Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 1

20/01/2024 | Contrôle d'Algèbre 2 | Durée 2h

Exercice 1. *(7pts)*
On définit $A = \{a + jb \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ *où* $j = exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. *Montrer que* A *est un sous-anneau de* C*.On désigne par* $\mathcal{U}(A)$ *le groupe des éléments inversibles de* A *et enfin, on pose, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
   - *Montrer que si* $z \in A$ *alors* $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   - *Soit* $z \in A$. *Montrer que* $z \in \mathcal{U}(A)$ *si et seulement si* $N(z) = 1$.
   - *Soient* a *et* b *des entiers. Montrer que si* $N(a + jb) = 1$ *alors* $a, b \in \{1, 0, 1\}$.
2. *Soit* $\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$, $P \to P(j)$.
   - *Montrer que* φ *est un morphisme d'anneaux.*
   - *Déterminer le noyau de* φ *(on pourra remarquer que* $j^2 + j + 1 = 0$*).*
   - *Montrer que* $Im(\varphi) = a + jb : a, b \in \mathbb{Q}$ *et que c'est un sous-corps de* $\mathbb{C}$.

Exercice 2. *(8pts)*

1. *Décomposer dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P(X) = X^3 - 1$.
2. *En déduire que* $X^4 + X^2 + 1$ *divise* $Q(X) = X^6 - 1$.
3. *Déterminer l'ensemble des racines complexes de* Q.
4. *Donner la décomposition en facteurs irréductibles de* Q *dans* $\mathbb{R}[X]$.
5. *En déduire la factorisation de* $X^4 + X^2 + 1$ *en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.
6. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\frac{1}{X^4+X^2+1}$. *On pourra utiliser convenablement les points* 0, i *et* $+\infty$.

Exercice 3. *(5 pts)*

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante*

$$F = \frac{5X^2 + 21X + 22}{(X-1)(X+3)^2}$$

2. *En déduire la primitive de* $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$ *sur* $]1, +\infty[$ *qui s'annule en 2.*

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE Mathématiques 2023/2024
Semestre 1

07/02/2024

Rattrapage d'Algèbre 2 — Durée 2h

Exercice 1. *(10pts)*
Soit $a \in \mathbb{N}$. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{a}] = \{x + y\sqrt{a}/(x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{a}] = \{x + y\sqrt{a}/(x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. *Montrer que si $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Z}[\sqrt{a}] = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{a}] = \mathbb{Q}$. dans la suite, on suppose que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.*
2. *Démontrer que, dans l'écriture $z = x + y\sqrt{a}$ d'un élément $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ (avec $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$), les entiers x et y sont uniques.*
3. *Montrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$.*
4. *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ est stable dans $(\mathbb{R}, \times)$.*
5. *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.*
6. *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, muni des deux lois induites de l'addition et de la multiplication, est un anneau commutatif.*
7. *Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$.*
8. *Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ sont écrit $\bar{z} = x - y\sqrt{a}$*
   (a) *Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{a}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ telle que $\phi(z) = \bar{z}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$.*
   (b) *Pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, on pose $N(z) = z\bar{z}$. Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$ pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$.*
   (c) *En déduire qu' un élément $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ si et seulment si $N(z) = 1$ ou $N(z) = -1$.*

Exercice 2. *(6pts)*
Soient dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $A = X^2 + X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 1$

1. *En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que $pgcd(A, B) = 1$.*
2. *En deduire $U, V \in \mathbb{R}[X]$ verifiant*
$$UA + VB = 1 \quad avec \quad deg(U), deg(V) \leq 1.$$
3. *Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction*
$$F = \frac{X^6}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 - 2X + 2)^2}.$$

Exercice 3. *(4pts)*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante
$$F = \frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

2024/2/7 17:10

Contrôle continu
1h40

Exercice 1

Déterminer les bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum s'ils existent :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^3 > 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / \quad x^2 + x + 1 \leq 0\}$$

$$C = \{(-1)^n + \frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 2

1. Énoncer la propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$.
2. ~~Soit~~ $a \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{n} < a < n.$$

Exercice 3

1. Donner un exemple de :
   (a) une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.
   (b) une suite bornée non convergente.

Exercice 4

Soit x un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} E(kx)$ et $v_n = \frac{u_n}{n^2}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

n^2

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n < u_n \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 5

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\frac{\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soit la suite réelle $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (a) Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, où

$$u_n = s_{2n+1}, \qquad v_n = s_{2n}.$$

   (b) Que peut-on dire sur la convergence de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

UAE
ENS Tétouan

Analyse 1
Examen (2h)

LEM, M2
Année 2023-2024

Exercice 1

Soit A une partie non vide et bornée dans $\mathbb{R}^+$. On pose $\sqrt{A} = \{\sqrt{x}, \quad x \in A\}$

1. Montrer que $\sqrt{A}$ admet une borne supérieure et que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$,
2. Déterminer les bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum s'ils existent de l'ensemble :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\},$$

Exercice 2

Rappel : Un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$. On considère l'ensemble D défini par

$$D = \{p + q\sqrt{2}, \quad p, q \in \mathbb{Z}\}$$

1. Soit $u = \sqrt{2} - 1 > 0$. Montrer que $u^n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u^{n_0} < b - a$. (Indication, vous pouvez utiliser la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u^n = 0$)
3. En utilisant la question 2. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a < mu^{n_0} < b$.
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 3

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \longleftarrow \boxed{u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} \quad \boxed{v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}}$$

1. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, On considère la suite de erme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{ak + b}{k!}$.

   $V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$

   Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $w_n = a(1 + u_{n-1}) + bu_n$.
3. Si on note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, Déduire en foncton de l la limite de la suite w_n.

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit A l'esemble des valeurs d'adhérence de (u_n)
   (a) Expliquer pourquoi si (u_n) converge rs un réel l alors $A = \{l\}$.
   (b) Montrer que si (u_n) est bornée alors est non vide.
   (c) En général A peut-il être vide ?
   (d) Construisez une suite qui a exacteme 2 valeurs d'adhérences.
2. Soit $u_n = n^{(-1)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, montrer que est une valeur d'adhérence.

Exercice 5

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq}$ înie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite Cauchy.
3. Déduire que $\lim u_n = +\infty$.

UAE | Analyse 1 | LEM, M2
ENS Tétouan | Examen rattrapage (2h) | Année 2023-2024

Exercice 1

1. Rappeler la propriété d'Archimède.
2. Démontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Exercice 2

1. Soit A une partie non vide et bornée. On pose $\sqrt{A} = \{\sqrt{x}, \quad x \in A\}$. Montrer que $\sqrt{A}$ admet une borne inférieure et que
$$\inf(\sqrt{A}) = \sqrt{\inf(A)}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

Exercice 3

Déterminer les bornes supérieure et inférieure (si elles existent) de :

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}; \quad \frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$
$$C = \{x \in \mathbb{R}; \quad x^2 < 2\}$$

Exercice 4

1. Montrer que toute suite convergente est bornée.
2. Soit $(v_n)_n$ une suite de nombres réels tel qu'ils existent des constantes $\gamma \in]0, 1[$ et c vérifiant
$$|v_{n+1} - v_n| \leq c\gamma^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Montrer que $(v_n)_n$ est une suite convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $w_n = \cos(n)$ diverge.
(Indication : Utiliser une démonstration par absurde, on rappelle les propriétés trigonométriques suivantes : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ prenez par exemple $p = n+1,\ q = n-1$ de plus $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$)

Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels décroissante de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

1. Montrer que les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Déduire que (S_n) converge.
3. Étudier la convergence de la suite $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Ecole Normale S

Ecole Normale Supérieure, Martil **Filière : LE/Math** **Semestre :1**

Module : Thermodynamique contrôle continu

ECOLE NORMALE SUPERIE

Soient les variables d'état suivantes :

V : volume ; P : Pression ; T : Température

Constante de gaz parfaits : $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; $1 atm = 10^5$ Pa.

Exercice 1 :

1- Donner les expressions de la quantité de chaleur élémentaire δQ en fonction de : dV et dT ou dP et dT.

2- Pour gaz parfait, calculer les chaleurs latentes ℓ et h resp. de dilatation isotherme et de compression isotherme.

3- Montrer que δQ n'est pas une différentielle totale exacte.

4- L'entropie S est une fonction thermodynamique de P et T, sa différentielle dS s'écrit :

$dS = \frac{\delta Q}{T}$. En déduire que l'entropie d'un gaz parfait : S= S(P,T) est une fonction d'état .

Exercice 2 :

Afin de prendre en compte les interactions qui s'exercent entre les molécules qui constituent un gaz réel, Van der Waals a proposé l'équation d'état caractérisée par les constantes a et b du gaz : a pression de cohésion et b covolume.

$$\left(P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) = nRT \quad ; \text{n : nombre de moles}$$

1-Comparer cette équation d'état à celle d'un gaz parfait.

2- On définit le facteur de compression d'un gaz par $Z = \frac{PV_m}{RT}$ où V_m est le volume molaire du gaz.

a) Que vaut le facteur de compression pour un gaz parfait ?

b) Trouver le volume molaire du dioxygène O_2 à T=500 K et P= 100 atm on donne :

$a = 3,592\ atm.L^2.mol^{-2}$, $b = 4,267 \times 10^{-2}\ L.mol^{-1}$

c) Calculer le facteur de compression du O_2 pris dans ces conditions. Le O_2 est-il plus compressible ou moins compressible qu'un gaz parfait ?

3- Comment s'écrirait l'équation pour une pression de cohésion négligeable ?

4- On prend : a=0 . Calculer α coefficient de dilatation isobare.

Ecole Normale Supérieure, Martil
Module : Thermodynamique
Examen finale

LE Maths / Semestre :1
Durée : 1H30

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Soient les variables d'état suivantes :
V : volume ; P : Pression ; T : Température
Constante de gaz parfaits : R= 8, 314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$

Un fluide décrit le cycle réversible ci-contre, tel que :
$1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ transformations isochores
$2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ transformations isothermes.
Le cycle est parcouru par une mole de gaz parfait. En raison de la technologie du moteur ditherme, la seule chaleur réellement dépensée est celle qu'on fournit au fluide sur l'isotherme T'.

Le coefficient de capacité calorifique du gaz parfait est $\gamma = \frac{7}{5}$.

On donne : $V_4 = 5V_1$, $T = 300\ K$, $T' = 400\ K$.

1) Donner l'aspect du cycle de Clapeyron correspondant.

2) Exprimer en chaque transformation : les travaux et les quantités de chaleur échangées

3) Calculer le travail total échangé au cours d'un cycle, conclure.

4) Écrire le rendement du moteur en fonction des quantités de chaleur échangées, puis en fonction de T et T' ~~et calculer le numériquement.~~

5) Etablir les expressions de l'entropie échangée pour les cas suivants :

5-1 Transformation isochore

5-2 Transformation isotherme.

6) Vérifier que les transformations $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 3$ sont réversibles.

Soient les variables d'état : V le volume, T la température absolue, P la pression du gaz
constante de gaz parfait : $R = 8{,}31\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$

Exercice 1 :

1- Donner les expressions de la quantité de chaleur élémentaire δQ en fonction de : dV et dT ou dP et dT.

2- Pour gaz parfait, calculer les chaleurs latentes ℓ et h resp. de dilatation isotherme et de compression isotherme.

3- Montrer que δQ n'est pas une différentielle totale exacte.

4- L'entropie S est une fonction thermodynamique de P et T, sa différentielle dS s'écrit :

$dS = \frac{\delta Q}{T}$. Montrer que l'entropie d'un gaz parfait : S= S(P,T) est une fonction d'état .

Exercice 2 :

Un récipient calorifugé (adiabatique) fermé par un piston cylindrique mobile, contient un gaz dont les conditions initiales sont : (V_0= 0,5L, T_0=300K). On chauffe le gaz à l'aide d'une résistance jusqu'à un état d'équilibre avec un taux de variation de température de 15%. La pression du gaz demeure identique à la pression du milieu extérieur : $P_0=1{,}12.10^5$ Pa,
Le tableau ci-dessous regroupe les coefficients thermoélastiques du gaz (exprimés en S.I):

Coefficient de dilatation isobare (à $P_0 = 1{,}12.10^5$ Pa)	$\alpha = 8.10^{-6}$
Coefficient de variation de pression isochore (à V_0=0.5L)	$\beta = 9{,}7\ .10^{-3}$

1. Trouver l'état d'équilibre final (T_1= ?, V_1 = ?, P_1 = ?)
2. Calculer W le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur
3. En déduire la variation de l'énergie interne,et la variation d'enthalpie au cours de cette transformation .

? ni effectife efe... N

UAE
ENS Tétouan

Statistiques & Probabilités

LEM
Année 2023-2024

Contrôle continu
1h45

Exercice 1

On présente dans le tableau statistique suivant la répartition des salaires mensuelles d'une entreprise :

	850	950	1025	1100	1225
Salaires en euros	[800,900[	[900,1000[	[1000,1050[	[1050,1150[	[1150,1300[
Effectif n_i	42	49	74	19	16

1. Définir population, le caractère, duquel s'agit il ?
2. Représenter cette série statistique.
3. Déterminer la classe modale ainsi que le mode.
4. Calculer le salaire moyen dans cette entreprise. Que penser d'un tel résultat ?
5. Dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 1050 euros ?
6. Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane et de Q_1 et Q_3.
7. Calculer de manière précise la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3. Donner vos interprétations.
8. Calculer l'écart type de cette série statistique.
9. Dans cette série statistiques se rajoute une sixième catégorie d'employés dont les salaires appartiennent à la classe [1300 ;1500[. Quel est l'effectif de cette classe sachant que le salaire moyen au sein de cette entreprise est alors de 1200 euros.

Exercice 2

L'étude d'une réaction chimique en fonction du temps a donné les résultats suivants :

Temps (en h)	1	2	3	4	5
Concentration C (en g/L)	6.25	6.71	7.04	7.75	8.33

1. Identifier les deux séries statistiques étudiées. Calculer la moyenne de chaque série statistique.
2. Calculer le coefficient de corrélation entre ces deux séries. Que peut-on déduire ?

Des considérations théoriques laissent supposer que la concentration C et le temps t sont liés par une relation de la forme $C = \frac{1}{at+b}$. En utilisant l'ajustement des moindres carrés :

1. Donner une estimation de la concentration après 6h.
2. Combien du temps a-t-on besoin pour arriver à une concentration de $10g/L$.

Salaires en euros	800,900	900,1000	1000,1050	1050,1150
effectif	42	49	74	19

→ 1150,1300

UAE
ENS Tétouan

Statistiques

LEM
Année 2023-2024

Examen

Exercice 1

On considère que le taux de triglycérides est optimal quand il est inférieur à 1,7 mmol/L. Quand il est élevé càd supérieur à 1,7 mmol/L, on parle de maladie d'hypertriglycéridémie. Dans un laboratoire d'analyses sanguines, on mesure le taux de triglycérides observé chez 250 personnes de 20 ans à 60 ans. On relève les résultats suivants :

Taux de Tri-glycérides mmol/L	[0.4 ;0,8[	[0,8 ;1.2[	[1,2 ;1,5[	[1.5 ;1,8[	[1,8 ;2.1[	[2.1 ;2.2[
Nombre d'observations	10	30	38	42	80	50

1. Identifier la population et sa taille, le caractère, les modalité. De quel type s'agit-t-il ?
2. Calculer les fréquences, les effectifs cumulés croissants.
3. Tracer l'histogramme des effectifs.
4. Déterminer la classe modale ainsi que le mode.
5. Tracer la courbe cumulative des fréquences cumulées croissant. Déduire la valeur de la médiane.
6. Calculer les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3. Que peut-on dire sur l'état de la population vis-à-vis cette maladie (vos interprétations) ?
7. Calculer le taux moyen de Tri-glycérides pour cette population, la variance et l'écart type.
8. Quel est le nombre de personnes malades d'hypertriglycéridémie.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne les valeurs expérimentales du volume V et de la pression P d'un gaz. D'après les lois de la thermodynamique de Laplace pour un gaz parfait, on a la relation

Volume (en cm^3) : v_i	620	890	1013	1186	1454	1944	2313	3179
Pression (en Kg par cm^3) : p_i	6.7	4.3	3.48	2.644	1.997	1.35	1.1	0.7

$PV^\gamma = C$, où γ et C sont des constantes.

1. Préciser la population, la(es) variable(s) étudiée(s) et la taille de l'échantillon.
2. On considère les variables $X = \ln V$ et $Y = \ln P$. Démontrer que $Y = -\gamma X + \ln C$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs expérimentales transformées :

$x_i = \ln v_i$	6,430	6.791	6.921	7.078	7,282	7,573	7,746	8,064
$y_i = \ln p_i$	1,902	1,459	1,253	0,956	0,693	0,336	0,095	-0,357

3. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Interpréter le résultat obtenu ?
4. En utilisant un ajustement des moindres carrées. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
5. En déduire, en justifiant, la valeur de γ et de C, puis une équation de P en fonction de V.
6. Déterminer une estimation de la pression du gaz pour un volume de 2000 cm^3, puis pour 4000 cm^3.

Examen de rattrapage
2h

Exercice 1

Une société immobilière dispose de 200 appartements dont les montants du loyer en DH sont données par le tableau suivant :

Montant du loyer (× 1000 DH)	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4, 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 10[
Fréquences	0,1	0,20	0,4	0,15	0,1	0,05

2 2 2 1 1 2
0,3

1. Identifier la population et son effectif total, le caractère, les modalité. De quel type de caractère s'agit-t-il ?
2. Tracer l'histogramme des fréquences.
3. Déterminer la classe modale ainsi que le mode.
4. Tracer la courbe cumulative des effectifs cumulées croissant. Déduire une valeur estimée de la médiane.
5. Calculer les quartiles Q_1 et Q_3. Que peut-on dire sur l'état de ces appartements (vos interprétations) ?
6. Calculer le montant moyen du loyer pour cette population, la variance et l'écart type.
7. Peut-on recommander une telle société immobilière à une personne qui possède un budget de 1500 Dh ? justifier ?

Exercice 2

234

Une expérience a été réalisée sur 250 personnes pour étudier la relation qui existe entre l'âge X et le temps de sommeil Y. le tableau suivant a été obtenu :

X \ Y	[5,7[	[7,8[	[8,10[	[10,12[
[1,3[	0	0	2	36
[3,11[	0	3	12	26
[11,19[	2	8	35	16
[19,31[	0	26	22	3
[31,59[	22	15	6	0

1. Quelle est la proportion des personnes qui dorment moins de 8 heures sachant que leur âge ne dépasse pas 19 ans ?
2. Déterminer la fréquence de X conditionnelle à $Y = [7;8[$, c'est à dire, $f_{X|Y=[7;8[}$.
3. Determiner les distributions marginaux càd, calculer les effectifs marginaux de X ($n_{i.}$) et de Y ($n_{.j}$).
4. Calculer les moyennes marginales ($\bar{X}$ et $\bar{Y}$) et les écarts types marginaux de X et Y (σ_X et σ_Y)
5. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire,
6. Déterminer la droite de régression de Y en fonction de X.
7. Estimer le temps de sommeil d'une personne de 66 ans.

Université Abdelmalek Essaâdi

École Normale Supérieure Tétouan

Contrôle surveillé Algèbre	LE-Math **Durée 1h45**	**Semestre 1** 2023–2024
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Exercice 1.

Écrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer.
$n \in \mathbb{N}$, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow$ ($n = 2$ ou n est impair),
2. $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0$ et $y \neq 0)$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$.
On notera par $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f (avec $f^{(n)} = f$).

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) + 2xf(x) = 0$.
   Puis par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$:
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x).$$
   où $H_n(x)$ est un polynôme de degré n et dont le coefficient dominant est $(-2)^n$.

Exercice 3.

1. Prouver que la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par : pour tout a et $b \in \mathbb{Z}$
   $$a\mathscr{R}b \iff a+b \quad \text{est pair}$$
   est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Déterminer $\mathrm{cl}(x)$.

Exercice 4.

Soit E un ensemble. On pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On définit pour tout A et B de $\mathscr{P}(E)$, la relation $\mathscr{R}$:

$$A\mathscr{R}B \iff A\Delta B \text{ est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'éléments.}$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Examen	LE-Math	**Semestre 1**
Algèbre	$\boxed{\textbf{Durée 2h00}}$	2023–2024
	Documents non autorisés & Téléphone éteint	

Exercice 1. (5 pts)
Étant donnée une partie X d'un ensemble E, on définit $f_X : E \to \{0,1\}$ par :

$$f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f_X lorsque $X = [1,2[\cup\{3\}$.
2. Si A et B sont des parties de E, montrer que $A = B \iff f_A = f_B$.
3. Exprimer $f_{A\cap B}$, $f_{A\cup B}$ et $f_{C_E^A}$ en fonction de f_A et f_B.
4. La différence symétrique de deux parties A et B est l'ensemble $A\Delta B = (A \setminus B)\cup(B\setminus A)$.
   (a) Exprimer $f_{A\Delta B}$ en fonction de f_A et f_B.
   (b) En déduire que, pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E, on a :

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Exercice 2. (3 pts)
Soient u et v deux nombre reels. Montrer que $u + v \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Longrightarrow u \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou $v \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice 3. (4 pts)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ définie par $u_3 = 2u_2 - u_1 = 2\cancel{1} - 4$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 4, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

1. En calculant les premiers termes, conjecturez une formule pour la suite u_n qui ne soit pas récurrente.
2. Démontrez cette formule par récurrence (forte?).

Exercice 4. (4 pts)
Sur l'ensemble des applications $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la relation $f\mathscr{R}g$ s'il existe deux constantes réelles strictement positives α et β telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f(x) \le g(x) \le \beta f(x)$.

1. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Donner des exemples d'applications f et g qui sont équivalentes mais pas égales.

Exercice 5. (4 pts)
Soit $\mathscr{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathscr{S}y \Longleftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R}, \text{ tels que } x - y = n + m\sqrt{3}.$$

1. Montrez que $\mathscr{S}$ est une relation d'ordre
2. L'ordre est-il total?