ENS Tétouan **Année universitaire 2023/24**

Epreuve de Mécanique du solide

Session normale

Durée 2h

Exercice 1 :

Soit l'espace affine Euclidien de repère : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soient les points A (1, 0, 0), B (0, 1, 0).et le torseur$[T(\lambda)]$ donné par ses trois moments aux points O, A et B :

$$\begin{cases} \vec{H}(O) = -2\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} \\ \vec{H}(A) = -2\vec{\imath} + (3+2\lambda)\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{H}(B) = -3\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} + (2+\lambda)\vec{k} \end{cases}$$

1) -Vérifier l'équiprojectivité de ces moments.
2) - Déterminer la résultante$\vec{R} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$ du torseur.
3) - Soit C le point de coordonnées (0, 0, 1), déterminer le moment au point C par la condition d'équiprojectivité.
4) - Pour quelle valeur de λ , le torseur $[T(\lambda)]$ est-il un glisseur ? déterminer son axe central.

Exercice 2 :

On considère le roulement d'un disque de centre C et de rayon r sur un axe $(O, \overrightarrow{x_1})$.

Le repère R $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au disque.

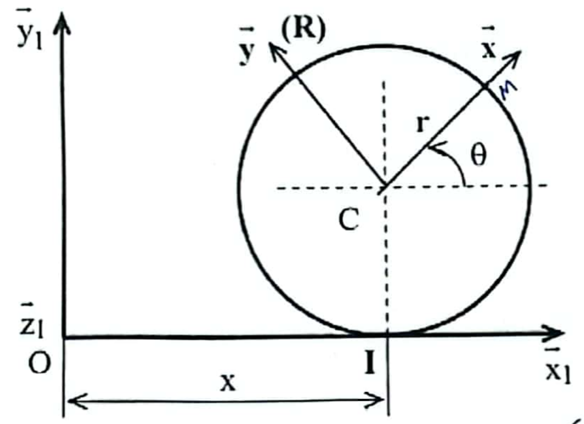
1. Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque.
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque.
3. Écrire la condition de roulement sans glissement au point de contact I avec l'axe $(O, \overrightarrow{x_1})$.
4. Déterminer les torseurs cinétique et dynamique au centre C.
5. Calculer l'énergie cinétique du disque.

Remarque :Exprimer tous les résultats dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

$\vec{V}_g$

$\vec{V}_g = V(I \in D/R_1) - \vec{V}(I \in (O,x_1)/R_1)$

$R_1(O, x_1, \ldots)$



$OC = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC}$
$= x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1$

La matrice d'inertie au centre C est donnée par :

$$II_C = \frac{mr^2}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAIDI
École Normale Supérieure – Tétouan
Filière : LE MATHEMATIQUE

Examen

Module : Algorithmique et Programmation

Exercice 1 :

Ecrire une fonction qui vérifie si un nombre entier est un multiple de 5 et de 7

Exécution :

- Entrer un nombre : 68 35
- 68 n'est pas multiple de 5 et de 7
- Entrer un nombre : 35 68
- 35 multiple de 5 et de 7

Exercice 2 :

On souhaite écrire une fonction qui permet de résoudre une équation du second degré. Voici le prototype de la fonction:

```
int resoudre2(int a, int b, int c, float *x1, float *x2);
```

La fonction retourne le nombre de solution trouvé (0: pas de solution, 1: une solution, 2: une solutions, -1: tout x est solution). Dans le cas où l'équation a une solution, la fonction retourne la solution dans x1. Dans le cas où l'équation a deux solutions, la fonction retourne les solutions dans x1 et x2.

Exercice 3 :

Écrire un programme qui détermine tous les diviseurs d'un nombre entier saisi, plus grand de 1.

Exercice 4 :

En mathématiques, on définit la fonction factorielle de la manière suivante :

$$n! = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

1-Ecrire les fonctions suivantes :

- **FACT** de type double qui reçoit la valeur n (type int) comme paramètre et qui fournit la factorielle de n comme résultat.
- **COMBIN:** qui utilise la fonction FACT pour calculer C_n^p à partir de n et p:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! * (n-p)!}$$

2- Ecrire un petit programme qui teste la fonction **COMBIN**

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAIDI
École Normale Supérieure – Tétouan
Filière : LE MATHEMATIQUE

Contrôle de rattrapage

Module : Algorithmique et Programmation

Exercice 1 :

Créez une fonction **displayTriangularMatrix** prenant en entrée une matrice triangulaire et l'affichant comme ci-dessus.

```
                    1
                1       1
            1       2       1
        1       3       3       1
    1       4       6       4       1
1       5      10      10       5       1
```

Exercice 2 :

Écrire un programme C pour lire deux nombres de l'utilisateur et les additionner en utilisant des pointeurs.

Exercice 3 :

Écrire une fonction permettant de compter et d'afficher le nombre de diviseurs d'un entier n positif donné.

Contrôle surveillé	LE-Math	**Semestre 3**
Algèbre	**Durée 1h45**	2023–2024
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Rappel : p est un projecteur de $E \iff p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.
Alors : $\operatorname{Im} p = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$ et $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$,
p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Exercice 1.
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = \left(-2x + y + z, -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{1}{2}z, -3x + y + 2z\right) \end{aligned}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Monter que $A^2 = \frac{1}{2}(A + I_3)$.
3. Calculer $\chi_f(X)$, en déduire $\mu_f(X)$ (sans faire les calculs).
4. f est-elle trigonalisable?
5. Montrer que f est diagonalisable, puis calculer P, P^{-1} et D telles que $D = P^{-1} A P$.
6. f est-il bijectif?
7. Posons $p = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} id_{\mathbb{R}^3}$.
   Donner la matrice P_p de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
8. Montrer que p est un projecteur.
9. Derterminer $Ker(p)$. Que remarquez vous?
10. Expliquer pourquoi on a : $\mathbb{R}^3 = Ker(p) \oplus Im(p)$.
11. En déduire $Im(p)$ (sans faire les calculs).
12. Soit B_1 la base de $\mathbb{R}^3$ former de vecteurs prpres de A. Donner la matrice $\hat{P}$ de p dans la base B_1.
13. Posons $q = f^2 - f$. Donner la matrice Q_q de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
14. Montrer que q est un projecteur.
15. Calculer f^n.
16. Donner p et q explicitement.

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI

École Normale Supérieure Tétouan

Examen	LE-Math	**Semestre 3**
Algèbre	**Durée 2h00**	2023–2024
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Exercice 1. (5 pts)
Soit l'application

$$\phi : \mathbb{R}_{2n}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{2n}[X]$$
$$P \longmapsto \phi(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ.

Exercice 2. (5 pts) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. En distinguant les valeurs du paramètre réel t, déterminer le polynôme minimal de A_t.
2. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice A_t est diagonalisable.

Exercice 3. (10 pts) Soit A la matrice associée à l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ suivant la base canoniquede $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer l'application f.
2. Montrer que A est diagonalisable, Puis déterminer P, P^{-1} et D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Considérons le système de suites récurrentes d'inconnues les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases}.$$

   Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Considérons le système différentiel d'inconnues les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

   Déterminer les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 3

23/12/2023 **Contrôle continu: Analyse 4** **Durée 2h**

Exercice 1. (*7 points*)

1. *Déterminer la nature des séries numériques suivantes:*

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^3-4n}, \quad \sum (1-\cos(\frac{\pi}{n})),$$
$$\sum \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n, \quad \sum \frac{1}{(n!)^n}, \quad \sum (3+(-1)^n)3^{-n}.$$

2. *En utilisant la règle d'Alembert, determiner la nature de la série suivante:*

$$\sum \frac{2^n}{n^2(\sin a)^{2n}} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 2. (*4 points*)

Soit (u_n) *une suite dans* $\mathbb{R}^+$.

1. *Montrer que les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum \ln(1+u_n)$ *ont la même nature.*
2. *Déduire que le produit infini* $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ *converge si et seulement si la série* $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 3. (*4 points*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ *on pose* $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{\tan x}{x(1+nx)}, & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[0, \frac{\pi}{2}[$ *en déterminant sa limite simple.*
2. *Étudier la convergence uniforme sur* $]0, \frac{\pi}{2}[$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. (*5 points*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *soit* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par:*

$$f_n(x) = (1+\tfrac{x}{n})^{-n}.$$

1. a) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers une fonction* f.
   b) *Vérifier que:* $\forall n \geq 1,\ f_n \geq f$.
2. *Soit* $a \in]0, +\infty[$.
   a) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $[0, a]$.
   b) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}^+$.
   c) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(t)dt$.

On donne: $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$ et $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.

المدرسة العليا للأساتذة
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ ⵏ ⵢⵉⵙⵍⵎⴰⴷⵏ
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaâdi

LE-Math S6
Année :2023-2024

Analyse 4 (2h)

Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries ΣU_n suivantes :

1. $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.
2. $U_n = \left(\sin\dfrac{2}{n}\right)^n$.
3. $U_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}}$.
4. $U_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
5. $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2 :

Soit (x_n) une suite de réels positifs. On pose $y_n = \dfrac{x_n}{1+x_n}$.

1. Montrer que les séries $\sum x_n$ & Σy_n sont de même nature.
2. Déduire la nature de la série numérique $\sum U_n$ avec :

$$U_n = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Exercice 3 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln x, & x \in]0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Y a t il convergence uniforme de la suite $f_n \mid sur[0,1]$?

3. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers les fonction f.

Exercice 4 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, ou pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D =]0, \infty[$.
2. a Montrer que la série de fonctions $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln x}{n^x}$ converge normalement sur tout segment de D.
   b Déduire que f est de classe C^1 sur D.
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Soit $x \in]0,1[$. On considère la fonction

$$g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$t \longrightarrow \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}$$

(a) Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} g(t)dt \leq f(x) \leq g(1) + \int_1^{+\infty} g(t)dt.$$

(b) Vérifie que : $\int_1^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x} - 1\right)$.

(c) Déduire que : $lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

5. a Donner le tableau de variation de f.
   b Tracer dans un repère orthonormé la représentation graphique de la fonction f.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**CONTROLE EN MATHEMATIQUES** **(ANALYSE)**	Année scolaire : **2023/2024**

Exercice 1 **: (6 points)**

1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $A \subset \bar{A}$, où $\bar{A}$ est l'adhérence de A. (1 pt)
b) Supposons que F est une partie fermée. Montrer que $F = \overline{F}$. (2pts)
2) On suppose que pour tout $x \in E$, il existe une suite de F qui converge vers x et $x \in F$.Montrer que F est fermé. (2 pts)
3) Que peut-on conclure ? (1 pt)

Exercice 2 **: (2 points)**

Calculer la limite la suite suivante :

$$U_n = \left(\frac{sin(n)}{n}, \quad \frac{n+(-1)^n}{n+3(-1)^n}\right)$$

Exercice 3 **: (4 points)**

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ (2 pts)

2) $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0.0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ (2 pts)

Exercice 5**: (4 points)**

1) Montrer que $inf(a,b) = \frac{|a+b|-|a-b|}{2}$ (2 pts)
2) Etudier la continuité de $f(x,y) = inf\left(\frac{x^4y}{4y^2+|x|}, \frac{xy^4}{4x^2+|y|}\right)$ (2 pts)

Exercice 5**: (4 points)**

Soit $E = \{f \in C^1([0,1]), \; f(0) = 0\}$ et N_1 et N_2 les applications définies sur E par :

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \; et \; N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

1) Montrer que N_1et N_2 définissent des normes sue E. (1 pt)
2) a) Montrer que $(\forall f \in E)$, $N_2(f) \leq 2N_1(f)$. (1 pt)
3) b) En utilisant l'identité $f(x) = e^{-x}\int_0^x \big(f(t) + f'(t)\big)\, e^t dt$, montrer que $N_1(f) \leq 2N_2(f)$. (1 pt)
4) Que peut-on conclure. (1 pt)