TD:1 Algèbre	LE-Math	Semestre 2 2022–2023

Exercice 1. Soient $E_1, \cdots, E_n$, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.

1. Soient $u_1 = (2,3,-1)$, $u_2 = (1,-1,-2)$, $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(v_1, v_2)$.
2. Montrer que $F = \{(x, y, x+y, 2x+y) \in \mathbb{R}^4 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x-y-z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-2z = 0\}$ est un s.e. v. de $\mathbb{R}^3$. En trouver une famille génératrice.

Exercice 3.

1. Soient les deux s.e. v. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+3z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$
   (a) Donner une famille génératrice de E et une famille génératrice de F.
   (b) Vérifier que $E \cap F$ est un sous-espaces vectoriel et trouver une famille génératrice.
2. Soit $E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et trouver une famille génératrice de E.

Exercice 4. Soient $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (1,1,-1)$ et $u_3 = (-1,-5,7)$.
Soient $E = Vect(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\}$

1. Donner une base de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F et une base de $E \cap F$.

Exercice 5. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynôme $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X]/deg(P \leq 5)\}$ et soit $F = \{P \in E_5/P(1) = P(-1) = 0\}$. On pose $P_o = X^2 - 1$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_5.
2. Montrer que les polynômes : P_o, $X.P_o$, $X^2.P_o$ et $X^3.P_o$ sont linéairement indépendants.
3. Montrer que $F = \langle P_o, X.P_o, X^2.P_o, X^3.P_o \rangle$, en déduire la dimension de F.

Exercice 6. On pose : $p_1(x) = x^2+2x+1$, $p_2(x) = 2x^2+5x+4$ et $p_3(x) = x^2+3x+6$.

1. Montrer que $\{p_1, p_2, p_3\}$ constituent une base de l'espace $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Exprimer le polynôme $q(x) = 3x^2+5x-5$ dans la base $\{p_1, p_2, p_3\}$.
3. Monter que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)dt = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une famille génératrice.

Exercice 7. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z = 0 \text{ et } 2x-y-z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1,1,1)$, $b = (1,0,1)$ et $c = (0,1,1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}^2; E_1 = \{(x, y) \mid x = y\}, E_2 = \{(x, y) \mid x = -y\}$. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ de l'addition composante par composante définie par :

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w).$$

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c.(x, y, z) = (cx, 0, 0).$$

   $\mathbb{R}^3$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux lois définies ci-dessus?

2. On munit $\mathbb{R}^3$ de la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c.(x, y, z) = (cx, cy, cz).$$

   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel pour l'addition composante par composante et cette dernière multiplication.

   (b) $\mathbb{Q}^3$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?

   (c) Les ensembles $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Si oui, calculer leurs dimensions.

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (r f)(x) = r f(x),$$

avec $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $F_p = \{$ L'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F_i = \{$ L'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_p dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 11. Soit $E = \{ae^x + be^{-x} \text{ tel que } a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, où x est une indéterminée sur$\mathbb{R}$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On désigne par i et j les éléments de E définies par $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$. Montrer que $\{i, j\}$ est une base de E.
3. On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$. Montrer que $\{r, s\}$ est une base de E.
4. Calculer les coordonnées de i et j dans la base $\{r, s\}$.
5. On considère $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & e^{r_k \cdot x} \end{array}$ où les r_k sont des réels.
   Montrer que si les r_k sont tous distincts, alros $(f_1, f_2, \cdots f_n)$ est libre.
   (Raisonner par récurrence : écrire $\alpha_1 f_1(x) + \cdots \alpha_n f_n(x) = 0$, puis diviser par $f_n(x)$ et dériver,...).

Exercice 12. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $G = (e_i)_{1 \le i \le m}$ une famille génératrice de E. Alors $f = g$ si, et seulement si, $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $1 \le i \le m$.