Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 1

**Feuille de TD n° 2**

**Exercice 1.** 1. *Soit* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *défini par* $Q = X^4 + 2\alpha X^3 + \beta X^2 + 2X + 1$.
*Trouver* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *pour* $Q$ *soit le carré d'un polynome de* $\mathbb{R}[X]$

2. *Déterminer les réels* $a, b$ *et* $c$ *tels que* $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ *soit factorisable par* $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$.

**Exercice 2.** *Soit* $P = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$

1. *Montrer que* $\frac{1}{2}$ *est une racine multiple de* $P$.
2. *En déduire la factorisation de* $P$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *et dans* $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 3.** *Pour* $n \in \mathbb{N}$

1. *Montrer que le polynôme* $P_n = (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ *est divisible par* $Q = X^2 - X + 1$.
2. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* $P = X^n + X + 1$ *par* $Q = (X - 1)^2$.
3. *Quel est le reste de la division euclidienne de* $P = X^n$ *par* $Q = (X - 1)^2$.

**Exercice 4.** *Déterminer le* $\text{pgcd}(P, Q)$ *dans les cas suivants*

1. $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4,\quad Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
2. $P = X^5 - 3X^3 + X^2 + 4,\quad Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
3. $P = X^{n-1} - 1,\quad Q = X^{m-1} - 1$, *pour* $m, n \geq 1$.

**Exercice 5.** *Soit* $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$

1. *Décomposer* $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.
2. *En déduire une décomposition de* $P$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 6.** *Soit* $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

1. *Calculer le PGCD de* $P$ *et* $P'$.
2. *Quelles sont les racines communes de* $P$ *et* $P'$ *?*
3. *Quelles sont les racines multiples de* $P$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *?*
4. *Montrer que* $(X^2 + 1)^2$ *divise* $P$.
5. *Factoriser* $P$ *dans* $\mathbb{R}[X]$