tels que $A = PDP^{-1}$ (Ranger les valeurs propres dans la matrice D suivant un ordre croissant.)
3. Calculer A^n. Puis en discutant la parité de n simplifier A^n.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha\, w_n \\ v_{n+1} = \beta\, v_n \\ w_{n+1} = \alpha\, u_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = \alpha \\ v_0 = \beta \\ w_0 = \alpha \end{cases}$$
Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de α, β et n.
5. Résoudre le système différentiel suivant
$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha\, x_3(t) \\ x_2'(t) = \beta\, x_2(t) \\ x_3'(t) = \alpha\, x_1(t) \end{cases}$$
sachant que: $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = \beta$, et $x_3(0) = \alpha$.

Exercice 2. (6 pts)

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = -X^3$
2. Donner toutes les réduites de Jordan possibles pour u, à l'ordre des blocs près.
3. On suppose que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = X^3$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $B = (x, u(x), u^2(x))$ est une base de E.
4. Écrire la matrice de u dans la base B.

Exercice 3. (3 pts)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant pour valeurs propres 1, 2 et -2.

1. Montrer que $A^3 = A^2 + 4A - 4I_3$.
2. Déterminer A^{-1} en fonction de A.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 3

29/12/2022 **Contrôle continu: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (*6 points*)

1. *Déterminer la nature des séries numériques suivantes:*

$$\sum\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n, \quad \sum(-1)^n e^{-n}, \quad \sum \frac{n^n}{n!}, \quad \sum(2+(-1)^n)2^{-n}.$$

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, *on pose* $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

   a) *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $n^2 u_n = e^{n[2\frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n} - \ln(\ln n)]}$.

   b) *Déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$.

   c) *Déduire la nature de la série numérique* $\sum u_n$.

Exercice 2. (*7 points*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *soit* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par:*

$$f_n(x) = (1 + \tfrac{x}{n})^{-n}.$$

1. a) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers une fonction* f.

   b) *Vérifier que:* $\forall t \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

   c) *Déduire que:* $\forall n \geq 1$, $f_n \geq f$.

2. *Soit* $a \in]0, +\infty[$.

   a) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $[0, a]$.

   b) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(t)dt$.

On donne: $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(n^n)$.

Exercice 3. (*7 points*)

Pour $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

On note D_h *et* D_g *respectivement les domaines de définitions de* h *et* g.

1. *Montrer que* $D_h =]1, +\infty[$ *et* $D_g =]0, +\infty[$.

2. a) *Montrer que* h *est continue sur* $]1, +\infty[$.

   b) *Montrer que* g *est continue sur* $]0, +\infty[$.

3. *Pour* $x \in]1, +\infty[$, *on pose* $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x}$ *et* $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^x}$.

   a) *Verifier que:* $\forall x > 1$, $S_1(x) = \frac{1}{2^x} h(x)$.

   b) *Montrer que:* $\forall x > 1$, $h(x) = S_2(x) + S_1(x)$ *et* $g(x) = S_1(x) - S_2(x)$.

   c) *Donner une relation entre* $g(x)$ *et* $h(x)$ *pour* $x \in]1, +\infty[$.

   d) *En déduire un équivalent simple de* $h(x)$ *au voisinage de* 1.

On donne: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ *et* $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 3

19/01/2023 **Examen de la session normale: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (3 *points*)

Déterminer la nature des séries numériques suivantes:

$$\sum \frac{1}{(n!)^n}, \quad \sum(\sqrt{n^2+n}-n)^n, \quad \sum (C_{2n}^n)^{-1}.$$

On note $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice 2. (5 *points*)

Soit $\alpha \in]0,+\infty[$. *On considère la suite réelle* $(u_n)_{n>0}$ *définie par:*

$$u_1 > 0 \text{ et: } \forall n > 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

1. a) *Vérifier que:* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
   b) *Déduire que la suite* $(u_n)_{n>0}$ *est croissante.*
2. *On suppose que la suite* $(u_n)_{n>0}$ *converge. Notons* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   a) *Montrer que* $l > 0$.
   b) *Montrer que la série numérique* $\sum(u_{n+1}-u_n)$ *converge.*
   c) *Vérifier que* $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha l}$ *et déduire que* $\alpha > 1$.
3. *On suppose que* $\alpha > 1$.
   a) *Montrer que la série numérique* $\sum(u_{n+1}-u_n)$ *converge.*
   b) *Déduire que la suite* $(u_n)_{n>0}$ *converge.*

Exercice 3. (5 *points*)

Soit (f_n) *la suite des fonctions réelles définies sur* $[0,+\infty[$ *par:* $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

1. *Montrer que la suite* (f_n) *converge simplement sur* $[0,+\infty[$ *vers une fonction* f.
2. a) *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[0,+\infty[$ *vers la fonction* f.
   b) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$.

Exercice 4. (7 *points*)

Pour $x > 0$, *on pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. *Démontrer que* $f(x)$ *est bien définie sur* $]0,+\infty[$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
3. a) *Donner une relation entre* $f(x)$ *et* $f(x+1)$.
   b) *Donner un équivalent de* f *en* 0.
   c) *Calculer* $\lim\limits_{0^+} f(x)$.
4. *Dresser le tableau de variation de* f.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 3

10/02/2023 **Examen de la session de rattrapage: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (6 *points*)

1. *Déterminer la nature des séries numériques suivantes:*

$$\sum \ln \tfrac{n^2+2}{n^2}, \quad \sum (3+(-1)^n)4^{-n}.$$

2. a) *Vérifier que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln n - \dfrac{n}{\ln n} = -\infty.$

   b) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^n = 0.$

   c) *Déduire la nature de la série numérique* $\sum(1-\frac{1}{\ln n})^n$.

On donne: $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$.

Exercice 2. (7 *points*)

I) *Soit* (f_n) *la suite de fonctions réelles définies sur* $\mathbb{R}$ *par:* $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

1) *Montrer que la suite* (f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f.
2) a) *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* f.
   b) *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $\mathbb{R}$*?*
   c) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

II) 1) *Soit* (g_n) *une suite de fonctions réelles converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* g. *Montrer que pour toute fonction réelle* h *définie sur* $\mathbb{R}$, *la suite de fonctions* $(g_n o h)$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* goh.

2) *Déduire que la suite de fonctions* $(e^{\frac{nx^3}{1+nx^2}})$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *et determiner sa limite uniforme.*

Exercice 3. (7 *points*)

Pour $x \geq 0$, *on note* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. *Démontrer que la fonction* f *est bien définie sur* $[0,+\infty[$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
3. a) *Vérifier que* $f(1) = 1$.

   b) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**CONTROLE EN MATHEMATIQUES** **(ANALYSE)**	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **: (4 points)**

1) Donner la définition d'un voisinage de a . (1 pt)
2) Donner la définition de la limite notée $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$ avec $a \in \bar{A}$, en utilisant les voisinages (1pt)
3) Montrer que si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$ alors (1 pt)
$$\forall (x_p)_p \subseteq A, \quad x_p \to a \Rightarrow f(x_p) \to l$$
4) Montrer que si $\forall (x_p)_p \subseteq A, \ \ x_p \to a \Rightarrow f(x_p) \to l$ alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l.$ (1 pt)

Exercice 2 **: (2 points)**

Calculer la limite de la suite suivante :

$$U_n = \left(\frac{\sin(n)}{n}, \ \frac{n^2+1}{n^3-1}, \ \frac{2-n}{n+3}, \frac{(-1)^n}{n+3}\right).$$ (2 pts) ✓

Exercice 3 **: (4 points)**

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ (1 pt) 1/2

2) $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ (1 pt) 1/2

3) $\begin{cases} f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} \ si \ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ (2 pts) 1/2

Exercice 4 : (2 points)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$, on pose pour $f \in E$:

1) $\begin{cases} F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & si\ x \neq y \\ F(x,x) = f'(x) & si\ non \end{cases}$ (2 pts)

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Soit $X =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in X$, on note

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

1) Montrer que d est une distance. (1 pt) ✓
2) Déterminer la boule fermée de centre 1 et de rayon 2. (1 pt)
3) L'espace métrique (X, d) est-il complet ? (2 pts)

Exercice 6: (2 points)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\}$, on pose pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt \ \ et \ \ N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. (1 pt) ✓
2) Montrer que $N_1 \leq N_2$. (1 pt)
3) Montrer les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. (2 pts)

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité :** **Licence maths**	**EXAMEN EN** **MATHEMATIQUE**	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : **(4 points)**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 & si\ (x,y) = (0.0) \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. **(1 pt)**
2) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. **(1 pt)**
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? **(1 pt)**
4) Soit la fonction $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, où $u(t) = t$ et $v(t) = -t$. Posons $F = fo\varphi$, calculer $F(0,0)$ et $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v'(0)$. **(1 pt)**

***Exercice 3*:** **(4 points)**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} & si\ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 & si\ (x,y) = (0.0) \end{cases}$$

Où α est un nombre réel.

1) Pour quelles valeurs de α, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? **(2 pts)**
2) Pour quelles valeurs de α, la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? **(2 pts)**

Exercice 4. **(4 points)**

Soit $X =]0;\ +\infty[$, pour x et y dans X, on pose $\delta\ (x;\ y)\ =\ |ln\, x - ln\, y|$.

1) Vérifier que δ est une distance sur X. (1 pt)

2) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est-elle convergente dans l'espace métrique $(X;\ \delta)$. Est-elle une suite de Cauchy dans $(X;\ \delta)$. (2 pts)

3) Montrer que l'espace métrique $(X;\ \delta)$ est complet. (1pt)

Exercice 5 **: (4 points)**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f\ (x,y)\ = (x + \frac{1}{2} sin\, y, y + \frac{1}{2}\ sin\, x)$$

1) Montrer que f est surjective. (1pt)
2) Montrer que f est injective. (2 pts)
3) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (1pt)

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : maths**	**RATTRAPAGE**	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **(2 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : **(4 points)**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 & si\ (x,y) = (0.0) \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. (1 pt)
2) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. (2 pts)
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? (1 pt)

Exercice 3 **(2 points)**

Montrer que la fonction : $f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 4**: (4 points)**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 & si\ (x,y) = (0.0) \end{cases}$$

Où α est un nombre réel.

1) Pour quelles valeurs de α, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (2 pts)
2) Pour quelles valeurs de α, la fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? (2 pts)

Exercice 5. (2 points)

Soit X =]0; +∞[, pour x et y dans X, on pose $\delta(x; y) = |e^x - e^y|$.

1) Vérifier que δ est une distance sur X. (1 pt)

2) L'espace métrique $(X; \delta)$ est-il complet ? (1pt)

Exercice 6: (3 points)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (e^x - e^y, x + y)$$

1) Montrer que f est injective. (1 pt)

2) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. (2pts)

Exercice 7 (3 points)

Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0\}$, on pose pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) + f'(x)| \ et \ N_2(f) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| + \sup_{0 \le x \le 1} |f'(x)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. (1 pt)

2) Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes. (2 pts)

École Normale Supérieure	**CONTROLE 1** **MECANIQUE DU SOLIDE**	Durée : **1h :30mn** AU : **2 022-2023** Module : S_3 Filière : **LEPC & LEM** **A MOURADI**

Exercice 1 : (2pts) 0 pt

On considère deux torseurs dont les éléments de réduction en un point M quelconque sont respectivement $[\vec{v}_1(M), \overrightarrow{R_1}]$ et $[\vec{v}_2(M), \overrightarrow{R_2}]$. On définit le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ par :

$$\vec{v}(M) = \vec{R}_1 \wedge \vec{v}_2(M) - \vec{R}_2 \wedge \vec{v}_1(M)$$

1. Montrer que le champ $\vec{v}(M)$ est équiprojectif. **(1pt)**
2. Déterminer la résultante associée à ce champ. **(1pt)**

Exercice 2 : (13 pts) 13 pt

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les vecteurs liés définis par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_1} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} & d'\text{ origine } A(2,0,0) \\ \overrightarrow{V_2} = -2\vec{\jmath} + \vec{k} & d'\text{ origine } B(0,1,0) \\ \overrightarrow{V_3} = -5\vec{\imath} + 2\vec{k} & d'\text{ origine } C(0,0,3) \end{cases}$$

1. Déterminer les éléments de réduction en **O** du torseur $[T_1]$ associé à ces vecteurs glissants. **(2 pts)**
2. Déterminer de deux façons différentes les éléments de réduction de $[T_1]$ au point **E (2, 1, -2)**. **(2 pts)**
3. Vérifier la propriété d'équiprojectivité du champ des moments de $[T_1]$. **(2 pts)**
4. Calculer l'invariant scalaire de $[T_1]$ et en déduire le type du torseur $[T_1]$? **(2 pts)**
5. Donner l'équation de son axe central. **(2 pts)**

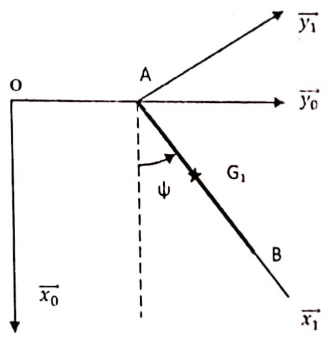
Soit le torseur $[T_2]$ dont on donne les éléments de réduction en **E** :

$$[T_2] = \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = \dfrac{1}{3}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}) \\ \overrightarrow{H_2}(E) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \end{cases}$$

6. Quelle relation doit exister entre **a** et **b** pour que ce torseur soit un glisseur ? **(2 pt)**
7. Calculer le comoment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$. **(1 pt)**

Exercice 3 : (5 pts) 0 pt

Dans le plan vertical $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ où $\overrightarrow{Ox_0}$ est la verticale descendante, on considère le mouvement d'un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (T_1) de longueur **AB=L** et de centre de gravité G_1 **(se trouve au milieu de la tige).**
L'extrémité A de la tige est astreinte à se déplacer sur l'axe $\overrightarrow{Oy_0}$. On posera **OA = y** et $\psi = (\widehat{\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{AB}})$.
Le repère $R_1(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est lié à (T_1), et la position de (T_1) est donné par **y = OA** et **l'angle** ψ.
Le vecteur vitesse de rotation de (T_1) par rapport à R_0 est $\vec{\Omega}(T_1/R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0}$



1. Exprimer les vecteurs de déplacements $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG_1}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. **(1.5 pt)**
2. Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique de $[\tau_1]_{G_1}$ de (T_1) au point G_1 par rapport à R_0 en fonction des données du problème. **(1 pt)**
3. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(B/R_0)$ de l'extrémité **B** de (T_1) en utilisant deux méthodes. **(1 pt)**
4. Ecrire les éléments de réduction du torseur cinématique en B par rapport à R_0. **(0.5 pt)**
5. Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(A/R_0)$ et $\vec{\gamma}(B/R_0)$ des points A et B dans R_0. **(1 pts)**

EXAMEN : MECANIQUE DU SOLIDE

Session d'automne 2022-2023

Durée : 2H — AU : 2 022-2023

Module : S_3 — Filière : LEPC & LEM

A MOURADI

Exercice 1 : (2pts)

1. Montrer que le champ des vitesses d'un solide indéformable est équiprojectif. **(1 pt)**
2. Montrer que pour deux points A et B du solide $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$. **(1 pt)**

Exercice 2 : (6 pts)

On considère les trois vecteurs : $\overrightarrow{V_1} = \vec{y} + \vec{z}, \overrightarrow{V_2} = \vec{x} + \vec{z}$ et $\overrightarrow{V_3} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} - 2\vec{z}$, définis relativement à un repère orthonormé direct $R(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et liés respectivement aux points :

$A\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), B\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ *avec* α *et* β sont des nombres réels.

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T]$ associé au système des trois vecteurs au point O. **(2 pts)**

2- Montrer que quel que soient α *et* β le torseur est un glisseur. **(1 pt)**

3- Déterminer l'axe central du torseur. **(1 pt)**

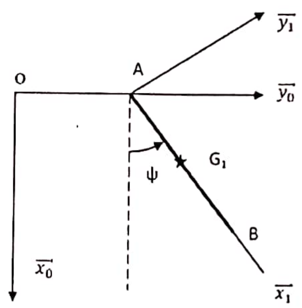
4- Pour quelles valeurs de α *et* β le torseur est-il nul ? Vérifier que pour ces valeurs les trois vecteurs sont coplanaires. **(2 pts)**

Exercice 3 : (7 pts)

Dans le plan vertical $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ où $\overrightarrow{Ox_0}$ est la verticale descendante, on considère le mouvement d'un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (T_1) de longueur **AB=L** et de centre de gravité G_1.

L'extrémité A de la tige est astreinte à se déplacer sur l'axe $\overrightarrow{Oy_0}$. On posera **OA** = y et $\psi = (\widehat{\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{AB}})$.

Le repère $R_1(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est lié à (T_1), et la position de (T_1) est donné par **y = OA** et **l'angle ψ**.



1. Quel est le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(T_1/R_0)$ **(1pt)**

Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique $[\tau_1]_{G_1}$ de (T_1) au point **G_1** par rapport à R_0 en fonction des données du problème. **(1 pt)**

2. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(B/R_0)$ de l'extrémité **B** de (T_1) en utilisant deux méthodes. **(2 pts)**
3. Ecrire les éléments de réduction du torseur cinématique en B par rapport à R_0. **(1 pt)**
4. Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(A/R_0)$ et $\vec{\gamma}(B/R_0)$ des points A et B dans R_0. **(2 pts)**

Indication : Tous les résultats doivent exprimer dans la base $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

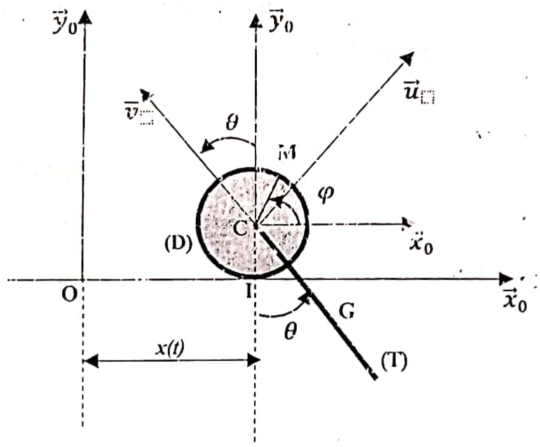
Exercice 4 : (5 pts)

Soit le système (S) constitué de deux solides suivants :

- (D) est un disque de centre C et de rayon R.
- (T) une tige rectiligne de centre d'inertie G et de longueur 2L.

Le disque (D) roule sans glisser sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$ du repère de référence $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. On notera **I** le point de contact de (D) avec l'axe $(O, \vec{x}_0)$.

La tige rectiligne (T) est articulée sur le disque (D) est reste dans le plan vertical $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$.



Les paramètres de la position de (S) sont :

- *x(t)* l'abscisse du centre C de (D).
- $\varphi(t) = (\vec{x}_0, \overrightarrow{CM})$ où M est un point lié à (D) (voir figure).
- $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$.

1. Calculer la vitesse absolue du point G, et celle au point I. **(2 pts)**
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement en I, et en déduire une relation entre x et θ. **(1 pt)**

   Dans la suite du problème cette relation sera prise en compte.
3. Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinématique de (D) dans son mouvement par rapport à (R_0). **(1 pt)**
4. Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0). **(1 pt)**

Indication : Tous les résultats doivent exprimer dans la base $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$.

Examen de science d'éducation

1- Que doit le behaviorisme a travaux de SKINNER et de THORNDIKE?
2- Pour Piaget, l'intelligence n'est pas un état ou une faculté stable mais un processus adaptatif. Expliquez cette affirmation.
3- Expliquez en quoi l'adaptation cognitive représente, pour Piaget, un prolongement de l'adaptation biologique.
4- Expliquez le concept de «zone de développement proximal» chez Vygotsky et précisez en quoi il s'apparente à la notion de déséquilibre chez Piaget.
5- Les objectifs et finalités de l'école Montessori sont en lien étroit avec les postulats de la théorie montessorienne. Développez quelques aspects de ces liens en en faisant ressortir le fil directeur.
6- Commentez les caractéristiques de la méthode éducative de Freinet.