Espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) :
Un ensemble E muni de 2 lois
- loi interne $(+)$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif
- " externe $(\times)$, qui est une application $\mathbb{K} \times E \to E$ telle que :
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2$: $\boxed{(\alpha+\beta)\times x = \alpha x + \beta x}$; $\boxed{\alpha \times (x+y) = \alpha x + \alpha y}$;
$\boxed{\alpha \times (\beta \times x) = (\alpha \times \beta) \times x}$; $\boxed{1 \times x = x}$

Chapitre 1 : Espaces affines

- Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps, noté $\mathbb{K}$.
- En abrégé d'éléments neutres "0" pour l'addition, et "1" pour la multiplication.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.
- Soit un espace vectoriel $(V,+,\times)$ sur le corps $\mathbb{K}$, noté V, en abrégé d'élément neutre "$\vec{0}$".
- Les éléments de V sont appelés les vecteurs : $\vec{u}, \vec{v}, \dots$
- Soit E un ensemble non vide. Les éléments de E sont appelés les points : $A, B, C, \dots$
- Un couple d'éléments de E est un élément de $E \times E$, sera appelé un bipoint, le premier élément d'un tel couple sera appelé origine, et le deuxième sera appelé extrémité.

1 - Espaces affines :

Définition

Soit V un espace vectoriel,
Un espace affine de direction V est un ensemble E non vide muni d'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow V$, telle que :

i) $\forall A, B, C \in E$, $\varphi((A,B)) + \varphi((B,C)) = \varphi((A,C))$
addition de vecteurs
"Relation de Shales"

ii) Pour tout $A \in E$, l'application $\varphi_A : E \longrightarrow V$, $M \longmapsto \varphi_A(M) = \varphi((A,M))$ est bijective.

La dimension de E est celle de sa direction, et on note la direction de E par : $\vec{E}$

Exemples :

1) Posons $E = \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel)

Soit : $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$((x,y),(x',y')) \longmapsto (x'-x, y'-y)$

Alors E est un espace affine de direction $\vec{E} = \vec{\mathbb{R}^2}$, et de dimensio
2 (vérifier les deux conditions)

2) Posons $E = \mathbb{K}^n$; $n \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel)

Scanné avec CamScanner

Soit : $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$((a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n}) \longmapsto (b_i - a_i)_{1\leq i\leq n}$$

Alors : E est un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathbb{K}^n}$, et de dimension n (vérifier les deux conditions)

Espace affine plus général

Espace vectoriel

3) Soit V un espace vectoriel

on considère l'application : $\varphi : V \times V \longrightarrow V$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{v} - \vec{u}$$

Alors : V est un espace affine de direction $\vec{V} = V$

Proposition :

> Si l'application φ vérifie la relation de Schales, et s'il existe un point $A \in E$ tel que φ_A est bijective,
> Alors : pour tout $O \in E$, φ_O est bijective

Démonstration : Soit E un ensemble non vide,

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel,

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \vec{E}$ une application qui vérifie la relation de Shales,

on suppose qu'il existe un point $A \in E$ tel que : $\varphi_A : E \longrightarrow \vec{E}$, $M \longrightarrow \varphi_A(M) = \varphi((A,M))$ est bijective.

Soit $O \in E$,

montrons que : $\varphi_O : E \longrightarrow \vec{E}$, $M \longrightarrow \varphi_O(M) = \varphi((O,M))$ est bijective.

* L'injectivité :

Soient $B, C \in E$,

on suppose que : $\varphi_O(B) = \varphi_O(C)$

$$\varphi_O(B) = \varphi_O(C) \Rightarrow \varphi((O,B)) = \varphi((O,C))$$
$$\Rightarrow \cancel{\varphi((O,A))} + \varphi((A,B)) = \cancel{\varphi((O,A))} + \varphi((A,C))$$
$$\Rightarrow \varphi_A(B) = \varphi_A(C)$$
$$\Rightarrow B = C \text{ (car } \varphi_A \text{ est bijective, d'où injective)}$$

donc : φ_O est injective.

* La surjectivité :

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$,

alors: $\exists \vec{v} \in \vec{E}$ tel que: $\vec{u} = \vec{v} - \varphi_A(O)$ $\quad$ ($\varphi_A(O) \in \vec{E}$ fixé)

alors: $\exists M \in E$, $\varphi_A(M) = \vec{v}$

$$\begin{aligned}\varphi_A(M) &= \varphi((A,M)) \\ &= \varphi((A,O)) + \varphi((O,M)) \\ &= \varphi_A(O) + \varphi_O(M)\end{aligned}$$

donc:
$$\begin{aligned}\varphi_O(M) &= \varphi_A(M) - \varphi_A(O) \\ &= \vec{v} - \varphi_A(O) \\ &= \vec{u}\end{aligned}$$

donc: φ_O est surjective.

Alors: φ_O est bijective.

Notation :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine,

Pour tout bipoint (A,B) de $E \times E$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\varphi((A,B))$

Donc: 1) $\varphi((A,B)) = \overrightarrow{AB}$

2) Relation de Chales: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

3) $\forall A \in E, \exists \vec{u} \in \vec{E}, \exists! M \in E, \overrightarrow{AM} = \vec{u}$

Propriétés :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine,

Pour tous points $A, B, C, D, A_1, A_2, \dots, A_n$ dans E, on a:

1) $\varphi((A,A)) = \vec{0}$ (c-à-d $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

4) $\overrightarrow{A_1A_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$

5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ "Relation du parallélogramme"

Translation :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine,

Alors, $\forall A \in E, \forall \vec{u} \in \vec{E}, \exists! B \in E, \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

On note: $B = A + \vec{u}$

Scanné avec CamScanner

Alors : $B = A + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Donc, on peut écrire : $B = A + \overrightarrow{AB}$

Définition :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine.

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$,

on appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application notée $t_{\vec{u}} : E \to \vec{E}$ définie par : $\forall A \in E$, $t_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$

(1) **Exercices**

A et B sont deux points d'un espace affine E, $t_{\vec{u}}$ est une translation sur E et A' est l'image de A par $t_{\vec{u}}$.

Exprimer $t_{\vec{u}}(B)$ en fonction de A, B et A'.

Proposition :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine.

On note $T(E)$ l'ensemble des translations sur E.

Alors : $(T(E), \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe au groupe additif $(\vec{E}, +)$.

Démonstration :

i) "$\circ$" est une loi de composition interne sur $T(E)$.

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$,

Soit $A \in E$,

$$(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}})(A) = t_{\vec{u}}(t_{\vec{v}}(A))$$
$$= t_{\vec{u}}(A + \vec{v})$$
$$= A + \vec{v} + \vec{u}$$

puisque $\vec{v} + \vec{u} \in \vec{E}$

alors : $(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}})(A)$ est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{u}$.

De plus : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v} + \vec{u}}$

Scanné avec CamScanner

ii) Commutativité :

on a trouvé que : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$

$= t_{\vec{u}+\vec{v}}$ $(\vec{v}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{v})$

$= t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

donc : "o" est commutative.

iii) Associativité :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$,

- $(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}) \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}+\vec{u}} \circ t_{\vec{w}}$

$= t_{\vec{w}+\vec{v}+\vec{u}}$

- $t_{\vec{u}} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}) = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{w}+\vec{v}}$

$= t_{\vec{w}+\vec{v}+\vec{u}}$

d'où, $(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}) \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{u}} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}})$

donc : "o" est associative.

iv) Elément neutre :

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$: $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{0}} = t_{\vec{0}+\vec{u}}$

$= t_{\vec{u}}$

donc : $e = t_{\vec{0}}$

v) Elément symétrie :

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$: $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}+\vec{u}}$

$= t_{\vec{0}}$

donc : $t_{-\vec{u}}$ est le symétrique de $t_{\vec{u}}$

vi) $(T(E), \circ)$ est isomorphe à $(\vec{E}, +)$

Considérons : $h : \vec{E} \longrightarrow T(E)$ (Mq h est une application bijective)

$\vec{u} \longrightarrow t_{\vec{u}}$

2- Repère d'un espace affine :

Définition :

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un espace affine.

On suppose que $\dim(\vec{E}) = n \in \mathbb{N}^*$

- Un repère de E est la donnée d'un $(n+1)$-uplet $R = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où O est un point de E et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\vec{E}$.
- O est appelée l'origine de repère R,

Scanné avec CamScanner

- $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sont appelés les vecteurs de la base de repère R
- Pour chaque $M \in E$, il existe un unique $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que : $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$
- le n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est appelé les coordonnées de M dans le repère R. On note $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ou $M\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$

Remarque :

Soient $A(a_1, \dots, a_n)$ et $B(b_1, \dots, b_n)$ deux points dans un espace affine E muni d'un repère R,

alors : $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$ (Même par Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$)

Proposition :

Soient $R = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $R' = (O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ deux repères d'un espace affine E,

Soit $M \in E$,

On suppose que :
- X est la colonne de M dans R
- X' est la colonne de M dans R'
- P est la matrice de passage de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ à $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$
- B est la colonne des coordonnées de O' dans R

Alors : $X = B + PX'$

Démonstration :

on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

3- Sous-espaces affines :

Proposition :

Soit (E, φ) un espace affine de direction $\vec{E}$,

Soit V un sous-ensemble de E tel que : il existe un point $A \in V$, $\varphi_A(V)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

Alors, pour tout $B \in V$, $\varphi_B(V) = \varphi_A(V)$

Scanné avec CamScanner

Démonstration:

$$\varphi_A(V) = \{\overrightarrow{AM},\ M \in V\}$$

Soit $B \in V$,

$$\varphi_B(V) = \{\overrightarrow{BM},\ M \in V\}$$

$\varphi_B(V) \subset \varphi_A(V)$?

Soit $M \in V$,

$$\varphi_B(M) = \overrightarrow{BM}$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$$
$$\varphi_B(M) = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \varphi_A(M) - \varphi_A(B)$$

puisque: $M, B \in V \Rightarrow \varphi_A(M), \varphi_A(B) \in \varphi_A(V)$

puisque: $\varphi_A(V)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$,

Alors: $\varphi_A(M) - \varphi_A(B) \in \varphi_A(V)$

d'où, $\varphi_B(M) \in \varphi_A(V)$

d'où, $\varphi_B(V) \subset \varphi_A(V)$

$\varphi_A(V) \subset \varphi_B(V)$?

Soit $M \in V$,

$$\varphi_A(M) = \overrightarrow{AM}$$

alors: $\exists! N \in E,\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}$

alors: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$

alors: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$

$$= \underbrace{\varphi_A(M)}_{\in \varphi_A(V)} + \underbrace{\varphi_A(B)}_{\in \varphi_A(V)}$$

donc, $\overrightarrow{AN} \in \varphi_A(V)$

d'où: $N \in V$

alors: $\overrightarrow{BN} \in \varphi_B(V) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \in \varphi_B(V)$

d'où: $\varphi_A(M) \in \varphi_B(V)$

donc, $\varphi_A(V) \subset \varphi_B(V)$

Définition:

Soient (E, φ) un espace affine de direction $\vec{E}$,
Soit V un sous-ensemble de E,
On dit que V est un sous-espace affine de E, s'il existe un point $A \in V$ tel que: $\varphi_A(V)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

Scanné avec CamScanner

on dit que V est le sous-espace affine passant par A est dérigé par $\vec{V} = \varphi_A(V) = \{\overrightarrow{AM} / M \in V\}$

Par définition de $\vec{V}$, on a : $V = \{A + \vec{u} / \vec{u} \in \vec{V}\}$

on note : $V = A + \vec{V}$

(2) Exercice :

Soit A un point d'espace affine E de direction $\vec{E}$,

Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

Montrer que $A + \vec{F} = \{t_{\vec{u}}(A) / \vec{u} \in \vec{F}\}$ est un sous-espace affine de E dérigé par $\vec{F}$.

$\vec{F}$ est s-e.v de $\vec{E}$,

alors : $\vec{0} \in \vec{F}$

donc : $A = A + \vec{0} = t_{\vec{0}}(A) \Rightarrow A \in A + \vec{F}$

$$\begin{aligned}
\varphi_A(A + \vec{F}) &= \{\overrightarrow{AM} / M \in A + \vec{F}\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} / M = t_{\vec{u}}(A), \vec{u} \in \vec{F}\} \\
&= \{\overrightarrow{AM} / \overrightarrow{AM} = \vec{u}, \vec{u} \in \vec{F}\} \\
&= \{\vec{u} / \vec{u} \in \vec{F}\} \\
&= \vec{F}
\end{aligned}$$

Définition :

Soit F un sous-espace affine d'un espace affine E,

- La dimension de F est celle de sa direction :

  $\dim F = \dim \vec{F}$
- Si $\dim F = 1$, on dit que F est une droite affine.
- Si $\dim F = 2$, on dit que F est un plan affine.
- Si $\dim(F) = \dim(E) - 1$, on dit que F est un hyperplan affine.

Remarque :

Pour une droite affine (D), au lieu de parler de la direction $\vec{D}$, on parle d'un vecteur directeur $\vec{u} \in \vec{D}$, tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$

Scanné avec CamScanner

Proposition :

Soit E un espace affine,
Soient F et G deux sous-espaces affines de E de directions $\vec{F}$ et $\vec{G}$ respectivement,
Alors : 1) $F \subset G \Rightarrow \vec{F} \subset \vec{G}$
2) $(\vec{F} \subset \vec{G}$ et $F \cap G \neq \emptyset) \Rightarrow F \subset G$

Démonstration :

1) Supposons que $F \subset G$
on a : $\vec{F} = \{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\}$ et $\vec{G} = \{\overrightarrow{MN} / M, N \in G\}$
donc : $F \subset G \Rightarrow \{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\} \subset \{\overrightarrow{MN} / M, N \in G\}$
$\Rightarrow \vec{F} \subset \vec{G}$

2) On a : $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $F \cap G \neq \emptyset$
Soit $A \in F \cap G$
on a : $\varphi_A(F) = \vec{F} \Rightarrow F = \varphi_A^{-1}(\vec{F})$
et $\varphi_A(G) = \vec{G} \Rightarrow G = \varphi_A^{-1}(\vec{G})$
donc : $\vec{F} \subset \vec{G} \Rightarrow \varphi_A^{-1}(\vec{F}) \subset \varphi_A^{-1}(\vec{G})$
$\Rightarrow F \subset G$

Définition :

Deux sous-espaces affines sont dits fortement parallèles (parallèles au sens fort) s'ils ont même direction,
Et ils sont faiblement parallèles (parallèles au sens faible) lorsqu'il y a une inclusion entre leurs directions,

Remarque :

1) Si deux espaces affines sont parallèles au sens fort, alors ils sont soit disjoints, soit égaux.
2) Deux sous-espaces affines fortement parallèles et distincts sont disjoints.
?? 3) En dimension fini, une inclusion entre deux sous-espaces affines de même dimension implique leur égalité.

Scanné avec CamScanner

Proposition :

Soit (E, φ) un espace affine,

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E, avec $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$

Alors: $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace affine de E, de direction $\bigcap_{i\in I} \vec{F_i}$

Démonstration :

Soit $A \in \bigcap_{i\in I} F_i$,

$$\begin{aligned}\varphi_A\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) &= \{A_A(M) \,/\, M \in \bigcap_{i\in I} F_i\} \\ &= \{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in \bigcap_{i\in I} F_i\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \{\overrightarrow{AM} \,/\, M \in F_i\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \vec{F_i}\end{aligned}$$

puisque : $\bigcap_{i\in I} \vec{F_i}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$,

Alors : $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace affine de E,

Propriétés :

Soient F et G deux sous-espaces affine d'un espace affine E,

Alors : 1) $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\} \Rightarrow F \cap G$ soit vide soit un singleton

2) $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E} \Rightarrow F \cap G \neq \phi$

3) $\vec{F} \subset \vec{G} \Rightarrow$ Soit $F \cap G$ vide, Soit $F \subset G$

4) $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E} \Rightarrow F \cap G$ est un singleton

4 - Barycentre :

Théorème :

Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$,

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une famille finie de points de E, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$ de somme nulle.

Alors : $\exists!\, G \in E,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Démonstration :

Soit $O \in E$,

posons : $\vec{u} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

Scanné avec CamScanner

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$
$$= -\overrightarrow{OM} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

alors: $\exists! G \in E, \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

donc: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$
$$= -\overrightarrow{OG} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$
$$= \vec{0}$$

Définition :

Le point G du théorème précédent est appelé le barycentre des points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq m}$

Propriétés :

1) Si G est le barycentre de $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq m}$, alors :
$$\forall O \in E, \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$
2) Le barycentre est inchangé si on multiple tous les coefficients par un scalaire non nul.
3) Le barycentre est inchangé si on remplace un sous-système de poids non nul α par son barycentre avec le coefficient α :
$$G = \text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\} \quad ; \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \text{ et } \alpha + \beta \neq 0$$
$$= \text{bary}\{(\text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}, \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$$

Théorème :

Soit F une partie non vide d'un espace affine E.
Alors : F est un sous-espace affine de E ssi le barycentre de toute famille finie de points pondérés de F est dans F.

Démonstration :

$\Rightarrow$/ Supposons que F est un sous-espace affine de E,
Soit $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ une famille de points pondérés de F,
Soit $G = \text{bary}\{(A_i, \alpha_i)\}_{1 \leq i \leq m}$

Scanné avec CamScanner

Soit $O \in F$,

alors: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

puisque F est un sous-espace affine de E,

alors: $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$,

et puisque $O, A_i \in F$

alors: $\overrightarrow{OA_i} \in \vec{F}$

d'où: $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \in \vec{F}$

donc: $\overrightarrow{OG} \in \vec{F}$

d'où: $G \in F$

$\Leftarrow$/ Supposons que le barycentre de toute famille finie de points pondérés de F est dans F,

Soit $A \in F$,

montrons que: $\{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$ est un s.e.v de $\vec{E}$

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

alors: $\exists M, M' \in F$, $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AM'}$

on a: $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{AM'}$

posons: $G = \text{bary}\{(A, 1-(\alpha+\beta)), (M, \alpha), (M', \beta)\}$

alors: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1-(\alpha+\beta)+\alpha+\beta} (\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{AM'})$

$= \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{AM'}$

puisque $G \in F$,

donc: $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AG} \in \{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$

c.a.d. $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in \{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$

alors: $\{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$ est un s.e.v de $\vec{E}$.

5_ Convexité :

Définition :

Soit E un espace affine, et soient $A, B \in E$,

Le segment d'extrémités A et B est l'ensemble :

$$\{A + t\overrightarrow{AB} / 0 \leq t \leq 1\}$$

on le note $[AB]$

Remarques :

Scanné avec CamScanner

1) $M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ M = A + t\overrightarrow{AB}$

2) $M \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ M = A + t\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ \overrightarrow{AM} - t\overrightarrow{AM} - t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ (1-t)\overrightarrow{AM} - t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ (t-1)\overrightarrow{MA} + (-t)\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \exists t \in [0,1],\ M = \text{bary}\{(A, 1-t), (B, t)\}$

→ Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B avec t le coefficient positif

Définition :

> Une partie C d'un espace affine E est dite convexe si pour tous points $A, B \in C$, le segment $[AB] \subset C$

Exemple

1) Un segment est convexe.
2) Tout sous-espace affine est convexe.
3) Dans $\mathbb{R}^2$, le disque est convexe

Proposition :

> Une partie non vide d'un espace affine est convexe ssi elle est stable par barycentrage à coefficient positif.

Théorème :

> L'intersection qlq des parties convexes est une partie convexe :
> $\forall (C_i)_{i \in I}$ des convexes, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2 : Les applications affines

1- Définitions et premières propriétés :

Proposition :

Soient E et F deux espaces affines de direction $\vec{E}$ et $\vec{F}$ respe,
Soit $f : E \to F$ une application,
Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une application linéaire $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$ telle que $\forall M, N \in E$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

2) Il existe une application linéaire $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$ et $O \in E$ tels que : $\forall N \in E$, $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{ON})$

3) f conserve les barycentres : L'image d'un barycentre de points de E est le barycentre des images de ces points affectés aux mêmes coefficients.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2) Evident !

2) $\Rightarrow$ 3) Il suffit de montrer que f conserve le barycentre de deux points, comme le barycentre est associative.

Soit $A, B \in E$, et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

posons : $G = \text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

donc : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

puisque φ est une application linéaire,

alors : $\varphi(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

donc : $\alpha\varphi(\overrightarrow{GA}) + \beta\varphi(\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

d'où : $\alpha\overrightarrow{f(G)f(A)} + \beta\overrightarrow{f(G)f(B)} = \vec{0}$

alors : $f(G) = \text{bary}\{(f(A), \alpha), (f(B), \beta)\}$

3) $\Rightarrow$ 2) Supposons que f conserve le barycentrage,

Soit $O \in E$,

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$,

alors : $\exists! M \in E$, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

on pose : $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$
$\vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(M)}$

Scanné avec CamScanner

alors pour tout $N \in E$, $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{ON})$

* mq φ est linéaire :

  - $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \vec{0}$
  - Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

    alors $\exists! M, N \in E$, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$

    Cas 1 : Si $\alpha + \beta \neq 0$

    Supposons que $\alpha + \beta = 1$

    $$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

    posons $G = \text{bary}\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$

    alors : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \overrightarrow{OG}$

    donc $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \varphi(\overrightarrow{OG})$

    $$= \overrightarrow{f(O)f(G)}$$

    puisque f conserve le barycentrage,

    alors : $f(G) = \text{bary}\{(f(M), \alpha), (f(N), \beta)\}$

    d'où, $\overrightarrow{f(O)f(G)} = \alpha\overrightarrow{f(O)f(M)} + \beta\overrightarrow{f(O)f(N)}$

    $$= \alpha\varphi(\overrightarrow{OM}) + \beta\varphi(\overrightarrow{ON})$$

    $$= \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$$

    donc $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$

    Cas 2 : Si $\alpha + \beta = 0$ avec $\alpha \neq 0$

    $$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

    $$= \vec{0} + \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

    $$= (1 - (\alpha + \beta))\overrightarrow{OO} + \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

    $$= 1\overrightarrow{OO} + \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

    posons $G = \text{bary}\{(O, 1), (M, \alpha), (N, \beta)\}$

    donc : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \overrightarrow{OG}$

    d'où : $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \varphi(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{f(O)f(G)}$

    puisque f conserve le barycentrage,

    alors : $f(G) = \text{bary}\{(f(O), 1), (f(M), \alpha), (f(N), \beta)\}$

    donc : $\overrightarrow{f(O)f(G)} = \alpha\overrightarrow{f(O)f(M)} + \beta\overrightarrow{f(O)f(N)}$

    d'où, $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$

alors φ est linéaire.

Scanné avec CamScanner

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons qu'il existe une application linéaire $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$ et $O \in E$ telle que : $\forall N \in E$, $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{ON})$

Soient $M, N \in E$,

on a : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}$

$= -\overrightarrow{f(O)f(M)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}$

$= -\varphi(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\overrightarrow{ON})$

$= \varphi(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$ car φ est linéaire

$= \varphi(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON})$

d'où, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

Définition :

Soient E et F deux espaces affines.
Une application $f : E \to F$ est dite affine si elle satisfait aux conditions de la proposition précédente.
Dans ce cas, l'application φ associée à f est unique et appelée application linéaire associée à f, et notée par $\vec{f}$.
Elle est appelée aussi la partie linéaire de f.

Remarque :

Soient E et F deux espaces affines de direction $\vec{E}$ et $\vec{F}$ respec.
Soit $f : E \to F$ une application affine,
Alors :

1) $\forall A \in E, \forall B \in E$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$

2) $\forall A \in E, \forall \vec{u} \in \vec{E}$, $f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$

Exemples :

1) les applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ avec a et b sont des constantes réelles

sont des applications affines (les seuls de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$)

2) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y - 1, x + y, -2x - y + z + 2)$ est une application affine

En effet : l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y, -2x - y + z)$ est linéaire

Scanné avec CamScanner

Soient $M(x,y,z)$, $N(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = (2x'+y'-\cancel{1}-2x-y+\cancel{1}, x'+y'-x-y, -2x'-y'+z'+\cancel{2}+2x+y-z-\cancel{2})$$
$$= (2(x'-x)+(y'-y), (x'-x)+(y'-y), -2(x'-x)-(y'-y)+(z'-z))$$
$$= \varphi(x'-x, y'-y, z'-y)$$
$$= \varphi(\overrightarrow{MN})$$

3) Si E est un espace affine, alors l'application $Id_E : E \to E$ est affine (l'application identique).

Propriétés :

1\ L'image d'un sous-espace affine F par une application affine f est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f(F)} = \vec{f}(\vec{F})$

2\ L'image réciproque d'un sous-espace affine G par une application affine f soit vide soit un sous-espace affine de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{G})$

3\ Deux applications affines coïncident si et seulement si elles ont même partie linéaire et coïncident en un point.

$$f = g \iff (\vec{f} = \vec{g}) \text{ et } (\exists A \in E,\ f(A) = g(A))$$

Écriture matricielle d'une application affine :

Soient E et F deux espaces affines tels que : $\dim E = n$, $\dim F = p$

Soit $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ le repère associé à E.

Soit $R' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_p)$ le repère associé à F,

Soit $f : E \to F$ une application affine,

Notons :
- P la matrice de $\vec{f}$ dans les bases $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_p)$.
- X la matrice colonne d'un point $M \in E$
- Y la matrice colonne de $f(M)$
- C la matrice colonne de $f(O)$

Alors : $Y = C + PX$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (2x+y-1, x+y, -2x-y+z+2)$$

Scanné avec CamScanner

on a : $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-1 \\ x+y \\ -2x-y+z-2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \\ -2x-y+z \end{pmatrix}$$

d'où : $\underbrace{f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$

2_ Groupe affine :

Proposition :

La composée de deux applications affines g et f est une application affine de partie linéaire $\vec{g} \circ \vec{f}$ ($\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$)

Démonstration :

Soient E, F et G trois espaces affines,

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux application affines,

Soient $M, N \in E$,

$$\overrightarrow{g \circ f(M)\, g \circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))\, g(f(N))}$$
$$= \vec{g}\left(\overrightarrow{f(M)\, f(N)}\right)$$
$$= \vec{g}\left(\vec{f}(\overrightarrow{MN})\right)$$
$$= \vec{g} \circ \vec{f}(\overrightarrow{MN})$$

Propriétés :

1) Une application affine est injective (resp surjective) ssi sa partie linéaire est injective (resp surjective)

2) Si une application affine f est bijective, alors l'application réciproque f^{-1} est affine, et : $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$

Démonstration :

Soient E et F deux espaces affines,

Soit $f : E \to F$ une application affine,

1) f est injective $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ est injective ?

$\Rightarrow$ / supposons que f est injective.

Soit $\vec{u} \in \operatorname{Ker} \vec{f}$ ($\Rightarrow \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$)

Scanné avec CamScanner

fixons $A \in E$,

Soit $M = A + \vec{u}$

$$f(M) = f(A + \vec{u}) = f(A) + \cancel{\vec{f}(\vec{u})}^{\,0} = f(A)$$

donc: $M = A$

alors: $A = A + \vec{u}$

d'où: $\vec{u} = \vec{0}$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\vec{f}$ est injective

Soit $M, N \in E$, tel que: $f(M) = f(N)$

$$f(M) = f(N) \Rightarrow \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \in \operatorname{Ker}\vec{f} = \{\vec{0}\}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow M = N$$

f est surjective $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ est surjective?

$\Rightarrow$/ Supposons que f est surjective

Soit $\vec{v} \in \vec{F}$,

fixons $A \in E$,

donc: $f(A) \in F$

d'où: $f(A) + \vec{v} \in F$

puisque f est surjective, il existe $M \in E$ tel que:

$$f(M) = f(A) + \vec{v}$$

donc: $\vec{v} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM})$

posons $\vec{u} = \overrightarrow{AM} \in \vec{E}$

donc: $\vec{v} = \vec{f}(\vec{u})$

d'où: $\vec{f}$ est surjective,

$\Leftarrow$/ Supposons que $\vec{f}$ est surjective,

Soit $M \in F$,

fixons $A \in E$,

d'où: $f(A) \in F$

posons $\vec{v} = \overrightarrow{f(A)M}$

puisque $\vec{f}$ est surjective, $\exists \vec{u} \in \vec{E}$ tel que: $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{v} = \overrightarrow{f(A)M}$

Scanné avec CamScanner

alors: $M = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$

$M = f(A + \vec{u})$

posons $N = A + \vec{u} \in E$

donc: $M = f(N)$

Proposition :

Soit E un espace affine,

1) Les applications affines bijectives de E dans E forment un groupe pour la composition des applications "$\circ$", qu'on appelle groupe affine de E et on le note $GA(E)$.

2) L'application $L : GA(E) \longrightarrow GL(\vec{E})$ est un morphisme de groupes surjective.

ensemble des app aff bij de E dans E

ensemble des app linéaires bij de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$

$f \longmapsto \vec{f}$

3) Le noyau de L "$\mathrm{Ker}\, L$" est l'ensemble des translations de E.

Proposition :

Soit E un espace affine,

Soit $f : E \to E$ une application affine,

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$,

Alors: f et $t_{\vec{u}}$ commutent $\Leftrightarrow \vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$

Démonstration :

f et $t_{\vec{u}}$ commutent $\Leftrightarrow \forall M \in E,\ (f \circ t_{\vec{u}})(M) = (t_{\vec{u}} \circ f)(M)$

$\Leftrightarrow \forall M \in E,\ f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{u}$

$\Leftrightarrow \forall M \in E,\ \cancel{f(M)} + \vec{f}(\vec{u}) = \cancel{f(M)} + \vec{u}$

$\Leftrightarrow \vec{f}(\vec{u}) - \vec{u} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$

Théorème :

Soient E un espace affine, et $f : E \to E$ une application affine.

Si $\vec{E} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$

Alors f s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$ et g est une application affine admettant

Scanné avec CamScanner

un point fixe, et $g \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ g$

Démonstration : Exercice

3- Applications affines particulières :

Dilatation - Translation - Homothétie :

Définition : "Dilatation"

Soit E un espace affine,
Une application affine $f : E \to E$ est dite une dilatation, si sa partie linéaire est $\alpha Id_{\vec{E}}$ où $\alpha \in \underset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,
α est appelé le rapport de la dilatation f,

Proposition :

Une translation est une dilation de rapport 1

Propriété :

Soit E un espace affine,
Soit $f : E \to E$ une application affine tel que : $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$
Alors : f est une translation

Démonstration :

Soit $A \in E$,
posons $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$
Soit $M \in E$,
alors : $M = A + \overrightarrow{AM}$

donc : $f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$

$= f(A) + \overrightarrow{AM}$ car $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$

$= f(A) + \underbrace{\overrightarrow{Af(A)}}_{\vec{u}} + \overrightarrow{f(A)M}$

$= \underbrace{f(A) + \overrightarrow{f(A)M}} + \vec{u}$

d'où : $f(M) = M + \vec{u}$

Donc f est une translation

Remarque :

Scanné avec CamScanner

Une application affine est une translation ssi $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x+1, y-2)$$

Soient $M=(x,y)$, $N=(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$
$$= (x'+\cancel{1}-(x+\cancel{1}), y'\cancel{-2}-(y-\cancel{2}))$$
$$= (x'-x, y'-y)$$
$$= \overrightarrow{MN}$$

donc, $\vec{f} = Id_{\mathbb{R}^2}$

d'où, f est une translation sur $\mathbb{R}^2$.

Propriétés :

1) $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ 2) $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ 3) $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Définition : "Homothétie"

Soit E un espace affine,

Soit $\omega \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

L'homothétie de centre ω et de rapport α est l'application notée $h_{\omega,\alpha} : E \longrightarrow E$ telle que : $\forall M \in E$, $h_{\omega,\alpha}(M) = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega M}$

Proposition :

Une homothétie est une dilatation

Démonstration :

Soit E un espace affine,

Soit h l'homothétie de centre ω et de rapport α

Soient $A \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$,

alors : $\exists! B \in E$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

on a : $h(A+\vec{u}) = h(B)$

$$= \omega + \alpha\overrightarrow{\omega B}$$
$$= \underbrace{\omega + \alpha\overrightarrow{\omega A}} + \alpha\underbrace{\overrightarrow{AB}}$$

Scanné avec CamScanner

d'où : $h(A+\vec{u}) = h(A) + \alpha\vec{u}$

donc : h est une dilatation.

Proposition :

> Soit E un espace affine.
> Soit $f : E \to E$ une application affine.
> Si $\vec{f} = \alpha Id_{\vec{E}}$ avec $\alpha \notin \{0,1\}$, alors f est une homothétie de centre $\omega = A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$ et de rapport α avec $A \in E$

Démonstration :

Soit $A \in E$,

posons $\omega = A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$

on considère l'homothétie h de centre ω et de rapport α,

on a : $\vec{h} = \alpha Id_{\vec{E}} = \vec{f}$ (1)

et on a : • $h(\omega) = \omega$

• $f(\omega) = f\left(A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}\right)$

$= f(A) + \frac{1}{1-\alpha}\vec{f}\left(\overrightarrow{Af(A)}\right)$

$= f(A) + \frac{1}{1-\alpha}\alpha\overrightarrow{Af(A)}$

$= f(A) + \left(\frac{\alpha-1+1}{1-\alpha}\right)\overrightarrow{Af(A)}$

$= f(A) + \left(\frac{1}{1-\alpha} - 1\right)\overrightarrow{Af(A)}$

$= f(A) - \overrightarrow{Af(A)} + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$

$= \underbrace{f(A) + \overrightarrow{f(A)A}} + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$

$= A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$

$= \omega$

d'où : $h(\omega) = f(\omega)$ (2)

de (1) et (2) : $f = h$

Remarque :

Toute dilatation est soit une translation, soit une homothétie.

Propriétés :

> Soit E un espace affine,
> Soient $h_1 = h_{\omega_1,\alpha_1}$ et $h_2 = h_{\omega_2,\alpha_2}$ deux homothéties de E,
> 1) Si $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, alors : $h = h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport

Scanné avec CamScanner

$\alpha_1\alpha_2$ et de centre $\omega = \omega_1 + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

2) si $\alpha_1\alpha_2 = 1$, alors $h = h_1 \circ h_2$ est une translation de vecteur $\vec{u} = (\alpha_1 + 1)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

Démonstration :

posons : $h = h_1 \circ h_2$

alors : $\vec{h} = \vec{h_1} \circ \vec{h_2} = (\alpha_1 Id_{\vec{E}}) \circ (\alpha_2 Id_{\vec{E}}) = \alpha_1\alpha_2 \, Id_{\vec{E}}$

1) Si $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$,

alors : h est une homothétie de rapport $\alpha_1\alpha_2$,

déterminons ω le centre de h

on a : $h(\omega) = \omega \iff h_1 \circ h_2(\omega) = \omega$

$$\iff h_1(\omega_2 + \alpha_2\overrightarrow{\omega_2\omega}) = \omega$$

$$\iff h_1(\omega_2) + \alpha_2 \vec{h_1}(\overrightarrow{\omega_2\omega}) = \omega$$

$$\iff \omega_1 + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2} + \alpha_2\alpha_1\overrightarrow{\omega_2\omega} = \omega$$

$$\iff \overrightarrow{\omega_1\omega} = \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_2\omega}$$

$$\iff \overrightarrow{\omega_1\omega} = \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_2\omega_1} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_1\omega}$$

$$\iff \overrightarrow{\omega_1\omega} - \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_1\omega} = \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2} - \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

$$\iff (1-\alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{\omega_1\omega} = (\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

$$\iff \overrightarrow{\omega_1\omega} = \frac{\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

$$\iff \omega = \omega_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

2) Si $\alpha_1\alpha_2 = 1$,

alors : h est une translation,

Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation h,

donc : $\vec{u} = \overrightarrow{\omega_2 h(\omega_2)}$

on a : $h(\omega_2) = h_1 \circ h_2(\omega_2)$

$$= h_1(\omega_2)$$

$$= \omega_1 + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

d'où : $h(\omega_2) - \omega_2 = \omega_1 - \omega_2 + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

donc : $\overrightarrow{\omega_2 h(\omega_2)} = \overrightarrow{\omega_2\omega_1} + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

alors : $\vec{u} = (\alpha_1 - 1)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

Scanné avec CamScanner

Proposition :

Soit E un espace affine,
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$,
Soit h une homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et de centre ω,
Alors : $t_{\vec{u}} \circ h$ et $h \circ t_{\vec{u}}$ sont des homothéties de rapport α.

Démonstration :

on a : $\overrightarrow{t_{\vec{u}} \circ h} = \vec{t_{\vec{u}}} \circ \vec{h} = Id_{\vec{E}} \circ (\alpha Id_{\vec{E}}) = \alpha Id_{\vec{E}}$

et on a : $\overrightarrow{h \circ t_{\vec{u}}} = \vec{h} \circ \vec{t_{\vec{u}}} = (\alpha Id_{\vec{E}}) \circ Id_{\vec{E}} = \alpha Id_{\vec{E}}$

d'où : $\overrightarrow{t_{\vec{u}} \circ h} = \overrightarrow{h \circ t_{\vec{u}}} = \alpha Id_{\vec{E}}$

puisque $\alpha \neq 1$

alors : $t_{\vec{u}} \circ h$ et $h \circ t_{\vec{u}}$ sont des homothéties de rapport α.

• Centre de $t_{\vec{u}} \circ h$

Soit ω' le centre de $t_{\vec{u}} \circ h$,

alors $\omega' = t_{\vec{u}} \circ h(\omega')$

$\omega' = h(\omega') + \vec{u}$

$\omega' = \omega + \alpha \overrightarrow{\omega\omega'} + \vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\omega\omega'} = \alpha \overrightarrow{\omega\omega'} + \vec{u}$

$\Leftrightarrow (1-\alpha) \overrightarrow{\omega\omega'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\omega\omega'} = \frac{1}{1-\alpha} \vec{u}$

$\Leftrightarrow \omega' = \omega + \frac{1}{1-\alpha} \vec{u}$

(3) Exercice 3

Soit h une homothétie de centre ω et de rapport $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,
Montrer que h^{-1} est l'homothétie de centre ω est de rapport $\frac{1}{\alpha}$.

Solution :

Soit h une homothétie de centre ω de rapport $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Soit h' l'homothétie de centre ω et de rapport $\frac{1}{\alpha}$,

puisque : $\alpha . \frac{1}{\alpha} = 1$

donc : $h \circ h'$ est une translation de vecteur : $\vec{u}(1-\alpha)\overrightarrow{\omega\omega} = \vec{0}$

Scanné avec CamScanner

donc: $h \circ h' = Id_E$

de même: $h' \circ h = Id_E$

alors: h est bijective, de plus h^{-1} est l'homothétie de centre ω et de rapport $\frac{1}{\alpha}$

Corollaire:

Soit E un espace affine.

1) l'ensemble de dilatation de E, notée $D(E)$, muni de la composition des applications est un sous-groupe de groupe affine $GA(E)$.

2) l'ensemble de translation de E, noté $T(E)$, est un sous-groupe commutatif de $D(E)$,

Proposition:

Soit E un espace affine,

Soit F un sous-espace affine de E,

Soit $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, c-à-d. $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$

Pour tout point $M \in E$, $(M + \vec{G}) \cap F$ est un singleton

Démonstration:

on a: $\overrightarrow{(M+\vec{G})} = \vec{G}$ et $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$

d'où: $\vec{F} + \overrightarrow{(M+\vec{G})} = \vec{E}$

donc: $F \cap (M + \vec{G})$ est un singleton

Définition:

Avec les mêmes notations de les propositions précédentes, la projection sur F parallèlement à $\vec{G}$ est l'application P qui, à chaque $M \in E$, associe l'unique point $F \cap (M + \vec{G})$

Propriétés:

Soit E un espace affine,

Soit F un sous-espace affine de E,

Soit $\vec{G}$ le supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$,

Si P est la projection sur F parallèlement à $\vec{G}$, alors:

Scanné avec CamScanner

1) P est affine, et sa partie linéaire est la projection vectoriel sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$,
2) l'ensemble des points fixes de P est F
3) P est idempotente : $P \circ P = P$

Proposition :

Toute application affine idempotente est une projection. Plus précisement, c'est la projection sur son image parallélement au noyau de sa partie linéaire.

Démonstration :

Soit E un espace affine,

Soit $f : E \to E$ une application affine idempotente, donc $\vec{f}$ l'est aussi,

posons $F = \operatorname{Im} f$ et $\vec{G} = \ker \vec{f}$

montrons que $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$

- $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$?

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in \vec{F} \cap \vec{G} &\Rightarrow \vec{u} \in \vec{F} \text{ et } \vec{u} \in \vec{G} \\
&\Rightarrow \exists \vec{v} \in \vec{E},\ \vec{u} = \vec{f}(\vec{v}) \text{ et } \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \exists \vec{v} \in \vec{E},\ \vec{u} = \underbrace{\vec{f} \circ \vec{f}(\vec{v})}_{\vec{u}} \text{ et } \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}) \text{ et } \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0} \\
&\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}
\end{aligned}$$

d'où : $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$

- $\vec{E} = \vec{F} + \vec{G}$?

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$,

alors :
$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{u} + \vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{u}) \\
&= \vec{f}(\vec{u}) + (\vec{u} - \vec{f}(\vec{u}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{u} - \vec{f}(\vec{u})) &= \vec{f}(\vec{u}) - \vec{f} \circ \vec{f}(\vec{u}) \\
&= \vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{u}) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

d'où, $\vec{u} - \vec{f}(\vec{u}) \in \ker \vec{f} = \vec{G}$

posons $\vec{v} = \vec{f}(\vec{u})$ et $\vec{w} = \vec{u} - \vec{f}(\vec{u})$

Scanné avec CamScanner

donc, $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et $\vec{w} \in \vec{G}$

d'où, $\vec{E} = \vec{F} + \vec{G}$

on en déduit que, $\vec{F} \oplus \vec{G} = \vec{E}$

Soit $M \in E$,

montrons que $f(M) = F \cap (M + \vec{G})$

on a, $f(M) \in F$

et on a: $f(M) = M + \overrightarrow{Mf(M)}$

$$\vec{f}(\overrightarrow{Mf(M)}) = \overrightarrow{f(M)f \circ f(M)}$$
$$= \overrightarrow{f(M)f(M)}$$
$$= \vec{0}$$

d'où, $\overrightarrow{Mf(M)} \in \vec{G}$

donc: $f(M) \in (M + \vec{G})$

alors: $f(M) \in F \cap (M + \vec{G})$

d'où, f est la projection sur F // à $\vec{G}$

Définition: "Affinité - Symétrie"

Soit E un espace affine,

Soit F un sous-espace affine de E, et soit $\vec{G}$ le supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$,

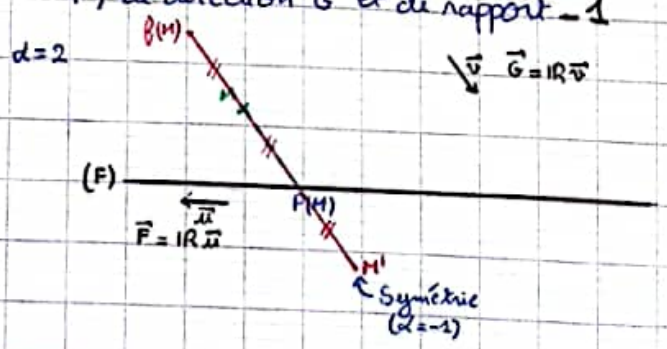
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1) L'affinité de base F, de direction $\vec{G}$ et de rapport α, est l'application $f : E \longrightarrow E$ où P est la projection

$$M \longmapsto P(M) + \alpha \overrightarrow{P(M)M}$$

sur F parallèlement à $\vec{G}$

2) La symétrie par rapport à F et parallèlement à $\vec{G}$ est l'affinité de base F, de direction $\vec{G}$ et de rapport -1



Scanné avec CamScanner

Remarque :

1) Si $\alpha = 0$, alors $f = P$

2) Si $\alpha = 1$, alors $f = Id_E$

3) Si $F = \{\omega\}$, alors $f = h_{\omega,\alpha}$

Proposition :

> Une affinité f est une application affine de partie linéaire $\vec{f} = (1-\alpha)\vec{P} + \alpha Id_{\vec{E}}$

Démonstration :

Soit $M \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$

posons $M' = M + \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

$$
\begin{aligned}
f(M+\vec{u}) &= f(M') \\
&= P(M') + \alpha\overrightarrow{P(M')M'} \\
&= P(M+\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{P(M')M'} \\
&= P(M) + \vec{P}(\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{P(M')M} + \alpha\overrightarrow{MM'} \\
&= P(M) + \vec{P}(\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{P(M')P(M)} + \alpha\overrightarrow{P(M)M} + \alpha\vec{u} \\
&= \underbrace{P(M) + \alpha\overrightarrow{P(M)M}} + \alpha\vec{P}(\overrightarrow{M'M}) + \alpha\vec{u} + \vec{P}(\vec{u}) \\
&= f(M) + \alpha\vec{P}(-\vec{u}) + \vec{P}(\vec{u}) + \alpha\vec{u} \\
&= f(M) - \alpha\vec{P}(\vec{u}) + \vec{P}(\vec{u}) + \alpha\vec{u}
\end{aligned}
$$

$$f(M+\vec{u}) = f(M) + (1-\alpha)\vec{P}(\vec{u}) + \alpha\vec{u}$$

donc f est une application affine, et $\vec{f} = (1-\alpha)\vec{P} + \alpha Id_{\vec{E}}$

Corollaire :

> Toute symétrie S est une application affine de partie linéaire $\vec{S} = 2\vec{P} - Id_{\vec{E}}$

Proposition :

> Une application affine f est une symétrie ssi f est une involution, c-à-d $f \circ f = Id_E$.
> dans ce cas-là, f est la symétrie par rapport à ses points fixes parallèlement au $Ker(\vec{f} + Id_{\vec{E}})$

Scanné avec CamScanner

Démonstration :

Soit E un espace affine,

$\Rightarrow$ / Soit S une symétrie par rapport à un sous espace affine F et parallèlement à un sous-espace vectoriel $\vec{G}$,

alors : $\vec{S} = 2\vec{P} - Id_{\vec{E}}$

on a : $S \circ S(M) = S(S(M))$

$$= S(P(M) - \overrightarrow{P(M)M})$$
$$= S(P(M)) - \vec{S}(\overrightarrow{P(M)M})$$
$$= P(P(M)) - \overrightarrow{P(P(M))P(M)} - (2\vec{P}(\overrightarrow{P(M)M}) - \overrightarrow{P(M)M})$$
$$= P(M) - \vec{0} - 2\,\overrightarrow{P(P(M))P(M)} + \overrightarrow{P(M)M}$$
$$= \underbrace{P(M) + \overrightarrow{P(M)M}} - 2.\vec{0}$$

d'où, $S \circ S(M) = M$

donc : $S \circ S = Id_E$

$\Leftarrow$ / Supposons que $S \circ S = Id_E$

posons : $P = \frac{S + Id_E}{2}$

on a : $P \circ P = P\left(\frac{S + Id_E}{2}\right)$

$$= \frac{S\left(\frac{S+Id_E}{2}\right) + \frac{S+Id_E}{2}}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(S \circ S + S + S + Id_E)$$
$$= \frac{1}{4} S \circ S + \frac{1}{2} S + \frac{1}{4} Id_E$$
$$= \frac{1}{4} Id_E + \frac{1}{2} S + \frac{1}{4} Id_E$$
$$= \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} Id_E$$
$$= P$$

d'où, P est une projection.

Alors, $S = 2P - Id_E$

donc : S est une symétrie de base $F = Im\,P$, et de direction $Ker\,\vec{P}$

- Si $M \in F \Rightarrow M \in Im\,P$

$$\Rightarrow \exists M' \in E,\ P(M') = M$$
$$\Rightarrow \exists M' \in E,\ P(P(M')) = P(M)$$
$$\Rightarrow \exists M' \in E,\ \underbrace{P(M')}_{=M} = P(M)$$
$$\Rightarrow P(M) = M$$

on a : $S(M) = P(M) - \cancel{\overrightarrow{P(M)M}}^{\,\vec{0}} = M$

Scanné avec CamScanner

Espaces Affines Euclidiens

1 Rappel

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive, c'est à dire une application :

$$\begin{aligned} <.,.>: \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &\longmapsto <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> \end{aligned}$$

vérifiant :

Bilinéaire : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$<\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}> = \lambda <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}> + <\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}>$ et $<\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{w}> = \lambda <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{u}, \vec{w}>$.

Symétrique : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}, <\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$.

Positive : $\forall \vec{u} \in \vec{E}, <\vec{u}, \vec{u}> \geq 0$.

Définie : $\forall \vec{u} \in \vec{E}, <\vec{u}, \vec{u}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie menu d'un produit scalaire.
La norme associée au produit scalaire est l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \vec{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{u} &\longmapsto \|\vec{u}\| = \sqrt{<\vec{u}, \vec{u}>} \end{aligned}$$

Cette norme induite une distance :

$$\begin{aligned} d : \vec{E} \times \vec{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \|\vec{u} - \vec{v}\| \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $\forall \vec{u} \in \vec{E}, \forall \vec{v} \in \vec{E}$: $|<\vec{u}, \vec{v}>| \leqslant \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$ avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, la forme linéaire $\varphi_{\vec{u}} : \vec{v} \mapsto <\vec{u}, \vec{v}>$ est un isomorphisme appelé isomorphisme canonique de $\vec{E}$ sur son dual algébrique $\vec{E}^*$ (espace des formes linéaires sur $\vec{E}$).
Rmq : Espace des formes linéaires continues = "dual topologique"

Soit $(\vec{E}, <.,.>)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On appelle orthogonal de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, l'ensemble : $\vec{F}^\perp = \{\vec{v} \in \vec{E} \backslash \forall \vec{u} \in \vec{F}, <\vec{v}, \vec{u}> = 0\}$ et on a $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^\perp$ (car l'espace est de dimension finie).

Théorème de Riez-Frèchet : Pour toute forme linéaire f, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ tel que

$$\forall \vec{v} \in \vec{E}, f(\vec{v}) = <\vec{u}, \vec{v}>.$$

Base orthonormé : On appelle base orthonormée sur $\vec{E}$, toute base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de $\vec{E}$ vérifiant

Scanné avec CamScanner

$$< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Orthonormalisation de Gram-Schmildt : Soit $B = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ une base de $\vec{E}$. Il existe une base orthonormale $B' = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ telle que

-$\forall k \in \{1, ..., n\}, \vec{e}_k \in \{\vec{v}_1, ...\vec{v}_k\}$

-La base B' se construit de la manière suivante : $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ et $\vec{e}_k = \dfrac{\vec{w}_k}{\|\vec{w}_k\|}$ pour $k = 2, \ldots n$ avec $\vec{w}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} < \vec{v}_k, \vec{e}_i > \vec{e}_i$.

Notons que $\vec{w}_k$ est orthogonal à tous les vecteurs $\vec{e}_i$.

2 Généralités sur les espaces affines euclidiens

Définition 2.1. *Un espace affine réel E est dite euclidien si sa direction $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien, c'est à dire si $\vec{E}$ est de dimension finie et muni d'un produit scalaire.*

Exemple 2.1.

(c-à-d, c'est un espace affine euclidien)

1. *Tout espace vectoriel euclidien induit un espace affine euclidien.*
2. *Tout sous-espaces affine d'un espace affine euclidien a une structure canonique d'espace affine euclidien.* (c-à-d : c'est un espace affine euclidien)

Théorème 2.1. *Tout espace* vectoriel *réel de dimension finie induit un espace* vectoriel *euclidien.*

Démonstration. Ce résultats est équivaut à tout espace vectoriel réel de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. C'est à dire on peut définir sur tout espace vectoriel réel de dimension finie un produit scalaire.

En effet :

Soit $\vec{E}$ un $\mathbb{R}$espace vectoriel de dimension finie.

Posons $\dim \vec{E} = n$.

Soit $B = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base de $\vec{E}$.

Pour $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{e}_i$ dans $\vec{E}$.

On pose $< \vec{u}, \vec{v} >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$.

• Bilinéaire :
$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \beta_i)\gamma_i$
$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i$
$= \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} + \vec{w} \rangle = \ldots = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

• Symétrie :
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

• Positivité :
$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i^2}_{\geq 0} \geq 0$

• Définie :
$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0$
$\iff \forall i, \alpha_i^2 = 0$
$\iff \forall i, \alpha_i = 0$
$\iff \vec{u} = \vec{0}$

On vérifie facilement que $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\vec{E}$ pour lequel B est une base orthonormée. ☑

Voir détails

Proposition 2.1. *Soit E un espace affine euclidien. L'application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(A, B) \to \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

est une distance sur E, on l'appelle distance euclidienne sur E. On note $d(A, B) = AB$.

Définition 2.2. *Soit E un espace affine euclidien. Un repère orthonormé de E est un repère dont la base est orthonormée.*

Théorème 2.2. *Tout espace* affine *euclidien possède des repères orthonormés.*

Proposition 2.2. *Soit E un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. Si $M = (x_1, \ldots, x_n)$ et $N = (y_1, \ldots, y_n)$, alors $MN = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.*

Démonstration :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$
$= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$
$= -\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$
$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\vec{e}_i$
d'où $MN = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ ☑

Scanné avec CamScanner

Déf : Soit $\vec{E}$ un espace affine euclidien, Si X est une partie de $\vec{E}$, l'orthogonal de X est l'ensemble : $X^{\perp} = \{\vec{v} \in \vec{E} / \forall \vec{u} \in X, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0\}$

Définition 2.3. *Soit E un espace affine euclidien. Deux sous-espaces affines F et G de E sont orthogonaux si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont orthogonaux.* (c-à-d : $\vec{F} \subset \vec{G}^{\perp}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}^{\perp}$, où $\vec{F}^{\perp}$ et $\vec{G}^{\perp}$ l'orthogonal de F et G resp)

Proposition 2.3. *Soit E un espace affine euclidien. Soit $\vec{u} \in \vec{E}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in E$.*
L'ensemble $\boxed{\left\{M \in E / < \vec{u}, \overrightarrow{AM} >= \alpha\right\}}$ est un hyperplan de direction orthogonale au $\vec{u}$.
c-à-d : $\langle$direction, $\vec{u}\rangle = 0$

Définition 2.4. *Soit H un hyperplan d'un espace affine euclidien E. On appelle vecteur normal à H tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{H}$.* (c-à-d $\langle \vec{H}$, vecteur normal$\rangle = 0$)

Proposition 2.4. *Soit E un espace affine euclidien de $\dim E = n$.*

1. *L'hyperplan passant par $B(b_1, \ldots, b_n)$ de vecteur normal $\vec{n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ possède l'équation cartésienne suivante $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - b_i) = 0.}$*
2. *Si $H : \alpha_1 x_1 + \ldots.. + \alpha_n x_n + c = 0$ est un hyperplan, alors $\vec{n}(\alpha_1, \ldots., \alpha_n)$ est un vecteur normal de H.*

Définition 2.5. *Soit E un espace affine euclidien. Soit F un sous-espace de E.*

1. *On appelle projection orthogonal sur F, la projection sur F parallèlement à $\vec{F}^{\perp}$. On la note P_F.*
2. *On appelle affinité orthogonal de base F et de rapport α l'application affine :*

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto P_F(M) + \overrightarrow{P_F(M)M}. \end{aligned}$$

3. *La symétrie orthogonal par rapport à F est l'affinité orthogonal de base F et de rapport -1. Si F est hyperplan, la symétrie orthogonale par rapport à F est dite une réflexion.*

Remarque 2.1. *Une réflexion est donc :*

- *dans le plan est une symétrie axiale.*
- *dans un espace de dimension 3 est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.*

Proposition 2.5 (Caractérisation de la projection orthogonale sur une droite ou un hyperplan). *Soit E un espace affine euclidien.*

1. *Soit $D = A + \mathbb{R}\vec{u}$ une droite de E. Alors, $\forall M \in E$, $\boxed{P_D(M) = A + \frac{< \overrightarrow{AM}, \vec{u} >}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.}$*
2. *Soit $H = A + \vec{H}$ un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$. Alors,*

$$\boxed{\forall M \in E, \quad P_H(M) = M + \frac{< \overrightarrow{MA}, \vec{n} >}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.}$$

Démonstration.

1. Soit $M \in E$.
   Alors $\overrightarrow{AM} \in \vec{E}$.
   Puisque $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{D}^{\perp}$.
   Alors $\overrightarrow{AM} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{D}$ et $\vec{w} \in \vec{D}^{\perp}$.
   $P_D(M) = P_D(A + \overrightarrow{AM}) = P_D(A) + \vec{P}_D(\overrightarrow{AM}) = A + \vec{v}$. $\left(\begin{array}{l} P_D(A) = A \text{ car } A \in D \\ \vec{P}_D(\overrightarrow{AM}) = \vec{v} \text{ car } \ldots \end{array}\right)$
   $\vec{v} \in \vec{D} \Rightarrow \vec{v} = \alpha\vec{u}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $< \overrightarrow{AM}, \vec{u} >=< \alpha\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} >= \alpha\|\vec{u}\|^2 + \underbrace{< \vec{w}, \vec{u} >}_{=0} = \alpha\|\vec{u}\|^2$.
   car $\begin{cases} \vec{u} \in \vec{D} \\ \vec{w} \in \vec{D}^{\perp} \end{cases}$
   Donc $\alpha = \frac{< \overrightarrow{AM}, \vec{u} >}{\|\vec{u}\|^2}$.

Scanné avec CamScanner

D'où $\vec{v} = \dfrac{<\overrightarrow{AM}, \vec{u}>}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

Ce qui implique $P_D(M) = A + \dfrac{<\overrightarrow{AM}, \vec{u}>}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

2. Soit $M \in E$, de la même manière, on obtient :
$P_H(M) = P_H(A + \overrightarrow{AM}) = P_H(A) + \vec{P}_{\vec{H}}(\overrightarrow{AM}) = A + \vec{P}_{\vec{H}}(\overrightarrow{AM})$. ($P_H(A) = A$ car $A \in H$)
Remarquerons que $\vec{H}^{\perp} = \mathbb{R}\vec{n}$ et $\vec{P}_{\vec{H}} + \vec{P}_{\vec{H}^{\perp}} = Id_{\vec{E}}$. d'où $\vec{P}_{\vec{H}} = Id_{\vec{E}} - \vec{P}_{\vec{H}^{\perp}}$
Donc $\vec{P}_{\vec{H}}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} - \vec{P}_{\vec{H}^{\perp}}(\overrightarrow{AM})$.
D'après (1) $\vec{P}_{\vec{H}^{\perp}}(\overrightarrow{AM}) = \dfrac{<\overrightarrow{AM}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.
D'où $P_H(M) = \underbrace{A + \overrightarrow{AM}} - \dfrac{<\overrightarrow{AM}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.
$<\overrightarrow{AM}, \vec{n}> = <-\overrightarrow{MA}, \vec{n}>$
$= -<\overrightarrow{MA}, \vec{n}>$
Alors $P_H(M) = M + \dfrac{<\overrightarrow{MA}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$.

Définition 2.6. *Soit E un espace affine euclidien. Soit F un sous-espace de E et A un point de E. On appelle distance de A à F le réel noté $d(A, F)$ tel que* $\boxed{d(A, F) = \inf_{M \in F} AM.}$

Proposition 2.6. *Soit E un espace affine euclidien.*

1. ***Pythagore** : Pour tout A, B et C dans E, on a : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.*
2. ***Le milieu d'un segment** : Soient A, B, I et M des points de E.*
   (a) $AB = AM + MB \Leftrightarrow M \in [AB]$.
   (b) $I = mil[AB] \Leftrightarrow IA = IB = \dfrac{AB}{2}$.
   (c) *On suppose que $A \neq B$, alors,*

$$I = mil\,[AB] \Leftrightarrow I \in (AB) \text{ et } IA = IB.$$

Théorème 2.3. *Soit F un sous-espace affine d'un espace affine euclidien E. Soit A un point de E. Alors il existe un point unique A' de F tel que :*

$$d(A, F) = AA'$$

A' est le projeté orthogonal de A sur F i.e $A' = P_F(A)$.

Démonstration. Posons $A' = P_F(A)$ et soit $M \in F$.
Puisque $\overrightarrow{A'M} \in \vec{F}$ et $\overrightarrow{AA'} \in \vec{F}^{\perp}$.
Alors $\overrightarrow{A'M} \perp \overrightarrow{A'A}$.
D'après Pythagore : $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geqslant AA'^2$, avec égalité si et seulement si $M = A'$.
Donc $d(A, F) = AA'$.
En effet : $AM^2 \geqslant AA'^2 \Rightarrow AM \geqslant AA' \Rightarrow \inf_{M \in F} AM \geqslant AA' \Rightarrow \overbrace{AA' = \inf_{M \in F} AM}^{\text{car } A' \in F} \Rightarrow AA' = d(A, F)$

Proposition 2.7. ***(Distance d'un point à un hyperplan)***
Soit E un espace affine euclidien. Soit H un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$. Soit $A \in E$.

1. *Si $A' = P_H(A)$, alors* $\boxed{\forall M \in H, \quad d(A, H) = \dfrac{|<\overrightarrow{AM}, \vec{n}>|}{\|\vec{n}\|}}$

Scanné avec CamScanner

2. *Supposons que E muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Si $A(a_1, \ldots, a_n)$ et $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta = 0$ est une équation cartésienne de H, alors*

$$\boxed{d(A,H) = \frac{|\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}}.}$$

Démonstration.

1. On a $P_H(A) = A'$.

   Puisque $P_H(A) = A + \frac{<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}, \forall B \in H$

   Alors $A' = A + \frac{<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}, \forall B \in H$

   Donc $\vec{AA'} = \frac{<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}, \forall B \in H$

   D'où $\qquad AA' = \frac{|<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>|}{\|\vec{n}\|}, \forall B \in H$

2. D'après (1) on a $\qquad AA' = \frac{|<\overrightarrow{AB}, \vec{n}>|}{\|\vec{n}\|}, \forall B \in H$

   Posons $B(b_1, \ldots, b_n) \in H$.

   Puisque $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta = 0$ est une équation cartésienne de H.

   Alors $<\overrightarrow{AB}, \vec{n}> = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$.

   Et puisque $B \in H$.

   On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = -\beta$

   Donc $<\overrightarrow{AB}, \vec{n}> = -\beta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$.

   On en déduit que $\qquad AA' = \frac{|\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}}$.

□

Corollaire 2.1. ***(Hyperplans bissecteurs de deux hyperplans)***
Soit H et H' deux hyperplans non parallèles d' un espace affine euclidien E de dimension n. L'ensemble de point $M \in E$ tels que $d(M, H) = d(M, H')$ est la réunion de deux hyperplans orthogonaux, appelés les hyperplans bissecteurs de H et H'.

Démonstration. On peut choisir un repère tel que

$$H : \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha = 0 \text{ et } H' : \alpha'_1 x_1 + \cdots + \alpha'_n x_n + \beta = 0$$

avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'^2 = 1$.
Soit $M(x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$d(M,H) = d(M,H') \iff \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i + \beta\right|$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i + \beta \text{ ou } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha = -\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i - \beta$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) x_i + (\alpha - \beta) = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) x_i + (\alpha + \beta) = 0.$$

Scanné avec CamScanner

Donc L'ensemble de points M tels que $d(M,H) = d(M,H')$ est la réunion des hyperplans

$$H_1 : \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha'_i)x_i + (\alpha - \beta) = 0 \text{ et } H_2 : \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \alpha'_i)x_i + (\alpha + \beta) = 0.$$

Notons que $\vec{n}_1(\alpha_1 - \alpha'_1, \ldots, \alpha_i - \alpha'_i)$ est un vecteur normal de H_1. et $\vec{n}_2(\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_i + \alpha'_i)$ est un vecteur normal de H_2.
De plus

$$\begin{aligned} <\vec{n}_1, \vec{n}_2> &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha'_i)(\alpha_i + \alpha'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i'^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.
D'où $H_1 \perp H_2$.

□

Proposition 2.8. *Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien E, et soit I le milieu de $[AB]$. Il existe un unique hyperplan H de E passant par I et perpendiculaire à la droite (AB).*
H est appelé hyperplans médiateur du segment $[AB]$, de plus $H = I + (\overrightarrow{AB})^{\perp}$.

Théorème 2.4. *Soit $[AB]$ un segment et I son milieu. Si H est l'hyperplan médiateur de $[AB]$, alors $H = \{M \in E / \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}\} = \{M \in E / MA = MB\}$.*

3 Cercles et sphères

Définition 3.1. *Soit E un espace affine euclidien, $\omega \in E$ et $r \geq 0$. La sphère de centre ω et de rayon r est l'ensemble des points de E noté $S(\omega, r)$ tel que $S(\omega, r) = \{M \in E / \omega M = r\}$.*

Remarque 3.1. *En dimension 2, on parle d'un cercle.*

Théorème 3.1. *Soit E un espace affine euclidien. Soient A et B deux points distincts de E. L'ensemble de points $M \in E$ tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ est la sphère de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $r = \boxed{\frac{AB}{2}}$.*

Proposition 3.1. *Soit E un espace affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Soient $\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E$ et $r > 0$. La sphère $S(\omega, r)$ a pour équation cartésienne*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)^2 = r^2.$$

Soit $M(x_1, \ldots, x_n) \in S(\omega, r)$,
$M \in S(\omega, r) \iff \omega M = r$
$\iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)^2} = r$
$\iff \sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)^2 = r^2$ ☑

Théorème 3.2. *Soient E un espace affine euclidien, F un hyperplan de E et $S(\omega, r)$ la sphère de centre ω et de rayon r. Soit H le projeté orthogonal de ω sur F. Alors $S \cap F$ est*

- **a** *vide, si $r < \omega H$.*
- **b** *$\{H\}$, si $r = \omega H$.*
- **c** *la sphère du sous-espace affine euclidien F de centre H et de rayon $r' = \sqrt{r^2 - \omega H^2}$, si $r > \omega H$.*

Définition 3.2. *Soit E un espace affine euclidien. Soit $S = S(\omega, r)$ une sphère et A un point de E. La quantité*

$$P = P(A, S) = \omega A^2 - r^2$$

Scanné avec CamScanner

est appelée puissance de point de A par rapport à la sphère S.

Proposition 3.2. *Soit E un espace affine euclidien. Soit $S = S(\omega, r)$ une sphère et A un point de E.*

1. *Si D est une droite passant par A qui coupe S en M et N, alors $P(A,S) =< \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} >$.*
2. *Si D est une droite tangente à S en M, alors $P(A,S) =< \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} >$.*

Théorème 3.3. *Soit E un espace affine euclidien. Soient $S = S(\omega, r)$ et $S' = S'(\omega', r')$ deux sphères de E non concentriques. L'ensemble des points $M \in E$ tels que $P(M,S) = P(M,S')$ est l'hyperplan orthogonal à la droite $(\omega\omega')$ au point W de $(\omega\omega')$ définie par*

$$W = \omega + \frac{r^2 - r'^2 + \omega\omega'^2}{2\omega\omega'^2}\overrightarrow{\omega\omega'}.$$

H est appelé l'hyperplan radical de S et S' (dans le cas de dimension 2, on parle de l'axe radical de deux cercles).

Démonstration.

$$\begin{aligned}
P(M,S) = P(M,S') &\Leftrightarrow \omega M^2 - r^2 = \omega' M^2 - r'^2 \\
&\Leftrightarrow \omega M^2 - \omega' M^2 = r^2 - r'^2 \\
&\Leftrightarrow \omega M^2 - < \overrightarrow{\omega' M}, \overrightarrow{\omega' M} >= r^2 - r'^2 \\
&\Leftrightarrow \omega M^2 - < \overrightarrow{\omega'\omega} + \overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega'\omega} + \overrightarrow{\omega M} >= r^2 - r'^2 \\
&\Leftrightarrow \omega M^2 - [\omega'\omega^2 + 2 < \overrightarrow{\omega'\omega}, \overrightarrow{\omega M} > + \omega M^2] = r^2 - r'^2 \\
&\Leftrightarrow < \overrightarrow{\omega'\omega}, \overrightarrow{\omega M} >= \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{-2} (*).
\end{aligned}$$

Posons $\overrightarrow{\omega'\omega}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\omega(a_1, \ldots, a_n)$ et $M(x_1, \ldots, x_n)$.
Alors

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$$

avec

$$c = \frac{r^2 - r'^2 + \omega\omega'^2}{-2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Donc l'ensemble $H = \{M \in E / P(M,S) = P(M,S')\}$ est un hyperplan de vecteur normal $\overrightarrow{\omega'\omega}$.
d'où $H \perp (\omega\omega')$.
Soit $W \in H \cap (\omega\omega')$.
Alors $< \overrightarrow{\omega'\omega}, \overrightarrow{\omega W} >= \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{-2}$.
De plus $\overrightarrow{\omega W} = \beta\overrightarrow{\omega\omega'}$.

$$\begin{aligned}
< \overrightarrow{\omega'\omega}, \overrightarrow{\omega W} >= \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{-2} &\Leftrightarrow < \overrightarrow{\omega'\omega}, \beta\overrightarrow{\omega\omega'} >= \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega'^2}{-2} \\
&\Leftrightarrow -\beta\omega'\omega^2 = \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{-2} \\
&\Leftrightarrow \beta = \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{2\omega'\omega^2}.
\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{\omega W} = \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega'^2}{2\omega'\omega^2}\overrightarrow{\omega\omega'}$.
c'est-à-dire $W = \omega + \frac{r^2 - r'^2 + \omega'\omega^2}{2\omega'\omega^2}\overrightarrow{\omega\omega'}$. □

Scanné avec CamScanner

Orientation et Isométries

1 Orientation d'un espace affine euclidien

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel réel de dimension n. Soient $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de $\vec{E}$. Comme B' est une base de $\vec{E}$, ses vecteurs sont linéairement indépendants et $detP_{BB'}$ est non nul où $P_{BB'}$ est la matrice de passage de B à B'. De plus, l'espace vectoriel considéré étant réel, det $P_{BB'}$ est un nombre réel, non nul. Ces remarques permettent de définir une relation binaire sur les bases de E.

Définition 1.1. *Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien. Soient B et B' deux bases de $\vec{E}$. On dit que B' est de même sens que B (resp. de sens contraire à B) si $detP_{B,B'} > 0$ (resp. si $detP_{B,B'} < 0$), où $P_{B,B'}$ est la matrice de passage de B à B'.*

Il est immédiat, compte tenu de cette définition et des propriétés qui suivent, que tout les résultats qui vont être obtenus ne sont valables que pour un espace vectoriel réel puisque ils font intervenir avec force la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et le fait que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné.

Exemple 1.2. *Si $\vec{E}$ est une droite, deux bases $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de $\vec{E}$ sont de même sens (resp. de sens contraires) si et seulement si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même sens (resp. de sens contraire) en tant que vecteurs.*

Donnons un premier exemple général et fondamental de comparaison du sens de deux bases.
<u>Notation</u> : On suppose connus le groupe symétrique S_n d'indice n et son sous-groupe alterné A_n. Si $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\vec{E}$ et $\sigma \in S_n$, on note alors $\sigma(B) = (\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)})$, qui est encore une base de $\vec{E}$.

Proposition 1.3. *Soit B une base de $\vec{E}$, et soit τ une transposition de S_n. Alors $\tau(B)$ est de sens contraire à B.*

Démonstration. On sait que l'application $det_B : \vec{E}^n \to \mathbb{R}$ est alternée, ce qui signifie précisément que si on échange deux vecteurs parmi un système de n vecteurs, on obtient une valeur du déterminant qui est opposée à la valeur initiale. D'où $det_B(\tau(B)) = -det_B(B) = -1 < 0$.

Proposition 1.4. *La relation «être de même sens que» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $\vec{E}$.*

Démonstration : On note $B \sim B' \Leftrightarrow detP_{B,B'} > 0$.
est réflexive : puisque det $P_{B,B} = 1$.
Donc $\sim$ est reflexive.
$\sim$ est symétrique : pour toutes bases B et B' de $\vec{E}$, on a $detP_{B,B'} = (detP_{B',B})^{-1}$. Donc si B' a même sens que B, alors B a même sens que B'.
D'où la relation $\sim$ est symétrique.
$\sim$ est transitive : si B, B' et B'' sont trois bases de E, alors

$$P_{B,B''} = P_{B',B''}P_{B,B'}$$

Donc det $(P_{B,B''})$ = det $(P_{B',B''})$ det $(P_{B,B'})$.
Doù, si B' a même sens que B et B'' a même sens que B', alors B'' a même sens que B.
On en déduit que la relation $\sim$ est transitive.

Scanné avec CamScanner

Comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, si B est une base quelconque de $\vec{E}$, il n'y a que deux possibilités pour le réel $detP_{B_0,B}$:

- ou bien il est strictement positif (B et B_0 ont même sens),
- ou bien il est strictement négatif (B et B_0 ont un sens contraire).

On peut donc ranger les bases de $\vec{E}$ en deux classes, ce sont les classes d'équivalence de la relation «être de même sens que».

- La classe des bases qui ont même sens que B_0.
- La classe des bases qui ont un sens contraire à celle de B_0.

Définition 1.5. *Orienter un espace vectoriel euclidien, c'est choisir une de ces deux classes. Il y a donc deux orientations possibles.*
Les bases appartenant à la classe choisie sont appelées directes ou positivement orientées, les bases appartenant à l'autre classe sont appelées indirectes ou rétrogrades ou négativement orientées.

Remarque 1.6. *Pour orienter l'espace en général, on prend une base et on choisit la classe la contenant; autrement dit on qualifie de directe les bases qui ont même orientation que la base choisie.*
La notion d'orientation n'est pas intrinsèque et est de plus assez arbitraire car il n'y a pas forcément de choix naturel de base de référence. Par contre, dans $\mathbb{R}^n$, il est naturel de définir l'orientation à partir de la base canonique et de choisir comme orientation la classe la contenant; dans ce cas la base canonique est directe.

Définition 1.7. *Soit E un space affine euclidien.*

1. *Deux repères de E sont dits de même sens (resp. de sens contraire) si leurs bases associées le sont.*
2. *On dit que E est orienté lorsque $\vec{E}$ l'est. Alors un repère de E sera dit direct (resp. indirect) si la base de $\vec{E}$ qui lui est associée est directe (resp. indirecte).*

Remarque 1.8. *Avec ces définitions, tous les résultats précédents s'énoncent tels quels dans le cadre affine, en remplaçant la lettre $\vec{E}$ par la lettre E, et le mot «base» par le mot «repère».*

2 Angles orientés

Dans tout ce paragraphe, E désigne un plan affine euclidien orienté.

Lemme 2.1. *Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{E}$ par rapport à une base orthonormée directe ne dépend pas du choix d'une telle base.*

Lemme 2.2. *Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ de norme 1, on a*

$$(\vec{u} \mid \vec{v})^2 + det(\vec{u}, \vec{v})^2 = 1.$$

Démonstration : Fixons une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$ et posons $\vec{u}(u_1, u_2)$ et $\vec{v}(v_1, v_2)$. Alors

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2, \quad det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1,$$

et le résultat s'ensuit.

Lemme 2.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a^2 + b^2 = 1$, alors l'ensemble des solutions θ du système*

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

est une classe de congruence modulo 2π, c'est-à-dire un élément du groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. (En particulier, il est non vide.)

Démonstration : Comme $a^2 + b^2 = 1$, on a $0 \leq a^2 \leq 1$ et donc $-1 \leq a \leq 1$.
Par conséquent, le nombre $\alpha = \arccos a \in [0, \pi]$ est bien défini.
D'autre part, on a $b^2 = 1 - a^2 = \sin^2\theta$, si bien que $b = \pm\sin\alpha$.
Posons

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{si } b = \sin\alpha, \text{ i.e. si } b \geq 0, \\ -\alpha & \text{si } b = -\sin\alpha, \text{ i.e. si } b \leq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Alors $b = \sin\theta$ dans tous les cas, et $a = \cos\theta$ également, donc on a trouvé une solution au système proposé, et il est clair (en raison des propriétés des fonctions sinus et cosinus) que toute autre solution lui est congrue modulo 2π.
Avec les deux lemmes précédents, il est donc possible de poser :

Définition 2.4. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. On appelle angle orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, la classe de congruence modulo 2π des réels θ vérifiant :*

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \text{ et } \sin\theta = \frac{det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Les éléments de cette classe de congruence $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ sont appelés les mesures de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, et l'unique mesure de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est appelée mesure principale de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$. Enfin, la classe de congruence $0[2\pi]$ est appelée angle nul, et la classe $\pi[2\pi]$ est appelée angle plat.

Remarque 2.5. *Il n'est pas toujours nécessaire d'ajouter un modulo 2π à une égalité d'angles orientés. Par exemple, il suffit d'écrire $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{x},\vec{y})}$ puisqu'il s'agit déjà d'une égalité entre ensembles. En revanche, une écriture du type $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ n'a pas de sens sans l'indication de la congruence.*

Faisons un lien entre les notions d'angles orientés et non orientés.

Proposition 2.6. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. Alors $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \pm\widehat{\vec{u},\vec{v}}[2\pi]$. Plus précisément, si θ désigne la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, alors*

$$\theta = \begin{cases} \widehat{\vec{u},\vec{v}} & \text{si } det(\vec{u},\vec{v}) \geq 0, \\ -\widehat{\vec{u},\vec{v}} & \text{si } det(\vec{u},\vec{v}) \leq 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $\vec{u}, \vec{v}$ sont indépendants, ceci peut encore s'écrire

$$\theta = \begin{cases} \widehat{\vec{u},\vec{v}} & \text{si } (\vec{u},\vec{v}) \text{ est une base directe,} \\ -\widehat{\vec{u},\vec{v}} & \text{si } (\vec{u},\vec{v}) \text{ est une base indirecte.} \end{cases}$$

Démonstration : Pour simplifier, notons $\alpha = \widehat{\vec{u},\vec{v}}$.
Les définitions de θ et α impliquent l'égalité $\cos\theta = \cos\alpha$, c'est-à-dire $\theta = \pm\alpha[2\pi]$, d'où la première identité.
Mais comme $\alpha \in [0,\pi]$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$, on a nécessairement $\theta = \pm\alpha$. Ceci prouve la seconde identité.
Mais on a alors aussi $\sin\theta = \sin(\pm\alpha) = \pm\sin\alpha$.
Comme $\sin\alpha \geq 0$, on en déduit :

$$\theta = \alpha \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}] \geq 0.$$

Pour la deuxième assertion, il suffit d'observer que si $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\vec{E}$, alors c'est une base directe si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v}) > 0$.

Proposition 2.7. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs non nuls de $\vec{E}$, et λ, μ des réels non nuls.*

1. *(a) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 0[2\pi]$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont positivement liés.*
   (b) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \pi[2\pi]$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont négativement liés.
   (c) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ssi $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthogonale directe.
   (d) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ssi $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthogonale indirecte.
2. *$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})} = \widehat{(\vec{u},\vec{w})}$ (relation de Chasles). En particulier, $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\widehat{(\vec{v},\vec{u})}$.*
3. *$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{x},\vec{y})}$ ssi $\widehat{(\vec{u},\vec{x})} = \widehat{(\vec{v},\vec{y})}$ (règle d'échange).*
4. *La notion d'angle orienté de vecteurs dépend de l'orientation choisie : si on change l'orientation, les angles orientés de vecteurs sont contrariés (i.e. changés en leurs opposés).*

Définition 2.8. *1. L'angle orienté $\left(\widehat{\vec{d_1},\vec{d_2}}\right)$ de deux demi-droites vectorielles $\vec{d_1} = \mathbb{R}_+\vec{u_1}, \vec{d_2} = \mathbb{R}_+\vec{u_2}$ est l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.*

Scanné avec CamScanner

2. *L'angle orienté* $\left(\widehat{d_1, d_2}\right)$ *de deux demi-droites affines est l'angle orienté de leurs directions. Comme dans le cas des angles non orientés, on considèrera surtout des demi-droites affines de même origine.*

Proposition 2.9. *Soient* d_1, d_2, d_3, d_4 *des demi-droites de* E*, de même origine.*

1. *Si* θ *est la mesure principale de l'angle* $\left(\widehat{d_1, d_2}\right)$*, alors* $\theta = \pm\widehat{d_1, d_2}$.
2. (a) $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = 0[2\pi]$ *ssi* $d_1 = d_2$.
   (b) $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \pi[2\pi]$ *ssi* d_1 *et* d d_2 *sont opposées.*
   (c) $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont orthogonales et deux vecteurs directeurs respectifs quelconques* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *de ces demi-droites forment une base directe* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
   (d) $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont orthogonales et deux vecteurs directeurs respectifs quelconques* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *de ces demi-droites forment une base indirecte* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
   (e) *Si* d_1' *est la demi-droite opposée à* d_1, $\left(\widehat{d_1', d_2}\right) = \left(\widehat{d_1, d_2}\right) + \pi[2\pi]$.
3. $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) + \left(\widehat{d_2, d_3}\right) = \left(\widehat{d_1, d_3}\right)$ *(relation de Chasles). En particulier,* $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = -\left(\widehat{d_2, d_1}\right)$.
4. $\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \left(\widehat{d_3, d_4}\right)$ *ssi* $\left(\widehat{d_1, d_3}\right) = \left(\widehat{d_2, d_4}\right)$ *(règle d'échange).*
5. *La notion d'angle orienté de demi-droites dépend de l'orientation choisie : si on change l'orientation, les angles orientés de demi-droites sont contrariés (i.e. changés en leurs opposés).*

Définition 2.10.

1. *L'angle orienté* $(\widehat{\vec{D_1}, \vec{D_2}})$ *de deux droites vectorielles* $\vec{D_1}, \vec{D_2}$ *est l'ensemble de toutes les mesures de tous les angles orientés* $\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right)$*, où* $\vec{u}_i$ *est un vecteur directeur de* $\vec{D_i}$*. On appelle mesure de l'angle* $(\widehat{\vec{D_1}, \vec{D_2}})$ *tout élément de cet ensemble.*
2. *L'angle orienté* $\left(\widehat{D_1, D_2}\right)$ *de deux droites affines est l'angle orienté de leurs directions. La principale différence entre les angles orientés de droites et les angles orientés de vecteurs (ou de demi-droites) réside en le fait qu'ils n'appartiennent pas au même groupe de congruence. Le résultat suivant précise cela.*

Proposition 2.11. *Soient* D_1, D_2 *deux droites de* E*, et soit* $\theta \in \mathbb{R}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i. θ *est une mesure de* $\left(\widehat{D_1, D_2}\right)$;
ii. *il existe* $\vec{u}_1 \in \vec{D_1}$ *et* $\vec{u}_2 \in \vec{D_2}$ *non nuls tels que* $\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right) = \theta[2\pi]$;
iii. *il existe* $\vec{u}_1 \in \vec{D_1}$ *et* $\vec{u}_2 \in \vec{D_2}$ *non nuls tels que* $\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right) = \theta + \pi[2\pi]$;
iv. *pour tous* $\vec{v}_1 \in \vec{D_1}$ *et* $\vec{v}_2 \in \vec{D_2}$ *non nuls, on a* $\left(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}}\right) = \theta[2\pi]$ *ou bien* $\left(\widehat{v_1, \vec{v}_2}\right) = \theta + \pi[2\pi]$.
v. $\left(\widehat{D_1, D_2}\right) = \theta[\pi]$.

En particulier, l'angle orienté $\left(\widehat{D_1, D_2}\right)$ *est un élément du groupe* $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

3 Le théorème de l'angle inscrit

3.1 Le théorème de l'angle inscrit avec les angles non orientés

Théorème 3.1. *(Angle inscrit et angle au centre) Soit* Γ *un cercle de centre* O *et soient* A, B, C *trois points distincts de* Γ*. On suppose* A *et* O *du même côté de* (BC)*. Alors on a* $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Démonstration. Il y a trois cas de figure selon la position de A par rapport aux droites (OB) et (OC).

1. On suppose A dans le secteur $\left[\widehat{B'OC'}\right]$ opposé à $[\widehat{BOC}]$, ou encore O intérieur [2] au triangle ABC.
   On appelle A' le point diamétralement opposé à A.
   On a $\widehat{BOC} = \widehat{BCA'} + \widehat{A'OC}$ (car A' est dans le secteur $[\widehat{BOC}]$, c'est Chasles géométrique) et $\widehat{BAC} =$

Scanné avec CamScanner

$\widehat{BAA'} + \widehat{A'AC}$.
Il suffit alors de montrer $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$ (l'autre est identique en utilisant le triangle isocèle AOC).
Pour cela on considère le triangle isocèle AOB. Ses angles à la base sont égaux et leur somme est le supplémentaire de l'angle en $\widehat{AOB}$, donc égale à $\widehat{BOA'}$.

2. On suppose O et C de part et d'autre de (AB).
Le raisonnement est analogue, mais avec cette fois des différences : $\widehat{BOC} = \widehat{A'OC} - \widehat{A'OB}$ et de même $\widehat{BAC} = \widehat{A'AC} - \widehat{A'AB}$. On utilise les mêmes triangles isocèles AOB et AOC.
3. L'autre cas de figure, O et B de part et d'autre de (AC), est analogue.

□

Corollaire 3.2. *(Angle inscrit 1) Soit Γ un cercle de centre O et soient A, D, B, C des points distincts de Γ. On suppose A, D et O du même côté de (BC). Alors on a $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$.*

Démonstration. On a $2\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$ et comme ce sont des réels, on a la conclusion. □

Corollaire 3.3. *(Angle inscrit limite) Soit Γ un cercle de centre O et soient A, B, C des points distincts de Γ. On suppose que A et O du même côté de (BC). Soit T un point de la tangente à Γ en B, du côté de C par rapport à (OB). Alors on a $\widehat{TBC} = \widehat{BAC}$.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'angle $\widehat{CBO}$, complémentaire de l'angle $\widehat{TBC}$ et de passer par l'angle au centre. □

Corollaire 3.4. *(Angle inscrit 2) Soit Γ un cercle de centre O et soient A, B, C, D quatre points distincts de Γ. On suppose A et D de part et d'autre de (BC). On a $\widehat{DBC} = \pi - \widehat{BAC}$.*

Démonstration. Supposons par exemple A du côté de O et soit D' le point diamétralement opposé à D.
Alors D' est aussi du côté [3] de O.
On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{BD'C}$.
Par ailleurs, les triangles $D'BD$ et $D'CD$ sont rectangles (on les décompose en deux triangles isocèles et on utilise la somme des angles) et donc leurs angles en D et D' sont complémentaires.
Comme on a $\widehat{BDC} = \widehat{BDD'} + \widehat{D'DC}$ et $\widehat{BD'C} = \widehat{BD'D} + \widehat{DD'C}$ (par exemple, parce que le quadrilatère $DBD'C$ est convexe puisque ses diagonales se coupent) on en déduit le résultat. □

Définition 3.5. *Des points de E sont dits cocycliques s'ils sont situés sur un même cercle.*

Remarque 3.6. *Un point, ou deux points distincts, sont toujours cocycliques, et ce, d'une infinité de façons. Par contre, trois points distincts sont cocycliques si et seulement s'ils ne sont pas alignés : ils sont alors situés sur un unique cercle, appelé cercle circonscrit au triangle ABC.*

Théorème 3.7. *Soient A, B, C, D quatre points distincts. On suppose que A, D (strictement) du même côté de (BC) (resp. de part et d'autre) et $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (resp. $\widehat{BDC} = \pi - \widehat{BAC}$). Alors A, B, C, D sont cocycliques.*

Démonstration. Traitons le premier cas. Soit Γ le cercle circonscrit à A, B, C.
On raisonne par l'absurde en supposant que D n'est pas sur Γ, disons à l'extérieur.
Les droites (BD) et (CD) coupent [4] respectivement Γ en M et N.
Comme M est sur Γ, du même côté que A par rapport à (BC), on a $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$.
Mais, la somme des angles dans le triangle MDC donne $\widehat{BMC} = \widehat{MDC} + \widehat{MCD} = \widehat{BDC} + \widehat{MCD}$.
Comme on a $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ par hypothèse, on en déduit $\widehat{MCD} = 0$.
Le point M est donc à la fois sur (BD) et (CD), donc en D et D est sur le cercle, ce qui est absurde. □

3.2 Le théorème de l'angle inscrit avec les angles orientés

Théorème 3.8. *Soit Γ un cercle de centre O et soient A, B, C trois points distincts de Γ. Alors on a*

$$(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].$$

Scanné avec CamScanner

Démonstration. Elle est presque identique à la précédente, mais il n'y a plus besoin de distinguer les cas de figure.
On introduit encore le point A' diamétralement opposé à A.
On écrit, par Chasles, $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}}) + (\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}})$ et on montre le résultat avec A' au lieu de C (resp. B).
La propriété du triangle isocèle AOB donne $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}}) = -(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}) = (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}})$.
On écrit la somme des angles de AOB : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \pi$, soit $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}})$.

□

Attention, le corollaire suivant est une égalité d'angles modulo π.

Corollaire 3.9. *Soit Γ un cercle et soient A, B, C, D quatre points distincts de Γ. Alors on a*

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})[\pi].$$

Démonstration. On a $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})[2\pi]$.
Soit $\theta = 2\alpha + 2k\pi = 2\beta + 2l\pi$, d'où $\alpha = \beta + (l-k)\pi$. □

Théorème 3.10. *(cocyclicité de quatre points). Soient A, B, C, D quatre points de E, tous distincts sauf éventuellement C et D. Alors A, B, C, D sont cocycliques (resp. alignés) si et seulement si $((\widehat{CA),(CB)}) = ((\widehat{DA),(DB})$ et la valeur commune de ces angles n'est pas $0[\pi]$ (resp. est $0[\pi]$).*

Démonstration. L'assertion concernant l'alignement est immédiate.
Supposons donc que A, B, C, D soient cocycliques, sur un cercle de centre O. D'après le théorème de l'angle inscrit,

$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$$

Le lemme 5.3 implique donc $((\widehat{CA),(CB})) = ((\widehat{DA),(DB}))$, et cette valeur commune ne peut être $0[\pi]$, car 3 points cocycliques et distincts ne peuvent être alignés, comme nous l'avons rappelé plus haut.

Réciproquement, supposons que $((\widehat{CA),(CB})) = ((\widehat{DA),(DB}))$ et que la valeur commune de ces angles n'est pas $0[\pi]$.
Alors A, B, C (resp. A, B, D) ne sont pas alignés donc sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$).
Montrons que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.
Soit donc T_A (resp. T'_A) la tangente en A à $\mathcal{C}$ (resp. à $\mathcal{C}'$).
D'après le théorème de l'angle inscrit et l'hypothèse, on a

$$\left(\widehat{T_A,(AB}\right)) = ((\widehat{CA),(CB})) = \left((\widehat{DA),(DB})\right) = \left(\widehat{T'_A{}^{,(AB}}\right)$$

La règle d'échange donne alors $\left(\widehat{T_A,T'_A}\right) = 0[\pi]$, c'est-à-dire $T_A = T'_A$ puisque ces droites passent par le même point A. Par le lemme 5.5, cela implique $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ puisqu'ils passent tous deux par A et B. □

4 Isométries

4.1 Définitions et généralités

Proposition 4.1. *Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien. Soit $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ une application. Si $\vec{f}$ vérifie*

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{E}, (\vec{f}(\vec{u}) \mid \vec{f}(\vec{v})) = (\vec{u} \mid \vec{v}).$$

alors $\vec{f}$ est linéaire et bijective.

Démonstration. Montrons que l'application $\vec{f}$ est linéaire.
Considérons pour cela deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un réel λ.

Scanné avec CamScanner

Montrons que les vecteurs $\vec{f}(\lambda\vec{u}+\vec{v})$ et $\lambda\vec{f}(\vec{u})+\vec{f}(\vec{v})$ sont égaux.
Pour cela, on montre que le carré de la norme de la différence est nul :

$$\|\vec{f}(\lambda\vec{u}+\vec{v})-\lambda\vec{f}(\vec{u})-\vec{f}(\vec{v})\|^2=0.$$

Il suffit de développer cette norme et d'appliquer l'hypothèse pour obtenir

$$\|\vec{f}(\lambda\vec{u}+\vec{v})-\lambda\vec{f}(\vec{u})-\vec{f}(\vec{v})\|^2=\|(\lambda\vec{u}+\vec{v})-\lambda\vec{u}-\vec{v}\|^2=0$$

Si $\vec{u}$ appartient au noyau de $\vec{f}$ alors $\vec{f}(\vec{u})$ est nul donc sa norme au carré est nulle donc par hypothèse sur $\vec{f}$ celle de $\vec{u}$ est nulle.
Ceci montre que $ker\vec{f}$ est réduit à $\vec{0}$, donc $\vec{f}$ est injective et l'espace étant de dimension finie, elle est bijective, par application du théorème du rang. □

Définition 4.2. *(Isométries vectorielles)*
Une isomérie vectorielle est une application linéaire bijective $\vec{f}$ qui conserve le produit scalaire :

$$\forall(\vec{u},\vec{v})\in\vec{E},(f(\vec{u})\mid f(\vec{v}))=(\vec{u}\mid\vec{v}).$$

Proposition 4.3. *(Caractérisation) Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien.*

1. *Une application linéaire $\vec{f}:\vec{E}\to\vec{E}$ est une isométrie si es seulement si $\vec{f}$ est bijective et $f^*=f^{-1}$ où f^* est l'adjoint de $\vec{f}$.*
2. *Une application linéaire $\vec{f}:\vec{E}\to\vec{E}$ est une isomérie si et seulement si elle envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.*
3. *Si c'est le cas elle envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.*
4. *La matrice d'une isomérrie dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.*

Démonstration. 1. Supposons que $\vec{f}$ soit une isométrie et considérons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$.
Par ce qui précède $\vec{f}$ est inversible. En écrivant $\vec{v}=\vec{f}\left(\vec{f}^{-1}(\vec{v})\right)$ et en appliquant la définition nous obtenons :

$$(\vec{f}(\vec{u})\mid\vec{v})=\left(\vec{f}(\vec{u})\mid\vec{f}\left(\vec{f}^{-1}(\vec{v})\right)\right)=\left(\vec{u}\mid\vec{f}^{-1}(\vec{v})\right),$$

qui par définition et unicité de l'adjoint signifie que l'adjoint de $\vec{f}$ est $\vec{f}^{-1}$.
Réciproquement si $\vec{f}$ est inversible d'adjoint $\vec{f}^{-1}$ alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ nous avons directement par adjonction

$$(\vec{f}(\vec{u})\mid\vec{f}(\vec{v}))=(\vec{u}\mid\vec{v}).$$

2. Soit $(\vec{e}_i)$ une base orthonormale de $\vec{E}$. Si $\vec{f}$ est une isométrie alors pour tout i,j nous avons

$$\left(\vec{f}(\vec{e}_i)\mid\vec{f}(\vec{e}_j)\right)=(\vec{e}_i\mid\vec{e}_j),$$

ce qui prouve que $\left(\vec{f}(\vec{e}_i)\right)$ est une famille orthonomné. Cette famille est donc libre et est donc une base car son cardinal est égal à la dimension de l'espace.
Réciproquement fixons une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ces vecteurs se décomposent comme suit :

$$\vec{u}=\sum_{i=1}^{\dim\vec{E}}(\vec{u}\mid\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$$

et

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{\dim\vec{E}}(\vec{v}\mid\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$$

Si $\vec{f}$ linéaire envoie la base $(\vec{e}_i)$ sur une base orthonormée alors

$$(\vec{f}(\vec{u})\mid\vec{f}(\vec{v}))=\sum_{i,j=1}^{\dim E}(\vec{u}\mid\vec{e}_i)(\vec{v}\mid\vec{e}_j)\left(\vec{f}(\vec{e}_i)\mid\vec{f}(\vec{e}_j)\right)=\sum_{i=1}^{\dim E}(\vec{u}\mid\vec{e}_i)(\vec{v}\mid\vec{e}_i)=(\vec{u}\mid\vec{v}),$$

donc $\vec{f}$ est une isométrie.

Scanné avec CamScanner

3. Si $\vec{f}$ linéaire envoie une base orthonormée sur une base orthonormée alors $\vec{f}$ est une isométrie par ce qui précède et donc envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.
4. La matrice d'une isométrie dans une base orthonormée est une matrice orthogonale car les colonnes forment une base orthonormée puisque une isométrie envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

□

Théorème 4.4. *Soit $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ une application conservant la distance et le vecteur nul, i.e. vérifiant $\|\vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ et $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$. Alors $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle.*

Propriétés 4.5.

1. *Toute isométrie vectorielle conserve la distance.*
2. *Toute isométrie vectorielle conserve l'orthogonalité (des vecteurs et des sous espaces).*
3. *Les isométries conservent les notions d'angles non orientés.*

Définition 4.6. *Soit E un espace affine euclidien. On appelle isométrie de E toute application $f : E \to E$ qui conserve la distance c'est à dire qui vérifie : $\forall M, N \in X, \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|$.*

Exemple 4.7. *Les translations et les symétries orthogonales sont des isométries, mais pas les projections ni les homothéties de rapport diffèrent de ± 1.*

Proposition 4.8. *Toute isométrie $f : E \to E$ est une application affine.*

Démonstration. Fixons un point O dans E et considérons $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}, \vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(M)}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$). On a :

$$\begin{aligned}
2(\vec{f}(\vec{u})|\vec{f}(\vec{v})) &= \|\vec{f}(\vec{u})\|^2 + \|\vec{f}(\vec{v})\|^2 - \|\vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{v})\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{NM}\|^2 \quad \text{car } f \text{ est une isométrie} \\
&= \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}\|^2 \\
&= 2(\overrightarrow{ON}|\overrightarrow{OM}) = 2(\vec{u}|\vec{v})
\end{aligned}$$

$\vec{f}$ conserve donc le produit scalaire. On en déduit la linéarité de $\vec{f}$. □

Théorème 4.9. *Soit $f : E \to E$ une application. Alors f est une isométrie de E si et seulement si f est affine et $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle de $\vec{E}$.*

Démonstration. Soit f une isométrie. Fixons $O \in E$, et définissons $\sigma : \vec{E} \to \vec{E}$ par $\sigma(\vec{x}) = \overrightarrow{f(O)f(O + \vec{x})}$.
Alors, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, on a $\sigma(\vec{x}) - \sigma(\vec{y}) = \overrightarrow{f(O + \vec{y})f(O + \vec{x})}$, donc aussi

$$\|\sigma(\vec{x}) - \sigma(\vec{y})\| = \|\overrightarrow{(O + \vec{y})(O + \vec{x})}\| = \|(O + \vec{x}) - (O + \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Comme il est clair que $\sigma(\vec{0}) = \vec{0}$, on déduit du théorème 2.12 du chapitre VI que σ est une isométrie vectorielle. Ainsi, f est affine de partie linéaire σ, donc $f \in GA(E)$ et $\vec{f} \in O(\vec{E})$.
Réciproquement, si f est affine de partie linéaire $\vec{f}$ qui conserve la norme, alors pour tous $M, N \in E$:

$$f(M)f(N) = \|f(M)f(N)\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = MN$$

donc f est une isométrie. □

En particulier, on en déduit :

Corollaire 4.10. *Une isométrie de E est automatiquement affine et bijective, et l'ensemble $Is(E)$ des isométries de E est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.*

Définition 4.11. *Une isométrie qui conserve (resp. contrarie) les angles orientés est dite directe (resp. indirecte).*

Corollaire 4.12.

Scanné avec CamScanner

- *L'ensemble* $\mathrm{Is}^+(E)$ *des isométries directes de* E *est un sous-groupe distingué de* $Is\ (E)$.
- *L'ensemble* $\mathrm{Is}^-(E)$ *des isométries indirectes de* E *n'est pas un groupe.*

Définition 4.13. *Tout élément de* $\mathrm{Is}^+(E)$ *(resp. de* $\mathrm{Is}^-(E)$ *) s'appelle un déplacement (resp. un antidéplacement) de* E. *En particulier,* $\mathrm{Is}^+(E)$ *est appelé groupe des déplacements de* E.

Théorème 4.14. *Toute isométrie* $f : E \to E$ *se décompose de manière unique sous la forme* $f = t_{\vec{u}} \circ g$

- g *est une isométrie de* E *admettant au moins un point fixe,*
- $t_{\vec{u}}$ *est une translation commutant avec* g.

Démonstration. Soit $\vec{u} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$. Alors $\vec{u} = \vec{f}(\vec{z}) - \vec{z}$.
Soit d'autre part $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.
On a $(\vec{v}|\vec{u}) = (\vec{f}(\vec{v})|\vec{f}(\vec{z})) - (\vec{v}|\vec{z}) = 0$ car $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal.
Par suite, $\mathrm{Im}(\vec{f} - id_{\vec{E}}) \perp \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ et ces deux sous espaces sont donc en somme directe. Le théorème du rang permet alors d'en déduire que $\vec{X} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}\left(\vec{f} - id_{\vec{E}}\right)$.
On applique le théorème de la decomposition des applications affines, alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec g admettant un point fixe et commutant avec $t_{\vec{u}}$. □
On conclut en remarquant que $g = t_{-\vec{u}} \circ f$ est une isométrie.

4.2 Classification des isométries du plan

Au long de ce paragraphe, on suppose que E est un plan affine réel.

4.2.1 Isométries du plan ayant au moins un point fixe

Théorème 4.15. *Une isométrie* f *qui a 3 points fixes non aligné est l'identité.*

Démonstration. La démonstration se fait par l'absurde.
Soient A_1, A_2, A_3 trois points non alignés distincts.
Supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe donc un point M de E tel que $M' = f(M)$ soit distinct de M.
L'ensemble des points équidistants de M et M' est une droite Δ.
Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. f est une isométrie donc $d(f(A_i), f(M)) = d(A_i, M)$ et comme $f(A_i) = A_i$, $d(A_i, M') = d(A_i, M)$.
Ce qui montre que A_i appartient à Δ. Cela est contraire à l'hypothèse A_1, A_2 et A_3 non alignés. □

Théorème 4.16. *Une isométrie* f *différente de l'identité qui a 2 points fixes* A *et* B *distincts est la réflexion d'axe* (AB).

Démonstration. Soit $f \in Is(E)$ $f \neq Id_E$ telle que $A = f(A), B = f(B)$.
On note $S_{(AB)}$ la réflexion d'axe (AB).
Soit $C \in P, C \notin (AB)$ si $f(C) = C$ alors $f = Id_E$, impossible.
Donc $C' = f(C) \neq C$ $CA = C'A$ et $CB = C'B$.
Donc $A \in med[CC']$ et $B \in med[CC']$.
Donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$, d'où $C' = S_{(AB)}(C)$.
Donc $S_{(AB)} \circ f(C) = C$, d'où $S_{(AB)} \circ f(C) = C$ est une isométrie qui admet 3 points fixes A, B, C non alignés donc $S_{(AB)} o f = Id_P$. Donc $f = S_{(AB)}$. □

Théorème 4.17. *Une isométrie* f *qui admet un seul point fixe* O *est une rotation de centre* O *et d'angle non nul.*

Démonstration. Soit $f \in Is(P)$, O le point fixe de f. Alors $\forall M \neq O$, $f(M) \neq M$.
Soit $A \in E$, $A \neq O$, $f(A) = A' \neq A$.
On note S_Δ la symétrie d'axe Δ la médiatrice de $[AA']$, $OA = OA'$, donc $O \in \Delta$.
Donc $S_\Delta o f(O) = O$ et $S_\Delta o f(A) = A$.
Donc $S_\Delta o f$ qui a deux points fixes est soit l'identité soit une réflexion d'axe (OA).
Si $S_\Delta o f = Id_E$, alors $f = S_\Delta$ et f a au moins 2 points fixes, contradiction.
Donc $S_\Delta o f$ est la réflexion d'axe (OA).
Donc $f = S_\Delta o S_{(OA)}$, or Δ et (OA) sont sécantes en O et distinctes, donc f est une rotation de centre O. □

Scanné avec CamScanner

4.2.2 Isométries n'ayant aucun point fixe

Théorème 4.18. *Soit $O \in E$, toute isométrie f se décompose de manière unique en tog où g est une isométrie fixant O et t une translation.*

Démonstration. Soient $f \in Is(E), O \in E, O' = f(O)$.
Soient t et t' deux translations, g et g' deux isométries fixant O telles que $f = tog = t'og'$.
Donc $t(O) = O'$ et $t'(O) = O'$, donc $t = t' = t_{\vec{OO'}}$.
D'où $g = g'$.
Soient t la translation de vecteur $\vec{OO'}$, donc $t(O) = O'$.
On pose $g = t^{-1}of$, donc g est une isométrie et $t^{-1}of(O) = O$.
On en déduit qu'il existe t et g vérifiant les hypothèses. □

Théorème 4.19. *Une isométrie qui n'admet aucun point fixe est soit une translation soit la composé d'une translation et d'une réflexion (on dit aussi symétrie glissé)*

Démonstration. On suppose que $\forall M \in E$, $f(M) \neq M$.
Soit $O \in E$, $O' = f(O)$. Soit t la translation de vecteur $\vec{OO'}$.
Donc $(tof)(O) = O$ et tof est une isométrie, donc $g = tof$ est soit l'identité, soit une réflexion, soit une rotation.
Donc $f = t^{-1}og$.
Si g est une rotation d'angle non nul, f est une rotation.
Or f n'a aucun point fixe.
Donc g n'est pas une rotation.
D'où f est soit une translation soit la composé d'une translation et d'une réflexion. □

Conséquences :

Une isométrie conserve :

- l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité ;
- le barycentres ;
- la mesure des angles géométries ;
- les aires.

Une isométrie transforme

- Une droite en une droite, un segment en un segment ;
- un cercle en un cercle.

Si une isométrie se décompose en un nombre pairs de réflexions alors c'est un déplacement, si non c'est un anti-déplacement.
Les déplacements sont les translations et les rotations.
Les anti-déplacements sont les réflexions et les symétries glissées.

Scanné avec CamScanner

Angles non orientés-Géométrie du triangle

1 Angles non orientés de vecteurs, de demi-droites, de droites

Tout au long de ce paragraphe, on désigne par E un espace affine euclidien de dimension ≥ 2.

Définition 1.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont positivement (resp. négstivement) liés s'il existe $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.*

Lemme 1.2. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. Alors la quantité $\frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ est dans $[-1, 1]$. Elle vaut 1 (resp. -1) si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ sont positivement liés (resp. négativement liés).*

Démonstration. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses cas d'égalité. □

Définition 1.3. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$. L'angle non orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel*

$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \arccos \frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \in [0, \pi].$$

<u>Notation</u> : Si A, B, C sont trois points de E avec A distinct de B et C, on note $\widehat{BAC} = \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}$.

Proposition 1.4. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$.*

1. $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \widehat{\vec{v}, \vec{u}}$.
2. $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\pi}{2}$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*
3. $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont positivement liés.*
4. $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \pi$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont négativement liés.*
5. $\widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}} = \begin{cases} \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } \lambda\mu > 0; \\ \pi - \widehat{\vec{u}, \vec{v}} & \text{si } \lambda\mu < 0. \end{cases}$

Démonstration

Les points 1 et 2 sont évidents. Pour les points 3 et 4, il suffit d'appliquer le lemme1.2
Prouvons le dernier point. On a :

$$\cos \widehat{\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}} = \frac{(\lambda\vec{u} \mid \mu\vec{v})}{\|\lambda\vec{u}\| \cdot \|\mu\vec{v}\|} = \frac{\lambda\mu(\vec{u} \mid \vec{v})}{|\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\lambda\mu}{|\lambda| \cdot |\mu|} \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}.$$

Par suite, $\cos \widehat{\vec{u}, \mu\vec{v}} = \pm \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, selon que λ et μ sont de même signe ou non, d'où le résultat puisque les angles non orientés sont dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Définition 1.5.

1. *L'angle non orienté de deux droites vectorielles $\vec{D_1} = \mathbb{R}\vec{u}_1$, $\vec{D_2} = \mathbb{R}\vec{u}_2$ est le réel*

$$\widehat{\vec{D_1}, \vec{D_2}} = \arccos \frac{|(\vec{u}_1 \mid \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u_2}\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2. *L'angle non orienté $\widehat{D_1, D_2}$ de deux droites affines est l'angle non orienté de leurs directions.*

Définition 1.6.

Scanné avec CamScanner

1. *Une demi-droite vectorielle est une partie de la forme* $\vec{d} = \mathbb{R}_+\vec{u} = \{\alpha\vec{u} : \alpha \geq 0\}$ *avec* $\vec{u} \neq \vec{0}$. *Tout vecteur* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *de* $\vec{d}$ *sera dit directeur.*
2. *Une demi-droite affine est une partie de la forme* $d = A + \vec{d}$, *avec* A *un point de* E *appelé origine de* d, *et* $\vec{d}$ *une demi-droite vectorielle appelée direction de* d. *(Ici, il y a abus de langage, puisque la direction d'une demi-droite affine n'est pas une droite, donc pas un sous-espace vectoriel.)*
3. *Deux demi-droites* d_1, d_2 *de même origine sont dites opposées si* $\vec{d_2} = -\vec{d_1}$.

<u>Notation</u> : Si A, B sont deux points distincts de E, la demi-droite $A + \mathbb{R}_+\vec{AB}$ se note $[AB)$.

Définition 1.7.

1. *L'angle non orienté* $\widehat{\vec{d_1}, \vec{d_2}}$ *de deux demi-droites vectorielles* $\vec{d_1} = \mathbb{R}_+\vec{u}_1$, $\vec{d_2} = \mathbb{R}_+\vec{u}_2$ *est l'angle non orienté des deux vecteurs* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.
2. *L'angle non orienté de deux demi-droites affines est l'angle non orienté de leurs directions. Dans la majorité des cas, on considérera des demi-droites affines de même origine.*

On obtient facilement les propriétés des angles non orientés de demi-droites à partir de celles des angles non orientés de vecteurs.

Proposition 1.8.

1. *Soient* d_1, d_2 *deux demi-droites de* E, *de même origine.*
   (a) $\widehat{d_1, d_2} = 0$ *ssi* $d_1 = d_2$.
   (b) $\widehat{d_1, d_2} = \pi$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont opposées.*
   (c) $\widehat{d_1, d_2} = \frac{\pi}{2}$ *ssi* d_1 *et* d_2 *sont orthogonales.*
   (d) *Si* d_1' *est la demi-droite opposée à* d_1, *alors* $\widehat{d_1', d_2} = \pi - \widehat{d_1, d_2}$.
2. *Soient* D_1, D_2 *deux droites affines de* E.
   (a) $\widehat{D_1, D_2} = 0$ *ssi* $D_1 \| D_2$.
   (b) $\widehat{D_1, D_2} = \frac{\pi}{2}$ *ssi* D_1 *et* D_2 *sont orthogonales.*

2 Quelques résultats de la géométrie «élémentaire» des triangles liés aux notions d'angles

Si ABC est un triangle d'un plan euclidien, on note $a = BC, b = CA, c = AB$, et on désigne par $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles (non orientés) associés aux trois sommets. On note également $\mathcal{A}$ l'aire (géométrique) de ABC, R le rayon du cercle circonscrit à ABC et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ son demi-périmètre.

1. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.
2. ABC est isocèle en A (i.e. $b = c$) si et seulement si $\widehat{B} = \widehat{C}$.
3. ABC est équilatéral (i.e. $a = b = c$) si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.
4. **Formule d'Al Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
5. **Loi des sinus** : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$.
6. **Formule de Héron** : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
7. **Trigonométrie dans un triangle rectangle** : si ABC est rectangle en A, alors

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}, \sin\widehat{B} = \frac{b}{a} \text{ et } \tan\widehat{B} = \frac{b}{c}.$$

Démonstration. Exercices.

Scanné avec CamScanner

3 Droites remarquables dans un triangle et cercle des neuf points.

Soit E le plan affine euclidien. Si M est un point de E, λ un réel différent de 0 et 1 et D une droite de E, on note $h(M, \lambda)$ l'homothétie de centre M et de rapport λ et S_D la réflexion par rapport à la droite D. Soient un triangle ABC et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

1. **Médianes.**
   (a) Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle ABC.
   (b) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité.
      i. en utilisant l'homothétie h_1 (que l'on précisera) qui transforme le triangle ABC en $A'B'C'$
      ii. en utilisant l'associativité des barycentres.
2. **Médiatrices.**
   (a) Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange les points B et C. On note Δ_A son axe appelé médiatrice du segment $[BC]$.
   (b) Montrer qu'un point M de E appartient à Δ_A si et seulement si les longueurs MB et MC sont égales.
   (c) En déduire que les médiatrices des côtés du triangle ABC sont concourantes en un point O centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

   On notera Γ le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et Ω son centre.
3. **Hauteurs.**
   La hauteur issue de A dans le triangle ABC est la droite passant par A et orthogonale à (BC). On note A'' la projection orthogonale de A sur (BC).

   Quelle est l'image par h_1 de la droite (AA'') ? Montrer que les hauteurs de ABC sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle et que l'on a : $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. Quel est l'orthocentre de $A'B'C'$?
4. **Droite d'Euler.**
   (a) Déduire une relation vectorielle entre G, O et Ω, puis que les points O, G, Ω et H sont soit confondus soit alignés.
   La droite (OG) est appelée droite d'Euler du triangle ABC.
   (b) Montrer que ω est le milieu de $[OH]$, en déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par $h_2 = h\left(h, \frac{1}{2}\right)$
5. **Cercle des neuf points.**
   (a) Montrer que les points A''', B''' et C''', milieux respectifs de $[HA], [HB]$ et $[HC]$ appartiennent au cercle Γ et que $(A'A''')$ est un diamètre de Γ. (Déterminer une homothétie qui envoie A' sur A''').
   (b) En déduire que A'', B'' et C'' appartiennent à Γ.
   Le cercle Γ est donc appelé le cercle des neuf points.
6. **Symétrique de l'orthocentre.**
   En déduire que le symétrique A_0 de H par rapport à (BC) appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Scanné avec CamScanner

Représentation paramétrique et Systèmes d'équations d'un sous-espace affine

1 Représentation paramétrique d'un sous-espace affine

Soie E un espace affine de dimension n, muni d'un repère $R = (O, e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

1. Soit F un sous-espace affine de E passant par le point A et de direction $\vec{F}$. On suppose que $dimF = p$ et $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_p}\}$ est une base de $\vec{F}$. Montrer que

$$M \in F \Longleftrightarrow \exists (t_1, t_2, \cdots, t_p) \in \mathbb{K}^p, \quad M = A + \sum_{k=1}^{p} t_k \vec{u_k}. \tag{1}$$

   L'equation (1) est appelée une représentation paramétrique de F.

2. (a) Donner la représentation paramétrique d'une droite affine, plan affine, hyperplan affine.
   ? (b) Application: $dimE = 2, 3$.
   ?

2 Systèmes d'équations d'un sous-espace affine

I) Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $\vec{v} = (y_1, \cdots, y_p)$ un vecteur de $\vec{v}$.

1) Montrer que l'image réciproque $V = f^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.
2) Soient $f_1, \cdots, f_p$ les p fonctions coordonnées de f.
   i) Montrer que $M(x_1, \cdots, x_n) \in V \Leftrightarrow (S) \begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = y_2 \\ \cdots \\ f_p(x_1, \cdots, x_n) = y_p \end{cases}$
   ii) Montrer que la direction de V est le sou-espace vectoriel $kerf$.
   iii) Déduire que le sous-espace affine V est donc la somme d'une solution particulière de (S) et du sous-espace vectoriel des solutions du (S_0), le système homogène associé à (S).
   iv) Determiner la dimension de V.

II) Soient V un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de direction $\vec{V}$ et $\vec{W}$ un supplémentaire de $\vec{V}$, considérons la projection p de $\mathbb{R}^n$ sur $\vec{W}$ parallèlement à $\vec{V}$.

1) Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $\vec{W}$ est isomorphe a $\mathbb{R}^k$.
2) Posons $p = (p_1, \cdots, p_k)$ et considérons $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de V.
   Montrer que si $M = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V$, alors

$$\begin{cases} p_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ p_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_2(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ \cdots \\ p_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) \end{cases}$$

3) Application: Donner un system d'équations d'une droite affine, plan affine et hyperplan affine.

Scanné avec CamScanner