Les séries entières

1 Rayon de convergence

Définition 1.1. On appelle série entière de la variable complexe z toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite réelle ou complexe, appelée suite des coefficients.
Comme pour les séries de fonctions , dans le cas de convergence, nous notons S sa fonction somme définie par:

$$S(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 1.2. $\sum_{n\geq 0} nz^n$, $\quad \sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$, $\quad \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{1+n^2}$, $\quad \sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+in}{e^n} z^{2n}$.

Proposition 1.3. *Lemme d'Abel Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a^n z_0^n)$ soit bornée, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,|z_0|)$ et normalement sur $\overline{D}(0,r)$ avec $0 < r < |z_0|$ où $D(0,|z_0|) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < |z_0|\}$ et $\overline{D}(0,r) = \{z \in D/|z| \leq r\}$.*

Démonstration. Soit K un majorant de la suite $(| a_n z_0^n |)_n$.

- Si $| z |<| z_0 |$ alors
$$| a_n z^n |=| a_n z_0^n || \frac{z}{z_0} |^n \leq K | \frac{z}{z_0} |^n,$$
puisque $| \dfrac{z}{z_0} |< 1$, alors la série $\sum | \dfrac{z}{z_0} |^n$ converge .
Donc la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente D(0,$| z_0 |$)
- Soit $r > 0$ tel que $r <| z_0 |$. Si $| z |\leq r$, alors $| a_n z^n |\leq| a_n | r^n$, puisque la série $\sum | a_n | r^n$ converge.
Alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.
L'ensemble des réels r ≥ 0 tels que la suite $(a_n r^n)_n$ soit bornée est non vide, puisqu'il contient 0. Il admet une borne supérieure R, éventuellement infinie.

Définition 1.4. On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, l'élément $R \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ défini par:

$$R = \sup\{r \geq 0 \ / \ (a_n r^n) \text{ bornée } \}.$$

Proposition 1.5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

1. *la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,R)$.*
2. *la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ pour tout $0 < r < R$.*
3. *si $R \in [0,+\infty[$, la série entière $\sum a_n z^n$ est divergente pour $|z| > R$.*

Remarque 1.6. Dans le cas où $| z |= R$ avec $R \neq \{0,+\infty\}$, le comportement de la série entière n'est pas prévisible.

Exemples 1.7.

1. $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge pour $| z |= 1$.
2. le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$ mais $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1$ et converge pour tout z tel que $| z | = 1$ et z$\neq 1$.
3. la série entière $\sum_{n>0} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
4. $\sum n!z^n$.
Pour tout $| z |> 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} n! | z |^n= +\infty$.
Donc $(n!z^n)$ n'est pas bornée, ce qui implique que $R = 0$.

5. $\sum_{n>0} \frac{z^n}{n!}$.
   Pour tout z la suite $(\frac{z^n}{n!})$ est bornée.
   Donc $R = +\infty$.

Remarque 1.8. lorsque l'où envisage une variable réelle x, le disque de convergence est l'intervalle $]-R, R[$. La série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $\mid x \mid < R$. Si R$< +\infty$, La série diverge pour $\mid x \mid > R$ et pour $\mid x \mid = R$, On ne peut rien dire.

Proposition 1.9. *(Règle de d'Alembert)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $lim_{n\to+\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = l \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$ où $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

Exemples 1.10.

1. $\sum \frac{n^2-n+3}{2n^3+n+\pi} z^n$.
   $\frac{(n+1)^2-n-1+3}{2(n+1)^3+n+1+\pi} \cdot \frac{2n^3+n+\pi}{n^2-n+3} = \frac{n^2+n+3}{2n^3+6n^2+7n+3+\pi} \cdot \frac{2n^3+n+\pi}{n^2-n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{3+\pi}{n^3}} \cdot \frac{2+\frac{1}{n^2}+\frac{\pi}{n^3}}{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$.
   $\lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = 1$.
   D'où le rayon de convergence de la série $\sum \frac{n^2-n+3}{2n^3+n+\Pi} z^n$ est $R = 1$.

2. $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$.
   Posons $a_n = \frac{1}{(2n)!}$.
   Alors $\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$ est R=$+\infty$.

Définition 1.11. soit (U_n) une suite réelle . On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de cette suite la plus grande (resp. le plus petite) de ses valeurs d'adhérences dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On utilise les notations $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf U_n$.

Proposition 1.12. *(Formule de Hadamarde) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière . si $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} = l$. Alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$.*

Exemple 1.13. $\sum 2^n z^{2n}$.

$$a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{si n est pair.} \\ 0, & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

Donc

$$\mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{si n est pair.} \\ 0, & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

On déduit que $lim_{n\to+\infty} sup \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$
Donc le rayon de convergence de la série $\sum 2^n z^{2n}$ est R=$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes: $\sum \frac{z^{3n}}{n!}$, $\sum \frac{(1+i)^n}{n.2^n} z^{2n}$.

Corollaire 1.14. *Soit $\sum a^n z^n$ une série entière si $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid} = l$ avec $l \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a^n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$.*

Exemples 1.15. $\sum \frac{1}{n^n} z^n$.
$lim \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} = lim \frac{1}{n} = 0$. Donc le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^n} z^n$ est R=$+\infty$.

Proposition 1.16. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.*

1. *$\sum a_n z^n$ et $\sum \mid a_n \mid z^n$ ont même rayon de convergence .*
2. *$\mid a_n \mid \leq \mid b_n \mid \Rightarrow R_a \geq R_b$.*
3. *$\mid a_n \mid \sim \mid b_n \mid$ quandn $\mapsto +\infty \Rightarrow R_a = R_b$.*
4. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

2 Opération sur les séries entières

Définition 2.1. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entiers et $\alpha \in C$
On définit

1. la série somme: $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum(a_n + b_n)z^n$.
2. la série produit de $\sum a_n z^n$ par α: $\alpha(\sum a_n z^n) = \sum(\alpha a_n)z^n$.
3. : la série produit: $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)= \sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Proposition 2.2. *Soient $\sum a_n z^n$ $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.*

1. *le rayon de convergence R_{a+b} de la somme vérifie $R_{a+b} \geq min\{R_a, R_b\}$.*
   Si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = min\{R_a, R_b\}$.
   De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mid z \mid < min\{R_a, R_b\}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n.$$
2. *le rayon de convergence ne change pas si on multiplie la série $\sum a_n z^n$ par un scalaire $\alpha \neq 0$. De plus , si $\mid z \mid < R_a$ on a: $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n)z^n$.*
3. *le rayon de convergence R_{ab} du produit vérifie $R_{ab} \geq min\{R_a, R_b\}$. De plus si $\mid z \mid < min\{R_a, R_b\}$, On a:*
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Remarque 2.3.

- Dans (1) et (3), on peut avoir $R > max\{R_a, R_b\}$.
- lorsque $R_a = R_b$ on peut avoir $R_{a+b} = R_a or R_{a+b} > R_a$

Exemples 2.4.

1. (a) $\sum z^n$ et$\sum nz^n$ sont de rayon de convergence 1 et leur série entière somme $\sum(1 + n)z^n$ est de rayon 1.
   (b) $\sum z^n$ et $\sum(2^{-n} - 1)z^n$ sont de rayon 1 mais leur série somme $\sum(2^{-n})z^n$ est de rayon 2.
   (c) $\sum z^n$ et $-\sum z^n$ sont de rayon 1 et leur série somme $\sum az^n$ est de rayon ∞.
2. $\sum a_n z^n$ avec
$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{si n =0.} \\ 2^n, & \text{si n} \geq 1. \end{cases}$$
   $\sum b_n z^n$ avec
$$b_n = \begin{cases} -1, & \text{si n =0.} \\ 1, & \text{si n} \geq 1. \end{cases}$$
   On a $\mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} \to 2$ et $\mid b_n \mid^{\frac{1}{n}} \to 1$.
   Donc $R_a = \frac{1}{2}$ et $R_b = 1$.
   $C_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} -1a_i b_{n-1} + a_n b_0 = 2 + \sum_{k=1}^{n} -12^k - 2^n = 2 + 2(2^{n-1} - 1) - 2^n = 0$.
   Donc le rayon de convergence de la série produit est $R = +\infty$.

3 Propriétés de la fonction somme.

Théorème 3.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, la somme S de la série $\sum a_n z^n$ est une fonction continue sur $D(0, R)$.*
En particulier la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] - R, R[$.

Théorème 3.2. *Soit$\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$.*
s'il existe $z_0 \in C$ vérifiant $\mid z_0 \mid= R$ tel que la série $\sum a_n z^n$ converge, alors $\lim_{t\to 1^-} S(tz_0) = (z_0)$

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. Étudier la continuité de la fonction f.

Théorème 3.3. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.*
La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et de classe C^1 sur]-R,R[et
$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = (\sum_{n=1}^{+\infty} x_n z^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+}\infty(n+1)a_{n+1}x^n$.
De plus la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exemple 3.4. Soit a$\neq 0$. On considère la série entière $\sum(\frac{t}{a})^n$.
$\sum(\frac{t}{a})^n$ est une série géométrique, elle converge ssi $\mid t \mid < \mid a \mid$.
Donc le rayon de convergence de $\sum(\frac{t}{a})^n$ est $R = \mid a \mid$.
Alors la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\sum(\frac{x}{a})^n$ de classe C^1 sur $]- \mid a \mid, \mid a \mid [$.
Pour $x \in]- \mid a \mid, \mid a \mid [$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum \frac{n}{a}(\frac{x}{a})^{n-1} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+}\infty(n+1)(\frac{x}{a})^n$.
Or $\sum(\frac{x}{a})^n = \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a}{a-x}$.
Donc $\frac{a}{(a-x)^2} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\frac{x}{a})^n$.
c-a-d $\frac{1}{(a-x)^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\frac{x}{a})^n$.

Théorème 3.5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R> 0. Alors la fonction $S :\mapsto \sum_{n=0}^{+}\infty \sum a_n x^n$ et de classe C^∞ sur]-R,R[et on a*

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R, R[, \forall p \in \mathbb{N}^*, S^{(p)}(x) &= (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)^{(p)} \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)a_{n+p}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n.\end{aligned}$$

De plus, les séries dérivées ont même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$.

Corollaire 3.6. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \text{ et } \forall x \in]-R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Théorème 3.7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction $S :\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\sum a_n x^n$ est intégrable sur tout segment $[a,b] \subset]-R, R[$, de plus on a*

$$\int_a^b(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\int_a^b x^n dx).$$

Corollaire 3.8. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction $S :\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\sum a_n x^n$ admet pour primitive dans $]-R, R[$ les fonctions F_c définies par :*

$$F_c(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

4 Fonction développable en série entière

Étant donné une fonction f d'une variable réelle (ou complexe) définie sur un voisinage V de 0, existe-t-il une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme soit égale à la fonction f sur $]-R, R[\cap V$ (ou $D(0,R)\cap V$)? si c'est le cas, on dit que f est développable en série entière en 0, ou au voisinage de 0.

Proposition 4.1. *Si f est une fonction développable en série entière, le développement $f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est unique.*
De plus, si f est pair (reps. impaire), alors $a_{2n+1} = 0$ (reps. $a_{2n} = 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. $a_0 = f(0)$.
   $f(z) - \sum_{n=0}^{n} -1 a_k z^k = a_n z^n \Rightarrow a_n = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^n}(f(s) - \sum_{n=0}^{n} -1 a_k z^k)$.
   D'où l'unicité des coefficients a_n.

2.

$$f est pair \Rightarrow f(-z) = f(z).$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
$$\Rightarrow -a_{2n+1} = a_{2n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow 2a_{2n+1} = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow a_{2n+1} = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 4.2. *Soit f une fonction développable en série entière. Alors*

1. *f est de classe C^∞ au voisinage de 0.*
2. *son développement en série entière coincide avec la série de Taylor $\sum a_n x^n$ ($a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$).*
3. *ses fonction dérivées successives sont également développables en série entière (avec le même rayon de convergence).*

Remarque 4.3. Une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière.

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Par récurrence on peut montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $2n-2$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $n \geq 0$.
On en déduit que f est indéfiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
La série de Maclaurin de f est donc la série nulle qui ne peut pas être égale à $f(x)$ sur un voisinage de 0 puisque $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.
Donc f n'est pas développable en série entière.

Remarque 4.4. Soit I un intervalle ouvert contient 0 et f$\in C^\infty[R, R[$.
Même si f est développable en série entière en 0, la série de Taylor associée n'est pas forcement convergente en tout point de I (le rayon de convergence intervient). Ainsi $f(x) = \frac{1}{3-x}$ est de classe C^∞ sur $]-\infty, 3[$, mais l'égalité $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ n'est vraie que pour x∈]-3,3[.

Théorème 4.5. *Une fonction f est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ tel que*

i) *f est de classe C^∞ sur]-r,r[.*

ii) $\forall x \in]-r, r[. \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \to 0 (n \to +\infty)$.