	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths(S3)	MATHEMATIQUE SERIE 1	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 :

Soit $X = (x_1, x_2)$, on pose $N(X) = \sqrt{x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v et $N: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

i) $\forall x \in E \setminus \{0\}; N(x) > 0.$
ii) $N(0) = 0.$
iii) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}; N(\lambda x + y) \leq |\lambda| N(x) + N(y).$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$.

1) Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

On note $\|.\|_p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'application définie par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:
a- $|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.
b- $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
3) En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Exercice 4 :

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$.

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Dessiner la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 5 :

Soient (E, d) un espace métrique et $\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant :

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que $\varphi o d$ est une distance sur E.
2) Montrer que $d_1 = \frac{d}{1+d}$ et $d_2 = \ln(1+d)$ sont des distances sur E.
3) Soit $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^n = \{(x_n), (x_n)_n \textit{ une suite réelle} \}$

   Pour $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$d(x_n, y_n) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}.$$

   a) Montrer que d est une distance.
   b) Montrer que $(\mathbb{R}^n, d)$ est borné.

Exercice 6 :

Soient E un $\mathbb{K}$.e.v, N_1 et N_2 deux normes sur E.

Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si tout ouvert pour (E, N_1) est un ouvert pour (E, N_2)

Exercice 7 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.

Montrer que la boule fermée $B^f(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.

Exercice 8 :

Donner un exemple d'un ensemble borné de $\mathbb{R}$ ayant exactement trois points d'accumulations.

Exercice 9 :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles d'un espace métrique, on pose $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

1) Montrer que $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \subset \overline{B}$.
2) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure		
Licence d'éducation Spécialité : Maths (S3)	SERIE 2	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel $K \subset U$ que et $\overline{U}$ est compacte.

Exercice 2 :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}.$$

1) Montrer que si A est ouvert, $A + B$ l'est.
2) Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.
3) Montrer que si A et B sont compacts, $A + B$ l'est.
4) Trouver A et B fermé telles que A+B ne le soit pas

Exercice 3:

Soit E un espace vectorel normée et $(K_n)_n$ une suites de parties compacts de E, non vides, telles que, pour chaque n, on a $K_{n+1} \subset K_n$, on pose $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1) Montrer que $K \neq \emptyset$.
2) Soit U un ouvert contenant K, démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$.

Exercice 4 :

Etudier l'existence d'une limite en (0,0) pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
2) $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Exercice 5 :

Etudier la continuité de la fonction f définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & si\ x \neq 0 \\ y & si\ x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6 :

Etudier la continuité des fonctions définies par:

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}\, e^{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, e^{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 7 :

Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ par $f(x) = \frac{x}{\|x\|_2} - x$.

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0,0)$.

Exercice 8 :

Soient f et g deux applications continues de E dans F, monter que :

1) $A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ est fermé.
2) $B = \{x \in E / f(x) < g(x)\}$ est ouvert.

Exercice 9 :

Une fonction f définie sur une partie A à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V de et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in V, \| f(y) - f(z) \| \leq C \| y - z \|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation Spécialité : Maths (S3)	SERIE 3	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer les dérivées partielles premières de f.
3) Est-ce-que f est une fonction de classe C^1 ?

Exercice 2 :

Est-ce-que f et g sont des fonctions de classe C^1 ?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases},\qquad g(x,y)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{y}{x}\right) & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}.$$

Exercice 3 :

Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi''(0)\neq 0$ et $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer les dérivées partielles premières de f.
3) Est-ce-que f est une fonction de classe C^1 ?

Exercice 4 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^py^q}{x^2-xy+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

, où p et q sont des entiers naturels non nuls.

1) Montrer que pour tous , $y\in\mathbb{R}$, $|xy|\leq x^2-xy+y^2$.
2) Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que si $p+q=2$ alors f n'est pas différentiable.
4) On suppose que $p+q=3$ et que f est différentiable en $(0,0)$. Justifier alors qu'il existe deux constantes a et b telles que $f(x,y)=ax+by+o(\|x,y\|)$. En étudiant les applications partielles

$x \to f(x,0)$ et $y \to f(0,y)$, justifier que $a = 0$ et $b = 0$. Conclure, à l'aide de $x \to f(x,x)$ que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de de classe C^1, on définit la fonction $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h(u,v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

Monter que h est de classe C^1 et exprimer $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6

On note $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f: U \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = (x + y, e^x + y)$$

1) Déterminer $V = f(U)$.
2) Montrer que U et V sont ouverts de $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que f est C^1-difféomorphisme.

Exercice 7

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $r \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0 \quad f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

On dit que f est homogène de degré r .

1) Monter que f est homogène de degré r si et seulement si :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$
2) On suppose que f est une fonction de classe C^2, montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r-1)f(x,y).$$