Université Abdelmalek Essadi
Ecole Normale Supérieure
Martil

المدرسة العليا للأساتذة
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

LE-Mathématiques 2023/2024
Semestre 1

Feuille de TD n° 1

Exercice 1. *Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes de G*

1. *Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.*
2. *Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.*

Exercice 2. *soit la loi interne Δ définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par*

$$a \Delta b = ab + 3(a+b) + 6.$$

1. *Montrer que (E, Δ) est un groupe abélien.*
2. *Montrer que $F =]-3, +\infty[$ est un sous groupe de E.*
3. *Soit l'application $f : (E, \Delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, .)$, définie par*

$$f(a) = \alpha a + 3$$

- *Déterminer α pour que f soit un morphisme de groupe.*
- *Déterminer $Ker\, f$.*
- *Est-ce que f est un isomorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1}.*

Exercice 3. *On considère l'ensemble:*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ m + n\sqrt{2}; \quad m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. *Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.*
2. *On note par $J(m + n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2$. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on a $J(ab) = J(a)J(b)$.*
3. *En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrivant sous la forme de $m + n\sqrt{2}$ avec $m^2 - 2n^2 = \pm 1$.*

Exercice 4. *Soit D l'ensemble des nombres décimaux définie par*

$$D = \left\{ \frac{p}{10^n}, \ (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

1. *Montrer que D est un sous anneau de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$.*
2. *L'ensemble D est-il un sous corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$?*
3. *soit l'application $\varphi : (\mathbb{Q}, +, \times) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \times)$ définie par*

$$\varphi(x) = \frac{x}{10^n} \ n \in \mathbb{N}$$

Est-ce que l'application φ est un morphisme d'anneaux?

Exercice 5.
1. *Monter que dans un anneau A, si $x \cdot y$ est inversible, alors x et y sont inversibles.*
2. *Vérifier que dans un anneau A, un élément inversible n'est pas diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.*
3. *Soit A un anneau intègre commutatif fini. Démontrer que A est un corps.*