Cours : Probabilités

Pr : **OUAISSA Hamid**

Licence Education
Spécialité : Enseignement secondaire Mathématiques

Année universitaire : 2023-2024

1

Probabilités

1.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour le que l'on décide que le dénouement sera le fait du hasard.

Exemple 1.1.1. *- l'enfant à naître sera une fille.*
- Victoire d'une équipe de foot lors du prochain match.
- le dé va faire un nombre pair.

La première tâche qui vous attend est de décrire les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces éventualités un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter/fixer ce nombre, appelé probabilité?Il existe plusieurs manières de voir

-Proportion:

On lance un dé. Quelle est la probabilité de

A= "obtenir un chiffre pair"

Chaque face du dé la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, intuitivement,

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

-Fréquence:

Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille? On a observé un grand nombre de naissances. Notons k_n le nombre de filles nées en observant n naissances. Alors

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

mais cette limite a-t-elle un sens?

-Opinion:

Quelle est la probabilité pour que l'équipe de Maroc gagne la coupe d'Afrique des nations? Dans ce cas, on ne peut pas rejouer le même match dans les mêmes conditions plusieurs fois. On peut considérer les qualités des joueurs, des entraîneurs, les résultats de la saison...Mais le choix de la probabilité est forcément subjectif. Dans ce cours l'objectif est de simplement introduire sur les espaces finis toutes les notions importantes de probabilités. Cela fera appel à quelques propriétés sur l'analyse combinatoire, les variables aléatoires ainsi que quelques lois de probabilités que ça soit discrètes ou continues. D'abord, on doit commencer par un petit rappel sur la théorie des ensembles ainsi que le dénombrement.

1.2 Rappel sur la théorie des ensembles et le dénombrement

Définition 1.2.1. Ensemble des parties d'un ensemble.
Soit E un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de E, l'ensemble noté P(E) dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple 1.2.1. *Soit E l'ensemble à deux éléments :* $E = \{a, b\}$. *Alors E admet comme sous-ensembles* $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ *et E lui même. Ainsi*

$$P(E) = \{\emptyset; E; \{a\}; \{b\}\}$$

Si E contient 2 éléments, P(E) contient 4 éléments.

Définition 1.2.2. Ensembles disjoints.
Deux ensembles E et F sont dits disjoints si

$$E \cap F = \emptyset$$

Définition 1.2.3. Partition d'un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit qu'elle forme une partition de E si

1. $\underset{i\in I}{\cup} A_i = E$,
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dés que $i \neq j \in I$.

Propriétés 1.2.1. Soient $A, B, C \in P(E)$. Alors

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$, où $\bar{A}$ le complémentaire de A.
2. $A \cup \bar{A} = E$.

3. $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$,

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \cup \bar{A} = E;\ A \cap E = A$.

Propriétés 1.2.2. Lois de Morgan.
Soient A, B deux sous-ensembles de E Alors

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,

2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment dénombrer des objets. Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments dans un ensemble fini. Elle fournit des méthodes utiles en théorie de probabilités.

Définition 1.2.4. On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de E. On le note $|E|$ ou $card(E)$.

Un ensemble fini est un ensemble dont le cardinal est fini.

Propriétés 1.2.3. Soient E et F deux ensembles finis. Alors
• Si $E \subset F$, on a $card(E) \leq card(F)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
• $card(E \times F) = card(E) \cdot card(F)$ où $\times$ désigne le produit cartésien définit par $E \times F = \{(a, b) \mid a \in E, b \in F\}$
• $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$

On rappelle le produit cartésien des ensembles $E_1, ..., E_n$ est

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(e_1, ..., e_n) \mid e_i \in E_i \text{ pour } i \in \{1, ..., n\}\}$$

L'élément $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est appelé un n-uplet.
si $n = 2$, on parle de couple. si $n = 3$, on parle de triple.

Exemple 1.2.2. *Soit* $E = \{2, 3, 4\}, F = \{2, 1\}$ *alors*

$$E \times F = \{(2, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1)\}$$

On a bien $card(E \times F) = card(E) \cdot card(F) = 3 * 2 = 6$.

Ceci nous amène à énoncer théorème fondamentale de dénombrement appelé également principe multiplicatif.

Propriétés 1.2.4. (principe multiplicatif) : Soit ensembles finis $E_1, E_2, ...E_n$, alors on a

$$card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} card(E_i)$$

Maintenant, on considère l'exemple suivant pour bien stimuler ce principe

Exemple 1.2.3. *Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.*
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.
Correction *a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts. On considère alors les triplets de la forme (entrée, plat, dessert) éléments de $E \times P \times D$. D'après le principe multiplicatif, on a :*

$$card(E \times P \times D) = 3 * 4 * 2 = 24.$$

Il existe 24 menus différents.
b) Puisque, on a fixé le dessert alors le nombre de menu est

$$card(E \times P) = 3 * 4 = 12.$$

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

Corollaire 1.2.1. Soit un ensemble fini n éléments. Alors le nombre de k-uplets est égal à :

$$card(\underset{k \text{ fois}}{E \times E \times ... \times E}) = card(E^k) = n^k$$

Terminologie:

- Disposition sans répétition : c'est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.
- Disposition avec répétition : un élément peut figurer plus d'une fois.
- Disposition ordonnée : l'ordre d'obtention d'un élément est important. Ex. les éléments constituant la plaque minéralogique d'un véhicule.
- Disposition non-ordonnée : l'ordre d'obtention d'un élément n'est pas important, on n'en tient pas compte dans la caractérisation de la disposition. Ex. Les numéros issus d'un tirage du loto.

1.2.1 Arrangement

Définition 1.2.5. Un arrangement est une sélection ordonnée d'objets, autrement dit, Étant donné un ensemble E de n éléments, on appelle un arrangement de p éléments toute dispostion ordonnée de p éléments pris parmi les n éléments. Le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n éléments est noté A_n^p,

Remarque 1.2.1. On a nécessairement $1 \leq p \leq n$, $p \in \mathbb{N}^*$. Si $n < p$ alors $A_n^p = 0$.

Deux arrangements de p élément sont donc distincts s'ils différent par la nature des éléments qui les composent ou par leur ordre dans la suite.

Exemple 1.2.4. *RAT est un arrangement de lettres dans le mot ARRANGEMENT.*

Nous pouvons définir un arrangement plus rigoureusement à l'aide des informations présentées dans la section précédente sur le produit cartésien. On peut alors parler d'arrangement sans ou bien avec répétition.
Soient n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.,

Arrangements avec répétition

Lorsqu'un élément peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements avec répétition (ou avec remise) de p éléments pris parmi n est alors

$$A_n^p = n^p$$

Explication : Pour le premier élément tiré, il y a n manières de ranger l'élément parmi n. Pour le second élément tiré, il existe également n possibilités d'arrangements car le premier élément fait de nouveau parti des n éléments Ainsi pour les p éléments tirés parmi n, il y aura $n \times n \times \cdots \times n$ (p fois) arrangements possible, soit $A_n^p = n^p$.
En effet on a n possibilités pour chaque place.

Réaliser un arrangement avec répétition des éléments d'ensemble E, c'est aussi définir une application d'un ensemble F à p éléments dans E à n éléments.

Exemple 1.2.5. *Si on considère une urne qui contient 9 boules numérotés (3 rouges, 3 noires et 3 blanches). On tire 4 boules avec remise de cette urne. Combien de nombres de tirage possible ?*
Il s'agit d'un arrangement avec répétition, le nombre de tirage possible est de 9^4

Exemple 1.2.6. *On veut déchiffrer le code d'un portable composé de 3 chiffres.*

Arrangements sans répétition

Définition 1.2.6. Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement. Autrement dit un arrangement de p éléments d'un ensemble E $(card(E) = n)$ est un p-uplet d'éléments distincts de E. C'est aussi définir une application injective d'un ensemble F à p éléments dans E à n éléments.

Pour compter le nombre d'arrangements, nous exploitons le principe multiplicatif du dénombrement. Soit un ensemble dont le cardinal est n.
Après avoir sélectionné le premier élément de l'arrangement, il nous reste $n - 1$ choix, car **il n'y a pas de répétition permise** dans un arrangement. De même, après avoir sélectionné le deuxième élément de l'arrangement, il nous reste $n - 2$ choix. Si nous continuons ainsi, après le (p-1)-ième élément, il y a donc $n - (p - 1) = n - p + 1$ choix pour le p-ième et dernier élément de l'arrangement. D'où, le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de cardinal n est :

$$n \times n - 1 \times \, ... \times \, n - p + 1$$

L'expression ci-dessus peut être reformulée à l'aide des factorielles.

Définition 1.2.7. Le factorielle d'un entier naturel n est égale à

$$n \times n - 1 \times \, ... \times \, 1$$

il se note $n!$

Alors le nombre d'arrangement sans répétions de p éléments parmi n, se calcule

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 1.2.7. *Une course de 20 athlètes, on attribue une médaille d'or au premier, une médaille d'argent pour le deuxième et le bronze pour le troisième. Combien y-a-t il de classements possible ?*
On voit clairement que l'ordre ici est important et il n y a pas de répétition donc le nombre de cas possibles est

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Exemple 1.2.8. *Pour jouer à la loterie, il faut choisir cinq numéros sur une grille de 49 numéros et un numéro complémentaire parmi dix. Peux-tu calculer le nombre de résultats possibles à la loterie ?*
Pour les numéros non-complémentaires, il s'agit d'un arrangement où $n = 49$ *et* $p = 5$.
Il y a donc $A_{49}^5 = \frac{49!}{(49-5)!} = 228826080$ *arrangements de cinq numéros. Pour prendre en compte le numéro complémentaire, il faut utiliser le principe de multiplication du dénombrement. Comme il y a dix possibilités pour le numéro complémentaire, il y a* $10 \cdot 228826080 = 2288260800$ *résultats possibles du loto.*

Pour un arrangement en dénombrement, l'ordre est important. Une permutation est un type spécial d'arrangement.

Permutation

Définition 1.2.8. Une permutation est un rangement ordonné de n objets distinguables. Autrement dit, Une permutation est un arrangement de tous les éléments dans un ensemble. C'est également une bijection d'un ensemble de n éléments vers lui même.

Exemple 1.2.9. *ART est une permutation du mot RAT.*

Permutations sans répétition

Étant donné un ensemble E de n éléments ; on appelle permutation de n éléments distincts, toutes suites ordonnées de n éléments. Le nombre de permutation de n éléments est noté

$$P_n = n!$$

Remarque 1.2.2. La permutation sans répétition constitue un cas particulier d'arrangement lorsque $n = p$. En effet, nous pouvons en déduire le nombre de permutations à l'aide de la formule pour le nombre d'arrangements, où $p = n$ ainsi :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

où $0! = 1$.

Exemple 1.2.10. *Le nombre de façon de placer 5 étudiants dans 5 places différentes est*

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Réaliser une permutation sans répétition des éléments d'ensemble E, c'est réaliser un tirage exhaustif sans remise des éléments de E en tenant compte de l'ordre du tirage. C'est aussi définir une bijection de ensemble E sur lui-même.

Exemple 1.2.11. *Un site internet requiert à ses clients d'avoir un mot de passe composé de tous les chiffres entre 0 et 9 compris. Chaque chiffre ne doit apparaître qu'une seule fois dans le mot de passe. Saurais-tu calculer le nombre de mots de passe possibles ?*

Chaque mot de passe serait une permutation des chiffres entre 0 et 9. Comme il y a dix chiffres, il peut y avoir $10! = 3628800$ *mots de passe possibles.*

$$\left\{\underbrace{(a_1,\ldots,a_1)}_{n_1};\underbrace{(a_2,\ldots,a_2)}_{n_2};\ldots;\underbrace{(a_r,\ldots,a_r)}_{n_r}\right\}$$

Permutations avec répétition.

Définition 1.2.9. Soit E un ensemble tel que $Card(E) = n$ et soit $n_1; n_2; :::; n_r$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. On appelle permutations avec répétition de E une disposition ordonnée de n éléments. Parmi les n éléments on trouve n_1 éléments de a_1, n_2 éléments de a_2,..., n_r de éléments a_r. c'est à dire Le nombre de permutations est

$$P_{n_1;n_2;\ldots;n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

C-à-d que le premier élément figure n_1 fois, le deuxième figure n_2 fois et ainsi de suite.

Exemple 1.2.12. *Combien de mots différents peut on écrire en permutant les lettres du mot "Yassine".*

Le nombre de mots que l'on peut former est le nombre des $\{1; 1; 2; 1; 1; 1\}$-*permutations (avec répétition) de l'ensemble des lettres "Yassine", soit*

$$P = \frac{7!}{1!1!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

Question: Combien de permutations possibles des lettres A, B, B, C et C?

Exemple 1.2.13. *Combien de nombres différents peut-on écrire avec les chiffres 3,4,5,0,3 ?*

1.2.2 Combinaisons

Définition 1.2.10. Étant donné un ensemble de n éléments ; on appelle combinaison de p éléments, tout sous-ensemble de p éléments non ordonné pris parmi les n éléments.

Combinaisons sans répétion

Une combinaison est une sélection de p éléments pris parmi n éléments. Autrement dit, on appelle combinaison sans répétition de p éléments pris parmi n et sans remise d'un ensemble E toute disposition non ordonnée de p éléments de E. Ici l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas.

Définition 1.2.11. Pour déterminer le nombre de combinaisons, nous utilisons la formule suivante :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Le symbole C_n^p se lit "combinaison de k parmi n". Il se note également $\binom{n}{p}$

Remarque 1.2.3. (Explication) Pour une disposition ordonnée de p éléments parmi n sans répétition.

- Il y a A_n^p possibilités de tirer p élément parmi n en les ordonnant : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Une fois les p élément tirés, il y a p! manières de les ordonner.
- Il y a donc $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ manières de tirer p élément parmi n sans les ordonner.
  $C_n^p =$ Nombre de combinaisons possibles
  $= \frac{\text{Nombre d'arrangements possibles}}{\text{Nombre de permutations possibles dans cet arrangement}}$
  $= \frac{A_n^p}{p!}$
  $= \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 1.2.14. *BON est une combinaison des lettres de COMBINAISON.*

Exemple 1.2.15. *Combien de couleurs peut-on obtenir en mélangeant deux couleurs non identiques des trois couleurs : Rouge, Bleu, Jaune ?*
On considère des échantillons non ordonnés : Rouge + Bleu = Bleu + rouge. Il n'y a pas répétition : Jaune + Jaune ne convient pas. La réponse est donc : C_3^2 *mélange possibles.*

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Exemple 1.2.16. *On tire au hasard trois billes d'un sac contenant une bille rouge (R), une bille bleue (B), une bille jaune (J) et une bille verte (V). Déterminer le nombre de combinaisons possibles*

Exemple 1.2.17. *Imagine que tu dois constituer un groupe de cinq personnes pour travailler sur un devoir commun. S'il y a 30 personnes dans ta classe, combien de façons y-a-t-il pour former le groupe ?*

Si tu dois former une équipe de cinq personnes et tu fais partie du groupe en plus, alors p correspond à 4. Comme il y a 30 personnes dans la classe, alors n correspond à 29 . Puisque l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition alors c'est une combinaison sans répétition. Le nombre de façon possible

$$\binom{29}{4} = \frac{29!}{4!25!} = 23751$$

Il y a donc 23751 façons pour former le groupe.

Exemple 1.2.18. *Nombre de tirages du Loto. Les boules sont numérotées de 1 à 49. On tire 6 boules. Combien le nombre de tirages possibles.*
Un tirage de 6 numéros parmi 49, est une combinaison de 6 parmi 49. Le nombre de tirages possibles vaut donc

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13983816.$$

Combinaisons avec répétition.

Définition 1.2.12. On appelle combinaison avec répétition de p éléments parmi n éléments avec répétition (remise) d'un ensemble E toute disposition non ordonnée de p éléments, non nécessairement distincts de E. Le nombre de combinaison est

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple 1.2.19. *Combien de combinaisons avec répétition à deux éléments de l'ensemble* $\{1;2;3\}$. *Les combinaisons possibles sont :* $\{1;1\};\{1;2\};\{1;3\};\{2;2\};\{2;3\}$ *et* $\{3;3\}$. *On a alors :*

$$C_{3+2-1}^{2} = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$$

Exemple 1.2.20. *On tire au hasard trois billes dans une urne qui contient une bille rouge, deux billes bleues distinctes et quatre billes vertes distinctes. Déterminer le nombre de combinaisons possibles si on effectue les tirages avec remise.*

$$\textit{Nombre de combinaisons possibles} = \frac{7+3-1}{3!(7-1)!} = 84$$

Propriétés 1.2.5. Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$

$$\tbinom{n}{n-k} = \tbinom{n}{k}$$

On a également la propriété du triangle de Pascal

$$\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k+1} = \tbinom{n+1}{k+1}$$

Les principes du dénombrement servent à résoudre de nombreux problèmes. Il faut donc savoir identifier si le contexte contient un arrangement, une permutation ou une combinaison à l'aide de divers exercices de dénombrement.

Exercice

1.Combien il y a d'arrangements de trois lettres distinctes du mot ARRANGEMENT ?

2. Dans ta cuisine, il y a du poulet, du boeuf, du poisson, des épinards, des courgettes, des asperges, des tomates, du riz et des pâtes. Pour créer un plat équilibré, tu choisiras une viande, un légume et un féculent. Combien de possibilités de plats y-a-t-il ?
3. Trouve le nombre d'agencements possibles avec les lettres du mot LICORNE sans séparer les voyelles.

1.3 Notions de Probabilités

1.3.1 Langage de Probabilités

Définition 1.3.1. Expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une épreuve que l'on peut répéter plusieurs fois et telle que :

- l'ensemble des résultats (issues) possibles est connu ;
- on ne peut pas prévoir, par avance lequel de ces résultats sera réalisés.

Définition 1.3.2. Univers : L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire constitue l'espace échantillon ou univers de l'expérience ou encore l'espace des observations; on le note habituellement Ω.

Exemple 1.3.1. *On considère quelques exemples d'expériences aléatoires*

N^O	*Expérience*	*Ensemble de résultats possibles (Univers)*
1	*Jeter un dé et relever le nombre qui est sur sa face supérieure*	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2	*Jeter une pièce de monnaie*	$\Omega = \{ \text{ pile,face } \} = \{P, F\}$
3	*Compter le nombre de personnes entrant dans un magasin entre 8h et* 22 h	$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$
4	*Jeter un dé deux fois de suite*	$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$
5	*Jeter une pièce de monnaie trois de fois de suite*	$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

Définition 1.3.3. Événement
Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés événements. On distingue les événements simples ou événements élémentaires qui sont constitués d'un seul élément (autrement dit, un singleton) et des événements composés.

Exemple 1.3.2. *Dans l'expérience* N^{o}1 *de l'exemple précédant:*
Soit $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
ω *est appelé une réalisation ou une "épreuve".*

Soit $A = \{2\}, A \subset \Omega$ *est appelé un événement simple.*
Soit $B = \{$ *" le nombre obtenu est pair "* $\}$ *est appelé un événement composé.*

$$B \text{ est réalisé } \Longleftrightarrow \omega \in \{2, 4, 6\}.$$

Exemple 1.3.3. Quelques exemples d'événements.
$\succ$ *L'espace échantillon (univers)* Ω *est l'événement qui est toujours réalisé, "événement certain".*

$\succ$ *L'ensemble vide* $\emptyset$ *est l'événement qui n'est jamais réalisé "événement impossible".*

$\succ$ SiA *est un événement, alors* $\bar{A}$ *est un événement aussi.*

$\succ$ *Si* A *et* B *sont deux événements, alors* $A \cup B$ *est un événement aussi.*

$\succ$ SiA *et* B *sont deux événements, alors* $A \cap B$ *est un événement aussi.*

1.3.2 Opérations sur les événements

$\succ$ Événement impossible : $A = \emptyset$;

$\succ$ Événement certain : $A = \Omega$;

$\succ$ Événement contraire : $\bar{A} = \Omega \backslash A$;

$\succ$ Événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$;

$\succ$ Réalisation simultanée de deux événements : $A \cap B$;

$\succ$ Réalisation d'un événement au moins : $A \cup B$;

$\succ$ Événement $A \backslash B = A \cap \bar{B} = A \backslash (A \cap B)$. Cet événement est caractérisé par la réalisation de A et la non réalisation de B.

On arrive au point essentiel de définir la probabilité d'un événement $A(A \subset \Omega)$, qui doit mesurer la chance que l'événement A à de se réaliser lors qu'on effectue une expérience.

1.3.3 Tribus

Définition 1.3.4. Tribus. Soient Ω un ensemble et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle tribu de Ω un sous-ensemble

$$T \subset \mathscr{P}(\Omega)$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\Omega \in T$,
2. $\emptyset \in T$,
3. $A \in T \Rightarrow \bar{A} \in T$, ($\bar{A}$ est le complémentaire de A)
4. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T \Rightarrow \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n \in T$.

Les éléments d'une tribu T de Ω sont donc des sous-ensembles de E. La troisième condition précise que si un sous-ensemble est dans la tribu T, son complémentaire également. Un cas particulier de la condition (4) est de dire que si deux sous-ensembles A et B sont dans la tribu T, alors leur réunion $A \cup B$ est aussi dans T.

Exemple 1.3.4.
$\succ$ *Soit Ω un ensemble. Alors $T = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.*
$\succ$ *Soit Ω un ensemble. Alors $T = \{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu de Ω. C'est la plus petite tribu que l'on puisse construire sur Ω. Elle est souvent appelée la tribu triviale.*

$\succ$ *Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Considérons le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$*

$$T = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Alors T vérifie les conditions pour être une tribu de Ω.

1.3.4 Espaces probabilisables

Définition 1.3.5. Un espace probabilisable est un couple (Ω, T) où Ω est un ensemble, T une tribu sur Ω.

Exemple 1.3.5. *L'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.*

Vocabulaire

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Alors

$\succ$ Ω est appelé l'espace des épreuves.

$\succ$ Les éléments de la tribu T sont les événements.

$\succ$ Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé résultat. Si $\omega \in \Omega$ est un élément d'un événement $A \in T$, on dit que ω réalise A .

Dans le tableau suivant, on cite quelques exemples de vocabulaire analogues passant de la théorie des ensembles à la théorie de probabilité.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	espace des épreuves (événement certain)
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Exemple 1.3.6. *Considérons l'ensemble à deux éléments*

$$\Omega = \{p, f\}$$

Cet espace des épreuves peut, par exemple, correspondre aux résultats d'un lancer d'une pièce de monnaie. Prenons

$$T = \mathscr{P}(\Omega) = \{\{p, f\}, \emptyset, \{p\}, \{f\}\}.$$

Considérons le résultat p. Alors les événements suivants sont réalisés :

$$\Omega, \{p\}$$

Notons que l'événement est toujours réalisé, quel que soit le résultat $\omega \in \Omega$.

1.3.5 Définition et propriétés d'une Probabilité

Définition 1.3.6. Soit (Ω, T) un espace probabilisable. Une application

$$P : T \mapsto [0, 1]$$

est appelée une probabilité sur cet espace si

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $0 \leq P(A) \leq 1$, pour tout événement $A \subset \Omega$
3. Pour tout familles fini ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux-à-deux disjoints (incompatibles) ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) on a :

$$P\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \sum_{i\in I} P\left(A_i\right)$$

Propriétés 1.3.1. Soit P une probabilité sur l'espace (Ω, T). Alors

1. $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. Pour tout $A \in T, P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$
4. Pour tout $A \in T, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. Pour tout $A, B \in T, P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$,
6. Pour tout $A, B \in T$, si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$;
7. Si $A, B \in T$ sont deux événements pas nécessairement incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

On peut préciser le calcul de probabilités d'un événement quelconque A. Dans le cas équiprobable de manière simplifiée, la probabilité théorique vaut

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Exemple 1.3.7. *Soit $\Omega = \{p, f\}$. On considère la tribu $T = \mathscr{P}(\Omega)$. L'application*

$$T \mapsto [0, 1]$$

définie par

$$P(\{p\}) = \frac{1}{2} = P(\{f\}), P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

est une probabilité sur cet espace.

Exemple 1.3.8. *Soit $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$. On considère la tribu $T = \mathscr{P}(\Omega)$. L'application P définie à partir de*

$$P(\{pp\}) = P(\{pf\}) = P(\{fp\}) = P(\{ff\}) = \frac{1}{4}$$

s'étend en une probabilité. Ceci signifie qu'il existe une unique loi de probabilité sur(Ω, T) *dont la restriction aux événements élémentaires est donnée par les égalités ci-dessus. En particulier si $A = \{pp, pf, fp\}$ qui correspond à l'événement d'avoir au moins pile dans deux lancers d'une pièce, alors $P(A) = \frac{3}{4}$.*

Définition 1.3.7. Soit Ω un ensemble et T un tribu sur Ω.
On appelle espace probabilisé un triplet (Ω, T, P) où (Ω, T) est un espace probabilisable et P une probabilité sur (Ω, T).

Définition 1.3.8. (Evénements négligeables.) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Un événement $A \in T$ est dit négligeable si sa probabilité est nulle :

$$P(A) = 0.$$

1.3.6 Équiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque Ω est fini, de cardinal n, et tous les événements simples sont de même probabilité c'est à dire elles ont la même chance de se réaliser (équiprobables). Dans ce cas :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}, \forall \omega \in \Omega$$

où $\text{Card}(\Omega)$ est le nombre d'élément de Ω. La probabilité P sur Ω est dite uniforme. Si les événements simples sont équiprobables, la probabilité de tout événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Attention! Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables. Dans ce cas, il suffit de savoir calculer le cardinal des ensembles considérés pour calculer les probabilités.

Remarque 1.3.1. On est maintenant en mesure de modéliser des expériences aléatoires simples, c'est-à-dire :
- choisir Ω,
- choisir une probabilité sur Ω, en justifiant ce choix.

Attention, pour décrire une probabilité, il faut donner P(A) pour tout $A \subset \Omega$,. Ou alors, on peut plus simplement donner $P(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le lecteur déduira $P(A)$ pour tout A d'après la définition d'une probabilité.

3.3.7 Indépendance

Définition 1.3.9. (Événements indépendants.) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Deux événement $A, B \in T$ sont dits indépendants si la réalisation de A n'affecte pas la réalisation de B, et inversement. Autrement dit, A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Cette notion d'indépendance est fondamentale pour la suite. Elle ne concerne que deux événements. Pour trois (ou plus) événements, nous avons la définition suivante

Définition 1.3.10. Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Un ensemble d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n \in T$ est dit totalement indépendant si pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P\left(A_i\right),$$

Les événements sont deux à deux indépendants si pour tous indices $i, j (i \neq j)$,

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P\left(A_i\right) P\left(A_j\right)$$

Exemple 1.3.9. *On considère l'expérience relative à un lancer de deux dés équilibrés. On a alors*

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \cdots, (1,6), (2,1), (2,2), \cdots, (2,6), (6,1), \cdots, (6,6)\}$$

Cet ensemble fini contient donc $6 \times 6 = 36$ *éléments. On considère les événements*

$A = \{$ *la somme des dés vaut 7*$\}$
$B = \{$ *le premier dé affiche 4*$\}$
$C = \{$ *le second dé affiche 3*$\}$
Calculer $P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$ *et* $P(A \mid B \cap C)$.

Propriétés 1.3.2. Si A et B sont des événements indépendants, alors :
$\succ$ A et $\bar{B}$ sont des événements indépendants;
$\succ$ $\bar{A}$ et B sont des événements indépendants;
$\succ$ $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont des événements indépendants.

Exemple 1.3.10. *Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 . On en tire une hasard, et on considère les événements*

A=*"tirage d'un nombre pair",*
B = *"tirage d'un multiple de 3 ".*
Les événements A et B sont-ils indépendants?

1.3.7 Probabilités conditionnelles

Définition 1.3.11. (Probabilités conditionnelles) Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $A, B \in T$ deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B le rapport

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

il est noté aussi par $P_B(A)$.

Il est clair que la probabilité conditionnelle de A sachant l'événement total Ω est égal à $P(A)$. De même si B est un événement tel que $B \subset A$, alors $A \cap B = B$ et $P(A \mid B) = 1$.

Remarque 1.3.2. Si A et B sont tels que $P(A) > 0, P(B) > 0$ on peut écrire :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

De même :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

$\succ$ A : l'événement dont on cherche à prévoir la probabilité.
$\succ$ B : l'élément additionnel qui aide à prévoir la probabilité de A.
$\succ$ $P(A)$: c'est la probabilité à priori.
$\succ$ $P(A \mid B)$: probabilité à posteriori de A contenu de B.
$\succ$ $P(B)$: à calculer par la formule des probabilités totale.
$\succ$ $P(B \mid A)$: fiabilité informationnelle de B par rapport à A.

Exemple 1.3.11. *On tire au hasard une carte parmi 10 (numérotées de 1 à 10).*

soit S l'événement "le numéro tiré est multiple de 3 à condition qu'il soit supérieur ou égal à 7"

Exemple 1.3.12. *Une urne contient 10 boules noires et 15 boules blanches. On effectue deux tirages successifs sans remettre la première boule tirée dans l'urne (tirage sans remise). Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage?*

On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 25$

$\succ$ *A : l'événement " Obtenir une boule noire au premier tirage "*

$$\mathrm{Card}(A) = 10 \text{ et } P(A) = \frac{10}{25}$$

$\succ$ B : *l'événement " Obtenir une boule blanche au deuxième tirage "*

$$\mathrm{Card}(B) = 15 \text{ et } P(B \mid A) = \frac{15}{24}$$

$\succ$ *C : l'événement " Obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage "*

$$C = A \cap B \Longrightarrow P(C) = P(A \cap B)$$
$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A) = \frac{15}{24}\frac{10}{25} = \frac{1}{4}$$

Remarque 1.3.3. 1. L'événement contraire de $A \mid B$ est $\bar{A} \mid B$.

2. Cas particulier si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(A \cap B) = P(A)$ d'où

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Proposition 1.3.1. (Formule des probabilités totales généralisée) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

La formule des probabilités totales permet de suivre les étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique. Nous allons maintenant voir une formule à remonter le temps...

Théorème 1.3.1. (Le théorème de Bayes.)
Soient $(\Omega, T, \mathscr{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in T$ deux événement tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

On remarque que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})$, (autrement dit, on uilise la formule des probabilités totales généralisée) ainsi

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})}$$

La formule de Bayes se généralise de la façon suivante

Théorème 1.3.2. (Le théorème de Bayes généralisé.)
Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une partition de Ω telle que chaque $A_i \in T, i = 1, \cdots, k$, et $P(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement B de T on a :

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum\limits_{j=1} P(B \mid A_j) P(A_j)}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k$$

Exemple 1.3.13. *Soient deux cages remplies de lapins. La première C_1 contient dix 10 lapins gris et trente 30 blancs; la seconde C_2 contient vingt 20 de chaque. On tire sans préférence particulière une des deux cages au hasard et dans cette cage, on tire un lapin au hasard. Le lapin est blanc. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré ce lapin de la première cage?*

Soit C_1 l'événement " On tire dans la première cage" et C_2 l"événement " On tire dans la seconde cage".
Comme on tire sans préférence particulière : $P(C_1) = P(C_2)$ de plus $P(C_1) = P(C_2) = 1/2$.
Notons B l'information donnée " On tire un lapin blanc " . On a

- *la probabilité de B sachant C_1 vaut :*

$$P(B|C_1) = \frac{P(B \cap C_1)}{P(C_1)} = 30/40 = 0.75$$

- *la probabilité de B sachant C_2 vaut :*

$$P(B|C_2) = \frac{P(B \cap C_2)}{P(C_2)} = 20/40 = 0.5$$

On veut calculer la probabilité de C_1 sachant B. La formule de Bayes nous donne donc,

$$P(C_1|B) = \frac{P(B|C_1)P(C_1)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2)} = 0.6$$

Exemple 1.3.14. *Chez une banque 20% des employés ont un diplôme en Finance; parmi ceux-si ; 70% ont des postes de cadre. Toute fois, parmi ceux qui n'ont pas de diplôme en finance; 15% occupent un poste de cadre. Si un cadre de cette banque est sélectionné au hasard; quelle est la probabilité qu'il soit un diplômé de finance?*

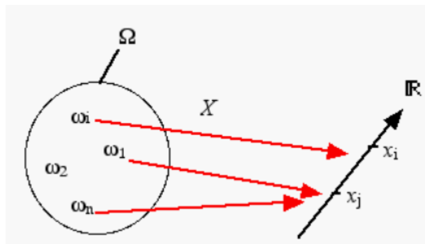
1.4 Variables aléatoires

Ce chapitre est consacré à l'introduction de la notion de variable aléatoire réelle. Il s'agit d'introduire une autre manière de coder ou quantifier les événements. Cela permettra de changer la terminologie ensembliste des événement en une autre. Nous étudions principalement les variables aléatoires réelles discrètes et continues. Nous présentons également les principales lois de probabilités usuelles discrètes et continues. Nous travaillons toujours dans un espace probabilisé $(\Omega; T; P)$, modélisant le phénomène aléatoire étudié.

Définition 1.4.1. Variable aléatoire::
Étant donné un univers Ω, Une variable aléatoire (v.a) X est une grandeur numérique

représentant le résultat d'une expérience aléatoire. On peut donc considérer X comme une application de Ω dans $\mathbb{R}$

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \to & X(\omega) \end{array}$$



A chaque évènement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X. Comme l'indique le graphe, il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire X que d'évènements élémentaires. La valeur x correspond à la réalisation de la variable X pour l'évènement élémentaire ω.

Exemple 1.4.1. *Si l'on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitué des évènements élèmentaires suivant :* $\Omega = \{GG; GF; FF\}$.
Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire

$$X = \text{" nombres de fille dans la famille "}$$

sont : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

Exemple 1.4.2. *L'expérience consiste à jeter trois pièces de monnaie simultanément.*

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

Soit $X =$ *" nombre de faces obtenues ", dans ce cas :* $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Exemple 1.4.3. *On lance un dé. On appelle X le numéro obtenu et Y son complément à 6.*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$Y(\omega)$	5	4	3	2	1	0
$Z = \sup(X, Y)$	5	4	3	4	5	6

Propriétés 1.4.1. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, X - Y, \lambda X, XY, \sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires sur Ω.

1.5 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

1.5.1 Loi de probabilité

Définition 1.5.1. Loi de probabilité
Soit Ω un univers muni d'une probabilité P, et soit X une v.a On appelle loi de probabilité de X, notée P_X, l'application qui à toute partie A de ℝ associe

$$P_X(A) = P(\{w \in \Omega : X(w) \in A\})$$

Remarque 1.5.1. Dans la suite, on peut utiliser la notation abrégée :
$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$. De même, on notera $P(X = x)$ la probabilité $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$.

Proposition 1.5.1. L'application P_X définit une probabilité sur ℝ.

1.5.2 Etablir une loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues est un ensemble de nombres $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ces nombres sont les valeurs possibles d'une variable aléatoire X. Soit p_i, la probabilité de l'issue x_i.

Établir la loi de probabilité de X, c'est attribuer à chacun des nombres x_i la probabilité p_i. Cette loi est représentée sous forme d'un tableau :

Valeur possible	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
Probabilité	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

Remarque 1.5.2. $\succ$ Pour établir une loi de probabilité, on commence par déterminer correctement toutes les valeurs possibles, puis on calcule pour chaque valeur sa probabilité.

$\succ$ On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Exemple 1.5.1. *On tire une carte d'un jeu de 32. L'as de cœur rapporte* 10$, *un roi, une dame ou un valet rapporte* 5$, *un dix* 1$ *et les autres cartes ne rapportent rien. On appelle X les gains possibles. On a* $X(\Omega) = \{0, 1, 5, 10\}$

Gain possible	*10*	*5*	*1*	*0*	
Probabilité	$\frac{1}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{15}{32}$	*1*

1.5.3 Fonction de répartition

Définition 1.5.2. Fonction de répartition. On appelle fonction de répartition d'une v.a X, la fonction réelle F définie par :

$$\begin{aligned} F :&\mathbb{R} \to [0,1] \\ &x \to F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Propriétés 1.5.1. Soit F la fonction de répartition de la v.a. X, on a

$\succ$ $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1$,

$\succ$ F est croissante,

$\succ$ F est continue à droite : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

$\succ$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Réciproquement, toute fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les 4 propriétés ci-dessus est une fonction de répartition d'une v.a réelle.

$\succ$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$\succ$ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X > a) = 1 - F(a)$

1.5.4 Différents types de variables aléatoires

On distingue deux types de v.a, discrète et continue.

$\succ$ $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est fini ou dénombrable, on dit que X est une v.a discrète, c'est à dire, X ne prend que des valeurs numériques isolées.

$\succ$ $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ tout en entier, on dit que X est une v.a continue.

1.5.5 Variable aléatoire discrète

Définition 1.5.3. Variable aléatoire discrète. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire discrète, une application X, de Ω dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, ensemble fini ou dénombrable :

$$\begin{aligned} X : &\Omega \to X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \\ &\omega \to X(\omega) \end{aligned}$$

$X(\Omega)$ est appelé ensemble des observables.

Exemple 1.5.2. $\succ$ *On jette deux fois un dé; on s'intéresse à la somme des numéros obtenus.*

$\succ$ *On s'intéresse au nombre de lancers d'une pièces pour obtenir "pile".*

1.5.6 Loi de probabilité

Définition 1.5.4. Loi de probabilité. La loi de probabilité (ou distribution) de la v.a. discrète X est la fonction :

$$P : X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \to [0,1]$$
$$x_i \to P(X = x_i)$$

On note généralement $P(X = x_i) = p_i$, et on a

1. Si X une v.a discrète finie, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La loi de la v.a X est définie par :

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \ldots, p_n = P(X = x_n) \text{ où } 0 \leq p_k \leq 1 \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

où

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \text{ et } P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x), \forall A \subset X(\Omega)$$

2. Si X est une v.a discrète infinie, sa loi de probabilité est définie par la suite infinie :

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \ldots, p_n = P(X = x_n), \ldots$$

où $0 \leq p_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple 1.5.3. *On lance un dé. On appelle X le numéro obtenu et Y son complément à 6 et $Z = \sup(X, Y)$.*

1. *Déterminer les ensemble des observables de X, Y et Z.*
2. *Déterminer les lois des v.a X et Y et Z.*

Théorème 1.5.1. La donnée des couples $\{(x_i, P_i) / 1 \leq i \leq n\}$ est la loi de probabilité d'une v.a

si et seulement si $\begin{cases} 0 \leq P_i \leq 1 \text{ pout tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \end{cases}$

où P_i désigne $P(\{X = x_i\})$

Remarque 1.5.3. La loi de probabilité d'une v.a discrète X est entièrement déterminée par :

$$X(\Omega) \text{ et } \{P(X = x_i), \quad x_i \in X(\Omega)\}$$

Exemple 1.5.4. *On lance successivement 2 fois une pièce de monnaie. Soit la v.a.d X représentant le nombre de faces obtenues après ces 2 lancements.*

1. *Donner les valeurs de X.*

2. *Définir la loi de probabilité de X.*

1.5.7 Fonction de répartition

Définition 1.5.5. Fonction de répartition. On appelle fonction de répartition de la v.a. discrète X, la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} = &\rightarrow [0,1] \\ x &\rightarrow F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$F(x) = \sum_{x_i \in X(\Omega), x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Propriétés 1.5.2. Soit X une v.a finie de fonction de répartition F et de loi $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ $.X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $, (x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$, alors
(i) $\forall x \in]-\infty, x_1[, F(x) = 0$
(ii) $\forall x \in [x_k, x_{k+1}[, F(x) = p_1 + \ldots + p_k, \qquad 1 \leq k \leq n-1$
(iii) $\forall x \in [x_n, +\infty[, F(x) = 1$
(iv) $p_k = P\left(X = x_k\right) = F\left(x_k\right) - F\left(x_{k-1}\right)$

Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une v.a. d à partir de sa fonction de répartition en utilisant la propriété (iv).

Exemple 1.5.5. *On lance successivement 2 fois une pièce de monnaie. Soit la v.a.d X représentant le nombre de faces obtenues après ces 2 lancements. Déterminer la fonction de répartition de X.*

Exemple 1.5.6. *Soit la v.a.d X définie par $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.*

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{2}, p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{3}, p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Donner la fonction de répartition de X

1.5.8 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. En particulier, dans le cas où la variable aléatoire peut prendre toute valeur réelle (son ensemble de définition contient un intervalle de $\mathbb{R}$), on parle de variable aléatoire réelle.

Dans ce cas, il ne s'agira plus de calculer une probabilité d'apparition d'une valeur donnée mais d'un intervalle. Quelques exemples :

$\succ$ temps d'attente pour avoir le bus : $X(\omega) \in [0, 30]$

$\succ$ longueur de cheveux : $X(\omega) \in [0, 4]$

$\succ$ intervalle entre deux averses : $X(\omega) \in [1, 20]$

$\succ$ moyenne des tailles de 20 étudiants pris au hasard : $X(\omega) \in [1.5, 1.9]$

1.5.9 Définition d'une variable aléatoire continue

Définition 1.5.6. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue réelle, $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ et P une probabilité sur Ω

$\succ$ En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement

$$\{X = a\}$$

est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

$\succ$ On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que

$$P(a \leq X \leq b)$$

$\succ$ Lorsque cet intervalle tend vers 0 , la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité ou densité de probabilité.

1.5.10 Densité de probabilité

Définition 1.5.7. Densité de probabilité.

On appelle densité de probabilité toute application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

telle que

$\succ$ $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\succ$ f est continue sauf en un nombre fini de points.

$\succ$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies.

Réciproquement :

Définition 1.5.8. Variable aléatoire continue. Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire absolument continue (ou de loi continue) s'il existe une fonction de densité f tel que : pour tout $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 1.5.7. *Soit f la fonction définit par*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) := \begin{cases} \cos(x), & si \;\; x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & si \; non \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que f est une densité de probabilité

$\succ$ *Soit*

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bien une densité?

1.5.11 Fonction de répartition

De même que les variables aléatoires discrètes, on définit la fonction de répartition de X par :

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

La relation entre la fonction de répartition F et la fonction densité de probabilité f est la suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

La fonction de répartition F est la primitive de la fonction densité de probabilité f, et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X.

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Propriétés 1.5.3. Soient X une v.a de densité f et F sa fonction de répartition. Alors :

$\succ$ F est continue sur $\mathbb{R}$.

$\succ$ F est dérivable en tout point x_0 où f est continue et on a $F'(x_0) = f(x_0)$.

$\succ$ F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
$\succ$ F_X est à valeurs dans $[0,1]$
$\succ$ $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$

Exemple 1.5.8. $\succ$ *Soit*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) := \begin{cases} \cos(x), & si \;\; x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & si \; non \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition F :
$\succ$ *Soit*

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

Déterminer la fonction de répartition F.

1.5.12 Loi d'une v.a.c

Définition 1.5.9. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathscr{E}$ une v.a. On appelle loi de X sous P la probabilité image de P par X.

Propriétés 1.5.4. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et de fonction de répartition F, alors :

$\succ$ $P(X \le a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt.$

$\succ$ $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

$\succ$ $P(X > a) = P(X \ge a) = 1 - F(a), \forall a \in \mathbb{R}.$

$\succ$ $P(X = a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

$\succ$ $P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$

1.5.13 Quelques caractéristiques d'une variable aléatoire

Espérance mathématique

Soit une v.a discrète prenant ses valeurs dans $\{x_1, ..., x_n\}$ et dont les probabilités $P(X = x_i) = p_i$. On définit l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$ par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Cette quantité n'est définie que si la série de terme général $[p_i x_i]$ converge.
C'est la moyenne théorique de X. Cette moyenne est à rapprocher de la moyenne expérimentale où chaque événement $X = x_i$ se réalise n_i fois dans un échantillon de taille $N = \sum_i n_i$. La moyenne expérimentale vaut $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i = \sum_i f_i x_i$, où $f_i = \frac{n_i}{N}$ est la fréquence observée dans chaque classe d'événement $X = x_i$.
L'espérance est défini pour une variable aléatoire continue de densité f par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

De façon générale, pour Y une fonction de X, on a

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \quad \text{ou} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) f(x) dx$$

Par exemple, pour $Y = X^2$, on a
$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \quad$ ou $\quad E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

Propriétés 1.5.5. (Espérance d'une constante). $E(a) = a$.
En effet

$$E(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} a f(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \times 1 = a.$$

On peut en déduire que $E[E(X)] = E(X)$, puisque $E(X)$ n'est pas une variable aléatoire mais plutôt une constante.
Caractéristique (opérateur linéaire). $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. De manière générale,

$$E\left(\sum_i a_i X_i + b\right) = \left(\sum_i a_i E\left(X_i\right)\right) + b$$

1.5.14 Paramètres de dispersion

On commence par définir l'ingrédient de base de ce type de paramètres à savoir :

Moments

- Un moment non-centré d'ordre r est défini de la manière suivante :

$$m_r(X) = E\left(X^r\right)$$

Application : pour une v.a. (variable aléatoire) discrète,

$$m_r(X) = \sum_i p_i x_i^r,$$

où $p_i = P(X = x_i)$ et pour une v.a. continue,

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx.$$

Remarque 1.5.4. (Moments non-centrés empiriques, statistique descriptive). Rappelons qu'en statistique descriptive, ce moment non-centré, pour une v.a. discrète par exemple, est obtenue avec la formule $m_r = \sum_i f_i x_i^r$, où f_i est la fréquence observée de la valeur x_i.

(Cas particuliers).

pour r = 0, on a $m_0(X) = 1$

pour r = 1 on a $m_1(X) = E(X)$: espérance mathématique;

- Un moment centré d'ordre r est défini de la manière suivante :

$$\mu_r(X) = E\left[(X - E(X))^r\right]$$

Soit pour une v.a. discrète :

$$\mu_r(X) = \sum_i (x_i - E(X))^r p_i$$

et pour une v.a. continue :

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f(x)dx$$

Remarque 1.5.5. En statistique descriptive, pour une variable discrète, le moment centré d'ordre r est obtenu avec $\mu_r = \sum_{i=0}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r$ Remarque (Cas particuliers).

$(r = 0) \quad \mu_0(X) = E\left[(X - E(X))^0\right] = E(1) = 1$

$(r = 1) \quad \mu_1(X) = E[(X - E(X))] = E(X) - E[E(X)] = E(X) - E(X) = 0$

$(r = 2) \quad \mu_2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = V(X)$ (c'est la variance de X vu prochainment) .

Variance

Définition 1.5.10. On appelle variance de X, noté $V(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X (s'il existe).

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right).$$

La variance mesure la dispersion autour de la moyenne. L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 1.5.6. (Formule de Koenig). Il est possible d'exprimer la variance à partir des moments non centrés.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[(X-E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] \\
&= E(X^2) + E(X)^2 - 2E[XE(X)] \\
&= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)E(X) \\
&= E(X^2) - E(X)^2 \\
V(X) &= m_2(X) - m_1(X)^2
\end{aligned}$$

1.5.15 Exemples de lois de probabilités discrètes

3.8. 1 Loi uniforme

Définition 1.5.11. Loi uniforme. La v.a X suit la loi uniforme sur $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si :

$\succ$ $X(\Omega) = S$.

$\succ$ $P(\{X = x_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(S)}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$

On écrira :

$$X \sim \mathscr{U}_{\{x_1, \ldots, x_n\}}$$

On a alors

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et } V(X) = \frac{1}{n}\sum^{n}(x_i - E(X))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - [E(X)]^2$$

Exemple 1.5.9. *On jette un dé bien équilibré, on considère la v.a.d X définie par $X =$ le point marqué par le dé.*

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}, \quad X(\Omega) = \{1, \ldots, 6\} = S,$$

si $k \in S$,

$$P(\{k\}) = P(X = k) = \frac{1}{6} = \frac{1}{\mathrm{Card}(S)}$$

1.5.16 Loi Bernoulli

Soit une expérience à deux issues, succès et échec (ou vrai et faux) par exemple. Soit la v.a X :

$$\begin{cases} X = 0 \text{ si le résultat est un échec} \\ X = 1 \text{ si le résultat est un succès} \end{cases}$$

La loi de probabilité de la v.a X est : $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p, (0 < p < 1)$. p est la probabilité du succès.

Définition 1.5.12. Loi Bernoulli. X est une v.a qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(0 \leq p \leq 1)$ si :

1. $X(\Omega)=\{0,1\}$.
2. $P(\{1\})=P(X=1)=p, P(\{0\})=P(X=0)=1-p$.

On écrira :

$$X \sim \mathscr{B}(p)$$

L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X)=p, V(X)=p(1-p)$$

Exemple 1.5.10. *On jette une fois une pièce de monaie dont la probabilité d'avoir pile est p $(0 \leq p \leq 1)$, on considère la v.a X définie par :*

$$X(\omega)=\begin{cases} 1, & \textit{si la pièce fait pile} \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

comme $\Omega=\{\pi, F\}, \pi$: pile, F : face.
Si $\omega \in \{\pi, F\}$ alors

$$P(\{\omega\})=\begin{cases} P(X=1)=p, & si\ \omega=\pi \\ P(X=0)=1-p, & si\ \omega=F \end{cases}$$

1.5.17 Loi Binomiale

Soit une expérience à deux issues, succès ou échec (ou vrai et faux) par exemple, on répète cette expérience dans les mêmes conditions n fois. On note X_k la $k^{\text{ème}}$ observations

$$X_k=\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si le résultat est un échec} \\ 1 \text{ si le résultat est un succès} \end{array}\right.$$

et p la probabilité du succès.

Les v.a $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a de Bernoulli de paramètre p indépendantes. soit $X=X_1+\cdots+X_n$ le nombre de succès obtenu en n expériences indépendantes. Cherchons la loi de X c'est à dire calculons $P(X=k)$

$\succ$ Si $k>n$ il est clair qu'il n'y a pas de solution et que la probabilité est nulle.

≻ Si $k \leq n$, on cherche tout les n-uplets comportant k "un" et $n-k$ "zéro". Il y en a C_n^k. A cause de l'indépendance, chacune de ces n-uplets a une probabilité égale à $p^k(1-p)^{n-k}$. au totale nous obtenons :

$$P(X=k) = \mathscr{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Définition 1.5.13. Loi Binomiale. On dit qu'une v.a.d X suit une loi Binomiale de paramètres n, p $\quad (0 \leq p \leq 1)$ si :

≻ $X(\Omega) = S = \{0, 1, \ldots, n\}$.

≻ $\forall k \in S \quad P_X(\{k\}) = P(X=k) = \mathscr{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On note : $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

On peut écrire $X = X_1 + ... + X_n$
où $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes ayant la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_1) = np$$
$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_1) = np(1-p)$$

car $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Propriétés 1.5.6. Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes suivant respectivement les lois binomiales $\mathscr{B}(n_1, p)$ et $\mathscr{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

Exemple 1.5.11. *On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 . On appelle événement E l'obtention sur la face le numéro 3 ou 6.*

1. *On lance le dé, quelle est la probabilité de l'événement E ?*

2. *On lance le dé, 8100 fois, calculer la moyenne et l'écart-type du nombre d'arrivées de l'événement E.*

3. *On considère l'épreuve à deux issues*

≻ *"succès" si E se produit c'est à dire on obtient 3 ou 6 .*

≻ *"échec" si E ne se produit pas c'est à dire on n'obtient ni 3 ni 6 .*

Donc $P(E) = 1/3 = p$

2. *On répète l'épreuve 8100 fois. Soit la v.a, X = "nombre d'arrivées de E ou nombre de succès ou nombre d'apparitions de 3 et* 6".

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8100, 1/3)$. Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 8100$, on a

$$P(X = k) = C_n^k (1/3)^k (2/3)^{n-k},$$

avec

$$E(X) = 8100 \times \frac{1}{3} = 2700, V(X) = 8100 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1800$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

1.5.18 Loi géométrique

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $P(X = k) = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$.

Caractéristiques :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Remarque 1.5.7. Loi de Pascal d'ordre r : C'est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer exactement r fois un événement de probabilité p. Cette loi est la somme de r lois géométriques indépendantes. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Pascal de paramètres r et p, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$ si :

1. $X(\Omega) = \{r, r + 1, \cdots\}$
2. $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$ où $q = 1 - p$.

Caractéristiques : X admet alors une espérance et une variance :

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

1.5.19 Loi de poisson

La loi de poisson est une loi de probabilité qui s'applique aux événements rares, elle décrit aussi le nombre d'apparitions d'un événement pendant une duré de temps déterminée. Le nombre aléatoire X de ces événements suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ qui représente la moyenne d'événements survenus.

Donc si $X \sim \mathscr{B}(n, p), np = \lambda$ (n est grand et p est petit), alors $\mathscr{P}(X = k) \simeq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, on obtient ainsi une nouvelle loi.

Définition 1.5.14. Loi de poisson.

On dit que la v.a X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

$\succ$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\succ$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp^{-\lambda}}{k!} \forall k \in \mathbb{N}$$

On note

$$X \sim \mathscr{P}(\lambda)$$

L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k \exp[-\lambda]}{k!} = \lambda \quad \text{car} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp[\lambda]$$
$$V(X) = \lambda$$

Propriétés 1.5.7. Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes suivant respectivement les lois de poisson $\mathscr{P}(\lambda_1)$ et $\mathscr{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi de poisson $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exemple 1.5.12. *Une machine utilisée dans une chaîne de production tombe en panne en moyenne 2 fois par mois. Soit X le nombre de pannes par mois.*

1. *Quelle est la probabilité que dans un mois donnée la machine ne tombe pas en panne?*

2. *Quelle est la probabilité que dans un mois donnée la machine tombe en panne au moins deux fois?*

X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 2, X \approx \mathscr{P}(2), P(X = k) = \frac{2^k \exp[-2]}{k!}$.

1. *La machine ne tombe pas en panne donc $k = 0$ et la probabilité est* $P(X = 0) = \frac{2^0 \exp[-2]}{0!} = \exp[-2] = 0.135$.

2. *La machine tombe en panne au moins deux fois donc $k \geq 2$ et la probabilité est :* $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\frac{2^0 \exp[-2]}{0!} + \frac{2^1 \exp[-2]}{1!}\right) = 1 - (\exp[-2] + 2 \times \exp[-2]) = 1 - 0.405 = 0.595$.

Théorème 1.5.2. Soient $X_1, , X_n$ n v.a de Bernoulli indépendantes de paramètre p_n. Soit $S_n = X_1 + ... + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p_n), $(S_n, B(n, p_n))$. Si $n \to +\infty$, $p_n \to 0$ et $np_n \to \lambda > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Pour n assez grand et p_n assez petit $P(S_n = k)$ est approchée par $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ avec $\lambda = np_n$. En pratique, on a :
La loi $B(n,p)$ peut être approchée par la loi de poisson $P(np)$ si $n > 30, p \leq 0.1$, $np < 15$

1.5.20 Tableaux des lois de probabilités discrètes

Loi	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Uniforme	$P(X = k) = \frac{1}{n}, k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
bernoulli	$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $\lambda \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$	λ	λ

1.5.21 Exemples de lois de probabilités continues

1.5.22 Loi uniforme

Définition 1.5.15. Loi uniforme. Une v.a X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si elle admet pour densité la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta-\alpha)} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on écrit $X \sim \mathscr{U}([\alpha, \beta])$, sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x \geq \beta \end{cases}$$

L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = \frac{\beta + \alpha}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

1.5.23 Loi exponentielle

On souhaite modéliser l'intervalle de temps séparant deux occurrences successives d'un processus de Poisson. Ainsi la probabilité qu'il n'y ait aucune occurrence dans un intervalle de temps de longueur t est égale à $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ (absence de mémoire de la loi exponentielle) où $\lambda > 0$ constituera le paramètre de la loi. Cette loi permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique.

Définition 1.5.16. Loi exponentielle. Une v.a X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, et sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'espérance et la variance de X sont : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

La loi exponentielle sert de modèle dans les problèmes de files d'attentes et de durée de vie.

1.5.24 Loi Normale ou Gaussienne

la loi normale arrive naturellement quand on regarde la distribution "limite" du résultat d'un grand nombre d'expériences identiques réalisées de manière indépendante. C'est pourquoi la loi normale est la loi des phénomènes naturels, ce qui est conforté par l'expérience qui montre qu'un grand nombre de grandeurs physiques suivent une loi normale.

Définition 1.5.17. Loi Normale ou Gaussienne. La v.a X suit la loi normale (ou loi de Gauss) d'espérance mathématique m et de variance σ^2, si X peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ et si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

et on écrit $X \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ on l'appelle la loi normale standard ou loi normale centré réduite $X \sim \mathscr{N}(0,1)$ (centré $m = E(X) = 0$, réduite $V(X) = 1$).

Propriétés 1.5.8. Soient $X \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors on a :

- $Y = aX + b \sim \mathscr{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$.
- Si$X \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$ alors Z $= \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathscr{N}(0,1)$.
- Si$Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ alors $X = \sigma Z + m \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.