Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Série d'exercices: Espaces Topologiques

Exercice 1. *Soit $(E,\leq)$ un ensemble totalement ordonné. Les intervalles ouverts de E sont les parties de l'une des cinq formes suivantes (avec $a,b\in E$):*

a. $\varnothing$,

b. $]a,b[=\{x\in E : a<x<b\}$,

c. $\{x\in E : x<b\}$, $=]-\infty,b[$

d. $\{x\in E : a<x\}$, $=]a,+\infty[$

e. E.

Montrer que la famille $\tau_{\leq}$ des réunions d'intervalles ouverts de E est une topologie sur E.

Exercice 2.

1. *Soit $E=[0,1]$ muni de la topologie d'ouverts $\{\varnothing,\{0\},E\}$. Cette topologie est-elle séparée?*
2. *Soit E un ensemble non vide. Décrire la topologie dont les singletons forment une base d'ouverts.*
3. *Soit E un ensemble infini. Montrer que la famille d'ensembles constituée de l'ensemble vide et des parties de E de complémentaire fini définie une topologie sur E.*
4. *Soit E un espace topologique, et f une application quelconque de E dans un ensemble F. On dit qu'une partie A de F est ouvert, si $f^{-1}(A)$ est ouvert dans E. Vérifier qu'on a défini ainsi une topologie sur F.*
5. *Un ensemble U de $\mathbb{N}$ est dit ouvert s'il est stable par divisibilité (tout diviseur de $n\in U$ est encore dans U). Montrer qu'on a défini ainsi une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'est pas discrète.*

Exercice 3. *Soit E un ensemble non vide. Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur E et B_i une base d'ouverts de τ_i. On dit que τ_1 est moins fine que τ_2 si $\tau_1\subset\tau_2$. Montrer que*

$$\tau_1 \text{ est moins fine que } \tau_2 \Leftrightarrow \forall x\in E,\ \forall b_1\in B_{1,x},\ \exists b_2\in B_{2,x},\ x\in b_2\subset b_1.$$

$B_{i,x}$ est la base de voisinage de x par rapport à la topologie τ_i.

Exercice 4.

1. *Soit E un ensemble non vide et B une famille de parties de E. Montrer qu'il existe une topologie τ sur E dont B est une base si et seulement si B vérifie les deux conditions suivantes:*
   a) *B est un recouvrement de E;*
   b) *l'intersection de deux éléments de B est une réunion d'éléments de B.*
2. **Application:** *Soit C l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour toute $f\in C$ et $\epsilon>0$ on note: $M(f,\epsilon)=\{g:\int_0^1|f-g|<\epsilon\}$. Montrer que $\{M(f,\epsilon): f\in C \text{ et } \epsilon>0\}$ est une base de topologie sur C.*

Exercice 5. *Soit (E,τ) un espace topologique et (x_n) une suite dans E. On dit qu'un élément $x\in E$ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), si pour tout voisinage V de x, il existe une infinité d'indices n tels que $x_n\in V$.*

1. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de (x_n) est égale á $\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n : n\geq N\}}$.*
2. *On suppose que (x_n) est injective. Montrer que toute valeur d'adhérence de (x_n) est point d'accumulation de l'ensemble de ses termes.*

Exercice 6. *Montrer que:*

a) *Dans un espace topologique sépare, si a est un point d'accumulation de A, tout voisinage de a contient une infinité de points de A.*

b) *Dans un espace topologique séparé, tout point d'accumulation de l'ensemble des termes d'une suite est valeur d'adhérence de cette suite.*

Exercice 7. *Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique (E,τ). On pose $E/_{\mathfrak{R}}$ l'ensemble de classes d'équivalences de la relation $\mathfrak{R}$ et $[x]$ la classe de x. Soit* $q : \begin{array}{ccc} E & \to & E/_{\mathfrak{R}} \\ x & \mapsto & [x]. \end{array}$

1. *Montrer que* $\tau/_{\mathfrak{R}} = \{U \subset E/_{\mathfrak{R}} / \ q^{-1}(U) \in \tau\}$ *est une topologie sur* $E/_{\mathfrak{R}}$
2. *Montrer que* $q : (E,\tau) \to (E/_{\mathfrak{R}}, \tau/_{\mathfrak{R}})$ *est continue.*
3. *Montrer que* $\tau/_{\mathfrak{R}}$ *est la topologie la plus fine rendant l'application* q *continue.*

Exercice 8. *Soit* (E,τ) *un espace topologique localement compact. On pose*

$$\tilde{E} = E \cup \{w\} \text{ et } \tilde{\tau} = \tau \cup \{C_{\tilde{E}}K : K \text{ est compact dans } E\}.$$

1. *Montrer que si* $U \in \tau$ *et* $V = C_{\tilde{E}}K$ *avec* K *un compact de* E*, alors* $U \cap V \in \tilde{\tau}$ *et* $U \cup V \in \tilde{\tau}$.
2. *Montrer que* $\tilde{\tau}$ *est une topologie sur* $\tilde{E}$.
3. *Montrer que* $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ *est un espace topologique compact.*

Exercice 9. *Soit* $(E_i)_{1\le i\le n}$ n *espaces topologiques. On pose* $E = \prod_{i=1}^n E_i$. *Soit* τ_π *la famille des parties de* E *qui sont réunion quelconque d'ensembles de la forme* $\prod_{i=1}^n O_i$ *avec* $O_i \in \tau_i$.

1. *Montrer que* τ_π *est une topologie sur* E.
2. *Montrer que l'application* $Pr_i : E \longrightarrow E_i$ *(la projection sur* E_i*) est continue.*
3. *Montrer que* τ_π *est la topologie la moins fine rendant les applications* Pr_i *continues.*
4. *Montrer que si* E_i *est séparé, alors* E *est séparé.*
5. ? *Soit* $A_i \subset E_i$. *Montrer que*
   (a) $\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$.
   (b) $\overbrace{\prod_{i=1}^n A_i}^{\circ} = \prod_{i=1}^n \mathring{A}_i$.
   (c) $\prod_{i=1}^n \partial A_i \subset \partial(\prod_{i=1}^n A_i)$.
6. ? *Montrer que* E *est compact si et seulement si* E_i *est compact pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exercice 10.

1. *Montrer que toute application continue d'un espace topologique* X *dans un espace topologique* X' *discret est localement constante.*
2. *Montrer qu'une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *est connexe si et seulement si* A *est un intervalle.*
3. *Déduire que* $\mathbb{Q}$ *n'est pas connexe.*
4. ? *Montrer que si* f *est une application continue sur un espace connexe* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, l'ensemble de ses valeurs est un intervalle.*
5. ? *En utilisant la connexité, montrer qu'il n'existe pas un homéomorphisme* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 1:

i) on a : ϕ et E sont deux intervalles ouverts,

donc : $\phi, E \in \tau_{\leq}$

ii) la réunion qlq des éléments de $\tau_{\leq}$ par construction est un élément de $\tau_{\leq}$.

iii) Pour simplifier la réponse, il suffit de montrer que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Soient A et B deux intervalles ouverts de E,

a) Si $A = \phi$,

donc : $A \cap B = \phi$ qui est un intervalle ouvert de E.

b) Si $A = E$,

donc : $A \cap B = B$ qui est un intervalle ouvert de E.

c) Si $A =]a, b[$ et $B =]c, d[$,

on a :

$$A \cap B = \begin{cases} \phi & \text{si } (a<c \text{ et } b<d) \text{ ou } (a>c \text{ et } d>b) \\ ]\max(a,c), \min(b,d)[& \text{si non} \end{cases}$$

donc : $A \cap B$ est un intervalle ouvert de E.

d) Si $A =]a, b[$ et $B = \{x \in E, x < c\}$,

on a :

$$A \cap B = \begin{cases} \phi & \text{si } a > c \\ ]a, \min(b,c)[& \text{si non} \end{cases}$$

donc : $A \cap B$ est un intervalle ouvert de E.

e) Si $A =]a, b[$ et $B = \{x \in E, c < x\}$,

on a :

$$A \cap B = \begin{cases} \phi & \text{si } b < c \\ ]\max(a,c), b[& \text{si non} \end{cases}$$

donc : $A \cap B$ est un intervalle ouvert de E.

f) Si $A = \{x \in E, x < a\}$ et $B = \{x \in E, x < b\}$,

donc : $A \cap B = \{x \in E, x < \min(a,b)\}$ qui est un intervalle ouvert de E.

g) Si $A = \{x \in E, x < a\}$ et $B = \{x \in E, b < x\}$

on a :

$$A \cap B = \begin{cases} \phi & \text{si } a < b \\ ]b, a[& \text{si non} \end{cases}$$

donc : $A \cap B$ est un intervalle ouvert de E.

h) Si $A = \{x \in E, a < x\}$ et $B = \{x \in E, b < x\}$,

donc : $A \cap B = \{x \in E, \max(a, b) < x\}$ qui est un intervalle ouvert de E.

Alors : $\forall A, B$ des intervalles ouverts de E, $A \cap B$ est un intervalle ouvert de E

Conclusion : τ_g est une topologie sur E.

Exercice 2 :

1) on a : $0 \in E$ et $1 \in E$,

E est l'unique voisinage de 1 sur (E, τ),

$\{0\}$ et E sont les voisinages de 0 sur (E, τ),

Comme : $E \cap \{0\} = \{0\} \neq \phi$ et $E \cap E = E \neq \phi$

donc : E n'est pas séparé.

2\ Notons τ la topologie sur E dont les singletons forment une base d'ouverts ;

Montrons que : $\tau = \tau_d$ où τ_d la topologie discrète sur E,

on sait que : τ_d est la plus grande topologie sur E,
(fine)

donc : $\tau \subset \tau_d$ (1)

Soit $\theta \in \tau_d$,

d'où : $\theta = \bigcup_{x \in \theta} \{x\}$

or : $\{x\} \in \tau$

donc: $\bigcup_{x\in O}\{x\}\in \tau$

d'où: $O\in\tau$

alors: $\tau_d\subset\tau$ (2)

de (1) et (2): $\tau=\tau_d$

3\ Notons $\tau=\{\phi, \{A\subset E / A^c \text{ est fini}\}\}$,

i) on a:

$\phi\in\tau$ et $E^c=\phi$ est fini $\Rightarrow E\in\tau$

donc: $\phi, E\in\tau$

ii) Soient $A,B\in\tau$,

d'où: A^c et B^c sont finis,

On a: $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

Comme: $\cup$ de deux ensembles finis est fini,

donc: $(A\cap B)^c$ est fini,

d'où: $A\cap B\in\tau$

iii) Soit $(A_i)_{i\in I}\subset\tau$,

d'où: $\forall i\in I$, A_i^c est fini,

on a: $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c$

comme: $\cap$ quelconque d'ensembles finis est fini,

donc: $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c$ est fini,

d'où: $\bigcup_{i\in I}A_i\in\tau$

Conclusion: τ est une topologie sur E,

4\ Soit (E,τ_E) un espace topologique,

Notons $\tau=\{A\subset F / f^{-1}(A)\in\tau_E\}$,

i) On a:

$f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_E$ et $f^{-1}(F)=E\in\tau_E$

avec: $\phi\subset F$ et $F\subset F$

donc: $\phi, F\in\tau$

Scanné avec CamScanner

ii) Soient $A, B \in \mathcal{T}$,

d'où : $A, B \subset F$ / $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_E$ et $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_E$

on a : $A \subset F$ et $B \subset F$

d'où : $A \cap B \subset F$

et on a : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

d'où : $f^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{T}_E$ ($\mathcal{T}_E$ est stable par $\cap$ fini)

donc : $A \cap B \in \mathcal{T}$.

iii) Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$,

d'où : $\forall i \in I$: $A_i \subset F$ / $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}_E$

on a : $\forall i \in I$: $A_i \subset F$

d'où : $\bigcup_{i \in I} A_i \subset F$

et on a : $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

d'où : $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in \mathcal{T}_E$ ($\mathcal{T}_E$ est stable par $\bigcup$ qlq)

donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Conclusion : $\mathcal{T}$ est une topologie sur F,

5\ Notons $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$ $U \subset \mathbb{N}$, U est stable par divisibilité $\}$,

i) on a : $\emptyset \in \mathcal{T}$,

et on a : $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$ (tous les diviseurs d'un entier $n \in \mathbb{N}$ appartiennent à $\mathbb{N}$)

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Soit d un diviseur de n,

d'où : $n = Kd$ où $K \in \mathbb{N}$

Comme : $n \in \mathbb{N}$

donc : $Kd \in \mathbb{N}$

or : $K \in \mathbb{N}$

alors : $d \in \mathbb{N}$

donc : $\mathbb{N}$ est stable par divisibilité,

d'où : $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$

Pas l'appel de démontrer

donc : $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}$

ii) Soient $A, B \in \mathcal{T}$

d'où : $A, B \subset \mathbb{N}$, A et B sont stables par divisibilité,

Soit $n \in A \cap B \subset \mathbb{N}$,

on a : $n \in A \cap B \Rightarrow n \in A$ et $n \in B$

$n \in A \cap B \Rightarrow$ (tout diviseur de n est dans A) et (tout diviseur de n est dans B)

$n \in A \cap B \Rightarrow$ tout diviseur de n est dans $A \cap B$

donc : $A \cap B \in \mathcal{T}$

iii) Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$,

d'où : $\forall i \in I$: $A_i \subset \mathbb{N}$, A_i est stable par divisibilité,

Soit $n \in \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathbb{N}$,

on a : $n \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \,/\, n \in A_{i_0}$

$n \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \,/$ tout diviseur de n est dans A_{i_0} $\quad (A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i)$

$n \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$ tout diviseur de n est dans $\bigcup_{i \in I} A_i$

donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Conclusion : $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{N}$,

Soit $\{4\} \in \mathcal{T}_d = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

on a : 2 est un diviseur de 4,

or : $2 \notin \{4\}$

d'où : $\{4\} \notin \mathcal{T}$

alors : $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_d$

Exercice 3 :

Considérons : B_1 une base d'ouverts de τ_1, $(B_1 \subset \tau_1)$

B_2 une base d'ouverts de τ_2, $(B_2 \subset \tau_2)$

$B_{1,x} = \{O \in B_1 / x \in O\}$ la base de voisinages de x / τ_1,

$B_{2,x} = \{O \in B_2 / x \in O\}$ la base de voisinages de x / τ_2,

$\Rightarrow$ Supposons que : $\tau_1 \subset \tau_2$,

Soit $x \in E$,

Soit $b_1 \in B_{1,x}$,

d'où : $b_1 \in B_1$ et $x \in b_1$

c-à-d : b_1 est un ouvert de τ_1 contenant x

puisque : $\tau_1 \subset \tau_2$

donc : b_1 est un ouvert de τ_2 contenant x,

d'où : b_1 est un voisinage de x par rapport à τ_2,

c-à-d : $b_1 \in \mathcal{V}_{x/\tau_2}$, puisque : $B_{2,x}$ est la base de voisinages de x / τ_2,

alors : $\exists b_2 \in B_{2,x} \ / \ x \in b_2 \subset b_1$

$\Leftarrow$ Supposons que : $\forall x \in E, \forall b_1 \in B_{1,x}, \exists b_2 \in B_{2,x} \ / \ x \in b_2 \subset b_1$

Soit $\theta \in \tau_1$,

Soit $x \in \theta$,

donc : θ est un voisinage de x par rapport à τ_1,

puisque : $B_{1,x}$ est la base de voisinages de x / τ_1,

alors : $\exists b_1 \in B_{1,x} \ / \ x \in b_1 \subset \theta$

donc : $\exists b_2 \in B_{2,x} \ / \ x \in b_2 \subset b_1 \subset \theta$

d'où : θ est un voisinage de x par rapport à τ_2,

alors : $\forall x \in \theta, \ \theta \in \mathcal{V}_{x/\tau_2}$

d'où : $\theta \in \tau_2$

donc : $\tau_1 \subset \tau_2$

Exercice 4 :

1\ montrons que :

$\exists \tau$ une topologie sur E dont B une base $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} B \text{ un recouvrement de } E \\ \cap \text{ de deux éléments de } B \\ \text{est } \cup \text{ d'éléments de } B \end{cases}$

=>/ Supposons que : $\exists$ une topologie τ sur E dont B est une base, on a : $\mathcal{B}$ est une base de τ,

d'où : $\forall O \in \tau, \exists (b_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B} \,/\, O = \bigcup_{i\in I} b_i$

en particulier, pour : $O = E \in \tau$ (car τ est une topologie)

$\exists (b_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B} \,/\, E = \bigcup_{i\in I} b_i$

d'où : $(b_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E,

donc : $\mathcal{B}$ est un recouvrement de E.

Soit O_1 et O_2 deux éléments de $\mathcal{B}$,

d'où : $O_1 \in \tau$ et $O_2 \in \tau$

donc : $O_1 \cap O_2 \in \tau$

puisque : $\mathcal{B}$ est une base de τ,

alors : $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{j \in J} b_j$ où $(b_j)_{j \in J} \subset \mathcal{B}$

$\Leftarrow$/ Notons : $\tau = \{\theta \subset E \;/\; \exists (b_i)_{i\in I} \subset B : \theta = \bigcup_{i\in I} b_i\} \cup \{\phi\}$

i) on a : $\cancel{\phi = \bigcup_{i\in I} \phi}$

~~d'où~~ $\phi \in \tau$

et on a : B est un recouvrement de E,

donc : $E = \bigcup_{i\in I} b_i$ où $(b_i)_{i\in I} \subset B$

d'où : $E \in \tau$

donc : $\phi, E \in \tau$

ii) Soient $\theta, \theta' \in \tau$,

d'où : $\exists (b_i)_{i\in I} \subset B : \theta = \bigcup_{i\in I} b_i$ et $\exists (b'_j)_{j\in J} \subset B : \theta' = \bigcup_{j\in J} b'_j$.

on a : $\theta \cap \theta' = \left(\bigcup_{i\in I} b_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} b'_j\right)$

or : $\forall i \in I : b_i \in B \Rightarrow \bigcup_{i\in I} b_i \in B$

$\forall j \in J : b'_j \in B \Rightarrow \bigcup_{j\in J} b'_j \in B$

puisque : $\cap$ de deux éléments de B est $\cup$ d'éléments de B

alors : $\theta \cap \theta' = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J \\ k\in K}} b''_{ij_k}$ où $(b''_{ij_k})_{\substack{i\in I \\ j\in J \\ k\in K}} \subset B$ d'où : $\left(\bigcup_{i\in I} b_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} b'_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J \\ k\in K}} b''_{ij_k}$

d'où : $\theta \cap \theta' \in \mathcal{T}$

iii) Soit $(\theta_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}$,

d'où : $\forall i \in I, \exists (b_{ij})_{j\in J} \subset B \,/\, \theta_i = \bigcup_{j\in J} b_{ij}$

donc : $\exists (b_{ij})_{j\in J} \subset B \,/\, \bigcup_{i\in I} \theta_i = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} b_{ij}\right)$

c-à-d : $\exists (b_{ij})_{j\in J} \subset B \,/\, \bigcup_{i\in I} \theta_i = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}} b_{ij}$

d'où : $\bigcup_{i\in I} \theta_i \in \mathcal{T}$

Conclusion : $\mathcal{T}$ est une topologie sur E, dont B est une base.

2\ montrons que : $\{\mathcal{M}(g,\varepsilon) : g \in C \text{ et } \varepsilon > 0\}$ est une base sur $C = \{f \,/\, f \text{ continue sur } [0,1]\}$.

* mq : $\{\mathcal{M}(g,\varepsilon) : g \in C \text{ et } \varepsilon > 0\}$ est un recouvrement de C,

c-à-d : mq : $\bigcup_{g\in C} \mathcal{M}(g,\varepsilon) = C$

on a : $\forall g \in C : \mathcal{M}(g,\varepsilon) \subset C$

d'où, $\bigcup_{g\in C} \mathcal{M}(g,\varepsilon) \subset C$

Soit $h \in C$, $\varepsilon > 0$,

posons : $f = h + \frac{\varepsilon}{4}$

on a : $\int_0^1 |f - h| = \int_0^1 |h + \frac{\varepsilon}{4} - h|$

$\int_0^1 |f - h| = \int_0^1 |+ \frac{\varepsilon}{4}|$

$\int_0^1 |f - h| = \int_0^1 \frac{\varepsilon}{4}$

$\int_0^1 |f - h| = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

d'où, $\int_0^1 |f - h| < \varepsilon$

donc : $h \in \mathcal{M}(f,\varepsilon) \subset \bigcup_{g\in C} \mathcal{M}(g,\varepsilon)$

d'où : $h \in \bigcup_{g \in C} \mathcal{M}(g, \varepsilon)$

d'où : $C \subset \bigcup_{g \in C} \mathcal{M}(g, \varepsilon)$

alors : $\bigcup_{g \in C} \mathcal{M}(g, \varepsilon) = C$

• montrons que : $\cap$ de deux éléments de $\{\mathcal{U}(g,\varepsilon) : g \in C$ et $\varepsilon > 0\}$ est

d'éléments de $\{\mathcal{U}(g,\varepsilon) : g \in C, \varepsilon > 0\}$,

Soient $\mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1)$ et $\mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$.

Soit $h \in \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$, $\left(\int_0^1 |f_1 - h| < \varepsilon_1 \text{ et } \int_0^1 |f_2 - h| < \varepsilon_2\right)$

il suffit de montrer que : $\exists \alpha > 0 \,/\, \mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$

Soit $0 < \alpha < \min\{\varepsilon_1 - \int_0^1 |f_1 - h|, \varepsilon_2 - \int_0^1 |f_2 - h|\}$ $\left(\alpha < \varepsilon_1 - \int_0^1 |f_1 - h| \text{ et } \alpha < \varepsilon_2 - \int_0^1 |f_2 - h|\right)$

montrons que : $\mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$

Soit $g \in \mathcal{U}(h,\alpha)$, $\left(\int_0^1 |h - g| < \alpha\right)$

on a : $\int_0^1 |f_1 - g| \leq \int_0^1 |f_1 - \;\;| + \int_0^1 |h - g|$

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 |f_1-g| < \int_0^1 |f_1-h|+\alpha$$

$$\int_0^1 |f_1-g| < \int_0^1 |f_1-h| + \varepsilon_1 - \int_0^1 |f_1-h|$$

d'où: $\int_0^1 |f_1-g| < \varepsilon_1$

donc: $g \in \mathcal{U}(f_1, \varepsilon_1)$

alors: $\mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1)$ (1)

d'une manière similaire :

Soit $g \in \mathcal{U}(h,\alpha)$,

on a: $\int_0^1 |f_2-g| \leq \int_0^1 |f_2-h| + \int_0^1 |h-g|$

$$\int_0^1 |f_2-g| < \int_0^1 |f_2-h| + \alpha$$

$$\int_0^1 |f_2-g| < \int_0^1 |f_2-h| + \varepsilon_2 - \int_0^1 |f_2-h|$$

d'où: $\int_0^1 |f_2-g| < \varepsilon_2$

donc: $g \in \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$

alors: $\mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$ (2)

de (1) et (2) : $\mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$

alors: $\displaystyle\bigcup_{\substack{h \in \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1)\cap\mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2) \\ 0<\alpha<\min(\varepsilon_1-\int_0^1|f_1-h|, \\ \varepsilon_2-\int_0^1|f_2-h|)}} \mathcal{U}(h,\alpha) \subset \mathcal{U}(f_1,\varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(f_2,\varepsilon_2)$

l'autre $\supset$ est évidente.

Exercice 7 :

1\ Montrons que : $\tau_{/\mathcal{R}} = \{ U \subset E_{/\mathcal{R}} \ / \ q^{-1}(U) \in \tau \}$ est une topologie sur $E_{/\mathcal{R}}$,

i) on a : $q^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$ avec $\phi \subset E_{/\mathcal{R}}$

d'où : $\phi \in \tau_{/\mathcal{R}}$

et on a : $q^{-1}(E_{/\mathcal{R}}) = E \in \tau$ avec $E_{/\mathcal{R}} \subset E_{/\mathcal{R}}$

d'où : $E_{/\mathcal{R}} \in \tau_{/\mathcal{R}}$

donc : $\phi, E_{/\mathcal{R}} \in \tau_{/\mathcal{R}}$

ii) Soient $A, B \in \tau_{/\mathcal{R}}$, d'où: $q^{-1}(A)\in\tau$ avec $A\subset E/_{\mathcal{R}}$

et: $q^{-1}(B)\in\tau$ avec $B\subset E/_{\mathcal{R}}$

on a: $A,B\subset E/_{\mathcal{R}}$

d'où: $A\cap B\subset E/_{\mathcal{R}}$

et on a: $q^{-1}(A\cap B)=q^{-1}(A)\cap q^{-1}(B)\in\tau$, comme τ une topologie,

donc: $A\cap B\in\tau/_{\mathcal{R}}$

iii) Soit $(A_i)_{i\in I}\subset\tau/_{\mathcal{R}}$,

d'où: $\forall i\in I$: $q^{-1}(A_i)\in\tau$ avec $A_i\subset E/_{\mathcal{R}}$

on a: $\forall i\in I$: $A_i\subset E/_{\mathcal{R}}$

d'où: $\bigcup_{i\in I}A_i\subset E/_{\mathcal{R}}$

et on a: $q^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}q^{-1}(A_i)\in\tau$, comme τ une topologie,

donc: $\bigcup_{i\in I}A_i\in\tau/_{\mathcal{R}}$

Alors: $\tau/_{\mathcal{R}}$ est une topologie sur $E/_{\mathcal{R}}$.

2\ montrons que: q est continue,

or: q est continue $\Leftrightarrow\forall O\in\tau/_{\mathcal{R}}$: $q^{-1}(O)\in\tau$

d'où: montrons que $\forall O\in\tau/_{\mathcal{R}}$, $q^{-1}(O)\in\tau$

Soit $O\in\tau/_{\mathcal{R}}=\{U\subset E/_{\mathcal{R}}\ /\ q^{-1}(U)\in\tau\}$,

d'où: $q^{-1}(O)\in\tau$ avec $O\subset E/_{\mathcal{R}}$

Alors: q est continue.

3\ montrons que: $\tau/_{\mathcal{R}}$ est la topologie la plus fine rendant q continue,

c-à-d: montrons que: $\forall\tau'$ une topologie qlq sur $E/_{\mathcal{R}}$ rendant q continue, $\tau'\subset\tau/_{\mathcal{R}}$

Soit τ' une topologie sur $E/_{\mathcal{R}}$ telle que: $q:(E,\tau)\to(E/_{\mathcal{R}},\tau')$ est continue.

Soit $O'\in\tau'$,

d'où: $q^{-1}(O')\in\tau$

donc: $O'\in\tau/_{\mathcal{R}}$

Alors: $\tau'\subset\tau/_{\mathcal{R}}$

Exercice 8 :

1\ * montrons que: $U\cap V\in\tilde{\tau}$

on a: $U\cap V=U\cap C^{K}_{\tilde{E}}$

$U\cap V=U\cap(\tilde{E}\setminus K)$

$U\cap V=U\cap((E\cup\{\omega\})\setminus K)$ $\quad(K\not\ni\{\omega\}\Rightarrow\{\omega\}\setminus K=\{\omega\})$

$\mathcal{U} \cap V = \mathcal{U} \cap ((E \setminus K) \cup \{\omega\})$ $\left(\begin{cases} \{\omega\} \notin E \\ \mathcal{U} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \subset E \end{cases} \Rightarrow \{\omega\} \notin \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cap \{\omega\} = \phi\right)$

$\mathcal{U} \cap V = \mathcal{U} \cap (E \setminus K)$

d'où: $\mathcal{U} \cap V = \mathcal{U} \cap C_E^K$

Comme K est un compact de E,

donc: K est un fermé de (E, τ),

d'où: C_E^K est un ouvert de (E, τ),

c-à-d: $C_E^K \in \tau$

or: $\mathcal{U} \in \tau$

donc: $\mathcal{U} \cap C_E^K \in \tau$

d'où: $\mathcal{U} \cap V \in \tau$

puisque: $\tau \subset \tilde{\tau} = \tau \cup \{C_{\tilde{E}}^K : K \text{ est compact dans } E\}$,

Alors: $\mathcal{U} \cap V \in \tilde{\tau}$

* montrons que: $\mathcal{U} \cup V \in \tilde{\tau}$

on a: $\mathcal{U} \cup V = \mathcal{U} \cup C_{\tilde{E}}^K$

$\mathcal{U} \cup V = \mathcal{U} \cup (\tilde{E} \setminus K)$

$\mathcal{U} \cup V = \mathcal{U} \cup ((E \cup \{\omega\}) \setminus K)$

d'où: $\mathcal{U} \cup V = \mathcal{U} \cup ((E \setminus K) \cup \{\omega\}) = \mathcal{U} \cup (E \setminus K) \cup \{\omega\}$

et on a: $\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = \tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup (E \setminus K) \cup \{\omega\})$

$\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = \tilde{E} \cap C_E^{\mathcal{U}} \cap K$ $\quad (C_E^{E \setminus K} = K \ ; \ C_E^{\{\omega\}} = E$ comme $\{\omega\} \notin E)$

$\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = (E \cup \{\omega\}) \cap C_E^{\mathcal{U}} \cap K$

$\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = ((E \cap K) \cup (\{\omega\} \cap K)) \cap C_E^{\mathcal{U}}$ $\quad (K \notin \{\omega\} \Rightarrow \{\omega\} \cap K = \phi)$

$\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = E \cap K \cap C_E^{\mathcal{U}}$ $\quad (E \cap C_E^{\mathcal{U}} = C_E^{\mathcal{U}})$

d'où: $\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V) = C_E^{\mathcal{U}} \cap K$

puisque: $\mathcal{U} \in \tau$ et K est un compact dans (E, τ),

alors: $C_E^{\mathcal{U}}$ et K sont des fermé de (E, τ),

et: $(C_E^{\mathcal{U}} \cap K) \subset K$

donc: $C_E^{\mathcal{U}} \cap K$ est un compact dans (E, τ),

d'où: $\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V)$ est un compact dans (E, τ),

or: $\mathcal{U} \cup V = C_{\tilde{E}}^{\tilde{E} \setminus (\mathcal{U} \cup V)}$

Alors: $\mathcal{U} \cup V \in \tilde{\tau}$

2) montrons que: $\tilde{\tau}$ est une topologie sur $\tilde{E}$,

i) on a : $\phi \in \tau$

comme τ topologie sur E,

donc : $\phi \in \tilde{\tau}$

et on a : $\tilde{E} = C_{\tilde{E}}^{\phi}$ avec ϕ est compact dans E (comme ϕ fermé dans (E, τ))

donc : $\tilde{E} \in \tilde{\tau}$

ii) Soient $U, V \in \tilde{\tau}$,

* Si $U \in \tau$ et $V \in \tau$,

donc : $U \cap V \in \tau$ comme τ topologie sur E

d'où : $U \cap V \in \tilde{\tau}$

* Si $U \in \{C_{\tilde{E}}^{K} : K$ est compact dans $E\}$ et $V \in \{C_{\tilde{E}}^{K} : K$ est compact dans $E\}$,

donc : $U = C_{\tilde{E}}^{K_1} = \tilde{E} \setminus K_1$ avec K_1 compact dans E

et : $V = C_{\tilde{E}}^{K_2} = \tilde{E} \setminus K_2$ avec K_2 compact dans E

on a : $U \cap V = (\tilde{E} \setminus K_1) \cap (\tilde{E} \setminus K_2)$

$U \cap V = \tilde{E} \setminus (K_1 \cup K_2)$

$U \cap V = C_{\tilde{E}}^{K_1 \cup K_2}$

avec : $K_1 \cup K_2$ est compact dans E (les compacts dans E sont stables par $\bigcup$ finie)

d'où : $U \cap V \in \{C_{\tilde{E}}^{K} : K$ est compact dans $E\}$

donc : $U \cap V \in \tilde{\tau}$

* Si $U \in \tau$ et $V \in \{C_{\tilde{E}}^{K} : K$ est compact dans $E\}$

donc, d'après la question précédente : $U \cap V \in \tilde{\tau}$

iii) Soit $(U_i)_{i \in I} \subset \tilde{\tau}$,

* Si $\forall i \in I$: $U_i \in \tau$,

donc : $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ comme τ topologie sur E

d'où : $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tilde{\tau}$

* Si $\forall i \in I$: $U_i \in \{C_{\tilde{E}}^{K} : K$ est compact dans $E\}$

Soient U_{i_1}, U_{i_2} tel que $i_1, i_2 \in I$,

on a : $U_{i_1} = C_{\tilde{E}}^{K_{i_1}} = \tilde{E} \setminus K_{i_1}$ avec K_{i_1} compact dans E

et : $U_{i_2} = C_{\tilde{E}}^{K_{i_2}} = \tilde{E} \setminus K_{i_2}$ avec K_{i_2} compact dans E

d'où : $U_{i_1} \cup U_{i_2} = (\tilde{E} \setminus K_{i_1}) \cup (\tilde{E} \setminus K_{i_2})$

$U_{i_1} \cup U_{i_2} = \tilde{E} \setminus (K_{i_1} \cap K_{i_2})$

$U_{i_1} \cup U_{i_2} = C_{\tilde{E}}^{K_{i_1} \cap K_{i_2}}$

avec : $K_{i_1} \cap K_{i_2}$ est compact dans E (les compacts dans E sont stables par $\cap$ fini)

d'où : $U_{i_1} \cup U_{i_2} \in \{ C_{\tilde{E}}^{K} : K \text{ est compact dans } E \}$

d'une manière similaire, on montre que :

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \{ C_{\tilde{E}}^{K} : K \text{ est compact dans } E \}$$

donc : $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tilde{\tau}$

* Si $\bigcup_{i \in I} U_i = \left(\bigcup_{i \in I_1} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} U_i \right)$ $\quad (I = I_1 \cup I_2)$

avec : $(U_i)_{i \in I_1} \subset \tau$ et $(U_i)_{i \in I_2} \subset \{ C_{\tilde{E}}^{K} : K \text{ est compact dans } E \}$

on a, d'après les cas précédantes :

$$\bigcup_{i \in I_1} U_i \in \tau \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I_2} U_i \in \{ C_{\tilde{E}}^{K} : K \text{ est compact dans } E \}$$

donc, d'après la question précédante : $\left(\bigcup_{i \in I_1} U_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} U_i \right) \in \tilde{\tau}$

d'où : $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tilde{\tau}$

Alors : $\tilde{\tau}$ est une topologie sur $\tilde{E}$.

3)

Exercice 5 :

1\ Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérences de (x_n),

montrons que : $A = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}$

Soit $x \in A$,

Soit $V \in \mathcal{V}_x$,

d'où : il existe une infinité d'indices n tels que : $x_n \in V$

c-à-d : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : x_n \in V$

donc : $\forall N \in \mathbb{N} : \{x_n, n \geq N\} \cap V \neq \emptyset$

alors : x est une valeur d'adhérence de $\{x_n, n \geq N\}$, $\forall N \in \mathbb{N}$

c-à-d : $\forall N \in \mathbb{N} : x \in \overline{\{x_n, n \geq N\}}$

d'où : $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n ; n \geq N\}}$

donc : $A \subset \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq N\}}$

Soit $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}$,

d'où : $\forall N \in \mathbb{N} : x \in \overline{\{x_n : n \geq N\}}$

donc : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall V \in \mathcal{V}_x : V \cap \{x_n : n \geq N\} \neq \emptyset$

Soit $V \in \mathcal{V}_x$,

on a : $\forall N \in \mathbb{N}, V \cap \{x_n : n \geq N\} \neq \emptyset$

d'où : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : x_n \in V$

donc : il existe une infinité d'indices n tels que : $x_n \in V$

d'où : x est une valeur d'adhérence de (x_n),

donc : $x \in A$

d'où : $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq N\}} \subset A$

Alors : $A = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq N\}}$

2\ Soit x une valeur d'adhérence de (x_n),

Soit $V \in \mathcal{V}_x$,

d'où, il existe une infinité d'indices n tels que : $x_n \in V$

Comme : (x_n) est injective,

donc : $\forall p,q \in \mathbb{N}$ tel que : $p \neq q$ et $x_p, x_q \in V$: $x_p \neq x_q$

d'où. $V \cap (\{x_n : n \geq N\} \setminus \{x\}) \neq \phi$

alors : x est un point d'accumulation de $\{x_n : n \geq 1\}$

Exercice 6 :

a) Soit (E, τ) un espace topologique séparé,

Soit $A \subset E$ non vide,

Soit a un point d'accumulation de A,

Soit $V \in \mathcal{V}_a$,

montrons que V contient une infinité de points de A,

c-à-d : $V \cap A$ est infini,

Supposons -par absurde- que : $V \cap A$ est fini,

d'où : $V \cap A \setminus \{a\}$ est fini,

donc : $V \cap A \setminus \{a\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$

Or : (E, τ) est séparé,

donc : les singletons sont des fermés,

d'où : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$ est fermé, c-à-d : $V \cap A \setminus \{a\}$ est fermé,

Considérons : $O = (V \cap A \setminus \{a\})^c = V^c \cup A^c \cup \{a\}$

O est un ouvert contenant a,

d'où : $O \in \mathcal{V}_a$ et $V \in \mathcal{V}_a$

donc : $O \cap V \in \mathcal{V}_a$

alors. $(O \cap V) \cap A \setminus \{a\} = O \cap (V \cap A \setminus \{a\})$

$(O \cap V) \cap A \setminus \{a\} = (V \cap A \setminus \{a\})^c \cap (V \cap A \setminus \{a\})$

$(O \cap V) \cap A \setminus \{a\} = \phi$

d'où : a n'est pas un point d'accumulation de A, "Absurde"

donc : $V \cap A$ est infini.

b) Soit (E, τ) un espace topologique séparé,

Soit (x_n) une suite dans E,

Soit a un point d'accumulation de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$,

Soit $V \in \mathcal{V}_a$,
d'après le résultat de question précédante:
V contient une infinité de points de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$,
d'où: il existe une infinité d'indices n tel que: $x_n \in V$
donc: a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE Maths 2023/2024
Topologie

Série d'exercices: Espaces Métriques

Exercice 1. *Montrer qu'un espace topologique séparé ne contenant qu'un nombre fini de points est compact.*

Exercice 2. *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X,τ). On considère le sous-espace topologique (A,τ_A).*

1. *Soit K une partie de A. Montrer que "K est compact dans $(X,\tau) \Leftrightarrow K$ est compact dans (A,τ_A)".*

   Dans ce qui suit, on considère que l'espace topologique (X,τ) est localement compact.

2. *On suppose que $A = U \cap F$ avec U et F sont respectivement un ouvert et un fermé dans (X,τ) et $a \in A$.*
   (a) *Vérifier qu'il existe un voisinage H compact de a dans (X,τ) tel que $H \subset U$.*
   (b) *Montrer que $W = H \cap F$ est un voisinage de a dans (A,τ_A).*
   (c) *Déduire que (A,τ_A) est localement compact.*

3. *On suppose que le sous-espace topologique (A,τ_A) est localement compact. Soit $a \in A$ et H_a un voisinage compact de a dans (A,τ_A).*
   (a) *Montrer que $\overset{\circ}{H}_a = O_a \cap A$ avec O_a est un ouvert de (X,τ).*
   (b) *Posons $U = \bigcup_{a\in A} O_a$.*
      a) *Vérifier que $A = U \cap (U \cap A^c)^c$.*
      b) *Montrer que $U \cap A^c$ est un ouvert dans (X,τ).*
      c) *Déduire que A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de (X,τ).*

Exercice 3.

1. *Soit (X,d) un espace métrique. Pour tous $x, y \in X$, on définit*

$$d'(x,y) = \arctan(d(x,y)),\ d''(x,y) = \inf\{d(x,y), 1\},\ d'''(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

   Montrer que d', d'' et d''' sont des métriques sur X.

2. *Soit $(X_k,d_k)_{1\le k\le n}$ une famille d'espaces métriques. Pour $x = (x_1,\cdots,x_n)$ et $y = (y_1,\cdots,y_n)$ deux éléments du produit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$, on pose $d(x,y) = \max_{1\le k\le n} d_k(x_k,y_k)$. Montrer que d définit une métrique sur X.*

3. *Soit $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ de $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, on définit l'application: $d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\arctan(d_n(x_n,y_n))$. Montrer que d est une métrique sur X.*

4. *Soit X un espace métrique et Y une partie de $\mathbb{R}$. On note par $B(X,Y)$ l'ensemble des applications ~~continues~~ bornées de X dans Y. Pour $f, g \in B(X,Y)$, on pose $d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x) - g(x)|$. Montrer que d est une métrique sur $B(X,Y)$.*

Exercice 4.
Soient (E,d) et (F,d') des espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application bijective continue. Montrer que si E est compact, alors f est un homéomorphisme.

Exercice 5.
Soient (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite dans E. Montrer que:

Voir cours 1. *si (x_n) converge, alors (x_n) est une suite de Cauchy.*
" " 2. *si (x_n) est une suite de Cauchy, elle a au plus une valeur d'adhérence.*
3. *si (x_n) est une suite de Cauchy et (a_k) est une suite de reels strictement positifs avec $a_k \longrightarrow 0$, il existe une suite extraite (x_{n_k}) telle que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < a_k$ pour tout k.*
" " 4. *si (x_n) est une suite de Cauchy, alors, (x_n) converge si et seulement si (x_n) a une valeur d'adhérence.*

Exercice 6.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle est complet.*

2. *Montrer que* $C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$ *muni de la métrique uniforme* $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ *est complet.*

3. *Montrer que l'espace* $l^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |u_n|^p < +\infty\}$ *muni de la distance* $d_p(u,v) = (\sum_n |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ *est complet.*

Exercice 7.
Soient (E,d) *un espace métrique et* (x_n) *une suite dans* E.

1. *Montrer que* (x_n) *est une suite de Cauchy si et seulement si,* $\delta(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *avec* $\delta(S_n)$ *est le diamètre d'ensemble* $S_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

2. *Montrer que si* d *est discrète, alors les suites de Cauchy dans* (E,d) *sont les suites stationnaires.*

Exercice 8. *Soient* d *et* d' *deux métriques sur un ensemble non vide* E. *On dit que* d *et* d' *sont uniformément équivalentes si l'application* $Id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ *est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.*
Montrer que toute suite de Cauchy pour d *est une suite de Cauchy pour* d'.

Exercice 9. *On considère l'espace vectoriel* $X = \mathbb{R}^2$ *munie de la norme euclidienne* $\|.\|_2$. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & Ax \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* X.

1. a) *Montrer que* $f : (X, \|.\|_2) \longrightarrow (X, \|.\|_2)$ *est Lipschitzienne.*
   b) *Déduire que* f *n'est pas contractante.*

2. a) *Vérifier que la matrice* A *est diagonalisable.*

   b) *Montrer que l'application* $\begin{array}{rcl} N : X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|Px\|_2 \end{array}$ *est une norme sur* X.
   c) *Montrer que* $f : (X, N) \longrightarrow (X, N)$ *est contractante.*
   d) *Déduire que pour tout* $x \in X$, *la suite* $A^n x$ *converge vers* 0.

Exercice 3:

1\ * montrons que d' est une métrique sur X

i) Soient $x, y \in X$,

on a : $d'(x,y) = 0 \iff \arctan(d(x,y)) = 0$

$\iff d(x,y) = 0$

$\iff x = y$ comme d est une métrique sur X

d'où : $\forall x, y \in X$, $d'(x,y) \iff x = y$

ii) Soient $x, y \in X$,

on a : $d'(x,y) = \arctan(d(x,y))$

$= \arctan(d(y,x))$ comme d est métrique sur X

$= d'(y,x)$

d'où : $\forall x, y \in X$, $d'(x,y) = d'(y,x)$

iii) Soient $x, y, z \in X$,

comme d est une métrique sur X,

donc : $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

d'où : $\arctan(d(x,y)) \leqslant \arctan(d(x,z) + d(z,y))$

comme arctan est une fct croissante

montrons que : $\arctan(d(x,z) + d(z,y)) \leqslant \arctan(d(x,z)) + \arctan(d(z,y))$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tel que $a \leqslant b + c$

posons : $\alpha = \arctan a$; $\beta = \arctan b$; $\gamma = \arctan c$

on a : $\alpha \leqslant \beta + \gamma \iff \alpha - \beta \leqslant \gamma$

$\iff \tan(\alpha - \beta) \leqslant \tan(\gamma)$

$\iff \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} \leqslant \tan(\gamma)$

$\iff \dfrac{a - b}{1 + ab} \leqslant c$

$\iff a - b \leqslant c + abc$

$\iff a \leqslant b + c + abc$

donc : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a \leqslant b + c \Rightarrow \arctan a \leqslant \arctan b + \arctan(c)$

d'où : $\arctan(d(x,y)) \leqslant \arctan(d(x,z)) + \arctan(d(z,y))$

c-à-d : $d'(x,y) \leqslant d'(x,z) + d'(z,y)$

Alors d' est une métrique sur X.

* montrons que d'' est une métrique sur X

i) à vérifier

ii) à vérifier

iii) Soient $x, y, z \in X$,

on a : $d''(x,y) = \text{Inf}\{d(x,y), 1\}$

d'où, $d''(x,y) \leqslant d(x,y)$ et $d''(x,y) \leqslant 1$

avec : $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ comme d est une métrique sur X

<u>1er cas:</u> $d''(x,z) = d(x,z)$

• Si $d''(z,y) = d(z,y)$

donc, $d''(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

d'où, $d''(x,y) \leqslant d''(x,z) + d''(z,y)$

• Si $d''(z,y) = 1$

donc : $d''(x,y) \leqslant 1 \leqslant 1 + d''(x,z)$

d'où, $d''(x,y) \leqslant d''(z,y) + d''(x,z)$

<u>2ème cas:</u> $d''(x,z) = 1$

donc, $d''(x,y) \leqslant 1 \leqslant 1 + d''(z,y)$

d'où, $d''(x,y) \leqslant d''(x,z) + d''(z,y)$

2\ à vérifier

3\ Vérifions que $d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \arctan(d_n(x_n, y_n))$ est bien définie

on a : $\sum 2^{-n} \arctan(d_n(x_n,y_n))$ est une série à terme positif,

avec, $\forall n \in \mathbb{N}$. $2^{-n} \arctan(d_n(x_n,y_n)) < 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{2}$

or, $\sum 2^{-n}$ est une série géométrique convergente (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$),

donc : $\sum 2^{-n} \arctan(d_n(x_n,y_n))$ est convergente,

d'où : d est bien définie.

montrons que d est une métrique sur X.

i) Soient $x = (x_n) \in X$ et $y = (y_n) \in X$,

on a : $d(x,y) = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \arctan(d_n(x_n,y_n)) = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $\arctan(d_n(x_n,y_n)) = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $d_n(x_n,y_n) = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$

$\iff x = y$

ii) à vérifier

iii) Soient $x=(x_n)\in X$, $y=(y_n)\in X$ et $z=(z_n)\in X$,

on a: $\forall n\in\mathbb{N}$: $d_n(x_n,y_n)\leq d_n(x_n,z_n)+d_n(z_n,y_n)$

d'où, $\forall n\in\mathbb{N}$: $\arctan(d_n(x_n,y_n))\leq \arctan(d_n(x_n,z_n))+\arctan(d_n(z_n,y_n))$

d'où, $\forall n\in\mathbb{N}$: $2^{-n}\arctan(d_n(x_n,y_n))\leq 2^{-n}\arctan(d_n(x_n,z_n))+2^{-n}\arctan(d_n(z_n,y_n))$

donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\arctan(d_n(x_n,y_n))\leq \sum_{n=0}^{+\infty}[2^{-n}\arctan(d_n(x_n,z_n))+2^{-n}\arctan(d_n(z_n,y_n))]$

$\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\arctan(d_n(x_n,y_n))\leq \sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\arctan(d_n(x_n,z_n))+\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\arctan(d_n(z_n,y_n))$

d'où, $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

4) $\mathcal{B}(X,Y)$: l'ensemble des applications bornées de X dans Y.

$$\mathcal{B}(X,Y)=\{f:X\to Y \mid f \text{ bornée}\}$$

i) Soient $f,g\in\mathcal{B}(X,Y)$,

on a: $d(f,g)=0 \iff \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|=0$

$\iff \forall x\in X,\ |f(x)-g(x)|=0$

$\iff \forall x\in X,\ f(x)=g(x)$

$\iff f=g$

ii) Soient $f,g\in\mathcal{B}(X,Y)$,

on a, $d(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$

$=\sup_{x\in X}|g(x)-f(x)|$

$=d(g,f)$

iii) Soient $f,g,h\in\mathcal{B}(X,Y)$,

on a: $\forall x\in X$, $|f(x)-g(x)|=|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|$

d'où, $\forall x\in X$, $|f(x)-g(x)|\leq|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

or: $\forall x\in X$, $|f(x)-h(x)|\leq\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|$ et $|h(x)-g(x)|\leq\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|$

donc: $\forall x\in X$, $|f(x)-g(x)|\leq\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|$

comme, $\forall x\in X$, $\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$ est le plus petit majorant de $|f(x)-g(x)|$

alors: $\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\leq\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|$

c-à-d, $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

Exercice 4:

Supposons que E est compact,

montrons que $f:E\to F$ est un homéomorphisme.

on a: f est bijective continue,

donc, il suffit de montrer que f^{-1} est continue, Soit A un fermé dans E,

or : E est un compact,

donc : A est compact dans E,

d'où : $f(A)$ est compact dans F, car f est continue

alors : $f(A)$ est un fermé dans F,

comme : $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$

donc : $(f^{-1})^{-1}(A)$ est un fermé dans F,

d'où : f^{-1} est continue.

Exercice 6 :

1\ Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,

donc : (x_n) est une suite bornée dans $\mathbb{R}$,

et d'après Bolzano-Weistrass : "Tout suite bornée dans $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence",

donc : (x_n) admet une valeur d'adhérence,

d'où : (x_n) est convergente,

alors : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

2\ Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(C([0,1], \mathbb{R}), d)$,

d'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

donc, pour chaque $x \in [0,1]$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$,

d'où, pour chaque $x \in [0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

d'où, pour chaque $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors : $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0$

d'où : $d(f_n, f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc : (f_n) est convergente

alors : $(C([0,1], \mathbb{R}), d)$ est complet.

Exercice 5 :

3\ Soit (x_n) une suite de Cauchy,

Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs avec $a_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

on a : (x_n) est de Cauchy,

d'où. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Pour $\varepsilon = a_k$

donc: $\exists n_k \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq n_k \Rightarrow d(x_p, x_q) < a_k$

Pour $p = n_k$ et $q = n_{k+1}$: $n_k \geq n_k$; $n_{k+1} \geq n_k$

alors: $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < a_k$