Cours : Analyse I

Pr : **OUAISSA Hamid**

Licence Education
Spécialité : Enseignement secondaire Mathématiques

Année universitaire : 2023-2024

1

Fonctions d'une variable réelle

2

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion importante de continuité d'une fonction réelle basée sur la notion de limite. Nous allons donner une caractérisation de la limité par les suites ce qui va nous permettre d'utiliser les résultats du chapitre précédent pour déduire aisément de nouveaux résultats. Ensuite nous allons donner les grands théorèmes sur les fonctions continues basés sur le théorème des valeurs intermédiaires.

2.1 Limites d'une fonction

2.1.1 Limite finie en un point

Dans cette section, les fonctions considérées sont définies sur $I =]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$ avec $\alpha > 0$.

Définition 2.1.1. On dit que f tend vers le réel l quand x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Le réel l est appelé limite de f en a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$,

Exemple 2.1.1. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et soit a un réel. Nous allons montrer que f tend vers a^2 quand x tend vers a. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que si $|x-a| < \delta$ alors $\left|x^2 - a^2\right| < \varepsilon$. Puisque x doit être proche de a, on suppose d'abord que $|x-a| \leqslant 1$. Ceci entraîne, en particulier, que*

$$|x| \leqslant |x-a| + |a| \leqslant 1 + |a|.$$

D'un autre côté.

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x-a||x+a| \leqslant |x-a|(|x| + |a|) \leqslant |x-a|(1 + 2|a|).$$

Prenons $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$. *Alors si* $|x-a| < \delta$ *on aura* $|x-a| < 1$ *et* $|x-a| < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$ *et donc*

$$\left|x^2 - a^2\right| < \varepsilon.$$

Nous allons maintenant voir une caractérisation de la notion de limite à l'aide des suites que nous appellerons CLS.

Proposition 2.1.1. (Caractérisation de la limite à l'aide des suites :CLS)
Les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
b) Pour toute suite (x_n) de points de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration. Nous allons montrer une équivalence

1. Montrons d'abord $a) \Rightarrow b)$.

Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de I et qui converge vers a. Nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_n$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Maintenant, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, il existe un entier naturel N, tel que

$$\forall n > N, \quad |x_n - a| < \delta \tag{2.2}$$

En combinant (2.1) et (2.2), on obtient que

$$\forall n > N, \quad |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat demandé. Pour montrer l'implication inverse $b) \Rightarrow a)$. Nous allons montrer que $\text{non}(a) \Rightarrow \text{non}(b)$.

Supposons que f ne tend pas vers l quand x tend vers a. Il vient

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \quad \exists x_\delta \in I, \quad |x_\delta - a| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - l| \geqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$, il existera un réel x_n dans I tel que $|x_n - a| < \delta$ et $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a mais la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers l. Ce qui prouve non (b).

Remarque 2.1.1. (importante) La propriété CLS va servir à établir quelques propriétés des limites de fonctions en utilisant des propriétés des suites établies dans le chapitre 2. Elle est surtout très pratique pour montrer que certaines fonctions n'ont pas de limites. En effet. on a les deux situations suivantes:

1. Pour montrer qu'une fonction ne tend pas vers l quand x tend vers a, il suffit de construire une suite (x_n) de points de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$.

2. Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite quand x tend vers a, il suffit de construire deux suites (x_n) et (y_n) de points de I telles que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

Exemple 2.1.2. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Nous allons montrer, en utilisant la remarque ci-dessus, que f n'admet pas de limite quand x tend vers 0 . Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définies par*

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2n\pi}.$$

Ces deux suites convergent vers 0 et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et donc f n'admet pas de limite en 0 .

On énonce maintenant une proposition qui est une conséquence de la proposition 2.1.1 et les opérations sur les limites des suites vu au chapitre 2 .

Proposition 2.1.2. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ où l_1 et l_2 sont deux réels. Alors
a) $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$.
b) $\lim\limits_{x\to a} (f \times g)(x) = l_1 \times l_2$.
c) $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f)(x) = \alpha l_1$.
d) Si $l_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$.

Le principe des gendarmes combiné à CLS donne la proposition suivante.

Proposition 2.1.3. Si on a

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ et } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = l$$

De même, l'ordre des limites de fonctions est préservé via l'ordre des fonctions elles même, ce qui l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 2.1.4. Si on a

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x), \lim_{x \to a} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = l_2,$$

alors

$$l_1 \leqslant l_2.$$

2.1.2 Limites à droite et à gauche

Nous avons vu dans la section précédente que la notion de limite d'une fonction en un point a est liée au comportement de la fonction quand on s'approche de a par des suites qui convergent vers a. Si on ne considère que les suites (x_n) telles que $x_n \leqslant a$ (resp. $x_n \geqslant a$) on dira qu'on approche a à gauche (resp. à droite). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2.1.2. Soit $f :]a, a+\alpha[\to \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ une fonction. On dit que f tend vers l quand x tend vers a à droite et on notera

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l \text{ où } \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que $\forall x \in]a, a+\alpha[, \quad a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
b) Pour toute suite (x_n) qui converge vers a telle que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Définition 2.1.3. Soit une fonction $f :]a-\alpha, a[\to \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a à gauche et on notera

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l \text{ où } \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que $\forall x \in]a-\alpha, a[, \quad a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
b) Pour toute suite (x_n) qui converge vers a telle que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Proposition 2.1.5. Soit une fonction $f :]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemple 2.1.3. *La fonction définie par* $f(x) = \frac{|x|}{x}$ *n'admet pas de limite en 0 .*

2.1.3 Limites infinies

Dans cette section, les fonctions considérées sont définies sur $I =]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$ avec $\alpha > 0$.

Définition 2.1.4. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on notera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

cette définition est équivalente la propriété suivante en termes de suites

Proposition 2.1.6. Pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Définition 2.1.5. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a et on notera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$.
2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers a, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$$

Exemple 2.1.4. *On a pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^{2n}} = -\infty$$

En effet. Pour tout $a > 0$ et si on choisit $\delta = \frac{1}{\sqrt[2n]{a}}$ on aura

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^{2n}} > a$$

Maintenant pour tout $a < 0$ et si on choisit $\delta = \frac{1}{\sqrt[2n]{-a}}$ on aura

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{-1}{x^{2n}} < a$$

On énonce maintenant une proposition qui est une conséquence des définitions ci-dessus.

Proposition 2.1.7. Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$, alors

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

2. Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque 2.1.2. En combinant, les définitions précédentes on peut trouver facilement les définitions de

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

2.1.4 Limites en $\pm\infty$

Définition 2.1.6. Soir a un réel et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in]a, +\infty[, \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de $]a, +\infty[$ qui diverge vers $+\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Définition 2.1.7. Soir a un réel et $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in]-\infty, a[, \quad x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de $]-\infty, a[$ qui diverge vers $-\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Exemple 2.1.5. *On a pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

En effet. Pour tout $\varepsilon > 0$ et si on choisit $B = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ et pour x positif on aura

$$x > B \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| < \varepsilon.$$

Maintenant pour tout $\varepsilon > 0$ et si on choisit $B = \frac{-1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ et pour x négatif on aura

$$x < B \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Table 2.1: Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Table 2.2: Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x)>0$	0 et $f(x)<0$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Table 2.3: Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ oul $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.
			Il faut étudier le signe de g		règle des signes		

Table 2.4: Limite du quotient

En s'inspirant de ces définitions, on peut définir sans difficulté les notions $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f(x_n)=\pm\infty$.

La proposition CLS reste valable pour les limites infinies et les limites en $\pm\infty$ à condition de respecter les règles suivantes:

Pour finir cette section, nous allons rappeler quelques limites classiques vues au Lycée. On a aussi pour a et b dans $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$

Table 2.5: limites usuelles des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln(x) = 0^-$$

$$n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} x^n \cdot \ln(x) = 0^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Figure 2.1: Limites pour la fonction Logarithme népérien

On s'intéresse maintenant à la notion de continuité basée sur la notion de limite précédemment vu.

2.1.5 Fonctions continues

Définition 2.1.8. Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est continue en a si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

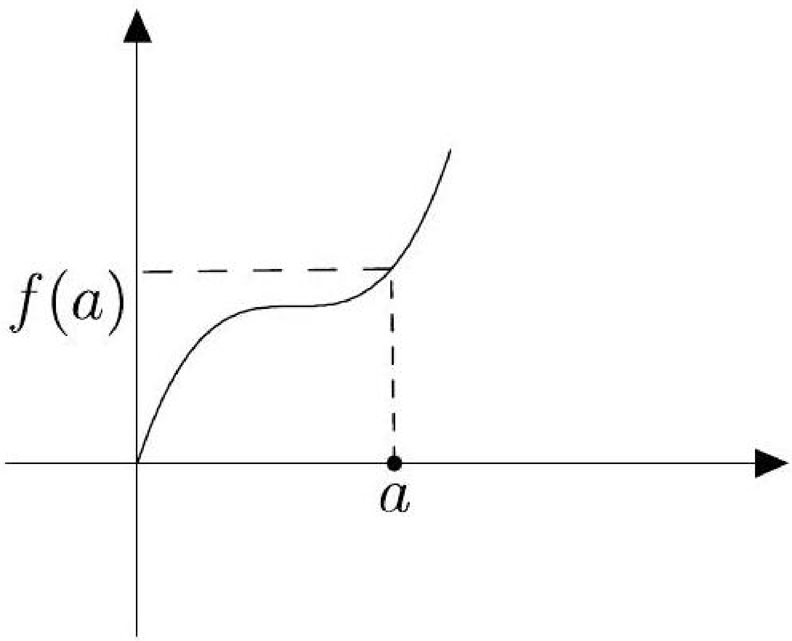
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = 0^-$$

$$n\in\mathbb{N}: \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n\cdot e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Figure 2.2: Limites pour la fonction exponentiel



f est continue en a

Remarque 2.1.3. Le contraire de f est continue en a se dit : f est discontinue en a ou tout simplement f n'est pas continue en a.

Proposition 2.1.8. (Caractérisation de la continuité à l'aide des suites CCS)

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. Les assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est continue en a.
b) Pour toute suite (x_n) de points de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

2.1.6 Continuité à droite - à gauche en un point

Définition 2.1.9.

1. Soit une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a, a+\alpha[$ où $\alpha > 0$. On dit que la fonction f est continue à droite en a si :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$$

2. Soit une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a]$ où $\alpha > 0$. On dit que la fonction f est continue à gauche en a si :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$$

Proposition 2.1.9. Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.

f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche de a. En d'autre termes :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$$

2.1.7 Continuité sur un intervalle

Par extension de la première définition, on obtient la définition suivante :

Définition 2.1.10. Continuité sur un intervalle

a) On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert I si f est continue en tout élément de I.

b) On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$ et est continue à droite en a et à gauche en b.

Remarque 2.1.4. De la même façon, on définit la continuité sur $[a, b[,]a, b], [a, +\infty[$, et $]-\infty, a]$.

A partir des définitions sur la limite, on peut établir les remarques importantes suivantes :

Remarque 2.1.5. (importante)
a) Pour que f soit continue en a, il faut d'abord qu'elle soit définie en a.

b) Graphiquement, la fonction est continue si sa courbe est obtenue " sans lever le crayon" c) les fonctions usuelles : les fonctions rationnelles (dont les fonctions polynômes et la fonction inverse), la fonction racine carrée, les fonctions cos et sin, la fonction ln et la fonction exp sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

La proposition suivante permet d'établir la continuité des fonctions s'écrivent comme somme, multiplication et quotient et des fonctions fonctions continues.

Proposition 2.1.10. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et k un réel. Si f et g sont continues en a (resp. sur I) alors les fonctions $f+g, kf, f\times g$ sont continues en a (resp. sur I). Si de plus $g(x)\neq 0, \forall x\in I$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a (resp. sur I)

Propriétés 2.1.1. Soient f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$. Si f est continue en $a\,(a\in I)$ et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g\circ f$ est continue a.

Démonstration. Nous allons utiliser la caractérisation de la continuité à l'aide des suites. Soit (x_n) une suite qui tend vers a. Puisque f est continue en a, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Maintenant g est continue en $f(a)$ et donc, la suite $(g(f(x_n))) = ((g\circ f)(x_n))$ converge vers $(g\circ f)(a)$. Ceci achève de montrer que $g\circ f$ est continue en a.

De façon analogue on obtient la continuité sur un intervalle.

Proposition 2.1.11. Si f est une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$, alors la fonction $g\circ f$ est continue sur I.

Ces propositions peuvent être combinées pour construire d'autres fonctions continues.

Définition 2.1.11. Soit $f :]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ avec $l\in\mathbb{R}$ (limite finie). Dans ce cas la fonction $g :]a-\alpha, a+\alpha[\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a.

Exemple 2.1.6. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$*, par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. *Cette fonction n'est pas définie en 0 cependant $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Parmi les grands théorèmes sur les fonctions continues, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1.1. (Théorème des valeurs intermédiaires : TVI)
Soif f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux éléments de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un élément c entre a et b tel que $f(c) = k$.

Démonstration. Soient a et b dans I avec $a < b$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < f(b)$ et soit $k \in [f(a), f(b)]$. Nous allons montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$. Pour cela, considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b], f(x) \leqslant k\}.$$

On a clairement $a \in A$ et donc A est non vide et en plus A est majoré par b. D'après le théorème de la borne supérieure, A admet une borne supérieure. Posons $c = \sup A$. Nous allons montrer que $f(c) = k$.

Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \in A$ et donc $f(a_n) \leqslant k$ et puisque f est continue en c, on a, d'après la proposition CCS, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et par suite $f(c) \leqslant k$.

D'un autre côté, puisque $k < f(b)$, on déduit que $c < b$ et pour tout $x \in]c, b[, f(x) > k$ car sinon,

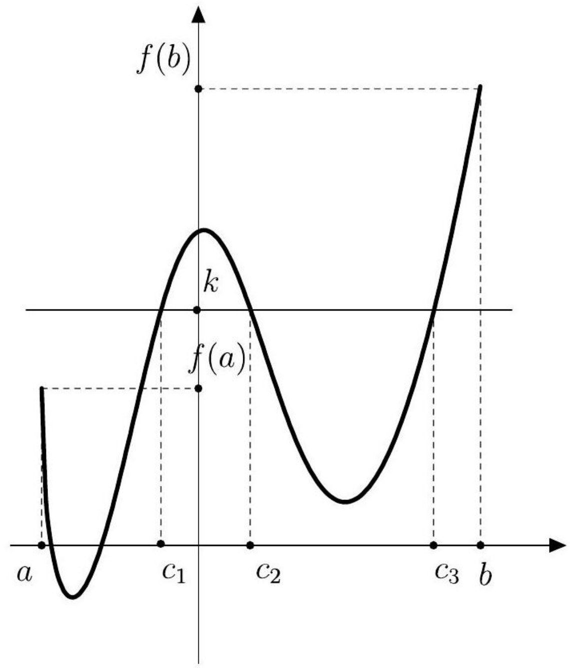
$$\exists d \in]c, b[\text{ tel que } f(d) \leqslant k$$

et par suite $d \in A$, ce qui contredit le fait que $c = \sup A$.

Il en résulte alors que (puisque f est continue en c) $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) \geqslant k$. Finalement, $f(c) = k$.

Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$. Voici une illustration graphique Ici k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions. Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il soit unique. Dans notre exemple, il existe ainsi trois valeurs pour c.

Remarque 2.1.6. Remarquons que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc $k \in f([a, b])$.



Une conséquence immédiate du théorème précédent est la suivante

Proposition 2.1.12. Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Les fonctions continues respectent les intervalles fermés bornés. Le théorème suivant est un théorème fondamentale en analyse.

Théorème 2.1.2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors $f([a, b]) = [c, d]$ avec c et d deux réels tels que

$$\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \quad c = f(\alpha) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad d = f(\beta) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ces propriétés s'expriment en disant que si une fonction est continue sur un fermé borné alors elle est bornée et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Notons $J = f([a, b])$. J est alors un intervalle. Montrons que J est borné. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que J n'est pas borné. Supposons par exemple que J n'est pas majorée. Donc, il existe une suite $(f(x_n))$ de points de J telle que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$. La suite (x_n) est une suite de points de $[a,b]$ donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\left(x_{\phi(n)}\right)$ une sous-suite de (x_n) qui converge vers l. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}, a \leqslant x_{\phi(n)} \leqslant b$, alors par passage à la limite, $l \in [a,b]$. La fonction f étant continue en l (car f est continue sur $[a,b]$ et $l \in [a,b]$) donc d'après CCS, la suite $\left(f\left(x_{\phi(n)}\right)\right)$ converge vers $f(l)$. Or $\left(f\left(x_{\phi(n)}\right)\right)$ est une sous-suite de la suite $(f(x_n))$ qui tend vers $+\infty$, ce qui constitue une contradiction. L'intervalle J est donc borné.

Pour conclure. nous allons montrer que $\sup J$ et $\inf J$ appartiennent à J. D'après la caractérisation de la borne sup, il existe une suite $(f(y_n))$ de point de J qui converge vers $\sup J$. La suite (y_n) est une suite de points de $[a,b]$ donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\left(y_{\psi(n)}\right)$ une sous-suite de (y_n) qui converge vers un certain nombre réel β. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}, a \leqslant y_{\psi(n)} \leqslant b$, alors $\beta \in [a,b]$. La fonction f étant continue en β donc d'après CCS, la suite $\left(f\left(y_{\psi(n)}\right)\right)$ converge vers $f(\beta)$. Or $\left(f\left(y_{\psi(n)}\right)\right)$ est une sous-suite de la suite $(f(y_n))$ et donc converge vers $\sup J$. Ceci montrer que $\sup J = f(\beta) \in J$. De la même manière on montre que $\inf J \in J$. Ce qui achève la preuve du théorème.

Définition 2.1.12. (Monotonie d'une fonction) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

1. f est croissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
2. f est décroissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
3. f est strictement croissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
4. f est strictement décroissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
5. Une fonction croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) est dite monotone (resp. strictement monotone).

Maintenant, on s'intéresse à l'image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone. Si par exemple f continue et strictement croissante, on a

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), f(b)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$

Si par exemple f continue et strictement décroissante, on a

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)\right[$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)[$

Remarque 2.1.7. De la même façon on détermine l'image des intervalles : $[a,+\infty[;]a,+\infty[;$ $]-,\infty,a]$, $]-\infty,a[$ et $]-\infty,+\infty[$.

Le théorème suivant est d'un grand intérêt pratique car il concerne de fait les fonctions monotones au voisinage d'un point. Il s'adapte sans difficulté aux autres situations. Pour cela rappelons la notion d'une fonction majorée et minorée.

Définition 2.1.13. Soit f une fonction de I dans R. On dit que f est :

- majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I, f(x) \leq M$. Dans ce cas on pose $\sup f = \sup\{f(x)|x \in I\}$.
- minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I, f(x) > m$. Dans ce cas on pose $\inf f = \inf f(x)|x \in I$.
- bornée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I, |f(x)| \leq M$, c'est à dire si f est minorée et majorée. On note alors $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in I\}$ (norme infinie).

Exemple 2.1.7. $||\cos||_\infty = 1$.

Alors, le théorème de la limite monotone s'énonce pour une fonction croissante comme suit:

Théorème 2.1.3. Soit I un intervalle ouvert et majoré dont on note ω la borne supérieure, on considère une fonction f définie et croissante sur I.

1. Si f est majorée sur I alors f admet une limite en ω et

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \sup_{x\in I} f(x)$$

2. Si f n'est pas majorée sur I , alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers ω.

Démonstration. 1. repose sur la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et pour 2. la démonstration est analogue à celle sur les suites monotones.

1. Si f est majorée, l'image $f(I)$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon > 0$; il existe $x_1 \in I$ tel que $l - \varepsilon < f(x_1). \leq l$.

   La fonction f étant croissante sur I, on a, pour x vérifiant $x_1 < x < \omega$

   $$l - \varepsilon < f(x_1). \leq f(x) \leq l$$

   . On note $\eta = \omega - x_1 > 0$, on a :

   $$\forall x \in I \quad (0 < \omega - x < \eta \Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

2. Si f n'est pas majorée; soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $x_1 \in I$ tel que $f(x_1) > A$.
   La fonction f étant croissante on a, pour $x_1 < x < \omega, \quad f(x) > A$. On note $\eta = \omega - x_1 > 0$, on a :

   $$\forall x \in I \quad (0 < \omega - x < \eta \Leftrightarrow f(x) > A)$$

On notera, une fois encore, la grande analogie avec le théorème des suites monotones.

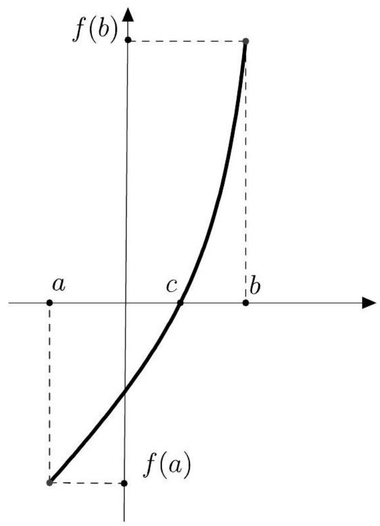
De même, on peut énoncer le résultat de la limite monotone pour le cas d'une fonction décroissante :

Théorème 2.1.4. Soit a et b dans $\mathbb{R} \cup \pm\infty$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante.

(a) si f est décroissante et minorée, alors f admet une limite finie en b qui vaut $l = \inf f$. Si f n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{b} f = -\infty$.

(b) si f est décroissante et majorée, alors f admet une limite finie en a qui vaut $L = \sup f$. Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Proposition 2.1.13. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique élément c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Démonstration. L'existence découle du TVI, et l'unicité de la monotonie de la fonction :

On suppose que f est strictement croissante sur $[a, b]$.

On a ainsi : $f(a) < f(b)$. Soit $k \in [f(a), f(b)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

On suppose qu'il existe c_1 et c_2 tels que $f(c_1) = k$ et $f(c_2) = k$.

Supposons que $c_1 < c_2$ alors $f(c_1) < f(c_2)$ car f est strictement croissante. C'est en contradiction avec $f(c_1) = f(c_2)$.

On en déduit donc que c est unique.

Définition 2.1.14. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I. On dit que $f : I \to J$ est une bijection si

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

Dans ce cas on a $f(I) = J$.

Théorème 2.1.5. Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I vers $f(I)$ et sa bijection réciproque, qu'on note f^{-1} est définie de $f(I)$ vers I. De plus f^{-1} est continue strictement monotone sur $f(I)$ de même type de monotonie que f sur I.

Démonstration. On a $f : I \to f(I)$ continue, donc

$$\forall y \in J, \exists x \in I, f(x) = y$$

Puisque f est strictement monotone alors le x est unique. En effet, supposons qu'il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$ et on peut supposer que $x_1 < x_2$.

- Si f est strictement croissante, on aura $f(x_1) < f(x_2)$.
- Si f est strictement décroissante, on aura $f(x_1) > f(x_2)$. Ces deux cas sont en contradiction avec $f(x_1) = f(x_2)$.

On en déduit donc que x est unique. D'où f est bijective.

Nous allons montrer maintenant que $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue. Soit y_0 dans $f(I)$, alors $\exists! x_0 \in I, f(x_0) = y_0$. Soit $(f(x_n))$ une suite d'éléments de $f(I)$ qui converge vers y_0. Nous allons montrer que la suite $\left(f^{-1}(f(x_n)) = (x_n)\right.$ converge vers $f^{-1}(y_0) = x_0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Puisque f est continue et strictement croissante, on a

$$f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [y_1, y_2] \text{ où } y_1 = \min(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ et } y_2 = \max(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

et alors $y_0 \in [y_1, y_2]$. Puisque la suite $(f(x_n))$ converge vers y_0, il existe donc un entier naturel N tel que, pour tout $n > N, f(x_n) \in [y_1, y_2]$. Donc $x_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ et achève la preuve du théorème.

Corollaire 2.1.1. Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit f^{-1} sa fonction réciproque. On a
a) $(\forall x \in I)\ f^{-1} \circ f(x) = x$.
b) $(\forall x \in f(I))\ f \circ f^{-1}(x) = x$.
c)

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) = x \\ y \in I \end{array} \right.$$

2.1.8 Continuité uniforme

Définition 2.1.15. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est uniformément continue (ou f est u-continue) sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

La notion de continuité uniforme est globale (δ ne dépend que ε). Il est clair que la continuité uniforme sur I entraîne la continuité sur I. Par contre, la réciproque est fausse : l'application $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout $\delta > 0$, on a en choisissant un réel $x > \frac{1}{\delta}$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$:

$$y - x = \frac{\delta}{2} \text{ et } y^2 - x^2 = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x > 1$$

On a bien prouvé :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x-y| < \delta \text{ et } \left|x^2 - y^2\right| \geqslant \varepsilon$$

Donc la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.16. (Fonction lipschitzienne) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne sur I si :

$$\exists k \geqslant 0, \forall (x,y) \in I^2; \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Remarque 2.1.8. Pour un tel k la fonction est dite aussi k-lipschitzienne.

Exemple 2.1.8. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| = \left|\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\right| \leqslant |x-y|$$

Donc f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$donc elle l'est aussi sur $\mathbb{R}^-$(puisque f est impaire).

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue :

Théorème 2.1.6. Soit f une fonction lipschitzienne sur un intervalle I. Alors f est uniformément continue sur I.

Démonstration. Soit f une fonction k-lipschitzienne $(k > 0)$ sur l'intervalle I et soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y dans I tels que $|x-y| < \delta$. On a alors, puisque f est k-lipschitzienne,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que f est uniformément continue sur I.

Remarque 2.1.9.
- La réciproque du théorème 2.1.6 est fausse. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$mais non lipschitzienne. (Exercice)
- par contraposition, on a :
  f non u-continue sur $I \Longrightarrow f$ non lipschitzienne sur I.

Théorème 2.1.7. (Théorème de Heine) Toute fonction numérique continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment I.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur segment I. Supposons f non uniformément continue sur I. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \quad \exists (x, y) \in I^2, \quad |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$$

En particulier, en choisissant $\delta = \frac{1}{n}$ pour n dans $\mathbb{N}^*$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \left(x_n, y_n\right) \in I^2, \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \left|f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right| \geqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Comme I est borné, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définies le sont également. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent.

Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que la suite $\left(x_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons l sa limite. (On a nécessairement $l \in I$ puisque I est fermé).

Fixons $\varepsilon' > 0$, on a donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \forall n > N_1, \left|x_{\phi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon'}{2} \tag{2.4}$$

Mais, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après 2.3

$$\left|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right| < \frac{1}{\phi(n)}$$

Comme $\left(\frac{1}{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 (puisque $\phi(n) \geqslant n$ et alors $0 < \frac{1}{\phi(n)} \leqslant \frac{1}{n}$), on a

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \forall n > N_2, \frac{1}{\phi(n)} < \frac{\varepsilon'}{2} \tag{2.5}$$

Pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a alors d'après 2.4, 2.5 :

$$\left|y_{\phi(n)} - l\right| \leqslant \left|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\right| + \left|x_{\phi(n)} - l\right| < \varepsilon'.$$

Ceci prouve que la suite $\left(y_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers l. Or, f étant continue sur I, on peut affirmer que les suites $\left(\left(f\left(x_{\phi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right.$ et $\left(\left(f\left(y_{\phi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right.$ convergent vers $f(l)$. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n > N \Longrightarrow \left|f\left(x_{\phi(n)}\right) - f\left(y_{\phi(n)}\right)\right| < \varepsilon.$$

Ce qui contredit 2.3 Conclusion, f est uniformément continue sur le segment I.

Quelques fonctions usuelles

Nous allons définir et donner les premières propriétés de quelques fonctions très utilisées en analyse et, grâce au théorème (3.3), exhiber leurs fonctions réciproques.

La fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque définie sur $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

Définition 2.1.17. Soit n un entier naturel non nul. La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0, +\infty\,[$par $x \mapsto x^n$ s'appelle la fonction racine n-ième, et on la note par $\sqrt[n]{\ }$.

L'image de x par cette fonction se note $\sqrt[n]{x}$, cette dernière écriture s'appelle la racine n-ième du nombre x. On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^n \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

Proposition 2.1.14. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. De plus, les représentations graphiques des deux fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto x^n$ dans un plan muni d'un repère orthonormal sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Corollaire 2.1.2. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
a) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a = b$.
b) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a > b$.
c) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.

- Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Définition 2.1.18. Soit x un nombre réel strictement positif et soit r un nombre rationnel non nul.

On appelle la puissance rationnelle de base r du nombre x le nombre noté x^r et qui est défini par $x^r = \sqrt[n]{x^m}$ où $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*)$.

Remarque 2.1.10. Si $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (m et m' sont dans $\mathbb{Z}^*$ et n et n' sont dans $\mathbb{N}^*$) alors $x^r = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$ (c-à-d que x^r ne dépend pas de m et n). De plus $x^r = x^{r'} \Longleftrightarrow r = r'$.

Cas particulier, pour $m = 1, \forall x > 0, x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Corollaire 2.1.3. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
a) $(\forall r \in \mathbb{Q}^*)\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) x^r > 0$.
b) $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)(\forall m \in \mathbb{Z}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Exemple 2.1.9. $\sqrt[6]{7^3} = \sqrt{7} \ldots$

2.2 Fonctions circulaires réciproques

2.2.1 Définitions

La fonction arccos :

La fonction cos est continue, strictement décroissante de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arccos la fonction réciproque de cos sur ces ensembles. Ainsi, arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.

La fonction arcsin :

La fonction sin est continue, strictement croissante de $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1,1]$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arcsin la fonction réciproque de sin sur ces ensembles. Ainsi, arcsin : $[-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction arctan :

La fonction tan est continue, strictement croissante de $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arctan la fonction réciproque de tan sur ces ensembles. Ainsi, arctan : $\mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

- Formules : Il faut un peu faire attention quand on utilise $\arccos(\cos(x))$ et $\cos(\arccos(x))$. En effet, $\cos(\arccos(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1;1]$ et on a clairement

$$(\forall x \in [-1;1]), \quad \cos(\arccos(x)) = x$$

Par contre, comme arccos renvoie toujours sur l'intervalle $[0;\pi]$, on a en général $\arccos(\cos(x)) \neq x$. En fait on a

$$(\forall x \in [0;\pi]), \quad \arccos(\cos(x)) = x$$

De la même façon, $\sin(\arcsin(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1;1]$ et on a clairement

$$(\forall x \in [-1;1]), \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

Par contre, comme arcsin renvoie toujours sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a en général $\arcsin(\sin(x)) \neq x$. En fait on a

$$\left(\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

Notez le lien suivant entre arcsin et arccos :

$$(\forall x \in [-1;1]), \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

En effet, soit $x \in [-1;1]$. La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est bijective, donc il existe un unique $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos(t)$. Alors puisque $\frac{\pi}{2} - t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$\begin{aligned}\arcsin(x) + \arccos(x) &= \arcsin(\cos(t)) + \arccos(\cos(t))\\ &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) + t\\ &= \frac{\pi}{2} - t + t\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Enfin, de la même façon que précédemment on obtient facilement

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \tan(\arctan(x)) = x$$

et

$$(\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[), \quad \arctan(\tan(x)) = x$$

On a aussi comme formules mixtes

$$(\forall x \in [-1,1]), \quad \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

En effet, pour $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}\cos^2(\arcsin(x)) &= 1 - \sin^2(\arcsin(x))\\ &= 1 - x^2.\end{aligned}$$

Or, $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$. D'où $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

De même on montre l'autre égalité.

2.2.2 Fonctions hyperboliques

- Définitions : On définit sur $\mathbb{R}$ les trois fonctions suivantes.
  Le cosinus hyperbolique

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

le sinus hyperbolique

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

et la tangente hyperbolique

$$\operatorname{th}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Ce sont toutes des fonctions continues. On calcule assez facilement les limites suivantes

$$\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}(x)=+\infty, & \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sh}(x)=+\infty, & \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{ch}(x)=+\infty, & \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sh}(x)=-\infty, & \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)=-1.\end{array}$$

- Formules : Il y a beaucoup de formules similaires à celles des fonctions trigonométriques usuelles, avec des petites différences, souvent de signe, auxquelles il faut faire attention. Tout d'abord

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\quad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}(x),\quad \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}(x)$$

La formule habituelle devient

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\quad \operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1$$

La formule de de Moivre devient triviale

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\quad (\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x))^n=\operatorname{ch}(nx)+\operatorname{sh}(nx).$$

Les formules d'addition, pour toux x et y dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x+y)&=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y),\\ \operatorname{ch}(x-y)&=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)-\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y),\\ \operatorname{sh}(x+y)&=\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y),\\ \operatorname{sh}(x-y)&=-\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y).\end{aligned}$$

2.3 Définitions : Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

La fonction argch :

La fonction ch est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$vers $[1;+\infty[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argch la fonction réciproque de ch sur ces ensembles. Ainsi, argch : $[1;+\infty[\to \mathbb{R}^+$.

La fonction argsh :

La fonction sh est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argsh la fonction réciproque de sh sur ces ensembles. Ainsi, argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La fonction argth :

La fonction th est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers] - 1, 1 [. C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle argth la fonction réciproque de th sur ces ensembles. Ainsi, argth : $]-1,1[\to \mathbb{R}$

- Formules : En fait on peut trouver des formules explicites pour les fonctions argch, argsh et argth. En effet, pour $x \geqslant 1$ posons $t = \operatorname{argch}(x)$, i.e. $x = \operatorname{ch}(t)$ avec $t \geqslant 0$. Comme

$$e^t = \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t) \text{ et } \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$$

on a

$$e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

et donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

De la même façon

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Enfin, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(y) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

donc $\operatorname{th}(y) = x$ donne

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

et donc

$$(\forall x \in]-1,1[), \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$