Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

Série d'exercices: Espaces Affines

Exercice 1.
Soient F et G deux sous espaces affines d'un espace affine de E. Montrer les assertions suivantes:

1. $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\} \Rightarrow F \cap G$ *est soit vide, soit un singleton.*
2. $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E} \Rightarrow F \cap G$ *n'est pas vide.*
3. $\vec{F} \subset \vec{G} \Rightarrow F \cap G$ *soit vide, soit* $F \subset G$.
4. $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E} \Rightarrow F \cap G$ *est un singleton.*

Exercice 2.
On se place dans $\mathbb{R}^3$. *On considère l'ensemble* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 1\}$.

1. *Montrer que P est un plan affine. Préciser sa direction.*
2. *On considère le repère* $R(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *avec*

$$A = (-1,1,0),\ \vec{u} = (1,0,-2),\ \vec{v} = (0,1,-3),\ \vec{w} = (0,0,1).$$

Donner un paramétrage ainsi qu'une équation cartésienne de P dans ce nouveau repère.

Exercice 3. *Soit F le sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $(1,0,i,-1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1,1,i,-i)$ et $(0,1+i,1,-1)$. Donner un système d'équations cartésiennes de F.*

Exercice 4. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose*

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & a \\ x - 2y + z & = & b \end{array} \right\}\right..$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$(on en donnera un point et l'espace directeur); quelle est sa dimension?

Exercice 5. *Montrer que $V_1 = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ est un sous-espace affine de $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension?*

Exercice 6. *Soit E un espace affine et soient A et B deux points distincts de E. Montrer qu'il existe une et une seule droite affine de E passant par A et B.*

Exercice 7. *Montrer que pour toute matrice $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, et tout vecteur $B \in \mathbb{R}^p$, l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^q : AX = B\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^q$.*

Exercice 8. *Dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble*

$$V = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) : \forall i = 1,\cdots,n \quad \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0, \quad \forall j = 1,\cdots,n \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 0\}.$$

1. (a) *Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.*
   (b) *Déterminer* $\dim V$.
2. *On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons*

$$F = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) : \forall i = 1,\cdots,n \quad \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1, \quad \forall j = 1,\cdots,n \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1\}.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

Exercice 9. *Soient A, B, A', B' d'un espace affine E. On suppose que A, A' et B sont affinement indépendants(i.e. les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont linéairement indépendants). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:*

i *$ABB'A'$ est un parallélogramme(i.e. on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ou $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$).*

ii $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$.

iii *Les droites (AB) et $(A'B')$ ainsi que (AA') et (BB') sont parallèles.*

Exercice 10.

1. *Montrer qu'une partie non vide d'un espace affine est convexe, si et seulement si elle est stable par barycentrage à coefficients positifs.*

2. *Montrer que l'intersection quelconque des parties convexes est une partie convexe.*

Exercice 11. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine.*

1. *Soient X et Y deux parties convexes de E. Montrer que l'ensemble $Z = \{mil[AB] : A \in X, B \in Y\}$ est convexe.*

2. *On appelle combinaison convexe de points $A_1, \cdots, A_n$ de E tout barycentre de $A_1, \cdots, A_n$ affectés de coefficients positifs.*
   On appel envelope convexe d'une partie H de E qu'on le note $ConvH$, l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

   a) *Montrer que $ConvH$ est exactement l'ensemble des combinaisons convexes de points de H.*

   b) *Soit A, B et C trois points distincts de E.*

      i) *Quelle est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$?*

      ii) *Montrer que $Conv(A, B, C) = \bigcup_{M \in [BC]} [AM]$.*

Exercice 1 :

E est un espace affine,

F et G sont deux sous-espaces affines de E

1\ $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\} \Rightarrow F \cap G$ est soit vide, soit un singleton.

on suppose que $F \cap G \neq \emptyset$,

Soient $A, B \in F \cap G$,

alors : $\vec{AB} \in \vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$

donc : $\vec{AB} = \vec{0}$

d'où : $A = B$

alors : $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\} \Rightarrow F \cap G = \emptyset$ ou $F \cap G = \{A\}$

2\ Supposons que $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E}$,

Soient $A \in F$ et $B \in G$,

donc : $\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{F}$ et $\vec{v} \in \vec{G}$

Soit $C = A + \vec{u}$

puisque : $A \in F$ et $\vec{u} \in \vec{F}$

alors : $C \in F$

et on a : $C = A + \vec{u}$

$= \underbrace{A + \vec{AB}} + (-\vec{v})$

d'où : $C = B + (-\vec{v})$

puisque : $B \in G$ et $-\vec{v} \in \vec{G}$

alors : $C \in G$

donc : $C \in F \cap G$

d'où : $F \cap G \neq \emptyset$

3\ $\vec{F} \subset \vec{G} \Rightarrow F \cap G$ soit vide, soit $F \subset G$

Supposons que $F \cap G \neq \emptyset$

donc : $\exists A \in F \cap G$

d'où : $A \in F$ et $A \in G$

Soit $M \in F$,

donc : $\vec{AM} \in \vec{F} \subset \vec{G}$

d'où : $\vec{AM} \in \vec{G}$

or: $M = A + \overrightarrow{AM}$

avec: $A \in G$ et $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{G}$

donc: $M \in G$

d'où: $F \subset G$

Exercice 2:

on a: $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + 3y + z = 1\}$

1\ montrons que P est un plan affine.

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x+3y+z=1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - 2x - 3y\} \\ &= \{(x,y,1-2x-3y) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \ / \ x,y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

d'où, $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

donc: P est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{P} = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

on a: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre

donc: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\overrightarrow{P}$

d'où, $\dim P = \dim \overrightarrow{P} = \mathrm{card}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = 2$

alors: P est un plan affine.

2\ Notons $P_{B_1 \to B_2}$ la matrice de passage de $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ "base canonique" à $B_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

donc: $$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

on a:

- dans B_1: $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

on note: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{w}}$ les coordonnées de $\vec{w}$ dans $R(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

donc: $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P_{B_1 \to B_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{w}}$$

d'où: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'une manière similaire, on trouve:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

alors: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

d'où: $$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = -1 - \alpha \\ z = -\alpha - \beta \end{cases} ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Soit $M \in \mathcal{P}$,

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnés de M dans $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ les coordonnés de M dans $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

on a: $M \in \mathcal{P} \Rightarrow 2x + 3y + z = 1$

$\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = \beta + 1 \\ z = \gamma - 2\alpha - 3\beta \end{cases}$

donc: $2(\alpha - 1) + 3(\beta + 1) + \gamma - 2\alpha - 3\beta = 1 \Rightarrow \gamma = 0$

alors: $\gamma = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ dans $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 3:

F est un sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $A = (1, 0, i, -1)$ et dérigée par $(1, 1, i, -i)$ et $(0, 1+i, 1, -1)$

donc: $F = A + \text{vect}\{(1, 1, i, -i), (0, 1+i, 1, -1)\}$

$= \{(1, 0, i, -1) + \alpha(1, 1, i, -i) + \beta(0, 1+i, 1, -1) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$

$= \{(1+\alpha, \alpha + (1+i)\beta, i + i\alpha + \beta, -1 - i\alpha - \beta) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$

Soit $M(x, y, z, t) \in F$,

$$M \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha + (1+i)\beta \\ z = i + i\alpha + \beta \\ t = -1 - i\alpha - \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = x - 1 + (1+i)\beta \\ z = i + ix - i + \beta \\ t = -1 - ix + i - \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ \beta = \dfrac{-x + y + 1}{1+i} \\ z = ix + \dfrac{-x + y + 1}{1+i} \quad (1) \\ t = -ix - 1 + i - \dfrac{-x + y + 1}{1+i} \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow z = \dfrac{(1+i)ix - x - y + 1}{1+i}$

$\Rightarrow z = \dfrac{ix - x - x + y + 1}{1+i}$

$\Rightarrow z = \dfrac{(-2+i)x + y + 1}{1+i}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow (1+i)z = (-2+i)x + y + 1$

$\Rightarrow -(-2+i)x - y + (1+i)z - 1 = 0$

$\Rightarrow (2-i)x - y + (1+i)z - 1 = 0$

(2) $\Rightarrow t = \dfrac{-i(1+i)x - 1 - i + i(1+i) + x - y - 1}{1+i}$

$\Rightarrow t = \dfrac{(-i+1+1)x - y - 1 - \cancel{i} + \cancel{i} - 1 - 1}{1+i}$

$\Rightarrow t = \dfrac{(2-i)x - y - 3}{1+i}$

$\Rightarrow (1+i)t = (2-i)x - y - 3$

$\Rightarrow (2-i)x - y - (1+i)t - 3 = 0$

Alors: $\begin{cases} (2-i)x - y + (1+i)z - 1 = 0 \\ (2-i)x - y - (1+i)t - 3 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésie[nnes]
de F,

Exercice 4:

Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} z = 2x + y - a \\ x = 2y - z + b \end{cases} \right\}$$

$\vdots$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} z = \frac{2}{3}b + \frac{5}{3}y - \frac{a}{3} \\ x = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}y + \frac{a}{3} \end{cases} \right\}$$

d'où: $F = \left\{ \left(\frac{a+b}{3} + \frac{1}{3}y, y, \frac{-a+2b}{3} + \frac{5}{3}y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left(\frac{a+b}{3}, 0, \frac{-a+2b}{3} \right) + \text{vect}\left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3} \right) \right\}$

donc: F est un sous espace affine de dimension 1.

2ème méthode :

on considère l'application: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$

f est une application linéaire (à vérifier)

donc: f est une application affine.

alors: $F = f^{-1}((a,b))$

la matrice de f est: $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{rang } M_f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

donc: f est surjective.

d'où : $F \neq \phi$.

donc : F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de direction $\vec{F} = \ker f$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x + y \\ x - 2y + 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2x + y \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2x + 3x \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 5x \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\ker f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} z = 5x \\ y = 3x \end{cases} \right\}$$
$$= \{ (x, 3x, 5x) / x \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathbb{R}(1,3,5)$$

Exercice 5 :

$$V_1 = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)\,dt = 1 \right\}$$

on considère l'application : $\varphi : C^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$$

alors : φ est une forme linéaire sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$

donc : φ est une application affine.

alors $V_1 = \varphi^{-1}(\{1\})$

la fonction $f : x \longmapsto 1$ vérifie $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$

donc : $f \in V_1$

d'où : $V_1 \neq \phi$

on en déduit que V_1 est un sous-espace affine de $C^0([0,1], \mathbb{R})$,

de direction : $\vec{V_1} = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\} = \ker \varphi$

on considère la famille $(f_K)_{K \in \mathbb{N}^*} \in \vec{V_1}$ tel que :

$$\forall t \in [0,1], \ \forall K \in \mathbb{N}^*, \quad f_K(t) = (K+1)t^K - 1$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{K=1}^{m} \alpha_K f_K = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1], \ \sum_{K=1}^{m} \alpha_K f_K(t) = 0$$
$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \ \sum_{K=1}^{m} \left((K+1)\alpha_K t^K - \alpha_K \right) = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \quad (n+1)\alpha_n t^n - \alpha_n + n\alpha_{n-1} t^{n-1} - \alpha_{n-1} + \dots + 2\alpha_1 t - \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \quad (n+1)\alpha_n t^n + n\alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + 2\alpha_1 t - (\alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+1)\alpha_n = 0 \\ n\alpha_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

alors: la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est libre

d'où: $\dim V_1 = \infty$

Exercice 6 :

Soit E un espace affine,

Soit A et B deux points distincts de E,

posons $\vec{u} = \vec{AB} \neq \vec{0}$

Soit $D = A + \text{vect}(\vec{u})$

Soit Δ la droite passant par A et B

alors: $\Delta = A + \text{vect}(\vec{v})$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$

montrons que: $\text{vect}(\vec{u}) = \text{vect}(\vec{v})$

- $\vec{AB} = \vec{u} \Rightarrow B = A + \vec{u}$

  $\Rightarrow B \in D$

- $B \in \Delta \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad B = A + \alpha\vec{v}$

donc: $\vec{AB} = \alpha\vec{v}$

d'où: $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

alors: $\text{vect}(\vec{u}) = \text{vect}(\vec{v})$

d'où: $\vec{D} = \vec{\Delta}$

puisque: $A \in D \cap \Delta$

alors: $D = \Delta$

Exercice 8 :

1)a - Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, B \in V$

avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

donc $\alpha A + \beta B = \alpha (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} + \beta (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

• pour $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \beta \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

• pour $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

d'où $\alpha A + \beta B \in V$

1)b - Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in V$

on pose

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

alors

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} e_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} e_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} e_{nj} + a_{nn} e_{nn}$$

on a :

• pour $i = 1, \dots, n$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{in} = - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}$

• pour $j = 1, \dots, n$: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{nj} = - \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}$

• $a_{nn} = - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} = - \sum_{j=1}^{n-1} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}$

donc

$$A = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} e_{ij} - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} e_{in} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} e_{nj} \right) + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} e_{nn}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} (e_{ij} - e_{in} - e_{nj} + e_{nn})$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \alpha_{ij} \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = e_{ij} - e_{in} - e_{nj} + e_{nn}$$

donc la famille $(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est génératrice

$(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre (à démontrer)

alors $\dim V = (n-1)^2$

Scanné avec CamScanner

2) $\{A-B \,/\, A, B \in F\} = \{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{m} b_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) = 0\}$

Exercice 11 :

1\ E est un espace affine,

Soient X et Y deux parties convexes de E,

on pose $Z = \{mil[AB] \,/\, A \in X \text{ et } B \in Y\}$

Soient $I, J \in Z$,

donc $I = mil[AB]$ et $J = mil[CD]$

avec : $A, C \in X$ et $B, D \in Y$

Soit $G = bary\{(I, \alpha), (J, \beta)\}$ avec $\alpha, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$

on a : $I = mil[AB] \Rightarrow I = bary\{(A, \frac{\alpha}{2}), (B, \frac{\alpha}{2})\}$

$J = mil[CD] \Rightarrow J = bary\{(C, \frac{\beta}{2}), (D, \frac{\beta}{2})\}$

posons : $G_1 = bary\{(A, \frac{\alpha}{2}), (C, \frac{\beta}{2})$

$G_2 = bary\{(B, \frac{\alpha}{2}), (D, \frac{\beta}{2})\}$

donc : $G = bary\{(A, \frac{\alpha}{2}), (B, \frac{\alpha}{2}), (C, \frac{\beta}{2}), (D, \frac{\beta}{2})\}$

$= bary\{(G_1, \frac{\alpha+\beta}{2}), (G_2, \frac{\alpha+\beta}{2})\}$

$= mil[G_1 G_2]$

puisque : • $A, C \in X$ et X est convexe, alors $G_1 \in X$

• $B, D \in Y$ et Y est convexe, alors $G_2 \in Y$

donc : $G \in Z$

d'où, Z est convexe.

2\ Soient $A_1, \dots, A_n$ des points de E,

$G = bary\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, est appelé une combinaison convexe de $A_1, \dots, A_n$

a_ Soit H une partie de E,

conv H = $\cap$ de tout les convexes contenant H

posons : $C = \{bary\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq m}\} \,/\, m \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0 \,;\, A_i \in H\}$

alors, $H \subset C$ (car tout point de H est le barycentre de lui-même :

$A_i = bary\{(A_i, 1)\}$ avec $A_i \in H$)

montrons que C est convexe :

Soient $A, B \in C$,

Scanné avec CamScanner

alors: $\exists n, m \in \mathbb{N}^*$, $\exists A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in H$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}^+$

tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \neq 0$,

$A = \text{bary}\{(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}\}$; $B = \text{bary}\{(B_i, \beta_i)_{1\leq i\leq m}\}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

posons: $G = \text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

On a: $A = \text{bary}\{(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}\}$

$= \text{bary}\{(A_i, \frac{\alpha}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\alpha_i)_{1\leq i\leq n}\}$

donc. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\alpha_i\right) = \alpha$

et on a: $B = \text{bary}\{(B_i, \beta_i)_{1\leq i\leq m}\}$

$= \text{bary}\{(B_i, \frac{\beta}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}\beta_i)_{1\leq i\leq m}\}$

donc: $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\beta}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}\beta_i\right) = \beta$

alors: $G = \text{bary}\left\{\left(A_i, \frac{\alpha}{\sum\alpha_i}\alpha_i\right)_{1\leq i\leq n}, \left(B_i, \frac{\beta}{\sum\beta_i}\beta_i\right)_{1\leq i\leq m}\right\}$

donc: $G \in C$

d'où: C est convexe

puisque $H \subset C$ et C est convexe

alors: $\text{conv} H \subset C$

Inversement :

d'après exercice 10 : $\text{conv} H$ est convexe

donc $\text{conv} H$ est stable par barycentrage au coefficient positifs,

et puisque: $C = \{\text{bary}\{(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}\} / n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0, A_i \in H\}$

alors: $C \subset \text{conv} H$

Série d'exercices: Applications Affines

Exercice 1.

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. *Soit P le plan d'equation $x+2y+z=1$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie s par rapport au plan P et parallèlement à la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.*

2. *Soit D la droite de système d'equations $\begin{cases} x+y+1 &= 0 \\ 2y+z+2 &= 0. \end{cases}$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie s par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ et parallèlement au plan P d'equation $3x+3y-2z=0$.*

3. *Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\begin{cases} x' = & 3x+4y+2z-4 \\ y' = & -2x-3y-2z+4 \\ z' = & 4x+8y+5z-8 \end{cases}$$

est une affinité.

Exercice 2.

Soit $f_m: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M(x,y) & \longmapsto & M'(x',y') \end{array}$ *telle que* $\begin{cases} x' = & (m+1)x+4my-m \\ y' = & (m-2)x+(m-3)y+2(m-1). \end{cases}$

1. *Trouver l'ensemble des points fixes de f_m.*
2. *Déterminer les valeurs de m pour que f_m soit un automorphisme.*
3. *Montrer que $f_1 o f_1 = Cste$.*
4. *quelle est la nature de f_0?*

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 muni du repère $R=(O,e_1,e_2)$.

1. *On considère l'application $f:E\longrightarrow E$ donnée en coordonnées dans le repère R par $(x,y)\longmapsto(2x-3y+5, 7x-2y+3)$. Donner l'écriture matricielle de f dans R.*
2. *Soit $O'(2,-1)$ un point de E, posons $e'_1=e_1-2e_2$ et $e'_2=e_1+e_2$.*
   (a) *Vérifier que $R'=(O',e'_1,e'_2)$ est un repère de E.*
   (b) *Donner l'écriture matricielle de f dans R', puis une définition de f par une formule en coordonnées dans R'.* ?
3. *Trouver le repère $R"=(O,e"_1,e"_2)$ de E caractérisé par la propriété suivante: si M est un point de E de coordonnées (x,y) dans R, ses coordonnées dans $R"$ sont $(x-y+3, 2x+y-6)$.*

Exercice 4.

"Si O, A et A' sont trois points de une droite affine et si $A\neq O$ et $A'\neq O$ *on note $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ l'unique scalaire α tel que $\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$"*

Soit E un espace affine. Soient O, A et B trois points affinement indépendants de E. Soit A' un point de la droite (OA) et soit B' un point de la droite (OB). On note h l'unique l'homothétie de centre O tel que $h(A)=A'$.

1. *Justifier l'existence de h.*

2. *On suppose que O, A et B ne sont pas alignés. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

   (a) $\dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$;

   (b) $h(B) = h(B')$; B'

   (c) *les droites (AB) et $(A'B')$ sont fortement parallèle.*

Exercice 5.

Soient E un espace affine, O_1 et O_2 deux points de E et α_1 et α_2 deux scalaires non nuls. On considère les homothéties $h_1 = h(O_1, \alpha_1)$ et $h_2 = h(O_2, \alpha_2)$.

1. *Montrer que $h_1 o h_2$ est une dilatation.*

2. *On suppose que $\alpha_1\alpha_2 = 1$. Déterminer la nature de l'application $h_1 o h_2$.*

3. *On suppose que $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$. Montrer que $h_1 o h_2$ est une homothétie en déterminant les éléments caractéristiques.*

4. *Application:*

   On suppose que E est un espace affine sur $\mathbb{C}$ de dimension 2. Soient h_1 et h_2 les applications affines définies par:

   $h_1 : M(x,y) \longmapsto M'(x',y') : \begin{cases} x' = & (1+i)x - 2i \\ y' = & (1+i)y - 3i \end{cases}$ et $h_2 : M(x,y) \longmapsto M'(x',y') : \begin{cases} x' = & (1-i)x - i \\ y' = & (1-i)y + 2i \end{cases}$

   (a) *Montrer que h_1 et h_2 sont des homothéties.*

   (b) *Déduire la nature de l'application $h_1 o h_2$ en déterminant les éléments caractéristiques.*

Exercice 1 :

1\ On a : • $\mathcal{P} : x + 2y + z = 1$

• $\vec{D} = \text{vect}\{(1,1,1)\}$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

Soit $\mathcal{P}$ la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\vec{D}$

on pose : $\mathcal{P}(M)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Soit S la symétrie de base $\mathcal{P}$ et parallèlement à $\vec{D}$

donc : $S(M) = \mathcal{P}(M) - \overrightarrow{\mathcal{P}(M)M} \iff \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \\ z' = 2c - z \end{cases}$$

On a :

• $\overrightarrow{\mathcal{P}(M)M} \in \vec{D} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathcal{P}(M)M} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = x - \alpha \\ b = y - \alpha \\ c = z - \alpha \end{cases} \quad (*)$$

• $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P} \iff a + 2b + c = 1$

$$\iff x - \alpha + 2(y - \alpha) + z - \alpha = 1$$

$$\iff \alpha = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}$$

donc : $(*) \iff \begin{cases} a = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} \end{cases}$

Alors :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ z' = -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

2\ Soit $\mathcal{P}$ la projection sur D parallèlement à $\vec{\mathcal{P}}$.

Soit S la symétrie de base D parallèlement à $\vec{\mathcal{P}}$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$S(M) = \mathcal{P}(M) - \overrightarrow{\mathcal{P}(M)M}$$

posons : $S(M)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}(M)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

donc : $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_1\\z-z_1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = 2x_1 - x \\ y' = 2y_1 - y \\ z' = 2z_1 - z \end{cases}$

On a : $\mathcal{P}(M) \in D$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}(M)M} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$

donc : $\begin{cases} x_1 + y_1 + 1 = 0 \\ 2y_1 + z_1 + 2 = 0 \\ 3(x_1 - x) + 3(y_1 - y) - 2(z_1 - z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{3}{4} \\ y_1 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} \\ z_1 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} x' = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2} \\ y' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2} \\ z' = -3x - 3y + z - 3 \end{cases}$

3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

- $f(M) = M \iff \begin{cases} x = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x + 4y + 2z - 4 = 0 \\ -2x - 4y - 2z + 4 = 0 \\ 4x + 8y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$

$\iff 2x + 4y + 2z - 4 = 0$

$\iff x + 2y + z - 2 = 0$

l'ensemble des points fixes de f est le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + z - 2 = 0$

- $\overrightarrow{Mf(M)} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3x + 4y + 2z - 4 - x \\ -2x - 3y - 2z + 4 - y \\ 4x + 8y + 5z - 8 - z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2x + 4y + 2z - 4 \\ -2x - 4y - 2z + 4 \\ 4x + 8y + 4z - 8 \end{pmatrix}$

$= (2x + 4y + 2z - 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ est la droite $\overrightarrow{D}$ engendré par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{P}(M) = M_1 \iff M_1 \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MM_1} \in \overrightarrow{D}$

$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \\ z_1 - z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{D}$

$\iff \begin{cases} x_1 + 2y_1 + z_1 - 2 = 0 \\ x_1 - x = \beta \\ y_1 - y = -\beta \\ z_1 - z = 2\beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2y_1 + z_1 - 2 = 0 \\ x_1 = x + \beta \\ y_1 = y - \beta \\ z_1 = z + 2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \beta + 2y - \cancel{2\beta} + z + \cancel{2\beta} - 2 = 0 \\ x_1 = x + \beta \\ y_1 = y - \beta \\ z_1 = z + 2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -x - 2y - z + 2 \\ x_1 = x + \beta \\ y_1 = y - \beta \\ z_1 = z + 2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -x - 2y - z + 2 \\ x_1 = -2y - z + 2 \\ y_1 = x + 3y + z - 2 \\ z_1 = -2x - 4y - z + 4 \end{cases}$$

d'où : $\mathcal{P}(M)\begin{pmatrix} -2y - z + 2 \\ x + 3y + z - 2 \\ -2x - 4y - z + 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}(M)f(M)} = \begin{pmatrix} 3x + 4y + 2z - 4 + 2y + z - 2 \\ -2x - 3y - 2z + 4 - x - 3y - z + 2 \\ 4x + 8y + 5z - 8 + 2x + 4y + z - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + 6y + 3z - 6 \\ -3x - 6y - 3z + 6 \\ 6x + 12y + 6z - 12 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} x + 2y + z - 2 \\ -x - 2y - z + 2 \\ 2x + 4y + 2z - 4 \end{pmatrix}$$

or : $\overrightarrow{\mathcal{P}(M)M} = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 2 \\ y - x - 3y - z + 2 \\ z + 2x + 4y + z - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 2 \\ -x - 2y - z + 2 \\ 2x + 4y + 2z - 4 \end{pmatrix}$

donc, $\overrightarrow{\mathcal{P}(M)f(M)} = 3\overrightarrow{\mathcal{P}(M)M}$

d'où, $f(M) = \mathcal{P}(M) + 3\overrightarrow{\mathcal{P}(M)M}$

Alors : f est une affinité de base P et de direction $\vec{D}$ et de rapport 3

Exercice 4 :

1) On a : $O \neq A$ (car O, A et B sont affinement indépendants)
et on a : $A' \in (OA)$
donc $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, \ \overline{OA'} = \alpha \overline{OA}$
posons : $\alpha = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
alors h est bien définie.

Exercice 2 :

2) $f_m(x,y) = ((m+1)x + 4my - m, \ (m-1)x + (m-3)y - 2(m-1))$
$\vec{f}_m(x,y) = ((m+1)x + 4my, \ (m-1)x + (m-3)y)$
La matrice de $\vec{f}_m$ est $A_m = \begin{pmatrix} m+1 & 4m \\ m-2 & m-3 \end{pmatrix}$
On a : f_m est bijective $\Leftrightarrow \vec{f}_m$ est bijective
$\Leftrightarrow \det A_m \neq 0$
$\Leftrightarrow \dots$

Exercice 3 :

$R = (O, e_1, e_2)$; $e_1 = (0,1)$; $e_2 (1,0)$

1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) a- $O'(2,-1)$; $e'_1 = e_1 - 2e_2$; $e'_2 = e_1 + e_2$
pour montrer que R' est un repère, il suffit de montrer que $\{e'_1, e'_2\}$ est une base E
puisque : $\dim E = 2$
donc, il suffit de montrer que $\{e'_1, e'_2\}$ est libre
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$\alpha e'_1 + \beta e'_2 = (0,0) \Rightarrow (\alpha + \beta) e_1 + (-2\alpha + \beta) = (0,0)$
$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

b- Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2) à (e'_1, e'_2)
alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$(X = B + PX')$
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right]$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 + x'_1 + y'_1 \\ 3 = -1 - 2x'_1 + y'_1 \end{cases}$

$f(X)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x'_1 + 3 = 2 \\ y'_1 = 4 + 2x'_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = -\frac{1}{3} \\ y'_1 = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Exercice 4 :

2\ (a) ⟺ (b) :

⟹/ Supposons que : $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

on a : h est l'homothétie de centre O et de rapport $\alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

d'où : $\alpha = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overrightarrow{OB'} = \alpha \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow B' = O + \alpha \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow B' = h(B)$

⟸/ Supposons que : $B' = h(B)$

donc : $B' = O + \alpha \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OB'} = \alpha \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

(b) ⟺ (c) :

⟹/ Supposons que : $h(B) = B'$

on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'}$

$= \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$

$= \alpha \overrightarrow{OB} - \alpha \overrightarrow{OA}$

$= \alpha (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO})$

$= \alpha \overrightarrow{AB}$

puisque h est une homothétie de rapport $\alpha \neq 0$ alors : h est une dilatation donc : $\vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \alpha \overrightarrow{AB}$ et puisque h est une app. affine, alors : $\vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{A'B'}$, donc : $\overrightarrow{A'B'} = \alpha \overrightarrow{AB}$

donc : (AB) et $(A'B')$ ont la même direction,

d'où : (AB) et $(A'B')$ sont fortement parallèles.

⟸/ Supposons que : (AB) et $(A'B')$ sont fortement parallèles.

on a : $h(A) = A'$ et $\vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \alpha \overrightarrow{AB}$

$h((AB)) = A' + \mathbb{K}\overrightarrow{AB}$

$= A' + \mathbb{K}\overrightarrow{A'B'}$

$= (A'B')$

on a : $(OB) \cap (AB) = \{B\}$

donc : $h((OB)) \cap h((AB)) = h(B)$

Scanné avec CamScanner

On a : $h(O) = O$

d'où : $h((OB)) = (OB) = (OB')$

donc : $h(B) = h((OB)) \cap h((AB)) \Rightarrow h(B) = (OB') \cap (A'B')$

$\Rightarrow h(B) = B'$

Série d'exercices: Espaces Affines Euclidiens

Exercice 1.

1. *Déterminer l'intersection d'une droite et d'une sphère.*
2. *Montrer que trois points alignés sur un cercle ne peuvent être distincts.*

Exercice 2. *On dit qu'un sous-espace affine F est tangent à une sphère $S(O,r)$ en un point A si l'on a $F \cap S = \{A\}$.*

1. *Montrer que pour un point $A \in S$, il existe un unique hyperplan tangent à S en A (c'est l'hyperplan orthogonal à la droite (OA) passant par A noté $T_A(S)$).*
2. *Montrer que les sous-espaces affines tangents à S en A sont exactement les sous-espaces affines de $T_A(S)$ passant par A.*

Exercice 3. *(Axe radical de deux cercles, Centre radical de trois cercles)*
Soit E un espace affine euclidien de dimension 2. On note $\mathcal{C}(M)$ la puissance d'un point M par rapport à un cercle $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres $\Omega \neq \Omega'$.

1. *Montrer que l'ensemble*
$$\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \left\{M \in E / \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M)\right\}$$
est une droite de E. On l'appelle axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
2. *Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \perp \left(\Omega\Omega'\right)$.*
3. *On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = (AB)$.*
4. *On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A\}$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est la tangente commune aux cercles en A.*
5. *On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les équations:*
$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$$
Montrer que la droite $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ a pour équation:
$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + (c - c') = 0$$
6. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ trois cercles de centres $\Omega, \Omega', \Omega''$ non alignés. l'on appelle centre radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$.*
   (a) *Montrer que les trois axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}, \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ et $\Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$ sont concourants en un point γ, que l'on appelle centre radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$.*
   (b) *On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. Construire $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ en utilisant un cercle $\mathcal{C}''$ sécant à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.*
   (c) *Montrer que si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont 2 à 2 orthogonaux, alors leur centre radical est l'orthocentre du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$.*

Exercice 4. *(Distance entre deux droites de l'espace)*
Soit E un espace affine euclidien de dimension 3. Pour tout couple de droites (D_1, D_2) on appelle
$$d(D_1, D_2) = \inf\{\|y_1 - y_2\|, y_1 \in D_1, y_2 \in D_2\}.$$

1. *Calculer $d(D_1, D_2)$ quand D_1 et D_2 sont concourantes.*
2. *Soit $a_1 \in D_1$ et $a_2 \in D_2$. En décomposant $a_1 - a_2$ dans $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \left(\vec{D}_1 + \vec{D}_2\right)^{\perp}$ montrer qu'il existe $x_1 \in D_1$ et $x_2 \in D_2$ tels que $d(D_1, D_2) = d(x_1, x_2)$.*
3. *Montrer que pour $z_1 \in D_1$ et $z_2 \in D_2$,*
$$d(D_1, D_2) = d(z_1, z_2) \text{ ssi } z_1 - z_2 \in \vec{D}_1^{\perp} \cap \vec{D}_2^{\perp}.$$
4. *Montrer que si e_i est un vecteur directeur de D_i*
$$d(D_1, D_2)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(a_1 - a_2, e_1, e_2)}{\mathrm{Gram}(e_1, e_2)}$$
5. *Calculer la distance entre les deux droites données par les équations cartésiennes dans un repère orthonormé de E:*
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Ex

Exercice 1 :

2\ Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r,

Soit A, B et C des points de (C)

Supposons que $A \neq B$

Supposons que $C \in (AB)$

alors: $\vec{CA} = \alpha \vec{CB}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$

on a: $P(C,(C)) = OC^2 - r^2 = 0$ car $C \in (C)$

et on a: $P(C,(C)) = \langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle$

$= \langle \alpha \vec{CB}, \vec{CB} \rangle$

$= \alpha CB^2$

d'où: $\alpha CB^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $CB = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $C = B$

$\Rightarrow \vec{CA} = \vec{0}$ ou $C = B$

$\Rightarrow C = A$ ou $C = B$

Exercice 2 :

1\ • L'existence :

Soit H l'hyperplan passant par A et admettant $\vec{OA}$ comme vecteur normal,

alors: $(OA) \perp H$

puisque: $A \in H$

donc: A est la projection orthogonal de O sur H

d'où: $d(O,H) = OA = r$

donc: $A \in S$

d'où: $H \cap S = \{A\}$

alors: H est tangent à S en A.

• L'unicité :

Soit H' un hyperplan tangent à S en A,

donc: $A \in H \cap H'$

et puisque H' est tangent à S

alors: $\vec{OA}$ est un vecteur normal à H'

d'où: $H = H'$

Exercice 3:

1\ $\Delta_{C,C'} = \{M \in E / C(M) = C'(M)\}$

$C(M) = C'(M) \iff \Omega M^2 - r^2 = \Omega' M^2 - r'^2$

$\iff \Omega M^2 - \Omega' M^2 = r^2 - r'^2$

$\iff \langle \vec{\Omega M} - \vec{\Omega' M}, \vec{\Omega M} + \vec{\Omega' M} \rangle = r^2 - r'^2$

$\iff \langle \vec{\Omega \Omega'}, \vec{\Omega \Omega'} + 2\vec{\Omega' M} \rangle = r^2 - r'^2$

$\iff \Omega\Omega'^2 - 2\langle \vec{\Omega' \Omega}, \vec{\Omega' M} \rangle = r^2 - r'^2$

$\iff \langle \vec{\Omega' \Omega}, \vec{\Omega' M} \rangle = \dfrac{r'^2 - r^2 + \Omega\Omega'^2}{2}$

$\cancel{\iff \langle \vec{\Omega'\Omega}, \vec{\Omega' M} \rangle \ \alpha = \dfrac{r'^2 - r^2 + \Omega\Omega'^2}{2}}$

posons: $\vec{u} = \vec{\Omega' \Omega}$ et $\alpha = \dfrac{r'^2 - r^2 + \Omega\Omega'^2}{2}$

alors: $M \in \Delta_{C,C'} \iff \langle \vec{u}, \vec{\Omega' M} \rangle = \alpha$

donc: $\Delta_{C,C'}$ est un hyperplan de direction orthogonal à $\vec{u}$

d'où: $\Delta_{C,C'}$ est une droite

2\ d'après 1\, $\Delta_{C,C'}$ est une droite de vecteur directeur $\perp$ à $\vec{u} = \vec{\Omega'\Omega}$

donc: $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega'\Omega)$

3\ Supposons que: $C \cap C' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$

$A \in C \Rightarrow C(A) = 0$ et $A \in C' \Rightarrow C'(A) = 0$

donc: $C(A) = C'(A)$

d'où: $A \in \Delta_{C,C'}$

de la même manière: $B \in \Delta_{C,C'}$

alors: $\Delta_{C,C'} = (AB)$

4\ on a: $C \cap C' = \{A\} \Rightarrow A \in (\Omega\Omega')$

Or: $A \in C \Rightarrow C(A) = 0$ et $A \in C' \Rightarrow C'(A) = 0$

d'où: $A \in \Delta_{C,C'}$

d'après 2\: $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega\Omega')$

donc: $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega A)$ et $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega' A)$

d'où: $\Delta_{C,C'}$ est tangente à C et à C'

donc: $\Delta_{C,C'}$ est une tangente commune de C et C'