	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : calcul différentiel	EXAMEN	Année scolaire : 2022/2023 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 (5 points)

Soient E, F deux espaces de Banach et $a \in E$. Soit U un ouvert de E, $f: U \to F$ une application différentiables ,

1) Enoncer la définition de la différentiabilité de f au point a. (0.5pts)
2) Montrer que la condition de différentiabilité introduite dans la question (1) est inchangée lorsqu'on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes. (1pt)
3) Montrer que si f une application différentiable en un point a de U alors sa différentielle est unique (1pt)
4) Montrer que si f une application différentiable en un point a de U alors f est continue en a (1pt)
5) Montrer que l'application f dans les cas suivants est différentiable et calculer sa différentielle : (1.5pts)
   a) f une fonction constante
   b) f une fonction linéaire
   c) f une fonction bilinéaire

Exercice 2 (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : :

$$\begin{cases} f(x;\ y) = \dfrac{2y^3 + x^4}{x^2 + y^2} & pour\ (x;\ y) \neq (0;\ 0) \\ f(0;\ 0) = 0 \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue en $(0;\ 0)$? (1pt)
2) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0;\ 0)$? (1pt)
3) La fonction f est-elle différentiable en $(0;\ 0)$? (1pt)

Exercice 3(3 points)

On considère la courbe plane d'équation :

$$ye^x + e^y\sin(2x) = 0$$

1) Vérifier que cette équation définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0; 0)$. (1pt)

2) Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction en $(0; \varphi(0))$. (1pt)

3) En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand $(x;\ y)$ tend vers $(0; 0)$ en étant sur la courbe. (1pt)

Exercice 4 (2 points)

Si $x = (x_i)_{i\in N} \in (\mathbb{R}^+)^N$, $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ et $l_1(\mathbb{R}^+) = \{x \in (\mathbb{R}^+)^N, \|x\|_1 < \infty\}$.

Soit F l'application définie par $F : l_1(\mathbb{R}^+) \to l_1(\mathbb{R}^+),\ x \to F(x) = \big(ln(x_i + 1)\big)_{i\in N}$.

1) Montrer que F est bien définie. (1pt)
2) Montrer que F est différentiable et calculer F'. (1pt)

Exercice 5 (3 points)

Soit E un espace de Banach. On notera $I_E : x \in E \to x$, et : $u \in L(E) \to u$. Soit f : $L(E) \to L(E)$

$$f(u) = u^3 = u \circ u \circ u.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $L(E)$ et calculer sa différentielle. (1pt)

2) Démontrer que pour tout $\in L(E)$. (2pts)

$$\|d f(u) - 3I\|_{(L(L(E))} \leq 6\| u - I_E\|_{L(E)} + 3\| u - I_E\|^2_{L(E)}.$$

Exercice 6 (4 points)

On considère le champ $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par la formule ci-dessous où les quadruplets $(a;\ b;\ c;\ d)$ sont écrits comme des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que F est de classe C^1 sur$\mathbb{R}^4$. (1pt)
2) Soient $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix}$ deux points de $\mathbb{R}^4$. Montrer que
   a) $F(M_0) = (M_0)^2$ (1pt) (1pt)
   b) $dF_{M_0}(H) = (M_0 \times H) + (H \times M_0)$ (2pts)

où × désigne le produit des matrices 2 × 2.

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : calcul différentiel	CONTROLE	Année scolaire : 2021/2022 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 (3.5 points)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit u une application linéaire de E dans F. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue sur E, 0.5pts

(ii) u est continue en 0_E, 0.5pts

(iii) u est bornée sur $\bar{B}(0_E, 1)$, 0.5pts

(iv) u est bornée sur $S = \{x \in E, \|x\|_E = 1\}$, 0.5pts

(v) Il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, 0.5pts

(vi) u est lipschitzienne, 0.5pts

(vii) u est uniformément continu. 0.5pts

Exercice 2 (6,5 points)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $L_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

On définit une application de $L_c(E, F)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par

$$\|u\|_{L_c(E,F)} \rightarrow \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F$$

1) Montrer que l'application $u \rightarrow \|u\|_{L_c(E,F)}$ est une norme. 1pt

2) Monter que : 1,5pts

$$\|u\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On suppose que $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach et soit $(u)_n$ une suite de Cauchy dans $L_c(E, F)$

3) Montrer que pour tout $x \in E$ la suite $(u(x))_n$ converge dans F vers une limite u. 1pt

4) Montrer que u est linéaire. 1pt

5) Montrer que u est continue. 1pt

6) Montrer que $(u)_n$ converge dans $L_c(E, F)$ vers u. 1pt

7) Que peut-on dire à propos de l'espace $L_c(E,F)$.

Exercice 3(4 points)

Soit $E = C^1([0,1])$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $N: E \to \mathbb{R}^+$ définie par : 2pts

$$\forall f \in E, N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

est une norme.

2) (E,N) est- il complet ? 2pts

Exercice 4 (3 points)

Soit f une fonction définie par :

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to \frac{x^3y}{x^2+y^2}$, prolongée par 0 à l'origine, est-elle continue, différentiable, C^1 ?

Exercice 5 (3 points)

Si $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ et $l_1(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|x\|_1 < \infty\}$.

Soit F l'application définie par $F: l_1(\mathbb{R}) \to l_1(\mathbb{R}),\ x \to F(x) = (\sin(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$.

1) Montrer que F est bien définie. 1pt
2) Montrer que F différentiable et calculer F'. 1pt
3) F est-elle une application de classe C^1. 1pt

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths Matière : calcul différentiel	EXAMEN	Année scolaire : 2021/2022 Prof : EL ALAMI LAAROUSSI Adil

Exercice 1 (5 points)

1) Soient E, F deux espaces de Banach et $a \in E$. Si U est un ouvert de E, $f; g : U \to F$ deux applications différentiables en a, et si $\lambda \in \mathbb{k}$, alors $f + g$ et λf sont aussi différentiables en en a (1pt)

$$D_a(f+g) = D_a f + D_a g \;\; et \;\; (D_a(\lambda f)) = \lambda D_a f$$

2) Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$, $g : V \to G$ et $a \in U$ tel que $b = f(a) \in V$. Si f est différentiable en a et si g est différentiable en b, alors $h = g \circ f$ est différentiables a et l'on a (2pts)

$$D_a h = D_b g o D_a f$$

3) *Application* (Dérivée d'un produit de deux applications)

Soient $f; g : U \subset E \to \mathbb{k}$ deux applications différentiables en a. On définit l'application produit fg de la manière suivante :

$$\begin{aligned} fg : U \subset E &\to \mathbb{k} \\ x &\to f(x)g(x) \end{aligned}$$

On considère les applications

$$\begin{aligned} \psi : U &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ x &\to (f(x), g(x)) \end{aligned} \quad et \quad \begin{aligned} \phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) &\to f(x)g(x) \end{aligned}$$

a) Montrer que ψ et ϕ sont différentiables et calculer leurs applications différentielles respectivement en a. (1pt)

b) Montrer que fg est différentiable en point a et que (1pt)

$$D_a(f g) = (D_a f).g + (D_a g).f$$

Exercice 2 (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : :

$$\begin{cases} f(x; y) = \dfrac{2x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & pour\ (x; y) \neq (0; 0) \\ f(0; 0) = 0 \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue en $(0; 0)$? (1pt)
2) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0; 0)$? (1pt)
3) La fonction f est-elle différentiable en $(0; 0)$? (1pt)

Exercice 3 (4 points)

Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ à valeurs $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right)$

1) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local. (1pt)

$$\begin{cases} f \text{ de } C^1 \\ Jf(a) \neq 0 \quad | \; | \neq 0 \end{cases}$$

2) a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$. (1pt)

b) Montrer que f est injective. (1pt)

c) en déduire que f est C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $f(\mathbb{R}^2)$. (1pt)

Exercice 4 (4 points)

1) Enoncer le théorème des fonctions implicites. (1pt)

2) Montrer que l'équation (1pt)

$$e^x + e^y + x + y - 2 = 0$$

définit implicitement y comme fonction $y(x) :]-r; r[\to \mathbb{R}$ dans un voisinage du point $O(0; 0)$ et que cette fonction est dérivable. (1pt)

3) Montrer que la fonction $y(x)$ est 2 fois dérivable sur $]-r; r[$ et calculer les nombres $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$. (1pt)

Exercice 5 (4 points)

Soit E un espace de Banach. On notera $I_E : x \in E \to x$, et : $u \in L(E) \to u$. Soit $f : L(E) \to L(E)$

$$f(u) = u^3 = u \circ u \circ u.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $L(E)$ et calculer sa différentielle. (1pt)
(Indication : utilisez la différentiabilité des applications multilinéaires)

2) Démontrer que pour tout $\in L(E)$. (1pt)

$$\|d f(u) - 3I\|_{(L(L(E))} \leq 6\| u - I_E\|_{L(E)} + 3\| u - I_E\|^2_{L(E)}.$$

3) Soit B la boule ouverte dans $L(E)$, de centre I_E et de rayon $\frac{1}{2}$. On admet que pour tout $u \in B$, $\frac{1}{3} d f(u)$ est un isomorphisme de $L(E)$ dans $L(E)$.

a) Pour $u \in B$, on pose $g(u) = f(u) - 3u$. Montrer que pour tout (1pt)

$$(u, v) \in B \times B, \|g(u) - g(v)\| \leq \frac{7}{3}\|u - v\|$$

b) En déduire que f est injective sur B. (0.5pts)

4) Montrer que f est un (C^1) difféomorphisme de B sur $f(B)$. (0.5pts)

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Math S6
Année :2022-2023

Analyse Complexe2h

Exercice 1 : (8 **points**

Résoudre Dans $\mathbb{C}$ les équation complexes suivantes

1. $z^2 + 3iz + 4 = 0$.(**1 pt**)

2. $z^4 = 1 + i$.(**1.5 pt**)

3. $iz^2 - 7z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.(**1.5 pt**)

4. $z^2 + i\bar{z} + 2 = 0$.(2 **pt**)

5. $cosz = 3 + 2e^{iz}$.(2 **pt**)

Exercice 2 : (4 points)

On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est harmonique si elle est de classe C^2 et vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit U une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$U(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

1. Montrer que $U(x, y)$ est harmonique. (**1.5 pt**)

2. Soit $z = x + iy$. Trouver toutes les fonctions $V(x, y)$ telle que la fonction complexe $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ soit holomorphe. (**2.5 pt**)

Exercice 3 : (4 points)

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma z^2 + 3zdz$$

lorsque :

1. γ est le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$.(**2 pt**)

2. γ : le quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant les points $(2,0)$ et $(0,-2)$. **(2 pt)**

Exercice 4 : (4 points)

1. Soient g une fonction définie dérivable au sens complexe au voisinage du point z_0 et f une fonction dérivable au sens complexe au voisinage du point $g(z_0)$. Montrer que gof est dérivable en z_0.

2. Soit f la fonction définie par $f(z)\frac{z^2}{1-z} \forall z \in \mathbb{C}_1$ et $f(1) = 0$

   - En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de f en 1.**(2 pt)**

   - Etudier si f est holomorphe.**(2 pt)**

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Primaire S6
Année :2021-2022

Analyse Complexe 2h

Exercice 1 : 6 points

1. Soit $\gamma(t)$ un arc paramétré, Montrer que $supp(\gamma)$ est un compact.
2. Montrer que $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma) \sup_{z\in supp(\gamma)} |f(z)|$.
3. En utilisant les conditions de cauchy riemann, étudier la différentiabilité de la fonction :

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Exercice 2 : 6 points

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_C \frac{1}{z}dz$ où $C = \{\gamma(t) = e^{it} / -2\pi \leq t \leq 2\pi\}$
2. $\int_C \frac{1}{z}dz$ où $C = \{\gamma(t) = e^{it} / 0 \leq t \leq 4\pi\}$.
3. $\int_C (z^2 - z + z^{\frac{1}{2}})dz$ où $C = \{\gamma(t) = 3e^{it} / \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Exercice 3 : 5 points

Montrer la proposition suivante :

Soit f une fonction Complexe continue dans un domaine (D). Pour que f ait des primitives dans D il suffit qu'on a :

$\int_\lambda f(z)dz = 0$ pour tout circuit λ tracé dans $\mathbb{C}$

Exercice 4 : 3 points

Soit la courbe définit par $C = \left\{2e^{it}, t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup \{2(1-t)i - 2t \quad , t \in [0,1]\}$

Calculer $ind(\lambda, a) \forall a \in \mathbb{C}$

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2022/2023
Semestre 6

01/06/2022 **Examen de la session normale: Algèbre et Géométrie** **Durée 2h**

Exercice 1. (2 *points*)

Montrer que tout espace affine réel de dimension finie induit un espace affine euclidien.

Exercice 2. (6 *points*)

Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. *On considère l'application affine $f : E \longrightarrow E$ définie par:*

$$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') : \begin{cases} x' = & -y-z+1 \\ y' = & -2x-y-2z+2 \\ z' = & x+y+2z-1 \end{cases}$$

   a) *Montrer que f est une symétrie.*

   b) *Déterminer les éléments caractéristiques de f.*

2. *Déterminer l'expression analytique de l'affinité de base le plan affine $(P) : x-2y-z=2$, de direction $vect\{\vec{u}\}$ et de rapport -3 avec $\vec{u}=(1,-1,1)$.*

Exercice 3. (6 *points*)

Soit E un espace affine euclidien de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

I *Soient $S=S(A,r)$ et $S'=S(A',r')$ deux spherès non concentriques. Pour un point $M \in E$, on note $P(M,S)$ la puissance de M par rapport à S. On pose $H=\{M \in E : P(M,S)=P(M,S')\}$.*

   1) *Montrer que H est un hyperplan.*

   2) *Vérifier que H est orthogonal à (AA')*

   3) *Déterminer $H \cap (AA')$.*

II ***Application:*** *On pose $E=\mathbb{R}^3$, $S=S(A,2)$ et $S'=S(A',3)$ avec $A=(0,1,1)$ et $A'=(1,2,-1)$.*

   1) *Déterminer une équation cartésienne de $H=\{M \in E : P(M,S)=P(M,S')\}$.*

   2) *Déterminer les coordonnées du point $W=H \cap (AA')$.*

Exercice 4. (3 *points*)

Soient E un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit D une droite non parallèle au plan $O+vect\{\vec{i},\vec{j}\}$.

1. *Montrer qu'il existe $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ tels que D admette $\begin{cases} x &= az+c \\ y &= bz+d \end{cases}$ pour système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$.*

2. *Déterminer un système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de la projection de D sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ parallèlement à $vect\{\vec{k}\}$.*

Exercice 5. (3 *points*)

Soient E un espace affine. On considère deux sous-espaces affines F_1 et F_2 fortement parallèles ($\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F}$) de E et soit $\overrightarrow{G}$ un supplémentaire de leur direction commune $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{E}$ ($\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$).

1. *Montrer qu'il existe un unique $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{G}$ tel que: $F_2 = F_1 + \overrightarrow{u}$.*

2. *Montrer que: $S_{F_2,\overrightarrow{G}} o S_{F_1,\overrightarrow{G}} = t_{2\overrightarrow{u}}$.*

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2021/2022
Semestre 6

20/05/2022 | **Contrôle continu: Algèbre et Géométrie** | **Durée 2h**

Exercice 1. (*6 points*)
On considère un espace affine E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. *Soit $f : E \longrightarrow E$ une application définie par:* $M(x, y, z) \longmapsto M'(x', y', z') : \begin{cases} x' = & -y - z + 1 \\ y' = & -2x - y - 2z + 2 \\ z' = & x + y + 2z - 1 \end{cases}$
   (a) *Montrer que f est une application affine.*
   (b) *Montrer que f est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.*
2. *Determiner l'expression analytique de l'affinité de base le plan affine $(P) : x + 2y + z = 1$, de direction $vect\{\vec{u}\}$ et de rapport 2 avec $\vec{u} = (1, 1, 1)$.*

Exercice 2. (*6 points*)
Soient E un espace affine, O_1 et O_2 deux points de E et α_1 et α_2 deux scalaires non nuls. On considère les homothéties $h_1 = h(O_1, \alpha_1)$ et $h_2 = h(O_2, \alpha_2)$.

1. *Montrer que $h_1 o h_2$ est une dilatation.*
2. *On suppose que $\alpha_1\alpha_2 = 1$. Déterminer la nature de l'application $h_1 o h_2$.*
3. *On suppose que $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$. Montrer que $h_1 o h_2$ est une homothétie en déterminant les éléments caractéristiques.*
4. *Application:*
   On suppose que E est un espace affine sur $\mathbb{C}$ de dimension 2. Soient h_1 et h_2 les applications affines définies par:
   $h_1 : M(x, y) \longrightarrow M'(x', y') : \begin{cases} x' = & (1+i)x - 2i \\ y' = & (1+i)y - 3i \end{cases}$ et $h_2 : M(x, y) \longrightarrow M'(x', y') : \begin{cases} x' = & (1-i)x - i \\ y' = & (1-i)y + 2i \end{cases}$
   (a) *Montrer que h_1 et h_2 sont des homothéties.*
   (b) *Déduire la nature de l'application $h_1 o h_2$ en déterminant les éléments caractéristiques.*

Exercice 3. (*4 points*)
Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble

$$V = \{A = (a_{i,j}) \in M_2(\mathbb{R}) : \forall i = 1, 2 \quad \textstyle\sum_{j=1}^{2} a_{i,j} = 0, \quad \forall j = 1, 2 \quad \sum_{i=1}^{2} a_{i,j} = 0\}.$$

1. (a) *Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.*
   (b) *Déterminer $\dim V$.*
2. *On muni $M_2(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons*

$$F = \{A = (a_{i,j}) \in M_2(\mathbb{R}) : \forall i = 1, 2 \quad \textstyle\sum_{j=1}^{2} a_{i,j} = 1, \quad \forall j = 1, 2 \quad \sum_{i=1}^{2} a_{i,j} = 1\}.$$

   Montrer que F est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

Exercice 4. (*4 points*)
Rem $\alpha = 1$
Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine.

1. *Soient X et Y deux parties convexes de E. Montrer que l'ensemble $Z = \{mil[AB] : A \in X, B \in Y\}$ est convexe.*
2. *On appelle combinaison convexe de points $A_1, \cdots, A_n$ de E tout barycentre de $A_1, \cdots, A_n$ affectés de coefficients positifs.*
   On appel enveloppe convexe d'une partie H de E qu'on le note $convH$, l'intersection de tous les convexes de E contenant H.
   Montrer que $convH$ est exactement l'ensemble des combinaisons convexes de points de H.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2021/2022
Semestre 6

04/06/2022 **Examen de la session normale: Algèbre et Géométrie** Durée 2h

Exercice 1. (6 points)
On se place dans un espace affine E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. *Déterminer la nature de l'application affine $f : E \longrightarrow E$ de représentation matricielle* $\begin{cases} x' = & -y - z + 1 \\ y' = & -2x - y - 2z + 2 \\ z' = & x + y + 2z - 1 \end{cases}$ *dans $\mathcal{R}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.*

2. *Determiner l'expression analytique de l'affinité de base le plan affine $(P) : x - y + z = 1$, de direction $vect\{\vec{u}\}$ et de rapport -2 avec $\vec{u} = (1, -2, 1)$.*

Exercice 2. (7 points)
On considère $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égale à 3 muni de sa structure affine canonique. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(2). \end{array}$

1. *Montrer que f est une application affine.*
2. *Déduire que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(2) = 4\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_3[X]$.*
3. *Quelle est la dimension de F?*
4. *Donner une représentation paramétrique de F.*

Exercice 3. (7 points)
Soit E un espace affine euclidien de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$. Soient $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{\vec{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in E$.

I) 1) i) *Montrer que l'ensemble $F = \{M \in E : (\vec{u}|\overrightarrow{AM}) = \alpha\}$ est un sous-espace affine de direction orthogonal à $\vec{u}$.*

ii) *Déduire que F est un hyperplan ($\vec{u}$ est appelé vecteur normal à F).*

2) *Determiner une équation cartésienne d'hyperplan H passant par le point $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.*

II) 1) *Soit $D = A + \mathbb{R}.\vec{u}$ une droite affine de E. On note par P_D la projection orthogonal de base D. Montrer que*

$$\forall M \in E : \quad P_D(M) = A + \boxed{\frac{(\overrightarrow{AM}|\vec{u})}{||\vec{u}||^2}}\vec{u}.$$

2) *Soit $H = A + \vec{H}$ un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$. On note par P_H la projection orthogonal de base H. Montrer que*

$$\forall M \in E : \quad P_H(M) = M + \frac{(\overrightarrow{MA}|\vec{n})}{||\vec{n}||^2}.\vec{n}.$$

3) *__Application:__ On pose $E = \mathbb{R}^3$, $A(0, 1, 1)$ et $\vec{u} = (1, 2, -1)$.*

i) *Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale de base la droite affine $D = A + \mathbb{R}.\vec{u}$.*

ii) *Déterminer l'expression analytique de la réflexion de base l'hyperplan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.*

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

LE-Mathématiques 2021/2022
Semestre 6

15/06/2022 **Examen de la session de rattrapage: Algèbre et Géométrie** **Durée 2h**

Exercice 1. (*5 points*)

On se place dans un espace affine E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. *Determiner l'expression analytique de l'affinité de base le plan affine $(P) : x - 2y + z = 1$, de direction $vect\{\vec{u}\}$ et de rapport 3 avec $\vec{u} = (1-, 2, 1)$.*

2. *Déterminer la nature de l'application affine $f : E \longrightarrow E$ de représentation matricielle* $\begin{cases} x' = & -y - z + 1 \\ y' = & -2x - y - 2z + 2 \\ z' = & x + y + 2z - 1 \end{cases}$

   dans $\mathcal{R}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 2. (*4 points*) $B \in \mathrm{Im}$

Soient $\mathbb{K}$ un corp et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et B un vecteur de l'image de A. On note S l'ensemble des solutions du système $AX = B$.

1. *Montrer que S est un sous-espace affine de $\cancel{M_n(\mathbb{K})}$.* K^n

2. *Déterminer la direction de S, on précisera sa dimension en fonction de la matrice A.*

Exercice 3. (*5 points*)

Soient E un espace affine réel, A, B, C trois points de E non alignés, et $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tels que $a + b + c = 0$. On note $A' = bary\{(B, b); (C, c)\}$, $B' = bary\{(A, a); (C, c)\}$, $C' = bary\{(B, b); (A, a)\}$.

1. *Montrer que A', B' et C' sont bien définies.*

2. *Montrer que $A' \neq A$, $B' \neq B$ et $C' \neq C$.*

3. *Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.*

Exercice 4. (*6 points*)

Soit E un espace affine euclidien de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

I) Soient $S = S(A, r)$ et $S' = S(A', r')$ deux spherès non concentriques. Pour un point $M \in E$, on note $P(M, S)$ la puissance de M par rapport à S. On pose $H = \{M \in E : P(M, S) = P(M, S')\}$.

1) Montrer que H est un hyperplan.

2) Vérifier que H est orthogonal à (AA')

3) Déterminer $H \cap (AA')$.

4) __Application:__ On pose $E = \mathbb{R}^3$, $S = S(A, 2)$ et $S' = S(A', 3)$ avec $A = (0, 1, 1)$ et $A' = (1, 2, -1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de $H = \{M \in E : P(M, S) = P(M, S')\}$.

2) Déterminer les coordonnées du point $W = H \cap (AA')$.

II) Soient $A(a_1, \cdots, a_n)$ et $B(b_1, \cdots, b_n)$ deux points de E. On pose $H = \{M \in E : MA = MB\}$.

1) Montrer que H est un hyperplan.

2) Montrer que $H = \{M \in E : \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}\}$ où $I = mil[AB]$.

Examen de la session normale: Histoire et épistémologique des mathématiques

Exercice 1 (2 points) :

En géométrie, Chez Euclide.

1. Qu'est-ce qu'un point, une droite ?
2. Que veut-on dire lorsqu'on affirme que deux surfaces sont égales ?

Exercice 2 (6 points) :

«Une droite est dite être coupée en Extrême et Moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit.»
(Euclide, Les Eléments, IIIe siècle av. J.C.)

Lorsqu'on partage un segment en deux,il existe un unique point tel que le rapport entre le segment de départ et le plus grand sous segment soit égal au rapport entre les deux sous segments.

$\underbrace{\overset{a}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}\overset{b}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}}_{a+b}$ C'est-à-dire $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$

Soit E l'équation ''d'après la notation d'Al-Khawarizmi'' : « racine et 'adad égale à 1 mal »

1. Montrer que le nombre $\phi = \frac{a}{b}$ est une racine de l'équation E.
2. Sans calculer la valeur de ϕ monter que : $\phi^3 = 1 + 2\phi$.
3. Trouver la valeur de ϕ par la méthode :
   a. Donner l'algorithme de la résolution Géométrique de E. «Méthode des aires ».
   b. Comparer cette méthode avec la méthode Algébrique citiez dans le programme marocain de mathématiques ; tronc-commun sciences.

Exercice 3 (4points):

Thalès a découvert le théorème, mais c'est Euclide qui l'a prouvé.
Démontrer le théorème de Thalès par la méthode d'Euclide « méthode des aires ».

Exercice 4 (8 points) :

فيما يلي نص من كتاب فقه الحساب، مؤلفه أبو جعفر أحمد بن إبراهيم بن منعم العبدري، المتوفى بمراكش سنة 1228م، وَرَدَ في تقديم إدريس لمرابط لهذا الكتاب (2005 ، ص 344 و345 و 346):

النص:

(...) فإن من الأعداد ما ليس له جذر أصلا. و لما كانت الحاجة تدعو إلى استخراج هذا النوع من الجذور لضرورة الناس إليه في المساحات و المعاملات و في التعليم و غير ذلك، رأيت أن أذكر شيئا من مسائل هذا النوع تستدل بها على ما نذكره، و الله الموفق.	(1)
مسائل أخذ الجذر فإذا أردت أن تأخذ جذر عدد ما غير مربع فلتأخذ جذر أقرب مربع إليه، سواء كان ذلك المربع أكبر من الذي تريد أخذ جذره أو أصغر، و تأخذ الفضل بين ذلك المربع والعدد الذي تريد أخذ جذره، و تقسم ذلك الفضل على ضعف جذر ذلك المربع، و تحفظ الخارج. فإن كان المربع أكبر، نقصت ذلك المحفوظ من جذر المربع. فما كان بعد الزيادة أو النقصان فهو جذر العدد الذي تريد أخذ جذره بالتقريب. والبرهان على ما قلنا (..) هو (...)	(2)
فإذا كان العدد الذي تريد أخذ جذره بالكسر، طلبت مربعا إذا ضربت فيه كان الخارج صحيحا. فإذا وجدته ضربت في العدد الذي تريد أخذ جذره و أخذت جذر المجتمع بالتقريب، فما خرج فهو الخارج بالتقريب. فإن صعب عليك طلب هذا المربع، فوجه العمل في وجوده أن تضرب أئمة (حذّي) كسرك بعضها في بعض و ما اجتمع في مثله، فما خرج فهو الذي طلبت.	(3)

a. Quel est le concept mathématique qui fait l'objet de ce texte ?
b. Quel est l'objectif cognitif de ce texte ?
c. Quels sont les nombres cibles dans ce texte ?
d. Convertissez le contenu de la partie (2) de ce texte en un récit littéral.
e. Appliquer ce qui a été dit dans ce texte au nombre 14.
f. En plus de l'écriture littérale, quelle est la différence entre ce qui est venu dans ce texte et ce qui est dans le programme marocain de mathématiques.

Bonne chance et bon courage