Algèbre 1: Généralités et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Algèbre 1: Généralités et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- **Chapitre 1 : Notions de logique**
  - Fondements de la logique mathématique : connecteurs logiques, tables de vérité, lois logiques et quantificateurs.
  - Techniques de raisonnement formel utilisées en mathématiques.

- **Chapitre 1 : Notions de logique**
  - Fondements de la logique mathématique : connecteurs logiques, tables de vérité, lois logiques et quantificateurs.
  - Techniques de raisonnement formel utilisées en mathématiques.
- **Chapitre 2 : Ensembles et applications**
  - Théorie des ensembles : opérations sur les ensembles, relations et applications.
  - Manipulation des ensembles et compréhension de leurs rôles dans les structures mathématiques.

Algèbre 1: Généralités et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- **Chapitre 1 : Notions de logique**
  - Fondements de la logique mathématique : connecteurs logiques, tables de vérité, lois logiques et quantificateurs.
  - Techniques de raisonnement formel utilisées en mathématiques.
- **Chapitre 2 : Ensembles et applications**
  - Théorie des ensembles : opérations sur les ensembles, relations et applications.
  - Manipulation des ensembles et compréhension de leurs rôles dans les structures mathématiques.
- **Chapitre 3 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**
  - Propriétés arithmétiques des entiers : notions de divisibilité, théorèmes fondamentaux.

Notions de Logique

École Normale Supérieure de Tétouan

October 25, 2024

Plan

Qu'est-ce que la logique ?

Définition

La logique est la branche des mathématiques et de la philosophie qui étudie les principes du raisonnement correct. Elle permet de structurer les idées de manière claire et précise en utilisant des règles formelles.

Qu'est-ce que la logique ?

Définition

La logique est la branche des mathématiques et de la philosophie qui étudie les principes du raisonnement correct. Elle permet de structurer les idées de manière claire et précise en utilisant des règles formelles.

Objectifs de la logique :

- Identifier les relations entre les propositions.
- Valider les arguments à travers des règles rigoureuses.
- Manipuler des énoncés mathématiques de manière systématique.

Assertions

Définition

Une **assertion** est une phrase déclarative qui peut être soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

Assertions

Définition

Une **assertion** est une phrase déclarative qui peut être soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

Exemples d'assertions :

- $2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.

Assertions

Définition

Une **assertion** est une phrase déclarative qui peut être soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

Exemples d'assertions :

- $2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.
- "Le ciel est rouge" est une assertion, qui peut être vraie ou fausse selon le contexte.

Assertions

Définition

Une **assertion** est une phrase déclarative qui peut être soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

Exemples d'assertions :

- $2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.
- "Le ciel est rouge" est une assertion, qui peut être vraie ou fausse selon le contexte.
- $5 < 3$ est une assertion fausse.

Prédicats

Définition

Un **prédicat** est une expression contenant une ou plusieurs variables et devient une assertion lorsqu'on remplace ces variables par des valeurs spécifiques.

Prédicats

Définition

Un **prédicat** est une expression contenant une ou plusieurs variables et devient une assertion lorsqu'on remplace ces variables par des valeurs spécifiques.

Exemple de prédicat :

$$P(x) : \text{“x est un nombre pair”}.$$

Prédicats

Définition

Un **prédicat** est une expression contenant une ou plusieurs variables et devient une assertion lorsqu'on remplace ces variables par des valeurs spécifiques.

Exemple de prédicat :

$$P(x) : \text{“x est un nombre pair”}.$$

- Si $x = 4$, $P(4)$ est "4 est un nombre pair" (vrai).

Prédicats

Définition

Un **prédicat** est une expression contenant une ou plusieurs variables et devient une assertion lorsqu'on remplace ces variables par des valeurs spécifiques.

Exemple de prédicat :

$$P(x) : \text{“x est un nombre pair”}.$$

- Si $x = 4$, $P(4)$ est “4 est un nombre pair” (vrai).
- Si $x = 7$, $P(7)$ est “7 est un nombre pair” (faux).

Connecteurs Logiques

Les connecteurs logiques permettent de combiner plusieurs assertions ou prédicats. Les principaux connecteurs sont :

- **Conjonction** ($\wedge$) : “et”
- **Disjonction** ($\vee$) : “ou”
- **Négation** ($\neg$) : “non”
- **Implication** ($\Rightarrow$) : “si … alors”
- **Équivalence** ($\Leftrightarrow$) : “si et seulement si”

Conjonction

Définition

La **conjonction** de deux assertions P et Q, notée $P \wedge Q$, est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

Conjonction

Définition

La **conjonction** de deux assertions P et Q, notée $P \wedge Q$, est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 3 < 5$$

$P \wedge Q$ est vraie, car P est vraie et Q est vraie.

Disjonction

Définition

La **disjonction** de deux assertions P et Q, notée $P \vee Q$, est vraie si au moins une des deux assertions P ou Q est vraie.

Disjonction

Définition

La **disjonction** de deux assertions P et Q, notée $P \vee Q$, est vraie si au moins une des deux assertions P ou Q est vraie.

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 3 > 5$$

$P \vee Q$ est vraie, car P est vraie, même si Q est fausse.

Négation

Définition

La **négation** d'une assertion P, notée $\bar{P}$ ou $\neg P$, est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Négation

Définition

La **négation** d'une assertion P, notée $\bar{P}$ ou $\neg P$, est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Exemple :

$$P : 2 \text{ est un nombre pair.}$$

$$\bar{P} \text{ est fausse, car } P \text{ est vraie.}$$

Implication

Définition

L'**implication** entre deux assertions P et Q, notée $P \Rightarrow Q$, signifie que si P est vraie, alors Q doit être vraie. Elle est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse.

Implication

Définition

L'**implication** entre deux assertions P et Q, notée $P \Rightarrow Q$, signifie que si P est vraie, alors Q doit être vraie. Elle est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse.

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 4 > 3$$

$P \Rightarrow Q$ est vraie, car P est vraie et Q est vraie.

Équivalence

Définition

L'**équivalence** entre deux assertions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, signifie que P et Q ont la même valeur de vérité (toutes deux vraies ou toutes deux fausses).

Équivalence

Définition

L'**équivalence** entre deux assertions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, signifie que P et Q ont la même valeur de vérité (toutes deux vraies ou toutes deux fausses).

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 4 = 2^2$$

$P \Leftrightarrow Q$ est vraie, car P et Q sont tous les deux vraies.

Tables de Vérité

Si on note "P est vraie par V" et "P est fausse par F", alors la table de vérité pour les connecteurs : négation $\neg$, conjonction ($\wedge$), disjonction ($\vee$), implication ($\Rightarrow$), et équivalence ($\Leftrightarrow$) est la suivante:

Table de vérité

P	$\neg P$	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V

Application

- Montrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \bigvee Q$.
- Montrer que $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $(P \Rightarrow Q)$et$(Q \Rightarrow P)$.

Double Négation

Définition

$\neg(\neg P)$ est équivalent à P. Si la négation d'une assertion est fausse, alors l'assertion elle-même est vraie.

Double Négation

Définition

$\neg(\neg P)$ est équivalent à P. Si la négation d'une assertion est fausse, alors l'assertion elle-même est vraie.

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4$$

Contraposée

Définition

L'implication $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Contraposée

Définition

L'implication $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 4 > 3$$

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est également vraie.

Commutativité des Opérations Logiques

Définition

Les opérations $\wedge$ (conjonction) et $\vee$ (disjonction) sont commutatives. Cela signifie que :

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \quad \text{et} \quad P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Commutativité des Opérations Logiques

Définition

Les opérations $\wedge$ (conjonction) et $\vee$ (disjonction) sont commutatives. Cela signifie que :

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \quad \text{et} \quad P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 3 < 5$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \text{ et } P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P.$$

Associativité des Opérations Logiques

Définition

Les opérations $\wedge$ (conjonction) et $\vee$ (disjonction) sont associatives. Cela signifie que :

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \quad \text{et} \quad (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

Associativité des Opérations Logiques

Définition

Les opérations $\wedge$ (conjonction) et $\vee$ (disjonction) sont associatives. Cela signifie que :

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \quad \text{et} \quad (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 3 < 5, \quad R : 1 + 1 = 2$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R).$$

Les Lois de De Morgan

Définition

Les lois de De Morgan permettent de transformer des négations de conjonctions et disjonctions :

$$\neg(P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q \quad \text{et} \quad \neg(P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$$

Les Lois de De Morgan

Définition

Les lois de De Morgan permettent de transformer des négations de conjonctions et disjonctions :

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \quad \text{et} \quad \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

Exemple :

$$P : 2 + 2 = 4, \quad Q : 3 > 5$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q.$$

Quantificateurs

Définitions

Les quantificateurs sont utilisés pour exprimer des propriétés sur des ensembles :

- **Quantificateur Universel** ($\forall$) : "pour tout" ou "tous".
- **Quantificateur Existant** ($\exists$) : "il existe" ou "au moins un".

Négations des Quantificateurs

Définitions

Les négations des quantificateurs sont les suivantes :

- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

Négations des Quantificateurs

Définitions

Les négations des quantificateurs sont les suivantes :

- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

Exemple 1:

- Proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$
- Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0.$

Négations des Quantificateurs

Définitions

Les négations des quantificateurs sont les suivantes :

- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

Exemple 1:

- Proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.
- Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0$.

Exemple 2:

- Proposition : $\exists x \in \mathbb{Z}$ tel que $x > 10$.
- Négation : $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \leq 10$.

Quantificateurs Multiples

Combinaison

On peut combiner plusieurs quantificateurs. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \, (x + y = 0)$$

signifie que pour tout entier x, il existe un entier y tel que leur somme est nulle.

Quantificateurs Multiples

Combinaison

On peut combiner plusieurs quantificateurs. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\,(x + y = 0)$$

signifie que pour tout entier x, il existe un entier y tel que leur somme est nulle.

Interprétation : Cela implique que chaque entier a un opposé qui est aussi un entier.

Permutation des Quantificateurs Identiques

Règle

Lorsque plusieurs quantificateurs identiques apparaissent dans une proposition, ils peuvent être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Permutation des Quantificateurs Identiques

Règle

Lorsque plusieurs quantificateurs identiques apparaissent dans une proposition, ils peuvent être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}\,(x + y = y + x)$$

Cela peut être réécrit comme :

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}\,(x + y = y + x)$$

Les deux énoncés signifient que l'addition est commutative pour tous les entiers.

Non-Permutabilité des Quantificateurs Différents

Règle

Les quantificateurs de types différents ne peuvent pas être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Non-Permutabilité des Quantificateurs Différents

Règle

Les quantificateurs de types différents ne peuvent pas être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\,(y > x)$
- $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}\,(y > x)$

Non-Permutabilité des Quantificateurs Différents

Règle

Les quantificateurs de types différents ne peuvent pas être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\,(y > x)$
- $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}\,(y > x)$

Interprétation :

- Le premier énoncé signifie : "Pour tout entier x, il existe un entier y tel que y est plus grand que x." Cela est vrai, car pour tout x, on peut prendre $y = x + 1$.

Non-Permutabilité des Quantificateurs Différents

Règle

Les quantificateurs de types différents ne peuvent pas être permutés sans changer la signification de l'énoncé.

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\,(y > x)$
- $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}\,(y > x)$

Interprétation :

- Le premier énoncé signifie : "Pour tout entier x, il existe un entier y tel que y est plus grand que x." Cela est vrai, car pour tout x, on peut prendre $y = x + 1$.
- Le second énoncé signifie : "Il existe un entier y qui est plus grand que tous les entiers x." Cela est faux, car il n'y a pas d'entier qui soit plus grand que tous les autres entiers.

Introduction aux Méthodes de Raisonnement

Les méthodes de raisonnement classiques sont essentielles pour structurer des arguments en mathématiques. Les méthodes principales sont :

- **Raisonnement direct**
- **Raisonnement par contraposition**
- **Raisonnement par Contre exemple**
- **Raisonnement par l'absurde**
- **Raisonnement par Récurrence**

Raisonnement Direct

Définition

Le raisonnement direct consiste à établir la vérité d'une assertion en utilisant des définitions, des axiomes ou des théorèmes connus.

Raisonnement Direct

Définition

Le raisonnement direct consiste à établir la vérité d'une assertion en utilisant des définitions, des axiomes ou des théorèmes connus.

Exemple : Prouver que la somme de deux entiers pairs est pair.

Raisonnement Direct

Définition

Le raisonnement direct consiste à établir la vérité d'une assertion en utilisant des définitions, des axiomes ou des théorèmes connus.

Exemple : Prouver que la somme de deux entiers pairs est pair.
Pour prouver que la somme de deux entiers pairs est pair, on peut dire :

$$\text{Soit } a = 2m \text{ et } b = 2n \text{ pour des entiers } m \text{ et } n.$$

Alors,

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$

Comme $m + n$ est un entier, $a + b$ est pair.

Raisonnement par Contraposition

Définition

Cette méthode consiste à prouver l'implication $P \Rightarrow Q$ en prouvant que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Raisonnement par Contraposition

Définition

Cette méthode consiste à prouver l'implication $P \Rightarrow Q$ en prouvant que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrons que si n^2 est pair, alors n est pair.

Raisonnement par Contraposition

Définition

Cette méthode consiste à prouver l'implication $P \Rightarrow Q$ en prouvant que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrons que si n^2 est pair, alors n est pair.

- Hypothèse : n est impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.
- Calculons n^2 :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

- Conclusion : Comme $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, alors n^2 est impair.

Raisonnement par Contraposition

Définition

Cette méthode consiste à prouver l'implication $P \Rightarrow Q$ en prouvant que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : Soit n un entier naturel. Montrons que si n^2 est pair, alors n est pair.

- Hypothèse : n est impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.
- Calculons n^2 :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

- Conclusion : Comme $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, alors n^2 est impair.

Ainsi, par contraposée, si n^2 est pair, alors n est pair.

Raisonnement par l'Absurde

Définition

Cette méthode consiste à supposer que l'énoncé à prouver est faux, puis à montrer que cela conduit à une contradiction.

Raisonnement par l'Absurde

Définition

Cette méthode consiste à supposer que l'énoncé à prouver est faux, puis à montrer que cela conduit à une contradiction.

Exemple : Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnement par l'Absurde

Définition

Cette méthode consiste à supposer que l'énoncé à prouver est faux, puis à montrer que cela conduit à une contradiction.

Exemple : Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Pour prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire, il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Cela implique que p^2 est pair, donc p est pair. Si $p = 2k$, alors :

$$2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \text{ est pair, donc } q \text{ est pair.}$$

Cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Raisonnement par Contre-Exemple

Définition

Cette méthode consiste à prouver qu'une assertion est fausse en trouvant un exemple qui contredit l'énoncé.

Raisonnement par Contre-Exemple

Définition

Cette méthode consiste à prouver qu'une assertion est fausse en trouvant un exemple qui contredit l'énoncé.

Exemples :

• L'assertion P : "$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n^2 + 1$ est un multiple de 3" est fausse car, par exemple, $n = 3$ ne vérifie pas cette propriété. C'est un contre-exemple.

Raisonnement par Contre-Exemple

Définition

Cette méthode consiste à prouver qu'une assertion est fausse en trouvant un exemple qui contredit l'énoncé.

Exemples :

• L'assertion P : "$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n^2 + 1$ est un multiple de 3" est fausse car, par exemple, $n = 3$ ne vérifie pas cette propriété. C'est un contre-exemple.

• Pour prouver que "tous les nombres premiers sont impairs", on peut donner le contre-exemple 2, qui est un nombre premier et pair. Ainsi, l'assertion est fausse.

Raisonnement par récurrence Simple

Le raisonnement par récurrence est une méthode puissante pour prouver des propriétés sur les entiers naturels.

- Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
- Pour prouver que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on adopte le schéma suivant :

Raisonnement par récurrence Simple

Le raisonnement par récurrence est une méthode puissante pour prouver des propriétés sur les entiers naturels.

- Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
- Pour prouver que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on adopte le schéma suivant :

Étapes du raisonnement :

1. **Initialisation** : Montrer que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : On montre que si la propriété $P(n)$ est vraie à un certain rang $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

C'est-à-dire, on montre l'implication

$$P(n_0) \text{ est vraie}, \quad P(n) \implies P(n+1)$$

Raisonnement par récurrence Simple

Le raisonnement par récurrence est une méthode puissante pour prouver des propriétés sur les entiers naturels.

- Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
- Pour prouver que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on adopte le schéma suivant :

Étapes du raisonnement :

1. **Initialisation** : Montrer que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : On montre que si la propriété $P(n)$ est vraie à un certain rang $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

C'est-à-dire, on montre l'implication

$$P(n_0) \text{ est vraie}, \quad P(n) \implies P(n+1)$$

Conclusion : Si les deux étapes sont vérifiées, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Étape 1 : Initialisation

Pour $n = 0$, on a :

$$S_0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence Simple

Étape 2 : Hérédité

Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence Simple

Étape 2 : Hérédité
Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On a :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie. Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence Simple

Application : Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a :

$$n^2 \leq 2^n$$

Raisonnement par récurrence Simple

Application : Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a :

$$n^2 \leq 2^n$$

Étape 1 : Initialisation
Pour $n = 4$, on vérifie :

$$4^2 = 16 \quad \text{et} \quad 2^4 = 16$$

Donc, $P(4)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence Simple

Étape 2 : Hérédité

Supposons que pour un $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$ (hypothèse de récurrence).
Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Raisonnement par récurrence Simple

Étape 2 : Hérédité
Supposons que pour un $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$ (hypothèse de récurrence).
Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

On a :

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

Par hypothèse de récurrence, $2^n \geq n^2$, donc :

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$$

Or, pour $n \geq 4$, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$, donc $P(n+1)$ est vraie. Ainsi, $n^2 \leq 2^n$ pour tout $n \geq 4$.

Principe de la récurrence forte

Récurrence forte :

- Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède ainsi :

Principe de la récurrence forte

Récurrence forte :

- Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède ainsi :

Étapes du raisonnement :

1. **Initialisation** : on montre que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : on montre que si la propriété est vraie jusqu'à un certain rang n, (i.e. $P(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$), alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

Autrement dit, on montre l'implication

$$P(n_0) \text{ est vraie}, \quad (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1)) \implies P(n)$$

Principe de la récurrence forte

Récurrence forte :

- Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède ainsi :

Étapes du raisonnement :

1. **Initialisation** : on montre que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : on montre que si la propriété est vraie jusqu'à un certain rang n, (i.e. $P(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$), alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

Autrement dit, on montre l'implication

$$P(n_0) \text{ est vraie}, \quad (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1)) \implies P(n)$$

Conclusion : Si les deux étapes sont vérifiées, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Principe de la récurrence forte

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ possède un diviseur premier.

Principe de la récurrence forte

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ possède un diviseur premier.
Étape 1 : Initialisation
Pour $n = 2$, il est clair que 2 est un nombre premier et possède lui-même comme diviseur. Donc, $P(2)$ est vraie.

Principe de la récurrence forte

Étape 2 : Hérédité
Supposons que pour tout k tel que $2 \leq k < n$, k possède un diviseur premier (hypothèse de récurrence).
Montrons que n possède aussi un diviseur premier.

Principe de la récurrence forte

Étape 2 : Hérédité
Supposons que pour tout k tel que $2 \leq k < n$, k possède un diviseur premier (hypothèse de récurrence).
Montrons que n possède aussi un diviseur premier.
Deux cas possibles :

- Si n est un nombre premier, alors n possède un diviseur premier qui est lui-même.
- Si n est composé, il existe un entier d, tel que $2 \leq d < n$ et d divise n.

Principe de la récurrence forte

Étape 2 : Hérédité
Supposons que pour tout k tel que $2 \leq k < n$, k possède un diviseur premier (hypothèse de récurrence).
Montrons que n possède aussi un diviseur premier.
Deux cas possibles :

- Si n est un nombre premier, alors n possède un diviseur premier qui est lui-même.
- Si n est composé, il existe un entier d, tel que $2 \leq d < n$ et d divise n.

Par hypothèse de récurrence, d possède un diviseur premier. Ce diviseur premier de d est aussi un diviseur de n. Donc, n possède un diviseur premier.

Principe de la récurrence forte

Application: Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.