Séries de Fouriers

1/ Séries trigonométriques

Définition.

Soit T un réel non nul.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ est dite périodique (T- périodique) de période T si on a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x+T) = f(x)$.

Remarques:

1/- Si f est T-périodique, elle est aussi nT- périodique pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2/- S'il y a un plus petit $T>0$ tel que f soit T-périodique, On dit parfois que T est la période de f.

Exemple: ~~$x \mapsto \cos(wx)$ et $x \mapsto$~~

$x \longmapsto \cos(wx)$, $x \longmapsto \sin(wx)$

La période est $T = \frac{2\pi}{w}$.

- En général il n'y a pas toujours de plus petite période strictement positive. Par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f est T- périodique pour tout $T \in \mathbb{Q}$.

3/- Le graphe d'une fonction périodique s'obtient par des translations d'amplitude nT à partir du graphe de la restriction de f à un intervalle de longueur T.

Définitions

1/- Une fonction réelle f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

2/- Une fonction réelle f est de classe C^k par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ un prolongement de classe C^k à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

3/- Si une fonction réelle définie sur un intervalle I qui n'est pas nécessairement un segment, alors on dit que f est de classe C^k par morceaux sur I si elle est de classe C^k par morceaux sur tout segment de I.

Remarque:

Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et possède une limite à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}; on note ces limites $f(a_i^+)$ et $f(a_{i+1}^-)$.

Exemples:

1) La fonction: $x \mapsto E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2) la fonction $x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \in]0,3]. \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

est définie sur $[0,3]$, continue sur $]0,3]$ mais n'est pas continue par morceaux sur $[0,3]$ car $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

3) la fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in]0,1]. \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$, continue sur $]0,1]$ mais n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Proposition:

Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Alors

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}$; $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ et $\int_b^{b+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

Définition:

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels (ou complexes) et $w > 0$ un réel strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n(x) = a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)$.

la série de fonctions: $\sum_0^{+\infty} f_n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)]$

s'appelle une série trigonométrique.

Remarques:

- Si la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

- Si cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f ci-dessus est continue.

- Si les deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

- Si la série numérique $\sum(|a_n| + |b_n|)$ converge, alors la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

- Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} n(|a_n| + |b_n|)$ converge, alors la fonction f est dérivable (de classe C^1) sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} \cos(nx)$.

On a la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ converge. Donc la série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \cos(nx)$ et continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^3+1} \cos(2nx) + \frac{1}{n^4+2} \sin(2nx)$.

- On a les deux séries numériques $\sum \frac{1}{n^3+1}$ et $\sum \frac{1}{n^4+2}$ convergent. Donc la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1} \cos(2nx) + \frac{1}{n^4+2} \sin(2nx)$ est continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$.

- De plus la série numérique $\sum \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^4+1}$ est convergente. ~~Donc la~~ Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

1/ La série de Fourier d'une fonction périodique.

Lemme. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(n w x) + b_n \sin(n w x)$ une série trigonométique converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors les coefficients a_n et b_n sont déterminés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(n w x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n w x)\,dx.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n w x)\,dx.$$

où $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n w x) + b_n \sin(n w x)\right].$

et $T = \frac{2\pi}{w}.$

Définition: Soit f une fonction T- périodique et intégrable sur $[0,T]$

On note $w = \frac{2\pi}{T}.$ Les coefficients de Fourier de la fonction f sont définis par:

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(n w x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n w x)\,dx$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n w x)\,dx.$

La série trigonométrique $S_f = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n w x) + b_n \sin(n w x)\right]$ s'appelle la série de Fourier de f.

Remarques:

1- On peut remplacer ~~lim~~ $\int_0^T$ par $\int_a^{a+T}$ et en particulier par $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$.

2- Si f est pair, $b_n = 0$ et $S_f = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x)$.

- Si f est impair, $a_n = 0$ et $S_f = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$.

Lemme.

Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux.
Si la série de Fourier converge en x_0, alors :

$$S_f = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x_0) + b_n \sin(n\omega x_0) = \begin{cases} f(x_0), & \text{si } f \text{ est continue en } x_0. \\ \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right], & \text{si non.} \end{cases}$$

Proposition

Si f est une fonction périodique de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f est normalement convergente.

Théorème de Dirichlet.

Soit f une fonction périodique de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Théorème.

Si f est une fonction périodique continue, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Propriétés

1/ si deux fonctions f et g ont la même série de Fourier, alors $f(x)=g(x)$ en tout point de continuité de f et g.

2/ Soit f une fonction T-périodique de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de la dérivée f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

$$S_{f'} = \sum_{n=1}^{+\infty} [wn b_n \cos(nwx) - wn a_n \sin(nwx)].$$

Théorème:

Soit f une fonction T-périodique et bornée sur $[0,T]$.

1/ La série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique. Cela veut dire que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

avec $S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kwx) + b_k \sin(kwx).$

2/ Les séries numériques $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes.

En particulier: $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3/ Formule de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(x))^2 dx = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Exercice ①

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique telle que.

$f(x) = \pi - |x|$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

1/ Déterminer S_f la série de Fourier de f.

2/ La série S_f converge-t-elle vers f ?

Exercice ②

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique, impaire telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in]0, \pi[\\ 0 & , \text{ si } x = \pi . \end{cases}$$

1/ Déterminer la série de Fourier trigonométriques de f.

2/ Etudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

3/ En déduire les valeurs des sommes:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad , \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Exercice ③

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continûment différentiable, et soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle suivante:

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

1/ Trouver une solution 2π-périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique.

2/ Appliquer le résultat de la question 1 au cas $\alpha = 1$ et

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & , t \in [0, \pi[\\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & , t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

3/ Forme complexe des séries de Fourier

Posons $c_0 = a_0$ et $\forall n \geq 1$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Puisque $\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$ et $\sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$.

Alors la série trigonométrique $\sum_{n \geq 0} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$.

Peut s'écrire sous la forme : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$.

Inversement, si la série complexe ci-dessus est à valeurs réelles, alors $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n, et on passe alors à la forme réelle par les formules suivantes :

$a_0 = c_0$, $\forall n \geq 1$, $a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$.

Définition :

une série trigonométrique complexe est une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$.

où c_n sont des nombres complexes et $\omega \in]0, +\infty[$.

Remarques :

Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ une série trigonométrique complexe.

1/ si cette série est converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ est $\frac{2\pi}{\omega}$ - périodique.

2/ si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ converge. alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3/ Si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n c_n|$ converge, alors la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i n \omega c_n e^{in\omega x}$$

Définition :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique intégrable sur $[0, T]$.

- On appelle coefficients de Fourier complexe de f la suite des nombres complexes définies par :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- La série trigonométrique complexe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{in\omega t}$ s'appelle la série de Fourier complexe de f.

Remarque

1) Les résultats de la convergence de la série de Fourier réelle d'une fonction f s'applique dans le cas complexe.

2) La formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2\, dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 .$$