	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'Éducation **Spécialité : Maths**	**EXAMEN DE MATHEMATIQUES** **(MESURE ET INTEGRATION)**	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **(4 points)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, u)$ un espace mesuré, f une fonction mesurable positive et $t > 0$.

1) Montrer que (inégalité de Markov) $u(f \geq t) \leq \frac{1}{t}\int_\Omega f du.$ (1 pt)
2) Montrer que si $\int_\Omega f du < +\infty$ alors $f < +\infty$ $u - p.p.$ (1 pt)
3) Montrer que $\int_\Omega f du = \int_\Omega g du$ si et seulement si $f = g$ $u - p.p.$ (2 pts)

Exercice 2: (4 points)

Calculer les limites suivantes :

1) $I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty]} 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n d\lambda.$ (1 pt)
2) $I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} d\lambda.$ (1 pt)
3) $I_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n} d\lambda.$ (2 pts)

Exercice 3: (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, u)$ un espace mesuré et $h: \Omega \to [0, +\propto]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$v(A) = \int_A h du$$

1) Montrer que v est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. (1 pt)
2) Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $u(A) = 0$. Montrer que $v(A) = 0$. (1 pt)
3) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que f est v-integrable si et seulement si fh est u-integrable et que dans ce cas on a: (2 pts)

$$\int_\Omega f dv = \int_\Omega fh du$$

Exercice 4: (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = \int_{[0,+\infty]} \frac{\sin^2(x)}{x^2} e^{-xt} d\lambda$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. (2 pts)
2) Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer f' (2 pts)

Exercice 5: (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, u)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions mesurables de Ω à valeurs réelles. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n\in N}$ converge en mesure vers f si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} u(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

1) Montrer que si $\int_\Omega |f_n - f| du$ tend vers 0, alors f_n tend vers f en mesure. (2 pts)
2) Montrer que si f_n tend f vers $u - p.p$, alors f_n tend vers f en mesure. (2 pts)

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	CONTROLE EN MATHEMATIQUES (MESURE ET INTEGRATION)	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

<u>Exercice 1</u> : (3 points : 3× 1)

Pour chaque question, choisissez la bonne réponse

1) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. Alors,
   - f est continue.
   - $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{T};\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
   - $f(A)$ est ouvert.
2) Soient A_n, A et B des parties mesurables d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, u)$. Alors, u vérifie
   - $u(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(A_n)$.
   - $u(B \setminus A) = u(B) - u(A)$.
   - $u(B \cup A) = u(A) + u(B)\ si\ B \subset \bar{A}$.
3) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, u)$. un espace mesuré de mesure σ −finie et $A_n \in \mathcal{T}$ deux à deux disjoints, alors,
   - $u(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(A_n)$.
   - $u(\Omega) < +\infty$.
   - $\exists\, n_0;\ u(A_{n_0}), u(\bar{A}_{n_0}) \in \mathbb{R}^+$.

<u>Exercice 2</u> : (5 points : 5× 1)

Soit u une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$u([0,1]) = 1 \qquad (i)$$
$$u(A + a) = u(A) \quad \forall A \in \mathrm{B}(\mathbb{R})\ et\ a \in \mathbb{R} \qquad (ii)$$

1) Montrer que la mesure de Lebesgue vérifie (i)et (ii).
2) Montrer que $u(\{0\}) = 0$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*\ et\ , m, k \in \mathbb{Z}$ $u\left(\left]\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right]\right) = \frac{m-k}{n}$.
5) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ $u(]a, b]) = b - a$

Exercice 3 : (2 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f' est-elle Borélienne ?

Exercice 4: (3 points : 3× 1)

mesurables.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f\ et\ g$ deux applications de Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que les ensembles suivants

$$A = \{x \in \Omega /\ f(x) < g(x)\}$$

$$B = \{x \in \Omega /\ f(x) = g(x)\}$$

$$et\ C = \{x \in \Omega /\ f(x) \neq g(x)\}$$

sont mesurables.

Exercice 5 : (2 points)

Soient $Y \subset X$ deux ensembles. Soit $T = \{A \subset X\ ;\ A \subsetneq Y\ ou\ A^c \subset Y\}$

Montrer que T est une tribu. sur Y.

Exercice 7: (2 points)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est borélienne étagée, montrer que gof est étagée.

Exercice 8: (3 points)

(1) Soit $f : X \to Y$ une application et A une tribu sur Y . Montrer que $f^{-1}(A)$, inclus dans $P(X)$, est une tribu sur X. On l'appelle tribu image réciproque de A sous f. (1pt)

(2) Soit $f : X \to Y$ une application et F inclus dans $P(Y)$. Montrer que $f^{-1}\left(\sigma(F)\right) = \sigma\left(f^{-1}(F)\right)$.

(2 pts)

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**RATTRAPAGE** **(MESURE ET INTEGRATION)**	Année scolaire : 2022/2023 Durée: deux heures

Exercice 1 **(3 points)**

Soient f et g deux fonctions étagées positives et $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Montrer que $\int_\Omega \alpha f du = \alpha \int_\Omega f du$. (1 pt)
2) Montrer que $\int_\Omega f + g du = \int_\Omega f du + \int_\Omega g du$. (2 pts)

Exercice 2: (4 points)

Calculer les limites suivantes :

1) $I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1+\frac{1}{n}]} \frac{sin(nt)}{nsin(t)} d\lambda(t)$. (2 pts)
2) $I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty]} \frac{4x^3+12}{12x^6+3nx+2} d\lambda(x)$. (2 pts)

Exercice 3: (5 points)

On rappelle que la mesure de comptage est définie sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ par :

$$\begin{cases} u(A) = card(A) \ si \ A \ est \ fini \\ u(A) = +\infty \ si \ A \ est \ infini \end{cases}$$

1) Soit $f \geq 0$. Justifier que $\int_{\mathbb{N}} f du = \sum_{n\geq 0} f(n)$. (1 pt)
2) Soit $(U_{m,n}\ ,\ m,n \geq 0)$ une suite double de réels positifs. On suppose que
   - $U_{m,n} \to V_m$ quand $n \to +\infty$,
   - $U_{m,n} \leq W_m$,
   - et $\sum_{m\geq 0} W_m < +\infty$.

a) Montrer que $\sum_{m\geq 0} U_{m,n} < +\infty$. (1 pt)

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{m\geq 0} U_{m,n} = \sum_{m\geq 0} V_m$. (1 pt)

c) Démontrer que $\sum_{m\geq 0} \sum_{n\geq 0} U_{m,n} = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} U_{m,n}$. (1 pt)

En déduire la valeur de $A = \sum_{m \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^m}$. (1 pt)

Exercice 4: (3 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,t) = e^{-xt}\left(\frac{1-cos^2(x)}{x^2}\right)1_{[0,+\infty[}(x)$$

1) Montrer que pour tout $t > 0$ la fonction $x \rightarrow f(x,t)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (1 pt)
2) Montrer que la fonction F définie par $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$ est dérivable sur $[1, +\infty[$. (1 pt)
3) Exprimer F' à l'aide des fonctions élémentaires. (1 pt)

Exercice 5: (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \int_{[0,+\infty]} \frac{sin(xt)}{t} e^{-t} d\lambda(t)$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. (1 pt)
2) Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer f'. (1 pt)
3) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. (1 pt)

Exercice 6: (2 points)

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante est Borélienne. (2 pts)

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure

المدرسة العليا للأساتذة
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Année scolaire : 2022/2023
Date : 19 – 01 - 2023
Durée: 2h

Licence d'éducation
Spécialité : Mathématiques

EXAMEN FINAL S3
STRUCTURES ALGEBRIQUES
(Session normale)

Exercice 1 **: (8points)**

1- Soit (A, +, .) un anneau : (2pt)

a. Montrer que (A est un corps) $\Leftrightarrow$ (les seuls idéaux de A sont {0} et A) (1pt)

b. Déduire les idéaux de $\mathbb{C}$

2- Soit (A, +, .) un anneau et x et y deux éléments de A:

a. Montrer que $x . A + y . A = \{x . a + y . b \ / \ a , b \in A\}$ est le plus petit idéal de A contenant x et y. (1.5pt)

b. Est-ce que $x . A + y . A = x . A \cup y . A$? justifier votre réponse. Si votre réponse est non, donner le cas où la relation est vérifiée . (1.5pt)

3- Soit l'anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$, donner $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\{0\}$ (2pt)

Exercice 2 **: (6 points)**

Soit le corps ($\mathbb{C}$, +, .) et soient i, j, k trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que :

$$I^2 = j^2 = k^2 = i . j . k = -1$$

1- Montrer que $i.j = -j . i = k$ (1pt)

2- Soit $A = \{a + b. i + c. j + d. k \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ un sous ensemble de $\mathbb{C}$

a. Soit q_1 et q_2 deux éléments de A tels que : $q_1 = 2.i-7$ et $q_2 = 1 + j + 3.k$, montrer que $q_1.q_2 \neq q_2.q_1$

(1pt)

b. Montrer que A est un ~~groupe~~ Anneau non commutatif, (on admet l'associativité pour la loi additive et la loi multiplicative) (1.5pt)

3- Soit $B = \{q \in A \,/\, \| q \| = 1\}$

a. Montrer que $0 \notin B$ (0.5pt)

b. Montrer que B est un sous-groupe de $A^* = A \setminus \{0\}$ (1.5pt)

c. Déduire que B est un groupe (c'est un groupe de Lie) (0.5)

Exercice 3 : (6 points)

Soit G un groupe tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$ et pour tout a, b dans G $(ab)^n = a^n b^n$.

On pose $G_n = \{a \in G / a^n = e\}$ et $G^n = \{ a^n / a \in G\}$

Montrer que :

1- $G_n \lhd G$ (2pt)

2- $G^n \lhd G$ (2pt)

3- $G/ G_n \cong G^n$ (2pt)

$1 \lhd G$.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Matril

Examen de la session normale: Approches et Méthodes

Exercice 1 (4pts):

1) Donner une définition des mots suivants : compétence et approche par compétence,
2) La pédagogie par projet appliquée en mathématique développe essentiellement :
   a) La fluence en calcul.
   b) La vision spatiale géométrique.
   c) Les habiletés à la résolution de problèmes.
   d) Le sens d'optimisation économique.
3) Quelle est la différence entre : approche, stratégie, méthodes et techniques.

Exercice 2(8pts):

1- Préciser dans ce qui suit les caractéristiques d'une situation- problème

A. L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème.
B. Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
C. La connaissance visée doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.
D. La situation-problème ne doit pas permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.

2- **Problème :**

Une entreprise est chargée d'approvisionner en eau potable deux villages A et B qui se trouvent du même côté d'une rivière supposée droite. Pour ce faire elle décide de construire une station de pompage P d'eau sur cette rivière pour alimenter les deux villages. Elle souhaite que la station ait la même distance entre les deux villages.

A. Où doit- elle positionner la station P pour que le cout du projet soit minimal?
(C'est-à-dire que la distance AP+PB soit minimale.)
B. Quelle est la typologie de problème.
C. Compléter le tableau suivant :

Le contexte	
Le support	
Les consignes	
Les pré-requis (ou moins deux)	
Les compétences visées	

Examen de la session normale: Approches et Méthodes

Exercice 3(8pts):

I. Les obstacles dus à des limitations neurophysiologiques de l'apprenant au cours de son apprentissage à un moment de son âge sont dit d'origine :

Epistémologique ☐ Ontogénique ☐ culturel ☐ Didactique ☐ Cognitif ☐

II. En guise d'entrainement ; un enseignant a proposé l'exercice suivant à une classe scientifique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $|x-1| = 2x-1$.

Deux élèves A et B de cette classe ont répondu comme suit :

Réponse de l'élève A :	**Réponse de l'élève B :**
On sait que $\lvert x\rvert = x$ ou $\lvert x\rvert = -x$ donc l'équation $\lvert x-1\rvert = 2x-1$ signifie que: $x-1 = 2x-1$ ou $-(x-1) = 2x-1$ Ce qui équivaut à : $x-2x=0$ ou $-x-2x=-2$ C'est-à-dire $x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$ D'où l'ensemble de solutions de l'équation est: $S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$	On sait que $\lvert x-1\rvert = 2x-1$ signifie que $\lvert x-1\rvert^2 = (2x-1)^2$ Ce qui équivaut à : $x^2-2x+1 = 4x^2-4x+1$ Donc : $3x^2-2x=0$ d'où : $x(3x-2)=0$ C'est-à-dire $x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc l'ensemble de solutions de l'équation est: $S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$

1-L'erreur commune commise par les deux élèves concerne essentiellement :

A) Le développement technique des calculs intermédiaires.
B) La non-vérification réciproque des solutions obtenues
C) Le maniement de la valeur absolue.
D) La résolution d'une équation du premier degré a une seule inconnue.

2-L'origine de l'erreur repérée est :

Epistémologique ☐ Ontogénique ☐ Stratégique ☐ Didactique ☐ Cognitive ☐

3-Déterminer des procédures pour la remédiation et le soutien de ces élèves en fonction de l'erreur commise et expliquer comment surmonter l'erreur.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 5

Durée 2h

18/01/2023

Examen de la session normale: Topologie

Exercice 1. (4 *points*)

1. *Énoncer la définition d'un espace topologique connexe.*
2. *Montrer que l'image directe d'un espace topologique connexe par une application continue est connexe.*
3. *Soit* (E, τ) *un espace topologique et* $\mathfrak{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *Montrer que si* E *est connexe, alors l'espace topologique quotient* $(E_{/\mathfrak{R}}, \tau_{\mathfrak{R}})$ *est connexe.*
On note que $E_{/\mathfrak{R}}$ *est l'ensemble des classe d'equivalences et* $\tau_{\mathfrak{R}} = \{O \subset E_{/\mathfrak{R}} : q^{-1}(O) \in \tau\}$ *avec* $q : E \longrightarrow E_{/\mathfrak{R}}$ *est la surjection canonique.*
4. *Montrer qu'il n'existe aucun'un homéomorphisme* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2. (4 *points*)
Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$ *et* $F = \{f \in E : \ f(0) = 0\}$. *Pour* $f, g \in E$, *on pose*

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

1. *Montrer que* d *définie une distance sur* E.
2. *Soit* $f \in E$. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n>0}$ *où* $f_n(x) = \begin{cases} nxf(\frac{1}{n}), & si\ x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f(x), & si\ x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ *converge dans* (E, d) *vers* f.
3. *Déduire que* F *est dense dans* (E, d).

Exercice 3. (7 *points*)
Soit $(E_i)_{1 \le i \le n}$ n *espaces topologiques. On pose* $E = \prod_{i=1}^n E_i$. *Soit* τ_π *la famille des parties de* E *qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme* $\prod_{i=1}^n O_i$ *avec* $O_i \in \tau_i$.

1. *Montrer que* τ_π *est une topologie sur* E.
2. *Montrer que l'application* $Pr_i : E \longrightarrow E_i$ *(la projection sur* E_i*) est continue.*
3. *Montrer que* τ_π *est la topologie la moins fine rendant les applications* Pr_i *continues.*
4. *Montrer que si* E_i *est séparé, alors* E *est séparé.*
5. *Soit* $A_i \subset E_i$. *Montrer que*
   (a) $\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$.
   (b) $\overbrace{\prod_{i=1}^n A_i}^{\circ} = \prod_{i=1}^n \mathring{A}_i$.
6. *Montrer que* E *est compact si et seulement si* E_i *est compact pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exercice 4. (5 *points*)
Soit $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}} : \sum |u(n)|$ *converge*$\}$. *Pour* $u, v \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *on pose*

$$d(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n) - v(n)|.$$

1. *Montrer que* d *est une distance sur* $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. *Soit* (u_p) *une suite de Cauchy d'éléments de* $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. *Soit* $\epsilon > 0$, *alors il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

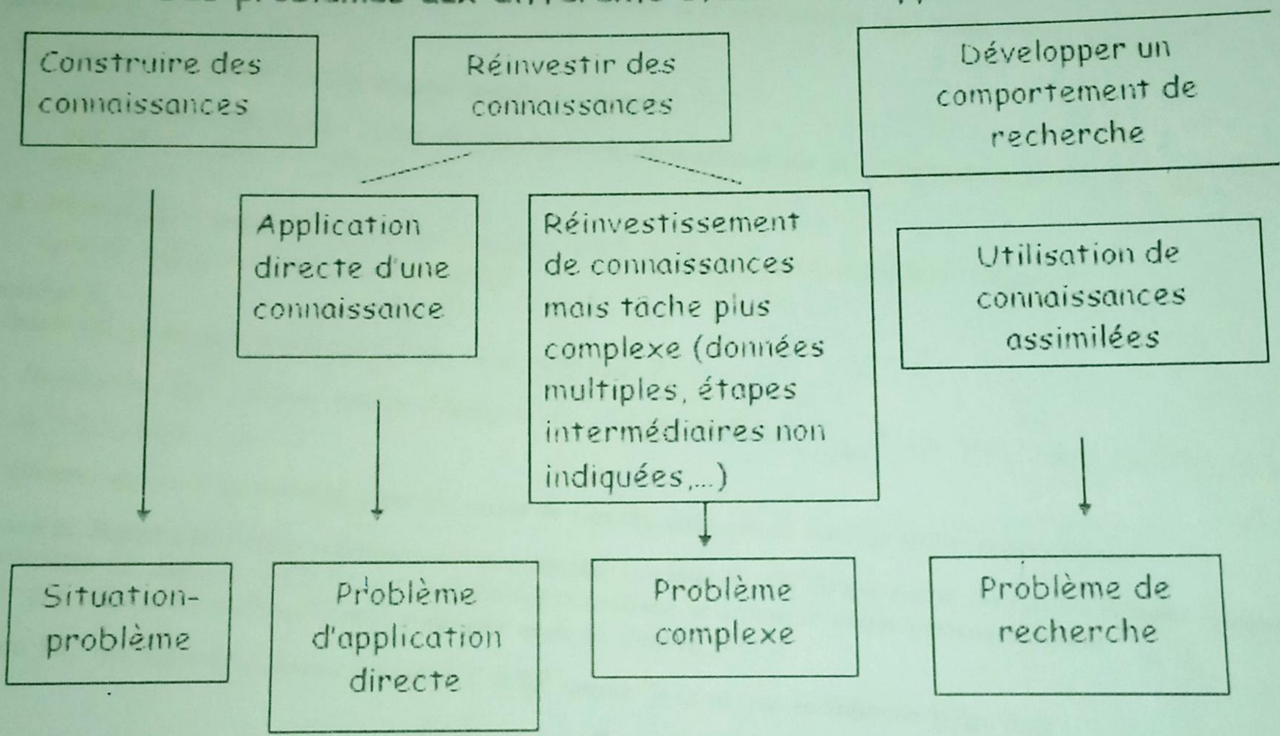
$$p, q \ge N \Longrightarrow d(u_p, u_q) < \epsilon.$$

   (a) *Montrer que:* $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p, q \ge N,\ \ |u_p(k) - u_q(k)| < \epsilon$.
   (b) *Déduire que pour chaque* $k \in \mathbb{N}$, *la suite* $(u_n(k))$ *converge.*
   (c) *On pose* $u(k) = \lim_{n \to +\infty} u_n(k)$.
      i. *Montrer qu'il existe* $N' \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{k=N'}^{+\infty} |u_N(k)| < \epsilon$.
      ii. *Déduire que:* $m \ge N' \Longrightarrow \sum_{k=N'}^{m} |u(k)| < 2\epsilon$.
   (d) *Déduire que l'espace* $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), d)$ *est complet.*

Examen de la session normale: Approches et Méthodes

Une classification selon les fonctions différentes des problèmes

Des problèmes aux différents stades de l'apprentissage



جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

المدرسة العليا للأساتذة
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure

Licence d'éducation
Spécialité : Mathématiques

Année scolaire : 2022/2023
Date : 19 – 01 - 2023
Durée: 2h

EXAMEN FINAL S3
STRUCTURES ALGEBRIQUES
(Session rattrapage)

***Exercice 1* : (6 points)**

1- Montrer que deux permutations de Sn dont les supports sont disjoints commutent (1.5pt)

2- Soient (G,.) et (H,*) deux groupes et soit φ un homomorphisme de G vers H, et soient x, y ∈ G :

Démontrer que : φ(x) = φ(y) ⇔ ker(φ).x=ker(φ).y. (1.5pt)

3- Soit l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2}/a\,,b \in \mathbb{Z}\}$,

a. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$est un sous anneau de $\mathbb{C}$, (1.5pt)

b. Déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est anneau, (0.5pt)

c. Donner un idéal non trivial de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ (1pt)

***Exercice 2* : (6 points)**

Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit S une partie de A. On dit que S est multiplicativement fermée si :

$$1 \in S,\ 0 \notin S\ ,\ \text{et}\ \forall\ x,\ y \in S \Rightarrow x.y \in S$$

Soit S une partie multiplicativement fermée d'un anneau A intègre de corps des fractions K et soit :

$$S^{-1}A = \{\tfrac{a}{s}/a \in A, s \in S\}$$

1- Montrer que $S^{-1}A$ est un sous anneau de K (2pt)

2- On dit qu'un idéal P de A est dit premier si (∀ x, y ∈ A / x.y ∈ P) alors (x ∈ P ou y ∈ P)), montrer que 14 $\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas premier (2pt)

3- Montrer que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont de la forme $pS^{-1}A$ où p est un idéal premier de A (2pt)

***Exercice 3* : (4.5 points)**

Soit le groupe symétrique S_7 et soit la permutation σ défini par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1- Donner les cycles de cette permutation (1pt)

2- Décomposer σ en produit de transposition (1pt)

3- Qu'elle est la signature de σ (1pt)

4- Donner pour toute i allant de à 7 son orbite (1.5pt)

Exercice 3 : (3.5 points)

Soient A et A' deux anneaux commutatifs unitaires et f un homomorphisme d'anneaux de A vers A', et I un idéal de A.et soit p une application définie par :

$$p: A \to A/_I$$

$$x \quad \to \bar{x}$$

1- Montrer que p est un homomorphisme d'anneau surjectif (1pt)

2- Montrer que A/I est isomorphe à im(f) (1pt)

3- Quelle sont les idéaux de A/I (1.5pt)