Université Abdelmalek Essaadi
ENS Tétouan
LEM, M2
Année 2023-2024

TD 1 – Nombres réels

Exercice 1
On suppose que A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$

1. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.
3. Montrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure, et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
4. Calculer la borne supérieure de l'ensemble $\{\frac{1+(-1)^n}{n} - n^2; n \in \mathbb{N}^*\}$.
5. Montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
6. Montrer $\sup(-A) = -\inf(A)$ où $-A = \{-a, \ a \in A\}$

On définit L'ensemble $A + B = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}$

1. Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
3. Déduire $\sup(A - B)$ où $A - B = \{a - b, \ / \ a \in A, b \in B\}$
4. Calculer les bornes supérieure et inférieure $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}; \quad n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit l'ensemble $\lambda A = \{\lambda a; \quad a \in A\}$.

1. Montrer que l'ensemble λA possède une borne supérieure et une borne inférieure.
2. Montrer que

$$\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup(A) & \text{si} \quad \lambda > 0 \\ \lambda \inf(A) & \text{si} \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

On définit l'ensemble $A \cdot B = \{ab, \text{ où } (a, b) \in A \times B\}$, A-t-on toujours $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \times \sup(B)$?

Montrer $A \cap B$ possède une borne supérieure, a-t-on $\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B))$?

Exercice 2
Déterminer, lorsqu'elles existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus grand élément et le plus petit élément

1. $A = \{\frac{n-1}{n}; \quad /n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $B = \{(-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad /n \in \mathbb{N}\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} / \quad x^2 + x + 1 \geq 0\}$
4. $D = \{\frac{\cos(n)}{n} \quad / \, n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} / \quad x^2 + x + 1 \leq 0\}$

Exercice 3

Soient a, b deux entiers naturels $(b \neq 0)$.

1. Montrer que l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : nb \leq a\}$ est non vide et admet un maximum que l'on notera q.
2. On pose $r = a - bq$. Montrer que $0 \leq r < b$.
3. En déduire que : pour tout entier $b > 0$, et pour tout entier $a \geq 0$, $\exists (q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0, a[\![$: $a = bq + r$. Montrer que ce couple (q, r) est unique.

Exercice 4
(Densité de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

1. Montrer que $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + r \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est non vide.
3. Soient x et y deux réels et soit $z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Montrer que l'intervalle $]x - z, y - z[$ contient au moins un rationnel r et en déduire que l'intervalle $]x, y[$ contient au moins un élément $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.
4. Que peut-on déduire.

Exercice 5
Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1 \text{ et } x^2 < 2\}$.

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$.
2. Soit $r \in A$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$: $n(2 - r^2) > 2r + 1$. En déduire que $r' = r + \frac{1}{n} \in A$.
3. Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que $M > \sqrt{2}$.
4. En déduire que $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6

1. Montrer que $\forall (p, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \qquad E(x + p) = E(x) + p$
2. Montrer $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.
3. Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad \frac{E(nx)}{n} \leq x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}$.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Montrer que $\exists p \in \mathbb{N}^* \quad x < \frac{E(px)+1}{p} < y$. Conclure

Exercice 7
Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Démontrer que $I \cap J = \emptyset$.