22/01/2025 **Examen de la session normale: Topologie** **Durée 2h**

Exercice 1. (2 *points*)

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé.*

1) *Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

2) *Montrer que toute suite de Cauchy est une suite bornée.*

Exercice 2. (5 *points*)

1) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit* N *une norme sur* E *et* $f : F \longrightarrow E$ *une application linéaire injective. Montrer que* $N o f$ *est une norme sur* F.

2) *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$. *Notons* $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue à valeurs strictement positives. On définit sur* E *la norme* $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

   a) *Montrer que* $(E, \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

   b) *Montrer que* $N' : f \longmapsto \sup_{x \in [a,b]} h(x)|f(x)|$ *est une norme sur* E.

   c) *Montrer que la norme* N' *est complete.*

Exercice 3. (7 *points*)

On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$ *avec* $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Soit* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$

une application linéaire où $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) *Montrer que* f *est continue.*

   b) *Montrer que* f *n'est pas contractive.*

2) a) *Verifier que* A *est diagonalisable.*

   b) *Soit* B *la matrice telle que* $D = BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $N : X \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \|BX\|_2$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^3$.

   c) *Vérifier que:* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq \frac{4}{9}(x^2 + y^2 + z^2)$.

   d) *Montrer que l'application* $f : (\mathbb{R}^3, N) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, N)$ *admet un point fixe unique.*

   e) *Soit* $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Déterminer la limite de la suite* $(A^n X)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4. (6 *points*)

On pose $\tau = \{A \subset \mathbb{N}^* / \ A$ *est stable par divisibilité* $\} \cup \{\emptyset\}$.

1) a) *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{N}^*$.

   b) τ *est-elle séparée?*

2) *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* D_n *l'ensemble des diviseurs de* n.

   a) *Montrer que* $\{D_n : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base de la topologie* τ.

   b) *Déduire une base de voisinages d'un entier* $n \in \mathbb{N}^*$.

3) *On pose* $A = \{2, 3, 6\}$. *Déterminer* $\bar{A}$ *et* $\mathring{A}$.

4) *Montrer qu'une application* $f : (\mathbb{N}^*, \tau) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, \tau)$ *est continue si, et seulement si, pour tout* $n, m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* n *divise* m, *alors* $f(n)$ *divise* $f(m)$.

	Université Abdelmalek Essaâdi Ecole Normale Supérieure	
Licence d'éducation Spécialité : Maths	Examen de Mathématiques (Mesure et intégration)	Année scolaire : 2024/2025 Durée: deux heures

Exercice 1 **(4 points: 2 × 2)**

Soit X un ensemble non vide et M la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.

1) Montrer que $A \in M$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
2) Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in M$

$u(A) = 0$, si A est dénombrable,

$u(A) = 1$, si A n'est pas dénombrable.

Montrer que u est une mesure positive définie sur M.

Exercice 2: (6 points: 3 × 2)

1) Calculer

$$I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} 1 + x^n \, d\lambda(x)$$

2) a- Montrer que $(\forall x \in [0,1])$, $\quad (1 + x^2)^n \geq 1 + nx^2$

b-Calculer

$$I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{1 + nx^3}{(1 + x^2)^n} d\lambda(x)$$

3) Calculer

$$I_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

Exercice 3: (3 points: 3 × 1)

Soit u une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $u(]a,b]) < \infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} u(]3,x]) & si \quad x \geq 3 \\ -u(]x,3]) & si \quad x \leq 3 \end{cases}$$

1) Montrer que F est croissante.
2) Montrer que F est continue à droite. .

3) Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad u(]a,b]) = F(b) - F(a)$.

Exercice 4: (4 points: 2×2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \int_{[0,+\infty]} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} d\lambda(t)$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.

Exercice 5: (3 points : $1 + 2$)

1) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(X, \mathcal{T}, u) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \int f_n du < +\propto \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \int f_n du = \int \sum_{n\geq 0} f_n du$$

2) Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{ln(x)}{1-x} dx$$

Rappel :

$$\frac{ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n ln(x) \qquad et \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

المدرسة العليا للأساتذة
ⵜⴰⵙⴷⵉⵡⵜ ⵜⴰⵏⴻⵎⵍⴰⵢⵜ ⵏ ⵉⵙⴻⵍⵎⴰⴷⴻⵏ
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

جامعة عبد المالك السعدي
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵄⴰⴱⴷⴻⵍⵎⴰⵍⴻⴽ ⴰⵙⵙⴰⵄⴷⵉ
Université Abdelmalek Essaâdi

LE MATH
Année:2024-2025

Structures Algèbriques
17-01-24 **(2h)**

Exercice 1: (6 points)

1. Soient A un anneau et I et J les idéaux de A tels que $1 \in I + J$
   - a. Montrer que $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, x^p y^q \in I$. $x \in I \quad y \in J$.
   - b. Démontrer que $I^n + J^m = A$ quels que soient les entiers positifs non-nuls n et m.
2. Donner un exemple d'un idéal premier.

Exercice 2: (8 points)

Soient A un anneau commutatif unitaire, $x \in A$ et I un idéal de A.

1. Montrer que xA est un idéal de A
2. Montrer que c'est le plus petit idéal qui contient x
3. On considère le groupe quotien A/I; qu'on peut noter $a + I$; définit par : $\bar{a} \in A/I = \{b \in A / a - b \in I\}$
   - (a) Montrer que $(A/I, +, \cdot)$ est anneau commutatif unitaire.
   - (b) Soient A et A' deux anneaux commutatifs unitaires et $f : A \to A'$ un morphisme d'anneau.
     Montrer que $A/I \simeq \mathrm{Im}(f)$

Exercice 3: (6 points)

1. Soient les entiers $n_i \geq 2, i = 1, \cdots p$ et $m = n_1 \times n_2 \times \ldots m_p$.
   Montrer que:
   $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si n_i et n_j sont premiers entre eux.

2. Démontrer que les anneaux suivants sont isomorphes :
   $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}$

3. Trouver toutes les solutions du système suivants :
   $$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod [3] \\ x \equiv 3 \bmod [5] \\ x \equiv 4 \bmod [7] \end{cases}$$

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Matril

Examen de la session normale : Didactique 2

Exercice 1 (2pts):

1) Donner une définition :
   A. Registre sémiotique.
   B. Une variable didactique.

Exercice 2(4pts):

I.

1. En utilisant le concept de variable didactique, proposez une introduction à la leçon de résolution des équations du deuxième degré en utilisant la formule de discriminant
   a. En indiquant les étapes à suivre.
   b. En précisant la variable didactique dans ce cas.
2. Donnez deux expressions équivalentes de l'équation de Parabole, en soulignant les caractéristiques distinctes de chaque expression.

II. Le concept de fonction est présent dans divers domaines (cadres) du programme de mathématiques du primaire, du collège et du lycée.

Parmi ces domaines, proposez deux domaines différents et appropriés pour chacun du collège et du lycée, en vous appuyant sur un exemple pour chaque domaine.

Exercice 3(5pts):

Nous rappelons que l'aire d'un carré de côté a est a^2.

1- Démontrez cette formule en utilisant deux cadres différents.
2- En vous basant sur votre expérience en enseignement des mathématiques comme stagiaire, expliquez l'importance de changer de "cadre" pour traiter certaines erreurs commises par les élèves.
3- Donnez un exemple illustratif dans lequel vous identifiez :
   - Le nouveau cadre, et les idées principales de la réponse correcte.
   - Le cadre original.

Exercice 4(6pts):

Un professeur de mathématiques a proposé à ses élèves l'activité suivante :

> Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=3 et AC=4.
> M est un point mobile sur [AB] ; on pose AM = t .
> Trouver les dimensions du rectangle AMPQ ayant la plus grande aire.

1. Quel est le niveau cible pour cette activité ?
2. Quelles sont les connaissances et les compétences requises pour résoudre cette activité ?
3. Mentionner le registre utilisé dans cette activité, et leur représentation correspondante.
4. Donner la solution de cette activité.
5. Mentionner quelques variables didactiques qui doit être prises en compte dans cette activité ?
6. Le concept les extrémums d'une fonction appartient au cadre fonctionnel est il à été présenté dans le cadre géométrique.
   a. Le cadre géométrique permet-il de comprendre le résultat souhaiter ?
   b. Quels sont Les avantages du changement de cadre utilisé dans l'activité ?
   c. Quelles sont les difficultés que l'apprenant peut rencontrer lors d'un changement de cadre adopté dans l'activité ?

Bonne chance et bon courage

Examen de la session normale : Didactique 2

Exercice 5(3pts):

En guise d'évaluation ; un enseignant a proposé l'exercice suivant à une classe scientifique

On pose la suite numérique $U_n = \frac{1-2n^2}{1+n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Calculer $\lim U_n$

Un élève de cette classe a répondu comme suit :

On a : $\lim \frac{1-2n^2}{1+n^2} = \lim \frac{-2n^2}{n^2} = -2$

1- Est-ce que le résultat trouvé par l'élève est correcte ? justifier votre réponse.

2- L'erreur repérée est d'origine : justifier votre réponse.

Epistémologique	Ontogénique	Stratégique	Didactique	Cognitive
☐	☐	☐	☐	☐

3- Déterminer des procédures pour la remédiation et le soutien de ces élèves en fonction de l'erreur commise et expliquer comment surmonter l'erreur.