Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 6

01/06/2022 **Contrôle continu: Algèbre et Géométrie** **Durée 2h**

Exercice 1. (5 *points*)

√1. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que l'ensemble* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 3y + z = 3\}$ *est un plan affine en précisant sa direction.*

≈ √2. *On considère* $M_{p,q}(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des matrices d'ordre* $p \times q$ *à coefficient réel. Soit* $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathbb{R}^p$, *montrer que l'ensemble* $\{X \in \mathbb{R}^q / \ AX = B\}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^q$.

Exercice 2. (7 *points*)

Soit E *un espace affine de dimension 3 muni d'un repère* $\mathcal{R}$.

1. *On considère l'application affine* $p : E \longrightarrow E$ *définie par:*

$$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') : \begin{cases} x' = & \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z - 1 \\ z' = & -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z + 1 \end{cases}$$

√a) *Montrer que* p *est une projection.*

≈ √ b) *Déterminer les éléments caractéristiques de* p.

√2. *Déterminer l'expression analytique de l'affinité* f *de base le plan affine* $(P) : x - y - z = 2$, *de direction* $vect\{\vec{u}\}$ *et de rapport 2 avec* $\vec{u} = (1,1,-1)$.

Exercice 3. (4 *points*)

Soit E *un espace affine,* H, H' *et* $H"$ *trois hyperplans de* E *parallèles et distincts deux à deux. Soit* D *une droite non faiblement parallèle à* H. *On pose*

$$D \cap H = \{A\},\ D \cap H' = \{B\},\ D \cap H" = \{C\}.$$

√1. *Vérifier qu'il existe un scalaire* α *tel que* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$.

×2. *Soit* T *une autre droite qui coupe les hyperplans* H, H' *et* $H"$ *respectivement en* A', B' *et* C'. *Montrer que*

$$\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}.$$

(*Indication: Considérer la projection affine* p *sur* T *parallèlement à* $\vec{H}$)

×3. *Que peut-on déduire?*

× **Exercice 4.** (4 *points*)

Soient C *et* C' *deux parties convexes d'un espace affine* E. *On appelle "jonction" de* C *et* C' *l'ensemble* $J(C,C')$ *définie par:*

$$J(C,C') = \{M \in E / \ \exists A \in C,\ \exists B \in C', M \in [AB]\}.$$

Montrer que $J(C,C')$ *est convexe.*

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 6

08/06/2024 **Examen de la session normale: Algèbre et Géométrie** **Durée 2h**

Exercice 1. (4 *points*)

1. *On se place dans* $\mathbb{R}^4$. *Montrer que l'ensemble* $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x+3y+z-t=2\}$ *est un hyperplan affine.*

2. *Montrer que trois points alignés sur un cercle ne peuvent être distincts.*

Exercice 2. (6 *points*)
Soit E *un espace affine de dimension 3 muni d'un repère* $\mathcal{R}$.

1. *Montrer que l'application* $f : E \longrightarrow E$ *définie par:*

$$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') : \begin{cases} x' = & -y-z+1 \\ y' = & -2x-y-2z+2 \\ z' = & x+y+2z-1 \end{cases} \text{ est une affinité.}$$

2. *On considère l'application* $g : E \longrightarrow E$ *définie par:*

$$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') : \begin{cases} x' = & \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z+1 \\ y' = & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z-1 \\ z' = & -\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z+1 \end{cases}$$

   a) *Montrer que* g *est une projection affine.*
   b) *Déterminer les éléments caractéristiques de* g.

Exercice 3. (6 *points*)
Soit E *un espace affine euclidien. Soient* A *un point de* E *et* $\vec{u}$ *et* $\vec{n}$ *deux vecteurs non nuls de* $\vec{E}$.

I 1) *On considère la droite* $D = A + \mathbb{R}\vec{u}$. *Soit* P_D *la projection orthogonale sur* D. *Montrer que*

$$\forall M \in E,\ P_D(M) = A + \frac{<\overrightarrow{AM}, \vec{u}>}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

2) *On considère* H *l'hyperplan passant par* A *et de vecteur normal* $\vec{n}$. *Soit* P_H *la projection orthogonale sur* H. *Montrer que*

$$\forall M \in E,\ P_H(M) = M + \frac{<\overrightarrow{MA}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

II <u>*Application:*</u> *On pose* $E = \mathbb{R}^3$.

1) *Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite* D *passant par* $A = (1,2,-1)$ *et de direction* $\mathbb{R}\vec{u}$ *avec* $\vec{u} = (-3,2,1)$.

2) i) *Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur le plan* $H : \ x-y+z-1=0$.

   ii) *Déduire l'expression analytique de la réflexion par rapport à* H.

Exercice 4. (4 *points*)
Soient C *et* C' *deux parties convexes d'un espace affine* E. *On appelle "jonction" de* C *et* C' *l'ensemble* $J(C,C')$ *définie par:*

$$J(C,C') = \{M \in E / \ \exists A \in C,\ \exists B \in C', M \in [AB]\}.$$

Montrer que $J(C,C')$ *est convexe.*

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

LE MATH
Année:2023-2024

Analyse Complexe
2h

Exercice 1: (8 points) 5pts

I Résoudre Dans $\mathbb{C}$ les équation complexes suivantes:

1. $3z^2 - 2z - 1 = 0$ **(1 pt)**
2. $3z^2 = iz - 4$. **(1 pt)**
3. $z^2 = -32i$. **(1.5 pt)**
4. $z^2 + i\bar{z} + 2 = 0$. **(1.5 pt)**

II Parmi les ouverts suivants, déterminer lesquels sont étoilés :

1. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **(1 pt)**
2. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ **(1 pt)**
3. $W = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| < R \quad (R > 0)\}$ **(1 pt)**

Exercice 2: (4 points) 1,5 p

On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est harmonique si elle est de classe $\mathbb{C}^2$ et vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit U une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$U(x, y) = ax^2 + by^2 + 2xy$$

1. Trouver a et b pour que $U(x, y)$ soit harmonique, sachant que a-b = 2. **(1.5 pt)**
2. Soit $z = x + iy$. Trouver toutes les fonctions $V(x, y)$ telles que la fonction complexe $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ soit holomorphe. **(2.5 pt)**

Exercice 3: (4 points)

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_\gamma 4z^3 - 2z dz$$

lorsque:

1. γ est le segment de droite joignant les points $(-2,3)$ et $(1,4)$.**(2 pt)**

2. γ : le demi de cercle de centre $(1,2)$ joignant les points $(1,3)$ et $(1,1)$. **(2 pt)**

Exercice 4: (4 points) 2 pts

Soit la fonction complexe $f(z) = \dfrac{z-i}{z^2+1}$ si $z \neq i$ ou $z \neq -i$

et $f(i) = f(-i) = \dfrac{1}{2i}$

1. Etudier la continuité de la fonction $f(z)$ sur $\mathbb{C}$. **(1 pt)**
2. Étudiez la dérivabilité de la fonction $f(z)$ sur $\mathbb{C}$ en utilisant la règle de cauchy. **(1.5 pt)**
3. Calculez l'intégrale de $f(z)$ le long du cercle $|z| = 0.1$ dans le sens trigonométrique. **(1.5 pt)**

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : calcul différentiel	CONTROLE	Année scolaire : 2023/2024 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 (6 points)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $L_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On définit une application de $L_c(E,F)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par

$$\|u\|_{L_c(E,F)} \rightarrow \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

1) Montrer que l'application $u \rightarrow \|u\|_{L_c(E,F)}$ est une norme. (0.5pt)

2) Monter que : 1,5pts

$$\|u\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On suppose que $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach et soit $(u)_n$ une suite de Cauchy dans $L_c(E,F)$

3) Montrer que pour tout $x \in E$ la suite $(u(x))_n$ converge dans F vers une limite u. (0.5pt)
4) Montrer que u est linéaire continue. (0.5pt)
5) Montrer que$(u_n)_n$ converge dans $L_c(E,F)$ vers u. (0.5pt)
6) Que peut-on dire à propos de l'espace $L_c(E,F)$. (0.5pt)
7) Réciproquement, supposons que $L_c(E,F)$ muni de la norme subordonnée est un Banach et soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F.

   Soit $a \in E$ unitaire. Supposons qu'il existe une forme linéaire continue φ sur E telle que $\varphi(a) = 1$.
   On considère la suite $(u_n)_n$ de $L_c(E,F)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N};\ \forall x \in E;\ u_n(x) = \varphi(x)y_n$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On pose u sa limite. (0.5pt)
   b) En déduire que la suite (y_n) est convergente de limite $u(a)$. Conclure. (0.5pt)

Exercice 2(6 points)

On note $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on définit

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} x^2|f(x)| .$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

1) Montrer que N définit une norme sur E. (1pt)
2) Montrer que pour tous les entiers $n \geq m \geq 1$, on a : (2 pts)

$$N(f_n - f_m) \leq \frac{1}{m}$$

3) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans (E, N). (2 pts)

4) (E, N) est- il complet ? (1 pt

Exercice 3 (4 points :2+2)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire habituel $\langle , \rangle$. et de la norme euclidienne associée $\|.\|$.

1) Déterminer l'ensemble V des points de $\mathbb{R}^n$ où l'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \|x\|$ est différentiable et calculer $d_xN(h)$, pour $x \in V, h \in \mathbb{R}^n$
2) Montrer que l'application $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$ est différentiable sur V et calculer $d_xg(h)$, pour $x \in V, h \in \mathbb{R}^n$

Exercice 4 (4 points :2+2)

Soient φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \int_0^{x+y} \varphi(t)\, dt$ et $g(x,y) = \int_0^{xy} \varphi(t)\, dt$

Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer leurs différentielles

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	**EXAMEN** **Matière : Calcul différentiel**	Année scolaire : 2023/2024 Durée : deux heures

Exercice 1 (4 points)

1) Soient E, F deux espaces de Banach et $a \in E$ et U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application différentiable en a . Montrer que f est continue en a. (1pt)
2) Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$, $g : V \to G$ et $a \in U$ tel que $b = f(a) \in V$. Monter que si f est différentiable en a et si g est différentiable en b, alors $h = g \, o \, f$ est différentiable en a et on a : (2 pts)

$$D_a h = D_b g o D_a f$$

3) Soient $f; g : U \subset E \to \mathbb{k}$ deux applications différentiables en a. On définit l'application produit fg de la manière suivante :

$$fg : U \subset E \to \mathbb{k}$$
$$x \to f(x)g(x)$$

Montrer que fg est différentiable en a et que : (1 pt)

$$D_a(f\,g) = (D_a f).g + (D_a g).f$$

Exercice 2 (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : :

$$\begin{cases} f(x; y) = \dfrac{2y^3 + x^4}{x^2 + y^2} & pour \ (x; y) \neq (0,0) \\ f(0; 0) = 0 \end{cases}$$

1) Monter que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. (1pt)
2) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en (0, 0)? (1pt)
3) La fonction f est-elle différentiable en (0, 0)? (1pt)

Exercice 3 (3 points)

1) Enoncer le théorème des fonctions implicites dans le cas général en dimension finie. (1pt)
2) On considère l'équation :

$$lnx + lny + x + y = 2 \quad (*)$$

a) Vérifier que cette équation définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de (1,1). (1pt)

b) En déduire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ au point 1. (1pt)

Exercice 4(2 points)

Montrer que l'équation :

$$e^x + e^y + x + y - 2 = 0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x) :] - r; r[\to \mathbb{R}$ dans un voisinage du point $O(0,0)$ et que cette fonction est dérivable. Et montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable sur $] - r; r[$ et calculer les nombres $y(0), y'(0), y''(0)$.

Exercice 5 (3 points)

Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ à valeurs $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$

1) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ il existe des voisinages à U et V de (a,b) et de $f(a,b)$ respectivement tels que f est un C^1-difféomorphisme de U sur V. (1pt)
2) L'application f est-elle C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ (1pt)
3) Soit $W = \mathbb{R} \times]0, \pi[$. Montrer que f est C^1-difféomorphisme de W dans $f(W)$. (1pt)

Exercice 6 (5 points)

On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \|M\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |[M]_{i,j}|$$

On définit l'application $f : GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A) = A^{-1}$

1) Démontrer que pour tout $H \in B(0_{M_n(\mathbb{R})}, 1)$, la série $\sum_{P=1}^{+\infty} (-1)^p H^p$ converge et calculer le produit : (1pt)

$$(I_n + H) \sum_{P=0}^{+\infty} (-1)^p H^p$$

2) Montrer que (1pt)

$$\sum_{P=1}^{+\infty} (-1)^p H^p = o(\|H\|)$$

3) Démontrer que l'application f est différentiable en I_n et que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$: (1pt)

$$df(I_n).H = -H$$

4) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

a- Justifier que pour tout $H \in B(0_{M_n(\mathbb{R})}, \frac{1}{\|A^{-1}\|})$ $(I_n + A^{-1}H)$ est inversible et exprimer son inverse comme une somme de série matricielle convergente. (1pt)

b -Démontrer que f est différentiable en A et que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$ (1pt)

$$df(A).H = -A^{-1}HA^{-1}$$

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	RATTRAPAGE	Année scolaire : 2023/2024 Matière : calcul différentiel

Exercice 1 (5 points)

Soit $u \in L(E;\ F)$. Monter que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\exists M \geq 0, \forall x \in E;\ \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E;$ (1pt)
2) u est continue sur E, (1pt)
3) u est continue en 0, (1pt)
4) u est bornée sur la boule unité, (1pt)
5) u est bornée sur la sphère unité. (1pt)

Exercice 2 (3 points)

Soit $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x;\, y) = \dfrac{x^2\, y^m}{\sqrt{x^2 + y^2}} & pour\ (x;\, y) \neq (0;\, 0) \\ f(0;\, 0) = 0 \end{cases}$$

1) Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue en (0,0) ? (1pt)
2) Pour quelle valeur de m la fonction f admet-elle des dérivées partielles premières au point (0,0) ? (1pt)
3) En prend m=1, la fonction f est-elle différentiable en (0,0). (1pt)

Exercice 3 (4 points)

Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ à valeurs $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(y) - 2x, \sin(x) - 2y)$

1) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local. (1pt)
2) a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$. (1pt)

   b) Montrer que f est injective. (1pt)

   c) En déduire que f est C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $f(\mathbb{R}^2)$. (1pt)

Exercice 4 (2 points)

Montrer que l'équation $ln(x) + ln(y) + x + y - 2 = 0$ définit implicitement y comme fonction $y(x)$:$]1 - r, r + 1[\to \mathbb{R}$ dans un voisinage du point $A(1,1)$ et que cette fonction est dérivable. Et montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable sur $]1 - r, r + 1[$ et calculer les nombres $y(1), y'(1), y''(1)$.

Exercice 5 (6 points)

Soit E un espace de Banach. On fixe u un isomorphisme de E sur lui-même, et l'on considère

$$f:\ L(E) \to L(E)$$
$$v \to f(v) := 2v - v\, o\, u\, o\, v$$

1) Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle. (2 pts)
2) Que valent $f(u^{-1})$ et $df(u^{-1})$? (2 pts)
3) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $v \in L(E)$, (2 pts)

$$\|v - u^{-1}\| \leq a \Rightarrow \|df(v)\| \leq \frac{1}{2}$$

Examen de la session normale : Didactique 2

Exercice 1 (4pts) :

1. Identifiez la corrélation entre les concepts suivants dans les programmes actuels :
   - La monotonie d'une fonction.
   - La dérivabilité d'une fonction.
   - Le théorème de Rolle.
   - Le théorème des accroissements finis.
2. À quel niveau la preuve de cette corrélation est-elle donnée et à quel niveau est-elle acceptée ?
3. Fournir une preuve de la corrélation entre la monotonie d'une fonction sur un domaine et la dérivabilité de cette fonction sur ce domaine, en rappelant les conditions nécessaires et suffisantes pour établir cette corrélation.
4. Donner une chronologie de l'évolution du concept de monotonie des fonctions au lycée en mettant en évidence les nouveautés et les ajouts à chaque étape.

Exercice 2(6pts):

Un professeur de mathématiques a proposé à ses élèves l'activité suivante:

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives $w = 1 + i$, $a = 1 - 5i$ et $b = 2(2 - i)$
   a) Montrer que $a - w = \overline{w}(b - w)$
   b) Déterminer la nature du triangle ΩAB
3. Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} - 1 - 5i| = |z - 1 - i|$
4. En déduire que B appartient à (E)

Consignes :

1. Quel est le niveau cible pour cette activité.
2. Déterminer les connaissances nécessaires pour répondre à chaque question.
3. Capacité requise pour produire une réponse juste.
4. Mentionner quelques variables didactiques qui doit être prises en compte dans la question 1 de cette activité ?
5. Répondre aux questions 2) b et 3 dans deux cadres différentes.
6. Quelles sont les difficultés que l'apprenant peut rencontrer lors d'un changement de cadre adopté dans l'activité ?

Exercice 3(6pts):

Un professeur de mathématiques a proposé à ses élèves le problème suivant :

Problème

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonctiong sur $]0, +\infty[$

Bonne chance et bon courage

Examen de la session normale : Didactique 2

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\searrow$	

1- Vérifier que : $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$, puis déduire le signe de $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sachant que : $\frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}2$

2- En déduire, à partir du tableau précédent, le signe de la fonction g

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 2cm).

1. Vérifier que : $D_f =]0,2[\cup]2,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f
2. Déterminer les branches infinies à la courbe (C_f)
3. Montrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)^3}$
4. En déduire que $f'(x)$ et $x - 2$ ont des signes contraires
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Montrer que (C_f) Coupe l'axe des abscisses en un seul point A.

Consignes

1. Quelles sont les connaissances et les compétences requises pour résoudre ce problème ?
2. Dans ce problème, plusieurs registres ont été utilisés pour présenter une fonction numérique. Mentionnez ces registres et leur représentation correspondante.
3. Ce problème vise à identifier les variations d'une fonction numérique en se basant sur une approche algébrique. Mentionner quelques variables didactiques qui doit être prises en compte dans ce problème ?
4. Quelles sont les difficultés que l'apprenant peut rencontrer lors d'une conversation des registres adopté dans le problème ?

~~5.~~ En utilisant le changement de cadre, Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(\ln(x) + 1) = x - 1$$

Exercice 4(4pts):

En guise d'évaluation ; un enseignant a proposé l'exercice suivant à une classe scientifique

On pose la suite numérique(U_n) définie par: $U_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Calculer $\lim U_n$.

Un élève de cette classe a répondu comme suit :

On a :

Examen de la session normale : Didactique 2

$$\begin{cases} \lim \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = 0 \\ \lim \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} = 0 \\ \lim \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} = 0 \\ \vdots \\ \lim \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} = 0 \end{cases}$$

On additionne les égalités terme terme, on trouve que: $\lim U_n = 0$

1- Est-ce que le résultat trouvé par l'élève est correcte ? justifier votre réponse.

2- L'erreur repérée est d'origine : justifier votre réponse.

Epistémologique ☐ Ontogénique ☐ Stratégique ☐ Didactique ☐ Cognitive ☐

3- Déterminer des procédures pour la remédiation et le soutien de ces élèves en fonction de l'erreur commise et expliquer comment surmonter l'erreur.

4- On fonction de votre expérience dans l'enseignement mathématiques pendant le stage effectue citer l'importance de changement de cadre dans la remédiation de certaines erreurs commises par les élèves à partir d'un exemple illustrer

a) Le nouveau cadre et les idées principales de réponses.

b) Le cadre d'origine.

LE-Mathématiques S6

Année : 2023-2024

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE

المدرسة العليا للأساتذة

Examen final du Module :
Histoire et épistémologie des mathématiques

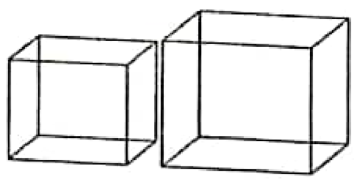
Exercice 1 :

En vous appuyant sur des exemples concrets, discutez du rôle des mathématiciens de la civilisation arabo-islamique dans la transmission, l'adaptation et l'enrichissement du patrimoine mathématique hérité des civilisations antérieures, telles que les Grecs et les Babyloniens.

Analysez également comment ces contributions ont influencé le développement ultérieur des mathématiques et de la science dans le monde islamique et au-delà.

Exercice 2 :

Le problème de la duplication du cube, également connu sous le nom de problème de Délos, occupe une place centrale dans l'histoire millénaire des mathématiques. Cette énigme géométrique antique, liée à la mythologie grecque, a suscité l'intérêt et la curiosité des mathématiciens et des philosophes à travers les âges.



1) Décrivez brièvement l'histoire et le contexte du problème de duplication du cube, notamment en mettant en évidence son origine mythologique et son importance historique dans le développement de la géométrie.

2) À l'aide d'une construction géométrique et de justifications appropriées, démontrez comment il est possible de dupliquer un cube.

3) Analysez les implications philosophiques et mathématiques de la résolution du problème de duplication du cube. En quoi cette résolution a-t-elle influencé la façon dont nous

abordons les problèmes mathématiques et la recherche de solutions dans d'autres domaines de la science et de la technologie ?

4) Appliquez le concept de duplication du cube à un problème concret. Par exemple, comment pourriez-vous utiliser ce concept pour construire une structure architecturale complexe tout en maintenant des proportions précises ?

5) Comparez et contrastez le problème de duplication du cube avec d'autres problèmes géométriques classiques, tels que la quadrature du cercle ou la trisection de l'angle. Identifiez les similitudes et les différences dans les approches de résolution de ces problèmes.

6) Analysez les différentes approches historiques à la résolution du problème de duplication du cube, en mettant en évidence les contributions de mathématiciens célèbres tels que Euclide, Archimède et Héron.

7) Imaginez un scénario fictif où la duplication du cube est nécessaire pour résoudre un problème crucial. Décrivez ce problème et proposez une solution créative en utilisant les principes géométriques impliqués dans la duplication du cube.

Exercice 3 :

Rédigez un paragraphe de cours expliquant un concept mathématique spécifique en intégrant son développement historique.

Ensuite, discutez de l'importance de l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des concepts mathématiques. En quoi la compréhension de l'évolution historique des mathématiques peut-elle enrichir la compréhension des étudiants et les motiver à étudier les mathématiques ?