Cours : Analyse I

Pr : **OUAISSA Hamid**

Licence Education
Spécialité : Enseignement secondaire Mathématiques

Année universitaire : 2023-2024

1

Suites numériques

1.1 Généralités

L'étude des suites de nombres réels a plusieurs champs d'application :

- Les suites représentent un modèle courant de description de phénomènes discrets, c'est-à-dire évoluant étape par étape. On s'intéresse en particulier au comportement à long terme, d'où l'importance de la notion de convergence.
- Les suites constituent également un outil d'étude approfondie des nombres réels. Elles fournissent par exemple des algorithmes d'approximation de nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$, e ou π.

L'idée de suite trouve sa source dans les méthodes d'approximations successives déjà utilisées par les Babyloniens 3000 ans avant J.-C. et brillamment mises en oeuvre par Archimède. L'étude d'une suite comme un objet en lui-même naît avec l'étude des séries au XVIIIe siècle (Euler, d'Alembert).

Définition 1.1.1. On appelle suite réelle une famille de réels indexée par les entiers naturels, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \rightarrow & u_n \end{array} \tag{1.1}$$

La suite est notée en abrégé $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Le terme u_n est appelé le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On peut également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 dans ce cas on la note $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n+3$. Calculer u_0, u_1 et u_2. Même question, soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = (n+1)^2$.*

On peut définir certaine type de suites numériques selon leur nature et les propriétés qu'elles satisfont :

Définition 1.1.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est:

- constante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n;$$
- croissante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n;$$
- décroissante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n;$$
- strictement croissante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n;$$
- strictement décroissante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n;$$
- monotone si elle est croissante ou décroissante
- majorée si $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ est majoré;
- minorée si $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ est minoré;
- bornée si $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ est borné;
- périodique si
$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$$

Exemple 1.1.2. • *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $u_n = \sqrt{n+4}$ *est minorée par* 2 *(car* $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 2$ *)*
• *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $v_n = \exp^{-n^2}$ *est majorée par 1. Elle est même bornée.*
• *La suite* $w_n = (-1)^n \dfrac{\cos(n)}{n+2}$ *est bornée.*
• *La suite* $s_n = 2n+1$ *est strictement croissante.*
• *La suite* $r_n = \exp^{-n}$ *est strictement décroissante.*
• *La suite* $t_n = \cos(2\pi n)$ *est constante donc périodique de période* 1.

Propriétés 1.1.1. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq M$$

L'expression « à partir d'un certain rang » reviendra souvent dans ce qui suit. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété P à partir d'un certain rang n_0 signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour des entiers naturels supérieur ou égale à un certain n_0. On dit aussi « P est vraie pour n assez grand ». Voici un exemple

Définition 1.1.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang (on dit également stationnaire) si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n;$$

1.2 Convergence d'une suite

La notion de convergence des suites est considérée un outil essentiel permettant d'élaborer dans résultats d'analyse:

Définition 1.2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $l \in \mathbb{R}$: On dit que (u_n) converge vers l si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (où $n_0 = n_\varepsilon$) tel que pour $n \geq n_\varepsilon$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$.
Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple 1.2.1. *Soit* $u_n = \frac{1}{n+1}$, *on a bien* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *En effet, soit* $\varepsilon > 0$ *alors*

$$|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1,$$

or $E(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon}$, *donc* $E(\frac{1}{\varepsilon}) < n+1$. *D'où* $E(\frac{1}{\varepsilon}) \leq n$. *Ainsi il suffit de prendre* $n_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon})$.

Il est clair que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$$

Il peut être commode pour étudier la convergence de $(u_n)_n$ vers l de se ramener à la convergence de la suite de terme $(u_n - l)$ vers 0.

Exercice 1.2.1. Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.

Unicité de la limite

Théorème 1.2.1. *Si une suite réelle est convergente alors sa limite est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins deux limites différentes l_1 et l_2, donc $|l_1 - l_2| > 0$.
Par définition pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_1(\varepsilon)) \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon$$

$$\exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_2(\varepsilon)) \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon_0 = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$ et $n_0(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ alors pour $n > n_0(\varepsilon)$ on a

$$\begin{cases} |u_n - l_1| < \varepsilon_0 \\ |u_n - l_2| < \varepsilon_0 \end{cases}$$

Or

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon_0$$

Ainsi

$$|l_1 - l_2| < 2\frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

càd

$$0 < 0$$

ce qui est impossible, alors $l_1 = l_2$.

Théorème 1.2.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors on a*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

Démonstration. Exercice.

Remarque 1.2.1. Pour la réciproque de l'assertion 1 est fausse, considérons le contre exemple suivant $u_n = -\dfrac{3n+7}{n+8}$.

Définition 1.2.2. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N_A \in \mathbb{N} : n \geq N_A \Rightarrow u_n > A.$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou tout court $\lim u_n = +\infty$.

2. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall B > 0, \quad \exists N_B \in \mathbb{N} : n \geq N_B \Rightarrow u_n < -B.$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou tout court $\lim u_n = -\infty$.

Exemple 1.2.2. *On considère la suite de terme général* $u_n = n + 2$. *Soit* $A > 0$, *pour que* $u_n > A$, *il suffit que* $n > A - 2$.
Posons $N_A = E(A - 2) + 1$. *Alors*

$$n \geq N_A \Rightarrow u_n > A.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 1.2.3. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.
i. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente si elle admet une limite finie.
ii. Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Parmi les propriétés d'une suite convergente, on a

Propriétés 1.2.1. Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite convergente tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l < \infty$
Soit $\varepsilon > 0$ par définition, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq n_\varepsilon$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}$, on aura pour $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq n_1$ on ait $|u_n - l| < 1$.
Or

$$|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |u_n - l| + |l|$$

donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc deux cas :

- si $n > n_1$ alors
$$|u_n| \leq 1 + |l|. \tag{1.2}$$
- si $n \leq n_1$ alors
$$|u_n| \leq \alpha. \tag{1.3}$$
où $\alpha = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n_1}|\}$.

Soit $M = \max\{\alpha, |l| + 1\}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leq M$$

D'où, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque 1.2.2. 1/ Toute suite non bornée est une suite divergente.
2/ une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. (Exemple $u_n = (-1)^n$)

1.2.1 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes tel que $\lim u_n = l_1$ et $\lim v_n = l_2$, on a donc les propriétés suivantes

Propriétés 1.2.2. 1. $\lim u_n + v_n = l_1 + l_2$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
$$\lim \lambda u_n = \lambda l_1$$

3. $\lim u_n\, v_n = l_1\, l_2$

4. Si $l_1 \neq 0$ alors $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$

5. Si $l_2 \neq 0$, alors
$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

Démonstration. On démontre alors l'une de ces propriétés par exemple 3) en gardant les autres à titre d'exercices. Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes tel que $\lim u_n = l_1$ et $\lim v_n = l_2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors on a

$$|u_n v_n - l_1 l_2| = |u_n v_n - v_n l_1 + v_n l_1 - l_1 l_2| = |(u_n - l_1)v_n + (v_n - l_2)l_1|$$

Donc
$$w_n := |u_n v_n - l_1 l_2| \leq |(u_n - l_1)||v_n| \times |(v_n - l_2)||l_1|$$

Comme v_n est convergente alors v_n est bornée par suite il existe $\beta > 0$ tel que

$$|v_n| \leq \beta \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

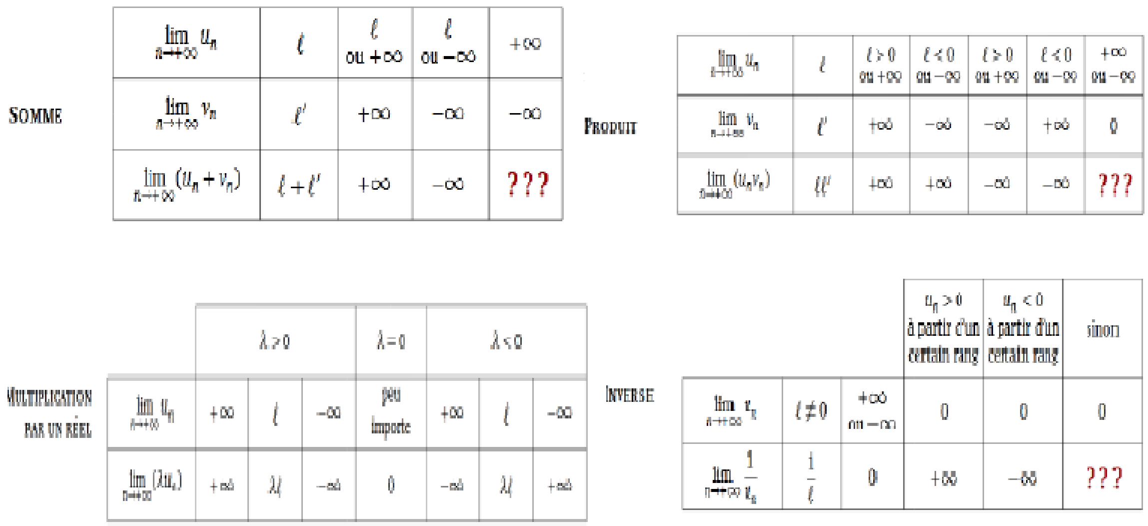
De plus $|u_n - l_1|$ et $|v_n - l_2|$ tendent vers 0. Ainsi w_n tend vers 0, càd pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |w_n| = |u_n v_n - l_1 l_2| \leq \varepsilon$$

D'où l'assertion 3.

Extension des opérations sur les limites

Si la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou celle de $(v_n)_{n\geq n_1}$ est infinie, différentes situations peuvent se produire. Nous les résumons dans les différents cas dans les tableaux suivants: Le symbole ??? ne signifie pas une absence de limite mais une indétermination, i.e. une impossibilité de conclure en toute généralité, qui nécessite donc un traitement adéquat pour chaque cas.



SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	???

PRODUIT

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

	$\lambda>0$			$\lambda=0$	$\lambda<0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

INVERSE

			$u_n>0$ à partir d'un certain rang	$u_n<0$ à partir d'un certain rang	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	???

Figure 1.1: Récapitulatif des opérations algébriques sur les limites des suites réelles (finie ou infinie)

1.2.2 Limites et inégalités

Passage à la limite dans une inégalité

Nous avons alors le résultat de comparaison de limites de deux suites différentes :

> **Théorème 1.2.3.** *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles convergentes.*
>
> $$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq y_n, \qquad \text{alors } \lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Démonstration. Démontrons ce résultat alors par absurde. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n > \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) > 0$, ce qui entraîne que le terme général $(x_n - y_n)$ est strictement positive à partir d'un certain rang, en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Encadrement par des suites de même limite

Le résultat suivant est appelé familièrement « théorème des gendarmes » :

Théorème 1.2.4. *Soient* $(x_n)_n, (y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ *trois suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq y_n \leq z_n$$

Si $(x_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ *convergent vers la même limite* l*, alors* $(y_n)_n$ *converge et sa limite est aussi* l*.*

Démonstration. Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_n \leq w_n$$

où $\lim u_n = \lim w_n = l$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

Or, $\lim w_n - u_n = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_\varepsilon$, on ait $|w_n - u_n| < \varepsilon$.
D'où si $n \geq n_\varepsilon$ on ait

$$|v_n - u_n| \leq |w_n - u_n| < \varepsilon$$

alors

$$\lim v_n - u_n = 0$$

Or $\lim u_n = l$, donc

$$\lim v_n = l.$$

Exemple 1.2.3. *Soit* $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\sqrt{n^2+1})}{n^4+2}$ *alors*

$$|u_n| = \left|(-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n^2+1})}{n^4+2}\right| \leq \frac{1}{n^4+2}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n^4+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^4+2}$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on a bien $\lim u_n = 0$

Exercice 1.2.2. Encadrer la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Extension à l'infini

Nous énonçons maintenant un résultat de comparaison de deux suites au cas où l'une diverge.

Théorème 1.2.5. *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles telles que pour tout n entier naturel $x_n \leq y_n$.*
- *Si $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(y_n)_n$ tend aussi vers $+\infty$.*
- *Si $(y_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors $(x_n)_n$ tend aussi vers $-\infty$.*

Démonstration. Si $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$, par définition on a

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \quad x_n \geq A.$$

A fortiori, $\forall n \geq n_0 \quad y_n \geq A$. On procède de même pour la 2^{me} assertion.

Nous passons maintenant à quelques résultats d'existence de limites.

1.2.3 Théorème d'existence de limites

Théorème 1.2.6. *Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. On considère l'ensemble

$$E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée: elle admet donc une borne supérieure l. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a d'après la caractérisation de la borne supérieure $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E; il existe donc un entier n_0 tel que $l - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq l < l + \varepsilon$. La suite étant croissante :

$$\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq l < l + \varepsilon, \quad \text{donc } |x_n - l| < \varepsilon$$

La suite $(x_n)_n$ converge vers l.

Remarque 1.2.3. De même on peut établir le résultat suivant pour les suites décroissantes:

Théorème 1.2.7.

Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Exemple 1.2.4. *Ces résultats permet de déterminer la borne supérieure et inférieur de certaines ensembles définies en terme des suites.*
Soit $A = \{1 - \frac{1}{n^2+4}; \quad n \in \mathbb{N}\}$, *considérons la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2+4}$$

On montre bien que $(u_n)_n$ *est une suite strictement croissante (à vérifier). De plus on montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{4} \leq u_n < 1$$

Donc, si la limite de la suite existe ça coïncide avec la borne supérieure de A, *en effet on a*

$$\lim u_n = 1 = \sup\{\, u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup(A).$$

Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas où des suites monotones non bornées :

Théorème 1.2.8. *Toute suite croissante non majorée tend vers* $+\infty$. *Toute suite décroissante non minorée tend vers* $-\infty$

Suites adjacentes

Définition 1.2.4. Deux suites réelles sont dites adjacentes si:

- l'une est croissante
- l'autre décroissante,
- Leur différence converge vers 0

Exemple 1.2.5. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles définies par :*

$$u_n = \frac{-1}{n+1} \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

on montre facilement que :

- $(u_n)_n$ *est strictement croissante.*
- $(v_n)_n$ *est strictement décroissante.*
- $\lim u_n - v_n = 0$

Alors les deux suites $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes.*

Théorème 1.2.9. *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et elles convergent vers la même limite.*

Démonstration. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles adjacentes autrement dit:
Supposons $(x_n)_n$ croissante, $(y_n)_n$ décroissante et $\lim y_n - x_n = 0$.
La suite $(y_n - x_n)_n$ est décroissante et elle converge vers 0 ; elle est donc toujours positive :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 \le x_n \le y_n \le y_0.$$

$(x_n)_n$ est donc croissante et majorée par y_0 : elle converge.
$(y_n)_n$ est décroissante et minorée par x_0 : elle converge.
Comme $\lim y_n - x_n = 0$, on déduit $\lim x_n = \lim y_n$.
Remarque : La limite commune des deux suites, notée l , vérifie l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le l \le y_n.$$

à l'aide de la notion des suites adjacentes, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.2.10. *(Théorème des segments emboîtés) Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$) dont l'amplitude ($b_n - a_n$) converge vers 0.*
L'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton (càd $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$).

Démonstration. Il suffit de remarquer que les extrémités (a_n) et (b_n) définissent des suites adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel l. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le l \le b_n,$$

donc $l \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Si l' est un élément quelconque de cette intersection, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n \ge |l - l'|$, d'où $l = l'$ car $\lim b_n - a_n = 0$

1.2.4 Sous suites d'une suite

Définition 1.2.5. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application, on dit que g est strictement croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) < \varphi(n+1)$$

On définit maintenant la notion de sous suites d'une suite appelé également suites extraites:

Définition 1.2.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on appelle sous suite (ou suite extraite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n := u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 1.2.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors, les suites suivantes :*

$$u_{n+1}, \quad u_{2n}, \quad u_{2n+1}, \quad u_{n^2}, \quad u_{3n}$$

définissent des sous suites ou bien suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2.5 Convergence des suites extraites

Nous avons alors le résultat suivant permet de déduire la convergence des suites extraites:

Théorème 1.2.11. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.*

pour démontrer ce théorème, nous admettons le lemme suivant qu'on peut facilement le démontrer par récurrence.

Lemme. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration. (Théorème) Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers l, càd

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |x_n - l| < \varepsilon$$

Soit $(x_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(x_n)_n$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Alors d'après le lemme précédant 1.2.5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow |x_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$$

La suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge donc vers l.

Remarque 1.2.4. Si pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe deux sous suites convergentes vers deux limites différentes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (càd non convergente). En particulier si $\lim u_{2n} = l_1$ et $\lim u_{2n+1} = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exemple 1.2.7. *Soit $u_n = (-1)^n$, on a bien les deux sous suites suivantes convergent vers deux limites différentes à savoir :*

$$u_{2n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \quad u_{2n+1} = -1 \underset{n\to+\infty}{\to} -1$$

Alors la suite $(u_n)_n$ diverge.

Nous énonçons maintenant le résultat suivant permettant d'établir la convergence d'une suite à partir de la convergence de ses suites extraites.

Théorème 1.2.12. *Si les sous suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers l.*

Démonstration. Exercice

Exemple 1.2.8. *Soit $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+2}$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+3} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

1.2.6 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 1.2.7. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. On dit qu'un réel l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.2.9.

- *On considère la suite suivante: $u_n = 1+\cos(n\frac{\pi}{2})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\cos(2n\pi)) = 2$. Donc 2 est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\cos(\frac{\pi}{2})) = 1$. Donc 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.
- *La suite $u_n = (-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérences qui sont -1 et 1.*

Proposition 1.2.1. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

1.2.7 Suite extraite d'une suite bornée

Nous énoncons maintenant l'un des plus grand théorème d'analyse. Il est patent que Bolzano n'a jamais énoncé ce théorème dans lequel son nom est désormais lié à celui de Weierstrass. C'est à ce dernier que revient l'entière paternité du théorème. Cependant, il utilisa pour le démontrer les idées de Bolzano et la méthode qu'il avait mise au point pour son propre théorème trente années plustôt.

Théorème 1.2.13. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente. Autrement dit : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle bornée alors il existe une sous suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *(où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante) convergente càd*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l \quad \textit{où} \quad l \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Nous omettons la démonstration, mais pour ceux qui sont intéressés la démonstration est basé sur le théorème des segments emboitées.

1.2.8 Critère de Cauchy

Suites de Cauchy

Définition 1.2.8. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ \text{ tel que } (p \geq n_\varepsilon,\, q \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

Cette définition de suite de Cauchy peut être énoncer d'une manière équivalente

Définition 1.2.9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème 1.2.14. *Une suite réelle convergente alors elle est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Soit $\varepsilon >$ alors il existe $n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ alors $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ Soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p, q > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ alors

$$|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \varepsilon$$

ceci pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p, q \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ on peut prendre $n_\varepsilon = n_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Ce qui est particulier pour les suites réelles c'est que les termes de la suite appartenant à $\mathbb{R}$ qui est un espace complet (notion à voir prochainement), ceci nous permet alors d'avoir même une équivalence.

Théorème 1.2.15. *Une suite réelle convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Proposition 1.2.2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, en considérant la définition pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_N| < 1$ pour tout $n \geq N$,
Ainsi, pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| < 1 + |u_N|$.
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$.

Proposition 1.2.3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy telle qu'il existe une sous suite convergente vers une certaine limite l. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente vers la même limite l.

Démonstration. Exercice

Application : Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k} = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{2^2} + ... + \frac{\sin(n)}{2^n}$, et soient $n, p \in \mathbb{N}$ tel que on a

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &= |\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}| \\ &= |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(k)}{2^k}| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} &= \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{p-1}}) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{p-1}) \end{aligned}$$

Donc on a

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{p-1} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^p)$$

Or $1 - (\frac{1}{2})^p < 1$, alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 1 + \frac{1}{2} + ... + (\frac{1}{2})^{p-1} < 2$$

Ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{2^n}$$

Or $\lim \frac{1}{2^n} = 0$. donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n(\varepsilon)$ on ait

$$\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.2.9 Erreur d'approximation de la limite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente avec $\lim u_n = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy càd

$$(\star) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Soit $v_p = u_{n+p}$ (avec n est fixé). Donc $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_n$, alors $\lim v_p = l$.
Alors d'après $(\star)$ quand $p \to +\infty$ on obtient

$$|l - u_n| < \frac{1}{2^n} \quad (\text{ pour } \varepsilon = \frac{1}{2^n})$$

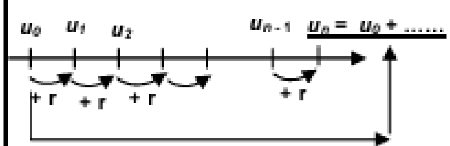
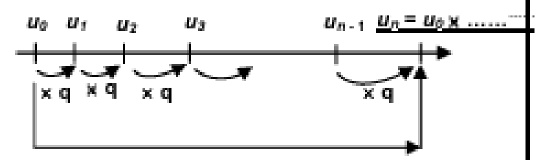
Si on veut calculer une valeur approchée de l à 10^{-p} où $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit alors de prendre $\frac{1}{2^n} < 10^{-p}$.
Càd

$$\begin{aligned} \ln(\frac{1}{2^n}) < \ln(10^{-p}) &\Leftrightarrow -\ln(2^n) < -p\ln(10) \\ &\Leftrightarrow n > p\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

En considérant $n_0 = E(p\frac{\ln(10)}{\ln(2)}) + 1$, alors u_{n_0} est une valeur approchée de l à 10^{-p} autrement dit

$$l \approx u_{n_0} \text{ à } 10^{-p} \text{ près}$$

1.3 Rappel sur les suites géométriques et arithmétiques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel, indépendant de n, appelé **la raison de la suite**.	$u_{n+1} = u_n \times q$ où q est un réel non nul, indépendant de n, appelé **la raison de la suite.**
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = u_0 + n \times r$ u_0 étant le terme initial de la suite.	$u_n = u_0 \times q^n$ u_0 étant le terme initial de la suite.
Représentation graphique sur un axe		
Relation entre deux termes quelconques de la suite	pour tous entiers naturels p et q, $u_p = u_q + r \times (p - q)$	pour tous entiers naturels m et n, $u_m = u_n \times q^{(m-n)}$
Sommes particulières	$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = n \times \frac{1+n}{2}$ $= \frac{n \times (n+1)}{2}$	Si $q \neq 1$, alors : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ Si $q = 1$, alors : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = n + 1$
Sommes de termes consécutifs	La somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite arithmétique est : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$ $= (n+1) \times (\frac{u_0 + u_n}{2})$ Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = nombre de termes × $\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$	La somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\boxed{q \neq 1}$ est : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$ $= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique = premier terme × $\frac{\text{1 - raison}^{\text{"nombre de termes"}}}{\text{1 - raison}}$ ou $\frac{\text{premier terme – dernier terme × raison}}{\text{1 - raison}}$