Séries de Fonctions

Pour tous ce qui suit, D désigne un domaine non vide de $\mathbb{R}$.

1 Convergence simple

Définition 1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur D. Soit f une fonction réelle définie sur D. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction f, si pour chaque $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge vers le réel $f(x)$.*
On dit dans ce cas que f est la somme sur D de la série de fonctions $\sum f_n$ et on écrit :

$$\forall x \in D,\ f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Exemples 1.2.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.*
   Fixons $x > 0$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+x} > 0$.
   Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est une série alternée.
   Puisque $(\dfrac{1}{n+x})_n$ tend vers 0 en décroissant.
   Alors la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge.
   D'où la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers sa somme.
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.*
   Pour chaque $x \in]1, +\infty[$ la série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge (une série de Riemann).
   Donc la série de fonction $\sum \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.*
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \exp(x)$.
   Donc la série de fonctions $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exp.

Remarque 1.3. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur D. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D vers une fonction f si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sur D vers f.*

2 Convergence absolue

Définition 2.1. *On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge absolument sur D si pour chaque $x \in D$ la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Remarque 2.2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur D si et seulement si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur D.*

Exemple 2.3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $f_n(x) = x^n$.*
$\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n = \dfrac{1}{1-|x|}$.
Donc la série de fonctions $\sum x^n$ converge absolument sur $]-1, 1[$.

Exercice 2.4. *Montrer que la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge absolument sur $]0, +\infty[$.*

Théorème 2.5. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur D, alors elle converge simplement sur D.*

Démonstration.
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions converge absolument sur D.
Alors pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.
Donc pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.
D'où pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
On conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur D. □

Remarque 2.6. *La réciproque du théorème2.5 est fausse. Une série de fonctions peut converger simplement sans qu'elle être absolument convergente.*

Exemple 2.7. *On a vu dans l'exemples1.2 que la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.*
Pour chaque x fixé dans $]0,+\infty[$ on a $\sum |\dfrac{(-1)^n}{n+x}| = \sum \dfrac{1}{n+x}$.
Puisque $\frac{1}{n+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
Alors pour chaque x fixé dans $]0,+\infty[$ la série numérique $\sum |\dfrac{(-1)^n}{n+x}|$ diverge.
On déduit que la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est non absolument convergente.

3 Convergence uniforme

Définition 3.1. *On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge uniformément sur D, si la suite de fonctions $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément sur D.*

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum f_n$ sur le domaine D, il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_n$. On note S la somme, puis on vérifie que le reste $(R_n)_n$ définie sur D par : $\forall x \in D$, $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur D vers 0. i.e

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = 0.$$

Exemple 3.2. *D'après l'exemples1.2, la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers sa somme S définie par : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.*
$\forall x \in]0,+\infty[$, $|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}| \le |\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}| \le \frac{1}{n+1+x} \le \frac{1}{n+1}$ *et on a* $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$.
Alors la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers sa somme S.

Remarque 3.3. *D'après les exemples (2.7) et (3.2) on déduit que la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.*

Théorème 3.4. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D, alors elle converge simplement sur D.*

Proposition 3.5. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge uniformément sur D, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur D.*

Exercice 3.6. *Démontrer cette proposition.*

Proposition 3.7 (Critère de la convergence uniforme pour les séries de fonctions alternées)**.**
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions positives définies sur D. On suppose que

i. *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur D,*

ii. *pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est décroissante, i.e $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément sur D.

Théorème 3.8 (Critère de Cauchy de la convergence uniforme pour les séries de fonctions)**.**
Une série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge uniformément sur D si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : (n > m > N \Longrightarrow \forall x \in D, \quad |\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)| < \epsilon).$$

4 Convergence normale

Définition 4.1. *On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n converge normalement sur D, si la série numérique $\sum \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Exemples 4.2.

1. *Montrons que la série de fonctions $\sum(\frac{\sin nx}{n!})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
   C'est clair que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{\sin nx}{n!}| = \frac{1}{n!}$.
   D'après la règle d'Alembert la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge.
   Donc la série numérique $\sum \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{\sin nx}{n!}|$ converge.
   D'où la série de fonctions $\sum(\frac{\sin nx}{n!})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. $\sum \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{1}{x^2+n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ avec égalité effectivement pour $x = 0$.
   Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{1}{x^2+n^2}| = \frac{1}{n^2}$.
   Puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
   Alors la série numérique $\sum \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{1}{x^2+n^2}|$ converge dans $\mathbb{R}$.
   On conclut que la série de fonctions $\sum \frac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.3. *Pour démontrer la convergence normale d'une série de fonctions $\sum f_n$ sur le domaine D, on majore $|f_n(x)|$, $x \in D$ ou $\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)|$ par un réel positif a_n, indépendant de x, telle que la série numérique à termes positifs $\sum a_n$ converge.*

Théorème 4.4. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors elle converge uniformément sur D.*

Remarque 4.5. *La réciproque du théorème4.4 est fausse.*

Exemple 4.6. *Reprenons l'exemple $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$.*
On a vu dans l'exemple3.2 que cette série de fonctions converge uniformément sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\sup\limits_{x>0}|f_n(x)| = \sup\limits_{x>0}\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{x+n}$.
Faisons x tend vers 0, alors $\sup\limits_{x>0}|f_n(x)| \geq \frac{1}{n}$.
Puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors la série numérique $\sum \sup\limits_{x>0}|f_n(x)|$ l'est aussi.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

Théorème 4.7. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors elle converge absolument sur D.*

En résumé, on a les implications suivantes.

$$\begin{array}{ccccc} & & \sum f_n \text{ C.U} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \sum f_n \text{ C.N} & & & & \sum f_n \text{ C.S} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \sum f_n \text{ C.A} & & \end{array}$$

5 Transmission des propriétés de la régularité

Théorème 5.1 (Double limites)**.**
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur D et $a \in D$. On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n en a.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur D vers sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
Alors
- La série numérique $\sum b_n$ converge,
- La somme S admet une limite en a, de plus $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ i.e $\lim\limits_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n$.

Remarque 5.2. *Le théorème5.1 valable si $a = \pm\infty$, $a = a^+$ et $a = a^-$.*

Exemple 5.3. *On a vu précédemment que la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.*

1. *On a* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}=0.$

   Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}=0.$

2. *Puisque* $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(-1)^n}{x+n}=\dfrac{(-1)^n}{n}.$

   Alors la série numérique $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ *converge, et* $\lim\limits_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\ln 2.$

   Donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[\dfrac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}]=+\infty.$

Exemple 5.4. $\sum_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ *avec* $x\in]0,+\infty[$.
Il s'agit d'une série alternée pour chaque x *dans* $]0,+\infty[$.
Puisque $\dfrac{1}{n^x}$ *tend vers* 0 *en décroissante.*
Alors la série $\sum_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ *converge pour chaque* x *dans* $]0,+\infty[$.
Donc la série de fonctions $\sum_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ *converge simplement sur* $]0,+\infty[$ *vers la fonction* $S: x\longmapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(-1)^n}{n^x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(-1)^n}{e^{x\ln n}}=(-1)^n.$
Or la série $\sum(-1)^n$ *n'est pas convergente.*
Donc la série de fonctions $\sum_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ *ne converge pas uniformément sur* $]0,+\infty[$.

Théorème 5.5 (Convergence uniforme et continuité)**.**
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* D*. On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
- *Chaque fonction* f_n *est continue sur* D*.*
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* D *vers la fonction* $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$*.*

Alors la fonction S *est continue sur* D*.*

Exemple 5.6. $\sum_{n\geq0}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ *avec* $x\in]0,+\infty[$.
On a vu que la série de fonctions $\sum_{n\geq0}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ *converge uniformément sur* $]0,+\infty[$.
Puisque pour chaque n *la fonction* $x\longmapsto\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.
Alors la fonction $x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Théorème 5.7 (Dérivation terme à terme)**.**
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* D*. On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* D *vers la fonction* f*.*
- *Chaque fonction* f_n *est dérivable sur* D*.*
- *La série de fonctions* $\sum f'_n$ *converge uniformément sur tout segment de* D *vers la fonction* g*.*

Alors la fonction f *est dérivable sur* D *et on a* $f'=g$ *i.e* $(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n)'=\sum_{n=0}^{+\infty}f'_n$*.*

Exemple 5.8. *Soit* $a>1$*. Pour* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x\in[a,+\infty[$ *on pose* $f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$*.*
C'est clair que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[a,+\infty[$.
Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$ f_n *est dérivable sur* $[a,+\infty[$*, et on a :* $\forall x\geq a,\quad f'_n(x)=-\dfrac{\ln n}{n^x}$*.*
Donc $\forall x\geq a,\quad |f'_n(x)|=\dfrac{\ln n}{n^x}\leq\dfrac{\ln n}{n^a}$*.*
Donc $\sup\limits_{x\geq a}|f'_n(x)|\leq\dfrac{\ln n}{n^a}$*.*
$\lim n^{\frac{a+1}{2}}\dfrac{\ln n}{n^a}=\lim\dfrac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0\Longrightarrow\dfrac{\ln n}{n^a}=o(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}})$.
Puisque la série numérique $\sum\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ *converge (car* $\frac{a+1}{2}>1$*).*
Alors la série numérique $\sum\dfrac{\ln n}{n^x}$ *converge.*
D'où la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[a,+\infty[$*. Donc converge uniformément.*
On conclut que $\forall x\geq a,\quad (\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x})'=\sum_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{n^x})'=\sum_{n=1}^{+\infty}-\dfrac{\ln n}{n^x}$*.*

Corollaire 5.9 (Généralisation du théorème de dérivation terme à terme).
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* D. *On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* D *vers la fonction* f.
- *Chaque fonction* f_n *est de classe* C^p $(p \in \mathbb{N}^*)$ *sur* D.
- *Pour tout* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ *la série de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* D *vers la fonction* g_k.

Alors la fonction f *est de classe* C^p *sur* D *et pour tout* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ $f^{(k)} = g_k$ *i.e* $(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Exemple 5.10. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [a, +\infty[$ *avec* $a > 1$.

Théorème 5.11 (Convergence uniforme et dérivation).
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *non vide et non réduit à un point. On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *vers la fonction* f.
- *Chaque fonction* f_n *est de classe* C^1 *sur* I.
- *La série de fonctions* $\sum f'_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I.

Alors

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I.
- *La somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^1 *sur* I, *et* $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Corollaire 5.12 (Convergence uniforme et dérivation successive).
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *non vide et non réduit à un point et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Chaque fonction* f_n *est de classe* C^p *sur* I.
- *Pour tout* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, *la série de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ *converge simplement sur* I.
- *La série de fonctions* $\sum f_n^p$ *converge uniformément sur tout segment de* I.

Alors

- *Pour tout* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, *la série de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I.
- *La somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^p *sur* I, *et pour tout* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Théorème 5.13 (Intégration terme à terme sur un segment).
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* $[a, b]$. *On suppose que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers la fonction* f.
- *Chaque fonction* f_n *est continue sur* $[a, b]$.

Alors

- f *est continue sur* $[a, b]$.
- *La série numérique* $\sum(\int_a^b f_n(x)dx)$ *converge.*
- $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ *i.e* $\int_a^b(\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x))dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx)$.

Exemple 5.14. *Pour* $x \in [0, \dfrac{1}{2}]$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$.

C'est clair que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0, \dfrac{1}{2}]$ *vers la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Montrons d'abord que la série $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[0, \dfrac{1}{2}]$.

$\sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |x^n| = \dfrac{1}{2^n}$.

Puisque la série numérique $\sum \dfrac{1}{2^n}$ *converge.*

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[0, \dfrac{1}{2}]$, *donc converge uniformément sur* $[0, \dfrac{1}{2}]$.

Or, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* f_n *est continue sur* $[0, \dfrac{1}{2}]$.

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \quad &\Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \\
&\Longrightarrow \quad [-\ln(1(-x)]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^{\frac{1}{2}} \\
&\Longrightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\Longrightarrow \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$