EXAMEN: ALGÈBRE 3

04/06/2022

LE-MATH(S2)

Durée 2h

DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, PORTABLES ÉTEINTS

Exercice 1. (4 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Trouver N telle que $A = N + I$, et montrer que N est nilpotente.
2. Déterminer A^p.

Exercice 2. (4 pts)
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 . On considère les polynômes :

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X-1)(X+1), \quad P_2 = (X-2)(X+1), \quad P_3 = (X-1)(X+2).$$

1. Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace?
2. Montrer que P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3.
3. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 3. (4 pts)
On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.
3. Monter que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$

Exercice 4. (8 pts)
Soient le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire définie par: $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_1 - e_2 - e_3$.

1. Donner la matrice A de f relativement à la base B
2. Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que f est bijective.

   On considère les vecteurs $e'_1 = e_1$, $e'_2 = f(e'_1)$ et $e'_3 = f(e'_2)$.
4. Calculer e'_2 et e'_3, puis vérifier que $f(e'_3) = 2(e'_1 - e'_2 + e'_3)$.
5. Exprimer e_1, e_2 et e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.
6. En déduire que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Donner les matrices de passage $P = \mathrm{Pass}(B, B')$ et $P^{-1} = \mathrm{Pass}(B', B)$.
8. Calculer avec deux méthodes la matrice M' de f relativement à la base B'.

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE-Mathématiques 2021/2022
Semestre 2

12 mai 2022. Contrôle continu : Analyse 3 Durée : deux heures

T.D

Exercice 1. *(4 points)*
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[0, x]$ ou sur $[x, 0]$, montrer que:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Exercice 2. *(4 points)*

1. *Soit φ la fonclion définie sur IR par : $\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. - Determimer le $DL_5(0)$ de la fonchón φ.*
2. *En utilisant le développement limité , Calculer:*

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 3. *(6 points)*
Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ par:

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+sin(x)}} - e}{tan(x)}$$

1. *Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $h : x \to e^{\sqrt{1+sin(x)}} - e$.*
2. *Donner le développement limité de la fonction f d'ordre 2 au voisinage de 0.*
3. *Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on note $\tilde{f}$.*
4. *Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0.*
5. *a- Donner l'équation de la tangente T à $(C\tilde{f})$ en 0 .*
   b- En déduire la position de $(C\tilde{f})$ par rapport à T en 0.

Exercice 4. *(6 points)*

1. *En utilisant la formule de Taylor-young, déterminer le développement limité de la fonction arctan à l'ordre 3 au point 1.*
2. *Soit f la fonction définie par $f(x) = arctan(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})$*
   (a) *Donner le domaine de définition de f.*
   (b) *Donner le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction $\varphi_1 : t \to \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$*
   (c) *Déduire le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction $\varphi_2 : t \to arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$*
   (d) *Déduire le développement asymptotique de la fonction f en $+\infty$.*
   (e) *Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$, On déterminant la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.*

Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⵓⵏⵏⵉⵜ ⵏ ⵉⵙⵍⵎⴰⴷⵏ
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE-Mathématiques 2021/2022
Semestre 2

Durée : deux heures

03 juin 2022.

Examen de la session normale : Analyse 3

Exercice 1. *(4.5 points)*

1. *Déterminer le* $DL_2(0)$ *de la fonction* $\varphi : x \mapsto ln(cos(x))$
2. *En déduire* $DL_1(0)$ *de la fonction* $h : x \mapsto \frac{ln(cos(x))}{tan(x)}$
3. (a) *En utilisant le développement limité, calculer la limite suivante :* $\lim_{x\to 0}[cos(x)]^{\frac{1}{tan(x)}}$.
   (b) *Calculer:* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[sin(x)]^{tan(x)}$

Exercice 2. *(3 points)*

1. *Donner la formule de Taylor-Young pour une fonction f de class* C^n *au voisinage d'un réel* x_0 *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.
2. *Soit f une fonction de classe* C^3 *sur un interballe* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.
   Déterminer : $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$

Exercice 3. *(7.5 points) Soit f la fonction définie sur* $]-1;+\infty[\backslash\{1\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = (x^2-1)ln|\frac{1+x}{1-x}|$$

1. *Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.*
2. *Déduire l'équation, ainsi que la positon relativement à (Cf), de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.*
3. *Déterminer le développement asymptotique, à l'ordre 3 de la focntion* $\varphi : x \mapsto ln|\frac{1+x}{1-x}|$ *en* $+\infty$, *puis déduire celui de la fonction f en* $+\infty$ *à l'ordre 1.*
4. *Déterminer l'équation de l'asymptote* (Δ) *à* (Cf) *en* $+\infty$, *en précisant leurs positions relatives.*

Exercice 4. *(5 points) On considère la courbe paramétrée definie par les équations suivants:*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t-1)} \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. *Exprimer* $x(\frac{1}{t})$ *et* $y(\frac{1}{t})$ *en fonction de* $x(t)$ *et* $y(t)$.
2. *Déterminer une symétrie de la courbe et en déduire que* $D_E = [-1, 1[\backslash\{0\}$.
3. *Construire le tableau de variations sur* D_E.
4. *Etudier les branches ifnines de la courbe (Cf) sur* D_E.

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths** Analyse 2	**CONTROLE N°1**	Année scolaire : 2021/2022 Durée: deux heures

Exercice 1: (6 points)

Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et c un point de $[a,b]$.

1) Donner les définitions de $I^-(f,[\alpha,\beta])$ et $I^+(f,[\alpha,\beta])$. . — 1 pt
2) On pose $f_1 = f_{/[a,c]}$ et $f_2 = f_{/[c,b]}$ $\varphi, \psi \in \zeta([a,b],\mathbb{R})$ telle que : $\phi \leq f \leq \psi$
   a) Montrer que. — 0.5 pts

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \leq I^-(f_1,[a,c]) + I^-(f_2,[c,b]).$$

   b) En déduire que. — 0.5 pts

$$I^-(f,[a,b]) \leq I^-(f_1,[a,c]) + I^-(f_2,[c,b]).$$

   c) Montrer que. — 1 pt

$$I^+(f,[a,b]) \geq I^+(f_1,[a,c]) + I^+(f_2,[c,b]).$$

3) En utilisant le fait que f_1 et f_2 sont intégrables, montrer que. — 1 pt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4) Applications : calculer $I_1 = \int_{-2}^{2} |x-1|\,dx$ et $I_2 = \int_0^2 |x^2 - x|\,dx$. . — 2 pts

Exercice 2 : (2 points)

Soit f une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, montrer que $f(x) = 0, \ \forall x \in [a,b]$.

Exercice 3 : (3 points)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que : — 1 pt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots . + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2) En déduire que $\int_0^1 x^3\,dx$. — 2 pts

Exercice 4 : (3 points)

Calculer la limite des suites de terme général suivant :

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. 2) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} tan\left(\frac{k}{n}\right)$ 3) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 5 : (4 points)

Soit $f : X \to Y$ une fonction bornée.

1) Montrer que f est intégrable si et seulement si $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists\, \psi_n, \phi_n \in \zeta([a,b],\mathbb{R})$ telle que : 0.5 pts

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx < \frac{1}{n}$$

2) Montrer que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx.$ 0.5 pts

3) Application : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ et soit $(\delta) = (x_1 = a, \cdots, x_n = b)$, avec $x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k$ la subdivision régulière de $[a,b]$. Posons

$$\begin{cases} \phi_n(x) = x_{k-1}, & \forall x \in [x_{k-1}, x_k[\\ \psi_n(x) = x_k, & \forall x \in]x_{k-1}, x_k[\\ \phi_n(b) = \psi_n(b) = f(b) = b \end{cases}$$

a) Montrer que 1 pt

$$\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))dx = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

b) En remarquant que $\phi_n \leq g \leq \psi_n$, montrer que g est intégrable. 1 pt

c) En utilisant la question (2), calculer $\int_a^b g(x)dx.$ 1 pt

Exercice 6 : (2 points)

1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, montrer que : 1 pt

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)cos(nx)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)sin(nx)dx = 0$$

2) En déduire le résultat pour toute fonction intégrable. 1 pt

	Université Abdelmalek Essaâdi **Ecole Normale Supérieure**	
Licence d'éducation **Spécialité : Maths**	**EXAMEN D'ANALYSE MATHEMATQUES**	Année scolaire : 2021/2022 Durée: deux heures

Exercice 1: (5 points) (10×0.5)

1) Calculer les intégrales suivantes en utilisant une fonction primitive adéquate:

$$A = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^3}dt, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tan^3(t)}{cos^2(t)}dt \ \ et \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{e^{arctanx}}{1+x^2}dt$$

2) Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie:

$$A = \int_0^1 t^2e^t\,dt, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)e^t\,dt, \quad C = \int_0^1 arctanx\,dx \ et \ D = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$$

3) Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable convenable

$$A = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t+1}dt, \quad B = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{ln(t)+1}}dt \ \ et \quad C = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt \qquad (t = cosx)$$

Exercice 2: (3 points)

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(t)}{sin(t)+cos(t)}dt \ \ et \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{sin(t)+cost}dt$$

1) a) Calculer $I + J$. (1pt)
2) b) Montrer que $I = J$, en déduire les valeurs de I et J. (1pt)
3) En utilisant la question (1), calculer (1pt)

$$\int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$$

Exercice 3 **: (6 points) (6×1)**

1) Les intégrales suivantes sont-elles convergentes:

$$I_1 = \int_0^e \frac{1}{t\big(ln(t)\big)^3}dt, \ \ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1-cos(x)}{x^2}dx, \ \ I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{ln(t)}{t^2+1}dt \quad et \ I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}dt$$

2) Etudier la convergence des intégrales suivantes selon la valeur du paramètre α.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - 3}{x^{\alpha}} dx \qquad et \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x - sin(x)}{x^{\alpha}} dx .$$

Exercice 4: (6 points) (Intégrales de Wallis)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)\, dx :$$

1) a) Vérifier que W_n est bien défini. (0.5pts)

b) Montrer que (0.5 pts)

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)\, dx.$$

c) Montrer que la suite $(W_n)_n \geq 0$ est décroissante. (0.5 pts)

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. (1pt)

Indication : on pourra remarquer que $sin^n(x) = sin^{n-2}(x)(1 - cos^2(x))$, et utiliser une intégration par parties.

3) a)Calculer W_0 et W_1. (0.5 pts)

b) Monter que pour tout n (1pt)

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \; et \; W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

4) a) Par l'utilisation de la monotonie de (W_n), montrer que W_n est équivalent à W_{n+1} quand $n \to +\infty$. (0.5 pts)

b) On pose $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$, pour $n \geq 0$. Que peut-on dire de la suite (u_n)? (0.5 pts)

c) En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$: (1pt)

Université Abdelmalek Essaâdi

Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année universitaire 2021/2022

Filière LE-MATH, Semestre S2

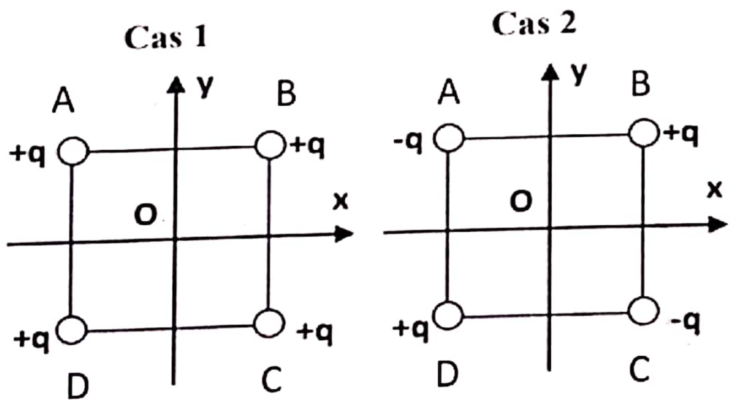
Contrôle continue
Electrostatique

Durée 1h 30 min

Exercice 1 :

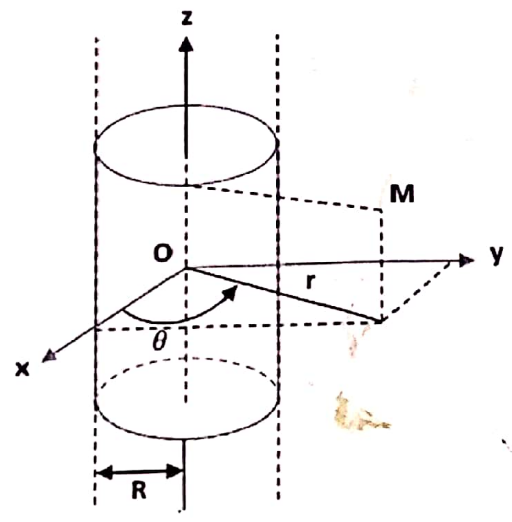
Soient quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré dont la longueur du diagonal est **2a**.

Déterminer le champ $\vec{E}$ et le potentiel V électrostatique au centre (0.0) du carré dans les deux cas suivants :



Exercice 2 :

On considère un cylindre de rayon R et de longueur infinie, chargé uniformément en surface par une densité surfacique de charges $\sigma(\sigma > 0)$. A l'aide du théorème du Gauss, on désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace crée par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe (OZ) du cylindre repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z)



1. Par des considérations de symétrie et d'invariance, déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ et les variables dont il dépend.

2.

a. définir précisément la surface de Gauss que vous utilisez(en justifiant votre choix)

b. déterminer le champ $\vec{E}(M)$en tout point de l'espace $(r < R \; et \; r > R)$.

3. En déduire le potentiel V(M) pour tous les points M de l'espace$(r < R \; et \; r > R)$.

(On prendra comme origine des potentiels $V=V_0$ en $r=0$)

Université Abdelmalek Essaâdi

Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année universitaire 2021/2022

Filière LE-Math, Semestre S2

Examen d'électrostatique
Session Normale
Durée 2h

Exercice 1 :

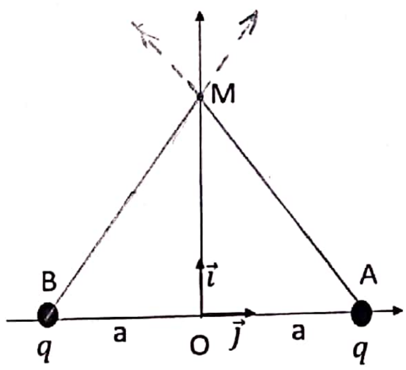
On considère deux charges ponctuelles identiques ($q > 0$) distantes de 2a et placées dans le vide en deux points A (0, a) et B (0, -a) de l'axe Oy.

1. Donner le sens et la direction du champ total $\vec{E}(M)$ au point M.

   Faire une représentation sur un schéma.

2. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ crée par ces deux charges en un point M de la médiatrice de AB. On note O le milieu de AB et on pose: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$.

3. Que devient l'expression de $\vec{E}(M)$ lorsqu'on remplace la charge q en A par –q.



Exercice 2

Trouver la charge totale pour chacune des distributions suivantes :

a. Charge linéaire λ_0 distribuée uniformément sur un cercle de rayon a. $q = \frac{Q}{\Delta U}$

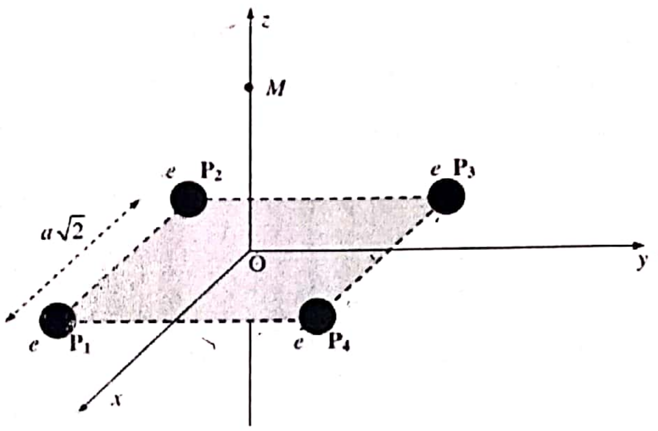
b. Charge surfacique σ_0 distribuée uniformément sur un disque de rayon a.

c. Charge surfacique σ_0 distribuée uniformément sur une sphère de rayon R.

d. Charge volumique ρ_0 distribuée uniformément dans une sphère de rayon R.

Exercice 3 :

Aux quatre sommets d'un carré de centre O et de côté $a\sqrt{2}$, situé dans le plan xOy, sont fixés quatre ions positifs. Chaque ion est assimilable à une charge ponctuelle +e.



1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$au centre O (0, 0,0) du carré.

2. Déterminer le potentiel électrique V au centre O du carré.

3. Montrer que le potentiel électrique V en un point M de l'axe Oz s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

4. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ au point M (0, 0, z).

5. Un proton de charge +e est mobile le long de l'axe z'Oz. Exprimer la force $\vec{F}$que subit le proton lorsqu'il se trouve au point M (0, 0, z).

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Contrôle 1
Module : Optique géométrique

LEM
S2
2021-2022
1h 30mn

Exercice 1 : (3 pts)

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4{,}73.10^{14}$ Hz.

On donne $C = 3{,}00.10^{8}$ $m.s^{-1}$ (vitesse de propagation de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ? **1 pt**
2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ? **1 pt**
3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu où sa vitesse est $V = 1{,}81.10^{8} m.s^{-1}$. Quelle est alors sa longueur d'onde ? Quelle est sa couleur ? **1 pt**

   On donne quelques couleurs du spectre (nm) : Vert 510-541 ; jaune 575-579 ; rouge 622-700,

Exercice 2 : (7.5pts)

Un dioptre sphérique de rayon de courbure r sépare deux milieux d'indices $n = 3/2$ et $n' = 4/3$.

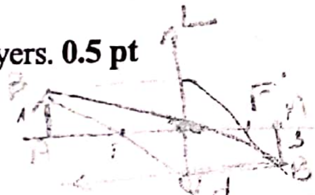
1. Écrire sans démonstration la formule de conjugaison ainsi que la formule du grandissement transverse γ d'un dioptre sphérique de rayon de courbure r séparant 2 milieux d'indices n et n'. **1 pt**
2. Exprimer les distances focales f' et f ainsi que la vergence V en fonction de r, le rayon de courbure.**1.5 pt**
3. On donne $r = -10\ cm$. Calculer numériquement f', f et V. Le dioptre est-il convergent ? **2 pts**
4. On place un objet **AB** à **50cm** en avant du dioptre. Calculer la position p' de l'image ainsi que son grandissement transversal γ. **2 pts**
5. Sur une figure, placer les foyers F' et F et l'objet A. Construire son image A. Quelle est la nature de A' ? **1 pt**

Exercice 3 : (9.5 pts)

Une lentille mince convergente (de 8 cm de diamètre) donne d'un objet AB de 1cm, réel, une image A'B', réelle, trois fois plus grande que l'objet, située à la distance $d = 32$ cm de cet objet.

Partie 1 : par construction graphique **(3 pts)**

1. Sur papier millimétré, à l'échelle 1 carreau pour 2 cm horizontalement et 1 carreau pour 1 cm verticalement, représenter l'objet et l'image à la distance considérée. **0.5 pt**
2. En traçant les rayons particuliers, rechercher la position de la lentille et de ses foyers. **0.5 pt**
3. Que valent $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OF}$, $\overline{OF'}$? **2 pts**



Partie 2 : par le calcul **(5.5 pts)**

L'objectif est ici de retrouver par le calcul les résultats de la partie 1. Pour cela, on ne s'appuie que sur les données initiales.

4. Rappeler la définition du grandissement noté γ. Dans quelles conditions avons-nous $\gamma < 0$ et $|\gamma| > 1$? **1.5 pt**
5. Calculer le grandissement, puis déduisez-en que $\overline{OA}$ a pour expression : $\overline{OA} = \frac{\overline{AA'}}{(\gamma - 1)}$

   Une démonstration claire est attendue. Calculer ensuite $\overline{OA}$. **1.5 pt**
6. En déduire la distance lentille-image. **0.5 pt**
7. Rappeler la relation de conjugaison d'une lentille mince convergente. Que vaut alors la distance focale de cette lentille ? **1 pt** P' d P
8. En déduire sa vergence. **1 pt**

Partie 3 : Comparaison des méthodes **(1 pt)**

9. Comparer les résultats obtenus pour $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OF}$, $\overline{OF'}$. Expliquer les écarts obtenus (sources d'erreurs). **1 pt**

AU : 2021_2022
Durée : 2 H
Filière : LEM S2

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

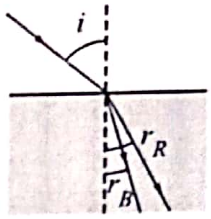
Examen du module : Optique géométrique
Session Normale

Exercice 1 : (6.5pts)

Le tableau ci-contre donne les longueurs d'onde, dans le vide, de deux radiations monochromatiques et les indices correspondants pour deux types de verre différents.

Couleur	λ_0(nm)	n (crown)	n (flint)
rouge	656,3	1,504	1,612
bleu	486,1	1,521	1,671

1. Calculer les fréquences ν_R et ν_B de ces ondes lumineuses. Dépendent-elles de l'indice du milieu ? **(2.5 pts)**
   On prendra **$c_0 = 2,998.10^8$ m.s^{-1}.**
2. Calculer les célérités c_R *et* c_B et les longueurs d'onde λ_R *et* λ_B de la radiation rouge dans les deux verres. **(1pt)**
3. Un rayon de lumière blanche arrive sur un dioptre plan air-verre, sous l'incidence **i = 60°**. L'indice de l'air est pris égal à **1**.



   a. Rappeler les lois de Descartes relatives à la réfraction de la lumière. **(0.5 pt)**
   b. Calculer l'angle que fait le rayon rouge avec le rayon bleu ($\Delta r = r_R - r_B$) pour un verre crown, puis pour un verre flint. **(2 pts)**
   c. Quel est le verre le plus dispersif (sachant que le verre le plus dispersif est celui qui a l'angle entre les deux rayons le plus important) ? **(0.5 pt)**

Exercice 2 : (6.5pts)

I. Soit un dioptre sphérique de sommet S et de centre C qui sépare deux milieux d'indices n et n'.

1. Rappeler sans démonstration la relation de conjugaison avec origine au sommet pour un objet **A** et son image **A'**. **(0.5 pt)**
2. En déduire les expressions des distances focales f et f' en fonction de n, n' et $\overline{SC}$. **(0.5 pt)**

II. Soit un dioptre sphérique convexe, sépare deux milieux d'indices $n = 1$ (air) et $n' = 1,5$ (verre). De sommet S de centre C. son rayon de courbure est de **20 cm**. On cherche à déterminer l'image qu'il donne d'un objet **AB** de hauteur **1,5 cm.**

1. Quels sont la position, la nature et le grandissement de l'image dans les deux cas suivants :
   a. L'objet et réel situé à 20 cm de sommet S? **(1.5 pt)**
   b. L'objet et virtuel situé à 10 cm de sommet S? **(1.5 pt)**
2. Donner pour les deux cas les distances focales objet et images f et f' du dioptre sphérique ? **(1 pt)**
3. Déduire la nature du dioptre (convergent ou divergent)? **(0.5 pt)**
   a. Sur deux figures distinctes, construire l'image des deux objets précédents (***échelle : 1/10 sur l'axe horizontale***). **(1 pt)**

Exercice 3 : (7.5pts)

Un objet AB de taille $1,0\ cm$ est placé $5\ cm$ avant le centre optique O d'une lentille convergente, de distance focale $f' = 2,5\ cm$ (AB est perpendiculaire à l'axe optique).

1) Calculer la vergence de la lentille. **(1 pt)**
2) Construire l'image $A'B'$ de AB en utilisant les trois rayons «utiles» (***Choisir une échelle adéquate). (1.5 pt)***
3) Mesurer alors $\overline{A'B'}$ et $\overline{OA'}$. **(1 pt)**
4) Retrouver $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ par le calcul. **(2 pt)**
5) Calculer le grandissement transverse γ. **(1 pt)**
6) Déduire les caractéristiques de l'image ? **(05 pt)**