Chapitre 1: Formes linéaire et dualité

I- Rappel:

1- Espace vectoriel.

Soit E un ensemble menu de deux lois de composition interne "+" et externe "$\cdot$", qu'on écrit $(E, +, \cdot)$, et Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple)

on dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

- $(E, +)$ est un groupe commutative :
  - "+" est associative, admet un élément neutre et un élément inverse, de plus: "+" est commutative
- $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\quad (\lambda + \beta) \cdot x = \lambda \cdot x + \beta \cdot x$
- $\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\quad \lambda \cdot (\beta \cdot x) = (\lambda \times \beta) \cdot x$

multiplication normale/usuelle (loi dans $\mathbb{K}$)

2- Sous-espace vectoriel.

Soit $F \subset E$

F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ /\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$

3- Somme directe :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espace vectoriel de E

E est dit somme directe de F et G qu'on note $E = F \oplus G$ si et seulement si, $\quad E = F + G \quad$ et $\quad F \cap G = \{0_E\}$

dans ce cas : $\forall x \in E ;\ \exists! (f, g) \in F \times G \ /\ x = f + g$

F et G sont dits supplémentaires

Lorsque E est un $\mathbb{K}$.e.v de dimension finie, alors,

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

4- Base d'un e.v de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, et soit $\{e_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de E

$\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de E si et seulement si $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice et libre, c-à-d :

$$\begin{cases} \forall x\in E,\ \exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n / x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i & \text{(génératrice)} \\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K},\ \text{si } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i=0 \text{ alors } \alpha_i=0,\ \forall i\in[\![1,n]\!] & \text{(libre)} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall x\in E,\ \exists!\,(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n / x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dim $<\infty$, et F et G deux s.e.v supplémentaires de E

Soient $\{f_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de F et $\{g_i\}_{1\leq i\leq q}$ une base de G

alors : $\{f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q\}$ est une base de E

Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n, et soit $\{e_1,\dots,e_p\}$; $1\leq p<n$ une famille libre de E

on peut compléter cette famille libre en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E en choisissant bien les éléments du supplémentaire de $\langle e_1,\dots,e_p\rangle$

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie

$\forall F$ s.e.v de E $\neq E$ admet un supplémentaire G

II- Espace dual :

1- Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v

une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$

u est une forme linéaire sur E

$$u: \begin{array}{l} E\longrightarrow\mathbb{K} \\ x\longmapsto u(x)\end{array}$$

avec $u(x+y)=u(x)+u(y)$; $u(\lambda x)=\lambda u(x)$

L'ensemble des formes linéaires sur E, muni de l'addition définie par : $(u_1+u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$, et muni de la multiplication par les scalaires définie par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé l'espace vectoriel dual de E, on le note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

① Exercice :

Mq les formes suivante sont des formes linéaires :

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \end{array}$ (avec $a_1, \dots, a_n$ des constantes dans $\mathbb{K}$)

2) $\begin{array}{ccc} C([-1,1]; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longmapsto & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & Tr(A) \end{array}$

Notation :

Soit x un élément de E (un vecteur), et soit f une forme linéaire sur E on utilise la notation $\langle f, x\rangle$ qu'on appelle crochet de dualité pour désigner $f(x)$, il en découle les propositions suivantes :

- $\langle f, x\rangle = f(x)$
- $\langle f, x+y\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle$
- $\langle f+g, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle$
- $\langle \lambda f, x\rangle = \lambda \langle f, x\rangle$

2_ Proposition :

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$$

$f(x)$ est un scalaire

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ définie une forme linéaire

Réciproquement : $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

Exemple :

Si on prend $x \in \mathbb{R}^n$ donc : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(e_i)}^{\lambda_i} x_i$$

3_ Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

on a : $$\dim(E) = \dim(E^*)$$

En effet : $$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}))$$
$$= \dim(E) \times \dim(\mathbb{K})$$
$$= n \times 1$$
$$\dim(E^*) = n = \dim(E)$$

III_ Hyperplans et formes linéaires :

1_ Définition :

Un hyperplan vectoriel H d'un espace vectoriel E est un supplémentaire d'une droite vectorielle D de E ($\dim(D) = 1$)

$$E = \underbrace{H}_{\text{hyperplan}} \oplus \underbrace{D}_{\dim(D)=1}$$

Remarque :

La droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de E engendré par un seul élément

Si E est de dimension finie n, alors $\dim(H) = n-1$

2_ Proposition :

Soit H un sous-espace vectoriel de E

Il y a équivalence entre :

1) H est un hyperplan de E

2) $\exists$ une droite vectorielle D de E tel que $E = H \oplus D$

3) pour $f : E \longmapsto \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle, on a : $\ker(f) = H$

② Exemples :

1) $f_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto Tr(A)$; $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, Tr(A) = 0\}$

2) $U : \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$; $H = \{g \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R}) \,/\, \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 0\}$

3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \longmapsto 2x - 3y + z$; $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - 3y + z = 0\}$

4) $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto P(x)$; $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(0) = 0\}$ (En effet $P(x) = 0, \forall x$)

Scanné avec CamScanner

Démonstration : "Proposition 2"

Mq : ① $\Leftrightarrow$ ③

$\Rightarrow$) Soit H un hyperplan de E

Soit $e \in E \setminus H$

donc : $E = H \oplus \underbrace{\mathbb{K}e}_{D}$

d'où : $\forall x \in E ;\ \exists!\ (h, d) \in H \times \mathbb{K} \ / \ x = h + de$

on considère l'application : $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = h + \underline{d}e & \longmapsto & f(x) = \underline{d} \end{array}$

f est une forme linéaire sur E

de plus : f est non nulle

Soit $x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow d = 0$ et $x = h + de$

$\Leftrightarrow x = h$

$x \in \ker(f) \Leftrightarrow x \in H$

alors : $H = \ker(f)$

$\Leftarrow$) Soit $f \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que : $H = \ker(f)$

Montrons que H est un hyperplan de E

Soit $e \in E$ tq $e \notin \ker(f) \Rightarrow f(e) \neq 0$

Montrons que : $E = H \oplus \mathbb{K}e$

Soit $x \in E$, on a : $x = x - \alpha e + \underbrace{\alpha e}_{\in \mathbb{K}e}$

pour que : $(x - \alpha e) \in H = \ker(f)$

il faut que : $f(x - \alpha e) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \alpha f(e) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{f(x)}{f(e)}$

donc : $x = \underbrace{x - \dfrac{f(x)}{f(e)} e}_{\in H} + \underbrace{\dfrac{f(x)}{f(e)} e}_{\in \mathbb{K}e}$

alors : $E = H + \mathbb{K}e$

Montrons que $\dim(\ker f) = \dim(H) = n - 1$

Soit $f \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

On a : $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{K} \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) \leq 1$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 0$ ou $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$

puisque $f \neq 0_{E^*}$

donc $\dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathbb{K})$

d'où: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K} \Rightarrow f$ est surjective

D'après le théorème de rang:

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

d'où, $\dim(\ker f) = \dim(H) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im} f)$

$$\dim(\ker f) = n - 1$$

3_ Proposition:

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulles

on dit que f et g sont proportionnelles (c-à-d que $f(x) = \alpha g(x), \forall x \in E$)

si et seulement si $\ker f = \ker g$

Démonstration:

$\Rightarrow]$ Supposons que f et g sont proportionnelles

Soit $x \in E$, on a: $f(x) = \alpha g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

Soit $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow \alpha g(x) = 0$ puisque $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$

$\Rightarrow g(x) = 0$

$x \in \ker(f) \Rightarrow x \in \ker(g)$

donc: $\ker(f) \subset \ker(g)$

d'autre part, $x \in \ker(g) \Rightarrow (g(x) = 0) \times \alpha$

$\Rightarrow \alpha g(x) = \alpha\, 0 = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$

$x \in \ker(g) \Rightarrow x \in \ker(f)$

donc, $\ker(g) \subset \ker(f)$

alors, $\ker(f) = \ker(g)$

$\Leftarrow]$ Supposons que: $\ker(f) = \ker(g)$

~~Soit $x \in E$~~, montrons que, $f(x) = \alpha g(x), \forall x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

on a: $\forall x \in \ker(f) = \ker(g)$: $f(x) = g(x) = 0$

donc: $f(x) = \alpha g(x)$

Si on prend $x_0 \notin Ker(f)$ (resp $x_0 \notin Ker(g)$) $(x_0 \in \mathbb{K}e \Rightarrow \forall x \in Ker(f)\ x = \lambda x_0)$

Soit $h(x) = f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0)$

on a : $h(x_0) = 0$

Si $x \in Ker(f) = Ker(g) \Rightarrow f(x) = g(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0$

or : $h \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

donc, $\forall x \in E$; $h(x) = 0$

c-à-d : $\forall x \in E$; $f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0) = 0$

d'où, $\forall x \in E$; $f(x) = \underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}_{\in \mathbb{K}\setminus\{0\}} g(x)$ car $x_0 \notin Ker(f) = Ker(g)$

③ 4. Proposition,

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

et soit $B^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)$ une base de E^*

B^* s'appelle une base duale de E et on a

$$f_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad ?$$

③ 5. Corollaire,

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $B^* = (f_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ une base duale de E

alors,

1) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x) e_i$

2) $\forall f \in E^*$, $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i^*$

? 3) $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$: $a_{ij} = f_i^*(f(e_j))$ où $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathcal{M}_n(f)$

6. Proposition :

→ Si f est une forme linéaire non nul sur E, alors : il existe $x \in E$ (non nul) / $f(x) = 1$

→ Si x est un vecteur non nul de E, il existe une forme linéaire $f \in E^*$ / $f(x) = 1$

Démonstration

* f est une forme linéaire non nul sur E

donc : $\exists x \in E \setminus \{0\}$ / $f(x) = 0$

on a : $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$

Scanné avec CamScanner

• Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tq: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

or: f est une forme linéaire non nul,

donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \neq 0$

d'où, $\exists j \in [\![1,n]\!]$ tq: $x_j \neq 0 \Rightarrow x_j = f_j^*(x)$

Si on prend: $g = \frac{f_j^*}{f_j^*(x)}$

on a: $g(x) = \frac{f_j^*(x)}{f_j^*(x)} = 1$

IV- Espace bidual:

E^* étant un espace vectoriel

Toutes les formes linéaires de E^* dans $\mathbb{K}$ vont définies un espace dual de E^* qu'on appelle espace bidual de E, qu'on note E^{**}

Définition:

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base dual de $\mathcal{B}$

On dit aussi que $\mathcal{B}$ est la base préduale ou antéduale

③ Proposition:

Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E (appelée base préduale)

Proposition: (Démo: Voir TD2)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, alors, l'application Φ $E \longmapsto E^{**}$ est un isomorphisme ($E \simeq E^{**}$)

De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $\mathcal{B}^{**} = (e_1^{**}, \dots, e_n^{**})$ est une base de E^{**}, alors la matrice de Φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{**}$ est l'identité

④+⑤ Exercice:

on considère dans $\mathbb{R}^3$ les formes linéaires:

$$f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

$$f_2(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$$

$$f_3(x,y,z) = 3x + 4y + 6z$$

Mq: (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et trouver sa base prédiale

5 Exercice 1

Trouver toute les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ qui s'annulent en $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, mais pas en $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Chapitre 2: Espace préhilbertien

I_ Produit scalaire:

1_ Définition:

Soit E un $\mathbb{K}$.e.v, et soit f une application de $E\times E$ vers $\mathbb{K}$.

f est un produit scalaire sur E si et seulement si:

* f est forme bilinéaire:

$$\begin{cases}\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall x_1,x_2,y\in E:\ f(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha f(x_1,y)+\beta f(x_2,y)\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall x,y_1,y_2\in E:\ f(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha f(x,y_1)+\beta f(x,y_2)\end{cases}$$

* f est définie positive:

$$\forall x\in E:\ f(x,x)\geqslant 0 \text{ et } f(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

* f est symétrique:

$$\forall x,y\in E:\ f(x,y)=f(y,x)$$

2_ Définition:

Un espace préhilbertien réel E est un e.v muni d'un produit scalaire définie de $E\times E$ vers $\mathbb{R}$

Si dim E est fini, on dit que E muni de produit scalaire est un espace euclidien

1 Exemples:

Les e.v suivants muni du produit scalaire ainsi défini sont des espaces préhilbertien:

1\ $E=\mathbb{R}^n$; $f: \begin{aligned}E\times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y)&\longmapsto \sum x_i y_i\end{aligned}$ 2\ $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $f: \begin{aligned}E\times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (A,B)&\longmapsto Tr({}^tAB)\end{aligned}$

En effet:

1\ $E=\mathbb{R}^n$; $f: \begin{aligned}E\times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y)&\longmapsto \sum x_i y_i\end{aligned}$

* Symétrie

Soient $x,y\in E$, on a:

$$f(x,y)=\sum x_i y_i=\sum y_i x_i=f(y,x)$$

donc: f est symétrique

* Bilinéarité:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, x', y, y' \in E$, on a:

$$f(\alpha x + \beta x', y) = \sum (\alpha x_i + \beta x'_i) y_i$$
$$= \sum (\alpha x_i y_i + \beta x'_i y_i)$$
$$= \alpha \sum x_i y_i + \beta \sum x'_i y_i$$

d'où: $f(\alpha x + \beta x', y) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y)$

et puisque f est symétrique, alors:

$$f(x, \alpha y + \beta y') = f(\alpha y + \beta y', x)$$
$$= \alpha f(y, x) + \beta f(y', x)$$
$$f(x, \alpha y + \beta y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$$

donc: f est bilinéaire

* Positivité:

Soit $x \in E$, on a:

$$f(x, x) = \sum x_i x_i = \sum x_i^2 \geqslant 0$$

car: $\forall i: x_i^2 \geqslant 0$ d'où: $\sum x_i^2 \geqslant 0$

et on a: $f(x, x) = 0 \iff \sum x_i^2 = 0 \quad (x_i^2 \geqslant 0)$

$$\iff \forall i: x_i^2 = 0$$
$$\iff \forall i: x_i = 0$$

$$f(x, x) = 0 \iff x = 0_E$$

donc: f est définie positive

alors: f est un produit scalaire sur E

d'où: E muni de f est un espace préhilbertien

2\ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $f: \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \longmapsto Tr({}^tAB) \end{array}$

* Bilinéarité:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, A', B, B' \in E$, on a:

$$f(\alpha A + \beta A', B) = Tr({}^t(\alpha A + \beta A')B)$$
$$= \sum_i \left(\sum_k (\alpha a_{ki} + \beta a'_{ki}) b_{ki} \right)$$
$$= \sum_i \left(\sum_k (\alpha a_{ki} b_{ki} + \beta a'_{ki} b_{ki} \right)$$

Scanné avec CamScanner

$$= \alpha \sum_i \left(\sum_k a_{ki} b_{ki} \right) + \beta \sum_i \left(\sum_k a'_{ki} b_{ki} \right)$$

d'où: $f(\alpha A + \beta A', B) = \alpha f(A, B) + \beta f(A', B)$

et on a: $f(A, \alpha B + \beta B') = Tr({}^tA(\alpha B + \beta B'))$

$$= \sum_i \left(\sum_k a_{ki} (\alpha b_{ki} + \beta b'_{ki}) \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_k (\alpha a_{ki} b_{ki} + \beta a_{ki} b'_{ki}) \right)$$

$$= \alpha \sum_i \left(\sum_k a_{ki} b_{ki} \right) + \beta \sum_i \left(\sum_k a_{ki} b'_{ki} \right)$$

d'où: $f(A, \alpha B + \beta B') = \alpha f(A, B) + \beta f(A, B')$

donc: f est bilinéaire

* Symétrie:

Soient $A, B \in E$, on a:

$$f(A, B) = Tr({}^tAB)$$

$$= Tr({}^t({}^tAB)) \qquad (Tr(M) = Tr({}^tM))$$

$$= Tr({}^tB\, {}^t({}^tA)) \qquad (M = {}^t({}^tM))$$

$$= Tr({}^tBA)$$

d'où: $f(A, B) = f(B, A)$

donc: f est symétrique

* Positivité:

Soit $A \in E$, on a

$$f(A, A) = Tr({}^tAA) = \sum_i \left(\sum_k a_{ki} a_{ki} \right) = \sum_i \left(\sum_k a^2_{ki} \right) \geqslant 0$$

car: $\forall i, k : a^2_{ki} \geqslant 0$ d'où $\sum_{i,k} a^2_{ki} = \sum_i \left(\sum_k a^2_{ki} \right) \geqslant 0$

et on a: $f(A, A) = 0 \Leftrightarrow Tr({}^tAA) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_i \left(\sum_k a^2_{ki} \right) = 0 \qquad (a^2_{ki} \geqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow \forall i, k : a^2_{ki} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i, k : a_{ki} = 0$$

d'où: $f(A, A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_E$

donc: f est définie positive

alors: f est un produit scalaire sur E

d'où: E muni de f est un espace préhilbertien

Notation:

on note le produit scalaire de x, y par: $\langle x,y\rangle$

3_ Théorème: "Inégalité de Cauchy-Schwartz"

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel

$$\forall x, y \in E : \quad |\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

de plus: $|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ si et seulement si (x,y) est une famille liée

Démonstration:

Soient $x, y \in E$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$

* Montrons que: $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$

on a: $0 \leqslant \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x, x+\alpha y\rangle + \alpha\langle y, x+\alpha y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle\alpha^2$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle\alpha + \langle y,y\rangle\alpha^2$$

d'où: $\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle y,y\rangle\alpha^2 + 2\langle x,y\rangle\alpha + \langle x,x\rangle \geqslant 0$

donc: $\Delta' = (\langle x,y\rangle)^2 - \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \leqslant 0$

c-à-d: $(\langle x,y\rangle)^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

d'où: $\sqrt{(\langle x,y\rangle)^2} \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$

alors: $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

* Montrons que: $|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \Leftrightarrow (x,y)$ est liée

on a: $|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \Leftrightarrow (\langle x,y\rangle)^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

$$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle)^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \,/\, \langle x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \,/\, x+\lambda_0 y = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \,/\, x = -\lambda_0 y = \lambda'_0 y \quad (\lambda'_0 = -\lambda_0)$$

alors: $|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \Leftrightarrow (x,y)$ est liée

4_ Norme hilbertien:

a_ Définition

Soit E un espace préhilbertien muni de produit scalaire

Pour tout $x \in E$, on pose : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ qu'on dénomme norme hilbertien sur E, ou bien la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

b_ Théorème : "Inégalité de Minkowski"

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

$$\forall x,y \in E : \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $x=0$ ou $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x$

c_ Théorème :

E est un espace préhilbertien muni de $\langle \cdot,\cdot \rangle$

on a : $\forall (x,y) \in E^2$: * $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$

* $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$

* $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y \rangle$

d_ Théorème : "Théorème de Pythagore"

$\forall (x,y) \in E^2$ on a : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x,y \rangle = 0$

Démonstration :

* Théorème C : Soient $x,y \in E$

* $\|x+y\|^2 = \left(\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle}\right)^2 = \langle x+y, x+y \rangle$

$$= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$$

* $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle$

$$= \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle - \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle - 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$$

* $\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x-y \rangle + \langle y, x-y \rangle$

$$= \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle - \langle y,y \rangle$$

$= \langle x,x\rangle - \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle x,y\rangle} - \langle y,y\rangle$

$= \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle$

$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$

donc: $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$

* Théorème b : Soient $x, y \in E$

* montrons que: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

on a: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ (d'après Théorème c)

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz: $\langle x,y\rangle \leqslant |\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} = \|x\|\,\|y\|$

d'où: $\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

c-à-d: $\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$

alors: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

* montrons que: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (x=0)$ ou $(x\neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x)$

$\Leftarrow$) on a:

$\rightarrow$ Si $x=0$: $\|x+y\| = \|0+y\| = \|0\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$

$\rightarrow$ Si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x$:

$\|x+y\| = \|x + \lambda x\|$

$= \|(\lambda+1)x\|$

$= |\lambda+1|\,\|x\|$ $(\lambda \geqslant 0)$

$= (\lambda+1)\|x\|$

$= \|x\| + \lambda\|x\|$ $(|\lambda| = \lambda)$

$= \|x\| + |\lambda|\,\|x\|$

$= \|x\| + \|\lambda x\|$

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

$\Rightarrow$) on a: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

d'où: $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

or: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ (d'après Théorème c)

donc: $\cancel{\|x\|^2} + 2\langle x,y\rangle + \cancel{\|y\|^2} = \cancel{\|x\|^2} + 2\|x\|\,\|y\| + \cancel{\|y\|^2}$

alors: $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$

$\rightarrow$ Si $x=0$: $\langle 0,y\rangle = \|0\|\,\|y\|$

$\rightarrow$ Si $x \neq 0$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$: $y = \lambda x$

- Théorème d : Soient $x, y \in E$

on a : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \cancel{\|x\|^2} + 2\langle x,y\rangle + \cancel{\|y\|^2} = \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2}$ (d'après Théorème c)

$\Leftrightarrow 2\langle x,y\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

5 _ Généralisation du théorème de Pythagore :

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $n \geq 1$. n vecteurs de E

Si $\forall i,j / i \neq j$: $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ alos $\underset{(\Leftarrow)}{}$ $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Démonstration :

Supposons que : $\forall i,j / i \neq j$: $\langle x_i, x_j\rangle = 0$

on a : $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i , \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle$

$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i , \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle$ (Changement de Notation)

$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle x_i, x_j\rangle$

$= \sum_{1 \leq i=j \leq n} \langle x_i, x_i\rangle + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{0}$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle$

donc $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

6 _ Théorème : "Inégalité du parallélogramme"

$\forall (x,y) \in E^2$: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

III _ Orthogonalité :

1 _ Eléments orthogonaux :

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient $x, y \in E$

x, y sont dits deux éléments orthogonaux de E si et seulement si

$\langle x,y\rangle = 0$

2 _ Orthogonal d'une partie de E :

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, et soit A une partie de E

L'orthogonale de A, qu'on note $A^\perp$ est l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de A

$$A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A : \langle x,y\rangle = 0\}$$

3 _ Théorème :

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

$\forall A$ une partie de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque:

* $\{0_E\}^\perp = E$ * $E^\perp = \{0_E\}$

4_ Théorèmes:

$(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel

* $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$
* $\forall A \in \mathcal{P}(E)$: $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$

5_ Théorème:

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

* $\forall F$ un s.e.v de E, on a : $F \subset (F^\perp)^\perp$
* $\forall F$ un s.e.v de E, on a : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$

IV_ Familles orthogonales, Familles orthonormées:

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et soit I un ensemble non vide d'indices

* Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si et seulement si $\forall (i,j) \in I^2$:
  $i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$
* Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale (orthogonale + normée) si et seulement si : $\forall (i,j) \in I^2$: $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Proposition

Toute famille d'éléments non nuls orthogonale est libre

Remarque:

Toute famille ~~d'éléments non nuls~~ orthonormale est libre

Démonstration : "Proposition"

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthogonale tel que $e_i \neq 0$, $\forall i \in I$

Soient $(\alpha_i) \in \mathbb{R}$ / $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$

on a : $\forall j \in I$: $\langle \sum_{i\in I} \alpha_i e_i, e_j \rangle = 0$

$\forall j \in I$: $\sum_{i\in I} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$

$\forall j \in I$: $\alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = 0$

$\forall j \in I : \ \alpha_j = 0 \quad (\text{car } e_j \neq 0 \Rightarrow \langle e_j, e_j \rangle \neq 0)$

donc $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre.

V_ Orthogonalisation de Gram-Schmidt :

Théorème :

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

Soit (u_n) une famille libre

Il existe une unique famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale et libre telle que :

- $\left(\text{vect}(e_k)_{0\leq k\leq n}\right) = \left(\text{vect}(u_k)_{0\leq k\leq n}\right)$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad \langle e_n, u_n \rangle > 0$

Démonstration : Exercice (peut être dans l'exam)

Définition :

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle l'orthonormalisé de la famille libre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La procédure (algorithme) permet d'obtenir les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la procédure de Gram-Schmidt définie par :

$$e_0 = \frac{1}{\|u_0\|} u_0 \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i$$

$$\text{et } e_{n+1} = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$$

①+② **Exercice :**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$

$\forall (P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(X) Q(X) dX$

Déterminer l'orthonormalisé de la famille $(1, X, X^2)$

Théorème :

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle n

Il existe au moins une base orthonormée de E

Théorème :

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E

1\ $\forall x \in E : \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

2\ $\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$

3\ $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2}$

Démonstration :

1\ on a : $\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

donc, $\langle x, e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k , e_i \rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k , e_i \rangle$

d'où, $\langle x, e_i \rangle = x_i$

alors, $\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

Théorème :

Soient E un espace euclidien de dimension n, et F un s.e.v de E

on a : 1\ $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$

2\ $E = F \oplus F^{\perp}$

Théorème :

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dim n, et F un s.e.v de E

alors, $F = (F^{\perp})^{\perp}$

VI - Projection orthogonale :

Définition :

Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un e.v de dim n

Soit u un vecteur non nul, $D = \text{vect}(u)$, et $D^{\perp}$ un hyperplan de E

on a : $E = D \oplus D^{\perp}$

$\forall x \in E$, il s'écrit d'une manière unique : $x = y + z$ avec $y \in D$ et $z \in D^{\perp}$

y est appelé le projecte de x sur D parallèlement à $D^{\perp}$

ou : le projeté orthogonale de x par rapport à D

on le note : $P_u(x)$

Proposition :

Sous les notions ci-dessus, on a : $P_u(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$

Définition :

Soit E un espace euclidien de dim n, et F un s.e.v de E :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

on appelle projection orthogonale sur F l'endomorphisme

$$\mathcal{P}_F : E = F \oplus F^{\perp} \longrightarrow F$$
$$x = y + z \longmapsto y$$

Proposition :

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dim n, et F un s.e.v de E de base orthonormée $(w_1, \dots, w_p)$

alors : $\forall x \in E, \ \mathcal{P}_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, w_i \rangle w_i$

VII. Distance dans un espace euclidienne

1_ Définition :

Soit $(E; \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dim n, et A une partie de E et soit $x \in E$

La distance de x à A est définie par : $d(x, A) = \inf\{\|x - y\| / y \in A\}$

2_ Théorème

Soit $(E; \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dim n, et soit F un s.e.v de E et $x \in E$

on a : 1) $\|x - y\| \geq \|x - \mathcal{P}_F(x)\| \quad (\forall y \in F)$

2) $\|x - y\| = \|x - \mathcal{P}_F(x)\| \iff y = \mathcal{P}_F(x)$

3) $d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - \mathcal{P}_F(x)\|$

3_ Théorème : "Inégalité de Bessel"

E est un espace préhilbertien, et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille orthonormale

alors : $\forall x \in E$, on a : $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$

4_ Famille totale :

Soit E un espace préhilbertien, et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale

La famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite totale si :

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \text{vect}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} / \|x - y\| < \varepsilon$

5_ Egalité de Parseval

Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille totale : $\forall x \in E, \ \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$

Chapitre 3 Forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

I – Définition des formes quadratiques

1 – Définition

on appelle forme quadratique réelle une application qui, à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, associe un polynôme quadratique.

$$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x=(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ 1\leq i\leq j\leq n}} b_{ij}\, x_i x_j$$

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sa matrice coordonnées dans la base de $\mathbb{R}^n$

(Reppelons que $S_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices symétrique)

on a :

Proposition :

Toute forme quadratique réelle $q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} b_{ij}\, x_i x_j$ s'écrit de façon unique :
$q(x) = X^t A X = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_{ij}\, x_i x_j$

où $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique réelle définie par :

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} b_{ii} & \text{si } i=j \\ \frac{b_{ij}}{2} & \text{si } i<j \end{cases}$$

A est appelée matrice de la forme quadratique

Si on note l'espace des formes quadratiques par $Q_n(\mathbb{R})$, on a une isométrie entre $S_n(A)$ et $Q_n(A)$ définie par

$$I: S_n(A) \longrightarrow Q_n(A)$$
$$A \longmapsto q_A = X^t A X$$

Exercice

- Trouver la matrice A associé à la forme quadratique :

$$q_A(X) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2$$

- Trouver les valeurs propres de A et la matrice de passage

$D = P^{-1}AP$

- on a : $q_A(X) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 1x_3^2 + 6x_1x_2 + 0x_1x_3 + 0\, x_2x_3$

alors :

Scanné avec CamScanner

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

• Polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 3 & 0 \\ 3 & 3-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)^2(1-X) - 3^2(1-X)$$

$$= (1-X)(\cancel{9} - 6X + X^2 - \cancel{9})$$

$$= -(X-1)(X^2 - 6X)$$

$$P_A(X) = -X(X-1)(X-6)$$

d'où : $Sp(A) = \{0, 1, 6\}$

Vecteurs propres :

* vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$

$$AX = 0X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}, \forall x$$

donc : $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(1, -1, 0)\}$

* vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$

$$AX = X \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = x \\ 3x + 3y = y \\ \forall z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ \forall z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ -\frac{5}{2}y = 0 \\ \forall z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \forall z$$

donc : $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{(0, 0, 1)\}$

* vecteur propre associé à $\lambda_3 = 6$

$$AX = 6X \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=6x \\ 3x+3y=6y \\ z=6z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=3y \\ 3y=3x \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases} ,\forall x$$

donc $E_{\lambda_3} = \text{vect}\{(1,1,0)\}$

alors:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Matrice P^{-1}

on a:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 \\ f(e_2) = e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} f(e_1) + \frac{1}{2} f(e_3) \\ e_2 = -\frac{1}{2} f(e_1) + \frac{1}{2} f(e_3) \\ e_3 = f(e_2) \end{cases}$$

alors:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

II _ Réduction d'une forme quadratique à ses axes principaux:

on sait qu'une matrice symétrique est orthogonale

Si A est une matrice symétrique: $\exists P$ une matrice de passage telle que:

$$D = {}^tPAP$$

avec D une matrice diagonale constituée par les valeurs propres de A

Théorème:

Soit $q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique, alors il existe une matrice orthogonale P telle que: "Si l'on effectue le changement des coordonnées $Y = {}^tPX$, on a: $\forall q(x) \in \mathbb{R}$: $q(x) = {}^tYDY$"

Définition:

* Une forme quadratique est dite positive si: $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) \geq 0$
* Une forme quadratique est dite négative si: $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) \leq 0$
* Une forme quadratique est dite définie positive si et seulement si elle vérifie:
  - $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) \geq 0$
  - $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

* Une forme quadratique est dite définie négative si et seulement si elle vérifie :
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \leqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Corollaire

* Une forme quadratique q est positive (resp négative) si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_i \geqslant 0$ (resp $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_i \leqslant 0$)
* Une forme quadratique q est définie positive (resp définie négative) si et seulement si : $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i > 0$ (resp $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_i < 0$)

Démonstration

* montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^n : q(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \quad 0$

$\Leftarrow$) Si $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \geqslant 0$

$\Rightarrow$) Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^n : q(x) \geqslant 0$

Soit u un vecteur propre associé à λ_i

on a : $0 \leqslant {}^t u A(u) = \lambda_i \|u\|^2$

d'où : $\lambda_i \|u\|^2 \geqslant 0$

donc : $\lambda_i \geqslant 0 \quad , \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Définition :

Soit $q(x) = {}^tXAX$ avec $A \in S_n(\mathbb{R})$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$q(x)$ s'écrit alors sous la forme $q(x) = \lambda \, y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Posons $s = \text{card}(\{i \,;\, i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda_i > 0)$

et $\quad t = \text{card}(\{i \,;\, i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda_i < 0)$

alors le couple (s, t) est appelée signature de q

Remarque :

Soit q une forme quadratique de signature (s, t)

alors : $s + t = \text{card}(\{i \,;\, i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda_i \neq 0) = Rg(A) = r$

q est de rang r

Deux cas se présentent :

1\ $s \times t = 0$: la forme quadratique q est positive (resp négative) si et seulement si sa signature est de la forme $(r, 0)$ avec $r = s$ (resp $(0, r)$ avec $r = t$). Lorsque $r = n$, q est définie positive (resp définie négative) si et seulement si sa signature est de la forme $(n, 0)$ (resp $(0, n)$)

2\ $s \times t \neq 0$: la forme quadratique a un signe variable, on dit alors qu'elle est indeterminée

III_ Réduction d'une forme quadratique par la méthode de Gauss:

1_ Théorème de Gauss:

Soit $q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} x_i y_i$ une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^n$, de rang r

Il existe r formes linéaires indépendantes $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ et des réels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tel que,

$$q(x) = \alpha_1 [\phi_1(x_1, \ldots, x_n)]^2 + \cdots + \alpha_r [\phi_r(x_1, \ldots, x_n)]^2$$

Démonstration: exercice

Remarque

Dans la pratique, on utilise la factorisation d'un polynôme de degré 2 et la relation, $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

Exemple:

* Réduire la forme: $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ et préciser sa signature
* Réduire la forme $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

2_ Application:

Considérons une fct $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2

Supposons que le point a est un extrémum

Il est nécessaire que, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Soit la matrice symétrique $A = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, et considérons la forme quadratique $q(x) = {}^tXAX$

La formule de Taylor au voisinage de a implique que l'expression $f(x+a) - f(a)$ a le même signe que $q(x) = {}^tXAX$

et alors :

1) Si la forme quadratique est définie positive (resp définie négative) alors le point a est un minimum (resp. maximum) local pour la fct f

2) Si la forme quadratique q est indéterminée en a, nous avons ni minimum ni maximum

3) Si q est positive ou négative, alors on est dans le cas douteux

Scanné avec CamScanner