

Table des matières

1	Les espaces vectoriels	1
1.1	Définitions et exemples	1
1.2	Combinaison linéaire	2
1.3	Sous-espace vectoriel	2
1.4	Famille génératrice	3
1.5	Famille libre, Famille liée	4
1.6	Base	6
1.7	Dimension d'un espace vectoriel	7
1.8	Rang d'une famille finie de vecteurs	8
1.9	Somme directe de sous-espaces vectoriels	9
1.10	Exercices compléments de cours	10
2	Calcul matriciel	11
2.1	Définitions et notations	11
2.2	Matrices de types particuliers	13
2.3	Opérations sur les matrices	16
2.4	Produit matriciel	18
2.5	Matrices inversibles	20
2.6	Puissances d'une matrice	21
2.6.1	Puissances positives	21
2.6.2	Formule de binôme de Newton	22
2.6.3	Matrice idempotente	23
2.6.4	Matrice nilpotente	23
2.6.5	Matrices semblables	24
2.6.6	Puissances négatives d'une matrice inversible	24
3	Déterminant d'une matrice	26
3.1	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1	26
3.2	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2	26
3.3	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3	27
3.3.1	Méthode de Sarrus (pour l'ordre 3)	27
3.3.2	Méthode des cofacteurs	27

3.4	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n	28
3.5	Applications	32
3.5.1	Inversion d'une matrice par la méthode des cofacteurs	32
3.5.2	Rang d'une matrice	33
4	Applications linéaires	35
4.1	Définitions et Vocabulaire	35
4.1.1	Rappel sur les applications	35
4.1.2	Définitions et exemples	36
4.2	Propriétés élémentaires	38
4.3	Sous-espaces associés à une application linéaire	40
4.4	Théorème du rang	41
4.5	Exemples d'application	42
4.6	Matrice d'une application linéaire	44
4.6.1	Définitions et exemples	44
4.6.2	Liens avec le calcul matriciel	46
4.6.3	Ecriture matricielle	47
4.7	Changement de bases	49
4.7.1	Matrice de passage	49
4.7.2	Changement de coordonnées d'un vecteur	50
4.7.3	Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire	51
4.7.4	Exemple d'application	52
5	Systèmes d'équations linéaires	56
5.1	Définitions	56
5.2	Résolution d'un système par la méthode de Gauss	57
5.2.1	Opérations élémentaires (ou transformations de Gauss)	57
5.2.2	Matrice échelonnée	59
5.2.3	Matrice échelonnée réduite ligne (e.r.l)	59
5.2.4	Résolution d'un système linéaire	60
5.2.5	Exemples d'application	62
5.2.6	Application (Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss) . . .	68
5.3	Résolution d'un système par la méthode de Cramer	70
5.3.1	Résolution d'un système de Cramer (cas particulier)(et exemples) . .	70
5.3.2	Résolution d'un système quelconque (cas général)(et exemples) . . .	71

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un corps commutatif.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1

→ Un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou \mathbb{K} -espace vectoriel) est un ensemble non vide E , muni de deux lois, l'une interne notée " + " et l'autre externe notée " . " et qui satisfait les propriétés suivantes :

$\forall u, v, w \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

- 1- $u + v = v + u$.
- 2- $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- 3- La loi " + " admet un élément neutre noté 0_E ($u + 0_E = u$).
- 4- Tout élément u de E admet un symétrique pour la loi " + ", noté $-u$ ($u + (-u) = 0_E$).
- 5- $1.u = u$.
- 6- $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$.
- 7- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$.
- 8- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$.

→ Les éléments de E sont appelés les vecteurs et les éléments de \mathbb{K} sont appelés les scalaires.

Exemple 1.1.2

1) $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ($n \in \mathbb{N}^*$) où

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ et} \\ \alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha.x_1, \dots, \alpha.x_n), \end{cases}$$

pour tous $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- 2) Soit $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à l'indéterminée X et à coefficients dans \mathbb{K} . On munit $\mathbb{K}[X]$ de la loi interne (l'addition des polynômes) :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P, Q) &\longmapsto P + Q\end{aligned}$$

et de la loi externe (la multiplication d'un polynôme par un élément de \mathbb{K}) :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (\alpha, Q) &\longmapsto \alpha \cdot Q.\end{aligned}$$

Alors $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- 3) Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ (noté \mathbb{K}^X) l'ensemble des applications de X vers \mathbb{K} . On munit cet ensemble de l'addition et de la multiplication par un scalaire comme suit : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in X$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

$(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

- 4) \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

N.B. Dans ce qui suit, E désignera un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.2 Combinaison linéaire

Définition 1.2.1

Soient v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de v_1, \dots, v_n toute somme :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{où } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Exemple 1.2.2

$E = \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R} -espace vectoriel).

Une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (-2, 3)$ est de la forme :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 3) = (\alpha - 2\beta, 2\alpha + 3\beta) \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.3 Sous-espace vectoriel

Définition 1.3.1

Soit $F \subset E$. F est dit sous-espace vectoriel de E si $(F, +, \cdot)$ est aussi un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 1.3.2

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \emptyset$ et $\forall u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha u + \beta v \in F$.

Exemples 1.3.3

- 1) $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E .

- 2) $\forall v_1, \dots, v_n \in E$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de v_1, \dots, v_n qui est égal à $\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ ou $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
Notons que $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\{v_1, \dots, v_n\}$.
- 3) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . alors :

$$F \cap G = \{v \in E \mid v \in F \text{ et } v \in G\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

$$\text{et } F + G = \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Par contre $F \cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E comme le montre l'exemple ci-dessous :

Soit $F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 . Pourtant $F \cup G$ ne l'est pas puisque $(1, 0) \in F$, $(0, 1) \in G$ et $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

Notons que $F + G = \langle F \cup G \rangle$.

1.4 Famille génératrice

Définition 1.4.1

Une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de E est dite famille génératrice de E (ou engendre E) si $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$. Ce qui équivaut à dire :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Propriétés 1.4.2

Soient A et B deux parties de E et $v_1, \dots, v_n \in E$. On a :

- 1) $A \subseteq B \implies \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.
- 1) A est un sous-espace vectoriel de $E \iff \text{Vect}(A) = A$.
- 3) $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
- 4) $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ ne change pas si :
 - a) on change l'ordre de deux éléments v_i et v_j .
 - b) on remplace un vecteur v_j par une combinaison linéaire de la forme $\alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$, avec $\alpha \neq 0$.

Démonstration.

- 1) Si $A \subseteq B$, alors $A \subseteq B \subseteq \text{Vect}(B)$. Comme $\text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel et il contient A , alors $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

- 2) Si A est un sous-espace vectoriel de E , alors c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A , et donc $\text{Vect}(A) = A$. Réciproquement si $\text{Vect}(A) = A$, alors A est un sous-espace vectoriel de E .
- 3) $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E . D'après la propriété précédente $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
- 4) a) Par commutativité de l'addition dans E .
- b) Posons $v'_j = \alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$. Il s'agit de montrer que :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n).$$

Puisque v'_j est une combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v_j, \dots, v_n$, alors toute combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v_j, \dots, v_n$. Ainsi

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n) \subseteq \text{Vect}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n).$$

D'autre part, on a $v'_j = \alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$. Or $\alpha \neq 0$, donc $v_j = \frac{1}{\alpha}(v'_j - \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i)$,

c'est-à-dire v_j est une combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n$. Ainsi toute combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v_j, \dots, v_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n$. D'où

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) \subseteq \text{Vect}(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n).$$

1.5 Famille libre, Famille liée

Définition 1.5.1

Soient $v_1, \dots, v_n \in E$.

→ La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est dite *libre* (ou *linéairement indépendante*) si :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \implies \alpha_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

→ La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est dite *liée* (ou *linéairement dépendante*) si elle n'est pas libre. Ce qui équivaut à dire que :

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls} / \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0.$$

Exemples 1.5.2

- 1) Dans \mathbb{K}^n , soient les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Alors la famille (e_1, \dots, e_n) est libre. En effet :

soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ ($0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$). On a $(\alpha_1, 0, \dots, 0) +$

$(0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$, par suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots, \alpha_n = 0$.

2) La famille des fonctions (f_1, \dots, f_n) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, où $f_k(x) = e^{kx}$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrons ceci par récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car f_1 est différente de la fonction nulle θ .
- Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons-là pour $n + 1$. En effet : soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1} f_{n+1} = \theta. \quad (1)$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \dots + \alpha_n e^{nx} + \alpha_{n+1} e^{(n+1)x} = 0. \quad (2)$$

Par dérivation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + \dots + n\alpha_n e^{nx} + (n+1)\alpha_{n+1} e^{(n+1)x} = 0. \quad (3)$$

D'autre part, la multiplication de l'équation (2) par $(n+1)$ aboutit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1(n+1)e^x + \alpha_2(n+1)e^{2x} + \dots + \alpha_n(n+1)e^{nx} + \alpha_{n+1}(n+1)e^{(n+1)x} = 0. \quad (4)$$

En effectuant la soustraction des équations (3) et (4), on arrive à supprimer le dernier terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n\alpha_1 e^x + (n-1)\alpha_2 e^{2x} + \dots + \alpha_n e^{nx} = 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$n\alpha_1 f_1 + (n-1)\alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = \theta.$$

L'hypothèse de récurrence implique que tous les coefficients sont nuls. Par suite, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Dès lors, $\alpha_{n+1} = 0$.

Proposition 1.5.3

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille libre de E . Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ est une combinaison linéaire des v_i , alors la décomposition est unique (c'est-à-dire les α_i sont uniques).

Démonstration.

Si $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, alors on a $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$ et par suite $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Donc $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ et la décomposition est unique.

Propriétés 1.5.4

- 1) $\forall x \in E ; (x)$ est libre $\iff x \neq 0_E$.
- 2) Toute famille qui contient le vecteur nul est liée.
- 3) Les vecteurs d'une famille libre sont tous non nuls.
- 4) Toute famille où l'un des vecteurs est combinaison des autres est liée (à fortiori, toute famille contenant deux vecteurs proportionnels ou égaux est liée).
- 5) Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- 6) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. Exercice.

Exemples 1.5.5

- 1) $\{v, \alpha v, w\}$ est liée $\forall v, w \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$. (car : $-\alpha v + \alpha v + 0w = 0$).
- 2) $\{(1, 2, 4), (8, 9, 1), (0, 0, 0)\}$ est liée dans \mathbb{R}^3 .
- 3) $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)\}$ et $\{(0, 0, \sqrt{7}, 0)\}$ sont libres dans \mathbb{R}^4 .
- 4) $\{(1, 2, 4), (\frac{1}{2}, 1, 2), (3, 8, 0)\}$ est liée dans \mathbb{R}^3 puisque les vecteurs $(1, 2, 4)$ et $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ sont proportionnels $(\frac{1}{2}, 1, 2) = \frac{1}{2}(1, 2, 4)$.

1.6 Base

Définition 1.6.1

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E . On dit que \mathcal{B} est une base de E si \mathcal{B} est à la fois libre et génératrice de E .

Théorème 1.6.2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ un système de vecteurs de E . On a :

\mathcal{B} est une base de $E \iff \forall x \in E, \exists !(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$.

Dans ce cas, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelées les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

Démonstration :

(\Rightarrow) Soit \mathcal{B} une base de E . Si $x \in E$, alors x est une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} (puisque \mathcal{B} est génératrice). L'unicité des coefficients est une conséquence du fait que \mathcal{B} est libre.

(\Leftarrow) Il est clair que \mathcal{B} est génératrice. Et si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, donc $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0e_1 + \dots + 0e_n = 0$. L'unicité de la décomposition du vecteur nul implique que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Proposition 1.6.3

Soit S un système générateur fini de E . Alors on peut en extraire une base de E .

Démonstration :

Soient $S = (v_1, \dots, v_n)$ un système générateur de E et $(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ un sous-système de S comportant le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants, et $F = \text{Vect}(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$. On a $E = F$, sinon, il existe $x \in E \setminus F$ avec $x \in S$. Par suite $(x, v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ sera libre (contradiction). D'où $E = F = \text{Vect}(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ et $(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ est une base de E .

Remarque 1.6.4 (Théorème de la base incomplète)

Si S est un système libre d'un espace vectoriel de dimension finie, le raisonnement précédent montre que l'on peut compléter S en une base de E .

1.7 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 1.7.1

Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs ($n \geq 0$). Alors tout système libre dans E comporte au plus n vecteurs.

Démonstration.

Soient $S = (v_1, \dots, v_n)$ un système générateur de E et (w_1, \dots, w_m) un système libre dans E . Montrons que $m \leq n$.

On a :

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{où les } \alpha_i \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Supposons par exemple que $\alpha_1 \neq 0$, alors $v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1} (\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$. Il en résulte que (w_1, v_2, \dots, v_n) est un système générateur de E . D'où

$$w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \quad \text{où les } \beta_2, \dots, \beta_n \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Supposons par exemple que $\beta_2 \neq 0$, alors $v_2 = \beta_2^{-1} w_2 - \beta_2^{-1} (\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n)$. Il en résulte que $(w_1, w_2, v_3, \dots, v_n)$ est un système générateur de E .

Par absurde, supposons que $m > n$, alors la substitution de (w_1, \dots, w_n) à (v_1, \dots, v_n) sera un système générateur de E . D'où w_{n+1} sera une combinaison linéaire de w_1, \dots, w_n (absurde).

Corollaire 1.7.2

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Démonstration.

Soient n et n' les cardinaux de deux bases de E . On a $n \leq n'$ et $n' \leq n$, donc $n = n'$.

Définitions 1.7.3

- 1) L'espace E est dit de dimension finie s'il admet un système générateur fini (v_1, \dots, v_n) . Dans ce cas, tout vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs v_1, \dots, v_n . (Notons que la décomposition de x sur les v_i n'est pas en général unique).
- 2) Le cardinal d'une base de E s'appelle la dimension de E , et se note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.
- 3) Un espace vectoriel H qui ne possède pas de base finie est dit de dimension infinie. On note $\dim H = \infty$.

Exemples 1.7.4

- 1) Dans \mathbb{K}^n , les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ... et $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ forment une base de \mathbb{K}^n . Par suite $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- 2) Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur \mathbb{K} . Alors $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1.7.5

La dimension d'un espace vectoriel est un entier qui dépend du corps de base ; par exemple : \mathbb{C} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1 ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$). Aussi, \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 ($\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$) (puisque'il admet $(1, i)$ comme base).

Propriétés 1.7.6

→ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel tel que $\dim E = n$. Et soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ un système de vecteurs de E .

- 1) Si $p > n$, alors \mathcal{F} est non libre.
- 2) Si $p < n$, alors \mathcal{F} est non génératrice.
- 3) Si $p = n$, alors on a :

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

→ Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim F \leq \dim E$.

→ Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\dim F = \dim E \iff E = F.$$

Exemples 1.7.7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ ($\dim E = 3$).

- 1) $\mathcal{F} = ((1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 4, 8), (1, -1, \sqrt{3}))$ est non libre dans \mathbb{R}^3 puisque $\text{card } \mathcal{F} = 4 > 3$.
- 2) $\mathcal{F}' = ((1, 2, 0), (0, 1, 1))$ est un système non générateur de \mathbb{R}^3 puisque $\text{card } \mathcal{F}' = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
- 3) $\mathcal{F}'' = ((1, 2, 3), (0, 1, 1), (2, 0, 2))$ est une base de \mathbb{R}^3 . En effet :
On a $\text{card } \mathcal{F}'' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer que \mathcal{F}'' est libre (ou génératrice).

On vérifie que $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(2, 0, 2) = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

1.8 Rang d'une famille finie de vecteurs**Définition 1.8.1**

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E . On appelle rang de \mathcal{F} qu'on note $\text{rg } \mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

$\text{rg } \mathcal{F} = \text{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim \langle v_1, \dots, v_p \rangle =$ le nombre maximum de vecteurs v_i libres dans E .

Remarque 1.8.2

Par construction, la famille de vecteurs (v_1, \dots, v_p) est un système générateur de $\langle v_1, \dots, v_p \rangle$. Et pour chercher une base de $\langle v_1, \dots, v_p \rangle$, il suffit alors d'en tirer le nombre maximum de vecteurs libres.

Exemples 1.8.3

- 1) $E = \mathbb{R}^4$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $v_3 = (3, 5, 2, -1)$. On a $v_3 = v_1 + 2v_2$, donc (v_1, v_2, v_3) est non libre, par suite $\text{rg}(v_1, v_2, v_3) \neq 3$.

(v_1, v_2) est libre, donc $\text{rg } \mathcal{F} = 2$.

2) $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ et $v_3 = (-1, -2, -3)$.

\mathcal{F} est non libre puisque $v_3 = -v_1$, donc $\text{rg } \mathcal{F} \neq 3$.

(v_1, v_2) , (v_1, v_3) et (v_2, v_3) sont liés, donc $\text{rg } \mathcal{F} \neq 2$. Par suite $\text{rg } \mathcal{F} = 1$.

3) $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 4)$ et $v_3 = (4, 9, 16)$.

\mathcal{F} est libre, donc $\text{rg } \mathcal{F} = 3$.

4) $E = \mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, 3)$ et $v_3 = (3, 4)$.

- \mathcal{F} est non libre puisque $\text{card } \mathcal{F} = 3 > 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\text{rg } \mathcal{F} \neq 3$.
- (v_1, v_2) est libre, donc $\text{rg } \mathcal{F} = 2$.

Propriété 1.8.4

$$\text{rg } \mathcal{F} \leq \min(\text{card } \mathcal{F}, \dim E).$$

Remarque 1.8.5

On verra plus loin – comme application des déterminants – une méthode plus simple pour voir si une famille de vecteurs est libre ou liée.

1.9 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 1.9.1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- La somme $F + G$ est dite directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, $F + G$ est notée $F \oplus G$.
- Si $F \oplus G = E$, on dit alors que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E .

Théorème 1.9.2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives B_F et B_G . On a :

$$E = F \oplus G \iff B_F \cup B_G \text{ est une base de } E.$$

Exemple 1.9.3

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $F = \langle (2, 0) \rangle$ et $G = \langle (0, \sqrt{8}) \rangle$.

- $\{(2, 0)\}$ et $\{(0, \sqrt{8})\}$ sont deux bases respectives de F et G .
- $\mathcal{B} = ((2, 0), (0, \sqrt{8}))$ est libre dans \mathbb{R}^2 et $\text{card } \mathcal{B} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 . par suite $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

1.10 Exercices compléments de cours

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Montrer que :

- 1) Si G est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est un système de vecteurs de E , alors $\mathcal{F} \subseteq G \iff \text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$.
- 2) Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux familles de vecteurs de E , alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F}') \iff$ tout vecteur de \mathcal{F} est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F}' .
- 3) Si $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ est un système de vecteurs de E , et si v_{p+1} est un vecteur de E qui est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} , alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p, v_{p+1})$.
- 4) Si $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ est un système de vecteurs de E , alors \mathcal{F} est lié $\iff \exists i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $v_{i_0} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$. Et dans ce cas on a :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p).$$

- 5) Si $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ est un système libre de vecteurs de E , alors $\forall v \in E$,

$$v \notin \text{Vect}(\mathcal{F}) \implies (v_1, \dots, v_p, v) \text{ est libre.}$$

Chapitre 2

Calcul matriciel

Motivation

En général, pour résoudre un système (S) à plusieurs équations et à plusieurs indéterminées, on peut nous ramener à résoudre une seule équation (sera dite matricielle) de la forme $A.X = B$. (où A et B seront deux matrices connues et X une matrice inconnue).

Exemple

$$(S) : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + \sqrt{2}y - z = 280 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 280 \end{pmatrix}}_B$$

En fait :

Les matrices sont des objets mathématiques que l'on rencontre très couramment en mathématiques, que ce soit en algèbre linéaire ou en géométrie.

Leurs intérêts sont notamment les nombreuses interprétations qu'on peut leur donner, en outre le nombre de problèmes qu'elles permettent de résoudre.

N.B. Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un corps (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), et m et n deux entiers naturels non nuls.

2.1 Définitions et notations

Définitions 2.1.1

→ Une matrice A est un tableau de nombres disposés en lignes et en colonnes. Elle est dite d'ordre (ou de type, ou de taille) (m, n) si elle est constituée de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow L_i(A) = \text{la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A$$

\uparrow
 $C_j(A) = \text{la } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } A$

On note :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

→ a_{ij} s'appelle le terme (ou le coefficient) de la matrice A .

→ Le terme a_{ij} se trouve au croisement de $L_i(A)$ et $C_j(A)$.

Exemple 2.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de type } (2, 3).$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de type } (2, 2).$$

→ Deux matrices sont dites égales si elles ont le même ordre et les coefficients correspondants sont égaux. Ce qui équivaut à dire :

Si $A = (a_{ij})$ est d'ordre (m, n) et $B = (b_{ij})$ est d'ordre (p, q) , alors :

$$A = B \iff (m, n) = (p, q) \text{ et } a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, m = p\}, \forall j \in \{1, \dots, n = q\}.$$

→ Si $m = n$, alors A est dite carrée d'ordre n . (le nombre de lignes de A est égal à celui de colonnes).

Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{La diagonale de } A.$$

- $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ s'appelle la diagonale principale de A .
- Les éléments a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A .
- Les éléments a_{ij} pour $i \neq j$, s'appellent les éléments hors diagonaux de A .
- On appelle trace de A , qu'on note $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ = la somme de tous les éléments diagonaux de A .

Notations

→ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (m, n) et à coefficients dans \mathbb{K} .

→ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans \mathbb{K} .

Exemples 2.1.3

- $A = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ ($B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ aussi).

2.2 Matrices de types particuliers**Matrice ligne****Définition 2.2.1**

Une matrice ligne (ou uniligne) est une matrice de type $(1, n)$.

Exemple 2.2.2

- $A = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$.
- $B = (1 \ 0 \ 4)$ (Attention ! à ne pas confondre la matrice $B = (1 \ 0 \ 4)$ et le vecteur $(1, 0, 4)$ de \mathbb{R}^3).

Matrice colonne**Définition 2.2.3**

Une matrice colonne (ou unicolonne) est une matrice de type $(m, 1)$.

Exemple 2.2.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire (supérieure/inférieure)**Définitions 2.2.5**

→ Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée $U = (u_{ij})$ / $u_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

→ Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée $L = (l_{ij}) / l_{ij} = 0 \ \forall i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A et B sont triangulaires supérieures.
- C est triangulaire inférieure.

Matrice diagonale

Définition 2.2.7

Une matrice diagonale est une matrice carrée $D = (d_{ij}) / d_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice unité

Définition 2.2.9

La matrice unité est la matrice carrée notée I_n (ou simplement I) définie par :

$$I_n = (e_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e_{ij} est dit le symbole de Kronecker).

Exemple 2.2.10

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

Matrice nulle**Définition 2.2.11**

La matrice nulle est une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} / a_{ij} = 0 \ \forall i, j$. On la note $O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.2.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Matrice symétrique/antisymétrique**Définitions 2.2.13**

→ Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

On appelle matrice transposée de A , qu'on note tA (ou A^T), la matrice d'ordre (n, m) , obtenue en interchangeant –dans l'ordre– les lignes et les colonnes de A .

Exemple 2.2.14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ est de type } (2, 3).$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ est de type } (3, 2).$$

→ Une matrice carrée A est dite symétrique si ${}^tA = A$.

→ Une matrice carrée A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$. (Dans ce cas, $a_{ii} = 0$).

Exemples 2.2.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est symétrique.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

2.3 Opérations sur les matrices

On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux lois de composition, l'une interne (l'addition $+$) et la seconde externe (\cdot) comme suit :

$\forall A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K},$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ et } \alpha.A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 2.3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 2.3.2

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :

- 1)
 - $A + B = B + A$.
 - $(A + B) + C = A + (B + C)$.
 - O est l'élément neutre pour l'addition ($A + O = A$).
 - Toute matrice $A = (a_{ij})$ admet un symétrique $-A = (-a_{ij})$. Et on a :

$$A + (-A) = O.$$

(Ainsi $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif).

- 2)
 - $1.A = A$.
 - $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$.
 - $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.
 - $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$.

D'où le résultat suivant :

Proposition 2.3.3

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $m \times n$.

Démonstration (Dans le cas $(m, n) = (2, 3)$)

Montrons que $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 2 \times 3 = 6$. En effet :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_4} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_5} \\ &\quad + a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_6} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que \mathcal{B} est libre. Par suite, \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. D'où $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$.

\mathcal{B} est dite la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Propriétés 2.3.4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- 1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
- 2) ${}^t({}^tA) = A$.
- 3) ${}^t(\alpha.A) = \alpha.({}^tA)$.

Démonstration (Dans le cas $m = n = 2$)

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

1)

$$\begin{aligned} {}^t(A + B) &= {}^t \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = {}^t \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = {}^tA + {}^tB. \end{aligned}$$

2)

$${}^t({}^tA) = {}^t \left[{}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = {}^t \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

3)

$${}^t(\alpha.A) = {}^t \left[\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = {}^t \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha.({}^tA).$$

Exercice 2.3.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique T telles que :
 $A = S + T$.

2.4 Produit matriciel

Produit de deux matrices de type L.C

Soient $L = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$ une matrice ligne et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

$$\text{Le produit } L.C = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Remarque 2.4.1

Le produit $L.C$ n'est possible que si L et C contiennent le même nombre d'éléments.

Exemple 2.4.2

$$(1 \ -1 \ 0 \ -8) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + (-1) \times (-3) + 0 \times \sqrt{2} + (-8) \times 0 = 5.$$

Produit de deux matrices

Exemple 2.4.3

1) Soient

$$A = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\sqrt{2}} \\ \boxed{-2} & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}$$

Le produit matriciel $A.B$, –étant de type $L.C$ – s'effectue en considérant les lignes L_1 et L_2 de A , et les colonnes C_1 , C_2 et C_3 de B .

Et pour que le produit des lignes L_i et des colonnes C_j soit possible, il faut que le nombre d'éléments de L_i soit égal à celui de C_j . Ce qui veut dire que le nombre de colonnes de A soit le même que celui des lignes de B . Donc, si A est de type (m, n) , B doit être de type (n, q) . Par suite :

$$A.B = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\sqrt{2}} \\ \boxed{-2} & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & L_1 C_2 & L_1 C_3 \\ L_2 C_1 & L_2 C_2 & L_2 C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

\downarrow $(2, \boxed{3})$ \downarrow $(\boxed{3}, 3)$ \downarrow $(2, 3)$

2)

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i+1 \end{pmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3, [2]) & ([2], 1) & (3, 1) \\ \text{-----} & & \end{array}$$

Généralisation

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

- Si $n \neq p$, alors le produit $A.B$ est impossible.
- Si $n = p$, alors $A.B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ et $A.B = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq q}}$ telle que :

$$\alpha_{ij} = L_i(A).C_j(B).$$

Propriétés 2.4.4

Soient A, B, C des matrices et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Quand le produit matriciel est possible, on a :

- $A.(B.C) = (A.B).C$.
- $(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha.(A.B)$.
- $A.(B + C) = A.B + A.C$.
- $A.I_n = A$.
- ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$.
- En général, $A.B \neq B.A$.
- Le produit de deux matrices non nuls peut être nul. (Autrement dit : $A.B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$).

Exemple 2.4.5

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- $A.B \neq B.A$.
- $A \neq 0$, $B \neq 0$, et pourtant $A.B = 0$.

2.5 Matrices inversibles

Définition 2.5.1

Une matrice A d'ordre n est dite inversible (ou régulière), s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $A.B = B.A = I_n$.

B est dite la matrice inverse de A et est notée A^{-1} .

→ Si la matrice inverse existe, alors elle est unique.

→ Une matrice non inversible est dite singulière.

Théorème 2.5.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

A est inversible $\iff A$ est inversible à gauche $\iff A$ est inversible à droite.

Remarque 2.5.3

→ Grâce au théorème ci-dessus, pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de montrer que : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A.B = I_n$ (ou $B.A = I_n$).

→ $GL_n(\mathbb{K}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \text{ est inversible} \}$, muni de la loi de composition "Produit matriciel", est un groupe non commutatif.

Définition 2.5.4 (matrice orthogonale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite orthogonale si $A.^tA = .^tA.A = I_n$.

Remarque 2.5.5

Toute matrice orthogonale A est inversible, et $A^{-1} = .^tA$.

Exemple 2.5.6 (exercice)

1) Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / 4AB - 8AC + 3I = 0$.

Montrons que A est inversible.

On a :

$$\begin{aligned} 4AB - 8AC = -3I &\iff -\frac{4}{3}AB + \frac{8}{3}AC = I \\ &\iff A\left(-\frac{4}{3}B + \frac{8}{3}C\right) = I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et son inverse $A^{-1} = -\frac{4}{3}B + \frac{8}{3}C$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrons que $A^2 = 2A - I$. En effet :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad A^2 &= A.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \\
\bullet \quad 2A - I &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a bien $A^2 = 2A - I$.

b) Montrons que A est inversible. Et calculons A^{-1} .

• On a :

$$\begin{aligned}
A^2 &= 2A - I \iff A^2 - 2A = -I \iff -A^2 + 2A = I \\
&\iff A(-A + 2I) = I.
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$.

$$\bullet \quad A^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 Puissances d'une matrice

2.6.1 Puissances positives

Définition 2.6.1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \neq 0$. Et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$A^0 = I_n.$$

$$A^2 = A.A.$$

$$A^3 = A.A.A = A^2.A = A.A^2.$$

\vdots

$$A^p = A.A \dots A, \text{ } p \text{ fois.}$$

Propriétés 2.6.1.2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$1) \quad A^p.A^q = A^{p+q}.$$

$$2) \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Exemple 2.6.1.3

Soit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée diagonale.

Et soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

En effet : (démonstration par récurrence sur p).

- $p = 0$, on a $D^0 = I_n = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^0 \end{pmatrix}$.

- Supposons que $D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}$.

- On a :

$$D^{p+1} = D^p \cdot D = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{p+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^{p+1} \end{pmatrix}.$$

2.6.2 Formule de binôme de Newton

→ Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ / $A.B = B.A$. Alors,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k} \quad \text{où } C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

→ Si $B = I$. On a toujours $A.I = A = I.A$. Par suite :

$$(A + I)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k.$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} \rightarrow p = 2; \quad (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A.A + A.B + B.A + B.B. \\ &= A^2 + \underbrace{A.B + B.A}_{\text{II}} + B^2 \\ &= A^2 + 2A.B + B^2 \quad \text{si } A.B = B.A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad (A + B)(A - B) &= A.A - \underbrace{A.B + B.A}_{\text{II}} - B.B. \\ &= A^2 + 0 - B^2 \quad \text{si } A.B = B.A. \\ &= A^2 - B^2. \end{aligned}$$

Exemple 2.6.2.1

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que :

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.3 Matrice idempotente

Définition 2.6.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite idempotente si $A^2 = A$.

Exemple 2.6.3.2 (Exercice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A est idempotente. Montrons que $I_n - A$ est aussi idempotente. En effet :

$$\begin{aligned} (I_n - A)^2 &= I_n^2 - 2I_n A + A^2 \quad (\text{puisque } I_n.A = A.I_n) \\ &= I_n - 2A + A \\ &= I_n - A. \end{aligned}$$

2.6.4 Matrice nilpotente

Définition 2.6.4.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est dite nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. p est dit le degré de nilpotence de A .

Exemple 2.6.4.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nilpotente de degré 2. (car } A^2 = 0 \text{ et } A \neq 0).$$

2.6.5 Matrices semblables

Définitions 2.6.5.1

→ Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

A et B sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ / $B = Q.A.P$.

→ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ / $B = P^{-1}.A.P$.

Remarque 2.6.5.2

→ L'intérêt de la notion de matrices semblables, c'est qu'on peut calculer les puissances de B si celles de A sont faciles à calculer, (par exemple si A est diagonale). On obtient :

$$B^k = P^{-1}A \underbrace{P.P^{-1}}_{I_n} A \underbrace{P}_{I_n} \dots \underbrace{P^{-1}}_{I_n} .A.P = P^{-1} \underbrace{A \dots A}_{k \text{ fois}} .P = P^{-1}.A^k.P.$$

→ Cette notion est très utile dans le chapitre de diagonalisation.

2.6.6 Puissances négatives d'une matrice inversible

Définition 2.6.6.1

Soit A une matrice inversible. $A^{-p} = (A^{-1})^p$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.6.6.2

Soient A et B deux matrices inversibles de même ordre. On a :

- 1) $A.B$ est une matrice inversible et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
- 2) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.

1) On a :

$$\begin{aligned} (A.B).(B^{-1}.A^{-1}) &= A.B.B^{-1}.A^{-1} = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I_n.A^{-1} \\ &= A.A^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

2) On a : $({}^tA).{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}.A) = {}^tI_n = I_n$.

Remarque 2.6.6.3

→ Attention! on ne peut pas simplifier par une matrice. ($A.B = A.C \not\Rightarrow B = C$).

→ Mais si A est inversible, alors : $A.B = A.C \Rightarrow B = C$. En effet :

$$A.B = A.C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{I_n}.B = \underbrace{A^{-1}.A}_{I_n}.C \Rightarrow I_n.B = I_n.C \Rightarrow B = C.$$

(l'autre implication est évidente : $B = C \Rightarrow A.B = A.C$).

Exemple 2.6.6.4

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.C.$$

Pourtant $B \neq C$.

Exercice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que si A est nilpotente, alors elle n'est pas inversible .
- 2) On suppose que : $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p + A + I = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1} .

Chapitre 3

Déterminant d'une matrice

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'application notée \det ;

$$\begin{aligned} \det &: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ \text{matrice } A &\longmapsto \det(A) \text{ noté } |A| \end{aligned}$$

où \mathbb{K} est un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Cette application ne s'annule que lorsque la matrice A est non inversible. Ainsi, on a :

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ est inversible.}$$

3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1

Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$; $A = (a)$. Alors $\det A = |a| = a$.

Exemple 3.1.1

$A = (-7)$; $\det A = |-7| = -7$.

Attention : la notation du déterminant n'a rien à voir avec la valeur absolue.

3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ainsi, $\det A$ est le produit des éléments de la diagonale principale moins celui des éléments de la diagonale non principale.

Exemple 3.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

$$\text{Soit } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}); A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Méthode de Sarrus (pour l'ordre 3)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Ainsi, pour calculer $\det A$, on recopie les deux premières colonnes, et on calcule la somme des produits des éléments des trois diagonales principales moins la somme des produits des éléments des trois diagonales non principales.

Remarque 3.3.1.1

On peut procéder de la même manière en recopiant les deux premières lignes.

Exemple 3.3.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (3 \times 0 \times 1 + (-1) \times (-2) \times 1 + 1 \times 1 \times 2) - (1 \times 0 \times 1 + 2 \times (-2) \times 3 + 1 \times 1 \times (-1))$$

$$= 4 - (-13) = 17 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

3.3.2 Méthode des cofacteurs

On développe le calcul par rapport à une ligne ou une colonne quelconque, soit par exemple :

→ Par rapport à la 1^{ère} ligne :

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

→ Par rapport à la 2^{ème} colonne :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemple 3.3.2.1

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Exemple 3.3.2.2

$$\begin{vmatrix} 3 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 17.$$

3.4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

La méthode des cofacteurs est une méthode générale valable pour tout ordre n .

Enonçons d'abord quelques définitions utiles pour décrire cette méthode.

Définition 3.4.1

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

→ On appelle mineur de l'élément a_{ij} qu'on note Δ_{ij} , le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la ligne L_i et la colonne C_j .

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} & C_j & \\ \hline & \boxed{a_{ij}} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right)_{L_i} , \quad \Delta_{ij} = \left| \begin{array}{c|c|c} & C_j & \\ \hline & \boxed{a_{ij}} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right|_{L_i}$$

→ On appelle cofacteur de a_{ij} , le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$. Ainsi $\det A = \sum_{a_{ij} \in V} a_{ij} A_{ij}$
où V désigne une ligne ou une colonne choisie.

Exemple 3.4.2 ($V = L_i$)

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Exemple 3.4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

→ Développons le calcul suivant la 1^{ère} colonne :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

→ Développons le calcul suivant la 3^{ème} ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Remarques 3.4.4

- 1) Le meilleur choix de la ligne (ou la colonne) par rapport à laquelle sera développé le calcul, est celui qui contient le maximum de chiffres 0. Il est donc commode de créer des zéros dans ce déterminant sans lui changer sa valeur.
- 2) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes). Autrement dit : les seules opérations qui ne changent pas la valeur d'un déterminant

sont :

$$\begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j \\ L_i \longrightarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j \end{cases}, \text{ en particulier } \begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \alpha C_j & j \neq i \\ L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j & j \neq i. \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant :

- Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnels, (à fortiori égales), alors $\det A$ est nul. (i.e : Si $C_i = \alpha C_j$ ou $L_i = \alpha L_j$ pour $i \neq j$, alors $\det A = 0$).
- Un déterminant peut changer de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes.

Exemple 3.4.5

$$\begin{aligned} \begin{matrix} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \\ L_4 \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow \\ L_3 + L_1 \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 & \boxed{1} \\ 6 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{matrix} \downarrow C_1 + C_2 & & \downarrow C_2 - 3C_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 7 \\ 13 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 0 & 1 \\ 7 & -20 & 7 \\ 13 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 7 & -20 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 260 = 295. \end{aligned}$$

Notons que :

- l'opération $L_2 - 2L_1$ n'est vraie qu'au niveau de L_2 .
- l'opération $C_1 + C_2$ est vraie au niveau de C_1 et au niveau de C_2 .
- l'opération $2C_1 - C_4$ change la valeur du déterminant.
- l'opération $2C_2 + C_3$ est vraie au niveau de C_3 .

Propriétés 3.4.6

1) $\det O = 0$.

2) $\det I_n = 1$.

3) Si $A = (a_{ij})$ est diagonale, alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

4) Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

- 5) $\det({}^tA) = \det A$.
- 6) $\det(A.B) = (\det A).(\det B)$.
- 7) Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. ($I = A.A^{-1} \implies 1 = \det I = \det(A.A^{-1}) = \det A.\det A^{-1}$).
- 8) $\det(C_1, \dots, C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \det(L_1, \dots, L_{j-1}, \alpha L_j, L_{j+1}, \dots, L_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_n) = \alpha \det(L_1, \dots, L_n) = \alpha \det A$, où C_1, C_2, \dots, C_n désignent les colonnes de A et L_1, L_2, \dots, L_n désignent les lignes de A .
- 9) $\det(\alpha.A) = \alpha^n \det A$.
- 10)
- Si $A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & N \\ O & \boxed{P} \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & O \\ N & \boxed{P} \end{pmatrix}$

où M et P sont deux matrices carrées et O est la matrice nulle (A est dite dans ce cas triangulaire par blocs) alors $\det A = \det M.\det P$.

Exemple 3.4.7

$$1) A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2) B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exemple 3.4.8

1)

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{vmatrix} 7 & \boxed{1} & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} & & & \end{array} \begin{array}{cccc} (C_1 \rightarrow 7C_2) & C_2 & (C_3 \rightarrow 5C_2) & (C_4 \rightarrow 3C_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -16 & 2 & -6 & -6 \\ -22 & 3 & -8 & -8 \end{vmatrix} & & & \end{array} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -16 & -6 & -6 \\ -22 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad (\text{car } C_2 = C_3).$$

2)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -4 & 9 & 32 \\ -6 & 18 & 15 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 3 & 18 & 15 \end{vmatrix} = -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \\
&\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \quad C_1 \quad C_2 - 2C_1 \\
&= -2 \times 3 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 32 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -18 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 32 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
&= (-18)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 18(5 - 4) = 18.
\end{aligned}$$

3.5 Applications

3.5.1 Inversion d'une matrice par la méthode des cofacteurs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche A^{-1} ?

La démarche à suivre se résume dans les étapes suivantes :

- Vérifier que $\det A \neq 0$ (donc A sera inversible).
- Déterminer la comatrice de A , notée $Com A$, qui est la matrice carrée d'ordre n obtenue en remplaçant chaque terme de A par son cofacteur.
- Ecrire la transposée de $Com A$: ${}^t(Com A)$.
- Conclure selon la formule : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(Com A)$.

Exemple 3.5.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\det A = 3 \neq 0$, donc A est inversible.

•

$$\begin{aligned}
Com A &= \begin{pmatrix} cof(1) & cof(2) & cof(-1) \\ cof(2) & cof(3) & cof(1) \\ cof(1) & cof(0) & cof(2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$• \quad {}^t Com A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$• \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Rang d'une matrice

Définition 3.5.2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Le rang de A , noté $rg(A)$, est le rang du système des vecteurs colonnes C_1, C_2, \dots, C_n de A . ($C_i \in \mathbb{K}^m$).

Proposition 3.5.2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de A .

Remarque 3.5.2.3

$rg(A)$ est égal aussi au rang du système des vecteurs lignes L_1, L_2, \dots, L_m de A (puisque $\det {}^t A = \det A$).

Exemple 3.5.2.4

1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 17 \neq 0$, donc $\operatorname{rg} A = 3$. On en déduit que les systèmes $S = (C_1, C_2, C_3)$ et $S' = (L_1, L_2, L_3)$ sont libres dans \mathbb{R}^3 , où $C_1 = (3, 1, 1)$, $C_2 = (-1, 0, 2)$, $C_3 = (1, -2, 1)$, $L_1 = (3, -1, 1)$, $L_2 = (1, 0, -2)$ et $L_3 = (1, 2, 1)$.

2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Même si $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, on a $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\operatorname{rg} B = 2$.

On en déduit que le système $S = (L_1, L_2)$ est libre dans \mathbb{R}^3 , tandis que $S' = (C_1, C_2, C_3)$ est lié dans \mathbb{R}^2 (ceci est évident car $\operatorname{card} S' = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$).

3)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-1 & -2} & -3 \\ \boxed{2 & 1} & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}). \quad \operatorname{rg} E \leq 3.$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tous les déterminants d'ordre 3 extraits de E sont nuls. Donc $\operatorname{rg} E \neq 3$.

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ donc } \operatorname{rg} E = 2.$$

- On en déduit que le système $S = (C_1, C_2, C_3)$ est lié dans \mathbb{R}^4 et que le système $S' = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est lié dans \mathbb{R}^3 (ceci est évident car $\operatorname{card} S' = 4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$).
- On peut en tirer aussi que le système (C_1, C_2) est libre dans \mathbb{R}^4 et le système (L_2, L_3) est libre dans \mathbb{R}^3 .

Proposition 3.5.2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\operatorname{rg} A = 0 \iff A = 0$.
- $\operatorname{rg} A \leq \min(m, n)$.
- $\operatorname{rg}(^t A) = \operatorname{rg} A$.
- Si A est carrée ($m = n$), alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n.$$

Chapitre 4

Applications linéaires

4.1 Définitions et Vocabulaire

4.1.1 Rappel sur les applications

Soient E et F deux ensembles.

→ Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

f est dite une application si tout élément de E admet une seule image dans F .
($\forall x \in E, \exists ! y \in F, f(x) = y$).

→ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On appelle image directe de A par f , qu'on note $f(A)$, le sous ensemble de F formé par les images des éléments de A ;

$$\begin{aligned} f(A) &= \{ f(x) ; x \in A \} \\ &= \{ y \in F / \exists x \in A \ f(x) = y \}. \end{aligned}$$

- On appelle image réciproque de B par f , qu'on note $f^{-1}(B)$, le sous ensemble de E formé par les antécédents des éléments de B ;

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \}.$$

→ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est dite injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. Autrement dit,

$$f \text{ est injective} \iff \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

- f est dite surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent. Autrement dit,

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \\ &\iff f(E) = F. \end{aligned}$$

- f est dite bijective si f est à la fois injective et surjective.

4.1.2 Définitions et exemples

Dans tout ce qui suit, \mathbb{K} désignera un corps commutatif (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), et E et F désigneront deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définition 4.1.2.1

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est dite une application linéaire ou homomorphisme de E vers F si :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \begin{cases} \bullet f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et} \\ \bullet f(\alpha u) = \alpha f(u). \end{cases}$$

Remarque 4.1.2.2

On voit facilement que :

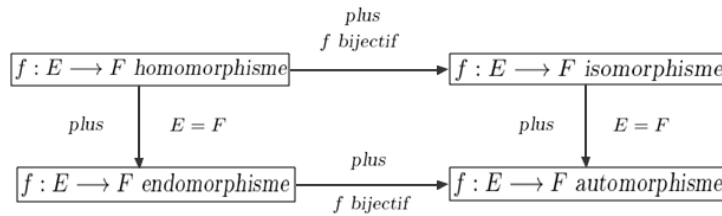
$$\begin{aligned} f \text{ est linéaire} &\iff \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) \\ &\iff \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

Définition 4.1.2.3

Soit $f : E \longrightarrow F$ un homomorphisme .

- f est dit isomorphisme si f est bijectif .
- f est dit endomorphisme si $E = F$.
- f est dit automorphisme si f est bijectif et $E = F$.

On peut voir ça à travers le schéma suivant :



Notation.

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E vers F .
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .

Exemples 4.1.2.4

- 1) L'application nulle :

$$\begin{aligned} \theta &: E \longrightarrow F \\ u &\longmapsto 0_F \end{aligned}$$

est linéaire.

- 2) L'application identité :

$$\begin{aligned} id_E &: E \longrightarrow E \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

est un automorphisme de E .

3)

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y, 2x - y + z) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

En effet : Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned} f(u + v) &= f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') - (y + y'), 2(x + x') - (y + y') + (z + z')) \\ &= ((x - y) + (x' - y'), (2x - y + z) + (2x' - y' + z')) \\ &= (x - y, 2x - y + z) + (x' - y', 2x' - y' + z') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x - \alpha y + \alpha z) \\ &= \alpha(x - y, 2x - y + z) \\ &= \alpha f(x, y, z) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

4) L'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

est non linéaire. En effet :

$$f(2x) = 2x + 1 \neq 2f(x) = 2x + 2.$$

5) L'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \text{ le conjugué de } z. \end{aligned}$$

f est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et non linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (à savoir que \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C}). En effet :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $f(z + z') = \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' = f(z) + f(z')$.
 - $f(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \bar{\alpha} \bar{z} = \alpha \bar{z}$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (Notons que si $\alpha \in i\mathbb{R}$, $f(\alpha z) = \bar{\alpha} \bar{z} \neq \alpha \bar{z} = \alpha f(z)$).

Proposition 4.1.2.5

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- 1) Si f et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, alors $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, où $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$.
- 2) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, où $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.
- 3) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$, où $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.

4) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, E)$.

Démonstration.

1), 2) et 3) sont claires.

4) Soient $a, b \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \uparrow & \text{---} f^{-1} \text{---} & \uparrow \\ & \text{---} & \end{array}$$

Montrons que $f^{-1}(\alpha a + b) = \alpha f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.

On a f est bijective, donc $\exists x$ et $y \in E$ / $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Par suite,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha a + b) &= f^{-1}(\alpha f(x) + f(y)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha x + y)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \alpha x + y \quad (\text{car } f^{-1} \circ f = id_E) \\ &= \alpha f^{-1}(a) + f^{-1}(b) \quad \left(\text{car } x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a) \right). \end{aligned}$$

On en déduit de 1) et 2) de la proposition ci-dessus, le résultat suivant :

Corollaire 4.1.2.6

$(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

4.2 Propriétés élémentaires

Mentionnons quelques propriétés élémentaires qui permettent de manipuler la notion d'application linéaire.

Proposition 4.2.1

Soit $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire.

$$1) \quad \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i).$$

Autrement dit : une application linéaire transforme toute combinaison linéaire d'éléments de E en une combinaison linéaire d'éléments de F .

$$2) \quad f(0_E) = 0_F.$$

$$3) \quad f(-u) = -f(u), \quad \forall u \in E.$$

4) Si H est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F .

5) Si K est un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(K)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

1) Démonstration par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, $f(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 f(u_1)$ car f est linéaire.

- L'hypothèse de récurrence $(H.R)$ pour $n - 1$:
Supposons que $f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_{n-1} f(u_{n-1})$.
- Pour n :

$$\begin{aligned} f(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1}}_{v_1} + \underbrace{\alpha_n u_n}_{v_2}) &= f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + f(\alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_{n-1} f(u_{n-1}) + \alpha_n f(u_n). \quad (H.R) \end{aligned}$$

2) $f(0_E) = f(0.0_E) = 0.f(0_E) = 0_F$.

3) Evidente.

4) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E . Montrons que $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F . Ce qui revient à montrer que $f(H)$ est non vide et stable dans F .

Rappelons que $f(H) = \{ f(u) / u \in H \}$.

- $f(H) \neq \emptyset$: On a $0_E \in H$, donc $0_F = f(0_E) \in f(H)$.
- $f(H)$ est stable dans F :

Soient $f(u)$ et $f(v)$ deux vecteurs de $f(H)$ (où u et $v \in H$), et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

On a $\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$ car f est linéaire, or $\alpha u + \beta v \in H$ puisque H est stable dans E . Par suite $\alpha f(u) + \beta f(v) \in f(H)$.

5) Soit K un sous-espace vectoriel de F .

Rappelons que $f^{-1}(K) = \{ u \in E / f(u) \in K \}$.

- $f^{-1}(K) \neq \emptyset$: On a $f(0_E) = 0_F \in K \implies 0_E \in f^{-1}(K)$.
- $f^{-1}(K)$ est stable dans E :

Soient $u, v \in f^{-1}(K)$ et $\alpha, \beta \in K$. Montrons que $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(K)$.

On a : $f(\alpha u + \beta v) = \underbrace{\alpha f(u)}_{\in K} + \underbrace{\beta f(v)}_{\in K}$ car f est linéaire. Donc $f(\alpha u + \beta v) \in K$

puisque K est stable dans F . Par suite $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(K)$.

Remarque 4.2.2

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est non linéaire, on montre par ordre croissant de difficulté que :

- 1) $f(0_E) \neq 0_F$.
- 2) $\exists u \in E, f(-u) \neq -f(u)$.
- 3) $\exists u \in E, \exists \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$.
- 4) $\exists u, v \in E, f(u + v) \neq f(u) + f(v)$.

Exemple 4.2.3

1)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, y, x + 2) \end{aligned}$$

$f(0, 0) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$, donc f est non linéaire.

2)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y^2) \end{aligned}$$

- $f(0, 0) = (0, 0)$.
- $f(-(1, 1)) = f(-1, -1) = (-1, 1) \neq -f(1, 1) = -(1, 1) = (-1, -1)$.
Donc f est non linéaire.

3) L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xy, y + z, 0) \end{aligned}$$

est non linéaire ($f(2u) \neq 2f(u)$ où $u = (1, 1, 0)$).

4.3 Sous-espaces associés à une application linéaire

On définit l'image et le noyau d'une application linéaire f de E vers F .

Définition 4.3.1

→ On appelle *noyau* de f , qu'on note $\text{Ker } f$, le sous ensemble de E formé par les antécédents de 0_F .

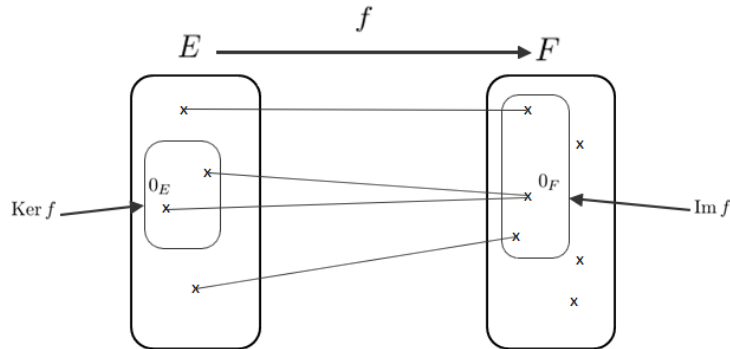
$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}.$$

→ On appelle *image* de f , qu'on note $\text{Im } f$, le sous ensemble de F formé par les images des vecteurs de E .

$$\text{Im } f = \{f(x) / x \in E\} = f(E).$$

On écrit aussi :

$$\text{Im } f = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}.$$



Proposition 4.3.2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a :

- 1) $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .
- 3) $\text{Ker } f = \{0_E\} \iff f$ est injective.
- 4) $\text{Im } f = F \iff f$ est surjective.

Démonstration.

1) et 2) découlent de la proposition précédente. En effet :

- 1) On a $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F , donc $f^{-1}(\{0_F\})$ qui est égal à $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) On a E est un sous-espace vectoriel de E , donc $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- 3) \Rightarrow) Supposons que f est injectif.
Soit $x \in \text{Ker } f$. On a $f(x) = 0_F = f(0_E)$. Or f est injectif, donc $x = 0_E$.
- \Leftarrow) Supposons que $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
Soient x et $x' \in E / f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\iff f(x - x') = 0_F \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &\iff x - x' \in \text{Ker } f = \{0_E\} \\ &\iff x - x' = 0_E \\ &\iff x = x'. \end{aligned}$$

4) Claire.

4.4 Théorème du rang**Définition 4.4.1**

On appelle le rang de f , qu'on note $\text{rg } f$, la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Im } f$.

$$\text{rg } f = \dim \text{Im } f.$$

Proposition 4.4.2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de E , alors $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $f(E) = \text{Im } f$.

Démonstration.

Soit $y \in \text{Im } f$. Donc $\exists x \in E / f(x) = y$. Or $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de E , donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Par suite $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$ puisque f est linéaire. Dès lors, $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ engendre $\text{Im } f$.

Théorème 4.4.3 (Théorème du rang)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si la dimension de E est finie, alors on a :

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E.$$

Remarque 4.4.4

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E ($\dim E = n$).

- Si f est injective ($\text{Ker } f = \{0_E\}$), alors $f(\mathcal{B}) = \{f(e_i)\}_{i=1}^n$ est une base de $\text{Im } f$.
 → Si f n'est pas injective ($\text{Ker } f \neq \{0_E\}$), alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Démonstration.

- Si $\text{Ker } f = \{0_E\}$ alors $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$, donc $\dim \text{Im } f = n$. Or
 $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ engendre $\text{Im } f$ et $\underset{0}{\text{Card}}(\{f(e_i)\}_{i=1}^n) = \underset{n}{n}$, et par suite $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ est une base de $\text{Im } f$.
 → Evident d'après la proposition précédente.

Corollaire 4.4.5 (Théorème du rang avec $\dim E = \dim F < \infty$)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies. Si $\dim E = \dim F$, alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarque

Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes.

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \text{Ker } f = \{0_E\} \\ &\iff \dim \text{Ker } f = 0 \\ &\iff \dim \text{Im } f = \dim E = \dim F \quad (\text{car } \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E) \\ &\iff \text{Im } f = F \quad (\text{car } \text{Im } f \subset F) \\ &\iff f \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

4.5 Exemples d'application

Exemple 4.5.1

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y, x - y + z) \end{aligned}$$

une application linéaire.

→ Cherchons $\text{Ker } f = ?$

$$\text{Ker } f = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

$$X \in \text{Ker } f \iff X = (x, y, z) \text{ et } f(x, y, z) = (0, 0)$$

$$\iff X = (x, y, z) \text{ et } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = (x, y, z) \text{ et } \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

Donc $X = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$. Par suite $\text{Ker } f = \langle (1, 1, 0) \rangle$.

La famille $\{(1, 1, 0)\}$ est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est automatiquement libre, et par suite c'est une base de $\text{Ker } f$. D'où $\dim \text{Ker } f = \text{card}\{(1, 1, 0)\} = 1$.

Remarquons que f est non injective puisque $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

→ Cherchons $\text{Im } f = ?$

Utilisons le théorème du rang, puisqu'il indique la dimension de $\text{Im } f$ avant de la déterminer, ce qui simplifie dans ce cas, la recherche de $\text{Im } f$.

On a $\underbrace{\dim \text{Ker } f}_1 + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Donc $\dim \text{Im } f = 2$.

Or $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . Par suite, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$. Et donc la base canonique $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 sera aussi une base de $\text{Im } f$.

Remarquons que f est surjective puisque $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

Exemple 4.5.2

Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (2x, x + y, y) \end{aligned}$$

une application linéaire.

→ Cherchons $\text{Ker } g = ?$

Il est facile de voir que $\text{Ker } g = \{(0, 0)\}$.

Par suite g est injective.

→ Cherchons $\text{Im } g = ?$

D'après le théorème du rang, on a : $\underbrace{\dim \text{Ker } g}_0 + \dim \text{Im } g = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Donc

$\dim \text{Im } g = 2$.

Or, g est injective, alors on en déduit directement que l'image d'une base de \mathbb{R}^2 est une base de $\text{Im } g$; soit $\{g(1, 0), g(0, 1)\} = \{(2, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ cette base.

Exemple 4.5.3

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - y, x + z, -x - z). \end{aligned}$$

→ $\text{Ker } h = \langle (1, 2, -1) \rangle$.

Et $\{(1, 2, -1)\}$ est bien une base de $\text{Ker } h$. (Famille formée par un seul vecteur non nul).

Remarquons que h est non injective, ce qui équivaut à dire que h est non surjective puisque h un endomorphisme.

→ Cherchons $\text{Im } h = ?$

Le théorème du rang : $\underbrace{\dim \text{Ker } h}_1 + \dim \text{Im } h = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Donc $\dim \text{Im } h = 2$.

(On peut déduire de ce résultat aussi, que $\dim \operatorname{Im} h = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, ce qui implique que $\operatorname{Im} h \neq \mathbb{R}^3$, par suite h est non surjective).

Cherchons une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$.

Soit $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , qui est évidemment une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

On a $\{h(e_1), h(e_2), h(e_3)\}$ une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$ où $h(e_1) = h(1, 0, 0) = (2, 1, -1)$, $h(e_2) = h(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$ et $h(e_3) = h(0, 0, 1) = (0, 1, -1)$.

Or $\dim \operatorname{Im} h = 2$, on choisit donc deux vecteurs libres de $\{(2, 1, -1), (-1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$.

Soit par exemple, $\{(-1, 0, 0), (0, 1, -1)\} = \mathcal{F}$.

\mathcal{F} est bien une base de $\operatorname{Im} h$. (\mathcal{F} est libre et $\operatorname{card} \mathcal{F} = 2 = \dim \operatorname{Im} h$).

4.6 Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions m et n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F .

Remarque

Dans ce qui suit, on verra que l'ordre des vecteurs dans une base est intéressant, d'où la notation $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et non pas $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, vue que la première notation respecte l'ordre des vecteurs contrairement à la seconde. En effet :

$$\{1, 4, \alpha\} = \{4, 1, \alpha\} = \{\alpha, 1, 4\} \text{ mais } (1, 4, \alpha) \neq (4, 1, \alpha) \neq (\alpha, 1, 4).$$

4.6.1 Définitions et exemples

Soit

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

une application linéaire.

L'application f est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base $(f(e_i))_{i=1}^n$.

$$\rightarrow e_1 \in E \text{ et } f(e_1) \in F, \text{ donc } f(e_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{p1}u_p.$$

$$\rightarrow e_2 \in E \text{ et } f(e_2) \in F, \text{ donc } f(e_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{p2}u_p.$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\rightarrow e_n \in E \text{ et } f(e_n) \in F, \text{ donc } f(e_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{pn}u_p.$$

Définition 4.6.1.1

On appelle matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , la matrice :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \vdots \\ \leftarrow u_p \end{matrix}$$

Notation : Si $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme et \mathcal{B} une base de E . Alors $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$.

Remarque 4.6.1.2

- 1) Attention à l'ordre dans l'écriture de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.
- 2) Attention ! la matrice dépend des bases choisies dans E et F . (voir exemple 3))

Exemples 4.6.1.3

- 1) Soit

$$\begin{aligned} \theta &: E \longrightarrow F \\ x &\longmapsto 0_F \end{aligned}$$

l'application nulle.

$$\mathcal{M}(\theta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O_{pn} \text{ la matrice nulle.}$$

- 2) Soit

$$\begin{aligned} \text{id}_E &: E \longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

l'application identité. Et soit \mathcal{B} une base de E .

$$\mathcal{M}(\text{id}_E, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

- 3) Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, y + z) \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((2, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 3))$ deux bases de \mathbb{R}^3 . Et soient $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{C}' = ((2, 0), (0, -3))$ deux bases de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \begin{pmatrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (0,1) \end{matrix} \quad \text{car :} \\
&\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{1}(0,1) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{1}(0,1). \end{cases} \\
\rightarrow \quad \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}) &= \begin{pmatrix} f(2,0,0) & f(0,-1,0) & f(0,0,3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (0,1) \end{matrix} \quad \text{car :} \\
&\begin{cases} f(2,0,0) = (2,0) = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,-1,0) = (-1,-1) = -\mathbf{1}(1,0) + (-\mathbf{1})(0,1) \\ f(0,0,3) = (0,3) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{3}(0,1) \end{cases} \\
\rightarrow \quad \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}') &= \begin{pmatrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} (2,0) \\ (0,-3) \end{matrix} \quad \text{car :} \\
&\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + \mathbf{0}(0,-3) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \frac{1}{2}(2,0) - \frac{1}{3}(0,-3) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(2,0) - \frac{1}{3}(0,-3). \end{cases}
\end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}')$.

4.6.2 Liens avec le calcul matriciel

Proposition 4.6.2.1

Soient f et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\rightarrow \mathcal{M}(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathcal{M}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

$$\rightarrow \mathcal{M}(\lambda f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \lambda \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

(puisque $(f + g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ et $(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i)$, $\forall e_i \in \mathcal{B}$).

Proposition 4.6.2.2

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espace vectoriels de bases respectives \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications linéaires, alors

$$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathcal{M}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\
 \textcircled{\mathcal{B}} & & \textcircled{\mathcal{C}} & & \textcircled{\mathcal{D}} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & g \circ f & &
 \end{array}$$

Corollaire 4.6.2.3

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire telle que $\dim E = \dim F$. On a :

$$f \text{ est bijective} \iff \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}))^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}).$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\
 \textcircled{\mathcal{B}} & & \textcircled{\mathcal{C}} & & \textcircled{\mathcal{B}} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & f^{-1} \circ f = id_E & &
 \end{array}$$

Le résultat découle du fait que :

$$I_n = \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

4.6.3 Écriture matricielle

Soit

$$\begin{aligned}
 f : E & \longrightarrow F \\
 x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto f(x) = y = \sum_{i=1}^p y_i u_i.
 \end{aligned}$$

une application linéaire.

Cette écriture vectorielle peut être traduite en une écriture matricielle comme suit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).X = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}; \text{ où}$$

X est la matrice d'ordre $(n, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ de E , et Y est la matrice d'ordre $(p, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C} = (u_i)_{i=1}^p$ de F . Et on a bien :

$$f(x) = y \quad : \quad \text{Écriture vectorielle}$$

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).X = Y \quad : \quad \text{Écriture matricielle.}$$

En effet : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{ji} u_j \quad \text{où } a_{ji} \in \mathbb{K}.$

On a donc ;

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) \\
 &= x_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{p1}u_p) + x_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{p2}u_p) + \dots \\
 &\quad + x_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{pn}u_p) \\
 &= \underbrace{(x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n})}_{\parallel y_1} u_1 + \underbrace{(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n})}_{\parallel y_2} u_2 + \dots \\
 &\quad + \underbrace{(x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \dots + x_na_{pn})}_{\parallel y_p} u_p.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \dots + x_na_{pn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}(f, B, C)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\parallel X}$$

Exemple 4.6.3.1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire, dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

→ Soit $x = (2, 1, 4)$, cherchons $y = f(x) = ?$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad Y = M.X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Par suite $f(2, 1, 4) = (15, 8)$.

→ En général, on peut trouver l'expression de f :

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. $y = f(x) = ?$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad Y = A.X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3).
 \end{aligned}$$

4.7 Changement de bases

4.7.1 Matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, e'_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \dots + \alpha_{ni}e_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}e_j.$$

Considérons l'application linéaire $id_E : \frac{E}{\mathcal{B}'} \longrightarrow \frac{E}{\mathcal{B}}$.

Dans ce cas ;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} id_E(e'_1) & \cdots & id_E(e'_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{matrix} \\ &= \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{matrix}, \end{aligned}$$

c'est ce qu'on appelle la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et qu'on note $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Retenons donc la définition suivante :

Définition 4.7.1.1

On appelle matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dont les colonnes sont les coordonnées –dans la base \mathcal{B} – des vecteurs de la base \mathcal{B}' .

Proposition 4.7.1.2

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est une matrice inversible, et son inverse est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .

Démonstration.

Soit

$$\begin{array}{ccccc} & & id_E & & \\ & & \downarrow & & \\ E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{id_E} & E \\ \textcircled{\mathcal{B}'} & & \textcircled{\mathcal{B}} & & \textcircled{\mathcal{B}'} \end{array}$$

D'après (4.6.2), on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(id_E \circ id_E, \mathcal{B}') \\ &= \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\ &= P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} . \end{aligned}$$

Il en découle que $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.

Exemple 4.7.1.3

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ une autre base de \mathbb{R}^2 où

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_2 . \end{cases}$$

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \overset{e'_1}{\downarrow} & \overset{e'_2}{\downarrow} \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix} .$$

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \overset{e_1}{\downarrow} & \overset{e_2}{\downarrow} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \end{matrix} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Par suite,

$$\begin{cases} e_1 = -e'_1 + 3e'_2 \\ e_2 = e'_1 - 2e'_2 . \end{cases}$$

4.7.2 Changement de coordonnées d'un vecteur

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , et $x \in E$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i .$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ deux matrices représentant les coordonnées du vecteur

x dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement.

On a alors, $X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot X'$ et $X' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} \cdot X$.

Exemple 4.7.2.1

Dans l'exemple ci-dessus (4.7.1), soit $x = (3, 5) \in \mathbb{R}^2$.

$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

$X' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base \mathcal{B}' qu'on cherche.

$$\text{On a } X' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.7.3 Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Définitions 4.7.3.1 (Rappel)

→ Deux matrices A et A' carrées d'ordre n sont dites semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que $A' = P^{-1}.A.P$ (ou $A = P^{-1}.A'.P$).

→ En général,
deux matrices A et A' d'ordre (m, n) sont dites équivalentes s'il existe deux matrices carrées P et Q inversibles, d'ordres respectifs m et n telles que $A' = Q.A.P$.

Théorème 4.7.3.2

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F , P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et Q la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' .

$f : E \rightarrow F$ une application linéaire, $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$.

On a :

$$A' = Q^{-1}.A.P \quad (A \text{ et } A' \text{ sont équivalentes}).$$

Ce théorème se résume à travers le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \xrightarrow{A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})} & F \\ \begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{B}} \\ \uparrow P \\ E \\ \textcircled{\mathcal{B}'} \end{array} & \xrightarrow{A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')} & \begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{C}} \\ \downarrow Q^{-1} \\ F \\ \textcircled{\mathcal{C}'} \end{array} \end{array}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{B}} \\ \uparrow id_E \\ E \\ \textcircled{\mathcal{B}'} \end{array} & \xrightarrow{f} & \begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{C}} \\ \downarrow id_F \\ F \\ \textcircled{\mathcal{C}'} \end{array} \end{array} \quad f = id_F \circ f \circ id_E.$$

$$\begin{aligned}
A' &= \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \mathcal{M}(id_F \circ f \circ id_E, \mathcal{B}', \mathcal{C}') \\
&= \mathcal{M}(id_F, \mathcal{C}, \mathcal{C}') \cdot \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cdot \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\
&= [\mathcal{M}(id_F, \mathcal{C}', \mathcal{C})]^{-1} \cdot A \cdot P \\
&= Q^{-1} \cdot A \cdot P .
\end{aligned}$$

Corollaire 4.7.3.3

Soient $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme du \mathbb{K} -espace vectoriel E , et \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soit $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

$$\begin{array}{ccc}
f : E & \xrightarrow{A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})} & E \\
\begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{B}} \\ \uparrow P \end{array} & & \begin{array}{c} \textcircled{\mathcal{B}} \\ \uparrow P \downarrow P^{-1} \end{array} \\
E & \xrightarrow{A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')} & E \\
\textcircled{\mathcal{B}'} & & \textcircled{\mathcal{B}'}
\end{array}$$

On a $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Notons que A et A' sont semblables.

4.7.4 Exemple d'application

Soit

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x, y, z) &\longmapsto (x + y, x + y, x + y)
\end{aligned}$$

un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

- 1) Chercher $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- 2) On considère la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ et $u_3 = (0, 0, 2)$.
Vérifier que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
- 3) Calculer $C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$.
- 4) Calculer C^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5) Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
- 6) Calculer P^{-1} .
- 7) En déduire A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1)

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} f(e_1) \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} f(e_2) \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} f(e_3) \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 = (1, 0, 0) \\ \leftarrow e_2 = (0, 1, 0) \\ \leftarrow e_3 = (0, 0, 1) \end{array} .$$

En effet :

- $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1, 1) = 1.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 1.(0, 0, 1)$.
- $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) = 1.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 1.(0, 0, 1)$.
- $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0.(1, 0, 0) + 0.(0, 1, 0) + 0.(0, 0, 1)$.

2) On a $\text{card } \mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit donc de vérifier que \mathcal{B}' est libre. En effet,

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

(ou bien on vérifie que, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$).

3)

$$C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \begin{matrix} f(u_1) \\ \downarrow \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} f(u_2) \\ \downarrow \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} f(u_3) \\ \downarrow \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{matrix}$$

car,

- $f(u_1) = f(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1) = 2.u_1$.
- $f(u_2) = f(1, -1, 2) = (0, 0, 0) = 0.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$.
- $f(u_3) = f(0, 0, 2) = (0, 0, 0) = 0.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$.

4) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ étant diagonale, on a :

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(On peut le montrer aussi par récurrence sur n).

5)

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \downarrow \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} u_2 \\ \downarrow \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} u_3 \\ \downarrow \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$$

car,

- $u_1 = (1, 1, 1) = 1.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$.
- $u_2 = (1, -1, 2) = 1.e_1 - 1.e_2 + 2.e_3$.
- $u_3 = (0, 0, 2) = 0.e_1 + 0.e_2 + 2.e_3$.

6) Méthode des cofacteurs :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{Com } P.$$

- $\det P = -4$ (déjà calculé en 2) .
-

$$\begin{aligned} \text{Com } P &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- ${}^t \text{Com } P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

- $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

7)

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})} & \mathbb{R}^3 \\ \textcircled{\mathcal{B}} & & \textcircled{\mathcal{B}} \\ \uparrow P & & \uparrow P \downarrow P^{-1} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')} & \mathbb{R}^3 \\ \textcircled{\mathcal{B}'} & & \textcircled{\mathcal{B}'} \end{array}$$

$$\text{On a : } C = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies P \cdot C \cdot P^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{\parallel I_3} \cdot A \cdot \underbrace{PP^{-1}}_{\parallel I_3} = I \cdot A \cdot I = A.$$

$$\text{Donc } A = P \cdot C \cdot P^{-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 A^n &= P.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{I_3}.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{I_3} \dots P.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{I_3}.C.P^{-1} \quad (n \text{ fois}). \\
 &= P.\underbrace{C.C \dots C}_{n \text{ fois}}.P^{-1}. \\
 &= P.C^n.P^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
 A^n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2^{n+1}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Remarque

Ainsi, on peut calculer toute puissance de A .

Pour $n = 2019$, par exemple, on obtient :

$$A^{2019} = 2^{2018} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Retenons le but de l'exercice.

- Etant donné un endomorphisme f et une base de \mathcal{B} , on calcule automatiquement $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = A$. (Question 1 (Q : 1)).
- Le but est de calculer A^n (Q : 7), ce qui n'est pas simple à faire directement.
- Pour cela, on propose une autre base \mathcal{B}' (Q : 2), dans laquelle la matrice de f $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = C$ est beaucoup plus simple que A (Q : 3) (dans le sens de pouvoir calculer sa puissance C^n (Q : 4)).
- Notons ici qu'on a **proposé** la base \mathcal{B}' , par contre au chapitre suivant (diagonalisation), c'est nous même qui allons **chercher et construire** cette base \mathcal{B}' .
- (Q : 5) et (Q : 6) permettent de calculer P et P^{-1} qui font le lien entre A et C .

Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

Soit \mathbb{K} un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

5.1 Définitions

→ On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n , un système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

→ On appelle système homogène associé à (S) , le système :

$$(SH) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

→ Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

→ Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Remarque 5.1.1

Tout système homogène est compatible (la solution $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ est évidente).

Dans ce chapitre, on va présenter deux méthodes pour résoudre un système linéaire ; celle de Gauss (appelée aussi de Gauss-Jordan) et celle de Cramer.

5.2 Résolution d'un système par la méthode de Gauss

5.2.1 Opérations élémentaires (ou transformations de Gauss)

Exemple 5.2.1.1 (motivation)

$$\rightarrow \text{Soit } (S) : \begin{cases} 2x + 6y - 4z = 2 & (L_1) \\ x + 4y - z = 0 & (L_2) \\ 2x - 4y + 5z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Les transformations de Gauss consistent à transformer le système (S) , pour obtenir le système $\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ qui lui est équivalent et qui est plus simple à résoudre.

→ Notons que la notation (L_1) veut dire la 1^{ère} ligne. On verra que plusieurs lignes différentes seront notées (L_1) car elles sont situées les premières dans leur système.

→ **Première opération :** $L_1 \longleftrightarrow L_2$.

En permutant la ligne L_1 et la ligne L_2 , le système (S) ne change pas.

$$(S) \overset{\text{devient}}{\curvearrowright} \begin{cases} x + 4y - z = 0 & (L_1) \\ 2x + 6y - 4z = 2 & (L_2) \\ 2x - 4y + 5z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

En général, si on permute deux lignes L_i et L_j , le système ne change pas.

On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.

→ **Deuxième opération :** $L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2$.

En multipliant (L_2) par $\frac{1}{2}$, le système ne change pas.

$$(S) \curvearrowright \begin{cases} x + 4y - z = 0 & (L_1) \\ x + 3y - 2z = 1 & (L_2) \\ 2x - 4y + 5z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

En général, si on multiplie une ligne L_i par un scalaire α non nul, le système ne change pas. On note $L_i \longrightarrow \alpha L_i$. ($\alpha \neq 0$).

Attention ! si $\alpha = 0$, alors la ligne L_i va être supprimée. ($L_i \iff 0 = 0$)

→ **Troisième opération :** $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$.

Si on ajoute à la ligne (L_3) la ligne (L_1) multipliée par -2 , alors (S) ne change pas.

$$(S) \curvearrowright \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ -12y + 7z = 3 \end{cases}$$

En général, si on ajoute à une ligne L_i une autre ligne L_j ($i \neq j$) multipliée par un scalaire α , alors (S) ne change pas. On note : $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$ ($i \neq j$).

Attention ! $i \neq j$; sinon : pour $i = j$ et $\alpha = -1$, on obtient $L_i \longrightarrow L_i - L_i = 0$; et la ligne L_i sera supprimée.

→ Reprenons le calcul :

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ & & - & 12y & + & 7z & = & 3 \end{array} \right. \curvearrowright L_2 - L_1 \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ & & - & y & - & z & = & 1 \\ & & - & 12y & + & 7z & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\curvearrowright L_3 - 12L_2 \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ & & - & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 19z & = & 3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{19} + \frac{88}{19} = \frac{91}{19} \\ y = -1 - \frac{3}{19} = \frac{-22}{19} \\ z = \frac{3}{19} \end{array} \right.$$

$$\text{Par suite } S = \left\{ \left(\frac{91}{19}, \frac{-22}{19}, \frac{3}{19} \right) \right\}$$

Retenons donc la définition suivante.

Définition 5.2.1.2

On appelle opération élémentaire une des trois opérations suivantes :

- 1) Permuter deux lignes : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- 2) Multiplier une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longrightarrow \alpha L_i$ ($\alpha \neq 0$).
- 3) Ajouter à une ligne L_i , une autre ligne L_j multipliée par un scalaire α :
 $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$ ($i \neq j$).

Représentation d'un système

Pour alléger l'écriture, on peut écrire le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

sous la forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

A gauche du trait vertical, on ne fait figurer que les coefficients des inconnues. A droite du trait, on écrit les seconds membres. Cette écriture est pratique mais n'a de sens que si on respecte scrupuleusement l'ordre des inconnues et des colonnes.

Le système (S) , ainsi représenté matriciellement, est équivalent —à travers des opérations élémentaires— à un système très simple, qui sera appelé échelonné réduit ligne.

C'est quoi donc un système échelonné ?

5.2.2 Matrice échelonnée

Définition 5.2.2.1

- On appelle pivot d'une ligne d'une matrice, le premier élément non nul de cette ligne.
- Une matrice est dite échelonnée, si le pivot de chaque ligne est à droite (au sens strict) de celui de la ligne précédente. (i.e. le nombre de zéros situés avant le pivot augmente d'une ligne à l'autre).
- Un système est dit échelonné si la matrice qui lui est associée est échelonnée.

Exemple 5.2.2.2

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{2}} & 7 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et I_n sont échelonnées.

2, 3 et -2 sont des pivots de A .

1 et 4 sont des pivots de B .

$$\rightarrow E = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas échelonnées.}$$

5.2.3 Matrice échelonnée réduite ligne (e.r.l)

Définition 5.2.3.1

Une matrice est dite échelonnée réduite ligne si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ elle est échelonnée} \\ \text{et} \\ \bullet \text{ les pivots sont tous égaux à 1.} \end{array} \right.$$

Exemple 5.2.3.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_n \text{ sont échelonnées réduites lignes.}$$

Remarque 5.2.3.3

Toute matrice échelonnée réduite ligne est échelonnée.

Définition 5.2.3.4

Deux matrices sont dites ligne-équivalentes si on passe de l'une à l'autre par des opérations élémentaires.

Proposition 5.2.3.5

Toute matrice non nulle est ligne-équivalente à une matrice échelonnée qui est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite ligne.

Exemples 5.2.3.6

$$\begin{aligned}
1) \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & -6 \end{array} \right) \rightsquigarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \\
& \rightsquigarrow L_3 - 4L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \\
2) \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} -L_3 \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \end{array} \right) \\
& \rightsquigarrow L_3 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array} \right) \rightsquigarrow -\frac{1}{9}L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right). \\
& \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
& \qquad \qquad \qquad \text{échelonnée} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{e.r.l}
\end{aligned}$$

En pratique : Cette opération traite la colonne 1, puis 2, puis 3.

→ On cherche le pivot $\boxed{1}$.

- Si le pivot est différent de 1, on cherche le $\boxed{1}$ des lignes de dessous, puis on permute les deux lignes.
- Si le $\boxed{1}$ ne figure pas dans cette colonne, on utilise $L_i \rightarrow \alpha L_i$ ($\alpha \neq 0$) ou $L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j$.

→ Puis on crée les zéros à partir du pivot $\boxed{1}$.

Attention ! si vous créez les zéros à partir d'un $\boxed{1}$ qui n'est pas un pivot, vous risquer de perdre les zéros déjà obtenus dans les colonnes précédentes.

5.2.4 Résolution d'un système linéaire**Définition 5.2.4.1**

- Dans un système échelonné, on appelle *inconnue principale* celle dont le coefficient sur une des lignes est un pivot.
- Une inconnue qui n'est pas principale est dite *secondaire*.

Exemple 5.2.4.2

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + 3z - 5t = 3 \\ z + 2t = -5 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \overset{x}{\boxed{1}} & -2 & \overset{z}{\boxed{3}} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -5 \end{array} \right).$$

x et z sont principales, y et t sont secondaires.

Solutions d'un système échelonné

Un système peut ne pas avoir de solutions, peut avoir une solution unique, ou une infinité de solutions.

- **Existence (compatibilité)**

Un système échelonné admet des solutions si et seulement si il n'y a pas de pivot sur la colonne des seconds membres.

Exemple 5.2.4.3

$$(S) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array} \right)$$

$$\boxed{3} \text{ est un pivot au second membre. Et } (S) \text{ devient : } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

ce qui est impossible. Et donc $S = \emptyset$.

- **Unicité**

Un système échelonné (compatible) admet une solution unique si et seulement si toutes les inconnues sont principales (i.e. il n'y a pas d'inconnue secondaire).

Exemple 5.2.4.4

$$(S) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array} \right). \text{ Donc } (S) : \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y + 2z = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -17 \\ y = -9 \\ z = 4 \end{cases}$$

Et donc $S = \{(-17, -9, 4)\}$.

- **Solutions multiples**

Un système échelonné (compatible) admet des solutions multiples si et seulement si il possède au moins une inconnue secondaire.

Pour exprimer l'ensemble de solutions, on calcule les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Propriété 5.2.1

Si le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système admet des solutions multiples.

Exemple 5.2.4.5

$$(S) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \overset{x}{\downarrow} & \overset{y}{\downarrow} & \overset{z}{\downarrow} & \overset{t}{\downarrow} & \\ \boxed{1} & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -5 \end{array} \right).$$

Dans l'ensemble des solutions, x et z qui sont principales seront exprimées en fonction de y et t qui sont secondaires. On obtient :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5t = 3 \\ + 2t = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 + 2y - 3(-5 - 2t) + 5t \\ z = -5 - 2t \end{cases} \implies \begin{cases} x = 18 + 2y + 11t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{ (18 + \underset{\uparrow x}{2y} + 11t, \underset{\uparrow y}{y}, -5 - \underset{\uparrow z}{2t}, \underset{\uparrow t}{t}) / y, t \in \mathbb{R} \}.$$

Clairement, lorsque y et t varient dans \mathbb{R} , la solution varie aussi. On a donc une infinité de solutions.

5.2.5 Exemples d'application

Résolvons les systèmes linéaires suivants :

$$1) (S_1) : \begin{cases} 2x - y + 4z = -9 \\ x + y - 2z = -1 \\ -x - 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$(S_1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -9 \\ -1 & -2 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \leadsto \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \leadsto \begin{array}{c} -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -7 \end{array} \right) \\
& \leadsto \begin{array}{c} L_3 + 5L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array} \right) \leadsto \begin{array}{c} \frac{-1}{12}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

On peut remarquer que toutes les inconnues sont principales, on aura donc une solution unique. En effet,

$$(S_1) \leadsto \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ y - 4z = -1 \\ z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 - y + 2z = -2 \\ y = -1 + 4z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Et $S = \{(-2, 3, 1)\}$.

$$2) (S_2) : \begin{cases} 3x + y + z - 2t = 1 \\ 2x - y - 3z + 7t = 2 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ 3x - 2y - 5z + 7t = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right) \leadsto \begin{array}{c} L_3 \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

$$\leadsto \begin{array}{c} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & -13 & 11 & -4 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 13 & -8 \end{array} \right).$$

Remarquons que, pour chercher le pivot $\boxed{1}$ dans la colonne deux, le 1 ne figure pas sur toute la colonne, on peut multiplier la ligne 2 par $-\frac{1}{7}$, mais on va trainer avec des quotients $-\frac{13}{7}$, $\frac{11}{7}$, $-\frac{4}{7}$ ce qui rend le calcul difficile. Vaut mieux chercher $\boxed{1}$ à

travers l'opération $L_2 - L_3$. Et on obtient :

$$\begin{aligned}
 (S) \rightsquigarrow L_2 - L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 13 & -8 \end{array} \right) &\rightsquigarrow L_3 + 8L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 60 & 24 \\ 0 & 0 & -9 & 90 & 36 \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow -\frac{1}{6}L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -10 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 90 & 36 \end{array} \right) &\rightsquigarrow L_4 + 9L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

On remarque que x, y et z sont principales, tandis que t est secondaire. x, y et z seront exprimées donc en fonction de t . On obtient :

$$(S_2) : \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ y + z + 7t = 4 \\ z - 10t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 - 3y - 5z + 2t = -1 + 3t \\ y = 4 - z - 7t = 8 - 17t \\ z = 10t - 4 \end{cases} .$$

Et donc $S = \{(-1 + 3t, 8 - 17t, 10t - 4, t) / t \in \mathbb{R}\}$ est une infinité de solutions.

$$\mathbf{3) } (S_3) : \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (S_3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right) &\rightsquigarrow L_2 + 2L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow \frac{1}{7}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow L_3 + 7L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a un pivot au second membre, la solution est donc le vide. En effet :

$$(S_3) \rightsquigarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ y - \frac{3}{7}z = 0 \\ 0 = 1 . \end{cases} \text{ (impossible)}$$

Donc $S = \emptyset$.

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Résoudre le système (S) en discutant les valeurs du paramètre m .

$$(S) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

Solution.

$$(S) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array} \right)$$

\uparrow
(*)

$$\boxed{\text{Si } m-1 \neq 0} \quad (m \neq 1)$$

$$(S) \rightsquigarrow \frac{1}{m-1} L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow L_3 - (1-m)L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 2 \end{array} \right)$$

\uparrow
(**)

$$\underline{\text{Si } 2+m \neq 0} \quad (m \neq -2)$$

$$(S) \rightsquigarrow \frac{1}{(1-m)(2+m)} L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } (S) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = \frac{1}{m-1} \\ z = \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ y = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ z = \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{cases}.$$

$$\text{Et } S = \left\{ \left(-\frac{m}{(1-m)(2+m)}, -\frac{m}{(1-m)(2+m)}, \frac{2}{(1-m)(2+m)} \right) \right\}.$$

$$\underline{\text{Si } m+2=0} \quad (m = -2)$$

Vaut mieux remplacer $m = -2$ dans la dernière matrice (**) obtenue juste avant de discuter le cas $m+2 \neq 0$.

On obtient :

$$(S) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array} \right) \Rightarrow S = \emptyset, \text{ car :}$$

$$(S) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = \frac{1}{m-1} \\ 0 = 2 \end{cases} \quad (impossible).$$

(Ceci puisqu'on a un pivot $\boxed{2}$ au second membre).

$\boxed{\text{Si } m-1=0} \quad (m=1)$

On remplace $m=1$ dans la dernière matrice obtenue (*) juste avant de discuter le cas $m-1 \neq 0$. On obtient :

$$(S) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad (impossible).$$

Donc $S = \emptyset$.

Conclusion

- Si $m \in \{-2, 1\}$, alors $S = \emptyset$.
- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors la solution est unique.

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

$$1) (S_1) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 5y - 2z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$2) (S_2) : \begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$$

$$3) (S_3) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 5y = 3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solution.

1)

$$\begin{aligned}
 (S_1) &\curvearrowleft \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \curvearrowleft \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \curvearrowleft \begin{array}{l} -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \\
 &\curvearrowleft \begin{array}{l} L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right) \curvearrowleft \begin{array}{l} \frac{1}{3}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \\
 (S_1) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = -1 \\ z = \frac{7}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x = z - y = 1 \\ y = -1 + z = \frac{4}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \left(1, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right) \right\}$.

2) Dans (S_2) . Notons que le nombre d'équations est strictement inférieur à celui d'inconnues, on aura donc une infinité de solutions.

$$(S_2) \curvearrowleft \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right) \curvearrowleft \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 12 \end{array} \right)$$

On peut remarquer que $L_3 = 4L_2$, on peut donc supprimer L_2 ou L_3 (puisque'il s'agit de la même équation), sinon, L_3 va s'annuler par calcul ($L_3 \Leftrightarrow 0 = 0$).

On obtient dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 (S_2) &\curvearrowleft \begin{array}{l} L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 (S_2) : \begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ y - 2z - 3t = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -5 - 5z - 5t \\ y = 3 + 2z + 3t \end{cases} \\
 S = \{ (-5 - \underset{x}{5}z - 5t, 3 + \underset{y}{2}z + 3t, z, t) / z, t \in \mathbb{R} \}.
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
(S_3) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \frac{1}{4}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
&\rightsquigarrow L_3 + 4L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

On a un pivot $\boxed{4}$ au second membre. Donc $S = \emptyset$. En effet :

$$(S_3) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - \frac{1}{4}z = \frac{3}{4} \\ 0 = 4 \end{cases} \quad (impossible).$$

5.2.6 Application (Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On aimerait inverser A .

Le principe de cette méthode consiste à appliquer des transformations de Gauss sur les lignes de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ d'ordre $(n, 2n)$, pour aboutir à $(I_n \mid B)$. Dans ce cas, A sera inversible et $A^{-1} = B$.

Exemples 5.2.6.1

$$1) \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A \mid I_3) &: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\rightsquigarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow -L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - 2L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2)} \text{ Soit } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(B \mid I_3) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{1}{4}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right).$$

$$\text{Donc } B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Résolution d'un système par la méthode de Cramer

5.3.1 Résolution d'un système de Cramer (cas particulier)(et exemples)

Définition 5.3.1.1

Un système de Cramer est un système linéaire, dont la matrice associée est carrée et inversible.

Exemples 5.3.1.2

$$1) (S_1) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + 3z = -2 \\ -x + 3y + z = 3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\parallel A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\parallel X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\parallel B}.$$

A : la matrice associée à (S) est carrée et est inversible. Donc (S_1) est de Cramer.

$$2) (S_2) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{\parallel A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\parallel X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\parallel B}.$$

A est non carrée, donc (S_2) est non de Cramer.

$$3) (S_3) : \begin{cases} 3x + 12y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\parallel A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A est carrée mais non inversible ($\det A = 0$), donc (S_3) est non de Cramer.

Théorème 5.3.1.3

Tout système de Cramer admet une solution unique.

Démonstration

Soit (S) un système de Cramer. $(S) \Leftrightarrow A.X = B$.

La résolution de (S) est équivalente à celle de l'équation matricielle $A.X = B$ où A est carrée et inversible. Donc $A.X = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{\parallel I} .X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$ qui est une

solution unique puisque A^{-1} et B sont uniques.

Résolution d'un système de Cramer

Soit (S) un système de Cramer à n équations et à n indéterminées $(S) \Leftrightarrow A.X = B$, où $\det A \neq 0$. ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

→ Soit $\Delta = \det A$, écrit sous forme d'un tableau.

→ Pour toute inconnue x_i , on note par Δ_{x_i} , le déterminant d'ordre n obtenu, en remplaçant dans Δ , la colonne des coefficients de x_i par B .

→ La solution (unique) du système est donnée par :

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemple 5.3.1.4

Réolvons le système (S) suivant par la méthode de Cramer,

$$(S) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 4y + 6z = 10 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\underset{A}{\parallel}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underset{X}{\parallel}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\underset{B}{\parallel}}.$$

$$\rightarrow \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$$\rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 124.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 75.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 31.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{124}{1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{75}{1} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{31}{1} \end{cases} \implies S = \{(124, 75, 31)\}.$$

5.3.2 Résolution d'un système quelconque (cas général)(et exemples)

Soit (S) un système. $(S) \Leftrightarrow A.X = B$.

Si (S) est non de Cramer, alors deux cas se présentent :

(A est non carrée) ou (A est carrée et $\det A = 0$).

Dans ces deux cas, on extrait de (S) le plus grand système de Cramer (S_0) qui admettra une solution unique, sur laquelle on se basera pour chercher la solution finale.

Les exemples suivants traitent tous les cas possibles.

Exemple 1 (A est non carrée)

$$(S) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z + t = -3 \\ x - 2y + z - t = 5 \\ x - 4y + 6z + 2t = 10 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{|| \\ A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

→ A est non carrée $\Rightarrow (S)$ non de Cramer.

→ Cherchons donc le plus grand système de Cramer $(S_0) \subset (S)$; ce qui revient à chercher le plus grand déterminant non nul inclus dans A . (On peut avoir plus d'un choix).

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Donc le système } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 - t \\ x - 2y + z = 5 + t \\ x - 4y + 6z = 10 - 2t \end{cases}$$

est de Cramer.

(Attention ! le dernier système obtenu a pour inconnues, x, y et z . Le t n'est pas une inconnue. Par contre, (S) a pour inconnues x, y, z et t).

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\Delta_x}{1} = \begin{vmatrix} -3-t & -5 & 4 \\ 5+t & -2 & 1 \\ 10-2t & -4 & 6 \end{vmatrix} = 16t + 124 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\Delta_y}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -3-t & 4 \\ 1 & 5+t & 1 \\ 1 & 10-2t & 6 \end{vmatrix} = 9t + 75 \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\Delta_z}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-t \\ 1 & -2 & 5+t \\ 1 & -4 & 10-2t \end{vmatrix} = 3t + 31. \end{cases}$$

Donc $S = \{(16t + 124, 9t + 75, 3t + 31, t) / t \in \mathbb{R}\}$.

Autre choix

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{ Donc le système } \begin{cases} 2x + 4z + t = -3 + 5y \\ x + z - t = 5 + 2y \\ x + 6z + 2t = 10 + 4y \end{cases}$$

est de Cramer (la solution sera en fonction de y).

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} -3+5y & 4 & 1 \\ 5+2y & 1 & -1 \\ 10+4y & 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(16y-84) \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & -3+5y & 1 \\ 1 & 5+2y & -1 \\ 1 & 10+4y & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(3y+54) \\ t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3+5y \\ 1 & 1 & 5+2y \\ 1 & 6 & 10+4y \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(y-75). \end{cases}$$

Donc $S = \{(\frac{1}{9}(16y-84), y, \frac{1}{9}(3y+54), \frac{1}{9}(y-75)) / y \in \mathbb{R}\}$.

Autre choix

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Donc le système } \begin{cases} 2x - 5y + t = -3 - 4z \\ x - 2y - t = 5 - z \\ x - 4y + 2t = 10 - 6z \end{cases}$$

est de Cramer. Et la solution finale sera en fonction de z .

Autre choix

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0. \text{ Donc le système } \begin{cases} -5y + 4z + t = -3 - 2x \\ -2y + z - t = 5 - x \\ -4y + 6z + 2t = 10 - x \end{cases}$$

est de Cramer. Et la solution finale sera en fonction de x .

Exemple 2 (A est non carrée)

$$(S) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + 4y - 2z = 4 & (E_3) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \parallel}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Ce choix est non convenable puisqu'il correspond à un système non de Cramer.}$$

Faisons un autre choix.

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0. \text{ Donc le système } (S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \end{cases}$$

est de Cramer. Et on a :

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \\ (E_3) : x + 4y - 2z = 4. \end{cases}$$

$$\rightarrow (S_0) \text{ admet pour solution } S_0 = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \right\} = \left\{ \left(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{7} \right) \right\}.$$

\rightarrow On remplace cette solution partielle dans l'équation restante (E_3) (pour voir si (E_3) accepte cette solution ou non).

$$\text{Dans } (E_3) : -\frac{4}{7} + 4 \times \frac{5}{7} - 2 \times \left(-\frac{6}{7} \right) = 4.$$

(E_3) accepte bien la solution, donc la solution finale est

$$S = \left\{ \left(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{7} \right) \right\}.$$

Exemple 3 (A est non carrée)

On reprend le même exemple 2, avec un changement de E_3 .

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \\ x + 4y - 2z = 15 & (E'_3) \end{cases} \end{cases}$$

Le changement est lorsqu'on remplace la solution S_0 dans l'équation restante (E'_3) , on obtient $4 = 15$ ce qui est impossible. (E'_3) n'accepte pas donc la solution. Par suite $S = \emptyset$.

Exemple 4 (A est carrée et $\det A = 0$)

$$(S) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 4y + 5z = m \end{cases} \quad (\text{où } m \in \mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ m \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow \det A = 0 \Rightarrow (S)$ non de Cramer.

→ Cherchons le plus grand déterminant non nul qu'on peut extraire de A .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \begin{cases} 2x - 5y = -3 - 4z \\ x - 2y = 5 - z \end{cases} \\ (E) : x - 4y + 5z = m \end{cases} \leftarrow \text{de Cramer.}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (S_0) : \begin{cases} 2x - 5y = -3 - 4z \\ x - 2y = 5 - z \end{cases} \text{ de Cramer} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -3-4z & -5 \\ 5-z & -2 \end{vmatrix}}{1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3-4z \\ 1 & 5-z \end{vmatrix}}{1} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 2z + 31 \\ y = 2z + 13. \end{cases} \end{aligned}$$

→ On remplace cette solution dans l'équation (E) , on obtient :

$$3z + 31 - 8z - 52 + 5z = m \iff -21 = m.$$

Si $m \neq -21$ (E) n'accepte pas la solution et donc $S = \emptyset$.

Si $m = -21$ (E) accepte la solution, et donc $S = \{(3z + 31, 2z + 13, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

Lorsqu'on remplace la solution de (S_0) dans l'équation restante (E) , " z " doit disparaître. Sinon, " z " aura une valeur, par suite x et y l'auront aussi et (S) sera donc de Cramer, ce qui est impossible.

Exemple 5

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} (S_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Système de Cramer} \\ (E_1) \\ (E_2) \end{array} \right. \end{cases}$$

Si (S) est un système formé par un système (S_0) de Cramer et des équations restantes, alors la solution de (S_0) sera une solution pour tout le système (S) si toutes les équations restantes l'acceptent.

Si la solution ne vérifie pas l'une des équations restantes, alors $S = \emptyset$.