Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Maths 2023/2024
Analyse 3

Série 1: Formules de Taylor et développement limité

Exercice 1. *A l'aide du théorème des accroissements finis, prouver les inégalités suivantes:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$;
2. $\forall x \in [0, +\infty[$, $\sin x \leq x$;
3. $\forall x \in [0, +\infty[$, $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$;
4. $\forall x \in]0, 1[$, $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[0, x]$ ou sur $[x, 0]$, montrer que*

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

Exercice 3. *Soit f une fonction bornée et deux fois dérivable sur un intervalle I.*

1. *Si $x \in I$ et $h > 0$ sont tels que $x + h \in I$ et $x - h \in I$, montrer qu'il existe deux nombres θ et θ' appartenant à $]0, 1[$ vérifiant $f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h}{4}[f''(x + \theta h - f''(x - \theta' h)]$.*
2. *En déduire que si f'' est bornée sur I, il en est de même de f' et, qu'en notant $m_i = \sup_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on a l'inégalité $m_1 \leq \sqrt{2 m_0 m_2}$.*

Exercice 4. *Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < (n+1)^\alpha - n^\alpha < \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.*
En déduire que $\sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha}{p^{1-\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

Exercice 5. *Soit f et g deux fonctions réelles telles que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.*

1. *On suppose que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$. Prouver que $e^{f(x)} \underset{+\infty}{=} o(e^{g(x)})$. A-t-on $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{=} o(\ln(g(x)))$?*
2. *On suppose que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$. A-t-on $e^{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} e^{g(x)}$? $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(g(x))$?*
3. *On suppose que $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$. A-t-on $e^{f(x)} \underset{+\infty}{=} O(e^{g(x)})$? $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{=} O(\ln(g(x)))$?*

Exercice 6. *La suite de nombres rationnels (u_n) est définie par:* $\begin{cases} u_0 = 18, u_1 = \frac{106}{9}, \\ u_n u_{n+1} = 24 u_n - 173 + \frac{330}{u_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

1. *Calculer u_2.*
2. *Déterminer les deux nombres a et b tels que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1} - 3^{n+1}}{a^n + b^n - 3^n}$.*
   En déduire $l = \lim u_n$.
3. *Préciser $q \in]0, 1[$ tel que $|u_n - l| \sim q^n$.*

Exercice 7. *Determiner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes:*
$f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^3}, n = 2$; $g(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \ln(1+x)}, n = 3$; $h(x) = e^{\frac{\sinh x}{x}}, n = 1$; $i(x) = \sin(x^2), n = 6$;
$j(x) = \ln(1+x)\sin x, n = 6$; $k(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}, n = 4$; $l(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}, n = 3$.

Exercice 8. *Determiner le $DL_n(x_0)$ de la fonction f pour chacun des cas suivants:*

1. $f(x) = x^2 \ln x$, $x_0 = 1$ *et* $n = 5$;
2. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *et* $n = 3$;
3. $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$, $x_0 = 1$ *et* $n = 5$;
4. $f(x) = \ln(\sin x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $n = 3$.

Exercice 9. *Soient $f, g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ les applications définies par: $f(x) = \sin(\ln(1+x))$ et $g(x) = \ln(1 + \sin x)$.*

1. *Déterminer le $DL_4(0)$ des fonctions f et g.*
2. *Déduire un equivalent de la fonction $f - g$ en 0.*

Exercice 10. *Donner un équivalent simple de la fonction f en 0 pour chacun des cas suivants:*
$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$; $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$; $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Exercice 11.

1. *Écrire le* $DL_3(0)$ *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2. *En déduire le* $DL_3(0)$ *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.

3. *Soit* $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. *Determiner l'asymptote au graphe de* f *pour* $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 12. *Soit* f *la fonction définie par:* $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ *pour* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

1. *Montrer que* f *admet un* $DL_2(0)$.

2. *La fonction* f *est-elle deux fois dérivable en* 0*?*

Exercice 13. *Soit* a *un réel fixé. On pose* $f_a(x) = \arctan(\frac{x+a}{1-ax})$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Determiner le* $DL_{2n-1}(0)$ *de la fonction* f'_a.

2. *En déduire le* $DL_{2n}(0)$ *de la fonction* f_a.

3. *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Déduire de la question précédente la valeur de* $f_a^{(k)}(0)$.

Exercice 14. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par:* $f(x) = \frac{\ln(\cosh x)}{\sinh x}$.

1. *Écrire le* $DL_3(0)$ *de la fonction* f.

2. *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en* 0 *et que ce prolongement est dérivable en* 0.

Exercice 15. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par:* $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

1. *Déterminer le* $DL_1(0)$ *de la fonction* $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x})$.

2. *Montrer que la courbe représentative de* f *admet une asymptote oblique en* $+\infty$, *on déterminera la position du graphe de* f *par rapport à cette asymptote.*

Exercice 16. *Determiner les limites suivantes:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arg\sinh x}{\sinh x - \arcsin x}; \quad \lim_{x\to +\infty} (x \tan \tfrac{1}{x})^{x^\alpha} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\sin x)^{\frac{4\pi}{4x-\pi}}.$$