Analyse numérique 1

A. LAMNII

A. LAMNII

9 septembre 2018

Scanné avec CamScanner

Table des matières

0.1 Introduction 5

1 Gestion des erreurs **6**

1.1 Précision et temps de calcul 6

1.1.1 Quel pas de temps faut-il choisir ? 6

1.1.2 Précision 6

1.1.3 Temps de calcul 7

1.2 Représentation des nombres réels en machine 8

1.3 Standard IEEE 754 8

1.4 Précision : Epsilon machine 9

1.4.2 Les flottants simple précision 9

1.4.4 Les flottants double précision 10

1.4.6 Erreur de représentation 11

1.4.7 Arrondissement d'un nombre 11

1.4.11 Troncature d'un nombre 12

1.4.13 Différence entre troncature et arrondissement 12

1.4.15 Gagner du temps de calcul, ou mieux : éviter des instabilités numériques 13

1.5 Erreur absolue et erreur relative 13

1.6 Chiffre significatif 14

1.6.4 Chiffre significatif exact 15

1.7 Méthodes itératives 16

1.8 Convergence d'une méthode 16

1.9 Exercices 17

2 Interpolation polynômiale **18**

2.1 Introduction 18

2.1.1 Exemple introductif 18

2.1.3 Poblème d'interpolation 19

2.1.5 Un peu d'algèbre linéaire 20

2.2 Interpolation polynômiale 21

2.3 Interpolation de Lagrange 23

2.4 Polynôme d'interpolation de Newton 29

2.4.2 Différences divisées 30

2.4.6 Différences divisées : Algorithme de Hörner 32

2.5 Algorithme d'Aitken/Neville 34

2.5.3 Algorithme d'Aitken 35

2.5.8 Algorithme de Neville 37

A. LAMMNI

Scanné avec CamScanner

2.6 Etude de l'erreur 39
2.6.1 Etude de l'erreur : cas de Lagrange 39
2.6.5 Etude de l'erreur : cas de Newton 40
2.6.6 Phénomène de Runge 41
2.6.10 Comment évité le phénomène de Runge 42
2.7 Exercices 44

3 Dérivation numérique **46**
3.1 Introduction 46
3.2 Dérivée première : Formules à deux points 46
3.2.1 Formule de différences progressives (différence avant) 46
3.2.10 Formule de différences regressive (différence arrière) 48
3.2.12 Formule de différences centrales (milieu) 49
3.3 Formules de difference en trois points 51
3.4 Dérivées d'ordre supérieur 52
3.4.1 Interpolation de Lagrange et dérivées d'ordre p 52
3.4.5 Formules de Taylor et dérivées d'ordre supérieur 53
3.5 Application 57
3.6 Exercices 58

4 Intégration numérique **60**
4.1 Introduction 60
4.1.2 Principe 61
4.2 Méthodes composées 62
4.2.1 Construction 62
4.2.2 Formule des rectangles à gauche 63
4.2.5 Formule des rectangles à droite 64
4.2.6 Formule du point milieux 64
4.2.8 Etude de l'erreur 65
4.2.9 Formule des trapèzes 66
4.2.12 Formule de Simpson 68
4.3 Formule générale des méthodes composées 70
4.3.5 Formules de Newton-Cotes fermée 72
4.3.8 Formules de Newton-Cotes ouvert 73
4.4 Méthodes de Gauss 74
4.4.2 Description méthodes de Gauss 75
4.4.4 Intégration de Gauss-Legendre 76
4.4.8 Intégration de Gauss-Laguerre 77
4.4.11 Intégration de Gauss-Tchebychev 78
4.4.14 Intégration de Gauss-Hermite 79
4.5 Evaluation de l'erreur : Noyau de Peano 80
4.5.4 Noyau de Peano : Méthode du point Milieu 82

A. LAMNI

Scanné avec CamScanner

4.5.5 Noyau de Peano : Méthode des Trapèzes 83
4.5.6 Noyau de Peano : Méthode de Simpson 83
4.6 Exercices 85

5 Résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ 87
5.1 Introduction 87
5.2 Méthodes itératives 90
5.2.1 Critère d'arrêt 90
5.2.2 Convergence 90
5.2.4 Ordre de convergence 91
5.3 Méthode de la bissection (ou de dichotomie) 92
5.3.4 Nombre d'itérations 93
5.3.6 Algorithme de la bissection 94
5.3.9 Avantages et Inconvénients 95
5.4 Méthode de Newton 96
5.4.5 Méthode de Newton : Calcul de l'ordre 99
5.4.6 Algorithme de Newton 100
5.4.8 Méthode de Newton : Racines multiples 101
5.4.18 Méthode de Newton : variantes 108
5.5 Méthode de la sécante 108
5.5.2 Algorithme de la sécante 110
5.6 Méthode de la corde 111
5.7 Méthode de point fixe 112
5.7.3 Illustration graphique 113
5.7.14 Algorithme de la méthode du point fixe 118
5.7.15 Point fixes attractifs, répulsifs et douteux 118
5.7.29 Procédé pratique 124
5.7.30 Comparaison des différentes méthodes 124
5.8 Exercices 126

6 Systèmes linéaires 128
6.1 Introduction 128
6.2 Résolution de systèmes linéaires 129
6.3 Méthodes directes 130
6.3.1 Principe des méthodes directes 130
6.4 Méthode de résolution pour les systèmes triangulaires inférieurs 131
6.4.3 Algorithme de résolution pour les systèmes triangulaires inférieures . . 131
6.5 Méthode de résolution pour les systèmes triangulaires supérieures 132
6.5.3 Algorithme de résolution pour les systèmes triangulaires supérieures . 133
6.6 Complexité des algorithmes de descente et remontée 134
6.7 Cas particulier matrice diagonale 135
6.8 Méthode d'élimination de Gauss 135

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

6.8.2 Méthode de Gauss sans pivot 135
6.8.6 Méthode de Gauss avec pivot 139
6.8.9 Application (**Gauss-Jordan**) : calcul de A^{-1} 140
6.9 Méthode par factorisation LU 141
6.10 Méthode de Cholesky 146
6.11 Méthode itératives 149
6.11.1 Convergence des méthodes itératives 149
6.11.8 Quelques méthodes itératives 151
6.11.25 Résultats de convergence dans des cas particuliers 158
6.12 Exercices 159

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Introduction

0.1 Introduction

L'objectif de ce cours est de mettre en évidence les principales difficultés liées à la pratique des calculs numériques sur ordinateur.

L'analyse numérique est une branche des mathématiques appliquées s'intéressant au développement de méthodes numériques pour le calcul d'approximations de solutions de problèmes de mathématiques qu'il serait difficile d'obtenir par des moyens analytiques.

La **précision** des résultats obtenus avec ces méthodes ou algorithmes peuvent varier fortement et est en fonction des approximations utilisées.

Le **Temps de calcul** : complexité de mise en oeuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

On s'interesse dans ce cours a l'utilisation de méthodes numériques pour la résolution de problèmes appliqués sur l'ordinateur et a l'estimation et le contrôle des erreurs provenant de ces méthodes.

Au fil de ce cours, nous aborderons les chapitres suivants :

— Gestion des erreurs
— Interpolation polynômiale
— Dérivation numérique
— Intégration numérique
— Résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$
— Systèmes linéaires

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Chapitre 1

Gestion des erreurs

Les solutions de problèmes calculées par une méthode numérique sont affectées par des erreurs. Ces sources d'erreurs rencontrées en analyse numérique peuvent être classifiées comme suit :

— Erreurs de modélisation :
Arriver au problème mathématique traduisant le mieux le phénomène considéré.

— Erreurs d'arrondi :
Les calculs se font toujours sur une suite limitée de chiffres.

— Erreurs de troncature/discrétisation :
Il s'agit des erreurs commises lorsqu'un processus de recherche d'une limite est arrêté avant l'obtention de cette limite. Exemple série infinie de Taylor.

1.1 Précision et temps de calcul

Deux aspects fondamentaux sous-tendent la mise en place de toute méthode numérique : la **précision** souhaitée (ou disponible) d'une part, et le **temps de calcul** d'autre part.

Disposer de beaucoup de précision est primordiale voire indispensable lorsque l'on étudie certains problème. Mais lorsque on cherche des résultats en temps réel on perd la précision :

$$\Delta t \times \varepsilon \geq h$$

où Δt exprime un temps de calcul (par exemple 5 min), ε la précision de la méthode (par exemple 10^{-4}) et h est le pas de la méthode.
Cette relation rappelle l'impossibilité d'allier précision et rapidité (temps de calcul).

1.1.1 Quel pas de temps faut-il choisir ?

Un grand pas implique un nombre réduit d'opérations de calcul, mais entraîne en retour une plus grande erreur.
Un pas petit améliore la précision des résultats, au prix d'un temps de calcul plus élevé.
Un pas trop petit risque d'amplifier les erreurs de troncature.
Il existe donc un pas idéal, qui peut éventuellement varier au cours du temps.
Nous verrons qu'il existe divers algorithmes pour traiter ce genre de problème.

1.1.2 Précision

La précision est limitée par les machines. Un ordinateur fonctionne avec un nombre limité de chiffres significatifs, au maximum 14, 15 ou 16, ces chiffres étant rangés en mémoire dans

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

des boites virtuelles ou bits, après transcription en base 2.
Certains bits sont réservés (signe et\ou exposant).
Par exemple, les machines classiques ne pourront généralement pas distinguer 3.1415926535897931 de 3.1415926535897932 .
Dans la mémoire, seul les premiers chiffres d'un nombre seront enregistrés, les autres seront perdus.

1.1.3 Temps de calcul

Le temps de calcul est limité par la capacité des ordinateurs, par la durée de vie du matériel, par des facteurs extérieurs (comme les coupures d'électricité, ...).
Les accès aux périphériques sont très coûteux en temps, en particulier les accès aux disques durs et les impressions à l'écran.
Pour une méthode numérique donnée, on peut toujours estimer le temps de calcul en comptant le nombre total N d'opérations qu'effectue la machine (Notion de complexité).
On peut ensuite multiplier ce nombre par le temps de calcul t_e relatif à une opération élémentaire.

Exemple 1.1.4

Calcul de la somme suivante

$$S = \sum_{i=1}^{n} i$$

$S \leftarrow 0$;	1 affect.
for($i = 1$; $i <= n$; $i++$)	1 affect. n incrém. n+1 compar
$S \leftarrow S + i$;	n affect. n add.
	total :T(n)=4n+3

Remarque 1.1.5

Le nombre d'itérations d'une boucle **for** est égal à : valeur finale de l'indice moins sa valeur initiale, plus 1.
Dans notre cas, nous avons : $n - 1 + 1 = n$.
L'affectation $i \leftarrow 1$: 1.
La condition de sortie ($i \leq n$) est évaluée $n + 1$ fois.
L'incrémentation $i++$ est évaluée n fois.
$S \leftarrow S + i$; n affectations n additions.
L'incrémentation de i est évaluée n fois.

Scanné avec CamScanner

Exemple 1.1.6

$S \leftarrow \frac{n(n+1)}{2}$;	1 add. 1 mult. 1 div. 1 affect. total : T(n)=4

1.2 Représentation des nombres réels en machine

$\frac{1}{3}$, π, $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$ peut posséder une infinité de termes. Une telle représentation ne pouvant être écrite sur un ordinateur.
La capacité mémoire d'un ordinateur est finie, il est nécessaire de représenter les nombres réels sous forme approchée.
La notation la plus utilisée est la représentation avec virgule flottante : si $x \in \mathbb{R}$ est un nombre réel, on pose

$$x \simeq (-1)^s m b^e$$

où b est la base de numération, m la mantisse, et e l'exposant. Les calculs sont généralement effectués en base $b = 2$, les résultats affichés sont traduits en base 10.
m : mantisse, écrite en virgule fixe en base b, sur p chiffres, de type $a_i,\ i = 1, ..., p$ avec $0 \leq a_i < b$ et $a_1 \neq 0$.
$m = 0.a_1 a_2 ... a_p$
Le nombre flottant x est alors dit de précision p.

LAMNII

1.3 Standard IEEE 754

Notation 1.3.1 (Un format standardisé)

Forme normalisés en base 2

- Forme normalisé selon $1.m \times 2^e$
- m est la partie fractionnaire (ou mantisse)
- e est l'exposant de la puissance de 2

Remarque 1.3.2

- Le premier 1 n'est pas stocké mais est présent
- Un bit supplémentaire stocke le signe
- Deux représentations : simple précision et double précision

Scanné avec CamScanner

1.4 Précision : Epsilon machine

Pour chaque machine, de la plus petite calculatrice au plus grand ordinateur, on peut associer un nombre positif,

EPS = "Epsilon Machine"

Par définition, **EPS** est le plus petit nombre positif tel que :

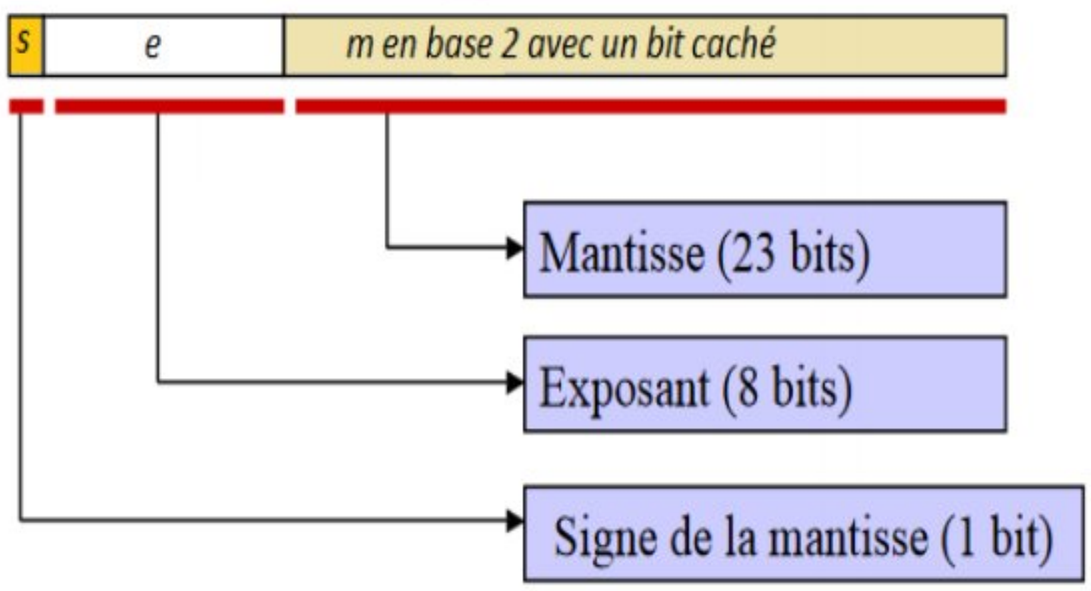
$$1 + EPS \neq 1$$

Exercice 1.4.1

— Écrire une fonction itérative (en langage C) pour calculer **EPS**
— Écrire une fonction récursive (en langage C) pour calculer **EPS**

1.4.2 Les flottants simple précision

En simple précision, sur 32 bits c-à-d 4 octets, on a :
23 bits pour la mantisse m,
8 bits pour l'exposant e,
1 bit pour le signe.
on a 7 chiffres décimaux significatifs car $2^{23} \simeq 10^7$.



Format	Taille	Précision	E_{min}	E_{max}	$Valeur_{max}$
simple	32	$23\ bits\ +1$	-126	$+127$	$3.403...10^{38}$

— Taille mantisse équivaut à la précision de p bits
— Taille exposant : w bits
— $E_{max} = 2^{w-1} - 1$ et $E_{min} = 1 - E_{max}$

Scanné avec CamScanner

— La valeur d'un nombre est donnée par l'expression :

$$(-1)^s \times (1 + \sum_{i=1}^{23} m_i 2^{-i}) \times 2^{e-E_{max}} \tag{1.1}$$

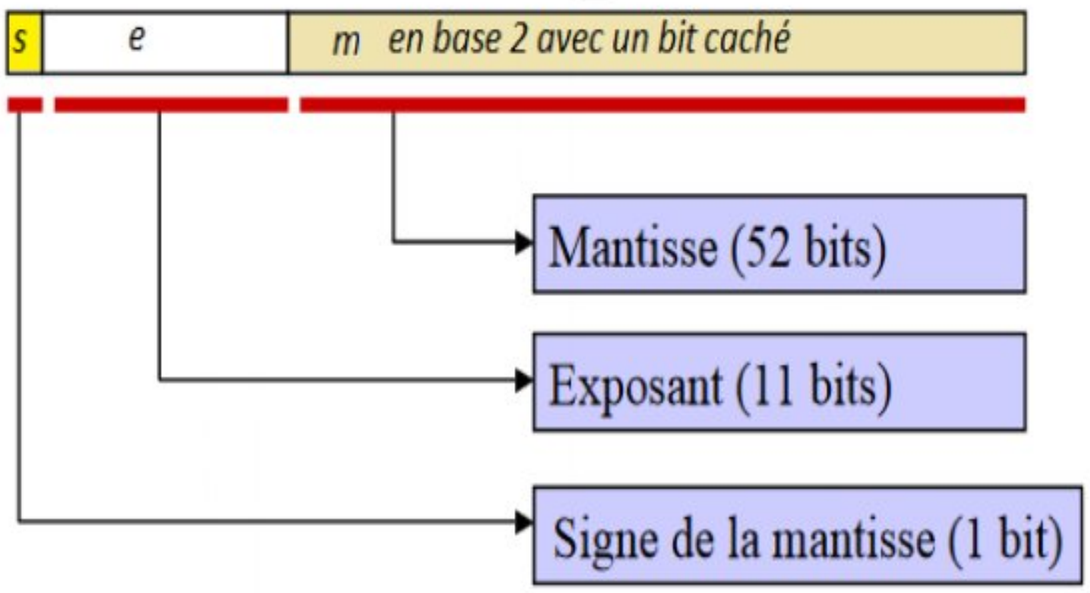
Code Matlab 1.4.3 (zéros machine (ε))

```
>> d=eps('single')
   d = 1.1921e-07
>> log2(d)
   ans = -23
```

1.4.4 Les flottants double précision

En double précision, sur 64 bits c-à-d 8 octets, on a :
52 bits pour la mantisse m,
11 bits pour l'exposant e,
1 bit pour le signe.
on a 15 chiffres décimaux significatifs car $2^{52} \simeq 10^{15}$.

MNII



Format	Taille	Précision	E_{min}	E_{max}	$Valeur_{max}$
Double	64	$52\ bits\ +1$	-1022	$+1023$	$1.798...10^{308}$

— Taille mantisse équivaut à la précision de p bits
— Taille exposant : w bits
— $E_{max} = 2^{w-1} - 1$ et $E_{min} = 1 - E_{max}$
— La valeur d'un nombre est donnée par l'expression :

$$(-1)^s \times (1 + \sum_{i=1}^{52} m_i 2^{-i}) \times 2^{e-E_{max}} \tag{1.2}$$

Scanné avec CamScanner

Code Matlab 1.4.5 (zéros machine (ε))

```
>> d=eps('double') % d=eps
   d = 2.2204e-16
>> log2(d)
   ans = -52
```

1.4.6 Erreur de représentation

L'erreur de représentation est liée aux modes de représentation, de stockage et de calcul des ordinateurs.
On veut calculer $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$ avec une machine fonctionnant avec 4 chiffres significatifs. La machine effectuera d'abord $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, ce qui pourra donner $0.6667 - 0 - 3333 = 0.3334$
Ici, $\frac{2}{3}$ a été remplacé par 0.6667 ; c'est une erreur de représentation (erreur d'arrondi). Reste à calculer $\frac{1}{3} - 0.3334$, un faux résultat (vrai à 10^{-4} près) : $+0.0001$.
L'erreur de représentation est généralement négligeable devant les autres, sauf dans certains cas particuliers où on manipule des nombres très différents ou très proches.

1.4.7 Arrondissement d'un nombre

— Erreurs d'arrondi : ce sont les erreurs associées au système de numération. Elles sont dues au fait qu'un ordinateur ne peut prendre en considération qu'un nombre fini de chiffres.
— Erreurs proviennent de la représentation des nombres dans un calculateur.

Exemple 1.4.8

Supposons que l'on travaille sur un ordinateur avec p=4 chiffres significatifs.
La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h \to 0$$

pour $f(x) = x^4$, On a $f'(2) = 32$.
Avec $h = 0.01$ on a $(2.01)^4 = 16.3224$ donc $\frac{16.32-16}{0.01} = 32.00$
Avec $h = 0.1$ on a $(2.1)^4 = 19.4481$ donc $\frac{19.44-16}{0.1} = 34.40$

Remarque 1.4.9

Une petite perturbation de $f(x)$ (erreur d'arrondi) a induit une grande perturbation de $f'(x)$.

Scanné avec CamScanner

Exemple 1.4.10

soit $x = 5.1234 \times 10^6$ et $y = 7.89 \times 10^1$ on veut calculer (avec Matlab par exemple) la somme entre x et y.
La valeur exacte du calcul est $x + y = 5.1234789 \times 10^6$ mais la valeur calculée est $\widehat{x+y} = 5.1234 \times 10^6$.

1.4.11 Troncature d'un nombre

— Erreurs d'approximation ou de troncature : ces sont les erreurs associées aux processus infinis en analyse mathématique.
— Il s'agit ici des erreurs qui se produisent lorsqu'on utilise des interpolations, d'approximations, Séries de Taylor...

Exemple 1.4.12

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)$ où $x_0 < \zeta < x$.
Lorsqu'on néglige le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)$
On dit qu'il correspond à l'erreur de troncature.
Pour $f(x) = \sin(x)$, $x = 0.1$, $x_0 = 0$ et $n = 3$ on a : $\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!}f^{(4)}(\zeta)$
$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} \simeq 0.099833333$
L'erreur de troncature est alors estimée à la valeur maximale possible : $\frac{0.1^4}{4!} \simeq 0.0000042$
Remarquer que la valeur analytique de $\sin(0.1) \simeq 0,099833417$.

1.4.13 Différence entre troncature et arrondissement

Remarque 1.4.14

— La troncature qui consiste à couper (à tronquer) la mantisse de a après son p-ième chiffre,
— L'arrondi qui consiste à tenir compte du $(p+1)$-ième chiffre. Si celui-ci est inférieur à 5, on tronque, tandis que s'il est supérieur ou égal à 5, on ajoute une unité au p-ième chiffre avant de tronquer.

Troncature (p=3) : $A = 2436$

$$\widetilde{A} = 0.243\ 10^4$$

Arrondissement (p=3) : $A = 2436$

$$\widetilde{A} = 0.244\ 10^4$$

Scanné avec CamScanner

1.4.15 Gagner du temps de calcul, ou mieux : éviter des instabilités numériques

En fonction du problème, en choisissant l'algorithme le plus adapté, on peut gagner du temps de calcul , ou mieux : éviter des instabilités numériques.

Exemple 1.4.16

Si vous avez besoins de calculer l'inverse d'une matrice, et que sont déterminant est très proche de 0 (mais non exactement 0), le calcul sera très sensibles aux erreurs de troncatures de la machine.
Dans ce cas il faut préférer une inversion itérative, plutôt qu'une inversion exacte ...

Exemple 1.4.17

Si vous souhaitez décomposer une fonction sur une base de fonctions, ll vaut mieux bien connaître cette base, sinon vous ne saurez pas vraiment ce que vous faites...
Souvent, une telle décomposition engendre des instabilités dans le schémas numérique en raison de la discrétisation etc...

1.5 Erreur absolue et erreur relative

Pour mesurer l'erreur entre la solution fournie par une méthode numérique et la solution analytique du problème que l'on cherche à résoudre (on parle encore d'estimer la précision de la méthode), on introduit les notions d'erreur absolue et relative.

Définition 1.5.1

Soit $x \in \mathbb{R}$, et x^* une approximation de ce nombre. L'erreur absolue est définie par :

$$\Delta x = \mid x^* - x \mid$$

L'erreur relative est définie par :

$$E_r(x) = \frac{\mid x^* - x \mid}{\mid x^* \mid} = \frac{\Delta x}{\mid x^* \mid}$$

De plus, en multipliant par 100, on obtient l'erreur relative en pourcentage.
Si x^* est voisin de 0 on utilise $E_r(x) = \frac{|x^* - x|}{1+|x^*|}$

Généralement la solution analytique d'un problème est à priori inconnue ou n'existe pas, une des caractéristiques intéressante des méthodes numériques consiste à donner une estimation maximale de l'erreur absolue. On dispose généralement d'une borne supérieure pour

Scanné avec CamScanner

cette erreur qui dépend de la précision de la machine utilisée. Cette borne est appelée erreur absolue :

$$| x - x^* | \leq \Delta x$$

donc

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

Remarque 1.5.2

On a estimé la valeur exacte de x à partir de x^* avec une incertitude de Δx.

L'erreur absolue est rarement utilisée du fait qu'elle ne tient pas compte de la valeur de x^*. Ainsi, dans la majorité des cas, on utilise l'erreur relative.

Exemple 1.5.3

Pour un chronomètre de précision d'ordre $1/10$ de seconde, l'erreur absolue est bornée par 0.1 s.

— Marathon : si $x^* = 2h20min$ on a $E_r(x) = \frac{0.1}{2\times60\times60+20\times60} = 0.0000119$ pas de conséquence sur le classement des coureurs.

— Course de $100m$ si $x^* = 10$ on a $E_r(x) = \frac{0.1}{10} = 0.01$ soit 1% du temps. On ne pourra pas vraisemblablement distinguer le premier du dernier coureur.

1.6 Chiffre significatif

Définition 1.6.1

— Les chiffres significatifs sont les chiffres certains et le premier chiffre incertains.

— Les chiffres certains : ce sont les chiffres qui ne varient pas lorsque la mesure est répétée.

— Le premier chiffre incertains : c'est le chiffre qui change si le premier chiffre incertains.

Scanné avec CamScanner

Exemple 1.6.2

Une valeur approchée de e

$u_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ (e=2.7183)

$n=1, \quad u_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2.0000$

$n=2, \quad u_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = 2.2500$

$n=3, \quad u_3 = (1+\frac{1}{3})^3 = 2.3704$

$n=4, \quad u_4 = (1+\frac{1}{4})^4 = 2.4414$

$n=5, \quad u_5 = (1+\frac{1}{5})^5 = 2.4883$

$n=6, \quad u_6 = (1+\frac{1}{6})^6 = 2.5216$

$n=7, \quad u_7 = (1+\frac{1}{7})^7 = 2.5465$

$n=8, \quad u_8 = (1+\frac{1}{8})^8 = 2.5658$

$n=9, \quad u_9 = (1+\frac{1}{9})^9 = 2.5812$

Exemple 1.6.3

- $4.053\ 10^9$ il y a 4 chiffres significatifs (la puissance de 10 n'intervient pas).
- 8.000 ± 0.001 il y a 4 chiffres significatifs (on compte les zéros à droite).
- 0.60 il y a 2 chiffres significatifs (on ne compte pas le zéro à gauche).
- 75.60 il y a 4 chiffres significatifs (la position de la virgule n'intervient pas).

1.6.4 Chiffre significatif exact

Un chiffre dans un nombre approximatif est exact :
si l'erreur absolue de ce nombre est $< 1/2\times$ l'unité du rang du chiffre en question.

Exemple 1.6.5

- Le n-ième chiffre décimal est exact si l'erreur absolue $< 0.5 \times 10^{-n}$.
- Si on représente $\frac{2}{3}$ par 0.6667
  - le troisième 6 est exacte parce que $|\frac{2}{3} - 0.6667| < 0.5 \times 10^{-3}$,
  - le chiffre 7 est aussi exact parce que $|\frac{2}{3} - 0.6667| < 0.5 \times 10^{-4}$.

Afin de minimiser la perte de précision, voici les règles générale sur l'arrondissage :

- On n'arrondit que le résultat final, et jamais le résultat intermédiaire.
- Un résultat final n'a jamais plus de précision que les données de départs.
- On arrondit un nombre approximatif au dernier chiffre significatif exact (i.e. ne pas faire une suite d'arrondissage de droite vers la gauche pour éviter d'obtenir 3 à partir de 2.465).

Scanné avec CamScanner

Exercice 1.6.6

Si tous les chiffres significatifs de 476.6 et 3.11918 sont exacts :

— Quelle est l'erreur absolue de leur somme ?

— Quelle en est l'erreur relative ?

Solution 1.6.7

$u* = 476.6$, $\Delta u = 0.05$

$v* = 3.11918$, $\Delta v = 0.5 \times 10^{-5}$

L'erreur absolue de leur somme :

$\Delta u + \Delta v = 0.050005$ approx. $= 0.05$

$u + v = (476.60 + 3.11918) \pm 0.05 = 479.71918 \pm 0.05$

Il y a donc une décimale exacte dans la somme, et on peut écrire, en arrondissant :

$u + v = 479.7 \pm 0.1$

L'erreur relative de la somme est :

$0.050005/479.71918 = 0.00010424...$ approx. $= 0.0001$

1.7 Méthodes itératives

Les méthodes itératives sont utilisées soit pour la résolution de systèmes linéaires de très grande taille, soit lorsque l'on dispose d'une estimation de la solution que l'on veut améliorer. Une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs x_0, x_1,$\cdots$ x_k qui, on l'espère, ou mieux on le démontre, convergera vers la solution du système linéaire à résoudre.

A chaque itération, on répète le plus souvent les mêmes instructions, mais sur des données obtenues lors de (des) itération(s) précédente(s) de sorte que chaque itération améliore la solution.

1.8 Convergence d'une méthode

Le plus souvent l'utilisation d'une méthode numérique consiste à partir d'une première estimation approchée de la solution, et à exécuter des instructions pour améliorer cette estimation initiale. Ensuite, on utilise l'approximation calculée comme valeur initiale à améliorer en exécutant les mêmes instructions et ainsi de suite. A la fin de chaque itération, la méthode nous permet généralement d'évaluer l'erreur d'approximation et de décider, si celle-ci est suffisamment petite, d'arrêter le processus. Une méthode est convergente si l'on peut rendre l'erreur de calcul arbitrairement petite. Dans la pratique, on dit qu'il y a convergence de la méthode numérique si, au bout d'un nombre acceptable (pas trop élevé) d'itérations on obtient une erreur suffisamment petite. Dans le cas contraire on dit que la méthode a divergé.

Scanné avec CamScanner

1.9 Exercices

1. Si tous les chiffres significatifs de 476.60 et 3.11918 sont exacts :
   — Quelle est l'erreur absolue de leur somme ?
   — Quelle en est l'erreur relative ?
2. Chercher sur machine les plus grand et plus petit nombre utilisés par Matlab.
3. Zéros machine
   Algorithme : Initialisation : $\varepsilon = 1$
   Tant que $1 + \varepsilon > 1$ faire
   effectuer $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$
   afficher ε
4. Si on dispose de 9 bits (bit de signe compris), quelles valeurs peuvent prendre les entiers codés sur ces 9 bits ?
5. À L'aide d'une méthode numérique, on a évalué la dérivée d'une fonction pour deux valeurs de h :

h	$f'(x)$	erreur absolue
0.1	-0.9983	0.0017
0.25	-0.989615837018092	0.010384162981908

   (a) Donner le nombre de chiffres significatifs de chaque approximation.
   (b) Quel est l'ordre de précision de la méthode de differentiation numérique utilisée ?
6. La fonction $\arctan(x)$ admet le développement en série suivant :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

   (a) Soit s_n la somme partielle de la série tronquée après le n-ième terme. Si on remplace $\arctan(x)$ par s_n donner l'erreur de troncature commise.
   (b) On se propose de calculer π à l'aide de la relation $\pi = 4\arctan(1)$. Combien faudra-t-il de termes de la série pour que l'erreur de π soit inférieur à 10^{-2}.
7. A l'aide d'une opération ou d'un programme élémentaire en Matlab, déterminez le plus petit réel strictement positif, et le plus grand réel représentables.
8. Vérifier que $log_2(eps) = -52$. Puis, retrouvez cette précision à l'aide d'un programme (Matlab ou C).
9. Soit $f(x)$ une fonction qui vérifie $f(1) = 1$, $f'(1) = 0.8$, $f''(1) = 2.4$ et $|f^{(1)}(x)| < 4.9$ pour $|x - 1| < 0.01$.
   (a) A l'aide de ces informations, estimer $f(1.01)$.
   (b) Donnez l'erreur associée à l'approximation de $f(1.01)$.
   (c) Donnez le nombre de chiffres significatifs associée à l'approximation de $f(1.01)$.

A. LAMMI

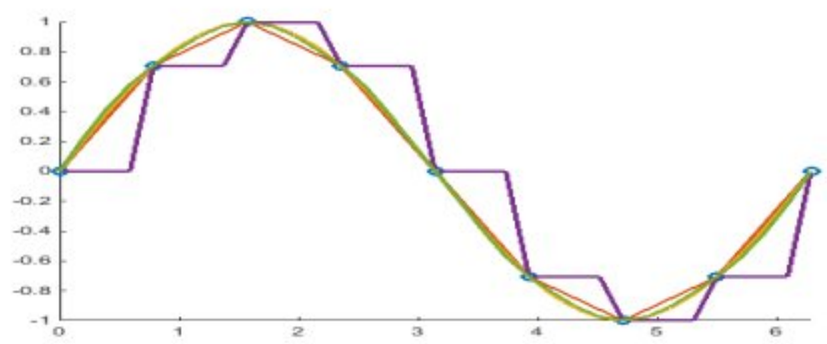
Scanné avec CamScanner

Chapitre 2

Interpolation polynômiale

2.1 Introduction

- Soit f une fonction
- connue seulement en certains points $x_0, x_1, ..., x_n$
- ou évaluable par un calcul coûteux



Représenter f par une fonction simple, facile à programmer, à évaluer, ...

En physique par exemple, on mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à chaque instant t_i.
On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement (notée f) qui passe par les points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction f en des points non mesurés.

i	t_i	y_i
0	t_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	y_n

Comment fait-on pour évaluer cette fonction f en un point t donné, proche des points mesurés ?

- L'interpolation de f, vue comme une fonction, en utilisant les données expérimentales (t_i, y_i) s'impose naturellement.
- Il existe une **infinité** de solutions !

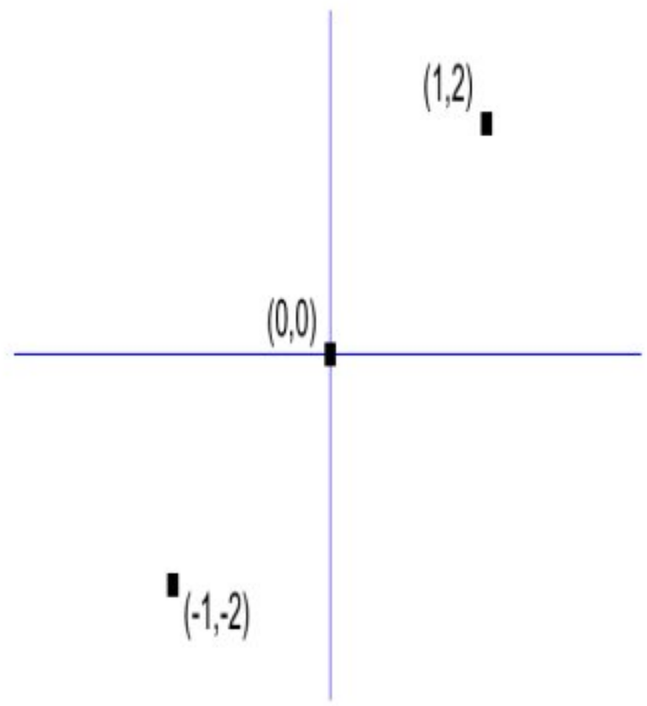
2.1.1 Exemple introductif

Problème 2.1.2

Déterminer un polynôme $P \in vect\{x, 1 - x^2, x^3\}$ qui passe par les 3 points : $(x_1, y_1) = (-1, -2)$, $(x_2, y_2) = (0, 0)$ et $(x_3, y_3) = (1, 2)$.

A. LAMMN

Scanné avec CamScanner

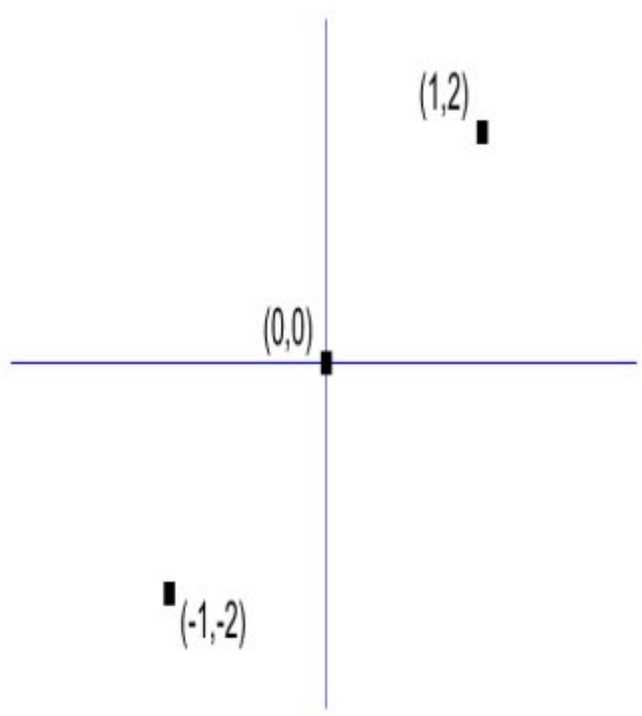


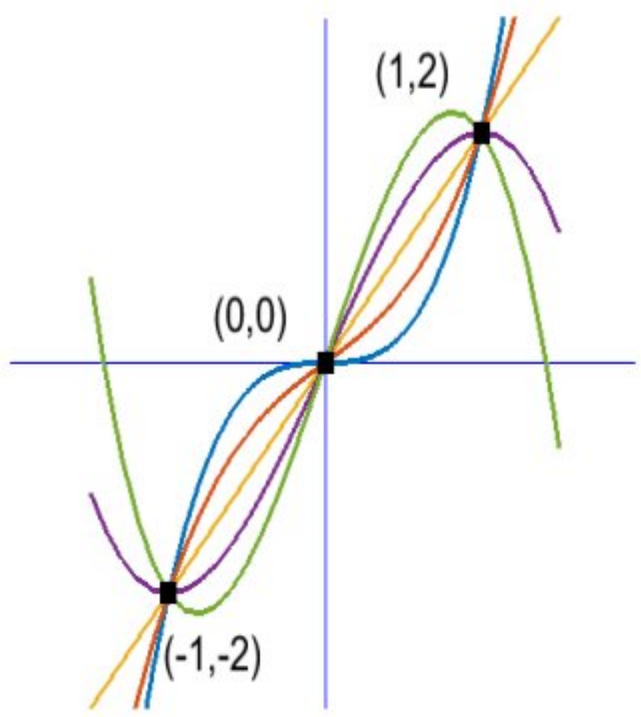
$P \in vect\{x, 1-x^2, x^3\} \Rightarrow P(x) = \alpha x + \beta(1-x^2) + \gamma x^3.$

P passe par (x_1, y_1), (x_2, y_2) et $(x_3, y_3) \Rightarrow \begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 0\,\beta - \gamma = -2 \\ 0\,\alpha + \beta + 0\,\gamma = 0 \\ \alpha + 0\,\beta + \gamma = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \forall\ \alpha \\ \beta = 0 \\ \gamma = 2 - \alpha \end{cases}$$

— $\forall\ \alpha \Rightarrow$ Il existe une **infinité** de solutions !





2.1.3 Poblème d'interpolation

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les polynômes. Il est donc important de savoir interpoler une fonction arbitraire par des polynômes.

Dans la suite, on désignera par $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On a donc $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Scanné avec CamScanner

Problème 2.1.4

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
On donne $(n+1)$ points $x_0, x_1, ..., x_n$ dans $[a, b]$ distincts 2 à 2.
Existe-t-il un polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ tel que :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} p_n(x_i) = f(x_i) \\ \quad i \quad = 0, ..., n \end{cases} \tag{2.1}$$

Les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,\cdots,n}$ sont appelés points d'interpolation.

2.1.5 Un peu d'algèbre linéaire

Définition 2.1.6

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de $Vect(e_1, \cdots, e_k)$

Définition 2.1.7

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le rang de f, s'il existe, est la dimension de l'image de f. On le note $rg(f)$.

Théorème 2.1.8 (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $rg(f) + dim(ker(f)) = dim(E)$.

Corollaire 2.1.9

Soit $f \in (E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est **bijectif** si et seulement si il est **injectif** ou **surjectif**.

Corollaire 2.1.10

Si un polynôme P de degré inférieur à n admet $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Scanné avec CamScanner

2.2 Interpolation polynômiale

Théorème 2.2.1

Soit $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus n qui vérifie $P(x_i) = f(x_i)$, $\forall\, i \in \{0, ..., n\}$

Preuve

On cherche une solution P dans $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est à dire,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les équations qui doivent être satisfaites sont donc :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i), \qquad \forall\, i \in \{0, ..., n\} \tag{2.2}$$

Soit F l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ (a_0, \cdots, a_n) & \to & \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k, \cdots, \sum_{k=0}^{n} a_k x_n^k\right) \end{array}$$

D'après le Théorème du rang, $rg(F) + dim(ker(F)) = n+1$ c-à-d :
F injective $\Leftrightarrow$ F surjective $\Leftrightarrow$ F bijective.

On va montrer que F est injective :
Soit $(b_0, \cdots, b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x_i^k = 0$$

Alors le polynôme, $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ possède $n+1$ racines distinctes.
Donc $Q(x) = 0$.
Ainsi, l'application F est donc injective.

A. LAMMNI

Scanné avec CamScanner

Remarque 2.2.2

On peut aussi voir les choses différemment.
Le système (2.2) s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système est une matrice de type Vandermonde.
On montre que son déterminant est

$$det = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

On a $det \neq 0$ si tous les x_i sont distincts. On peut donc trouver un unique vecteur de coefficients $(a_n, \ldots, a_0)^t$ résolvant le problème.

Remarque 2.2.3

Il est connu (à admettre) que les matrices de type **Vandermonde** deviennent très mal conditionnées lorsque n augmente (elle sont très sensible aux erreurs d'arrondies).
Dans la pratique, cette méthode n'est à utiliser que si $n \leq 3$. Il serait à la fois inutile et dangereux de vouloir l'utiliser pour n grand.

Exemple 2.2.4

Trouver un polynôme qui interpole le nuage de points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$, $(\frac{2}{3}, \frac{16}{81})$ et $(1,1)$.

Le nuage contient 4 points distincts, le polynôme cherché est donc de degré 3. Ses coefficients a_i sont solution de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{8}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{81} \\ \frac{16}{81} \\ 1 \end{pmatrix}$$

dont la solution est $(\frac{18}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{2}{9}, 0)^t$. Le polynôme recherché est donc :

$$P_3(x) = \frac{18x^3 - 11x^2 + 2x}{9}$$

Scanné avec CamScanner

Code Matlab 2.2.5

```
A=[0 0 0 1;1/27 1/9 1/3 1;...
    8/27 4/9 2/3 1;1 1 1 1];
B=[0 1/81 16/81 1]';
S=A\B
x=0:0.1:1;
hold on
plot(0,0,'b--o')
plot(1/3,1/81,'b--o')
plot(2/3,16/81,'b--o')
plot(1,1,'b--o')
h=plot(x,(18*x.^3-11*x.^2+2*x)/9);
h.LineWidth = 2;
```

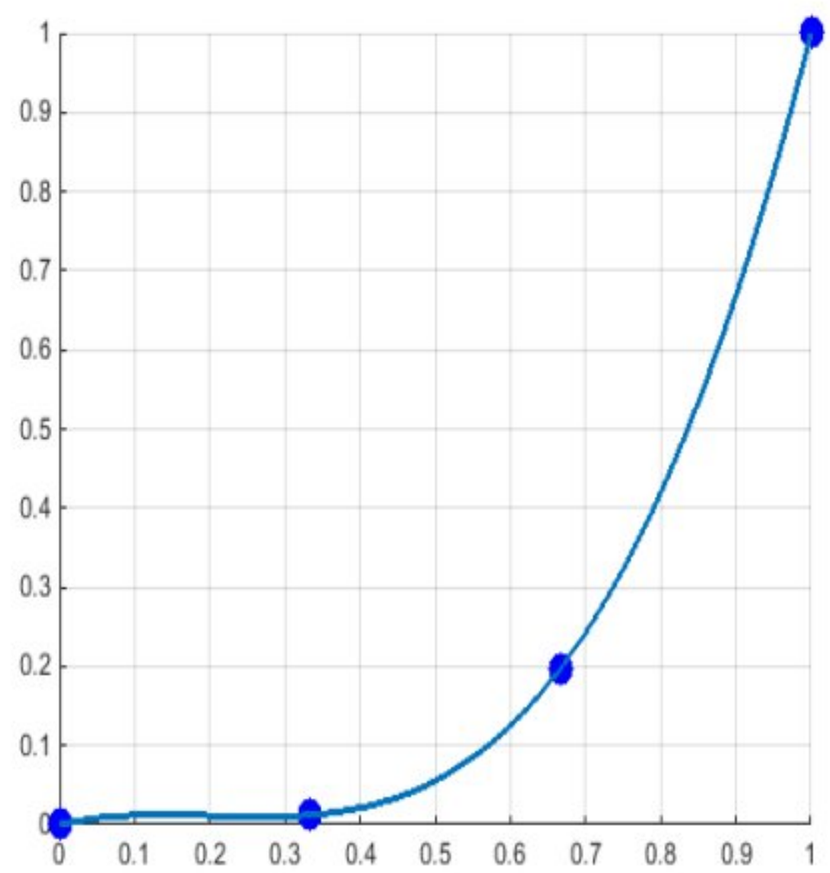


FIGURE 2.1 – $P_3(x) = \frac{18x^3-11x^2+2x}{9}$

2.3 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme d'interpolation.
Prenons l'exemple d'une interpolation linéaire $n = 1$.

On considère deux points $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$ avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1 \\ y_0 = f(x_0) \text{ et } y_1 = f(x_1) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Pour déterminer le polynôme $P_1(x)$ de degré 1 (d'équation : $y = ax + b$) qui passe par deux points distincts (x_0, y_0), (x_1, y_1).

On peut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} ax_0 + b &= y_0 \\ ax_1 + b &= y_1 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} a = & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ b = & y_0 - ax_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \end{cases}$

On a : $P_1(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \dfrac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$

avec $P_1(x_0) = y_0$ et $P_1(x_1) = y_1$

On pose $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ et $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \end{aligned}$$

On a $P_1(x_0) = y_0$ et $P_1(x_1) = y_1$

car

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Considérons maintenant, 3 points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1, \ x_0 \neq x_2, \ \text{et } x_1 \neq x_2 \\ y_0 = f(x_0), \ y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2) \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme $P_2(x)$ de degré 2, d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par trois points distincts (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2), on doit construire trois fonctions $L_i(x)$. Le raisonnement et le même, il suffit de poser :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

A. LAMNI

Scanné avec CamScanner

Ces trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi,

$$P_2(x) \quad = \quad y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 associé aux points (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

On analyse le cas général de la même façon. L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est donc

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

L_i est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 si $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points d'interpolations.

Définition 2.3.1 (Définition des polynômes de Lagrange)

On appelle polynômes de Lagrange associés aux nœuds $\{x_i\}_{i=0,\cdots,n}$, les $n+1$ polynômes $L_i \in \mathcal{P}_n, i = 0, \cdots, n$, définis par

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Proposition 2.3.2

Les polynômes de Lagrange $\{L_i\}_{i=0,\cdots,n}, n \geq 1$, sont tous de degré n, vérifient $L_i(x_j) = \delta_{ij},\ i, j = 0, \cdots, n$, et forment une base de $\mathcal{P}_n$.

Preuve

Le résultat est évident si $n = 1$. Si $n \geq 1$, les deux premières propriétés découlent directement de la définition des polynômes de Lagrange.

La famille $\{L_i(x)\}_{i=0,\cdots,n}$ est composée de $n+1$ éléments. Pour montrer qu'elle forme une base de $\mathcal{P}_n$, qui est de dimension $n+1$, il faut et il suffit d'établir que les $L_i(x)$ sont linéairement indépendants.

Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Scanné avec CamScanner

On a, pour $x = x_j$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j, \quad j = 0, \cdots, n$$

Donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j = 0, \cdots, n$.
Ainsi la famille $\{L_i(x)\}_{i=0,\cdots,n}$ forme une base de l'espace $\mathcal{P}_n$ (espace des polynômes de degré $\geq n$), appelée **Base de Lagrange**.

Théorème 2.3.3

Soient $n+1$ points distincts x_i réels et $n+1$ réels y_i, il existe un unique polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$P(x_i) = y_i \quad \text{pour} \quad i = 0, ..., n$$

Ce polynôme s'écrit : $\quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

avec $\quad L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ (polynômes de Lagrange)

On a en particulier deux propriétés :

— L_i est de degré n pour tout i

— $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$ c'est-à-dire $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ pour $i \neq j$

Preuve

— **Unicité**

Soient P_n et Q_n deux polynômes de degré inférieur ou égal à n tels que :

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n.$$

Notons $R_n = P_n - Q_n$, ce polynôme est de degré inférieur ou égal à n, et possède au moins $n+1$ racines (les $x_i, i = 0, \cdots, n$), ce qui signifie que R_n ne peut être que le polynôme nul.

— **Existence**

On commence par chercher des polynômes L_j de degré n tels que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad i = 0, \cdots, n$$

Alors L_j s'annule en $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n$ donc L_i s'écrit :

$$L_j(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)$$

$\Rightarrow L_j$ est bien de degré n.

Reste à trouver α. Pour cela, on utilise le fait que $L_j(x_j)$ doit être égal à 1 :

$$L_j(x_j) = 1 = \alpha(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n),$$

Scanné avec CamScanner

soit $\alpha = \frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$.
Donc

$$L_j(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

On pose alors $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$. Comme

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ij} = y_j, \quad j = 0, \cdots, n$$

par unicité, le polynôme P_n est le polynôme cherché.

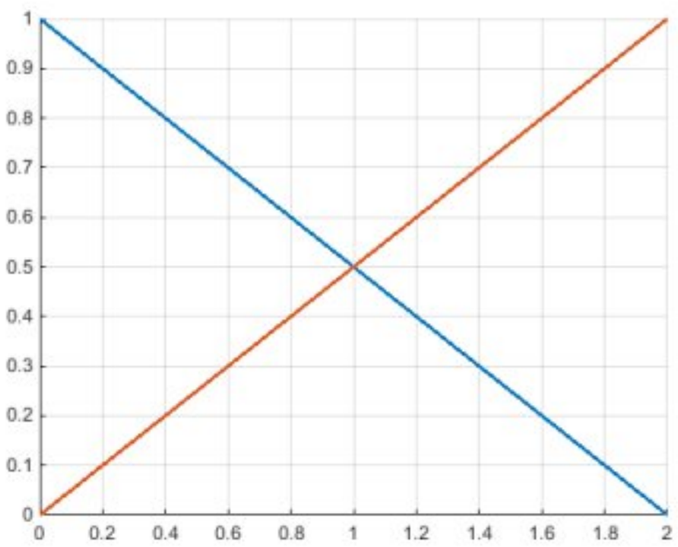
Exemple 2.3.4 (Interpolation de Lagrange : Linéaire ($n = 1$))

Déterminer le polynôme d'interpolation $P_1(x)$ de degré 1 tel que

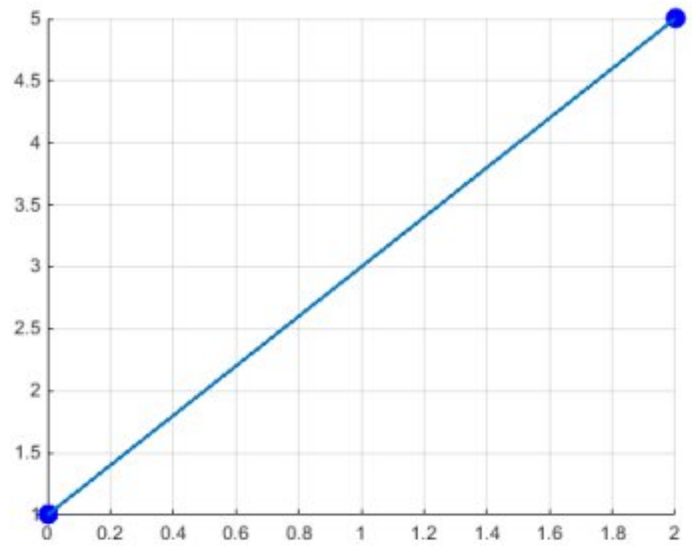
$$P_1(x_i) = f(x_i), \ i = 0, 1$$

avec $y_i = f(x_i), \ i = 0, 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (2, 5)$
On a déjà déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe 2 points.
Donc

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\ &= y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\ &= 1\frac{x-2}{0-2} + 5\frac{x-0}{2-0} \\ &= 2x+1 \end{aligned}$$



(a) La base de Lagrange



(b) Interpolation de Lagrange

FIGURE 2.2 – Interpolation de Lagrange : Linéaire ($n = 1$)

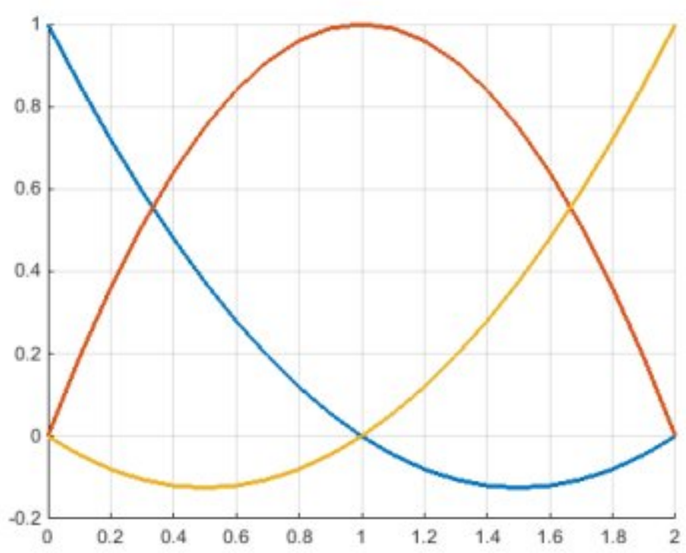
Scanné avec CamScanner

Exemple 2.3.5 (Interpolation de Lagrange : quadratique ($n = 2$))

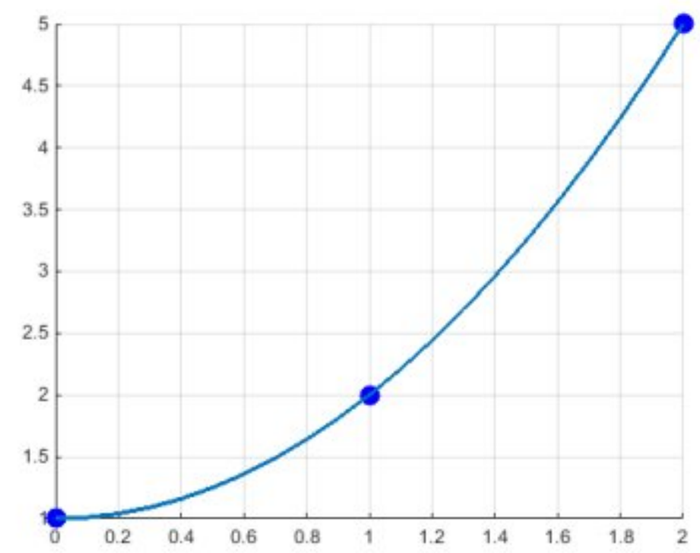
On suppose que $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$.
Déterminer le polynôme $P_2(x)$ d'interpolation polynômiale qui passe par les points $(x_i, y_i)_{i=0,1,2}$
D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 1 \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 5 \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= x^2 + 1
\end{aligned}$$

On a bien $P_2(0) = 1$, $P_2(1) = 2$ et $P_2(2) = 5$



(a) La base de Lagrange



(b) Interpolation de Lagrange

FIGURE 2.3 – Interpolation de Lagrange : quadratique ($n = 2$)

Scanné avec CamScanner

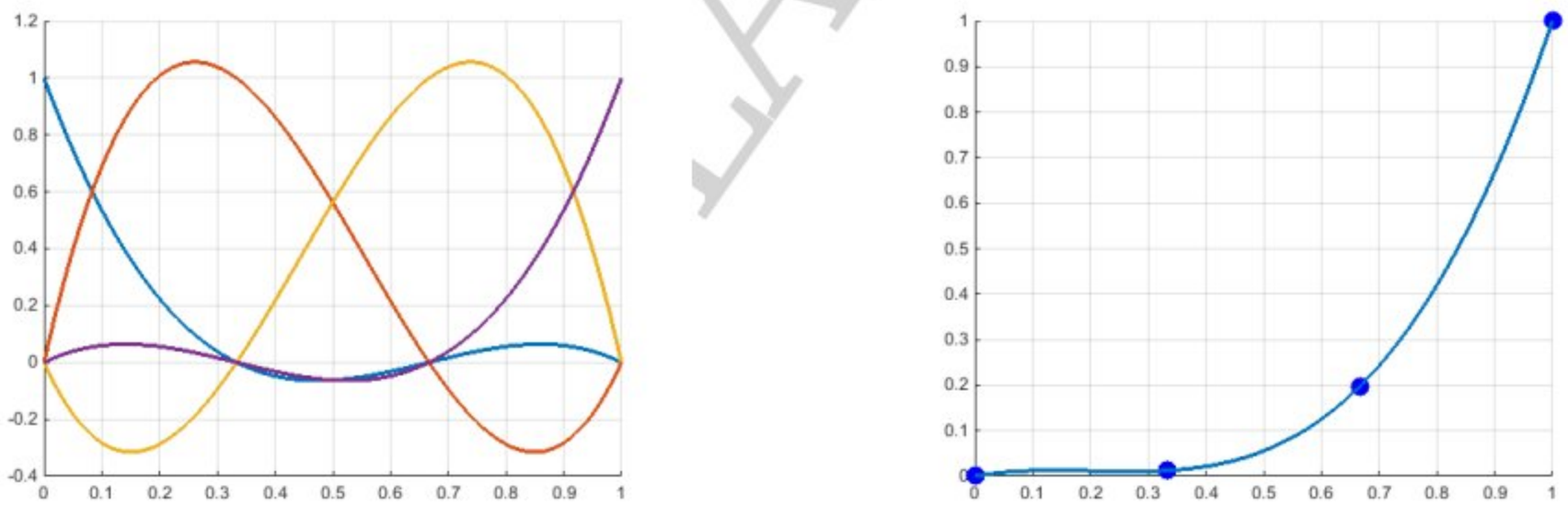
Exemple 2.3.6 (Interpolation de Lagrange : cubique ($n = 3$))

Reprenons les points $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$, $(\frac{2}{3}, \frac{16}{81})$ et $(1, 1)$, pour lesquels nous avons obtenu le polynôme $P_3(x) = \frac{18x^3-11x^2+2x}{9}$ à l'aide de Vandermonde.
La base de Lagrange est donnée par :

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{2}(x-1)(3x-2)(3x-1)\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{9}{2}x(x-1)(3x-2)\\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{9}{2}x(x-1)(3x-1)\\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{2}x(3x-2)(3x-1)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= 0L_0(x) + \frac{1}{81}L_1(x) + \frac{16}{81}L_2(x) + 1L_3(x)\\
&= \frac{18x^3-11x^2+2x}{9}
\end{aligned}
$$



(a) La base de Lagrange

(b) Interpolation de Lagrange

FIGURE 2.4 – Interpolation de Lagrange : quadratique ($n = 3$)

2.4 Polynôme d'interpolation de Newton

La détermination et l'évaluation des polynômes de Lagrange sont assez coûteuses lorsque le nombre de nœuds s'accroît.
Une autre façon de construire $P \in \mathbb{P}_n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ est d'utiliser la formule de Taylor et d'introduire les **différences divisées**.
L'interpolation itérée de Newton-Côtes est un procédé itératif qui permet de calculer le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré n basé sur $(n+1)$ points $(x_i, y_i)_{i=0,\dots,n}$ à partir du

Scanné avec CamScanner

polynôme d'interpolation $P_{(n-1)}(x)$ de degré $(n-1)$ basé sur n points $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n-1}$, en posant

$$P_n(x) = P_{(n-1)}(x) + C(x), \ n \geq 1$$

Définition 2.4.1 (Proposition : Base de Newton)

Les polynômes $1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ constituent une base de $\mathcal{P}_n$ (appelée base de Newton) associée aux nœuds x_i.

Preuve

La famille $\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$ est composée de $n+1$ éléments (polynômes).
Ils sont indépendants parce que de degrés différents, donc forme une base de $\mathcal{P}_n$, qui est de dimension $n+1$.

2.4.2 Différences divisées

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, s'écrit :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \ldots + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} e_0 = 1, \\ e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Avec

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Il faut alors déterminer les coefficients $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, $P_n(x)$ évalué en x_0 donne :

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

De manière générale, on note

$$f[x_i] = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

$\mathbf{f[x_i]}$ est appelée **différence divisée d'ordre 0**.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, P_n évalué en x_1 donne :

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_0] + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_1] \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$\mathbf{f[x_0, x_1]}$ est appelée **différence divisée d'ordre 1**.

On définit les premières différences divisées de la fonction $f(x)$ par :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Le polynôme P_n évalué en x_2 donne :

$$\begin{aligned} P_n(x_2) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f[x_2] \end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0) \\ \alpha_2 &= \frac{f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2 - x_1)} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\right) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0)}{(x_2 - x_1)} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\right) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x_1 - x_0)}{x_2 - x_1} - f[x_0, x_1]\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

$\mathbf{f[x_0, x_1, x_2]}$ est appelée **différence divisée d'ordre 2**.

On obtient alors par récurrence :

$$\alpha_k = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, \ldots, x_k]$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Notation 2.4.3

$\mathbf{f[x_0, \cdots, x_k]}$ est appelée **différence divisée d'ordre** k.
Soit P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_k$, $f[x_0, ..., x_k]$ est le coefficient directeur du polynôme P_k

Remarque 2.4.4

L'ordre des points $x_0, ..., x_k$ n'influence pas la valeur de $f[x_0, ..., x_k]$

Théorème 2.4.5

1. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_n$ s'écrit :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

2. Les coefficients $f[x_0, ..., x_k]$ sont déterminés par la formule recurente suivante :

$$\begin{cases} f[x_0, ..., x_k] = \frac{f[x_1,...,x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ f[x_i] = f(x_i) \end{cases}$$

2.4.6 Différences divisées : Algorithme de Hörner

On décrit une méthode simple et efficace permettant de calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Il s'agit maintenant de calculer les P_k en pratique. Cette manipulation comporte deux étapes : le calcul des $f[\cdots]$ puis la déduction des P_k via la formule de Newton.

La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées de la façon suivante.

etape 0	etape 1	etape 2	...	etape n
$f[x_0]$				
$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$				
$\vdots$				
$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, ..., x_n]$

Scanné avec CamScanner

Remarque 2.4.7

La construction de cette table est simple.

Pour obtenir par exemple $f[x_0, x_1, x_2]$, il suffit de soustraire les 2 termes adjacents $f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$ et de diviser le résultat par $(x_2 - x_0)$.

De même, pour obtenir $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, on soustrait $f[x_0, x_1, x_2]$ de $f[x_1, x_2, x_3]$ et on divise le résultat par $(x_3 - x_0)$.

La formule de Newton utilise la **diagonale principale** de cette table.

$\grave{A}$ de la k^{ieme} étape la case mémoire $table(k)$ contient le coefficient $f[x_0, ..., x_k]$ et on utilise l'algorithme de Hörner pour calculer $P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + ... + (x - x_n)(f[x_0, ..., x_{n-1}]))...)$

Exemple 2.4.8

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	-1	0	7

etape 0	etape 1	etape 2	etape 3
$f[x_0] =$ -2			
$f[x_1] = -1$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ $= \frac{-1+2}{0+1} =$ 1		
$f[x_2] = 0$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ $= \frac{0+1}{1-0} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ $= \frac{1-1}{1+1} =$ 0	
$f[x_3] = 7$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$ $= \frac{7-0}{2-1} = 7$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ $= \frac{7-1}{2-0} = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$ $\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_3]}{x_3-x_0}$ $= \frac{3-0}{2+1} =$ 1

$$P_3(x) = \text{-2} + \text{1}\,(x - x_0) + \text{0}\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \text{1}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Soit en développant l'expression de P_3 dans la base canonique :

$$P_3(x) = x^3 - 1$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 2.4.9

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x_i) = x_i^4$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$	1

etape 0	etape 1	etape 2	etape 3
0			
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$		
$\frac{16}{81}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	
1	$\frac{65}{27}$	$\frac{25}{9}$	2

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{27}(x - x_0) + \frac{7}{9}(x - x_0)(x - x_1) + 2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Soit en développant l'expression de P_3 dans la base canonique :

$$P_3(x) = \frac{18x^3 - 11x^2 + 2x}{9}$$

Exercice 2.4.10

On considère l'ensemble de points suivants

$$(0,0), \quad (\frac{\pi}{2}, \pi^2), \quad (\pi, 0)$$

— Calculer le polynôme d'interpolation P de Newton passant par ces trois points.

— Vérifier est ce que P interpôle la fonction $f(x) = \pi^2 \ \sin(x)$.

Exercice 2.4.11

Soient $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble de points suivants

$$x_0 = x - h, \quad x_1 = x, \quad x_2 = x + h$$

— Pour $f(x) = 3x^2 + 1$, calculer la différence divisée $f[x_0, x_1, x_2]$, $f[x_1, x_0, x_2]$ et $f[x_0, x_2, x_1]$.

2.5 Algorithme d'Aitken/Neville

La méthode est recurrente, elle permet d'exprimer un polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $m + 1$ au moyen de 2 polynômes d'interpolation de Lagrange de degré m.

Scanné avec CamScanner

Lemme 2.5.1 (Lemme d'Aitken)

Soit $X = \{x_0, ..., x_m\}$ un ensemble de point d'interpolation dans $[a, b]$ et soient S et T deux sous ensembles non vide de X
(avec $S \neq X,\ T \neq X,\ card(S) = card(T) = card(X) - 1$) ayant tous des points communs sauf $x_i \in S$ et $x_j \in T$ on a alors :

$$P_{S\cup T} = \frac{(x_i - x)P_T(x) - (x_j - x)P_S(x)}{x_i - x_j}$$

où P_S désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points de S.

Remarque 2.5.2

Le choix des sous ensembles S et T est arbitraire, on va se restreindre à deux choix classique dûs à Aitken et Neville.

2.5.3 Algorithme d'Aitken

Proposition 2.5.4

On construit des polynômes $P_{i,m}$ de degré m par la formule recurrente suivante :

$$\begin{cases} P_{i,0}(x) = f(x_i) & i = 0, ..., n \\ P_{i,m+1}(x) = \frac{(x_i - x)P_{m,m}(x) - (x_m - x)P_{i,m}(x)}{x_i - x_m} & i = m+1, ..., n \end{cases}$$

Preuve

On montre ce résultat par récurrence sur m.

— $P_{i,0}(x) \in \mathbb{P}_0$ est interpole f aux points x_i.
— On suppose que $P_{m,m} \in \mathbb{P}_m$ soit le polynome qui interpole f aux points $x_0, x_1, ..., x_m$ et $P_{i,m} \in \mathbb{P}_m$ soit le polynome qui interpole f aux points $x_i, x_{i+1}, ..., x_m$ et on montre que $P_{i,m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$ est le polynome qui interpole f aux points $x_0, x_1, ..., x_m$
Il est evident que $P_{i,m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$

Maintenant,
— pour $x = x_m$, on a

$$\begin{aligned} P_{i,m+1}(x_m) &= \frac{(x_i - x_m)\overbrace{P_{m,m}(x_m)}^{f(x_m)} - \overbrace{(x_m - x_m)}^{0} P_{i,m}(x_m)}{x_i - x_m} \\ &= \frac{(x_i - x_m)f(x_m)}{x_i - x_m} = f(x_m) \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

— pour $x = x_i$, on a

$$\begin{aligned} P_{i,m+1}(x_i) &= \frac{\overbrace{(x_i - x_i)}^{0} P_{m,m}(x_i) - (x_m - x_i)\overbrace{P_{i,m}(x_i)}^{f(x_i)}}{x_i - x_m} \\ &= \frac{(x_i - x_m) f(x_i)}{x_i - x_m} = f(x_i) \end{aligned}$$

— pour $x = x_l$, $l \in \{i+1, ..., m-1\}$ on a

$$\begin{aligned} P_{i,m+1}(x_l) &= \frac{(x_i - x_l)\overbrace{P_{m,m}(x_l)}^{f(x_l)} - (x_m - x_l)\overbrace{P_{i,m}(x_l)}^{f(x_l)}}{x_i - x_m} \\ &= \frac{(x_i - x_m) f(x_l)}{x_i - x_m} = f(x_l) \end{aligned}$$

D'après l'unicité de l'interpolant on a le résultat.

Remarque 2.5.5

On peut resumer ces formules dans le tableau triangulaire suivant

$x_j \parallel m$	0	1	2	3	...	i	...	n
x_0	$P_{0,0}$							
x_1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$						
x_2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$					
$\vdots$								
x_n	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	$P_{n,3}$		...		$P_{n,n}$

Exemple 2.5.6

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	-1	0	7

etape 0	etape 1	etape 2	etape 3
$P_{0,0} = -2$			
$P_{1,0} = -1$	$P_{1,1} = \frac{(x_1-x)P_{0,0}-(x_0-x)P_{1,0}}{x_1-x_0} = \frac{(0-x)(-2)-(-1-x)(-1)}{0+1} = x-1$		
$P_{2,0} = 0$	$P_{2,1} = \frac{(x_2-x)P_{0,0}-(x_0-x)P_{2,0}}{x_2-x_0} = \frac{(1-x)(-2)-(-1-x)0}{1+1} = x-1$	$P_{2,2} = \frac{(x_2-x)P_{1,1}-(x_1-x)P_{2,1}}{x_2-x_1} = \frac{(2-x)(-2)+(1+x)7}{1-0} = x-1$	
$P_{3,0} = 7$	$P_{3,1} = \frac{(x_3-x)P_{0,0}-(x_0-x)P_{3,0}}{x_3-x_0} = \frac{(2-x)(-2)-(-1-x)7}{2+1} = 3x+1$	$P_{3,2} = \frac{(x_3-x)P_{1,1}-(x_0-x)P_{3,1}}{x_3-x_0} = \frac{(2-x)(x-1)+x(x-1)}{2-0} = x^2+2x-1$	$P_{3,3} = x^3 - 1$

$$P_{3,3} = \frac{(x_3-x)P_{2,2}-(x_2-x)P_{3,2}}{x_3-x_2}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 2.5.7

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x_i) = x_i^4$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$	1

	0	1	2	3
x_0	0			
x_1	$\frac{1}{81}$	$\frac{x}{27}$		
x_2	$\frac{16}{81}$	$\frac{8x}{27}$	$\frac{7x^2-2x}{9}$	
x_3	1	x	$\frac{13x^2-4x}{9}$	$\frac{18x^3-11x^2+2x}{9}$

2.5.8 Algorithme de Neville

Proposition 2.5.9

On construit des polynômes $Q_{i,m}$ de degré m par la formule recurrente suivante :

$$\begin{cases} Q_{i,0}(x) = f(x_i) & i = 0, ..., n \\ Q_{i,m+1}(x) = \frac{(x_i - x)Q_{i-1,m}(x) - (x_{i-m-1} - x)Q_{i,m}(x)}{x_i - x_{i-m-1}} & i = m+1, ..., n, \\ & m = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

Preuve

On montre ce résultat par récurrence sur m.

— $Q_{i,0}(x) \in \mathbb{P}_0$ est interpole f aux points x_i.

— On suppose que $Q_{i-1,m} \in \mathbb{P}_m$ soit le polynome qui interpole f aux points $x_{i-m+1}, x_1, ..., x_{i-1}$ et $Q_{i,m} \in \mathbb{P}_m$ soit le polynome qui interpole f aux points $x_{i-m}, ..., x_i$ et on montre que $Q_{i,m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$ est le polynome qui interpole f aux points $x_{i-m+1}, x_1, ..., x_i$
Il est evident que $Q_{i,m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$

Maintenant,

— pour $x = x_m$, on a

$$\begin{aligned} Q_{i,m+1}(x_{i-m+1}) &= \frac{(x_i - x_{i-m+1})\overbrace{Q_{i-1,m}(x_{i-m+1})}^{f(x_{i-m+1})} - \overbrace{(x_{i-m+1} - x_{i-m+1})}^{0} Q_{i,m}(x_{i-m+1})}{x_i - x_{i-m+1}} \\ &= \frac{(x_i - x_{i-m+1})f(x_{i-m+1})}{x_i - x_{i-m+1}} = f(x_{i-m+1}) \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

— pour $x = x_i$, on a

$$\begin{aligned} Q_{i,m+1}(x_i) &= \frac{\overbrace{(x_i - x_i)}^{0} Q_{i-1,m}(x_i) - (x_{i-m+1} - x_i)\overbrace{Q_{i,m}(x_i)}^{f(x_i)}}{x_i - x_{i-m+1}} \\ &= \frac{(x_i - x_{i-m+1}) f(x_i)}{x_i - x_{i-m+1}} = f(x_i) \end{aligned}$$

— pour $x = x_l$, $l \in \{i-m, ..., i-1\}$ on a

$$\begin{aligned} Q_{i,m+1}(x_l) &= \frac{(x_i - x_l)\overbrace{Q_{i-1,m}(x_l)}^{f(x_l)} - (x_{i-m+1} - x_l)\overbrace{Q_{i,m}(x_l)}^{f(x_l)}}{x_i - x_{i-m+1}} \\ &= \frac{(x_i - x_{i-m+1}) f(x_l)}{x_i - x_{i-m+1}} = f(x_l) \end{aligned}$$

D'après l'unicité de l'interpolant on a le résultat.

Remarque 2.5.10

On peut resumer ces formules dans le tableau triangulaire suivant

$x_j \parallel m$	0	1	2	3	...	i	...	n
x_0	$Q_{0,0}$							
x_1	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$						
x_2	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$					
$\vdots$								
x_n	$Q_{n,0}$	$Q_{n,1}$	$Q_{n,2}$	$Q_{n,3}$		...		$Q_{n,n}$

Exemple 2.5.11

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	-1	0	7

etape 0	etape 1	etape 2	etape 3
$Q_{0,0}$ =-2			
$Q_{1,0}$ =-1	$Q_{1,1} = \frac{(x_1-x)Q_{0,0}-(x_0-x)Q_{1,0}}{x_1-x_0}$ $= \frac{(0-x)(-2)-(-1-x)(-1)}{0+1} = x-1$		
$Q_{2,0} = 0$	$Q_{2,1} = \frac{(x_2-x)Q_{1,0}-(x_1-x)Q_{2,0}}{x_2-x_1}$ $= x-1$	$Q_{2,2} = \frac{(x_2-x)Q_{1,1}-(x_0-x)Q_{2,1}}{x_2-x_0}$ $= x-1$	
$Q_{3,0} = 7$	$Q_{3,1} = \frac{(x_3-x)Q_{2,0}-(x_2-x)Q_{3,0}}{x_3-x_2}$ $= 7x-7$	$Q_{3,2} = \frac{(x_3-x)Q_{2,1}-(x_1-x)Q_{3,1}}{x_3-x_1}$ $= 3x^2-2x-1$	$Q_{3,3} = x^3 - 1$

$$Q_{3,3} = \frac{(x_3-x)Q_{2,2}-(x_0-x)Q_{3,2}}{x_3-x_0}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 2.5.12

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x_i) = x_i^4$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$	1

	0	1	2	3
x_0	0			
x_1	$\frac{1}{81}$	$\frac{x}{27}$		
x_2	$\frac{16}{81}$	$\frac{45x-14}{81}$	$\frac{7x^2-2x}{9}$	
x_3	1	$\frac{65x-38}{27}$	$\frac{25x^2-20x+4}{9}$	$\frac{18x^3-11x^2+2x}{9}$

Exercice 2.5.13

On considère l'ensemble de points suivants

$$(0,0), \quad (\frac{\pi}{2}, \pi^2), \quad (\pi, 0)$$

— Calculer le polynôme d'interpolation P d'Aitken passant par ces trois points.
— Calculer le polynôme d'interpolation Q de Neville passant par ces trois points.

2.6 Etude de l'erreur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, on construit le polynôme $P(x)$ qui interpole les valeurs de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ ($x_i \in [a,b]$), ce qui conduit à $y_i = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Quelle est alors l'erreur commise si on considère le polynôme $P(x)$ comme étant une approximation de la fonction f ?
Pour mesurer la qualité de cette approximation, nous devons estimer l'erreur entre $f(x)$ et $P(x)$, c'est-à-dire trouver une majoration de la valeur absolue de $P(x) - f(x)$.

2.6.1 Etude de l'erreur : cas de Lagrange

Théorème 2.6.2

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ points distincts dans $[a,b]$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Alors pour tout $x \in [a,b]$ il existe un point $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi), \tag{2.3}$$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Scanné avec CamScanner

Pour la démonstration, nous avons besoin du théorème de **Rolle** généralisé.

Théorème 2.6.3 (Théorème de **Rolle** généralisé)

Si f est un fonction continue sur $[a, b]$et n fois derivable sur $]a, b[$ qui s'annule en $n+1$ points $x_i,\ i = 0, \cdots, n$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Remarque 2.6.4

L'énonce habituel du théorème de Rolle correspond au cas $n = 1$.

Preuve

Fixons $x \in [a, b]$.

— Si $x = x_i$

on a $\pi_{n+1}(x_i) = 0$. Donc tout point ξ convient. c-à-d la formule (2.3) donne seulement $0 = 0$.

— Si x est distinct des points x_i,

soit Q_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux points $x, x_0, x_1, ..., x_n$.
Par construction on a : $f(x) - P(x) = Q_{n+1}(x) - P(x)$.
Or $Q_{n+1} - P$ est de degré $\leq n+1$ et s'annule aux points $x_0, x_1, ..., x_n$.
Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $Q_{n+1}(t) - P(t) = c\pi_{n+1}(t)$.
Posons maintenant, $g(t) = f(t) - Q_{n+1}(t) = f(t) - P(t) - c\pi_{n+1}(t)$.
Alors g admet $n+2$ racines distincts et d'après le Théorème de **Rolle** généralisé, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
D'autre part on a : $P \in \mathbb{P}_n$ c-à-d $P^{(n+1)} = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$
D'où la valeur de c : $c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

2.6.5 Etude de l'erreur : cas de Newton

Dans le cas de l'erreur d'interpolation à partir de la forme de Newton, on a :

$$f(x) - P_n(x) = f[x, x_0, ..., x_n]\pi_n(x).$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ Comme on a la même fonction f selon les mêmes points x_i pour $i = 0, ..., n$, il s'agit de deux formes du même polynôme, et l'erreur d'interpolation est la même, d'où

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_n(x) = f[x, x_0, ..., x_n]\pi_n(x).$$

Déterminer l'erreur d'interpolation polynômiale dans le cas de l'interpolation parabolique
On approche la fonction $f(x)$ par la parabole passant par les points $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$. Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que
$P_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ et 2
avec $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$ et 2, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$

A. LAMMNI

Scanné avec CamScanner

D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\ &= 1\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} + 2\frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} + 5\frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} \\ &= x^2+1 \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Si $|f^{(3)}(x)| \leq M$ alors $\forall x \in [0,2], |f(x) - P_2(x)|$

$$\begin{aligned} |f(x) - P_2(x)| &\leq \frac{M}{6}|x(x-1)(x-2)| \\ &\leq \frac{M}{6}x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

le maximum de $u(x) = x(x-1)(x-2)$ est atteint en $x^* = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ d'où $\frac{1}{6}u(x^*) = \frac{1}{6}\frac{3-\sqrt{3}}{3}(\frac{3-\sqrt{3}}{3} - 1)(\frac{3-\sqrt{3}}{3} - 2) = 0.06415 \approx 6.4 \times 10^{-2}$.

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 6.4 \times 10^{-2} \times M$$

2.6.6 Phénomène de Runge

Proposition 2.6.7

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,\ b]$, alors :

$$\forall x \in [a,\ b], |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Remarque 2.6.8 (Phénomène de Runge)

Intuitivement, connaissant la Proposition 2.6.7 et sachant que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$, on peut penser qu'en augmentant le degré du polynôme interpolateur de f sur $[a,\ b]$, celui-ci va approcher de mieux en mieux la fonction f.
Mais on ne connait pas $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} M_{n+1}$.
En réalité, nous allons voir que notre intuition est fausse, et qu'en pratique on obtient souvent le résultat opposé à celui attendu : c'est le **phénomène de Runge**.

LAMNIT

Scanné avec CamScanner

En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux.

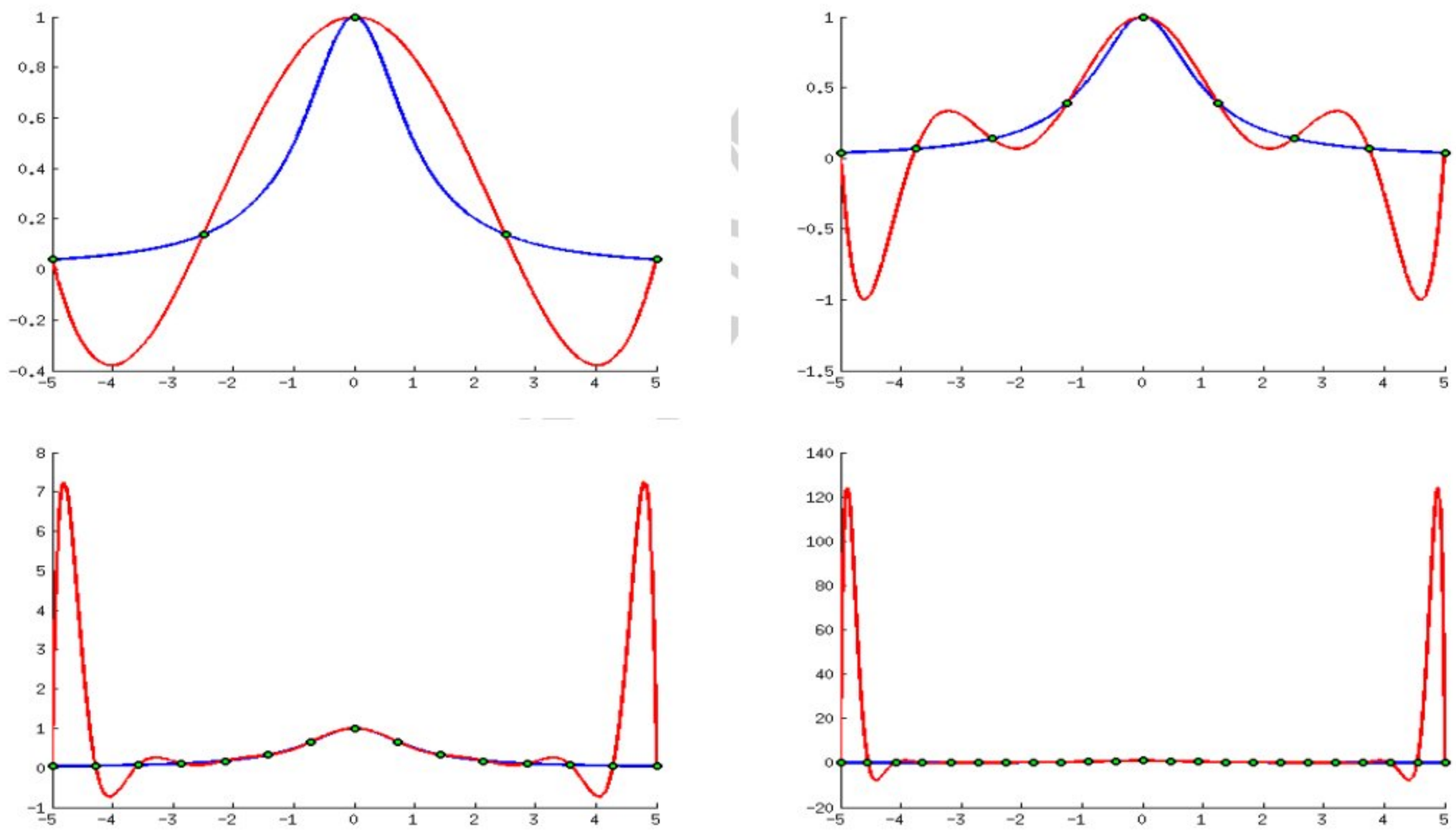
Si on a valeurs expérimentales. L'interpolation polynômiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.

La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points.

Exemple 2.6.9

Soit la fonction dite de Runge $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $[-5,\ 5]$.

En interpolant avec une subdivision régulièr et $n = 4$, $n = 8$, $n = 14$ et $n = 22$.



2.6.10 Comment évité le phénomène de Runge

Le phénomène peut être évité si dans un intervalle arbitraire $[a,\ b]$, on choisit comme points d'interpolation ce que l'on appelle les nIJuds de **Chebyshev-Gauss-Lobatto**

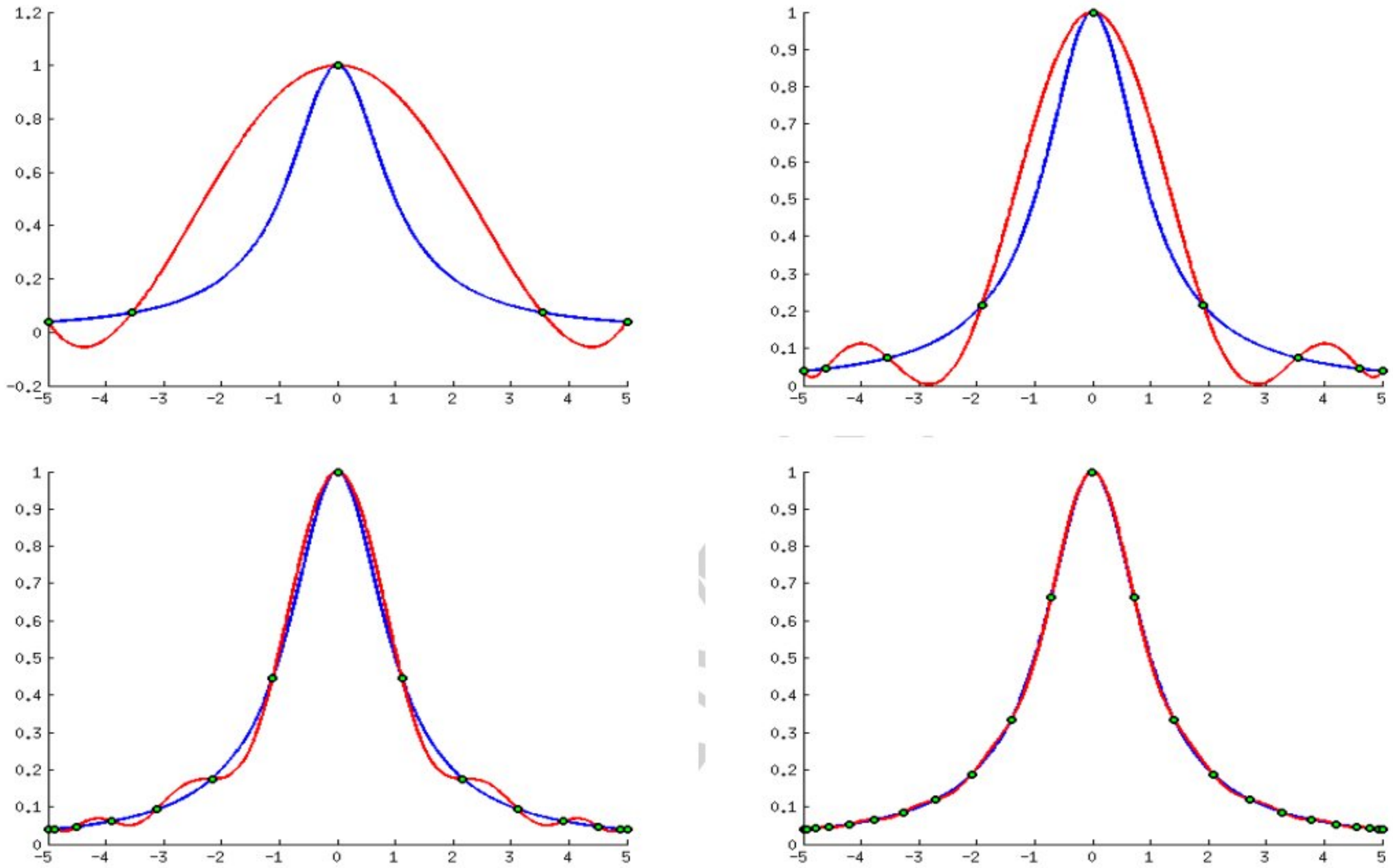
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right),\ i = 0, ..., n$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 2.6.11

Soit la fonction dite de Runge $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $[-5,\ 5]$.

En interpolant avec une subdivision régulier et $n = 4$, $n = 8$, $n = 14$ et $n = 22$.



Exercice 2.6.12

Soit n un entier naturel.

— Calculer l'erreur commise en interpolant la fonction $f(t) = t^n$, définie sur l'intervalle $[0,\ 1]$, en les points $t_i,\ i = 0, 1, ..., n$, à l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n. Expliquer le résultat.

— Même question pour la fonction $g(t) = t^{n+1}$.

Scanné avec CamScanner

2.7 Exercices

1. Écrire le polynôme d'interpolation associé aux points :

$$(x_i, f(x_i)) = (-1, \frac{-3}{2}),\ (\frac{-1}{2},\ 0),\ (0,\ \frac{1}{4}),\ (\frac{1}{2},\ 0),\ (1,\ 0)$$

   à l'aide :

   (a) des déterminants

   (b) de Lagrange

   (c) des différences divisées

   (d) de Néville

   (e) Aitken

2. Déterminer le polynôme d'interpolation P_2 de Lagrange de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ par rapport aux points $0,\ \frac{3}{4},\ 1$. Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée. Comparer a l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.

3. Le polynôme P interpole la fonction f suivante aux points d'abscisses $1,\ 2,$ et 4.

$$f(x) = \frac{4}{x}, \qquad P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$$

   (a) Vérifier que P interpole bien f aux points d'abscisses $1,\ 2,$ et 4.

   (b) Calculer l'erreur $E(x) = f(x) - P(x)$

   (c) Quand cette erreur prend elle sa valeur maximale pour x dans $[1,\ 4]$?

   (d) Que faire pour réduire cette erreur ?

4. Soit $E = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ un ensemble de points. On définit par récurrence une suite de polynômes d'interpolation sur des sous-ensembles de E de la manière suivante :
   — à l'ordre 0, on définit $(n+1)$ polynômes de degré 0, notés $T_0^{(i)}$, pour $0 \leq i \leq n$, par $T_0^{(i)}(x) = y_i$
   — à l'ordre $k+1$, on définit par récurrence $T_{k+1}^{(i)}(x) = \frac{(x_{i+k+1}-x)T_k^{(i)}(x)+(x_i-x)T_k^{(i+1)}(x)}{x_{i+k+1}-x_i}$

   (a) Monter par récurrence, que $T_{k+1}^{(i)}(x_j) = y_j$ pour $i \leq j \leq i+k+2$ et que $T_{k+1}^{(i)}$ est un polynôme de degré $(k+1)$.

   (b) En déduire que $T^{(}0)_n$ est le polynôme d'interpolation de E.

   (c) Calculer le nombre de multiplications nécessaires pour le calcul de $T_n^{(0)}(x)$ pour x donné. Comparer avec la formule classique de Lagrange.

5. Pour tout $x \in [-1,\ 1]$ posons : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

   (a) Montrer les relations suivantes : $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

   (b) En déduire que T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}.

   (c) Montrer que T_n a des zéros simples aux points : $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi), \quad k = 1, \cdots, n$

   (d) Montrer que T_n atteint son extremum sur $[-1,\ 1]$ aux points : $x'_k = \cos(\frac{k}{n}\pi), \quad k = 0, \cdots, n$ pour lesquels il prend alternativement les valeurs -1 et 1.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

(e) Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,\ b], \mathbb{R})$. Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé aux points de Tchebychev, i.e. :

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi)$$

Montrer que :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \max_{x\in[a,\ b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

(indication : se ramener à l'intervalle $[-1,\ 1]$ par le changement de variable $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$).

6. Soit les trois points $q_1(0,\ 1)$, $q_2(\frac{\pi}{16},\ \cos(\frac{\pi}{16}))$ et $q_3(\frac{\pi}{8},\ \cos(\frac{\pi}{8}))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$.

   (a) Obtenir à l'aide de la formule de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points et en déduire une approximation de $\cos(\frac{\pi}{32})$.

   (b) Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ et en déduire une approximation de $\cos(\frac{\pi}{32})$.

   (c) Sachant que $f'(0) = 0$, calculer le polynôme de degré 2, passant par les points q_1 et q_3 dont la dérivée en est égale à 0 et en déduire une approximation de $\cos(\frac{\pi}{32})$.

   (d) Des trois approximations $\cos(\frac{\pi}{32})$ que vous avez obtenues, laquelle est la plus précise ? Pourquoi ?

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Chapitre 3

Dérivation numérique

3.1 Introduction

Le calcul analytique des dérivées est souvent difficile ou coûteux.
Alors que dans la plupart des problèmes concrets, l'expression de f peut ne pas être connue ou bien f est connue que par des valeurs en un certain nombre de points.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On veut calculer une approximation de la dérivée de f en un point $x \in \mathbb{R}$ par la formule

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cette approximation nécessite la connaissance de f en x et $x + h$.
L'idée est alors d'approcher f par un **polynôme d'interpolation** et de considérer sa dérivée comme une approximation de la dérivée de f.
Une autre solution consiste à utiliser un développement de **Taylor** de f. En combinant les termes de développements de Taylor calculés en différents points, il sera alors possible de calculer la dérivée de f selon différentes formules.

On se propose de trouver des méthodes numériques pour approcher cette dérivée, le calcul effectif de la dérivée pouvant être soit impossible (dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple), soit trop difficile à évaluer, soit imprécis (fonction donnée par un ensemble discret de valeurs : données expérimentales par exemple).
L'idée la plus immédiate est de calculer le quotient différentiel ci-dessus avec une valeur de h "assez petite", i.e., on pose

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivation numérique nous permet de trouver une estimation de la dérivée ou de la pente d'une fonction, en utilisant seulement un ensemble discret de points.

3.2 Dérivée première : Formules à deux points

3.2.1 Formule de différences progressives (différence avant)

Soit f une fonction suffisamment dérivable sur $[a, b]$, et $x \in [a, b]$.
On se propose de calculer une approximation de la dérivée $f'(x)$.
Soit $h > 0$ tel que $x + h \in]a, b[$, une première approximation de $f'(x)$ utilise la pente de la droite passant par $(x, f(x))$ et $(x + h, f(x + h))$.

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\eta) \quad \text{avec} \quad x \leq \eta \leq x+h$$

Formule progressive : $f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Proposition 3.2.2

Soit une fonction f deux fois dérivable dont on souhaite évaluer la dérivée en x. On définit l'erreur comme $E(h) := f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Pour tout h, $\exists\, \xi \in [x,\ x+h]$ et $C > 0$ tels que $|E(h)| < \frac{C}{2}h$.

Preuve

Par un développement de Taylor, on obtient
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h}{2}f"(\xi)$. En réarrangeant, on obtient $f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{h}{2}f"(\xi)$
c'est-à-dire
$|E(h)| < \frac{C}{2}h$
si on suppose que $|f"|$ est bornée par C sur $[x,\ x+h]$.

Définition 3.2.3

On dit que la formule de dérivation est d'ordre n, s'il existe une constante C dépendant de f telle que :

$$|E(h)| < C\ h^n.$$

La constante C est dite le facteur de convergence de la méthode.

Remarque 3.2.4

— Si l'ordre $n = 1$ et $C < 1$, la convergence est dite linéaire.
— La convergence est autant plus rapide que la valeur de n est grande.

Définition 3.2.5 (Ordre numérique)

Soit $E_{k+1} = |f'(x)_{\text{val.approchée}} - f'(x)_{\text{val.exact}}|$. On définit l'ordre numérique par la formule suivante :

$$Ordre = \frac{\log(E_{k+1})}{\log(E_k)}.$$

Remarque 3.2.6

Si $|E(h)| \sim Cte\ h^n$ ($|E(h)| \sim h^n$). On dira qu'elle est d'ordre n et on écrira fréquemment de façon abrégée $|E(h)| \sim O(h^n)$.
Ainsi, L'erreur de la différence avant est en $O(h^1)$ (d'ordre 1).

Scanné avec CamScanner

Remarque 3.2.7 (Exercice)

Cette formule peut être trouvée aussi en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$.

Solution 3.2.8

En effet, posons $(x_0, y_0) = (x, f(x))$ et $(x_1, y_1) = (x+h, f(x+h))$
L'approximation de $f(x) \approx P(x)$, qui peut s'écrire

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

donc

$$P^{'}(x) = L_0^{'}(x)y_0 + L_1^{'}(x)y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemple 3.2.9

Soit $f(x) = 3x^2$, le but est de calculer $f'(1)$ en utilisant la formule de différences progressives avant. Valeur exact $f'(1) = 6$.

h	$f'(1)$	$\lvert E(h)\rvert$	Ordre
0.5000	7.5000	1.5000	0.5850
0.1250	6.3750	0.3750	0.4717
0.0313	6.0938	0.0938	0.6830
0.0078	6.0234	0.0234	0.7736
0.0020	6.0059	0.0059	0.8239
4.8828 $\times 10^{-4}$	6.0015	0.0015	0.8559
1.2207 $\times 10^{-4}$	6.0004	3.6621$\times 10^{-4}$	0.8781
3.0518 $\times 10^{-5}$	6.0001	9.1553$\times 10^{-5}$	0.8943

Ordre théorique $= 1$. Ordre numérique $= 0.8943$.

3.2.10 Formule de différences regressive (différence arrière)

$f'(x)$ utilise la pente de la droite passant par $(x-h, f(x-h))$ et $(x, f(x))$.
La formule de Taylor à l'ordre 2 donne :

$$f(x-h) = f(x) - hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2} f^{''}(\eta) \quad \text{avec} \quad x - h \leq \eta \leq x$$

Formule regressive : $f^{'}(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$
L'erreur est $\frac{h}{2} f^{''}(\eta)$ donc en $O(h)$ (d'ordre 1).

Scanné avec CamScanner

Remarque 3.2.11 (Exercice)

Cette formule peut être trouvée aussi en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points $(x-h, f(x-h))$ et $(x, f(x))$.

3.2.12 Formule de différences centrales (milieu)

Soient h_1, $h_2 > 0$ tels que $x - h_1$ et $x + h_2$ appartiennent à $]a, b[$.
$f'(x)$ utilise la pente de la droite passant par $(x - h_1, f(x - h_1))$ et $(x + h_2, f(x + h_2))$.
Les formules de Taylor à l'ordre 3 donnent :

$$f(x-h_1) = f(x) - h_1 f'(x) + \frac{h_1^2}{2} f''(x) - \frac{h_1^3}{3!} f^{(3)}(c_1) \text{ avec } x - h_1 \leq c_1 \leq x$$

$$f(x+h_2) = f(x) + h_2 f'(x) + \frac{h_2^2}{2} f''(x) + \frac{h_2^3}{3!} f^{(3)}(c_2) \text{ avec } x \leq c_2 \leq x + h_2$$

L'élimination de $f''(x)$ entre ces deux relations donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h_1^2 f(x+h_2) - h_2^2 f(x-h_1) - (h_1^2 - h_2^2) f(x)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \\ &- \frac{h_1^2 h_2 f^{(3)}(c_1) + h_2^2 h_1 f^{(3)}(c_2)}{3!(h_1 + h_2)} \end{aligned}$$

D'où l'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$:

$$f'(x) \simeq \frac{h_1^2 f(x+h_2) - h_2^2 f(x-h_1) - (h_1^2 - h_2^2) f(x)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}$$

Remarque 3.2.13

Dans le cas où $h_1 = h_2 = h$, la approximation de $f'(x)$ devient

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

L'erreur de dérivation vérifie alors l'inégalité :

$$| e(x) | \leq \frac{h^2 \sup | f^{(3)}(c) |}{2 \times 3!}$$

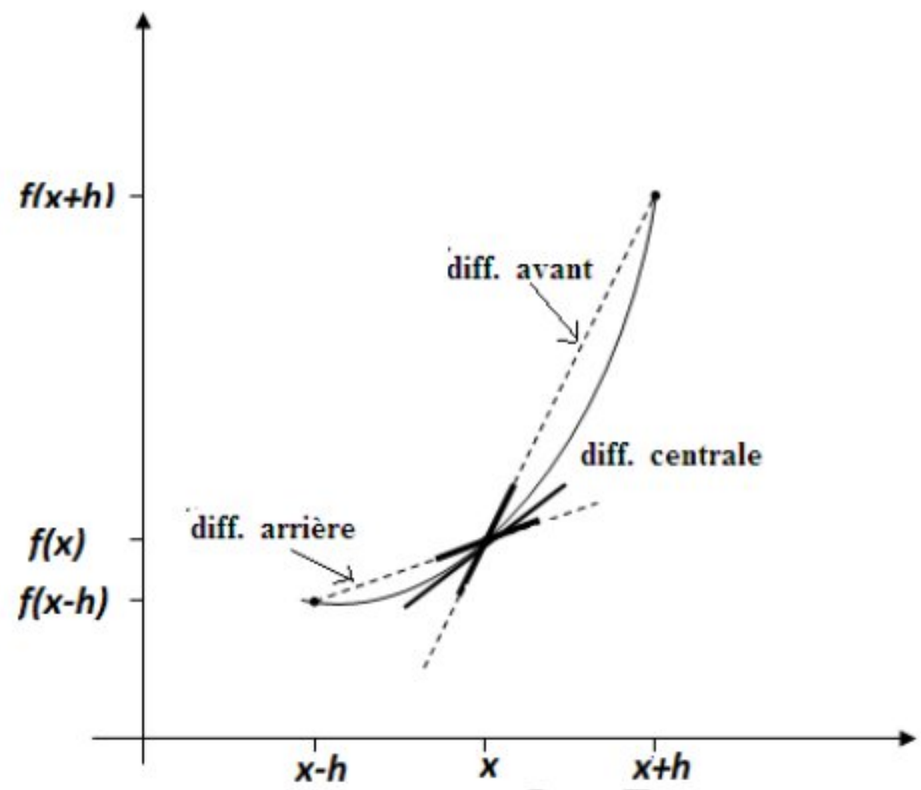
A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Remarque 3.2.14

La formule de difference centrale peut aussi être trouvée à partir du polynôme d'interpolation de Lagrange en 3 points.

Les trois formules classiques de différences sont visualisées sur la figure suivante



Exemple 3.2.15

Pour illustrer les trois formules, considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} (x_1,\ y_1) = (-1,\ 2),\ \ (x_2,\ y_2) = (0,\ 3),\ \ (x_3,\ y_3) = (1, 2), \\ \text{Nous voulons estimer la valeur de : } f'(x_2) \end{cases}$$

— Progressive : $f'(x_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{2-3}{1-0} = -1$
— Regressive : $f'(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{3-2}{0-(-1)} = 1$
— Centrale : $f'(x_2) = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{2-2}{1-(-1)} = 0$

Les données ont été calculé pour la fonction $f(x) = 3 - x^4$:

$$f'(x_2) = f'(0) = 0$$

Exemple 3.2.16

Pour illustrer les trois formules, considérons l'exemple suivant :

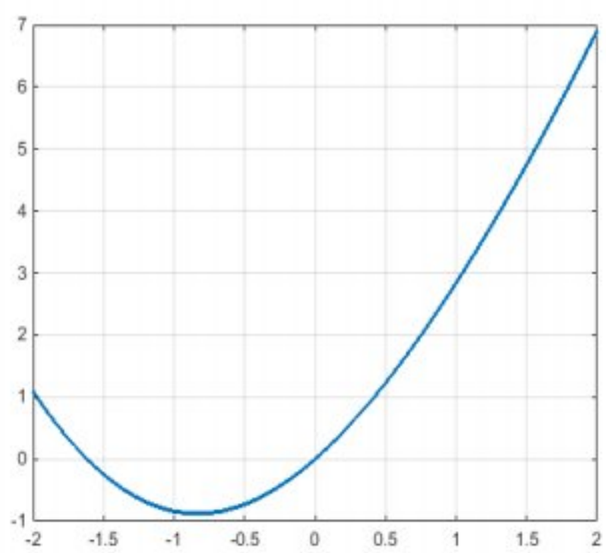
$$f(x) = \sin(x) + x^2 + x$$

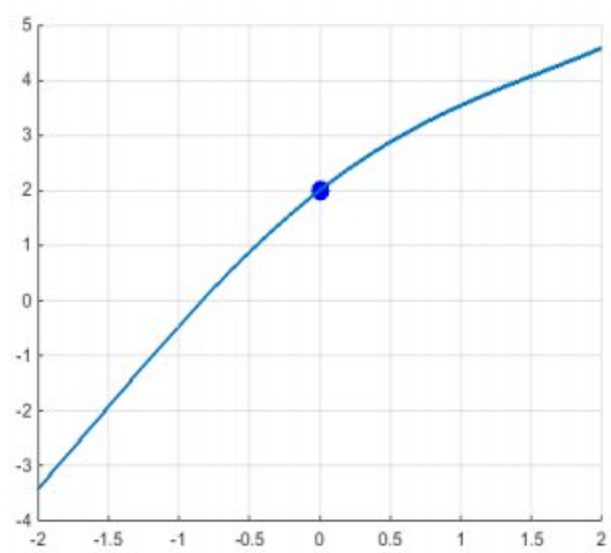
Pour $x = 0$, le tableau suivant permet de voir l'évolution des dérivées numériques en fonction de h et de comparer les résultats des 3 formules de différences
On a $f'(0) = 2$

Scanné avec CamScanner

h	progressives	$e_1(h)$	regressive	$e_2(h)$	centrale	$e_3(h)$
0.5	2.4588	-0.4588	1.4588	0.5411	1.9588	0.0411
0.25	2.2396	-0.2396	1.7396	0.2603	1.9896	0.0103
0.125	2.1224	-0.1223	1.8724	0.1276	1.9974	0.0026
0.0625	2.0618	-0.0618	1.9368	0.0631	1.9993	0.0006
0.0312	2.0310	-0.0310	1.9685	0.0314	1.9998	0.0001
0.0156	2.0155	-0.0155	1.9843	0.0156	1.99996	0.00004

Les figures suivantes présentent la courbe de f et de f' sur l'intervalle $[-2, 2]$





Remarque 3.2.17

On peut interpoler les données par un polynôme au lieu d'utiliser la droite, nous obtenons alors les formules de difference qui utilisent plus de deux points. On suppose que le pas h est constant.
Formule de difference progressive utilisant trois points :

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$$

Formule de difference régressive utilisant trois points :

$$f'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-h)}{2h}$$

3.3 Formules de difference en trois points

La formule d'approximation en 3 points de la derivée première, basée sur le polynôme d'interpolation de Lagrange, n'utilise pas des points équidistants.
Étant donné trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) avec $x_1 < x_2 < x_3$, la formule suivante permet d'approcher la dérivée en un point $x \in [x_1, x_3]$.

Scanné avec CamScanner

Le polynôme de Lagrange est donnée par

$$P(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

où

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

L'approximation de la dérivée première est donnée par $f'(x) \approx P'(x)$, qui peut s'écrire

$$P'(x) = L_1'(x)y_1 + L_2'(x)y_2 + L_3'(x)y_3$$

où

$$L_1'(x) = \frac{2x-x_2-x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$L_2'(x) = \frac{2x-x_1-x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$L_3'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

donc

$$f'(x) = \frac{2x-x_2-x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{2x-x_1-x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{2x-x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

3.4.1 Interpolation de Lagrange et dérivées d'ordre p

En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange les dérivées d'ordre p de f au point x sont calculées par :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_{i,p}(x) \tag{3.1}$$

avec $A_{i,p}(x) = L_{i,n}^{(p)}(x), \quad p \leq n.$

Remarque 3.4.2

— La formule (3.1) est exacte pour les polynômes de degrés $\leq n$.

— Les $A_{i,p}(x)$ sont indépendants de f et peuvent être calculées une fois pour toutes.

Scanné avec CamScanner

Exemple 3.4.3 (Calcul de $f'(x)$)

Pour $n = 2$,

$L_{0,2}(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $A_{0,1}(t) = L'_{0,2}(t) = \frac{t-x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{t-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$L_{1,2}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $A_{1,1}(t) = L'_{1,2}(t) = \frac{t-x_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{t-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$L_{2,2}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$, $A_{2,1}(t) = L'_{2,2}(t) = \frac{t-x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{t-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$f(x) = x^3$, $f'(1) = 3$ (valeur exacte)

$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 8)$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(1) &\simeq f(x_0)A_{0,1}(1) + f(x_1)A_{1,1}(1) + f(x_2)A_{2,1}(1) \\ &= 0(-\tfrac{1}{2}) + 1(0) + 8(\tfrac{1}{2}) \\ &= 4 \text{ (pas } h = 1). \end{aligned}$$

$(x_0, y_0) = (\frac{9}{10}, \frac{729}{1000})$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (\frac{11}{10}, \frac{1331}{1000})$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(1) &\simeq f(x_0)A_{0,2}(1) + f(x_1)A_{1,2}(1) + f(x_2)A_{2,2}(1) \\ &= \tfrac{729}{1000}(-5) + 1(0) + \tfrac{1331}{1000}(5) \\ &= \tfrac{-3645+6655}{1000} \\ &= \tfrac{3010}{1000} \\ &= 3.010 \text{ (pas } h = \tfrac{1}{10}). \end{aligned}$$

Exemple 3.4.4 (Calcul de $f''(x)$)

Pour $n = 2$,

$L_{0,2}(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $A_{0,2}(t) = L''_{0,2}(t) = \frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$L_{1,2}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $A_{1,2}(t) = L''_{1,2}(t) = \frac{2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$L_{2,2}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$, $A_{2,2}(t) = L''_{2,2}(t) = \frac{2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$f(x) = x^3$, $f''(1) = 6$ (valeur exacte)

$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 8)$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(1) &\simeq f(x_0)A_{0,2}(1) + f(x_1)A_{1,2}(1) + f(x_2)A_{2,2}(1) \\ &= 0(1) + 1(-2) + 8(1) \\ &= 6 \text{ (pas } h = 1). \end{aligned}$$

$(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (\frac{3}{2}, \frac{27}{8})$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(1) &\simeq f(x_0)A_{0,2}(1) + f(x_1)A_{1,2}(1) + f(x_2)A_{2,2}(1) \\ &= \tfrac{1}{8}(4) + 1(-8) + \tfrac{27}{8}(4) \\ &= \tfrac{1-16+27}{2} \\ &= 6 \text{ (pas } h = 0.5). \end{aligned}$$

3.4.5 Formules de Taylor et dérivées d'ordre supérieur

Les formules de dérivées d'ordre supérieur, peuvent être trouvées à partir des dérivées du polynôme de Lagrange ou en utilisant les formules de Taylor.

Scanné avec CamScanner

Par exemple, étant donné 3 points $x-h$, x, $x+h$, la formule de la dérivée seconde est donnée par :

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]$$

l'erreur est en $O(h^2)$.

Dérivée seconde à partir du polynôme de Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x) + \frac{h^3}{3!}f(3)(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(}4)(\eta_1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x) - \frac{h^3}{3!}f(3)(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(}4)(\eta_2)$$

$$x \leq \eta_1 \leq x+h \text{ et } x-h \leq \eta_2 \leq x.$$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

l'erreur est en $O(h^2)$.

Pour obtenir les formules de la troisième et la quatrième dérivée, on prend une combinaison linéaire des développement de Taylor, pour $f(x+2h)$, $f(x+h)$, $f(x-h)$ et $f(x-2h)$. Quelques formules centrales d'ordre 2 ($O(h^2)$) :

$$f^{'}(x) \simeq \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$$

$$f^{''}(x) \simeq \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]$$

$$f^{(3)}(x) \simeq \frac{1}{2h^3}[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)]$$

$$f^{(4)}(x) \simeq \frac{1}{h^4}[f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)].$$

Exercice 3.4.6

1. On considère la formule de dérivation suivante :

$$f'(x) = \alpha f(x-h) + \beta f(x)$$

Déterminer les paramètres α et β pour que la formule de dérivation soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

2. On considère la formule de dérivation suivante :

$$f'(x) = \alpha f(x-h) + \beta f(x) + \gamma f(x+h)$$

Déterminer les paramètres α, β et γ pour que la formule de dérivation soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

3. Refaire les questions 1 et 2 en utilisant un développement de Taylor.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Exercice 3.4.7

Soit $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ et P_g sont polynôme d'interpolation de Lagrange aux points 0, $\frac{1}{2}$ et 1.
Le but de l'exercice est d'approcher la valeur $g''(\frac{1}{2})$.

1. Calculer P_g.
2. Calculer $P_g''(\frac{1}{2})$.
3. Posons $D_2 g = 4g(0) - 8g(\frac{1}{2}) + 4g(1)$

   a)- Montrer que $\forall\, Q \in \mathbb{P}_2$ on a $D_2 Q = Q''(\frac{1}{2})$.

   b)- Montrer que $g[0,\ \frac{1}{2},\ 1] = \frac{1}{2} D_2 g$.
4. On pose pour tout $x \in [0,\ 1]$, $r(x) = g(x) - P_g(x)$

   a)- Montrer qu'il existe $\xi \in [0,\ 1]$ tel que $r''(\xi) = 0$

   b)- Montrer que $g''(\frac{1}{2}) - D_2 g = r''(\frac{1}{2})$

   c)- Écrire $r(x)$ en fonction de l'erreur d'interpolation polynômiale.

   d)- En déduire que $\left| g''(\frac{1}{2}) - D_2 g \right| \leq \frac{1}{2} \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |g^{(3)}(x)|$

A. LAMA

Scanné avec CamScanner

Exercice 3.4.8

Soit a et b deux réels et $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$.
On souhaite approcher $D_3 f \equiv f^{(3)}(\frac{2a+b}{3})$ par une expression de type :

$$\Delta^3 f \equiv \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(\tfrac{2a+b}{3}) + \lambda_2 f(\tfrac{a+2b}{3}) + \lambda_3 f(b)$$

de telle sorte que $E(f) \equiv D_3 f - \Delta^3 f$ vérifie :

$$\forall\, P \in \mathbb{P}_3, \qquad E(P) \equiv D_3 P - \Delta^3 P = 0. \tag{3.2}$$

On supposera dans toute la suite que les réels λ_0, λ_1, λ_2 et λ_3 sont tels que la propriété (3.2) soit vérifiée.
Soit P_f le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points a, $\frac{2a+b}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$, b et $r(x) = f(x) - P_f(x)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,\ b[$ tel que $r^{(3)}(c) = 0$.
2. Montrer que $E(f) = r^{(3)}(\frac{2a+b}{3})$.
3. Montrer que $|E(f)| \leq \frac{b-a}{2} \sup\limits_{\xi_x \in [a,\ b]} |f^{(4)}(\xi_x)|$.
4. Posons $Q(x) = -\frac{(b-x)(2a+b-3x)(a+2b-3x)}{2(a-b)^3} f(a) + \frac{(a-x)(2a+b-3x)(a+2b-3x)}{2(a-b)^3} f(b) + \frac{9(a-x)(b-x)(a+2b-3x)}{2(a-b)^3} f(\frac{2a+b}{3}) - \frac{9(a-x)(b-x)(2a+b-3x)}{2(a-b)^3} f(\frac{a+2b}{3})$.
   Montrer que Q interpôle f aux points a, $\frac{2a+b}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$ et b. Conclure.
5. Calculer avec deux méthodes différentes les réels λ_0, λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction de a et b.
6. Montrer que $f[a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b] = \frac{\Delta^3 f}{2}$, où $f[a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b]$ désigne la différence divisée d'ordre 3 de f aux points a, $\frac{2a+b}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$ et b.

Scanné avec CamScanner

3.5 Application

Exemple 3.5.1

Soit à calculer $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ vérifiant :

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x}, & x \in [0,1]; \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

On peut vérifier facilement que $u(x) = 2 - e^{-x}$ est la solution exacte de (3.3). Supposons que le calcule de la solution analytique est difficile ou impossible. On vous propose d'approcher directement $u'(x)$ par la formule de quadrature d'ordre 1 suivante :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad \text{avec } h = \frac{1}{n} \quad \text{et } n > 0$$

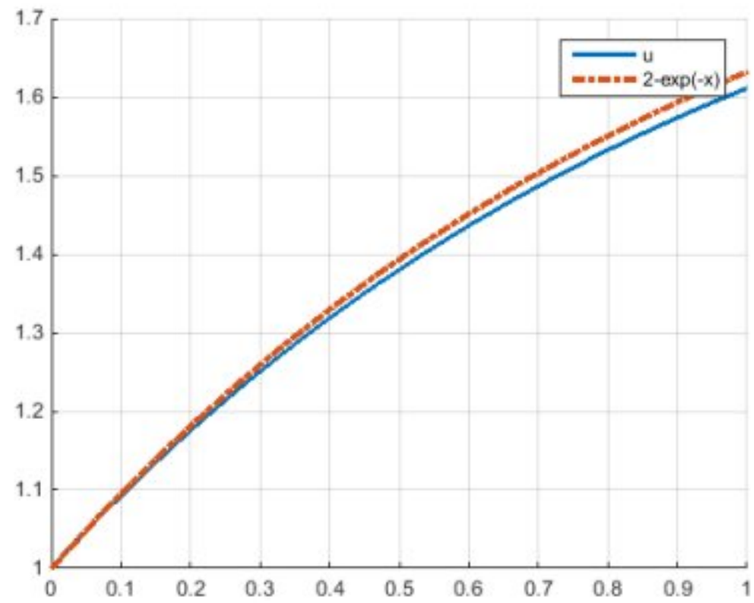
Posons $x_i = i\,h,\ i = 0, \cdots, n$ et notons par $u(x_i) = u_i$. D'après (3.3) on a :

$$\begin{cases} e^{-x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, & i \leq 1; \\ u_0 = 1. \end{cases} \quad \text{c-à-d} \begin{cases} u_{i+1} = u_i + h\,e^{-x_i}, & i \leq 1; \\ u_0 = 1. \end{cases}$$

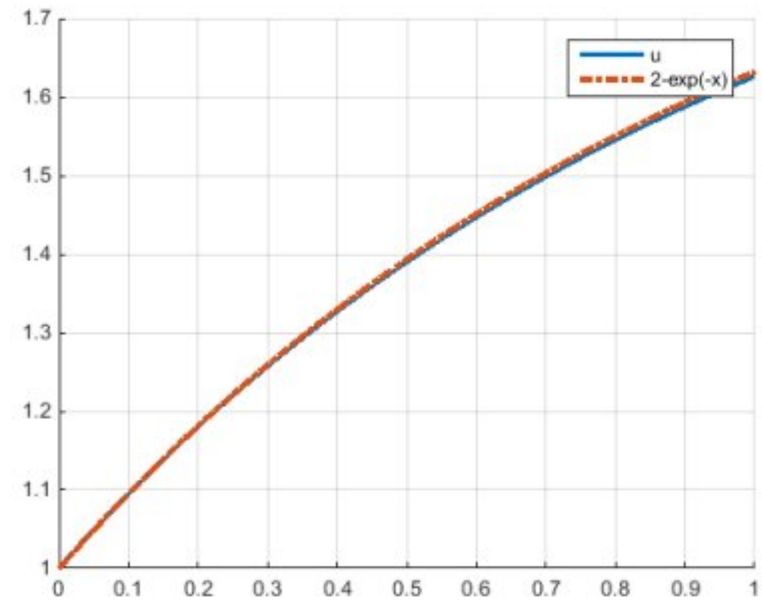
Code Matlab 3.5.2

```
clc, clear all, close all
u=1; n=50; h=1/n; x=0:h:1;
for i=1:n
    u=[u u(i)+h*exp(-i*h)]
end
hold on
h=plot(x,u)
h.LineWidth = 2;
h=plot(x,2-exp(-x),'-.')
h.LineWidth = 2;
legend('u','2-exp(-x)')
grid on
```


Scanné avec CamScanner



(a)



(b)

3.6 Exercices

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ On dit que f admet une dérivée symétrique en $a \in \mathbb{R}$ si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0 (par parité, on peut se contenter d'une limite à droite).
   (a) Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors f y admet une dérivée symétrique.
   (b) Montrer que la réciproque est fausse.
2. Soit f une fonction $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. On dispose de la valeur de f aux points x_0, $x_0 + 2h$ et $x_0 - h$.
   (a) Proposer plusieurs estimations de $f'(x_0)$ et les ordres associés. Quelle est l'estimation d'ordre maximale ?
   (b) Proposer une estimation de $f''(x_0)$ et déterminer l'ordre associé.
3. Calculer l'ordre de précision par rapport à h des formules suivantes pour approcher $f'(x)$
   (a) $\frac{-11f(x)+18f(x+h)-9f(x+2h)+2f(x+3h)}{6h}$
   (b) $\frac{f(x-2h)-6f(x-h)+3f(x)+2f(x+h)}{6h}$
   (c) $\frac{-f(x-2h)-12f(x)+16f(x+h)-3f(x+2h)}{12h}$
4. trouver une formule d'ordre 2 pour le calcul de la dérivée seconde $f''(x_0)$. Que vaut l'erreur commise ?
5. Soit les évaluations suivantes d'une fonction $f(x)$:

x	1.00	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

   (a) Calculer le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ par la méthode de Newton, puis calculer $p_2''(1.01)$.
   (b) Calculer l'approximation de $f''(1.01)$ donnée par la formule centrée. Comparez cette valeur avec celle de $p_2''(1.01)$.
   (c) Donner une formule de différentiation numérique d'un ordre meilleur que celui de la formule centrée pour $f''(x)$.

A. LAMMNI

Scanné avec CamScanner

6. (a) Interprétez et illustrez graphiquement la formule d'approximation de la dérivée $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

   (b) Montrez que la formule d'approximation est exacte pour les polynômes de degré 2 et donnez une interprétation géométrique.

7. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.

   (a) Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 associé à f aux points $x_0 = -\frac{1}{4}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{4}$.

   (b) Donner l'expression de l'erreur $E(x) = f(x) - P_2(x)$.

   (c) Montrer que $|E(x)| \leq \frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{576\sqrt{3}}$

   (d) Calculer la dérivée $\mathcal{D}_2 = P_2'(x)$

   (e) Monter que la formule de dérivation $\mathcal{D}_2$ est d'ordre 2.

8. Pour la fonction $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Calculer les différences $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$ et $B(x) = \Delta^4 f(x)$ où $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ et $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f)$, etc.

   $B(x)$ Calculer les valeurs de $B(x)$ pour entier x et dessiner $B(x)$.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Chapitre 4

Intégration numérique

4.1 Introduction

On rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer.

Voici quelques exemples :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+cos^2(x)}dx, \qquad \int_0^1 cos^2 x dx.$$

Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée.

Définition 4.1.1 (Définition : **F**ormule de **Q**uadrature)

Soit w un poids positif sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)w(x)dx \quad \text{existe.}$$

Notre but est de chercher une approximation de $\mathcal{I}$ par une **formule de quadrature** de la forme

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i), \tag{4.1}$$

où $x_i \in [a,b]$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Pour atteindre notre but, on considère principalement deux classes

1. Méthodes composées ($[a,b]$ borné et $w \equiv 1$)
   On subdivise $[a,b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ et on construit sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ une approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.
   Cette méthode appelée méthode d'intégration élémentaire ; s'obtient en remplacent f par son polynôme d'interpolation.

2. Méthodes de Gauss ($[a,b]$ et w sont particuliers)
   On approche f par son polynôme d'interpolation en des points choisis dans $[a,b]$ de façon à obtenir une formule d'intégration de type (4.1) exact pour les polynômes de degré le plus élevé possible.
   Les x_i sont les zéros des polynômes orthogonaux associes au point w.

Scanné avec CamScanner

4.1.2 Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés $f(x_0),\ f(x_1), \cdots, f(x_n)$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n},\ i = 0, \cdots, n$.

— On regroupe les points x_i par paquets de un, de deux $([x_i,\ x_{i+1}])$ ou de trois $([x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}])$ points consécutifs, ...

— On interpôle la fonction f sur chaque sous-intervalle par des polynômes $P_i(t)$

— On calcule l'intégrale du polynôme d'interpolation de chaque sous intervalle :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)dt = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l f(x_{i+l})$$

— La somme de ces intégrales est une approximation de l'intégrale de f sur $[a,\ b]$ (**F**ormule de **Q**uadrature) :

$$I(f) := \int_a^b f(t)dt \simeq \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i)$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

— 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré 0 $\Rightarrow$ méthode des **rectangles**

— 2 points $\Rightarrow$ approximation de degré 1 $\Rightarrow$ méthode des **trapèzes**

— 3 points $\Rightarrow$ approximation de degré 2 $\Rightarrow$ méthode de **SIMPSON**

— n points $\Rightarrow$ approximation de degré $n-1$ $\Rightarrow$ méthode de **NEWTON-CÔTES**

Remarque 4.1.3

La plupart des formules d'intégration numérique proviennent de méthodes d'interpolation polynomiales.
Le calcul de l'intégrale d'une fonction est approchée par le calcul exact de l'intégrale d'un polynôme interpolant cette fonction en certains points x_i pour $i = 1, \cdots n$.
On obtient une forme générale pour les **quadratures** numériques

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Les x_i sont alors les points d'intégration et les coefficients A_i les poids de la formule de quadrature.

Définition 4.1.4

On dit qu'une formule est d'ordre p si p est le plus grand entier pour lequel elle donne l'intégrale exacte de tout polynôme de degré $\leq p$.

On définit l'erreur comme étant $E(f) = \int_a^b f(x)dx - I(f)$

Scanné avec CamScanner

Définition 4.1.5

Une formule de quadrature est dite exacte sur un ensemble V si pour tout $f \in V$ on a $E(f) = 0$

Définition 4.1.6

Une formule de quadrature est dite de degré de précision n si elle est exacte pour $x^k,\ k = 0, \cdots, n$ et non exacte pour x^{n+1}.

Remarque 4.1.7

Une formule exacte sur l'ensemble des polynômes de degré au plus n est de degré de précision au moins n.

4.2 Méthodes composées

4.2.1 Construction

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.
On se propose d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en subdivisant l'intervalle d'integration

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

et en approchant f sur chaque intervalle par une somme finie de la forme

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Les méthodes composées consiste à remplacer f par son polynôme d'interpolation sur $[x_i, x_{i+1}]$.

On choisi $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et on remplace f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme p_0 de degré 0 tel que $p_0(x) = f(\xi_i)$. Ainsi,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_0(x)dx = (x_{i+1} - x_i)f(\xi_i)$$

et par suite

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)f(\xi_i) = R_n(f).$$

La formule obtenue est une somme de **Reimann**.

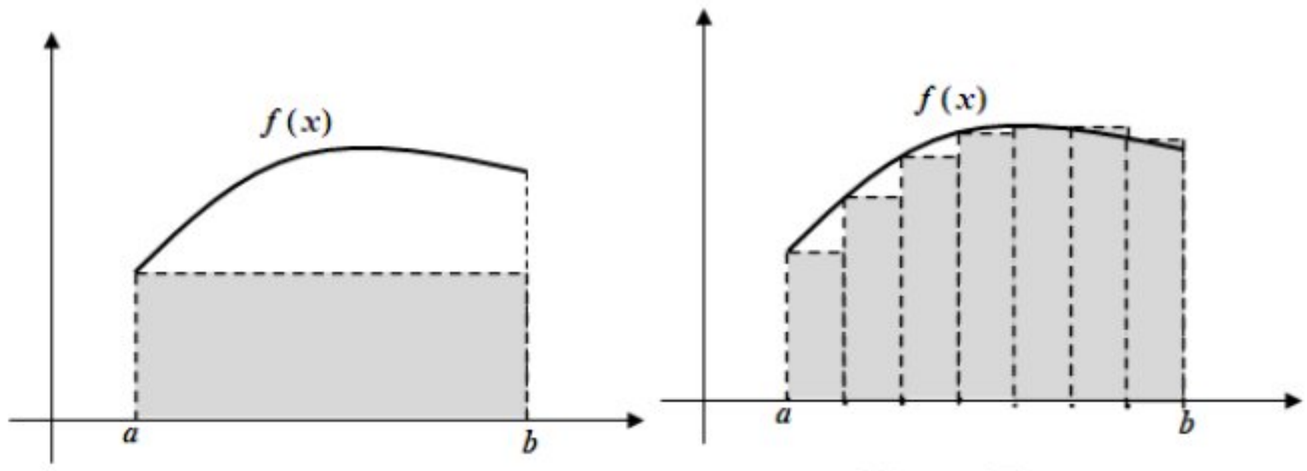
Scanné avec CamScanner

4.2.2 Formule des rectangles à gauche

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur à l'extrémité gauche, c-à-d $f(x_i)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i).$$

Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de f par l'aire des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$:



4.2.2.1 Formule des rectangles à gauche : Evaluation de l'erreur

Proposition 4.2.3 (Evaluation de l'erreur)

Si $f \in \mathcal{C}^1([a,\ b])$ alors on a pour tout entier $n > 0$,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)\right| < (b-a)^2\,\frac{M}{2n}$$

Théorème 4.2.4 (Théorème : inégalité des accroissements finis)

Soit f une application continue sur un segment $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,\ b[$ alors

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Scanné avec CamScanner

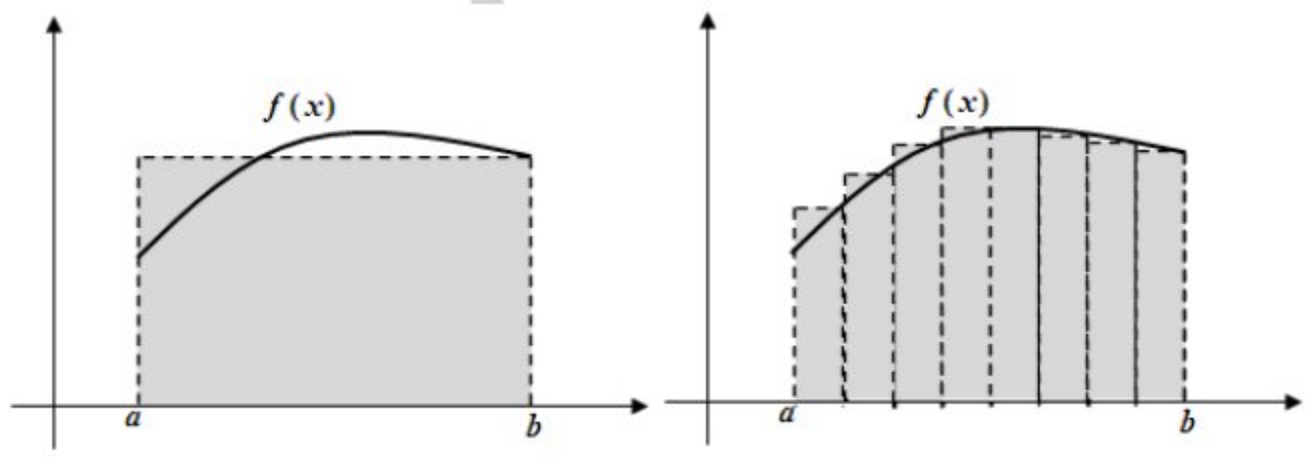
Preuve (Proposition 4.2.3)
On a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))\right| dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(x_i)|\, dx \\
\text{inégalité des accroissements finis} \quad &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} M\,|x-x_i|\, dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} M\,(x-x_i)\, dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} M\left[\frac{(x-x_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} M\frac{h^2}{2} \leq M\,n\,\frac{h^2}{2} = M\,\frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

4.2.5 Formule des rectangles à droite

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur à l'extrémité droite, c-à-d $f(x_{i+1})$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}).$$

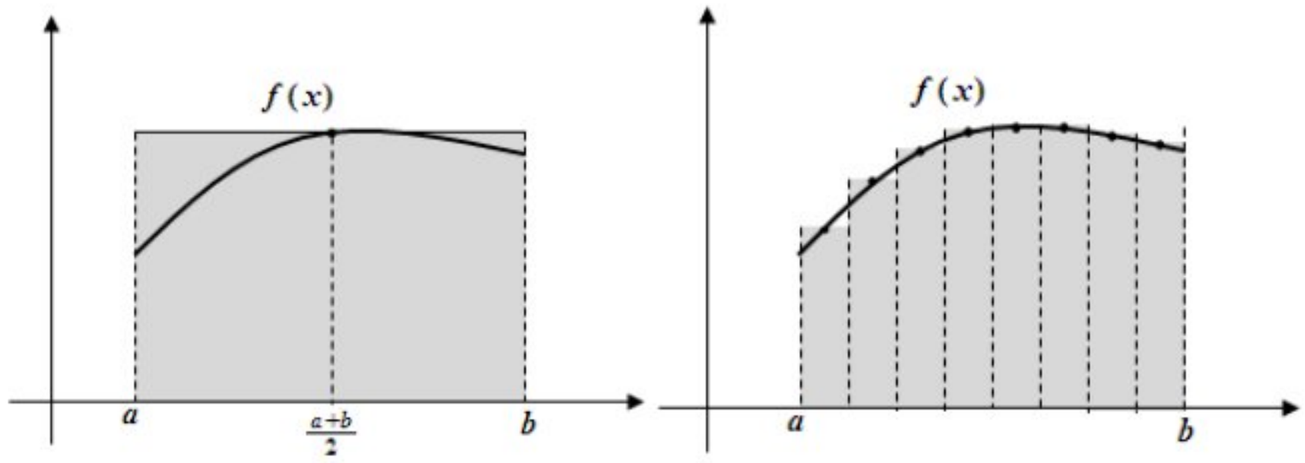


4.2.6 Formule du point milieux

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur milieux, c-à-d $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}).$$

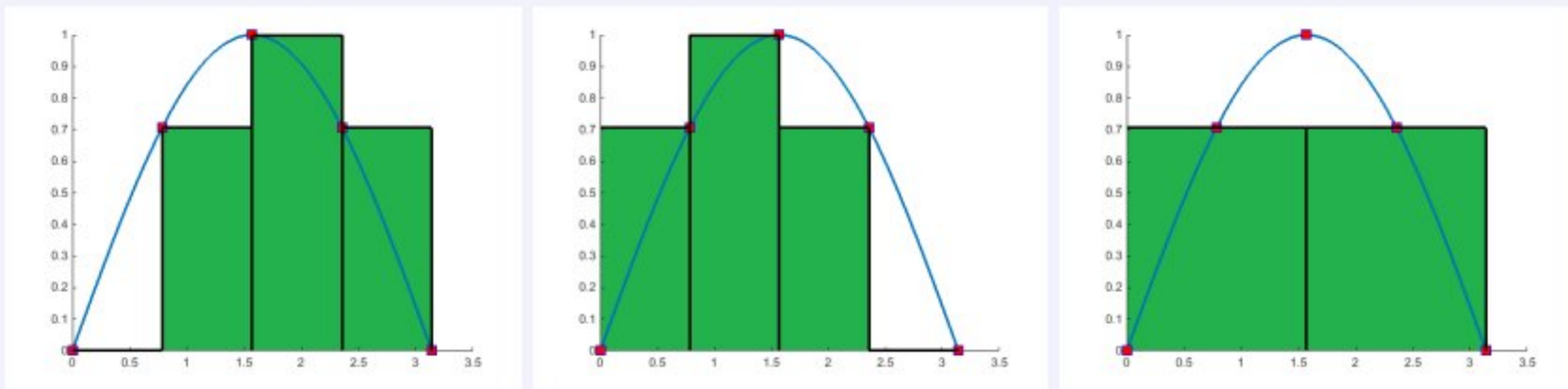
Scanné avec CamScanner



Exercice 4.2.7

Déterminer par la méthode des rectangles gauche/droite et milieu $\int_0^{\pi} f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	0.707107	1	0.707107	0



4.2.8 Etude de l'erreur

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et on se donne $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdvision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note h le pas de cette subdivision.

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0 = a, x_1 = b$ on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a)$$

La méthode des rectangles est une méthode d'ordre 0. Lorsque la dérivée première de f est bornée par une constante M, l'erreur dans la méthode des rectangles est donnée par l'expression

$$\left| \int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \right| \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

En effet, posons

$$F(h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx$$

On a $F^{'}(h) = f(\alpha+h)$ et $F^{"}(h) = f^{'}(\alpha+h)$. En appliquant la formule de Taylor au deuxième ordre.

$$\exists c \in]0, h[, F(h) = F(0) + hF^{'}(0) + \frac{h^2}{2}F^{"}(c)$$

Scanné avec CamScanner

Soit encore

$$\exists c \in]0, h[, \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx = hf(\alpha) + \frac{h^2}{2} f'(\alpha + c)$$

Posons

$$S = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$$

En appliquant la formule précédente, on obtient la majoration cherché

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - S \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx - hf(x_i) \right| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f'(a + ih + c) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right| \end{aligned}$$

puisque $h = (b - a)/n$.

4.2.9 Formule des trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. La fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation de degré 1 aux points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, soit

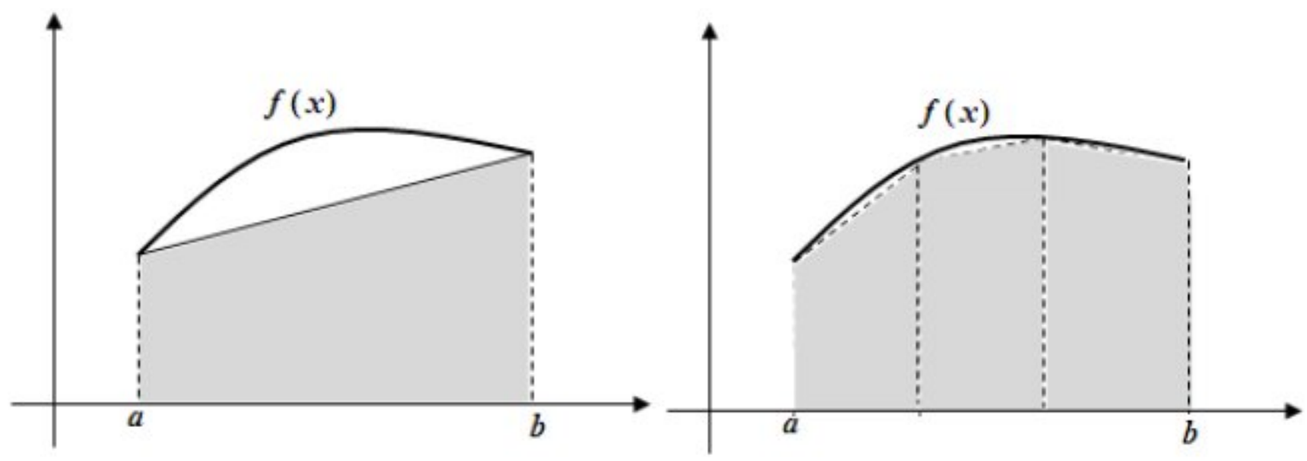
$$p_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

La méthode s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0 = a, x_1 = b$ on a

$$\int_a bf(x)dx \simeq \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b))$$



La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des trapèzes

Scanné avec CamScanner

est donnée par l'expression

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S\Big| \leq \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\sup_{x\in[a,b]}|f^{"}(x)|$$

La somme S s'exprime par

$$S = \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big)$$

4.2.9.1 Formule des trapèzes : Evaluation de l'erreur

Proposition 4.2.10

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,\ b])$ alors on a pour tout entier $n > 0$,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\right| < (b-a)^3\ \frac{M}{12n^2}$$

Preuve

La fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i,\ x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de degré 1. D'après le chapitre d'interpolation et comme $f \in \mathcal{C}^2([a,\ b])$ on a :

$$\forall\ x \in [x_i,\ x_{i+1}], \quad f(t) - P_i(t) = (x_{i+1} - t)(x_i - t)\frac{f''(\xi)}{2}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(t) - P_i(t))dt\right| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - t)(t - x_i)\frac{|f''(\xi)|}{2}dt(t \in [x_i,\ x_{i+1}]) \\
&\leq \frac{M}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - t)(t - x_i)dt \\
&= \Big(\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - t)(t - x_{i+1})dt \\
&+ \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - t)(x_{i+1} - x_i)dt\Big)\ \frac{M}{2} \\
&\leq \frac{M}{12}(x_{i+1} - x_i)^3 \ \leq\ \frac{M\ h^3}{12}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(t) - P_i(t))dt\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M\ h^3}{12} \\
&= (b-a)^3\ \frac{M}{12n^2}.
\end{aligned}$$

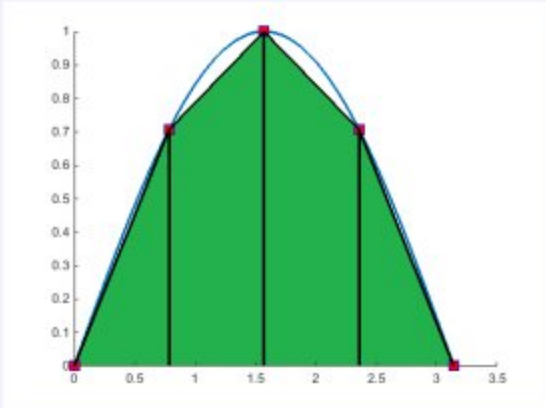
A. LAMMN

Scanné avec CamScanner

Exercice 4.2.11

Déterminer par la méthode des trapèzes $\int_0^{\pi} f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	0.707107	1	0.707107	0



4.2.12 Formule de Simpson

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. La fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation de degré 2 aux points $(x_i, f(x_i))$, $(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, soit

$$p_2(x) = \frac{x-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}}{x_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x-x_i}{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_i} \frac{x-x_{i+1}}{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_{i+1}} f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$$
$$+ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{x-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}}{x_{i+1}-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} f(x_{i+1}),$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$.
La méthode s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1})\right)$$

Lorsque $x_0 = a, x_1 = b$ on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Théorème 4.2.13

Soit f une fonction quatre fois dériable sur $[a,\ b]$, de dérivée quatrième majorée par M,

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i\Big(\frac{1}{6}f(x_i) + \frac{2}{3}f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big) + \frac{1}{6}f(x_{i+1})\Big)$$

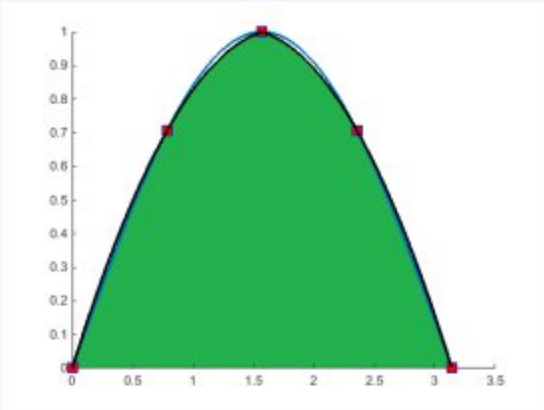
et

$$\left| I(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$$

Exercice 4.2.14

Déterminer par la méthode de Simpson $\int_0^\pi f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	0.707107	1	0.707107	0



4.2.14.1 Changement de variables

On considère φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit a_1, b_1 tels que $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$, alors en posant $x = \varphi(t)$, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Notez qu'il n'est pas nécessaire que φ soit une bijection.

Bien sûr, si elle est bijective, il sera plus facile de déterminer a_1 et b_1 puisqu'il suffira de prendre $a_1 = \varphi^{-1}(a)$ et $b_1 = \varphi^{-1}(b)$.

Exemple :

$$\varphi(t) = \alpha t + \beta.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4.2.15

Soient $Q \in \mathbb{P}_2$, $a < b$ et $\mathcal{A} = \{(0, Q(0)),\ (\frac{1}{2}, Q(\frac{1}{2})),\ (1, Q(1))\}$

1. Construire le polynôme d'interpolation P de **Lagrange** qui interpôle les points de l'ensemble $\mathcal{A}$.
2. Calculer
$$\int_0^1 P(t)dt$$
3. Monter que
$$\int_a^b Q(t)dt = \frac{b-a}{6}\left(Q(a) + 4Q(\frac{a+b}{2}) + Q(b)\right)$$

Exercice 4.2.16

Soient x_1, $x_2 \in [-1,\ 1]$, $x_1 < x_2$ et λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
On définit, pour f une fonction continue sur $[-1,\ 1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

1. Montrer que T est au moins d'ordre 1 sur $[-1,\ 1]$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$ et $\lambda_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}$
2. Pour quelles valeurs de x_1, x_2, λ_1 et λ_2, T est-elle au moins d'ordre 3 ? Quel est alors l'ordre de la méthode ?
3. Déduire des questions précédentes une méthode d'intégration d'ordre 3 sur un segment quelconque.

4.3 Formule générale des méthodes composées

On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$, $s = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h_i}$
$x \in [x_i, x_{i+1}] \Leftrightarrow s \in [-1, 1]$
Soit $\varphi_i(s) = f(x) = f(\frac{x_i + x_{i+1} + sh_i}{2})$. Donc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h_i}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds$$

Ceci nous ramène à approcher des intégrales sur l'intervalle fixe $[-1, 1]$.
Pour approcher $\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds$, on choisit $(k+1)$ points dans $[-1, 1]$ et on remplace φ_i par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré k aux $(k+1)$ points notés $z_j,\ i = 0, ..., k$.

Scanné avec CamScanner

Donc

$$\varphi_i(s) \simeq P_{i,k}(s) = \sum_{j=0}^{k} \varphi_i(z_j) L_{j,k}(s)$$

où $L_{j,k}$ sont les polynômes de Lagrange.
Par conséquent

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds \simeq 2\sum_{j=0}^{k} w_j \varphi_i(z_j) \tag{4.2}$$

où $\quad w_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_{j,k}(s)ds.$
Ainsi

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq h_i \sum_{j=0}^{k} w_j f(x_{i,j}) \quad \text{où} \quad x_{i,j} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_j h_i}{2}$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \left(h_i \sum_{j=0}^{k} w_j f(x_{i,j}) \right) = T_{n,k}(f). \tag{4.3}$$

— (4.2) s'appelle formule de quadrature élémentaire
— (4.3) s'appelle formule de quadrature composée

Théorème 4.3.1

Si f est une fonction intégrable au sens de Reimann sur $[a, b]$, alors $\lim_{h\to 0} T_{n,k}(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $h = \max_{0\le i\le n-1}(h_i)$

Preuve
$T_{n,k}(f) = \sum_{j=0}^{k} w_j I_{n,j}(f)$, où $I_{n,j}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_j f(\alpha_{i,j})$
Comme $\alpha_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ alors $I_{n,j}(f)$ est une somme de Reimann.
D'où $\lim_{h\to 0} I_{n,j}(f) = \int_a^b f(x)dx$, or $\sum_{j=0}^{k} w_j = 1$ (car $\sum_{j=0}^{k} L_{j,k}(s) = 1$)
Par suite $\lim_{h\to 0} T_{n,k}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

On définit l'erreur comme étant $E(f) = \int_a^b f(x)dx - T_{n,k}(f)$

Définition 4.3.2

Une formule de quadrature est dite exacte sur un ensemble V si pour tout $f \in V$ on a $E(f) = 0$

Définition 4.3.3

Une formule de quadrature est dite de degré de précision n si elle est exacte pour $x^k,\ k = 0, \cdots, n$ et non exacte pour x^{n+1}.

Scanné avec CamScanner

Remarque 4.3.4

Une formule exacte sur l'ensemble des polynômes de degré au plus n est de degré de précision au moins n.

4.3.5 Formules de Newton-Cotes fermée

Pour obtenir les formules de Newton-Cotes fermé, on interpole φ_i aux points suivants $z_j = -1 + j\frac{2}{k}$.
La formule (4.3) s'appelle formule de Newton-Cotes fermé.
Elles sont exactes par construction sur les polynômes de degré k.

4.3.5.1 Cas $k = 1$, formule des trapèzes

Les points d'interpolation sont $z_0 = -1$ et $z_1 = 1$.

$$L_{0,1}(s) = \frac{s-1}{-2}, \qquad L_{1,1}(s) = \frac{s+1}{2}$$

Donc

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s-1}{-2} ds = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s+1}{2} ds = \frac{1}{2}$$

D'autre part

$$x_{i,0} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_0 h_i}{2} = x_i \quad \text{et} \quad x_{i,1} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_1 h_i}{2} = x_{i+1}$$

Ainsi

$$T_{n,1}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

c'est la formule des trapèzes.

4.3.5.2 Cas $k = 2$, formule de simpson

Les points d'interpolation sont $z_0 = -1$, $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$.

$$L_{0,2}(s) = \frac{s(s-1)}{2}, \quad L_{1,2}(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{-1} \quad \text{et} \quad L_{2,2}(s) = \frac{s(s+1)}{2}$$

Donc

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s(s-1)}{2} ds = \frac{1}{6}, w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(s+1)(s-1)}{-1} ds = \frac{2}{3}$$

$$\text{et } w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s+1}{2} ds = \frac{1}{6}$$

D'autre part

$$x_{i,0} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_0 h_i}{2} = x_i, \quad x_{i,1} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_1 h_i}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

A. LAMNII

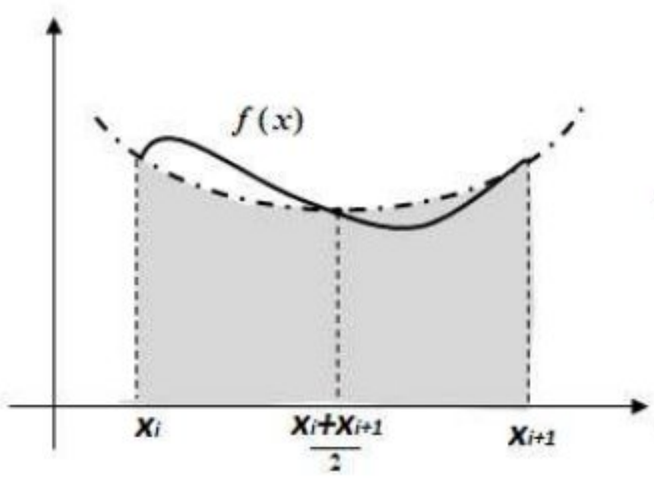
Scanné avec CamScanner

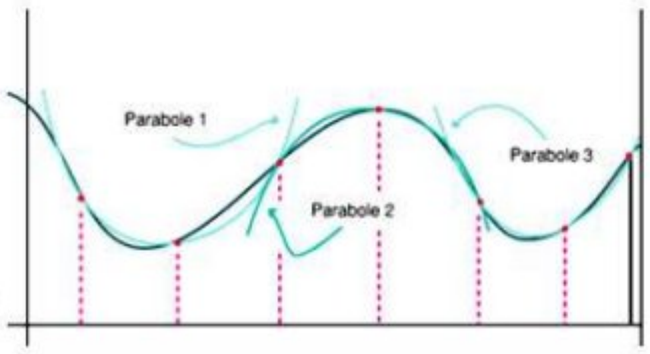
$$\text{et} \quad x_{i,2} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_2 h_i}{2} = x_{i+1}$$

Ainsi

$$T_{n,2}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}) \right)$$

c'est la formule des simpson.





Exemple 4.3.6 (Formules de Newton-Cotes fermée)

n	formule	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1	trapèzes	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	simpson	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	simpson($\frac{3}{8}$)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	Boole	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
5	Boole	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
6	Weddle	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

Exercice 4.3.7

Déterminer explicitement la F. Q. de

1. Simpson($\frac{3}{8}$)
2. Boole 4 et 5
3. Weddle

4.3.8 Formules de Newton-Cotes ouvert

Pour obtenir les formules de Newton-Cotes ouvert, on interpole f aux points suivants $xi = a + (i+1)h$, $i = 0, \cdots, n$ avec $h = \frac{b-a}{n+2}$ et on construit les formules de quadratures de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \tag{4.4}$$

avec $w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b l_{i,n}(x) dx$

Scanné avec CamScanner

Remarque 4.3.9

Contrairement aux formules de Newton-Cotes fermé, les points d'intégration ne sont jamais a et b.

4.3.9.1 Cas $n = 0$, formule des rectangles

$h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a + (0+1)h = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.
On a $l_{0,0}(x) = 1$, $w_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{0,0}(x)dx = 1$
Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}),$$

4.3.9.2 Cas $n = 1$, formule des trapèzes

$h = \frac{b-a}{3}$, $x_0 = \frac{2a+b}{3}$, $x_1 = \frac{a+2b}{3}$.
On a $l_{0,1}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = -\frac{a+2b-3x}{a-b}$, $l_{1,1}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{2a+b-3x}{a-b}$,
$w_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{0,1}(x)dx = \frac{1}{2}$ et $w_1 = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{1,1}(x)dx = \frac{1}{2}$
Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)}{2}\left(f(\tfrac{2a+b}{3}) + f(\tfrac{a+2b}{3})\right),$$

Exemple 4.3.10

n	Formule	w_0	w_1	w_2	w_3
1	Rectangles	1			
2	Trapèzes	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
3	Milne	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
4	-	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$

Exercice 4.3.11

Déterminer explicitement la F. Q. de

1. Milne

4.4 Méthodes de Gauss

Les méthodes de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilisent une subdivision particulière où les points x_j sont les racines d'une famille de polynômes orthogonaux, qui ne sont pas régulièrement espacés, contrairement aux méthodes composées. La fonction à intégrer est approchée par une interpolation de Lagrange sur les points x_j.

Scanné avec CamScanner

Les méthodes de Gauss consistent une approximation de l'integrale du type

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j), \tag{4.5}$$

où $w : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue, $\int_a^b w(x)dx < +\infty$ (fonction poids).

Les méthodes de Gauss consistent consistent une application directe de la théorie des polynômes orthogonaux.

Notation : On note $\langle f, g\rangle_w$ le produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

Théorème 4.4.1 (Théorème (Polynômes orthogonaux))

Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonale pour $\langle f, g\rangle_w$, et telle que $\deg P_n = n$ pour tout n. De plus, chacun de ces polynômes a toutes ses racines réelles et distinctes.

4.4.2 Description méthodes de Gauss

Théorème 4.4.3

Il existe un et un seul choix des points x_j et des coefficients λ_j de façon que (4.5) soint d'ordre $2n+1$.
Les points $x_j \in]a,\ b[$ et sont les $n+1$ racines du $(n+1)^{ieme}$ polynôme orthogonal associé à w.

Preuve
Unicité
Supposons qu'on ait des points x_j et des coefficients λ_j pour lesquels la méthode (4.5) est d'ordre $2n+1$.
Posons $\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.
$\forall\ P \in \mathbb{P}_n$ $\deg(P \times \Pi_{n+1}) \leq 2n+1$, donc

$$\int_a^b P(x)\Pi_{n+1}(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)\Pi_{n+1}(x_j) = 0$$

c-à-d $\Pi_{n+1} \perp \mathbb{P}_n$ et comme Π_{n+1} est unitaire alors Π_{n+1} est le $(n+1)^{ieme}$ polynôme orthogonal associé à w.
Par conséquent les (x_j), racines de Π_{n+1} sont unique.

Scanné avec CamScanner

Calculons maintenant les λ_j. Soit $L_{i,n} \in \mathbb{P}_n$ le i^{ieme} polynôme de degré n, on a :

$$\int_a^b w(x)L_{i,n}(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_{i,n}(x_j) = \lambda_i$$

Existence

Montrons que la méthode est d'ordre $2n+1$. Tout d'abord, pour $P \in \mathbb{P}_n$ est égal à son polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j)L_{j,n}(x)$ et par conséquent, $\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)$.

Si, maintenant, $P \in \mathbb{P}_{2n+1}$ on écrit sa division euclidienne par Π_{n+1} :

$$P = Q \times \Pi_{n+1} + R$$

avec deg$R \leq n$, et commeΠ_{n+1} est de degré$n+1$ et P de degré au plus $2n+1$, deg$Q \leq n$.

Ainsi, d'une part,

$\int_a^b P(x)w(x)dx = \int_a^b Q(x)\Pi_{n+1}(x)w(x)dx + \int_a^b R(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R(x_j)$.

Car $Pi_{n+1}(x_j) = 0$ pour tout j. On a bien l'égalité voulue, ce qui montre que la méthode est d'ordre au moins $2n+1$.

Il reste à montrer qu'elle est d'ordre exactement $2n+1$, et pour cela, à exhiber un polynôme de degré $2n+2$ pour lequel elle n'est pas exacte. C'est le cas de Π_{n+1}^2.

$$\int_a^b \Pi_{n+1}^2 w(x)dx > 0$$

car la fonction intégrée est positive et pas presque partout nulle, mais en revanche,

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \Pi_{n+1}^2(x_j) = 0.$$

4.4.4 Intégration de Gauss-Legendre

Lorsque la famille de polynômes orthogonaux est la famille des polynômes de Legendre relative à la fonction de pondération $w(x) \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1,\ 1]$. L'intégrale est approchée par la formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j),$$

où $w_j = \int_{-1}^{1} L_{j,n}(x)dx$ et les x_j sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1} définie par :

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x & \text{si } n = 1 \\ \frac{2n-1}{n}P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 4.4.5

$n = 0$, $P_1(x) = x$, racine $x_0 = 0$
$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{0,0}(x)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$
Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2f(0)$$

Exemple 4.4.6

$n = 1$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, les racines $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$
$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{0,1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-\sqrt{\frac{1}{3}}}{-2\sqrt{\frac{1}{3}}}dx = 1.$

$w_1 = \int_{-1}^{1} L_{1,1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}dx = 1.$
Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}})$$

Exemple 4.4.7

$n = 2$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, les racines $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$
$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{0,2}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{-\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{x-\sqrt{\frac{3}{5}}}{-2\sqrt{\frac{3}{5}}}dx = \frac{5}{9}.$

$w_1 = \int_{-1}^{1} L_{1,2}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{x-\sqrt{\frac{3}{5}}}{-\sqrt{\frac{3}{5}}}dx = \frac{8}{9}.$

$w_2 = \int_{-1}^{1} L_{2,2}(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{5}}}dx = \frac{5}{9}.$

Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

4.4.8 Intégration de Gauss-Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ relativement à la fonction de pondération (poids) $w(x) = e^{-x}$. Ils permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-x}dx \simeq \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j),$$

Scanné avec CamScanner

où $w_j = \int_0^{+\infty} L_{j,n}(x)e^{-x}dx$ et les x_j sont les racines du polynôme de Laguerre P_{n+1} définie par :

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x - 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{x-2n+1}{n}P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 4.4.9

$n = 0$, $P_1(x) = x - 1$, racine $x_0 = 1$
$w_0 = \int_0^{+\infty} L_{0,0}(x)e^{-x}dx = \int_{-1}^{+\infty} 1\ e^{-x}dx = 1.$
Donc

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx \simeq f(1)$$

Exemple 4.4.10

$n = 1$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$, les racines $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_1 = 2 + \sqrt{2}$
$w_0 = \int_0^{+\infty} -\frac{\left(x-\left(\sqrt{2}+2\right)\right)\exp(-x)}{2\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+2\right).$

$w_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\left(x-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\exp(-x)}{2\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right).$
Donc

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx \simeq \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+2\right)f(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)f(2+\sqrt{2})$$

4.4.11 Intégration de Gauss-Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale sur $[-1,\ 1]$ par rapport à la fonction de pondération $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Les racines du polynôme de Tchebychev de degré $n+1$ sont données par $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)$.
Les valeurs w_i ont, dans ce cas, une expression analytique générale $w_i = \frac{\pi}{n+1}$.
Les polynômes de Tchebychev permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \simeq \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j),$$

Exemple 4.4.12

$n = 0$, racine $x_0 = 0$
$w_0 = \pi.$
Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \simeq \pi f(0)$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 4.4.13

$n = 1$, racine $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_0 = w1 = \frac{\pi}{2}$.
Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \simeq \frac{\pi}{2}f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\pi}{2}f(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

4.4.14 Intégration de Gauss-Hermite

Les polynômes d'Hermite forment une base orthogonale sur l'intervalle $[-\infty, +\infty[$ relativement à la fonction de pondération (poids) $w(x) = e^{-x^2}$. Ils permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx \simeq \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j),$$

où $w_j = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{j,n}(x)e^{-x^2}dx$ et les x_j sont les racines du polynôme d'Hermite H_{n+1} définie par :

$$H_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2x & \text{si } n = 1 \\ 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 4.4.15

$n = 0$, $H_1(x) = 2x$, racine $x_0 = 0$
$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{0,0}(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\ e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.
Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx \simeq \sqrt{\pi}f(0)$$

Exemple 4.4.16

$n = 1$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, les racines $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{0,1}(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{(x-1)}{2}e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$w_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{1,1}(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{2}e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-x^2\right)dx \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 4.4.17

$n = 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, les racines $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{x\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\exp\left(-x^2\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$.

$w_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\exp\left(-x^2\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\,dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$.

$w_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)x\exp\left(-x^2\right)}{\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$.

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-x^2\right)dx \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{6}f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3}f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{6}f(\sqrt{\frac{3}{2}})$$

Exercice 4.4.18

Déterminer λ_1, λ_2, x_1 et $x_2 > 2$ pour que la formule d'intégration suivante

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

soit exacte pour tous les polynômes jusqu'au degré le plus elevé possible.

Solution 4.4.19

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} 1\,e^{-t}\,dt = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt = 1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,dt = 2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \\ \int_0^{+\infty} t^3\,e^{-t}\,dt = 6 = \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \lambda_2 \\ x_1 = \frac{1-\lambda_2 x_2}{1-\lambda_2} \\ \frac{1-\lambda_2(2-2x_2+x_2^2)}{\lambda_2-1} = 0 \;\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2-2x_2+x_2^2} \\ -3 + \frac{1}{1-x_2} + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}+2 \text{ou } x_2 = -\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

Puisque $x_2 > 2$ on a $x_2 = \sqrt{2}+2$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)$, $\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+2\right)$ et $x_1 = 2-\sqrt{2}$.

4.5 Evaluation de l'erreur : Noyau de Peano

Pour évaluer l'erreur de quadrature

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

Scanné avec CamScanner

d'une méthode d'ordre p, on commence par donner une définition.

Définition 4.5.1

$x \in [a,\ b]$, on note $x \to (x-t)_+$ ($t \in [a,\ b]$)la fonction qui vaut $(x-t)$ si $(x-t)$ est positif et 0 sinon, et $E((x-t)_+^p)$ l'erreur de quadrature liée à sa puissance p^{ieme}.
Le noyau de Peano de la méthode de quadrature est la fonction

$$K_p(t) = \frac{1}{p!}E((x-t)_+^p)$$

Théorème 4.5.2

On suppose que la méthode est d'ordre $p \geq 0$, Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $[a,\ b]$, alors

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) = \int_a^b K_p(t) f^{(p+1)}(x)dx$$

Preuve

Posons $g(x,t) = (x-t)_+^p$.
Puisque g est intégrable sur $[a,\ b]\times[a,\ b]$, on a d'après le Théorème de Fubini (cours intération)

$$E(\int_a^b g(x,t)dt) = \int_a^b E(g(x,t))dt$$

La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(x) = P_p(x) + \int_a^b \frac{1}{p!}(x-t)_+^p f^{(p+1)}(t)dt$$

Comme $P_p \in \mathbb{P}_n$, on a $E(P_p) = 0$ par hypotèse, d'où

$$\begin{aligned}
E(f) &= E(\int_a^b \frac{1}{p!}(x-t)_+^p f^{(p+1)}(t)dt) \\
&= \int_a^b E(\frac{1}{p!}(x-t)_+^p f^{(p+1)}(t))dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{p!}E((x-t)_+^p)\ f^{(p+1)}(t)dt \\
&= \int_a^b K_p(t)\ f^{(p+1)}(t)dt
\end{aligned}$$

On déduit la majoration

$$E(f) \leq \|f^{(p+1)}\|_\infty \int_a^b |K_p(t)|\ dt$$

Scanné avec CamScanner

Théorème 4.5.3 (Noyau Erreur)

On suppose que le noyau K_p est de signe constant et que le pas de la F.Q. $h_i = h = \frac{b-a}{n}$ est constante.
Si on pose $c_p = \int_{-1}^{1} K_p(t)dt$, alors pour tout $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,\ b])$ il existe $\xi \in [a,\ b]$ tel que

$$E(f) = \frac{C_p}{2^{p+2}} h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi)(b-a).$$

4.5.4 Noyau de Peano : Méthode du point Milieu

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}), \tag{4.6}$$

par un changement de variable (4.6) devient

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2\ f(0).$$

L'erreur associée est donnée par

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - 2\ f(0)$$

On a vu que la Méthode du point Milieu est d'ordre 1.
Soit $K_1(t) = \frac{1}{1!}E((.-t)_+)$ son Noyau de Peano.

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= \int_{-1}^{1} (x-t)_+ dx - 2\ (0-t)_+ \\
&= \int_{t}^{1} (x-t)dx - 2\ (-t)_+ \\
&= \left[\tfrac{(x-t)^2}{2}\right]_t^1 - 2\ (-t)_+ \\
&= \begin{cases} \frac{(1-t)^2}{2} + 2t & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{(1-t)^2}{2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(1+t)^2}{2}(\geq 0) & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{(1-t)^2}{2}(\geq 0) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $K_1(t)$ est de signe constant.

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \int_{-1}^{1} K_1(t)dt \\
&= \int_{-1}^{0} \tfrac{(1+t)^2}{2}dt + \int_{0}^{1} \tfrac{(1-t)^2}{2}dt \\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

D'après le Théorème 4.5.3 on a :

$$\begin{aligned} E(f) &= \tfrac{1}{3\times 2^{1+2}} h^{1+1} f^{(1+1)}(\xi)(b-a) \\ &= \tfrac{1}{24} h^2 f^{(2)}(\xi)(b-a). \end{aligned}$$

4.5.5 Noyau de Peano : Méthode des Trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\tfrac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{4.7}$$

par un changement de variable (4.7) devient

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-1) + f(1).$$

L'erreur associée est donnée par

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$

On a vu que la Méthode des Trapèzes est d'ordre 1.
Soit $K_1(t) = \frac{1}{1!}E((.-t)_+)$ son Noyau de Peano.

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_{-1}^{1} (x-t)_+ dx - \ (-1-t)_+ - \ (1-t)_+ \\ &= \int_t^1 (x-t)dx - \ (1-t) \\ &= \tfrac{(t^2-1)}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc $K_1(t)$ est de signe constant.

$$C_1(t) = \int_{-1}^{1} K_1(t)dt = \int_{-1}^{1} \tfrac{(t^2-1)}{2} dt = -\tfrac{2}{3}.$$

D'après le Théorème 4.5.3 on a :

$$\begin{aligned} E(f) &= \tfrac{-2}{3\times 2^{1+2}} h^{1+1} f^{(1+1)}(\xi)(b-a) \\ &= \tfrac{-1}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)(b-a). \end{aligned}$$

4.5.6 Noyau de Peano : Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \tfrac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)), \tag{4.8}$$

par un changement de variable (4.8) devient

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \tfrac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)).$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

L'erreur associée est donnée par

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \tfrac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))$$

On a vu que la Méthode de Simpson est d'ordre 3.
Soit $K_3(t) = \frac{1}{3!}E((. - t)_+^3)$ son Noyau de Peano.

$$\begin{aligned} K_3(t) &= \tfrac{1}{3!}\left(\int_{-1}^{1}(x-t)_+^3 dx - \tfrac{1}{3}((-1-t)_+^3 + 4(0-t)_+^3 + (1-t)_+^3)\right) \\ &= \tfrac{1}{3!}\left(\int_{-1}^{1}(x-t)_+^3 dx - \tfrac{1}{3}(4(0-t)_+^3 + (1-t)_+^3)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{72}(t+1)^3(3t-1)(\leq 0) & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{72}(t-1)^3(3t+1)(\leq 0) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $K_3(t)$ est de signe constant.

$$\begin{aligned} C_3(t) &= \int_{-1}^{1} K_3(t)dt = \int_{-1}^{0} \tfrac{(t+1)^3(3t-1)}{72}dt + \int_{0}^{1} \tfrac{(t-1)^3(3t+1)}{72}dt \\ &= \tfrac{-1}{180} + \tfrac{-1}{180} = \tfrac{-1}{90}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 4.5.3 on a :

$$E(f) \;=\; \tfrac{-1}{90\times 2^{3+2}}h^{3+1}f^{(3+1)}(\xi)(b-a) \;=\; \tfrac{-1}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi)(b-a).$$

Exercice 4.5.7

Soit $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et P_g sont polynôme d'interpolation de Lagrange aux points 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1.
Le but de l'exercice est d'approcher la valeur $\int_a^b g(t)dt$.
Afin de réaliser ce calcul, on choisit $n+1$ points équirépartis $(x_i),\ i = 0...n,$ de tel sorte que $x_i = a + ih$, avec $h = \frac{b-a}{n}$.

1. Calculer P_g.
2. Calculer $\int_0^1 P_g(t)dt$.
3. A l'aide d'un changement de variable, exprimer l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)dt$ en fonction de l'intégrale sur $[0,\ 1]$.
4. En déduire une formule de quadrature afin de calculer $\int_a^b g(t)dt$.
5. Calculer l'ordre de la méthode de Simpson $3/8$.
6. Calculer le Noyeau de Peano de la méthode de Simpson $3/8$.
7. Déduire l'expression de l'erreur.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4.5.8

Soit la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)\, ds \simeq \frac{1}{12}\left(11\varphi(\frac{-3}{5}) + \varphi(\frac{-1}{5}) + \varphi(\frac{1}{5}) + 11\varphi(\frac{3}{5})\right). \tag{4.9}$$

1. Montrer que la formule de quadrature (4.9) est exacte sur $\mathbb{P}_3$.
2. Déterminer le Noyeau de Peano associé à (4.9) et en déduire l'erreur commise.
3. Construire les formules commposées correspondantes avec des noeuds équidistants.

4.6 Exercices

1. On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) \tag{4.10}$$

où γ est un point de l'intervalle $]0,\ 1[$.

(a) On suppose que γ est donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1.

(b) Comment choisir γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?

(c) Que devient la formule (4.10) si l'intervalle $[0,\ 1]$ est remplacé par un intervalle $[a,\ b]$ quelconque ? (utiliser le changement de variable $t = (b-a)x + a$, $x \in [0,\ 1]$).

2. Pour calculer les intégrales $I_k = \int_0^1 x^k e^{x-1} dx$, $k = 1, 2, \ldots$ On peut utiliser la relation de récurrence : $I_k = 1 - kI_{k-1}$, avec $I_1 = \frac{1}{e}$. Calculer I_{10} avec la formule composite de Simpson en assurant une erreur de quadrature inférieure ou égale à 10^{-3}. Comparer l'approximation de Simpson et celle obtenue avec la formule de récurrence ci-dessus.

3. On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f(\frac{1}{3}) + \gamma f(\frac{2}{3}) + \delta f(1) \tag{4.11}$$

(a) Trouver α, β, γ et δ, tels que cette formule (4.11) soit exacte sur l'espace des polynômes de degré le plus élevé possible.

(b) Par un changement de variables, donner la formule sur l'intervalle quelconque $[a,\ b]$.

(c) Calculer par la formule de quadrature trouvée en (4.11) les intégrales $\int_{-1}^{1} t^3 dt$ et $\int_{-1}^{3} t^2 dt$.

4. On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx. \tag{4.12}$$

A.LAMNII

Scanné avec CamScanner

(a) Calculer analytiquement I.

(b) Utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $n = 3$, puis $n = 4$ pour obtenir une valeur approchée de I.

(c) Utiliser les méthodes numériques (trapèze et Simpson) pour calculer numériquement I.

(d) Comparer et interpréter les résultats obtenus.

(e) Utiliser la méthode des trapèzes pour obtenir une valeur approchée I_2 de I en subdivisant l'intervalle $[1,\ 2]$ en 2 sous-intervalles de même taille.

(f) Expliquer graphiquement pourquoi I_2 est supérieure à $\log(2)$.

5. Une formule de quadrature notée $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ à s étages est donnée par

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i)$$

Les c_i sont les noeuds de la formule de quadrature et les b_i en sont les poids.

(a) Soit $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ une formule de quadrature. Monter que

$$b_i = \int_0^1 l_i(x)dx, \text{ où } l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{s} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}$$

(b) Calculer les formules de Newton-Cotes pour $c_i = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ et $c_i = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1)$

(c) Déterminer c_2, b_1 et b_2 dans la formule de quadrature :

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq b_1 f(0) + b_2 f(c_2)$$

afin que son ordre soit maximal.

6.

(a) Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ d'une fonction f construite sur les points : $-1,\ \frac{-1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1$.

(b) Par intégration du polynôme $P(x)$, calculer la formule d'intégration associée.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Chapitre 5

Résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$

5.1 Introduction

1896 Héron d'Alexandrie : approximation de $\sqrt{a},\ a > 0$.
Rechercher la racine carrée de a revient à déterminer l'unique racine positive de l'équation $x^2 - a = 0$.
Comment fait-on pour déterminer cette racines ?
Il existe de nombreuses méthodes de recherche de racines.

Problème 5.1.1

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
On cherche un vecteur $x \in \mathbb{R}$ solution de

$$f(x) = 0. \tag{5.1}$$

Nous allons traiter dans de ce chapitre la résolution de l'équation non-linéaire à une seule variable $f(x) = 0$ ou $f(x) = g(x)$.

Puisqu'il n'existe pas de formule générale pour des fonction aussi simples que des polynômes, il est peu probable que l'on puisse résoudre analytiquement l'équation (5.1) dans tous les cas qui nous intéressent.

Exemple 5.1.2

- $f(x) = ax + b$. Dans ce cas, l'équation f(x) = 0 est dite équation linéaire.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$. (discriminant positif, négatif ou nul).
- Soit la résolution analytique est très coûteuse
- Soit on n'a pas de solution analytique

Scanné avec CamScanner

(Existence)

Hypothèse de base : f doit être **continue**.

Théorème 5.1.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit un intervalle non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

(Unicité)

— f est **strictement monotone**, i.e., strictement croissante ou décroissante
— f est **strictement convexe**, i.e.,

$$\forall\, x, y \in [a,\ b],\ \forall\, \lambda \in]0,\ 1[,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ou **strictement concave** (inégalité renversée).
— **Contractante**
— ...

Remarque 5.1.4

Il existe plusieurs méthodes permettent de calculer les zéros de f par approximations successives avec, théoriquement, la précision désirée.

Ces méthodes supposent toutefois que les zéros soient plus ou moins localisés. Ainsi, pour chaque zéro, on devrait pouvoir donner un intervalle $[a,\ b]$ qui ne contient pas d'autre zéro que celui recherché.

Souvent des informations sur le comportement de la fonction f (dérivée première, dérivée seconde) sont nécessaires.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques méthodes numériques de résolutions, chacune ayant ces avantages et inconvénients.

Scanné avec CamScanner

(Matlab : Cas des polynômes roots)

Soit $P \in \mathbb{P}$. Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$ on utilise la fonction **roots** pré-définit de Matlab.

(Syntaxe)

% $P \in \mathbb{P} \ \Rightarrow P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$
$P = [a_n \ a_{n-1} \ \ ... \ \ a_1 \ a_0]$;
x=roots(P)

Exemple 5.1.5 ($P \in \mathbb{P} \ \Rightarrow P(x) = x^5 + x^1 - x^0$)

$P = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ -1]$;
x=roots(P)
résultat
x =
-0.8774 + 0.7449i
-0.8774 - 0.7449i
0.5000 + 0.8660i
0.5000 - 0.8660i
0.7549 + 0.0000i

(Matlab : Cas non linéaire fzero)

Soit f une fonction (continue ...). Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ on utilise la fonction **fzero** pré-définit de Matlab.

Exemple 5.1.6 ($f \in \mathbb{P} \ \Rightarrow f(x) = x^5 + x^1 - x^0$)

$f = inline('x.^5 + x - 1')$ % function
$x0 = [0\ 1]$; % initial interval
x = fzero(f, x0)
résultat
x = 0.7549

Scanné avec CamScanner

Exemple 5.1.7 ($f(x) = sin(x)$)

$f = inline('sin(x)')$ % function
$x0 = [pi/2\ 3 * pi/2]$; % initial interval
x = fzero(f, x0)
résultat
x = 3.1416

5.2 Méthodes itératives

Résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, revient à chercher x^* tel que $\mid f(x^*) \mid \leq \varepsilon$, avec ε très petit.

L'objet essentiel de ce chapitre est l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle, c'est-à-dire la résolution approchée du problème (5.1).

— Le principe de base est de construire une suite de nombres x_k pour $k = 0, 1, 2, ...$ qui approxime de mieux en mieux la racine x^*.
— Après avoir choisi une valeur initiale x_0, on applique la suite jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit vérifie.
— Les méthodes pour approcher une racine x^* de f sont en général **itératives** : elles consistent à construire une suite (x_k) convergente (le plus rapidement possible) vers x^*, i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*.$$

5.2.1 Critère d'arrêt

— Définir un bon critère d'arrêt n'est pas toujours facile. Il n'y a pas de choix universel.
— Le critère d'arrêt doit pouvoir :
  — garantir un bon niveau de précision quelque soit le comportement de la fonction au voisinage de la racine. **Exemple** :

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \quad \text{et/ou} \quad |f(x_{k+1})| < \varepsilon$$

  — Éviter que le calcul ne s'arrête jamais : $k < nbr_iteration_max$
  — Quelle valeur de tolérance choisir ? Se baser sur une erreur relative ou absolue ?

5.2.2 Convergence

— Une méthode iterative est dite convergente pour la racine x^* d'une fonction f si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists k_0 :\ \ \forall\ k > k_0,\ |x_k - x^*| < \varepsilon$$

A. LAMNI

Scanné avec CamScanner

— La convergence d'une méthode depend évidemment de la fonction f mais aussi de la racine visée x^* et de la valeur initiale x_0
— Le plus souvent, on ne sait établir que des résultats de convergence locale, c'est-à-dire valables seulement pour un x_0 appartenant à un certain voisinage de la racine x^*.
— Les méthodes qui convergent vers x^* pour tout choix de x_0 dans l'intervalle $]a, b[$ sont dites *globalement convergentes* vers x^*.

Exemple 5.2.3 (Suite)

$u_n = \frac{2n+5}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

Code Matlab

```
clc
clear all
epsilon=0.001 ;
uu=5 ;
u=7/2 ;
n=1 ;
while(abs(uu-u)>=epsilon)
uu=u ;
n=n+1 ;
u=(2*n+5)/(n+1) ;
end
lim=u
nbritr=n
```

5.2.4 Ordre de convergence

Définition 5.2.5

On dit qu'une suite (x_k) construite par une méthode numérique converge vers x avec un ordre $p \geq 1$ si

$$\exists\, c > 0 : \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} \leq c, \ \forall\, k \geq k_0, \tag{5.2}$$

où $k_0 \geq 0$ est un entier. Dans ce cas, on dit que la méthode est d'ordre p.

Remarque 5.2.6

Si p est égal à 1, il est nécessaire que $c < 1$ dans (5.2) pour que (x_k) converge vers x.
On appelle alors la constante c facteur de convergence de la méthode.

Scanné avec CamScanner

5.3 Méthode de la bissection (ou de dichotomie)

Tomie : vient de couper. Dicho : en deux

Cette méthode repose sur le théorème des valeurs intermédiaires suivant :

Théorème 5.3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit un intervalle non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

Le moyen le plus simple de montrer l'existence d'une solution c'est de chercher deux points a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé et de conclure par le théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque 5.3.2

L'unicité de la solution provient le plus souvent d'une hypothèse de monotonie.

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite d'intervalles emboîtés qui contiennent le zéro de f cherché.

Si on note $I_0 =]a, b[$ et I_k le sous-intervalle retenu à l'étape k, on choisit le sous-intervalle I_{k+1} de I_k pour lequel f a un signe différent à ses deux extrémités.

Plus précisément, on calcule x_k le milieu de l'intervalle I_k

- Si $f(a_k) \times f(x_k) < 0$, le zero de f appartient a l'intervalle $I_{k+1} = [a_k,\ x_k]$.
- Si $f(x_k) \times f(b_k) < 0$, le zero de f appartient a l'intervalle $I_{k+1} = [x_k,\ b_k]$.

On poursuit les calculs aussi longtemps que la longueur de l'intervalle I_k est supérieure à la précision voulue. La suite (x_k) des milieux des intervalles I_k convergera vers x (le zéros de f).

Plus précisément, on suppose que f est continue dans $[a, b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$

- On pose $c = \frac{a+b}{2}$,
  - si $f(c) = 0$ Alors $x = c$,
  - si $f(a) \times f(c) < 0$ on remplace b par c,
  - sinon on remplace a par c.
  - On continue cette opération jusqu'à ce qu'on trouve x avec la précision demandée.

De cette façon, on construit de manière récurrente trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et vérifiant, pour entier naturel k,

- $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$,
- $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$ si $f(a_k) \times f(x_k) < 0$,
- $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ si $f(x_k) \times f(b_k) < 0$.

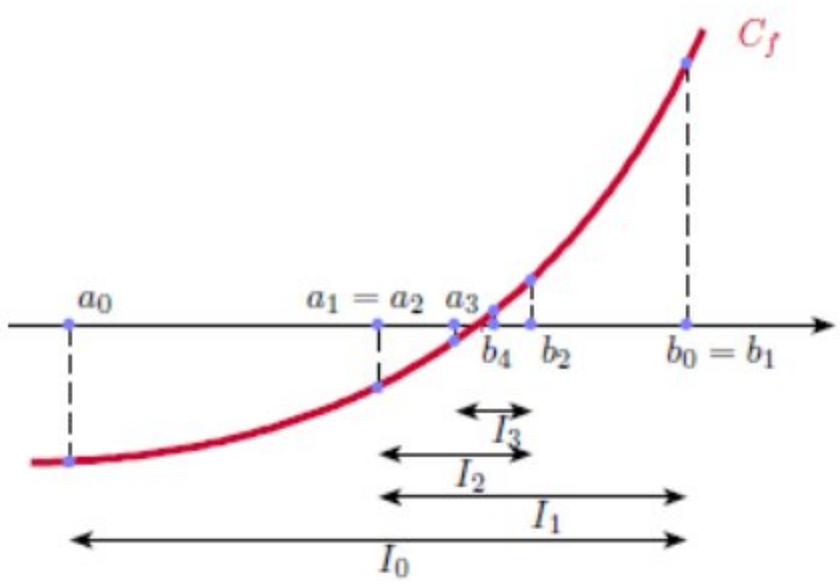
Répéter ces étapes jusqu'à l'obtention de la précision désirée, c'est à dire jusqu'à ce que $|f(x_k)| < \epsilon$, ou $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \epsilon$, ϵ étant la précision désirée.

Scanné avec CamScanner

Théorème 5.3.3

Les a_k, b_k et x_k satisfaisant les conditions suivantes :

1. $[a_{k+1},\ b_{k+1}] \subset [a_k,\ b_k]$
2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$
3. $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x la racine de f



Preuve

1- Pour $k \geq 0$, on a $x_k = \frac{b_k + a_k}{2}$ et $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = [a_k,\ x_k]$ ou $[a_{k+1},\ b_{k+1}] = [x_k,\ b_k]$ donc $[a_{k+1},\ b_{k+1}] \subset [a_k,\ b_k]$.

2- On a par construction $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$, montrons par récurrence que : $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$
Pour $k = 0$ la relation est vérifiée.
Si on suppose que la relation est vraie à l'ordre k ($b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$) alors on a : $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2 \times 2^k} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$

3- On a $x \in [a_k,\ b_k]$ et $x_k = \frac{b_k + a_k}{2} \in [a_k,\ b_k]$ donc $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$
En d'autres termes, on a : $x - \frac{b-a}{2^{k+1}} \leq x_k \leq x + \frac{b-a}{2^{k+1}}$,
et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{b-a}{2^{k+1}} = 0$ on déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} = x$.

5.3.4 Nombre d'itérations

Il est donc possible d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher x avec une précision donnée. Si on désire une tolérance τ sur la racine, alors on a $|x_k - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \tau$ c-à-d, $\frac{b-a}{\tau} \leq 2^{k+1} \Leftrightarrow log(\frac{b-a}{\tau}) \leq (k+1)log(2)$
On en déduit le minorant de k

$$k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\tau)}{\ln(2)} - 1$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 5.3.5

Si $a = -1$, $b = 2$ et $\tau = \epsilon = 2/1000$

$$k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\tau)}{\ln(2)} - 1 = 10.5507$$

Donc $k = 11$. 11 étapes pour avoir la précision cherché.

5.3.6 Algorithme de la bissection

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ pour lequel $f(a) \times f(b) \leq 0$, trouver une approximation de la solution de $f(x) = 0$ dans cet intervalle en construisant une suite d'intervalles $([a_n, b_n])_n$ contenant cette racine et tels que a_n ou b_n est le milieu de l'intervalle $[a_{n-1}, b_{n-1}]$.

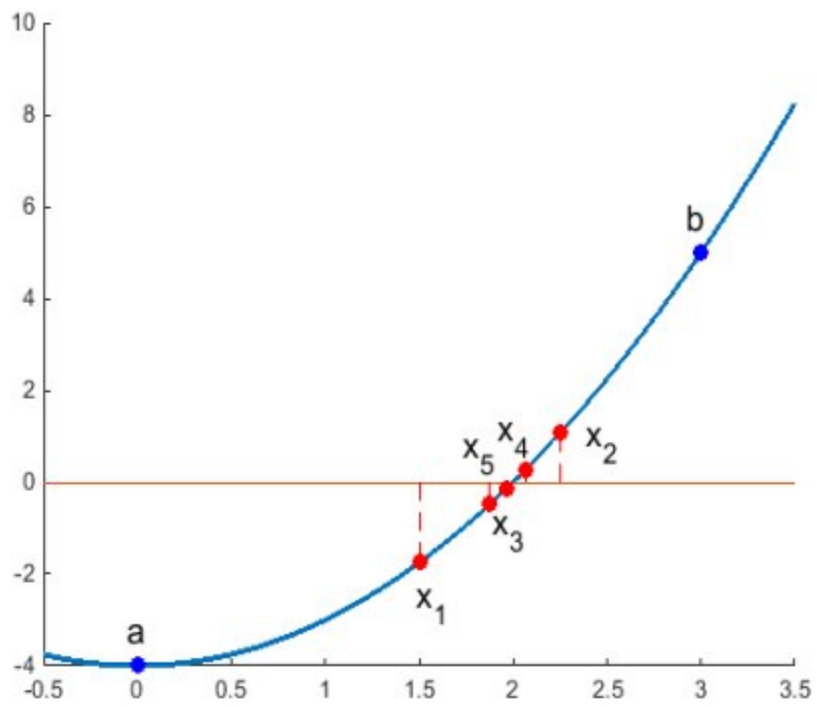
Algorithme de la bissection		
Entrées	:	a, b les extrémités de l'intervalle. ϵ la précision désirée. N_0 le nombre maximal d'itérations.
Sortie	:	la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$.
Etape 0	:	Si $f(a) = 0$ Alors imprimer la solution est a, aller à l'étape **9**. Si $f(b) = 0$ Alors imprimer la solution est b, aller à l'étape **9**.
Etape 1	:	Si $f(b) \times f(a) > 0$ Alors imprimer(pas de changement de signe) aller à l'étape **9**.
Etape 2	:	Poser $N = 1$.
Etape 3	:	Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **4** à **7**.
Etape 4	:	Poser $x = \frac{a+b}{2}$.
Etape 5	:	Si $f(x) = 0$ ou $\frac{b-a}{2} < \epsilon$ Alors imprimer x aller à l'étape **9**.
Etape 6	:	Poser $N = N + 1$.
Etape 7	:	Si $f(a) \times f(x) > 0$ Alors poser $a = x$ sinon poser $b = x$.
Etape 8	:	Imprimer après N_0 itérations l'approximation obtenue est x et l'erreur maximale est $\frac{b-a}{2}$.
Etape 9	:	Fin.

Exemple 5.3.7

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[0, 3]$. f est continue sur $[0, 3]$ et on a $f(0) = -4$ et $f(3) = 5$
Donc $f(0) \times f(3) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f possède une racine sur $[0, 3]$. Nous allons utiliser la méthode de dichotomie pour calculer une estimation de cette racine.

A. LAMMNI

Scanné avec CamScanner



Le tableau suivant récapitule les étapes de résolution de l'équation f(x)=0 par la méthode de dichotomie. Chaque ligne correspond à une itération. xi désigne l'estimation de la racine à l'itération i et erri l'erreur relative à cette estimation. La précision demandée est $= 10^{-3}$.

k	a_k	$f(a_k)$	b_k	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	err_k
1	1.5000	-1.7500	3.0000	5.0000	1.5000	-1.7500	1.5000
2	1.5000	-1.7500	2.2500	1.0625	2.2500	1.0625	0.7500
3	1.8750	-0.4844	2.2500	1.0625	1.8750	-0.4844	0.3750
4	1.8750	-0.4844	2.0625	0.2539	2.0625	0.2539	0.1875
5	1.9688	-0.1240	2.0625	0.2539	1.9688	-0.1240	0.0938
6	1.9688	-0.1240	2.0156	0.0627	2.0156	0.0627	0.0469
7	1.9922	-0.0312	2.0156	0.0627	1.9922	-0.0312	0.0234
8	1.9922	-0.0312	2.0039	0.0156	2.0039	0.0156	0.0117
9	1.9980	-0.0078	2.0039	0.0156	1.9980	-0.0078	0.0059
10	1.9980	-0.0078	2.0010	0.0039	2.0010	0.0039	0.0029
11	1.9995	-0.0020	2.0010	0.0039	1.9995	-0.0020	0.0015
12	1.9995	-0.0020	2.0002	0.0010	2.0002	0.0010	0.0007

A. LAMNII

Remarque 5.3.8

La méthode de dichotomie converge vers la solution $x = 2.0002$ à l'itération $k = 12$ comme le prédit la formule vue auparavant :

$$k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\tau)}{\ln(2)} = \frac{\ln(3-0) - \ln(10^{-3})}{\ln(2)} = 11.5507$$

5.3.9 Avantages et Inconvénients

Les principaux avantages de la méthode de dichotomie sont :

— la convergence certaine de l'algorithme vers la racine cherchée si $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a,\ b]$ dans lequel on a réussi à isoler une racine unique

Scanné avec CamScanner

— la possibilté de déterminer a priori le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir la racine voulue avec une précision donnée

Les principaux désavantages de la méthode de dichotomie sont :

— Les contraintes imposées par les hypothèses de départ dont, principalement, le fait qu'il faille déterminer un intervalle qui encadre une seule racine et dans lequel la fonction étudiée change de signe

— la relative lenteur de la convergence. En effet, la convergence est linéaire et sa vitesse est caractérisée par $1/2$

Exercice 5.3.10

On cherche à trouver les solutions de l'équation

$$f(x) = x^5 + x - 1 = 0$$

sur l'intervalle $[0,\ 1]$

1. Faire une étude de la fonction f sur l'intervalle $[0,\ 1]$ (calcul de la dérivée et tableau de variation) et en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de f.
3. Pour $\varepsilon = 0.01$ (resp. $\varepsilon = 0.001$) calculer le nombre d'itérations.

5.4 Méthode de Newton

L'idée consiste à remplacer la fonction f par la droite tangente à sa courbe aux point $(x_0,\ f(x_0))$, l'intersection de cette droite avec l'axe ox détermine le second élément x_1 de la suite cherchée (fig. 5.1). On utilise alors cette nouvelle abscisse comme point x_{i+1}, et l'on recommence tant que $x_{i+1} - x_i$ ne satisfait pas le critère de convergence.

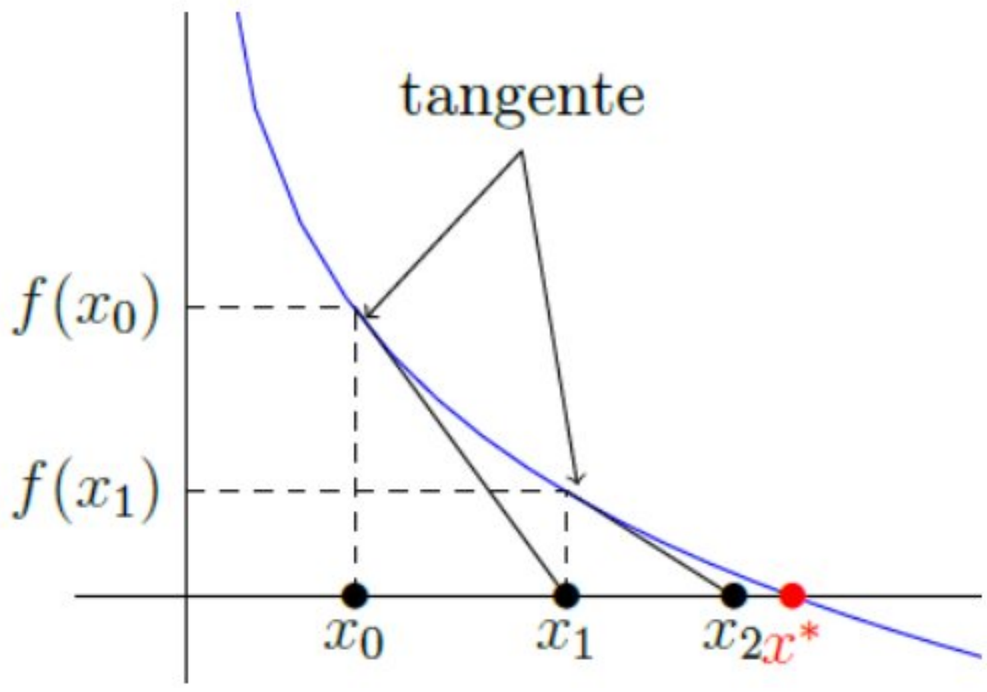


FIGURE 5.1 – Construction des premiers itérés de la méthode de Newton-Raphson.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et x_0 un point donné.
Supposons que $f'(x) \neq 0$.

Scanné avec CamScanner

On considère la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x_k, f(x_k))$ et qui a comme pente $f'(x_k)$:

$$y(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$$

On définit x_{k+1} comme étant le point où cette droite intersecte l'axe des abscisses (Ox), c'est à dire $y(x_{k+1}) = 0$.

Définition 5.4.1 (Méthode de Newton)

$$\begin{cases} x_0, & \text{donnée ;} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & \forall k \geq 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Remarque 5.4.2

On remarque immédiatement que cette suite n'est bien définie que si $f'(x_k)$ est non nul (et même pas trop petit).

(Autrement dit)

x_{k+1} racine du développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de x_k.
On néglige les termes à partir du seconde ordre :

$$0 = f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Théorème 5.4.3

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,\ b])$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f(a) \times f(b) < 0$
2. $\forall\ x \in]a,\ b[,\ f'(x) \neq 0$
3. f'' est de singe constant sur $[a,\ b]$ (convexité ou concavité)

Alors la méthode de Newton converge quadratiquement vers l'unique solution α de $f(x) = 0$ dans $[a,\ b]$ et ceci pour n'importe quel choix de $x_0 \in [a,\ b]$.

Preuve

Considérons le cas : $f'(x) < 0$ et $f''(x) < 0$

— f ; continue, décroissante ($f'(x) < 0$) et $f(a) \times f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists\ \alpha$ unique solution de $f(x) = 0$

D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur l'intervalle $[x_n,\ \alpha]$ on a : $f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(z)}{2}(\alpha - x_n)^2, z \in [\alpha,\ x_n]$ c-à-d $x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(z)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$.
Donc le signe de $x_{n+1} - \alpha$ est celui de $\frac{f''(z)}{f'(x_n)}$, ainsi $x_{n+1} > \alpha$

Scanné avec CamScanner

Donc (x_n) est minorée par α à partir de x_1.

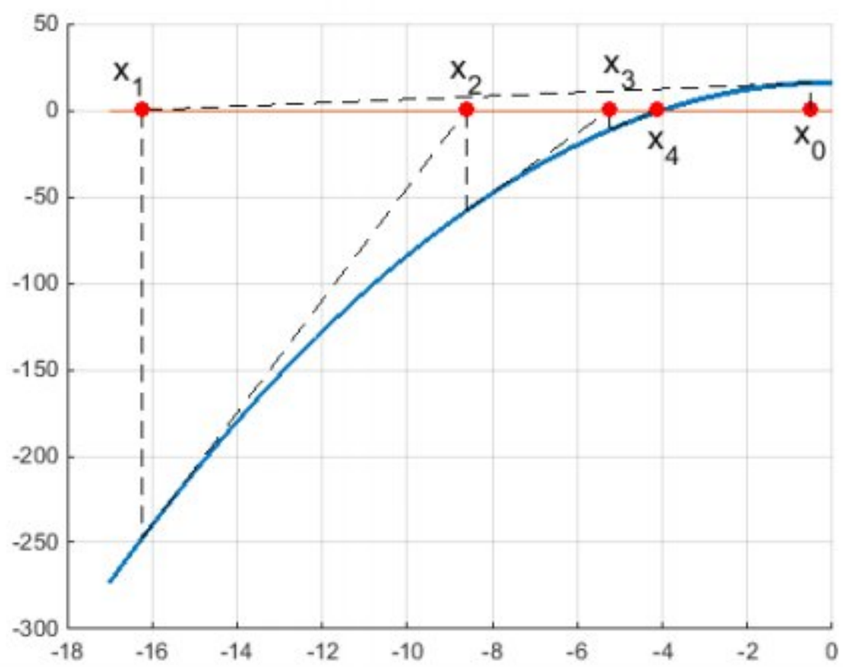
Il reste à montrer que la suite (x_n) est décroissante.
on distingue deux cas :

— $x_0 > \alpha$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 0$

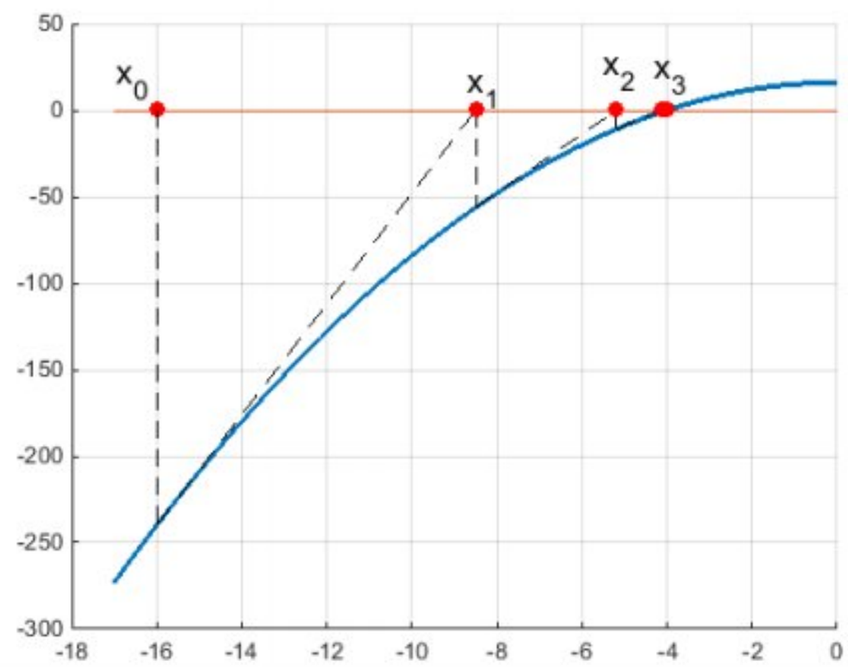
— $x_0 < \alpha$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0$ et on montre que $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \geq 1$

$x_0 > \alpha \Rightarrow F(x_0) = x_1 > F(\alpha) = \alpha$ d'autre part : $F(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 < x_0$ ($f'(x) < 0$ et f décroissante $\Rightarrow f(x_0) > 0$).

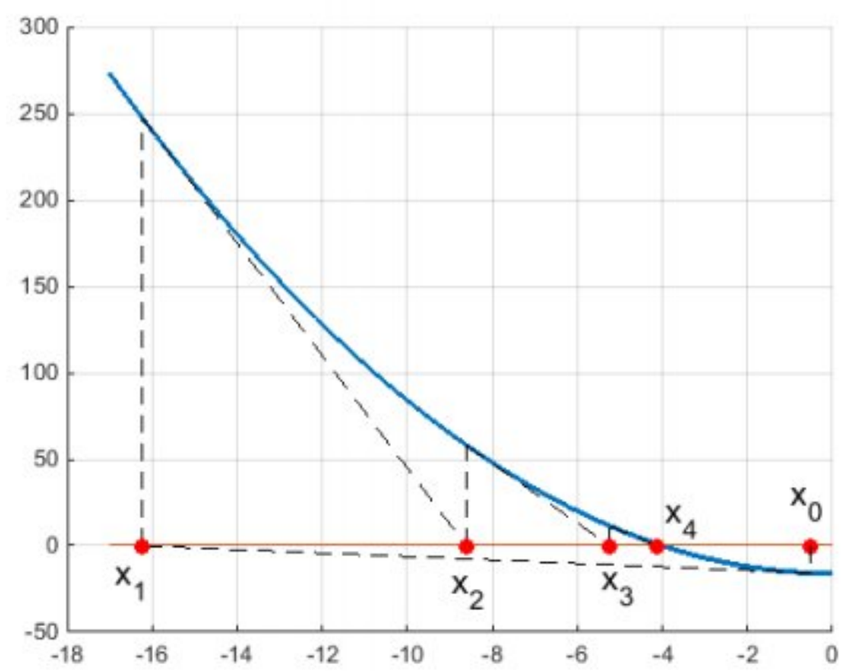
— $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} < \left|\frac{f''(z)}{2f'(x_n)}\right|$ la méthode est d'ordre (converge quadratique).



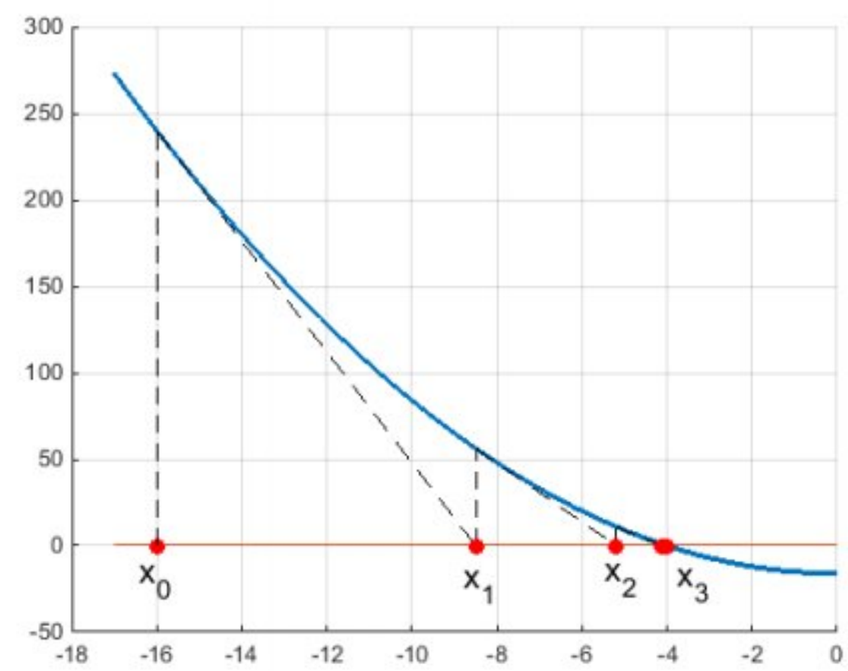
(a) f croissante et $x_0 > \alpha$



(b) f croissante et $x_0 < \alpha$



(c) f décroissante et $x_0 > \alpha$



(d) f décroissante et $x_0 < \alpha$

Remarque 5.4.4

Bien que plus rapide, la méthode de Newton échoue dans plusieurs cas. Par exemple lorsque l'on se trouve loin d'une racine de la fonction étudiée, l'intervalle initial de recherche peut être proche d'un extrémum local (fig. 5.2), ce qui signifie que $f'(x) \to 0$. Cela sera fatal dans le cadre de cette méthode

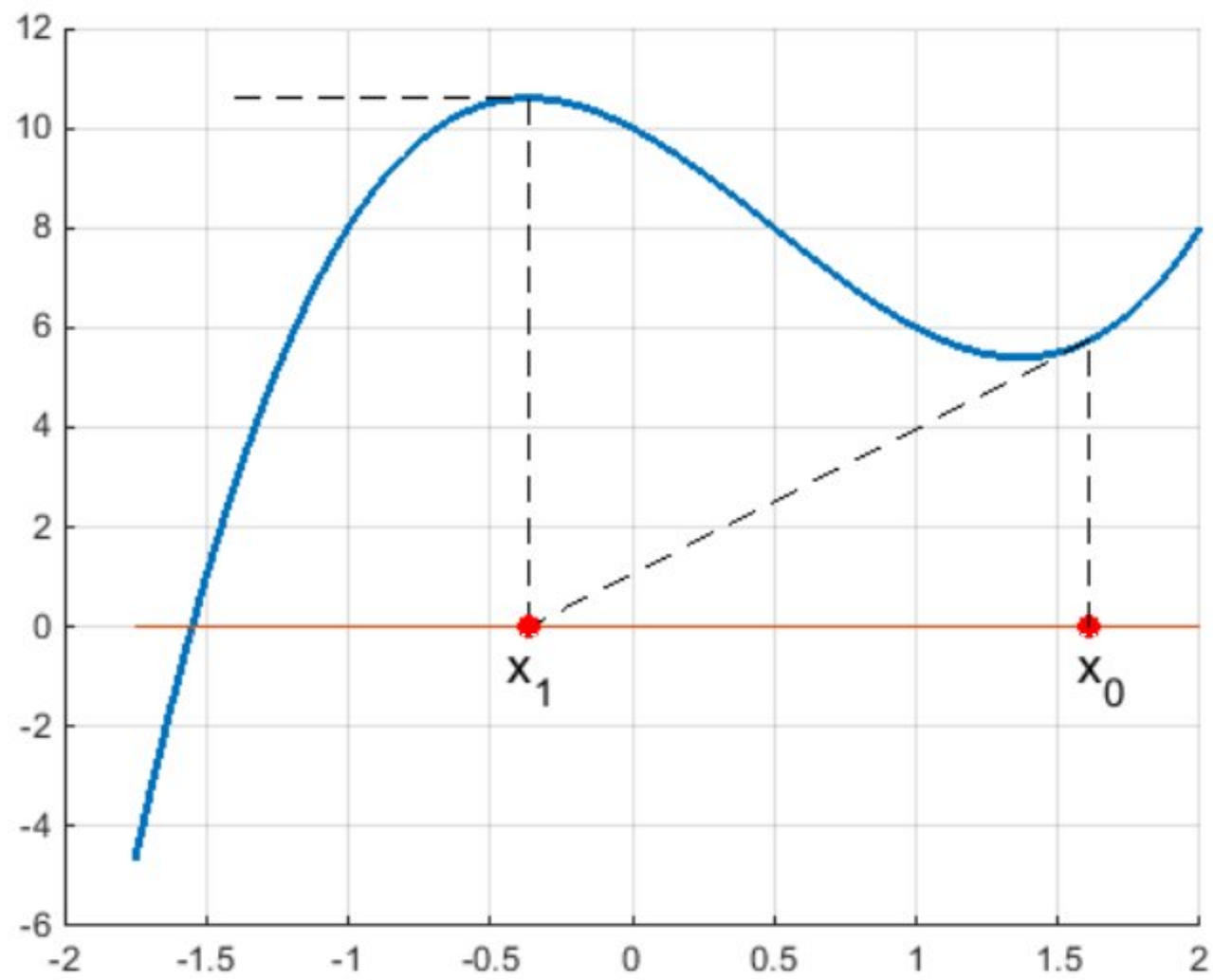


FIGURE 5.2 – Cas particulier où l'on trouve un extrémum local. Dans ce cas la méthode de Newton diverge.

5.4.5 Méthode de Newton : Calcul de l'ordre

Posons $\varepsilon_k = x_k - x^*$

Les développements limités de f au voisinage de x^* donnent :

$f(x_k) \simeq f(x^*) + \varepsilon_k f'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*) = \varepsilon_k f'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*)$ (car $f(x^*) = 0$)

$f'(x_k) \simeq f'(x^*) + \varepsilon_k f''(x^*)$

et comme $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ alors : $x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{\varepsilon_k f'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*)}{f'(x^*) + \varepsilon_k f''(x^*)}$

c-a-d $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k f'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*)}{f'(x^*) + \varepsilon_k f''(x^*)}$

Ainsi $\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_k f'(x^*) + \varepsilon_k^2 f''(x^*) - \varepsilon_k f'(x^*) - \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*)}{f'(x^*) + \varepsilon_k f''(x^*)} = \frac{\frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(x^*)}{f'(x^*) + \varepsilon_k f''(x^*)}$

et puisque $\varepsilon_k f''(x^*)$ est négligeable devant $f'(x^*)$ on obtient $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^2 \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

c-a-d $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} = cte.$

On dit que la méthode de Newton a une convergence d'ordre 2 ou de convergence quadratique.

Scanné avec CamScanner

On peut également recalculer l'ordre de la méthode de Newton comme suit : effet,
Posons $x_{k+1} = F(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, soit x^* la racine de f et $\varepsilon_k = x_k - x^*$.
Un simple calcul nous donne : $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ et $F''(x) = \frac{f(x)f^{(3)}(x)f'(x)+f''(x)\left(f'(x)^2-2f(x)f''(x)\right)}{f'(x)^3}$
Ainsi, $F'(x^*) = 0$ et $F''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0$ (car $f(x^*) = 0$ racine simple).
On va donc développer $F(x)$ au second ordre en $x = x^*$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F(x_k) \\ &= F(x^* + \varepsilon_k) \\ &= F(x^*) + \varepsilon_k F'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} F''(x^*) \\ &= x^* + 0 + \frac{\varepsilon_k^2}{2} F''(x^*) \end{aligned}$$

Ainsi, $x_{k+1} - x^* = \frac{\varepsilon_k^2}{2} F''(x^*)$ c-à-d $\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_k^2}{2} F''(x^*)$
Donc

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2} F''(x^*) = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

D'où le résultat.

5.4.6 Algorithme de Newton

L'algorithme habituellement utilisé pour déterminer une valeur approchée de la solution est le suivant :

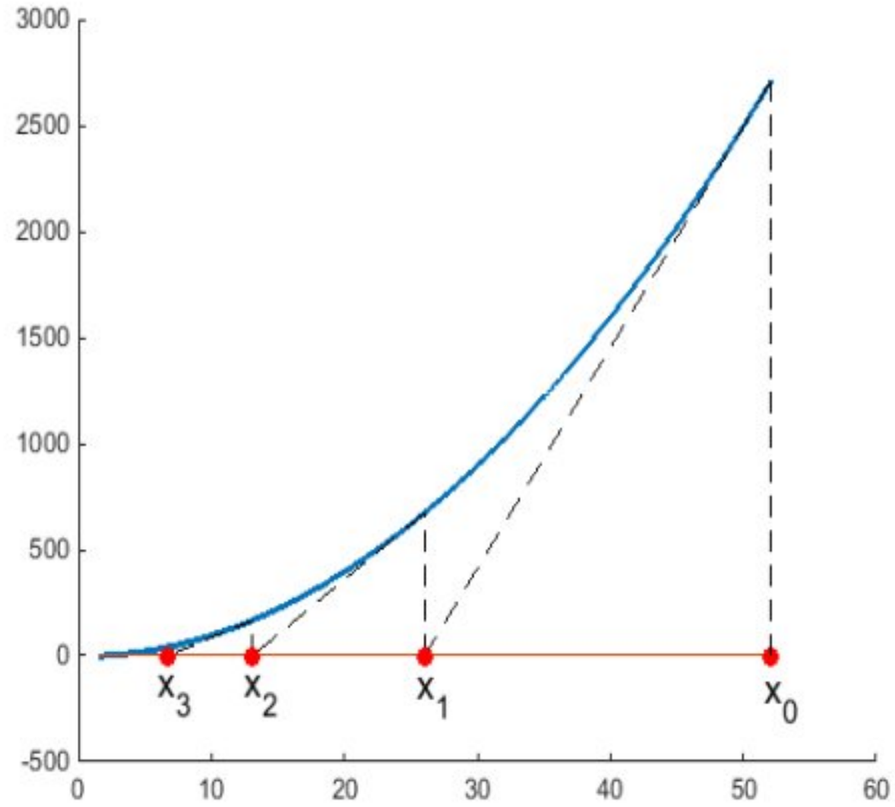
Algorithme de Newton		
Entrées	:	une approximation initiale x_0.
		ϵ (la précision désirée).
		N_0 (le nombre maximal d'itérations).
Sortie	:	la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$
	:	ou un message d'échec.
Etape 1	:	$N = 1$
Etape 2	:	Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **3** à **6**.
Etape 3	:	Poser $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
Etape 4	:	Si $\lvert x - x_0 \rvert \leq \epsilon$ Alors imprimer x, aller à l'étape **8**.
Etape 5	:	Poser $N = N + 1$.
Etape 6	:	Poser $x_0 = x$.
Etape 7	:	Imprimer la méthode a échoué après N itérations.
Etape 8	:	Fin.

A. LAMMIII

Scanné avec CamScanner

Exemple 5.4.7

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[0, 52]$.
f est continue sur $[0, 52]$ et on a $f(0) = -4$ et $f(52) = 2700$
Nous allons utiliser la méthode de Newton pour calculer une estimation de cette racine avec $x_0 = 52$



k	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$	x_k	$f(x_k)$	err_k
1	52	2700	26	674	26
2	26	674.0015	13.0960	167.5063	12.9424
3	13.0960	167.5063	6.7007	40.8999	6.3953
4	6.7007	40.8999	3.6488	9.3141	3.0519
5	3.6488	9.3141	2.3725	1.6289	1.2763
6	2.3725	1.6289	2.0292	0.1178	0.3433
7	2.0292	0.1178	2.0002	0.0008	0.0290

$$ordre = \frac{\log(2.0002 - 2)}{\log(2.0292 - 2)} = 2.41035 \rightsquigarrow \simeq 2$$

5.4.8 Méthode de Newton : Racines multiples

Lorsque la fonction f admet une racine multiple x^*, sa dérivée s'annule en x^*. Dans ces conditions, f et f' prennent des valeurs très petites au voisinage de x^*. La convergence de la méthode de Newton est beaucoup plus lente que dans le cas d'une racine simple. Elle perd son caractère quadratique et devient linéaire.
Un moyen d'accélérer la convergence est d'introduire un coefficient multiplicateur dans la formule de Newton (appelé coefficient ou paramètre de relaxation).

Scanné avec CamScanner

Définition 5.4.9 (Multiplicité d'une racine)

L'ordre (ou la multiplicité) d'une racine x^* est le plus petit entier m pour lequel on ait $f(x) = (x - x^*)^m \times h(x)$ avec $h(x^*) \neq 0$.

(Racine multiple)

Soit x^* une racine d'ordre $m > 1$ de f c-à-d $f^{(k)}(x^*) = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1$ et $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

Lemme 5.4.10

Soit $F_\lambda(x) = \begin{cases} x^*, & \text{si } x = x^* \\ x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}, & \text{sinon.} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et x^* une racine d'ordre m.
Alors $F_\lambda \in \mathcal{C}^1([a,\ b])$ et $F'_\lambda(x^*) = 1 - \frac{\lambda}{m}$.

Preuve

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x^*} F_\lambda(x) &= \lim_{x \to x^*} \left[x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} \right] = x^* - \lambda \lim_{x \to x^*} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] \\ &= x^* - \lambda \lim_{x \to x^*} \left[\frac{\frac{1}{m!}(x - x^*)^m f^{(m)}(\xi_x)}{\frac{1}{(m-1)!}(x - x^*)^{m-1} f^{(m)}(\eta_x)} \right] = x^* \end{aligned}$$

$$F'_\lambda(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x^*} \left[\dfrac{x - x^* - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}}{x - x^*} \right] = 1 - \dfrac{\lambda}{m}, & \text{si } x = x^* \\ 1 - \lambda \lim\limits_{x \to x^*} \left[\dfrac{f'(x)^2 - f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right] = 1 - \dfrac{\lambda}{m}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 5.4.11

Soit $x^* \in]a,\ b[$ une racine de multiplicité $m > 1$ de $f \in \mathcal{C}^{m+1}(]a,\ b[)$. Alors si x_0 est suffisamment près de x^*, la méthode de Newton converge, mais la convergence est linéaire avec $1 - \frac{\lambda}{m}$

Preuve

Soit x^* une racine de f de multiplicité $m > 1$, alors $f(x) = (x - x^*)^m \times h(x)$, avec $h(x^*) \neq 0$.
Donc

$$f'(x) = (x - x^*)^{m-1} \left(m\ h(x) + (x - x^*) h'(x) \right)$$

et

$$f''(x) = (x - x^*)^{m-2} \left(m(m-1)\ h(x) + 2m\ (x - x^*) h'(x) + (x - x^*)^2 h''(x) \right)$$

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

Maintenant, posons $F(x) = x - \lambda\frac{f(x)}{f'(x)}$, alors $F'(x) = 1 + \lambda\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - \lambda$. Ainsi,

$$F'(x) = 1 + \lambda\frac{(x-x^*)^m h(x)\Big((x-x^*)^{m-2}\left(m(m-1)\,h(x) + 2m\,(x-x^*)h'(x) + (x-x^*)^2h''(x)\right)\Big)}{\Big((x-x^*)^{m-1}\left(m\,h(x) + (x-x^*)h'(x)\right)\Big)^2} - \lambda$$

$$= 1 + \lambda\frac{h(x)\Big(\left(m(m-1)\,h(x) + 2m\,(x-x^*)h'(x) + (x-x^*)^2h''(x)\right)\Big)}{\Big(\left(m\,h(x) + (x-x^*)h'(x)\right)\Big)^2} - \lambda$$

Donc

$$F'(x^*) = 1 + \lambda\frac{h(x^*)\Big(\left(m(m-1)\,h(x^*) + 2m\,(x^*-x^*)h'(x^*) + (x^*-x^*)^2h''(x)\right)\Big)}{\Big(\left(m\,h(x^*) + (x^*-x^*)h'(x^*)\right)\Big)^2} - \lambda$$

$$= 1 + \lambda\frac{m(m-1)\,h(x^*)^2}{\Big(m^2\,h(x^*)^2} - \lambda \;=\; 1 - \frac{\lambda}{m}$$

On va donc développer $F(x)$ à l'ordre 1 en $x = x^*$

$$x_{k+1} = F(x_k) \;=\; F(x^* + \varepsilon_k) \;=\; F(x^*) + \varepsilon_k F'(x^*) \;=\; x^* + \varepsilon_k\left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)$$

Ainsi, $x_{k+1} - x^* = \varepsilon_k\left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)$ c-à-d $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k\left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)$. Donc $\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)$.

Théorème 5.4.12

Soit $x^* \in]a,\ b[$ une racine de multiplicité $m > 1$ de $f \in \mathcal{C}^{m+1}(]a,\ b[)$. La méthode de Newton modifiée, $x_{n+1} = F(x_n)$, où

$$F(x) = \begin{cases} x^*, & \text{si } x = x^* \\ x - m\frac{f(x)}{f'(x)}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

converge quadratiquement si $x^* \in]a,\ b[$ est suffisamment près de x^*.

Preuve

Soit x^* une racine de f de multiplicité $m > 1$, alors $f(x) = (x-x^*)^m \times h(x)$, avec $h(x^*) \neq 0$. Posons $F(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$, alors

$$F'(x) = 1 + m\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - m = 1 + m\frac{h(x)\Big(\left(m(m-1)\,h(x) + 2m\,(x-x^*)h'(x) + (x-x^*)^2h''(x)\right)\Big)}{\Big(\left(m\,h(x) + (x-x^*)h'(x)\right)\Big)^2} - m$$

LAMNIT

Scanné avec CamScanner

et

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{mf(x)f^{(3)}(x)}{f'(x)^2} - \frac{2mf(x)f''(x)^2}{f'(x)^3} + \frac{mf''(x)}{f'(x)} \\
&= \frac{m\left((x^*-x)^2h''(x) + 2m(x-x^*)h'(x) + (m-1)mh(x)\right)}{(x^*-x)\left((x^*-x)h'(x) - mh(x)\right)} - \\
&\frac{2mh(x)\left((x^*-x)^2h''(x) + 2m(x-x^*)h'(x) + (m-1)mh(x)\right)^2}{(x^*-x)\left((x^*-x)h'(x) - mh(x)\right)^3} + \\
&\frac{mh(x)\left(h^{(3)}(x)(x^*-x)^3 + 3m(x^*-x)\left((x-x^*)h''(x) + (m-1)h'(x)\right) - (m-2)(m-1)mh(x)\right)}{(x^*-x)\left((x-x^*)h'(x) + mh(x)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $F'(x^*) = 1 - \frac{m}{m} = 0$ et $F''(x^*) = \frac{2h'(x^*)}{m\ h(x^*)} \neq 0$.
On va donc développer $F(x)$ au second ordre en $x = x^*$

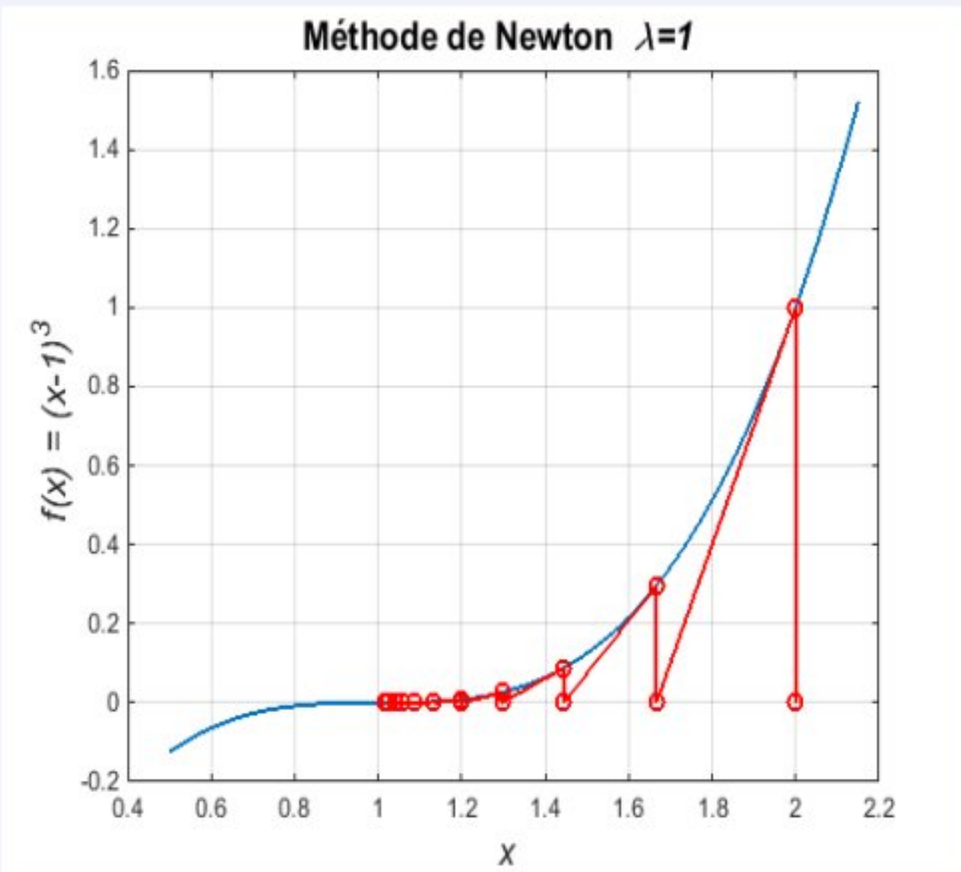
$$x_{k+1} = F(x_k) = F(x^* + \varepsilon_k) = F(x^*) + \varepsilon_k F'(x^*) + \frac{\varepsilon_k^2}{2}F''(x^*) = x^* + 0 + \frac{\varepsilon_k^2}{2}F''(x^*)$$

Ainsi, $x_{k+1} - x^* = \frac{\varepsilon_k^2}{2}F''(x^*)$ c-à-d $\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_k^2}{2}F''(x^*)$. Donc $\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2}F''(x^*) = \frac{h'(x^*)}{m\ h(x^*)}$.

Exemple 5.4.13

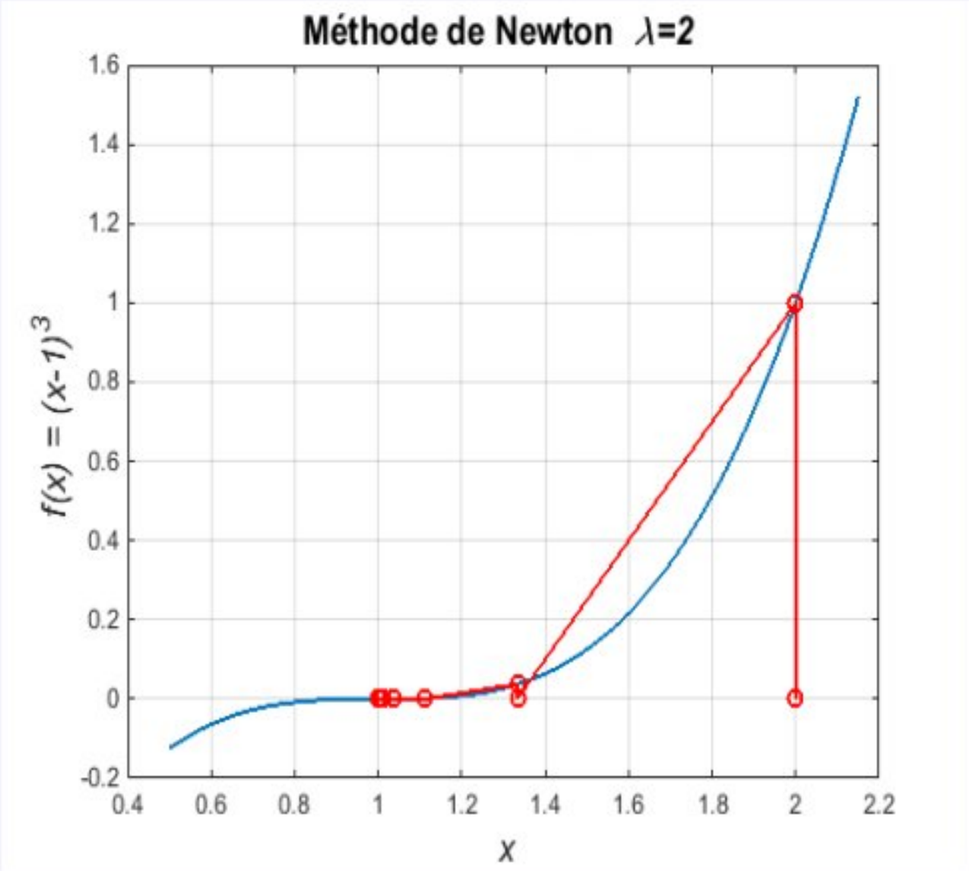
$f^{(0)}(x) = (x-1)^3$	$x^* = 1$ racine d'ordre $m = 3$.
$f^{(1)}(x) = 3(x-1)^2$	$[a,\ b] = [0.5,\ 2.15]$.
$f^{(2)}(x) = 6(x-1)^1$	Nombre maximal d'itération $= 10$.
$f^{(3)}(x) = 6$	$x_0 = 2$

($\lambda = 1$ (Newton))



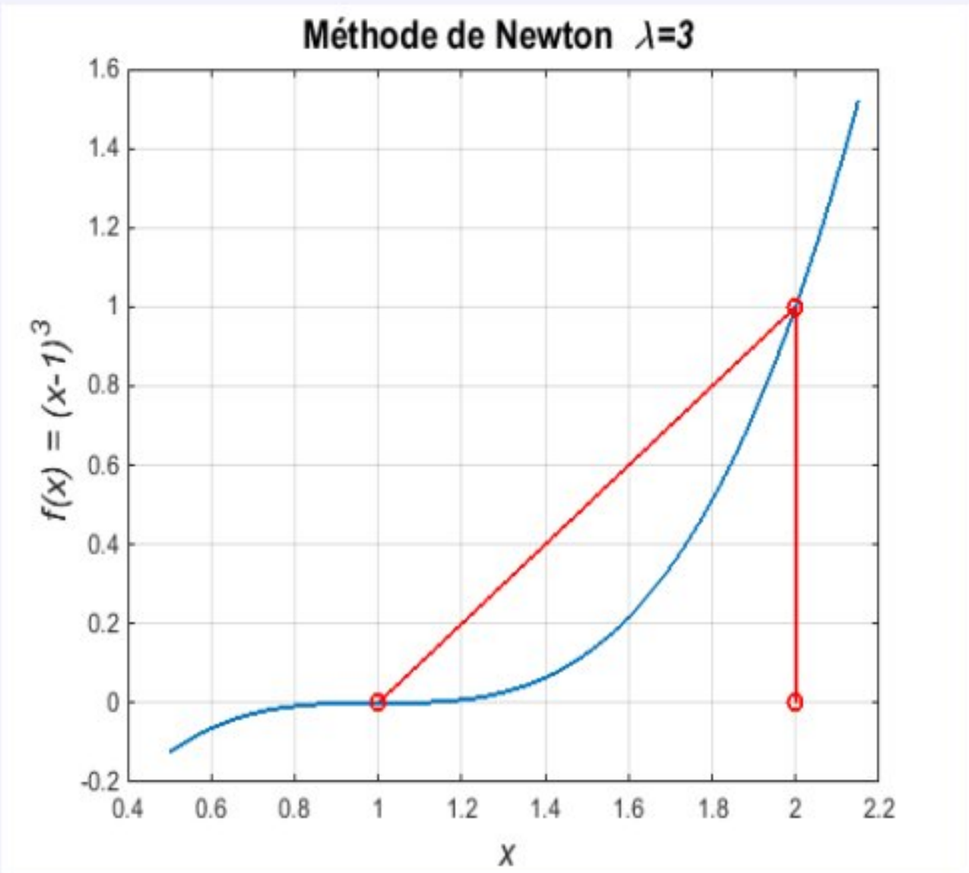
1.666666666666667
1.444444444444444
1.296296296296296
1.197530864197531
1.131687242798354
1.087791495198903
1.058527663465935
1.039018442310624
1.026012294873749
1.017341529915833

($\lambda = 2$ (Newton))



1.333333333333334
1.111111111111111
1.037037037037037
1.012345679012346
1.004115226337449
1.001371742112483
1.000457247370828
1.000152415790276
1.000050805263425
1.000016935087809

($\lambda = 3$ (Newton))



1
NaN
NaN
NaN
NaN
NaN
NaN
NaN
NaN
NaN

Exercice 5.4.14 (Exercice : Méthode de Newton pour le calcul de l'inverse)

Soit $a > 0$. On cherche à calculer $\frac{1}{a}$ par l'algorithme de Newton.

1. Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à une fonction F (dont $\frac{1}{a}$ est un zéro) bien choisie s'écrit :

$$\begin{cases} x_0, \text{ donnée} \\ x_{k+1} = x_k(2 - ax_k). \end{cases}$$

2. Montrer que si $x_0 \in]0, \frac{2}{a}[$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = \dfrac{1}{a}$

Scanné avec CamScanner

Solution 5.4.15

1- Soit F la fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{x} - a$.
Cette fonction est continue et dérivable pour tout $x \neq 0$.
Et on a : $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$, Ainsi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{x_k} - a}{-\frac{1}{x_k^2}} = x_k(2 - ax_k)$$

L'algorithme de Newton pour la recherche d'un zéro est donné par

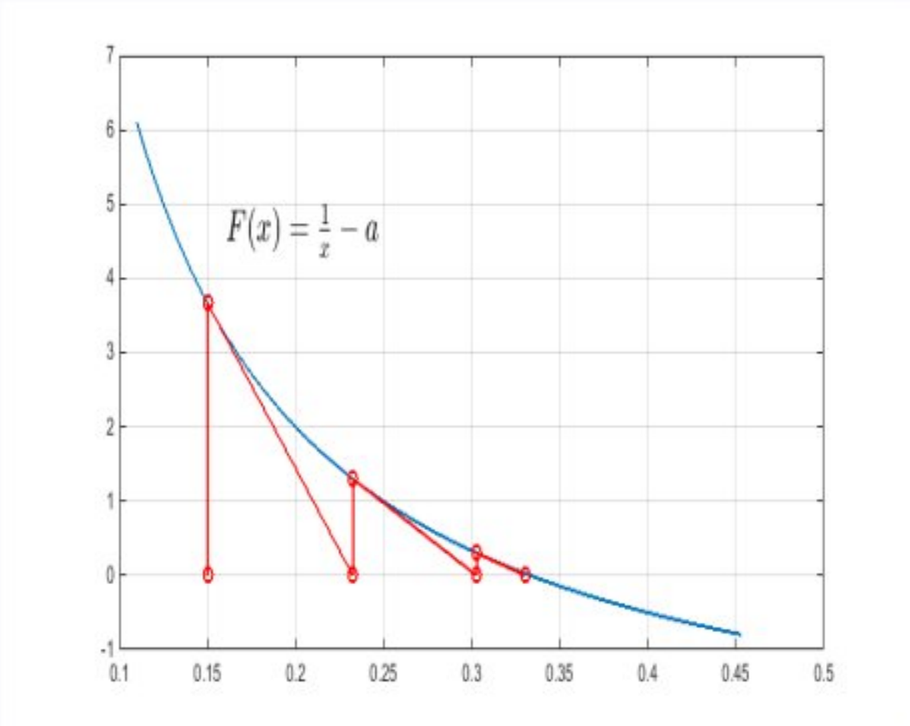
$$\begin{cases} x_0, \text{ donnée} \\ x_{k+1} = x_k(2 - ax_k). \end{cases}$$

2- Posons $\varphi(x) = x(2 - \ a\ x)$. Alors $\varphi'(x) = 2(1 - a\ x)$
Le tableau de variation de la fonction φ est le suivant :

x	0		$\frac{1}{a}$		$\frac{2}{a}$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{a}$	$\searrow$	0

De plus on a $\varphi(]0,\ \frac{1}{a}[) =]0,\ \frac{1}{a}[$ et $\varphi(]\frac{1}{a},\ \frac{2}{a}[) =]0,\ \frac{1}{a}[$
Si $x_0 \in]\frac{1}{a},\ \frac{2}{a}[$ alors $x_1 = \varphi(x_0) \in]0,\ \frac{1}{a}[$
et on se ramène au cas $x_0 \in]0,\ \frac{1}{a}[$ (il suffit de prendre $x_0 = x_1$)
$x_k \in]0,\ \frac{1}{a}[$ et φ croissante $\Rightarrow x_{k+1} \geq x_k$
Donc la suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\frac{1}{a}$
elle est donc convergente.
Soit l sa limite, on a $l = l(2 - a\ l)$, et comme $l \geq x_0 > 0$, on a $l = \frac{1}{a}$.
Illustration :

$a = 3$ et $x_0 = 0 = 0.15$;
0.232500000000000
0.302831250000000
0.330542202070312
0.333309962092151
0.333333331694689
0.333333333333333



Scanné avec CamScanner

Exercice 5.4.16

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

1. Donner le tableau de variation de f
2. Montrer que f admet une racine unique $\alpha \in [\sqrt{\frac{2}{3}},\ +\infty[$
3. Montrer $\alpha \in [2,\ 3]$
4. Posons $x_0 = 3$. Dans un tableau dresser les quatres premières itérations avec l'erreur et l'ordre associé.
5. Tracer la fonction f (sur l'intervalle $[2,\ 3]$) et les quatres premières itérations de la question précédente.

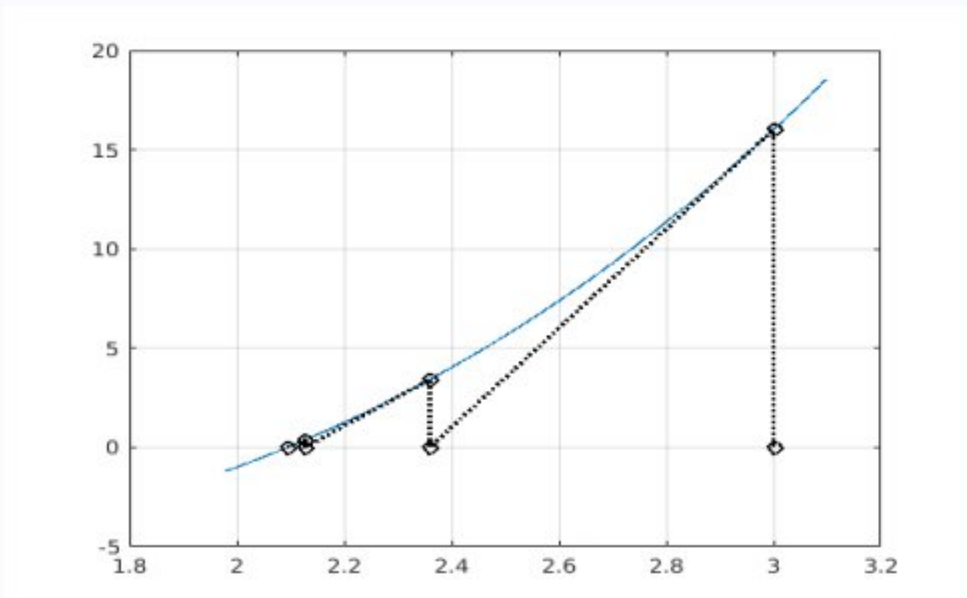
Solution 5.4.17

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car :polynôme) et on a : $f'(x) = 3x^2 - 2$
$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq \pm 0.816$
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx -3{,}911$	$\searrow$	$\approx -6{,}089$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a la fonction f est continue et $f(\sqrt{\frac{2}{3}}) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$, donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine $\alpha \in [\sqrt{\frac{2}{3}},\ +\infty[$.
D'après le tableau de variation : la fonction f est strictement croissante sur $[\sqrt{\frac{2}{3}},\ +\infty[$, d'où l'unicté de la racine.
3. $f(2) = -1$ et $f(3) = 16$ donc $\alpha \in [2,\ 3]$.
4. et 5.

k	x_k	$\lvert err \rvert$	ordre
0	3.0000	-	-
1	2.3600	0.6400	-
2	2.1272	0.2328	3.2660
3	2.0951	0.0321	2.3593
4	2.0946	0.0005	2.2103



Scanné avec CamScanner

5.4.18 Méthode de Newton : variantes

L'expression de $f'(x_k)$, requise par la méthode de Newton, n'est pas toujours connue ; on peut en obtenir une approximation sur base de la fonction f.

— Formule de différences finies : pour un h donné et **petit**

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}$$

(si h est trop **petit**, il y un risque d'erreur d'annulation) ;

— Méthode de la sécante :

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

5.5 Méthode de la sécante

Bien que la méthode de Newton est très utilisée dans la pratique, son principal inconvénient vient du fait de l'utilisation à chaque itération de la dérivée. Quand la fonction f n'est pas définie explicitement, on n'a pas toujours accès à sa dérivée.
C'est pourquoi nous allons voir maintenant la méthode de la sécante qui n'utilise pas la dérivée de f.
Connaissant x_{k-1} et x_k alors on définie x_{k+1} comme le zéros ($P(x_{k+1}) = 0$) de l'interpolant de Lagrange de f aux points $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ et $(x_k, f(x_k))$. En effet

$$P(x) = \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} f(x_{k-1}) + \frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k} f(x_k)$$

Ainsi $P(x_{k+1}) = 0$ implique que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k), \ \forall k \geq 0.$$

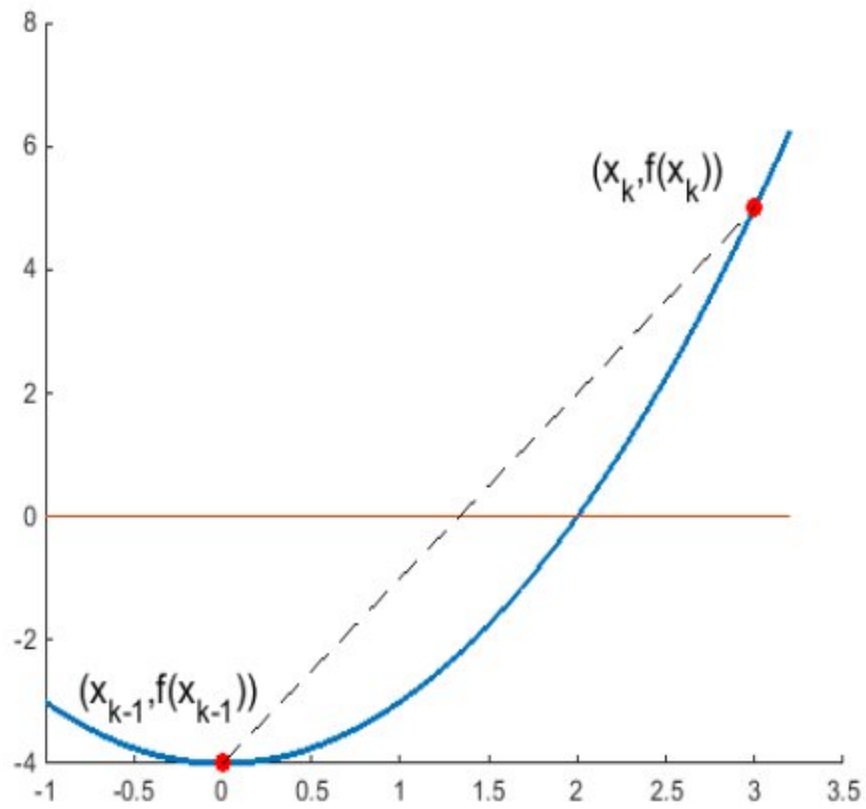
(Méthode de la sécante)

L'algorithme ne peut démarrer que si on dispose de deux valeurs x_0, x_1 proches, si possible, de la solution recherchée de x.

$$\begin{cases} x_0, \ x_1 \quad \text{données ;} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k) \end{cases} \tag{5.4}$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner



Théorème 5.5.1

La méthode de la sécante a un ordre de convergence $= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$. En d'autres termes, on a

$$| x_{n+1} - x | < C \mid x_n - x |^{1.618}$$

Preuve

Posons $x_n = x^* + \varepsilon_n$. Puisque $x_n \to x^*$ Alors $\varepsilon_n \to 0$.
En se basant sur la formule (5.4), on obtient

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{f(x^* + \varepsilon_k) - f(x^* + \varepsilon_{k-1})} f(x^* + \varepsilon_k)$$

On suppose que $f'(x^*) \neq 0$ et $f''(x^*) \neq 0$
Formule de Taylor $f(x^* + \varepsilon_k) = f(x^*) + \varepsilon_k f'(x^*) + \varepsilon_k^2 \frac{f''(x^*)}{2} + O(h^2)$ Autrement dit,
$f(x^* + \varepsilon_k) \simeq \varepsilon_k f'(x^*) + \varepsilon_k f'(x^*) M \varepsilon_k$ avec $M = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$
On obtient facilement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= \frac{M \varepsilon_k \varepsilon_{k-1}}{1 + M(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})} \\ &\simeq M \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \end{aligned}$$

Pour déterminer l'ordre de convergence, on suppose maintenant une relation asymptotique de la forme $|\varepsilon_{k+1}| = A|\varepsilon_k|^p$
Donc $|\varepsilon_k| = A|\varepsilon_{k-1}|^p \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon_{k-1}| = (\frac{|\varepsilon_k|}{A})^{\frac{1}{p}}$
D'où $|\varepsilon_{k+1}| = A|\varepsilon_k|^p = M|\varepsilon_k||\varepsilon_{k-1}| = M|\varepsilon_k|(\frac{|\varepsilon_k|}{A})^{\frac{1}{p}}$
Donc

$$\frac{A^{1+\frac{1}{p}}}{M} = |\varepsilon_k|^{1-p+\frac{1}{p}}$$

Maintenant, le côté gauche est une constante. Par conséquent, le côté droit doit également être constant.

Scanné avec CamScanner

Pour cela, nous avons besoin $1 - p + \frac{1}{p} = 0$ c-à-d $p^2 - p - 1 = 0$
Les racines $p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ En prenant la racine positive on a

$$1 < p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 < 2$$

On dit que la convergence est **super-linéaire**.

5.5.2 Algorithme de la sécante

Algorithme de la sécante		
Entrées	:	deux approximations initiales x_0 et x_1.
		ϵ (la précision désirée).
		N_0 (le nombre maximal d'itérations).
Sortie	:	la valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$
	:	ou un message d'échec.
Etape 1	:	Poser $N = 1$, $z_0 = f(x_0)$, $z_1 = f(x_1)$
Etape 2	:	Tant que $N \leq N_0 + 1$ Faire les étapes **3** à **6**.
Etape 3	:	Poser $x = x_1 - z_1 \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}$.
Etape 4	:	Si $\lvert x - x_1 \rvert \leq \epsilon$ Alors imprimer x, aller à l'étape **8**.
Etape 5	:	Poser $N = N + 1$.
Etape 6	:	Poser $x_0 = x_1$, $z_0 = z_1$, $x_1 = x$, $z_1 = f(x)$.
Etape 7	:	Imprimer la méthode a échoué après N_0 itérations.
Etape 8	:	Fin.

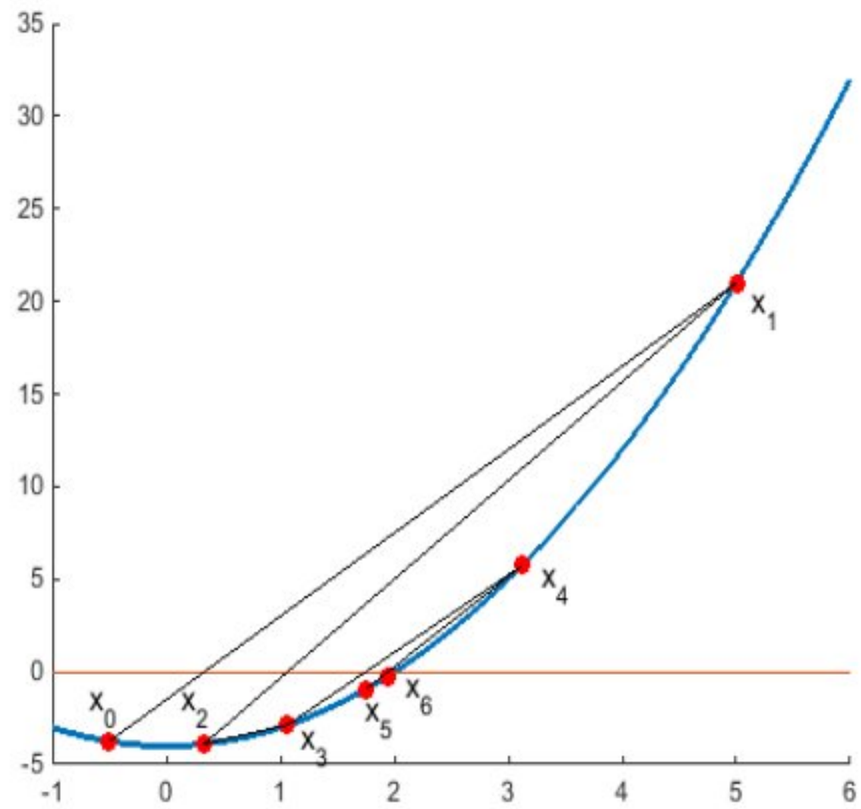
Exemple 5.5.3

On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[-1, 6]$.
Nous allons utiliser la méthode de la sécante pour calculer une estimation de cette racine avec $x_0 = -0.5$ et $x_1 = 5$.

k	x_{k-1}	$f(x_{k-1})$	x_k	$f(x_k)$	err_k
0	-0.50000	-3.7500	5	21.0000	5.5000
1	5.0000	21.0000	0.3333	-3.8889	4.6667
2	0.3333	-3.8889	1.0625	-2.8711	0.7292
3	1.0625	-2.8711	3.1194	5.7307	2.0569
4	3.1194	5.7307	1.7491	-0.9408	1.3704
5	1.7491	-0.9408	1.9423	-0.2275	0.1932
6	1.9423	-0.2275	2.0039	0.0157	0.0616

Scanné avec CamScanner

$$\frac{log2(0.0616)}{log2(0.1932)} = 1.6953$$



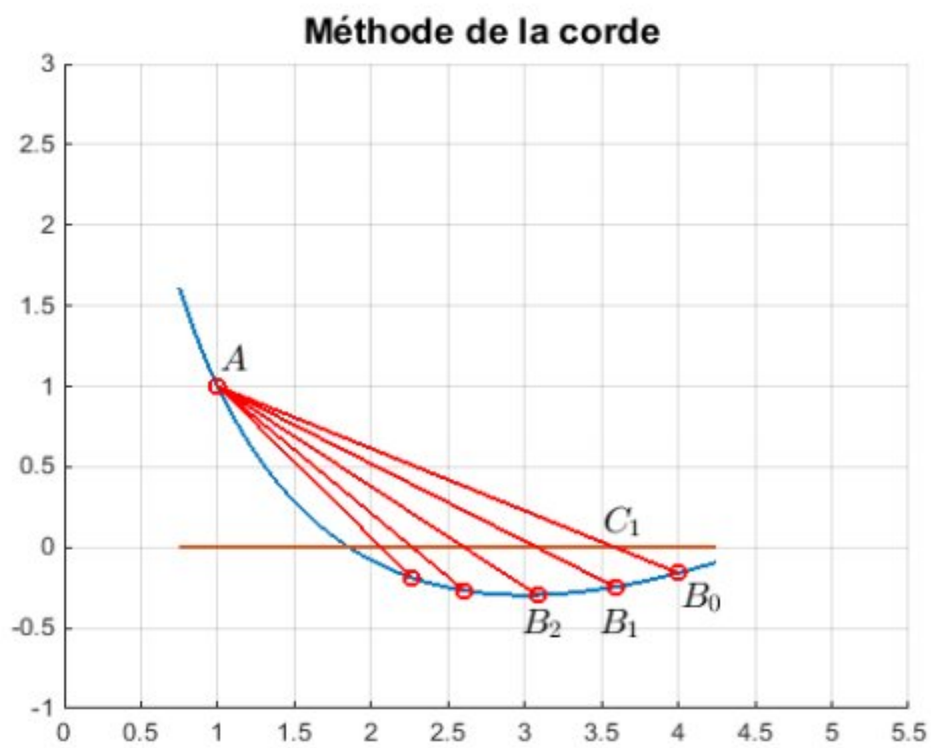
5.6 Méthode de la corde

Cette méthode est obtenue en replaçant $f'(x_k)$ par un q fixé dans la formule de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q}, \quad k \geq 0$$

On peut prendre par exemple $q = f'(x_0)$, ou bien $q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, dans le cas où l'on cherche un zéro dans l'intervalle $[a,\ b]$.

Soit f une fonction dérivable et convexe (pour simplifier) sur un intervalle $[a,\ b]$.
On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique x^* sur l'intervalle $[a,\ b]$.
Supposons que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.
La fonction étant convexe, sa dérivée est donc croissante sur $[a,\ b]$.
Supposons que $|f'(a)| \geq |f'(b)|$.



La corde $[AB]$ avec $A = (a,\ f(a))$ et $B = (b,\ f(b))$ coupe l'axe (Ox) en $C = (c,\ 0)$ et $c \in [a,\ b]$.
Les points A, B et C sont alignés donc $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
soit $\frac{-f(a)}{c-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
d'où

$$c = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

(Méthode de la corde)

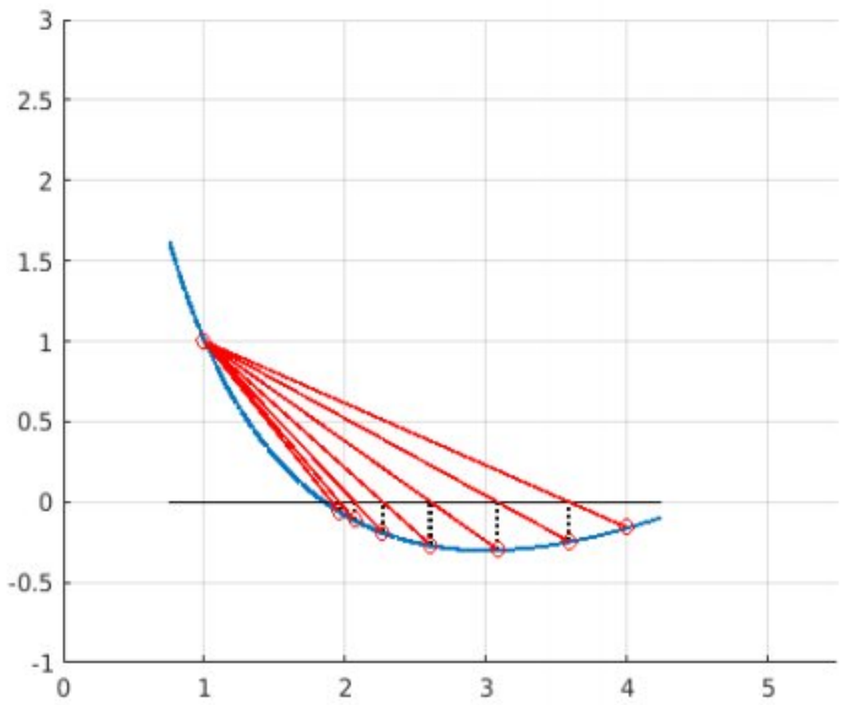
La méthode de la corde (ou de Lagrange) consiste à itérer le processus en remplaçant la corde $[AB]$ par la corde $[AB1]$ avec $B1 = (c,\ f(c))$ et ainsi de suite.

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{k+1} = a - \frac{(x_k - a)f(a)}{f(x_k) - f(a)} \end{cases}$$

Exemple 5.6.1

Méthode la corde pour : $f(x) = x - 3\ln(x) = 0$ avec $a = 1$ et $b = 4$

3.588699449562091
3.079827695229130
2.606300987758987
2.267303686577903
2.066331828230800
1.959800597279344



5.7 Méthode de point fixe

Trouver les racines d'une équation non-linéaire $f(x) = 0$ consiste en la transformer en un problème équivalent $x = \phi(x)$, où la fonction auxiliaire $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ doit avoir la propriété suivante :

$$\alpha = \phi(\alpha) \quad \text{ssi} \quad f(\alpha) = 0$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 5.7.1

Cette transformation est toujours possible mais elle n'est pas unique.
Voir l'exemple 5.7.2.

Exemple 5.7.2

Le choix de $\phi(x)$ n'est pas universel. Par exemple pour

$$f(x) = x^2 - 2.$$

L'equation $\alpha = \phi(\alpha)$ peut être écrite de trois façons :

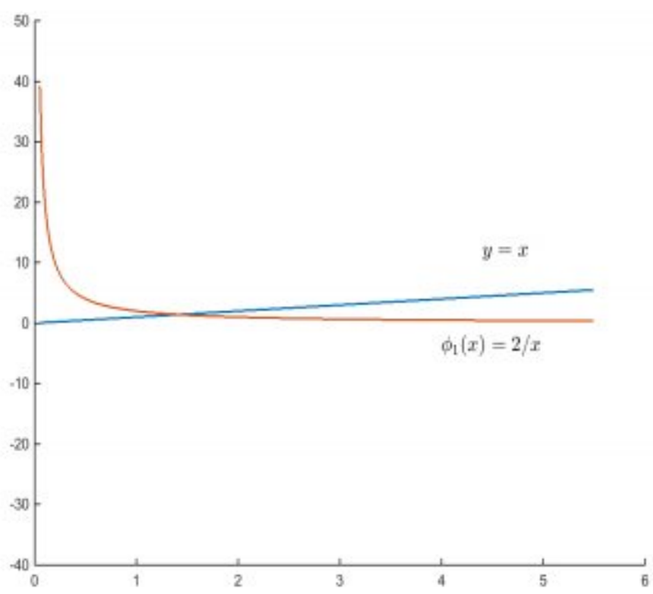
1. $x = 2/x \quad \Rightarrow \quad \phi_1(x) = 2/x$
2. $x = x^2 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad \phi_2(x) = x^2 + x - 2$
3. $x = \lambda(x^2 - 2) + x \quad \Rightarrow \quad \phi_3(x) = \lambda(x^2 - 2) + x$

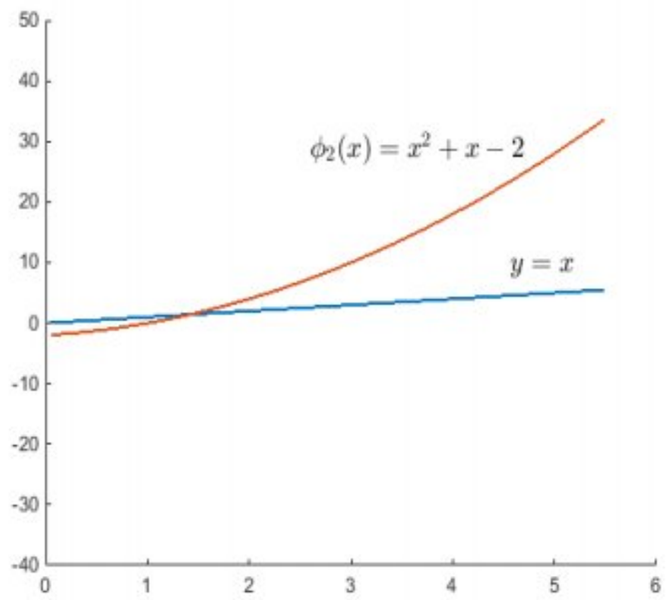
Il faut toutefois noter que ce type de transformations introduisent des solutions "parasites".

Par exemple : résoudre $1/x = a$ ou encore $x = 2x - ax^2$.
On voit que 0 est racine de la deuxième équation mais pas de la première equation.

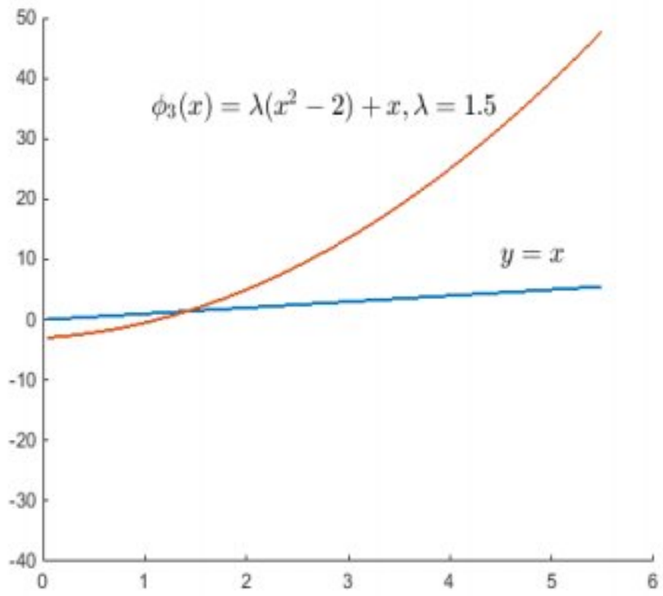
5.7.3 Illustration graphique

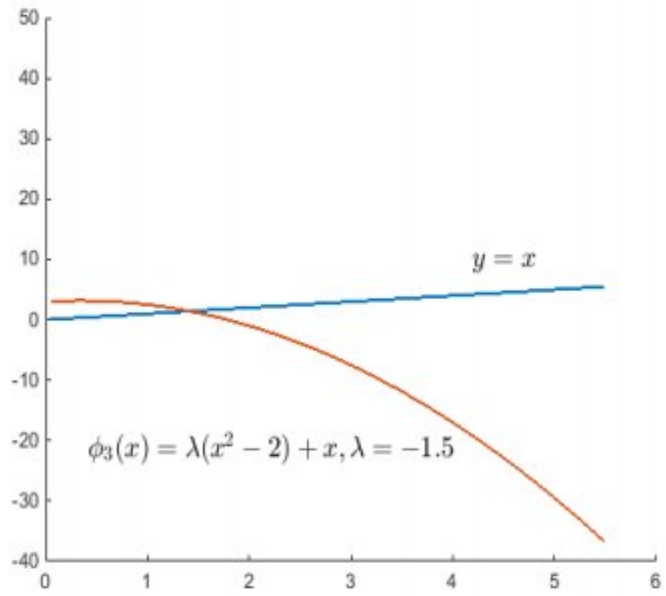
D'un point de vue géométrique chercher la solution de $\alpha = \phi(\alpha)$ revient à trouver le point d'intersection de la courbe $y = \phi(x)$ et de la première bissectrice $y = x$

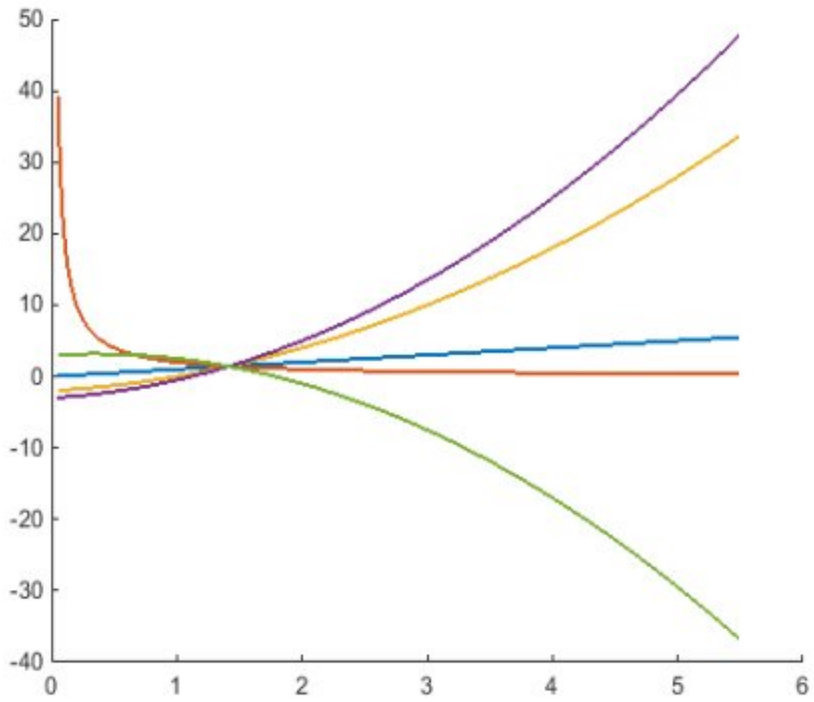




Scanné avec CamScanner







(Méthode du point fixe)

L'algorithme du point fixe consiste à considérer la suite récurrente $x_n,\ n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \quad \text{donnée ;,} \quad \text{initialisation ;} \\ x_{n+1} = \phi(x_n) \end{cases} \tag{5.5}$$

Si cette itération converge, elle converge vers le point-fixe de ϕ, donc de manière équivalente vers le zéro recherché de f.

5.7.3.1 Stabilité de l'intervalle et Existence

Définition 5.7.4

On dit que l'intervalle $[a,\ b]$ est stable par ϕ lorsque $\phi([a,\ b]) \subset [a,\ b]$.

Théorème 5.7.5 (Existence)

Soit ϕ une fonction continue sur l'intervalle $[a,\ b]$ et telle que $[a,\ b]$ soit stable par ϕ. Alors la fonction ϕ admet au moins un point fixe dans l'intervalle ϕ.

Scanné avec CamScanner

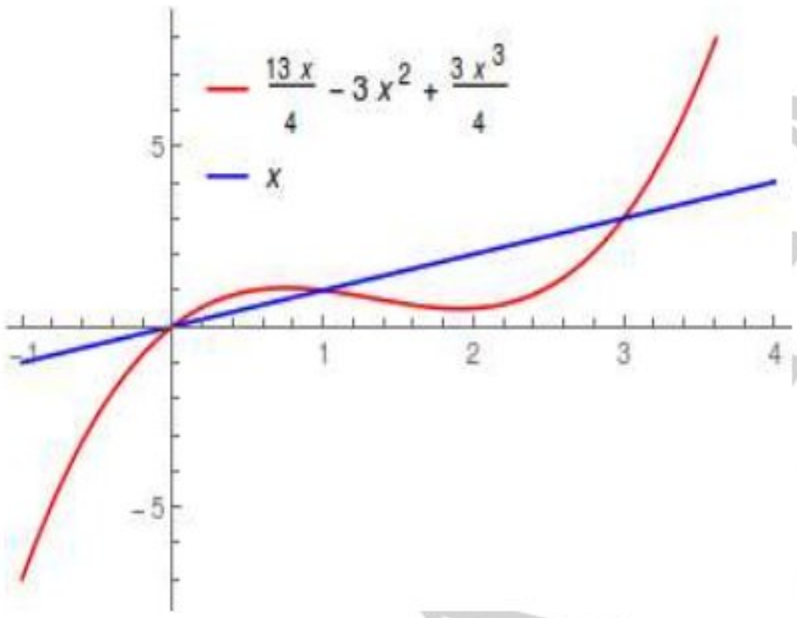
Preuve

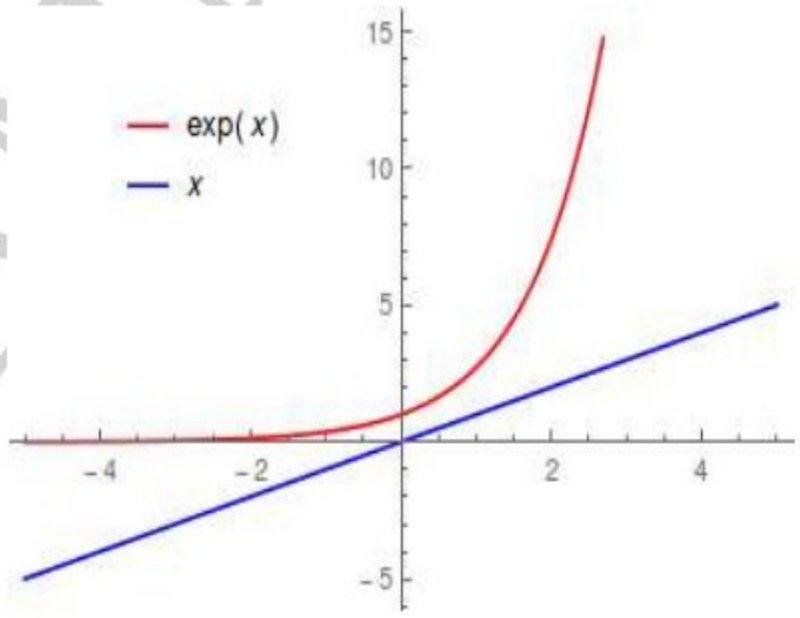
En effet considérons la fonction f définie sur $[a,\ b]$ par $f(x) = x - \phi(x)$.
f est alors continue sur $[a,\ b]$.
Et on a :
$f(a) = a - \phi(a) \leq 0$
$f(b) = b - \phi(b) \geq 0$
car $\phi(a)$ et $\phi(b)$, par hypothèse, appartiennent a $[a,\ b]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on est sur que l'equation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $[a,\ b]$.

Donc ϕ possède au moins un point fixe.

Remarque 5.7.6

La stabilité de l'intervalle ne garantit pas l'existence d'un point fixe.
Alors que le cas que nous venons d'étudier d'un intervalle fermé borné.
Par exemple la fonction exponentielle est une fonction de $I = \mathbb{R}$ dans $I = \mathbb{R}$, mais on sait bien que l'équation $e^x = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.





5.7.6.1 Condition de convergence

La condition de convergence essentielle est une condition de contraction sur la fonction ϕ.

Théorème 5.7.7

Soit $\phi(x)$ une fonction continue. α est un point fixe de ϕ si $\phi(\alpha) = \alpha$.
Géométriquement, un point fixe correspondant à l'intersection du graphe de ϕ avec la droite $y = x$.

Scanné avec CamScanner

Proposition 5.7.8

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\phi : E \to E$ une application continue. On dit que ϕ est contractante si ϕ est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ d(\phi(x), \phi(y)) < K\, d(x, y)$$

Théorème 5.7.9

Soit $\phi : E \to E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors ϕ admet un point fixe unique $\alpha \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$ la suite itérée x_n définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.

Théorème 5.7.10 (Théorème des Accroissements Finis)

Soit ϕ une fonction définie sur $[a, b]$ et a valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si ϕ est continue sur $[a, b]$ et derivable sur $]a, b[$, alors il existe un reel $c \in]a, b[$ tel que : $\phi(b) - \phi(a) = (b - a) \times \phi'(c)$.

Théorème 5.7.11

Soit ϕ une fonction differentiable sur $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si $\|\phi^{'}(x)\| < K$ pour tout x dans $[a, b]$, alors ϕ est k-Lipschitzienne sur $[a, b]$.

Preuve

Soient x et y dans $[a, b]$. Puisque le segment $[x, y]$ est inclus dans $[a, b]$, on a

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_0^1 \phi^{'}(x + t(y - x))(y - x)dt$$

donc

$$\begin{aligned} \|\phi(y) - \phi(x)\| &\leq \int_0^1 \|\phi^{'}(x + t(y - x))(y - x)\|dt \\ &\leq \int_0^1 \|\phi^{'}(x + t(y - x))\|\, \|y - x\|dt \\ &\leq k\, \|y - x\| \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

5.7.11.1 Ordre de convergence

Définition 5.7.12

Soit α un point fixe de ϕ et $e_n = x_n - \alpha$ l'erreur d'approximation de α par x_n.

La méthode de points fixes converge à l'ordre p (p le plus grand possible) si $|\frac{e_{n-1}}{(e_n)^p}|$ converge, i.e

$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^p$ où C est une constante positive.

Plus p est grand, plus l'erreur diminue rapidement.

L'ordre de convergence d'une méthode de points fixes dépend de la fonction ϕ.

Proposition 5.7.13

Si

- $\phi \in \mathcal{C}^{p+1}(I)$ pour un certain voisinage $I \subset [a,\ b]$ de la racine α,
- $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$,
- $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$,

alors la méthode de point fixe associée à la fonction ϕ est d'ordre $p+1$ et $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$.
On dit alors que le point fixe est d'ordre $p+1$.

Preuve
Posons $x_n = \alpha + \varepsilon_n$, avec ε_n c'esi l'erreur au pas n.
Un développement limité de x_{n+1} donne :

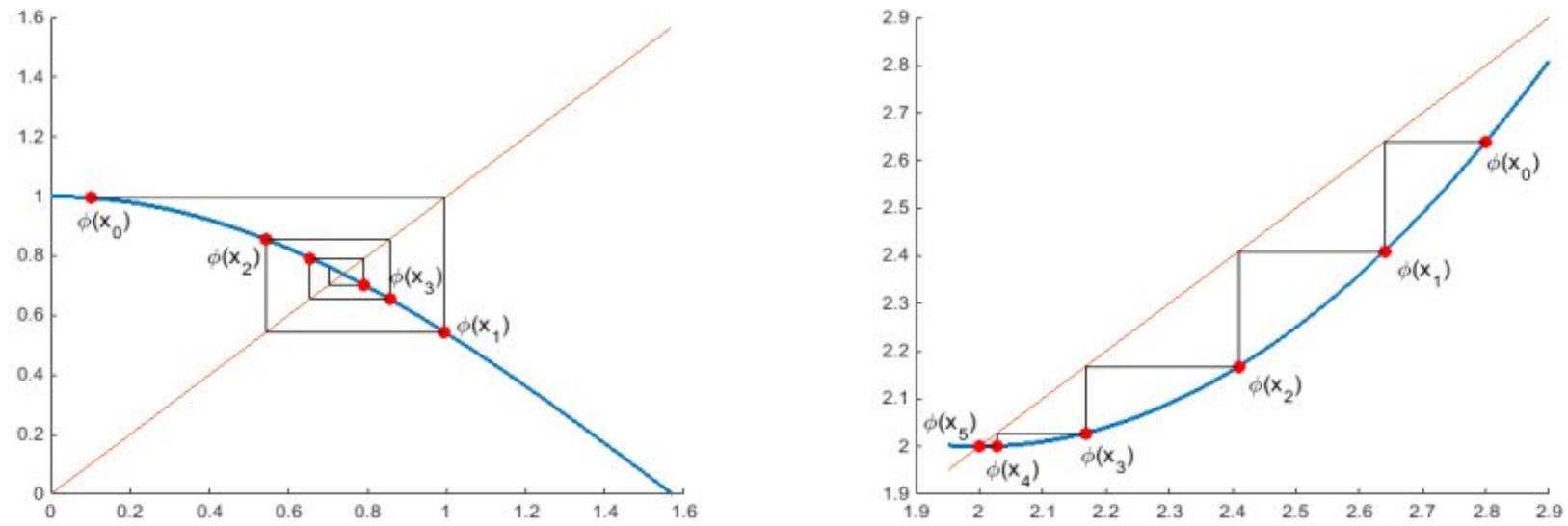
$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(\alpha) + (x_n - \alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2}\varphi''(\alpha) + ...$$
$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2}\varphi''(\alpha) + ...$$

5.7.13.1 Lien entre la méthode de points fixes et les équations algébriques

Pour résoudre une équation $f(x) = 0$, on peut utiliser la méthode de points fixes en procédant comme suit :

- Déterminer $\phi(x)$ tel que $\phi(x) = x$ implique $f(x) = 0$.
- Déterminer une racine de f revient à trouver un point fixe de ϕ.

Scanné avec CamScanner



(a) $\phi' < 0$ (b) $\phi' > 0$

FIGURE 5.3 – Point fixe

5.7.14 Algorithme de la méthode du point fixe

Algorithme du point fixe		
But	:	trouver une solution de $\phi(x) = x$.
Entrées	:	une approximation initiale α_0. ϵ (la précision désirée). N_0 (le nombre maximal d'itérations).
Sortie	:	la valeur approchée de α ou un message d'échec.
Etape 1	:	Poser $N = 1$
Etape 2	:	Tant que $N \leq N_0$ Faire les étapes **3** à **6**.
Etape 3	:	Poser $\alpha = \phi(\alpha_0)$.
Etape 4	:	Si $\lvert\alpha - \alpha_0\rvert \leq \epsilon$ Alors imprimer α, aller à l'étape **8**.
Etape 5	:	Poser $N = N + 1$.
Etape 6	:	Poser $\alpha_0 = \alpha$.
Etape 7	:	Imprimer la méthode a échoué après N_0 itérations.
Etape 8	:	Fin.

A.LAMMI

5.7.15 Point fixes attractifs, répulsifs et douteux

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\phi : [a, b] \to [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $\alpha \in [a, b]$ un point fixe de ϕ.
On peut distinguer trois cas :

— $\mid \phi'(\alpha) \mid < 1$

Scanné avec CamScanner

Théorème 5.7.16

Soit $\phi : [a, b] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\alpha = \phi(\alpha)$ un point fixe.
Si $\mid \phi'(\alpha) \mid < 1$ alors α est un point fixe **attractif**.

Soit K tel que $\mid \phi'(\alpha) \mid < K < 1$. Par continuité de ϕ' il existe h tel que $\mid \phi' \mid < K$ sur $E = [\alpha - h, \alpha + h]$.
On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in E$ il existe ξ entre x et α tel que $\phi(x) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x - \alpha)$.
Ainsi, $\mid \phi(x) - \alpha \mid = \mid \phi(x) - \phi(\alpha) \mid = \mid \phi'(\xi)(x - \alpha) \mid \leq K \mid x - \alpha \mid$.
Donc les images itérées de $x \in E$ convergent vers α.
$\mid \phi^n(x) - \alpha \mid \leq K^n \mid x - \alpha \mid$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ α est un point **attractif**.

— $\mid \phi'(\alpha) \mid > 1$

Théorème 5.7.17

Soit $\phi : [a, b] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\alpha = \phi(\alpha)$ un point fixe.
Si $\mid \phi'(\alpha) \mid > 1$ alors α est un point fixe **répulsif**.

On peut choisi $K \in \mathbb{R}$ tel que $\mid \phi'(\alpha) \mid > K > 1$
La continuité de ϕ' assure l'existence d'un $h > 0$ tel que $\mid \phi'(\xi) \mid > K$ pour tout $\xi \in E = [\alpha - h, \alpha + h]$.
On applique le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in E$ il existe ξ entre x et α tel que $\phi(x) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x - \alpha)$.
Ainsi, $\mid \phi(x) - \alpha \mid = \mid \phi(x) - \phi(\alpha) \mid = \mid \phi'(\xi)(x - \alpha) \mid \geq K \mid x - \alpha \mid$.
Donc les images itérées de $x \in E$ s'éloignent de α.
$\mid \phi^n(x) - \alpha \mid \geq K^n \mid x - \alpha \mid$, puis ils sortent du voisinage.
α est un point **répulsif**.

— $\mid \phi'(\alpha) \mid = 1$

Remarque 5.7.18

Le cas d'un point fixe α avec $\mid \phi'(\alpha) \mid = 1$ est **douteux**.

Exemple 5.7.19 (Exemples typiques)

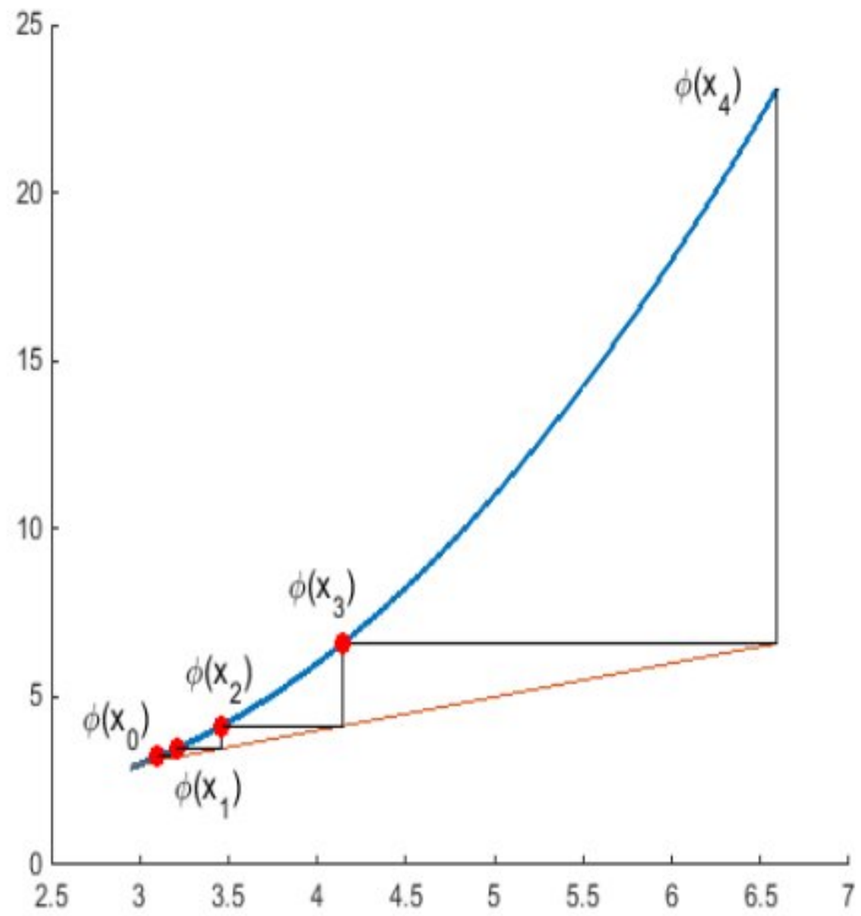
- ✓ Pour $f(x) = x - x^3$ le point fixe 0 est attractif.
- ✓ Pour $f(x) = x + x^3$ le point fixe 0 est répulsif.
- ✓ Pour $f(x) = x + x^2$ le point fixe 0 est attractif à gauche mais répulsif à droite.
- ✓ Pour $f(x) = x - x^2$ le point fixe 0 est attractif à droite mais répulsif à gauche.

Scanné avec CamScanner

Exemple 5.7.20 (répulsif)

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0,\ \alpha = 3$
$\phi(x) = x^2 - 4x + 6$
$\phi'(x) = 2x - 4, \mid \phi'(3) \mid = 2 > 1$
3 est un point **répulsif**
$x_0 = 3.1;\ eps = 0.1;$
$[a, b] = [2.95, 6.6]$

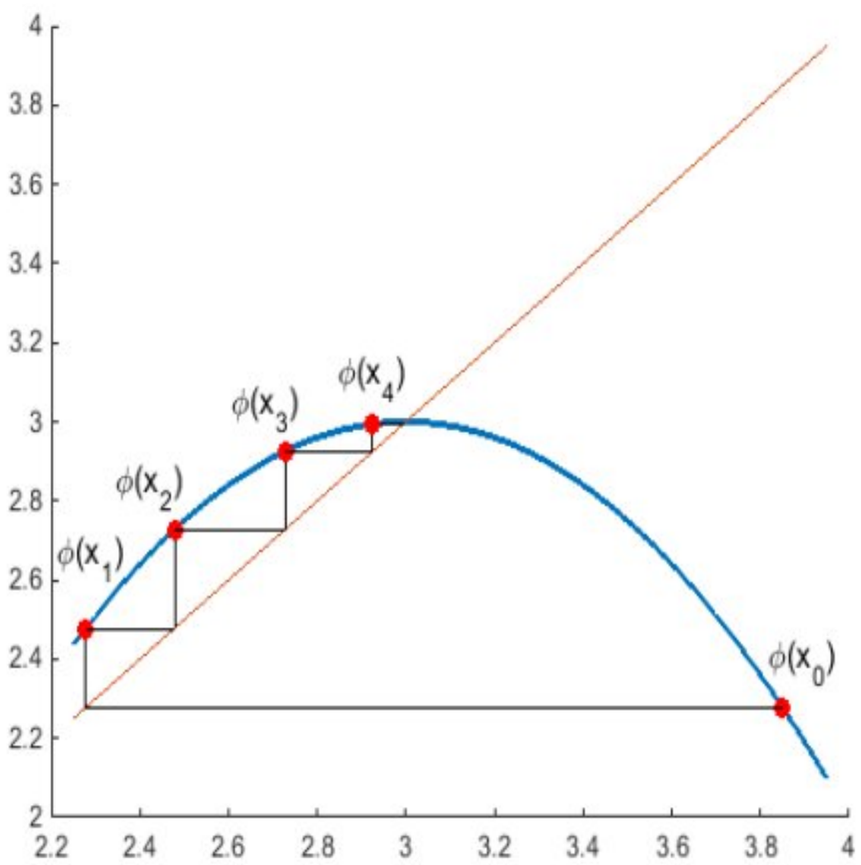
k	x_k	$f(x_k)$
0	3.1000	0.1100
1	3.2100	0.2541
2	3.4641	0.6795
3	4.1436	2.4514
4	6.5950	16.5188
5	23.1138	424.6778



Exemple 5.7.21 (Point attractif)

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0,\ \alpha = 3$
$\phi(x) = -x^2 + 6x - 6$
$\phi'(x) = -2x + 6, \mid \phi'(3) \mid = 0 < 1$
3 est un point **attractif**
$x_0 = 3.85;\ eps = 0.1;$
$[a, b] = [2.25, 3.95]$

k	x_k	$f(x_k)$
0	3.8500	1.5725
1	2.2775	-0.2005
2	2.4780	-0.2495
3	2.7275	-0.1982
4	2.9257	-0.0687
5	2.9945	-0.0055



Scanné avec CamScanner

Exemple 5.7.22 (Point douteux)

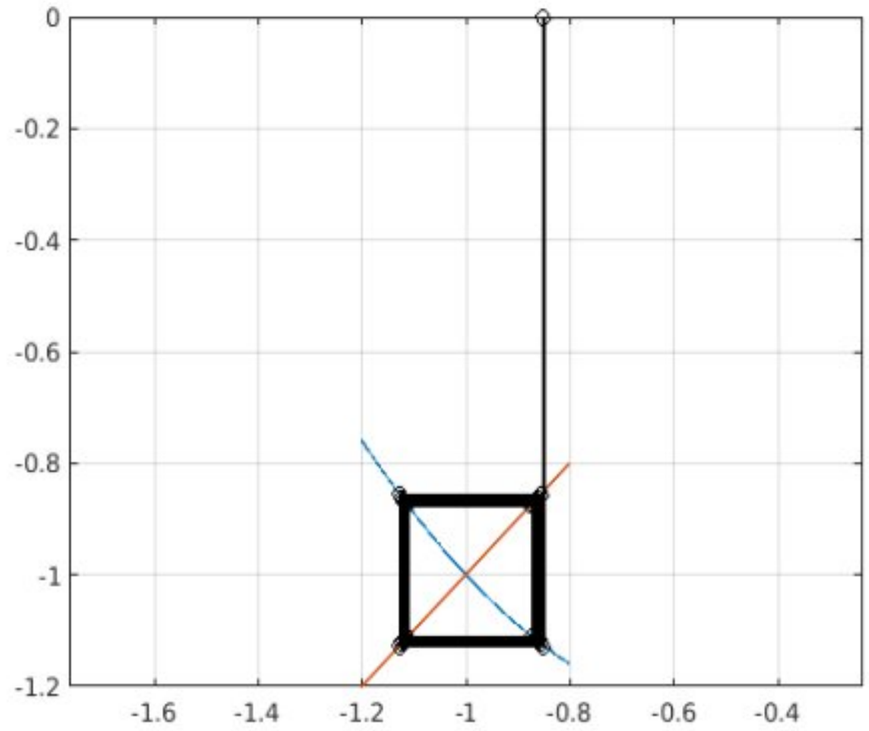
$f(x) = x^2 - 1,\ \alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 1$

$\phi(x) = x^2 + x - 1$

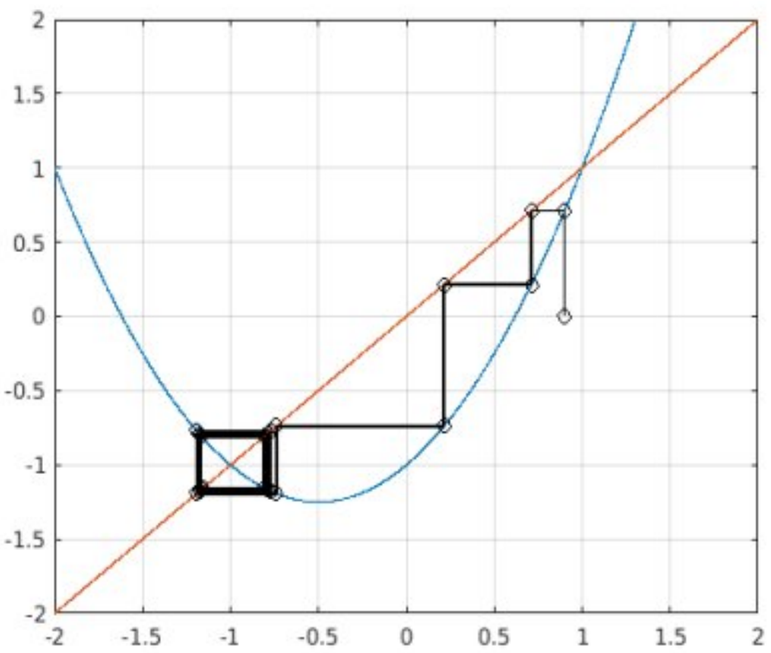
$\phi'(x) = 2x + 1, \mid \phi'(-1) \mid = 1$

(-1 point **douteux**), $x_0 = -0.85$;

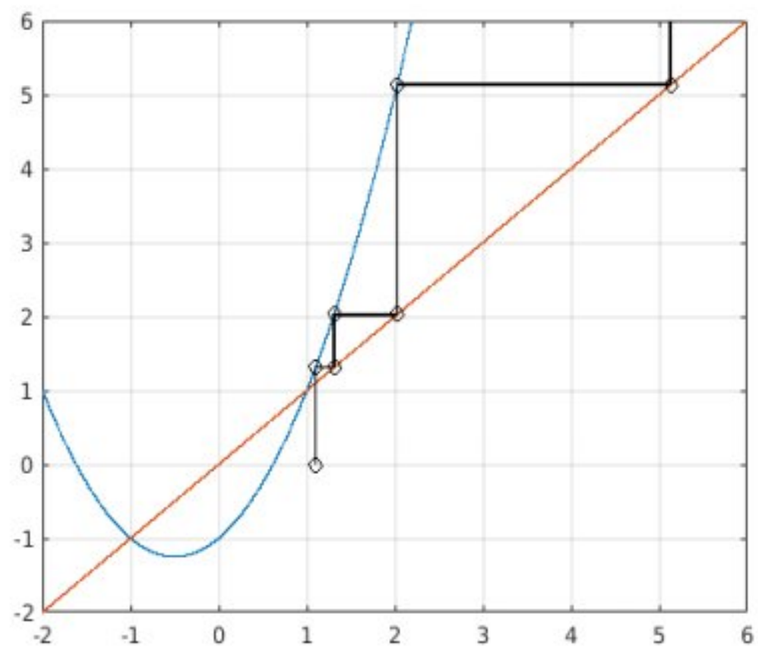
k	x_k
...	...
500	-1.030221528790599
501	-0.968865130406960
502	-1.030165489488465
503	-0.968924553755456
504	-1.030109762885246
505	-0.968983639293748
...	...



$x_0 = 0.9$;



$x_0 = 1.1$;



Exercice 5.7.23

On considère la fonction $f(x) = -\frac{x^3}{4} + 1$

— Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $x^* \in [0,\ 2]$.

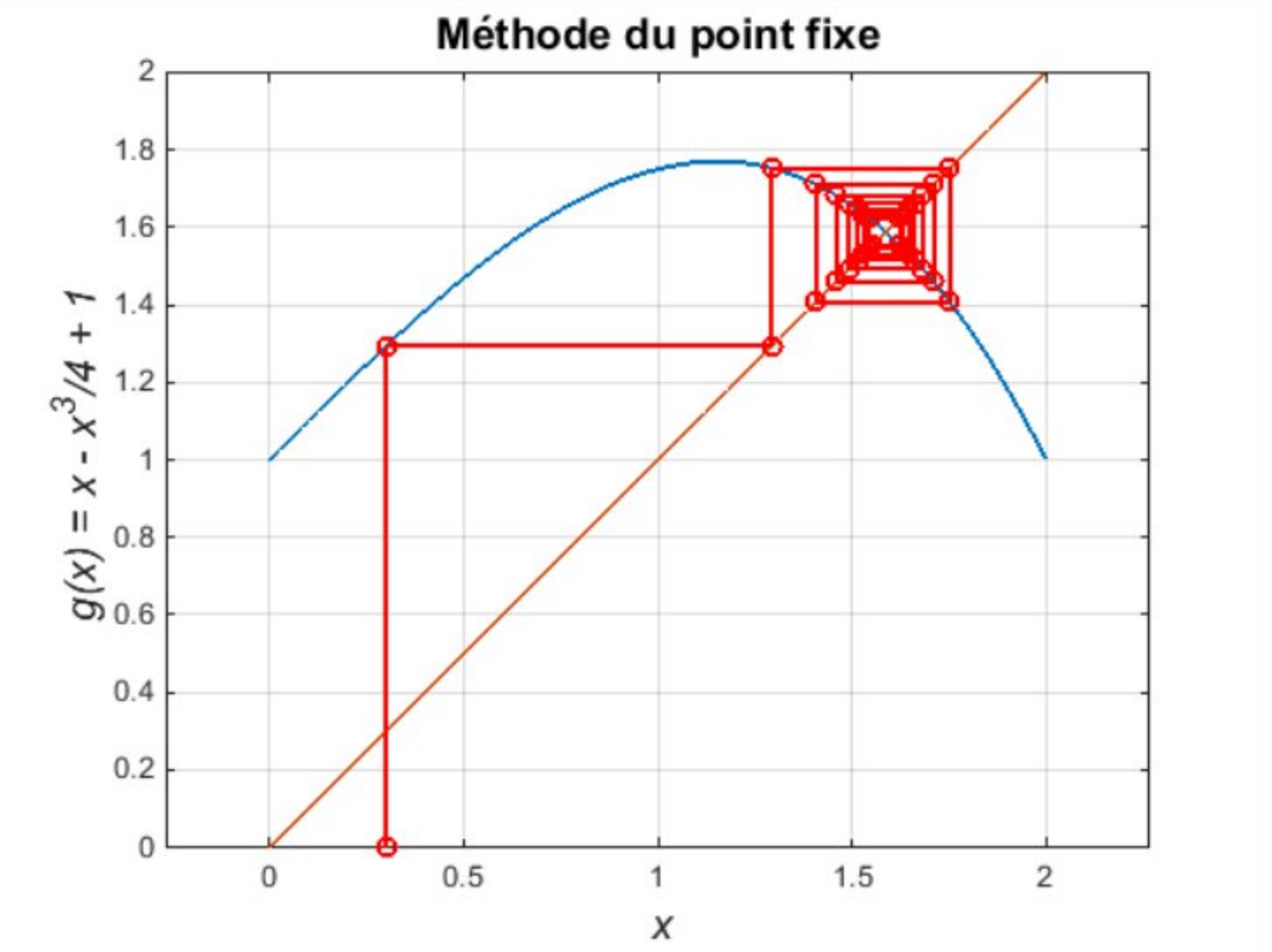
— Soit la suite

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{4} + 1$ et $x_0 = 0.3$

Scanné avec CamScanner

Solution 5.7.24

f est continue sur $[0,\ 2]$ et on a $f(0) \times f(2) = (-1) \times (1) < 0$
d'après T.V.I. il existe $x^* \in [0,\ 2]$ tel que $f(x^*) = 0$.
L'unicité vient du fait que $f'(x) = -\frac{3x^2}{4}$ (f strictement décroissante sur $[0,\ 2]$.)



Exercice 5.7.25

On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $x^* \in [1,\ 2]$.
2. Soit la fonction $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$
   (a) Comment la fonction g est-elle été obtenue ?
   (b) Montrer que la fonction g est contractante sur l'intervalle $[1,\ 2]$ c-à-d : $\forall (x, y) \in [1,\ 2]^2,\ |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ avec $0 < k < 1$.
   (c) Construire alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x^*.
   (d) Quelle est la vitesse de convergence de cette méthode ?

Scanné avec CamScanner

Exercice 5.7.26

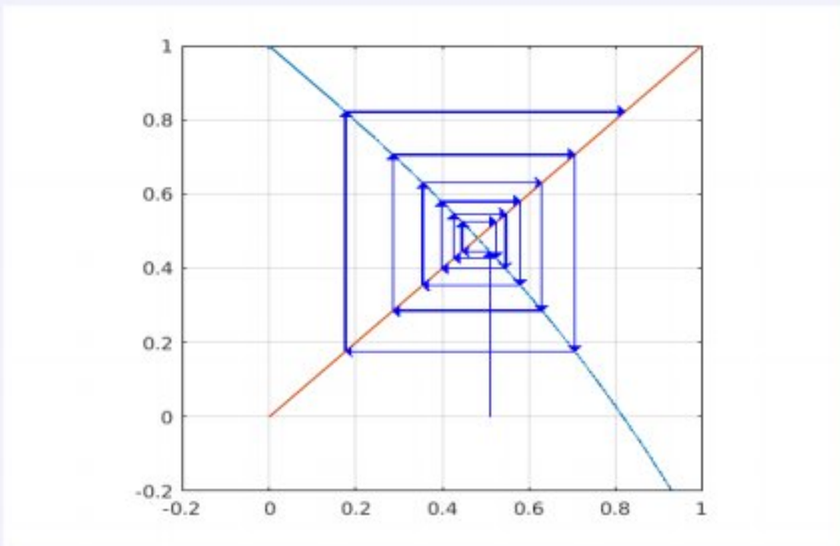
1. Obtenir tous les points fixes de la fonction : $g(x) = \frac{\lambda x(2-x)}{2}$ où λ est un paramètre ($\lambda \neq 0$).
2. Déterminer pour chaque point fixe trouvé en 1 les valeurs de λ pour lesquelles ces points fixes sont attractifs.
3. Déterminer pour chaque point fixe trouvé en 1 la valeur de λ pour laquelle la convergence de la méthode des points fixes sera quadratique.

Exercice 5.7.27

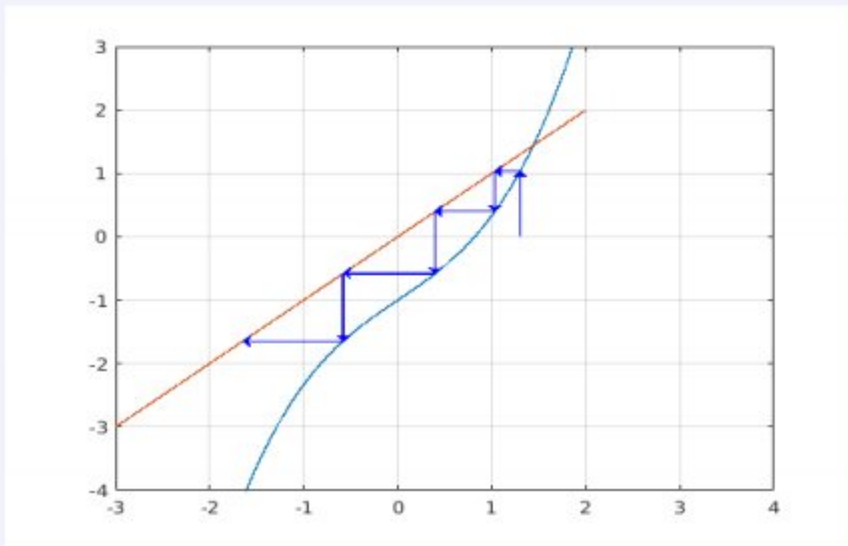
Soit f une fonction bien définie et continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Le but de cet exercice est de résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la méthode de point fixe. Posons $\phi(x) = x - cf(x)$. illustrer graphiquement les 4 cas suivants :
(a)- $\phi'(x) < -1$, **(b)-** $\phi'(x) > 1$, **(c)-** $-1 < \phi'(x) < 0$, **(d)-** $0 < \phi'(x) < 1$.

Solution 5.7.28 (Comme exemples)

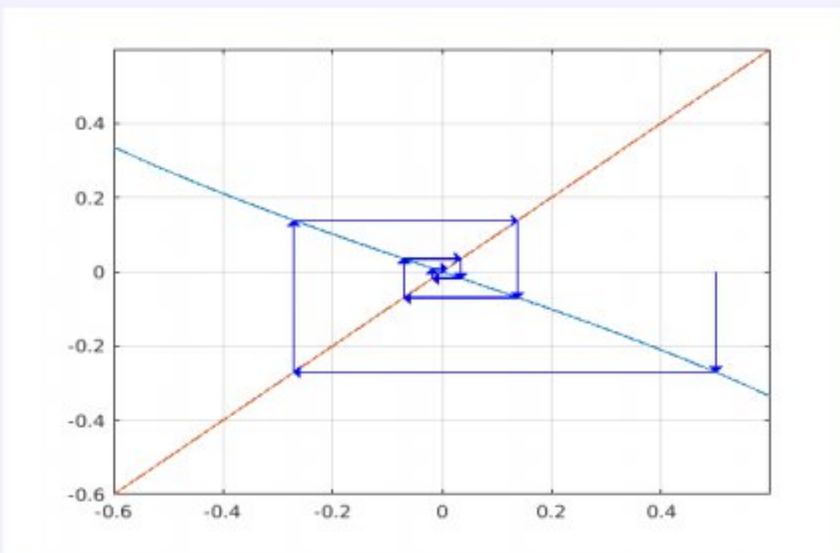
((a)- $\phi'(x) < -1$**)**



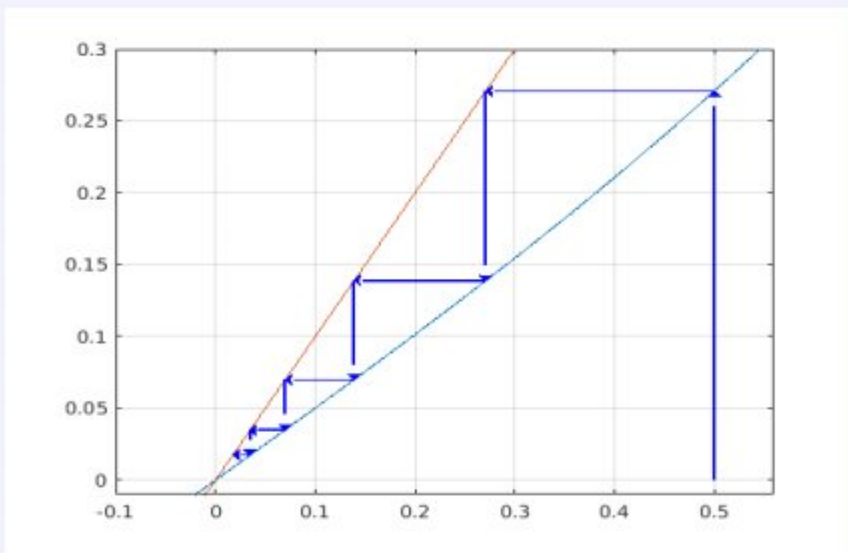
((b)- $\phi'(x) > 1$**)**



((c)- $-1 < \phi'(x) < 0$**)**



((d)- $0 < \phi'(x) < 1$**)**



Scanné avec CamScanner

5.7.29 Procédé pratique

Lorsque l'énoncé de l'exercice ne pose pas de questions intermédiaires, voilà une technique pratique pour étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

- La première chose à vérifier est que la fonction f est continue, au moins sur un intervalle stable (contenant les termes de la suite !) sur lequel on va l'étudier.
  Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- Il faut trouver un intervalle $I = [a, b]$ qui soit stable par f, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$.
  Stable par $I \Rightarrow I$ contient tous les termes de la suite à étudier, au moins à partir d'un certain rang.
- Ensuite il faut chercher les points fixes de f dans I : y en a-t-il un ou plusieurs ? S'il sont 'calculables' il faut les calculer.

5.7.30 Comparaison des différentes méthodes

Pour comparer les algorithmes, il est important de tenir compte de la présence ou non des facteurs suivants :

- assurance de la convergence
- vitesse de la convergence
- stabilité de l'algorithme - précision des résultats
- efficacité des calculs (ex : nombre de fonctions à calculer à chaque itération).
- **Dichotomie**
  - inconvénient : convergence très lente
  - avantage : convergence assurée
- **Newton**
  - inconvénient : calcul des dérivées
  - avantage : convergence quadratique
- **Sécante**
  - inconvénient : convergence super-linéaire
  - avantage : pas de calcul des dérivées
- **Point Fixe**
  - inconvénient : convergence linéaire
  - inconvénient : choix de ϕ

Problème général : initialisation de la suite.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

(Devoir à la maison)

A rendre avant le 15 Décembre

Problème : On se propose de résoudre numériquement l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x - 2. \tag{5.6}$$

1. Donnez le tableau de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
2. Montrer que -1 est une racine multiple de f. Ecrire f sous la forme $f(x) = (x+1)^m\, h(x)$ avec $h(-1) \neq 0$.
3. Posons $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ et $y_{k+1} = y_k - m\,\frac{f(y_k)}{f'(y_k)}$. Que se passe t'il si $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$.
4. Soit $x_0 = -1.25$, montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers -1.
5. Soit $y_0 = -1.25$, montrer que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers vers -1.
6. Calculer les trois premières itérations de la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ et de la suite $(y_k)_{k\geq 1}$.
7. Montrer que l'équation (5.6) admet une solution unique $\alpha \in [\frac{19}{10},\ 3]$.
8. Posons $g_1(x) = \frac{x^3-2}{3}$. Pourquoi le choix de g_1 pour la méthode du point fixe n'est pas judicieux sur $[\frac{19}{10},\ 3]$.
9. Posons $g_2(x) = \sqrt[3]{3x+2}$. Monter que $|g_2'(x)| < 1,\ \forall\, x \in [\frac{19}{10},\ 3]$ et que $g_2([\frac{19}{10},\ 3]) \subset [\frac{19}{10},\ 3]$.
10. Montrer que la méthode du point fixe définie par g_2 converge pour tout choix $x_0 \in [\frac{19}{10},\ 3]$.
11. Posons $z_{k+1} = g_2(z_k)$ et $\alpha = 2$. Calculer l'ordre de convergence de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
12. Pour $z_0 = \frac{7}{3}$, calculer les trois premières itérations de la suite $(z_k)_{k\geq 1}$.
13. On suppose que $\alpha \leq \frac{7}{3}$, monter que $g(x) = 3\alpha + 2x^3 - 3\alpha x^2 + 2 \geq 0, \quad \forall\, x \in [1,\ 3]$.
14. Posons $u_{k+1} = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$ et $u_0 \in [\alpha,\ \frac{7}{3}]$
    (a) Montrer que $u_n \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$.
    (b) Montrer que la suite $u_{n+1} \in [\alpha,\ u_n]$.
    (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers α quadratiquement.
    (d) Pour $u_0 = \frac{17}{9}$, calculer les trois premières itérations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$
15. Pour $u_0 = \frac{7}{3}$, calculer les trois premières itérations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ approximant la solution.
16. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue à partir de la méthode de la sécante.
    Calculer les trois premières itérations, pour $v_0 = \frac{7}{3}$ et $v_1 = \frac{3}{2}$.
17. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue à partir de la méthode de la corde.
    Calculer les trois premières itérations, pour $[a,\ b] = [\frac{3}{2},\ \frac{7}{3}]$.

Exercice : On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.

1. Donner le polynôme d'interpolation P_2 associé à f aux points $x_0 = -\frac{1}{4}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{4}$.
2. Donner l'expression de l'erreur $E(x) = f(x) - P_2(x)$.
3. Montrer que $|E(x)| \leq \frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{576\sqrt{3}}$
4. Construire la formule de quadrature $\mathcal{I}_2(f)$ associée à P_2.
5. Calculer l'ordre de la formule de quadrature $\mathcal{I}_2(f)$.
6. Calculer la dérivée $\mathcal{D}_2 = P_2'(x)$
7. Monter que la formule de dérivation $\mathcal{D}_2$ est d'ordre 2.

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

5.8 Exercices

1. Montrer que l'équation $f(x) = x^3 - 2$ possède une solution unique α et qu'on peut obtenir celle-ci en utilisant la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1$. Donner une minoration du nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une précision $\varepsilon = 10^{-5}$.
2. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
   (a) Calculer numériquement les racines de $f(x) = 0$, en utilisant la méthode de Newton. On pourra prendre $x_0 = -2$.
   (b) Écrire un programme Matlab (méthode de Newton) qui calcule une approximation des racines d'un polynôme.
   (c) Comparer vos résultats avec la commande Matlab roots.
3. Soit la fonction $f(x) = \cos(x) - xe^x$ avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer que cette fonction a une et une seule racine α dans $[0,\ \frac{\pi}{2}]$
   (b) Expliciter la méthode de Newton. Donner une valeur de x_0 assurant la convergence vers α.
   (c) Soit la méthode suivante
   $$\begin{cases} x_0 \in [a,\ b] \\ x_{n+1} = \cos(x_n)e^{-xn} = g(x_n) \end{cases}$$
   Montrer que l'on peut choisir un intervalle $[a,\ b] \subset [0,\ \frac{\pi}{2}]$ telle que la méthode converge vers α.
   (d) Montrer que l'on peut prendre $[a,\ b] = [0,\ \frac{\pi}{2}]$
   (e) Calculer un nombre d'itérations suffisant pour obtenir une précision de 10^{-4} si $[a,\ b] = [0.45,\ \frac{\pi}{2}]$.
4. Écrire un programme pour calculer la suite
   $$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{e}(e-1) \\ x_{n+1} = 1 - (n+1)x_n, \quad \text{pour } n = 0,\ 1,.. \end{cases}$$
   Comparer le résultat numérique avec la limite exacte de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
5. Soit la fonction $f(x) = \cosh(x) + cos(x) - \gamma$.
   (a) Pour $\gamma = 1, 2, 3$, trouver un intervalle qui contient le zero de f.
   (b) Calculer ce dernier par la méthode de dichotomie avec une tolerance de 10^{-3}.
   (c) Utiliser la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$. Pourquoi cette méthode n'est-elle pas precise quand $\gamma = 2$?
6. Remarquer que la fonction $f(x) = e^x - 2x^2$ a trois zeros, $\alpha_1 < 0$, α_2 et $\alpha_3 > 0$. Pour quelles valeurs de x_0 la méthode de Newton converge-t-elle vers α_1 ?
7. Décrire les méthodes de la dichotomie et de LAGRANGE et les utiliser pour calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 4x - 8.95$ dans lŠintervalle $[2,\ 3]$ avec une précision de 10^{-2}.
8. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée et la dérivée seconde ne s'annulent pas au voisinage de a vérifiant $f(a) = 0$. On considère les suites x_n et y_n définies par la donnée de x_0 et les relations :
   $$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ et } x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

On suppose que ces suites convergent vers a et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $y_n \neq a$.

(a) Donner une interprétation géométrique de ces suites.

(b) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $f(a) - f(x_n)$ puis démonter que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(a)}{2f'(a)}$$

(c) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $f(a) - f(y_n)$ puis démonter que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)(y_n - a)} = \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

9. Soit à résoudre $\log(x) + x = 0$.

   (a) Montrer que cette équation à une solution unique sur $[0,\ 1]$.

   (b) Par dichotomie, donnez la racine avec deux décimales significatifs. Combien d'itérations sont-elles nécessaires ? Pouvait-on les prévoir ?

   (c) Par la méthode de Newton (en partant de 1) donnez la racine avec deux décimales significatifs. Combien d'itérations sont-elles nécessaires ? Comparez avec le résultat précédent.

10. On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$. On considère la fonction

$$f(x) = x^2 - 2.$$

   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution positive α.

   (b) Soit la fonction

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

   Montrer que l'on peut construire une fonction $g(x)$ telle que $g(\alpha) = \alpha$, vérifiant pour tous x et y dans un intervalle que vous déterminez $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ avec $0 < k < 1$.

   (c) Construire alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α.

   (d) Quelle est la vitesse de convergence de la méthode utilisée pour calculer α ?

11. : On se propose de calculer une racine de la fonction $f(x) = x\cos(x) + 2x + 1$ sur $[-1,\ 1]$.

   (a) Montrer que f admet une racine unique sur $[-1,\ 1]$.

   (b) Montrer que l'on peut utiliser la méthode de substitution pour calculer cette racine de f en posant :

$$F(x) = \frac{-1}{\cos(x) + 2}.$$

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

Chapitre 6

Systèmes linéaires

6.1 Introduction

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues.
En général, un système de m équations linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{6.1}$$

Les données sont les coefficients $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) du système qui appartiennent à un corps $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ainsi que les coefficients du second membre $b_1, \cdots, b_m$.
Les inconnues sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui appartiennent à $\mathbb{K}$.

On peut utiliser la notation matricielle, qui beaucoup plus pratique et surtout plus compacte. On écrit alors le système (6.1) sous la forme matricielle

$$Ax = b \tag{6.2}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$, x est un vecteur de taille n et b est un vecteur de taille m.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Remarque 6.1.1

- Un système est dit **homogène** si son second membre est nul c'est-à-dire si tous les b_i sont nuls
- Si $m > n$ on dit que le système est **surdéterminer**.
- Si $m = n$ alors la matrice A est carrée et d'ordre n

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Remarque 6.1.2

Pour résoudre un système d'équations linéaires on cherche à remplacer le système initial par un autre, plus simple, ayant la même solution, sachant que la résolution de système (6.2) est très simple lorsque :

— A est diagonale ;
— A est orthogonale ;
— A est tridiagonale ;
— A est triangulaire supérieure ou inférieure ;
— A est creuse (en général).

Dans tout ce qui suit, on considérera une matrice carré $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur b contenant n réels.

Seulement trois cas sont possibles pour le système linéaire (6.2) :

— Le système n'a pas de solution.
— Le système a une solution unique.
— Le système a une infinité de solutions.

Exemple 6.1.3

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$$

Le determinant vaut $\Delta = 0$, le système a une infinite de solutions : $(x_1,\ x_2) = (-1 - 3\lambda, 1 + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Le determinant vaut $\Delta = -7$, le système admet une unique solution $(x_1,\ x_2) = (1,\ 2)$.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 14 \\ 16x_1 - 12x_2 = 2 \end{cases}$$

Le déterminant vaut $\Delta = 0$, le système n'a pas de solution.

6.2 Résolution de systèmes linéaires

Si la matrice A est inversible alors le système linéaire (6.2) admet une unique solution $x = A^{-1}b$ où A^{-1} est la matrice inverse de A. Ainsi théoriquement le problème revient à

Scanné avec CamScanner

calculer A^{-1}. Mais en pratique ce calcul est difficile. Il existe plusieurs méthodes classiques pour résoudre le système linéaire (6.2) sans calculer A^{-1}. Le choix de la méthode dépend fortement du type (forme) de la matrice A.

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires (6.2) se groupent dans deux grandes catégories :

1. Les méthodes directes qui permettent dŠobtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A. Les principales méthodes sont :
   — L'élimination de Gauss,
   — La décomposition LU,
   — La décomposition de Cholesky,
   — La décomposition de QR,
2. Les méthodes itératives qui consistent à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la solution. Les principales méthodes sont :
   — Méthode de Jacobi,
   — Méthode de Gauss-Seidel,
   — Méthode du gradient conjugué.

6.3 Méthodes directes

6.3.1 Principe des méthodes directes

Nous nous ramenons en un nombre fini d'opérations à un système simple à résoudre en général triangulaire (parfois une matrice orthogonale). Ces méthodes reviennent souvent à écrire une décomposition de la matrice $A = BC$, où B et C ont des propriétés particulières. Ainsi résoudre

$$Ax = b$$

équivaut à résoudre

$$B(Cx) = b$$

ce qui est équivalent à résoudre

$$By = b,$$

puis

$$Cx = y.$$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

6.4 Méthode de résolution pour les systèmes triangulaires inférieurs

Définition 6.4.1

Une matrice carrée $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite triangulaire inférieure (ou trigonale inférieure) si tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls, c'est à dire si

$$\forall\ (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2, \quad i<j \implies a_{i,j}=0$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 6.4.2

Si une matrice A est triangulaire inférieure alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On en déduit que A est inversible si et seulement si $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1,\ldots,n$.

6.4.3 Algorithme de résolution pour les systèmes triangulaires inférieures

Considérons un système inversible 3×3 triangulaire inférieur

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La matrice étant inversible, ses termes diagonaux $l_{i,i},\ i=1,2,3$ sont non nuls. On peut donc déterminer successivement les valeurs inconnues x_i pour $i=1,2,3$.

$$\begin{cases} x_1 &= b_1/l_{1,1} \\ x_2 &= \big(b_2 - l_{2,1}\ x_1\big)/l_{2,2} \\ x_3 &= \big(b_3 - l_{3,1}\ x_1 - l_{3,2}\ x_2\big)/l_{3,3} \end{cases}$$

Cet algorithme peut être étendu aux systèmes $n\times n$. Dans le cas d'un système $Lx=b$, où L est une matrice triangulaire inférieure d'ordre n ($n\geq 2$), la méthode s'écrit

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x_1 &= b_1/l_{1,1} \\ x_i &= \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}\, x_j\Big)/l_{i,i}, \quad i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

$x_1 = b_1/l_{1,1}$;
Pour i **de** 2 **à** n **faire**

$$x_i = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}\, x_j\Big)/l_{i,i}$$

Fin Pour

Algorithme 1 – *Algorithme de descente d'un système triangulaire inférieur*

Exemple 6.4.4

Considérons le système triangulaire inférieure suivant

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'algorithme de descente, on obtient

$$\begin{cases} x_1 &= b_1/l_{1,1} = 9/3 = 3 \\ x_2 &= \big(b_2 - l_{2,1}\, x_1\big)/l_{2,2} = (7 - 1 \times 3)/2 = 2 \\ x_3 &= \big(b_3 - l_{3,1}\, x_1 - l_{3,2}\, x_2\big)/l_{3,3} = (14 - 3 \times 3 - 2 \times 2)/1 = 1 \end{cases}$$

6.5 Méthode de résolution pour les systèmes triangulaires supérieures

Définition 6.5.1

Une matrice carrée $(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est dite triangulaire supérieure si tous les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, c'est à dire si

$$\forall\, (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Scanné avec CamScanner

Une matrice triangulaire supérieure a la forme type

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 6.5.2

Une matrice triangulaire supérieure est simplement la transposée d'une matrice triangulaire inférieure. Alors $\det(A) = \det({}^tA) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
On en déduit que A est inversible si et seulement si $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

6.5.3 Algorithme de résolution pour les systèmes triangulaires supérieures

Considérons un système inversible 3×3 triangulaire inférieur

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La matrice étant inversible, ses termes diagonaux $u_{i,i},\ i = 1, 2, 3$ sont non nuls. On peut donc déterminer successivement les valeurs inconnues x_i pour $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} x_3 &= b_3/u_{3,3} \\ x_2 &= \big(b_2 - u_{2,3}\, x_3\big)/u_{2,2} \\ x_1 &= \big(b_3 - u_{1,2}\, x_2 - u_{2,3}\, x_3\big)/u_{3,3} \end{cases}$$

Cet algorithme peut être étendu aux systèmes $n \times n$. Dans le cas d'un système $Ux = b$, où U est une matrice triangulaire supérieure d'ordre n ($n \geq 2$), la méthode s'écrit

$$\begin{cases} x_n &= b_n/u_{n,n} \\ x_i &= \Big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\, x_j\Big)/u_{i,i}, \quad i = n-1, \ldots, 1 \end{cases}$$

A. LAMNI

Scanné avec CamScanner

$x_n = b_n / l_{n,n}$;
Pour i **de** n-1 **à** 1 **faire**

$$x_i = \Big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\, x_j\Big) / u_{i,i}$$

Fin Pour

Algorithme 2 – *Algorithme de remontée d'un système triangulaire supérieur*

Exemple 6.5.4

Considérons le système triangulaire supérieur suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'algorithme de remontée, on obtient

$$\begin{cases} x_3 \;=\; b_3/u_{3,3} \;=\; 21/7 \;=\; 3 \\ x_2 \;=\; \Big(b_2 - u_{2,3}\, x_3\Big)/u_{2,2} \;=\; (30 - 2\times 3)/4 \;=\; 6 \\ x_1 \;=\; \Big(b_3 - u_{1,2}\, x_2 - u_{2,3}\, x_3\Big)/u_{3,3} \;=\; (49 - 5\times 6 - 3\times 3)/2 \;=\; 5 \end{cases}$$

6.6 Complexité des algorithmes de descente et remontée

Proposition 6.6.1

La résolution d'un système d'équations linéaires triangulaire se fait en n^2 opérations à virgule flottante.

- $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications
- $\frac{n(n-1)}{2}$ additions
- n divisions
- Au total n^2 opérations.

Preuve

Calculer x_n nécessite 1 opération (division), calculer x_{n-1} nécessite 3 opérations (une multiplication, une soustraction et une division), et calculer x_i nécessite $2(n-i)+1$ opérations $(n-i)$ multiplications, $(n-i-1)$ additions, 1 soustraction et 1 division)

Au total $\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1) = n^2$

Scanné avec CamScanner

6.7 Cas particulier matrice diagonale

Exercice 6.7.1

Soit $D = (d_{i,i})_{i=1,\dots,n}$ une matrice diagonale d'ordre $n > 0$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_{i,i} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & d_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible.
— Donner un algorithme qui permet de résoudre l'équation d'inconnue x :

$$D\,x = b.$$

6.8 Méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss a pour but de transformer le système $A\,x = b$ en un système équivalent (c'est-à-dire ayant la même solution) de la forme $U\,x = \widetilde{b}$, où U est une matrice triangulaire supérieure et $\widetilde{b}$ est un second membre convenablement modifié. Ce dernier système peut être alors résolu par la méthode de remontée.

Au cours de la transformation, on utilise essentiellement la propriété selon laquelle on ne change pas la solution du système quand on ajoute à une équation donnée une combinaison linéaire des autres équations.

Propriétés 6.8.1

On ne change pas la solution d'un système linéaire lorsque :
— on permute deux lignes,
— on permute deux colonnes,
— on multiplie une ligne par un réel non nul,
— on ajoute une ligne à une autre.

6.8.2 Méthode de Gauss sans pivot

Considérons une matrice invisible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme diagonal $a_{1,1}$ est supposé non nul. Le nombre $a_{1,1}$ est le premier pivot de l'élimination de Gauss. On pose $A^{(1)} = A$ et

Scanné avec CamScanner

$b^{(1)} = b$ et on introduit les multiplicateurs

$$m_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

où les $a_{i,j}^{(1)}$ désignent les éléments de $A^{(1)}$. On peut éliminer l'inconnue x_1 des lignes $i = 2, \ldots, n$ en leur retranchant $m_{i,1}$ fois la première ligne et en faisant de même pour le membre de droit. On définit alors

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(2)} &= a_{i,j}^{(1)} - m_{i,1}\, a_{1,j}^{(1)}, \quad i, j = 2, \ldots, n, \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i,1}\, b_1^{(1)}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

où les $b_i^{(1)}$ sont les composantes de $b^{(1)}$ et on obtient un nouveau système de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

que l'on note $A^{(2)}x = b^{(2)}$ et qui est équivalent au système de départ.
On peut à nouveau transformer ce système de façon à éliminer l'inconnue x_2 des lignes $3, \ldots, n$. En poursuivant ainsi, on obtient une suite finie de systèmes

$$A^{(k)}x = b^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

où, pour $k \geq 2$, la matrice $A^{(k)}$ est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,k}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,k}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

où on a supposé $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, k-1$. Il est clair que pour $k = n$ on obtient alors le système triangulaire supérieur $A^{(n)}x = b^{(n)}$ suivant

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Pour être consistant avec les notations introduites précédemment, on note U la matrice triangulaire supérieur $A^{(n)}$. Les termes $a_{k,k}^{(k)}$ sont appelés pivots et doivent être évidemment non nuls pour $k = 1, \ldots, n-1$.

Afin d'expliciter les formules permettant de passer du $k^{\text{ième}}$ système au $(k+1)^{\text{ième}}$, pour $k = 1, \ldots, n-1$, on suppose que $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ et on définit les multiplicateurs

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

On pose alors

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(k+1)} &= a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k}\, a_{k,j}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \ldots, n, \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - m_{i,k}\, b_k^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Remarque 6.8.3

Le procédé suppose que tous les $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$. Si à une étape k on a $a_{k,k}^{(k)} = 0$ et s'il y a au moins un des $a_{i,k}^{(k)} \neq 0,\ i = k+1, \cdots, n$, on permute les lignes k et i et on continue, sinon ça voudrait dire que la matrice A n'est pas inversible.

Pour bien comprendre la méthode, on considère l'exemple suivant :

Exemple 6.8.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$, i.e.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On note $a_{i,j}^{(1)}$, $1 \leq j \leq 3$ l'élément (i, j) de la matrice A. Le premier pivot de l'élimination de

Scanné avec CamScanner

Gauss est donc $a_{1,1}^{(1)} = 2$. On effectue alors pour toute ligne L_i pour $i = 2, 3$

$$L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} L_1$$

Dans notre exemple on obtient

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 15 \\ -55 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On refait la même procédure, dans cette étape le pivot est $a_{2,2}^{(2)} = 5$. On effectue

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{5} L_2$$

On obtient finalement

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} \end{pmatrix} \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 15 \\ -55 \\ 22 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est maintenant triangulaire supérieure, et on peut résoudre le système $A^{(3)}x = b^{(3)}$ par l'algorithme de remontée, on trouve

$$\begin{cases} x_1 &= 1/2 \\ x_2 &= -4 \\ x_3 &= 5 \end{cases}$$

On donne maintenant l'algorithme d'élimination de Gauss sans pivot. On admettra que les termes (pivots) $a_{k,k}^{(k)}$ doivent être évidemment non nuls pour $k = 1, \ldots, n$.

Pour k **de** 1 **à** n-1 **faire**
  Pour i **de** k+1 **à** n **faire**
    $m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k}$
    $b_i = b_i - m_{i,k} b_k$
    $a_{i,k} = 0$
    Pour j **de** k+1 **à** n **faire**
      $a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k} a_{k,j}$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour
$\hookrightarrow$ Résolution du système triangulaire sup.

Algorithme 3 – *Algorithme d'élimination de Gauss*

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Exercice 6.8.5

En appliquant l'algorithme de Gauss, résoudre le système linéaire suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & = & \frac{47}{60} \end{array}\right.$$

La solution du système (S) est $x =^t (1, 1, 1)$.

A la première étape on cherche les multiplicateurs $m_{2,1} = \frac{1}{2}$ et $m_{3,1} = \frac{1}{3}$, et on soustrait de la deuxième (resp. troisième) équation la première ligne multipliée par $m_{2,1}$ (resp. $m_{3,1}$). On obtient le système équivalent

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & \frac{11}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{12}x_2 & + & \frac{1}{12}x_3 & = & \frac{1}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{12}x_2 & + & \frac{4}{45}x_3 & = & \frac{31}{180} \end{array}\right.$$

Si on soustrait à présent la troisième ligne la seconde multipliée par $m_{3,2} = 1$, on obtient le système triangulaire supérieur suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & \frac{11}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & \frac{13}{12} \\ 0 & + & 0 & + & \frac{1}{180}x_3 & = & \frac{1}{180} \end{array}\right.$$

à partir duquel on calcule immédiatement $x_3 = 1$ et, par substitution (remontée), les autres inconnus $x_1 = x_2 = 1$.

A. LAMNII

6.8.6 Méthode de Gauss avec pivot

Le choix du pivot permet de minimiser les erreurs d'arrondis :

— si un pivot est nul, on permute deux lignes

— si tous les pivots restant sont nuls $\Rightarrow$ la matrice est singulière (i.e. le système d'équations n'admet pas de solution unique)

Pour minimiser les erreurs d'arrondis, on choisi le plus grand pivot possible (en valeur absolue) et donc on permute les lignes (voir les colonnes associées) c'est la stratégie du pivot maximal (partiel (lignes) ou total).

La méthode de Gauss avec pivot consiste à choisir à l'étape k : $a_{k,k}^{(k)}$ tel que

$$|a_{k,k}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{i,k}^{(k)}|$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 6.8.7 (Influence du pivotage sur la précision)

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

La solution théorique est $x_1 = x_2 = \frac{1}{1+10^{-10}} = 0.9999999999$. Cependant, la resolution de ce système par la méthode de Gauss donne des résultats différents selon qu'on l'applique avec ou sans pivot.

`Trouver` x_1 `et` x_2 `en gardant` 10 `chiffres significatifs après la virgule.`
`Que se passe t'il si on prend le système à l'envers?`

1. Si on applique la méthode de Gauss **sans pivot** on obtient

$$m_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10}$$

   et

$$\begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 = 1, \\ (-1 - 10^{10})x_2 = -10^{10}. \end{cases}$$

   qui donne pour solution approchée $x_2 = \frac{-10^{10}}{-1-10^{10}} = 0.9999999999$ et $x_1 = \frac{1-x_2}{10^{-10}} = 1.000000082740371$.

2. Si on adopte la stratégie du pivot partiel qui consiste à mettre en première ligne celle dont le coefficient de x_1 est le plus grand en module alors on permute les lignes pour obtenir le système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 10^{-10}x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

   Pour lequel $m_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{10^{-10}}{1} = 10^{-10}$ et qui conduit à la solution approchée : $x_2 = \frac{1}{1+10^{-10}} = 0.9999999999$ et $x_1 = 0.9999999999$.

Exercice 6.8.8

Appliquer la méthode de Gauss avec pivot à l'Exemple 6.8.4.

6.8.9 Application (Gauss-Jordan) : calcul de A^{-1}

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss sans pivot (**Gauss-Jordan**) calculer A^{-1}.

A.I.A.M.N.I

Scanné avec CamScanner

Phase 1 : $\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \begin{array}{l} \text{ligne 2 = ligne 2 +1*ligne 1} \\ \text{ligne 3 = ligne 3 +1*ligne 1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \text{ ligne 3 = ligne 3 -3*ligne 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Bigg| \begin{array}{r} \text{ligne 1 = -1*ligne 1} \\ \text{ligne 2 = -1*ligne 2} \\ \text{ligne 3 = (-1/2)*ligne 3} \end{array}$$

Phase 2 : $\uparrow$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Bigg| \begin{array}{l} \text{ligne 1 = ligne 1 +1*ligne 3} \\ \text{ligne 2 = ligne 2 +1*ligne 3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Bigg| \text{ ligne 1 = ligne 1 -2*ligne 2}$$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

Vérifier que $A * A^{-1} = Id$.

6.9 Méthode par factorisation LU

Le principe de la méthode est de se ramener à deux systèmes triangulaires.
On cherche à décomposer la matrice A en deux matrices L (triangulaire inférieure) et U (triangulaire supérieure) telles que le produit LU soit égal à A.

Si la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = LU$, où L et U sont des matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement, alors le système $Ax = b$ peut se décomposer en deux sous-systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$.

Les matrices L et U étant triangulaires, la résolution de chacun de ces deux sous-systèmes est immédiate :

— $Ly = b$: on calcule $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (Algorithme de descente),

— $Ux = y$: on calcule $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ (Algorithme de remontée).

Il reste maintenant à savoir comment faire cette décomposition LU.

Commençons par un résultat théorique

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

Théorème 6.9.1

Soit A une matrice inversible d'ordre n dont les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe une unique matrice L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et une unique matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$. De plus $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}$.

Rappelons que le mineur principal d'ordre i de A est le déterminant des premières lignes et premières colonnes

$$\big(\det(A)\big)_i = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} \end{vmatrix}$$

Exemple 6.9.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la $1^{\text{ère}}$ rangée et la $2^{\text{ème}}$ colonne de A c'est-à-dire $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -9$.

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la $2^{\text{ème}}$ rangée et la $2^{\text{ème}}$ colonne de A c'est-à-dire $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -26$.

Proposition 6.9.3

La factorisation LU de la matrice A de taille n par la méthode de Gauss existe si l'une des conditions est vérifiée :

- La matrice A est définie positive.
- La matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes ou par colonnes.

Pour mieux comprendre la méthode, on prend les deux exemples suivants :

Scanné avec CamScanner

Exemple 6.9.4

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$	$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{4}L_1$	$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2$	$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Finalement, on pose $U = A^{(3)}$.
Et puisque $A^{(3)} = L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A$, On a : $L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A = U$ c-à-d

$$A = \overbrace{L^{(1)^{-1}}L^{(2)^{-1}}L^{(3)^{-1}}}^{L}U$$

On obtient finalement

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{(y_1,\, y_2,\, y_3)^t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Posons $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi

$y_1 = 1$

$\frac{1}{2} \times 1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4} \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 3 \Rightarrow y_3 = 4$

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on résout $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

$4x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 1$

$\frac{1}{2}x_2 + 3 \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -3$

$4x_1 - 9 \times (-3) + 2 \times 1 = 1 \Rightarrow 4x_1 + 27 + 2 = 1 \Rightarrow x_1 = -7$

En fin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.9.5

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}^{U}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}}^{L \times U}$$

Maintenant on fait égalité par colonnes

$u_{11} = a_{11} = 3,$

$l_{21}u_{11} = a_{21} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{3},$

$l_{31}u_{11} = a_{31} = 2 \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{3},$

$u_{12} = a_{12} = 1,$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} = 2 \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = \frac{5}{3},$

$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = \frac{1}{5},$

$u_{13} = a_{13} = 1,$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} = 2 \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = \frac{5}{3},$

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} = 3 \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = 2.$

Scanné avec CamScanner

Finalement

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on résout $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$y_1 = 4$,
$\frac{1}{3} \times 4 + y_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$,
$\frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} + y_3 = 4 \Rightarrow y_3 = 1$,

Maintenant, on résout $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$2x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$,
$\frac{5}{3}x_2 \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
$3x_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

Ainsi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De l'exemple précédent on peut s'inspirer pour donner l'algorithme suivant

$u_{1,1} = a_{1,1}$;
Pour j **de** 2 **à** n **faire**
  $u_{1,j} = a_{1,j}$;
  $l_{j,1} = a_{j,1}/u_{1,1}$;
Fin Pour
Pour i **de** 2 **à** n-1 **faire**
  $u_{i,i} = a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}\, u_{k,i}$
  Pour j **de** i+1 **à** n **faire**
    $u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k}\, u_{k,j}$
    $l_{j,i} = \left(a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k}\, u_{k,j}\right)/u_{i,i}$
  Fin Pour
Fin Pour
$u_{n,n} = a_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}\, u_{k,n}$

Algorithme 4 – *Algorithme de factorisation LU*

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Exemple 6.9.6

Déterminer, par cette méthode, la décomposition LU de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 + 2\,L_1 \quad \hookrightarrow \quad l_{2,1} = -2 \\ L_3 &= L_3 - 3\,L_1 \quad \hookrightarrow \quad l_{3,1} = -3 \end{aligned}$$

On obtient

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

En refaisant la même procédure

$$L_3 = L_3 + \tfrac{1}{2}\,L_2 \quad \hookrightarrow \quad l_{3,2} = -\tfrac{1}{2}$$

On obtient finalement

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 15.5 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

6.10 Méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky est une alternative à la factorisation LU qui s'applique aux matrices symétriques et définie positives. Elle est fondée sur le théorème suivant :

Théorème 6.10.1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure L telle que $A = L\,{}^tL$. Si les éléments diagonaux $l_{i,i}$ de L sont strictement positifs alors la décomposition est unique.

La méthode de Cholesky ne s'applique qu'aux matrices réelles symétriques définies positives. Elle consiste en une factorisation $A = L\,{}^tL$, où L est une matrice triangulaire inférieure, dans le but de ramener la résolution de l'équation linéaire $Ax = b$ à la résolution de deux équations $Ly = b$ et ${}^tLx = y$. Ceci est intéressant lorsqu'on a à résoudre plusieurs systèmes

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

avec la même matrice et différents second membres car la décomposition est effectuée une fois pour toutes.

6.10.1.1 Algorithme de la factorisation de Cholesky

Soit A une matrice symétrique définie positive à coefficients réels, mettons A sous la forme $A = L\,{}^tL$. Les coefficients $L_{i,i}$ de L peuvent être calculés comme suit :

$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$;
Pour i **de** 2 **à** n **faire**
  $l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1}$;
Fin Pour
Pour j **de** 2 **à** n-1 **faire**
  $l_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}$
  Pour i **de** j+1 **à** n **faire**
    $l_{i,j} = \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k}\, l_{j,k}\right)/l_{j,j}$
  Fin Pour
Fin Pour
$l_{n,n} = \sqrt{a_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}^2}$

Algorithme 5 – *Algorithme de la factorisation de Cholesky*

On résout ensuite le système $Ly = b$ puis ${}^tLx = y$ par les algorithmes de descente et de remontée, respectivement.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Exemple 6.10.2

Soit A une matrice définie positive tel que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On a

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{2,1} = a_{2,1}/l_{1,1} = 1$$

$$l_{3,1} = a_{3,1}/l_{1,1} = -1$$

$$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = 3$$

$$l_{3,2} = \left(a_{3,2} - l_{3,1}l_{2,1}\right)/l_{2,2} = 1$$

$$l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - (l_{3,2}^2 + l_{2,1}^2)} = 1$$

Donc, finalement matrice L obtenu est

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolvant maintenant le système $Ax = b$ avec $b = {}^t(1, 1, 1)$.

Remarque 6.10.3

Comme la matrice A s'écrit sous la forme de multiplication d'une matrice L et sa transposée, donc $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i}^2$.

Exercice 6.10.4

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette matrice est symétrique définie positive. Déterminer sa factorisation de Cholesky.

Scanné avec CamScanner

6.11 Méthode itératives

Les méthodes directes sont très coûteuses en termes de nombre d'opérations, donc de temps de calcul lorsque la taille du système linéaire est assez élevée. On peut alors avoir recours à des méthodes où la solution est obtenue par itérations successives et où chaque itération consiste à résoudre un système linéaire moins coûteux.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ et un système linéaire

$$(S) \ : \ Ax = b$$

Résoudre le système linéaire (S) par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $(x^{(k)})_k$ de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution exacte $x = A^{-1}b$, c'est-à-dire

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \tag{6.3}$$

pour n'importe quelle donnée initiale $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
La suite $(x^{(k)})_k$ est obtenu, à partir d'un vecteur initial arbitraire $x^{(0)}$, par une relation de récurrence de la forme

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \ \forall k \in \mathbb{N} \ (k \geq 0) \tag{6.4}$$

où B est une matrice bien choisi (dépendant de A) appelée matrice d'itération de la méthode et c est un vecteur (dépendant de A et b), qui vérifient la relation de consistance

$$x = Bx + c, \ \forall k \in \mathbb{N} \ (k \geq 0) \tag{6.5}$$

Comme $x = A^{-1}b$, ceci implique $c = (I_n - B)A^{-1}b$

6.11.1 Convergence des méthodes itératives

Définition 6.11.2

On appelle erreur (resp résidu) d'ordre k, $k \in \mathbb{N}$, de la méthode d'itération le vecteur $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ (resp $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$), où $x = A^{-1}b$ est la solution de $Ax = b$.

La mise en oeuvre pratique d'une méthode itérative de la forme (6.4) nécessite la donnée d'un point de départ $x^{(0)}$ (en général, sauf si l'on possède des informations a priori sur la solution, on choisit le vecteur nul) et d'une tolérance sur la solution que l'on cherche à calculer. On calcule ensuite les itérés $x^{(k)}, k = 1, 2, \ldots$ en utilisant la formule (6.4) jusqu'à ce que le résidu $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ soit plus petit que la tolérance.

On déduit de cette définition qu'une méthode itérative consistante de la forme $Ax = b$ converge si et seulement si $\lim_{k \to +\infty} e^{(k)} = 0$ (soit encore si $\lim_{k \to +\infty} r^{(k)} = \lim_{k \to +\infty} Ae^{(k)} = 0$).

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Lemme 6.11.3

Si la méthode itérative (6.4) est convergente et si on note $x = A^{-1}b$ la solution exacte du système linéaire (S), alors

$$x^{(k)} - x = B^k(x^{(0)} - x)$$

Définition 6.11.4 (Norme matricielle)

On dit que l'application $||\cdot|| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une norme matricielle si :

— $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||A|| = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$

— $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||\alpha A|| = |\alpha|\ ||A||.$

— $\forall\, A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||.$

— $\forall\, A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||AB|| \leq ||A||\ ||B||.$

Définition 6.11.5 (Norme matricielle subordonnées)

Soit $||\cdot||$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. On définit la norme matricielle subordonné à la norme vectorielle $||\cdot||$ (que l'on notera aussi $||\cdot||$) par

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad ||A|| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

On dit aussi que c'est une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle ou associée à la norme vectorielle.

Le résultat suivant nous donne des critères pour tester la convergence de la méthode itérative (6.4).

Théorème 6.11.6

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La méthode itérative (6.4) est convergente ;

ii) Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $lim_{k \to +\infty} B^k y = 0$;

iii) Pour toute norme matricielle $||\cdot||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $lim_{k \to +\infty} ||B^k|| = 0$.

Preuve

Admis pour ce cours.

En pratique, les caractérisations précédentes de la convergence d'une méthode itérative ne sont pas faciles à vérifier. On utilise plutôt le résultat suivant :

Scanné avec CamScanner

Théorème 6.11.7

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La méthode itérative (6.4) est convergente ;

ii) $\rho(B) < 1$, où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B, i.e., le maximum des modules des valeurs propres de B ;

iii) Il existe une norme matricielle $||\cdot||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ telle que $||B|| < 1$.

Preuve

Admis pour ce cours.

6.11.8 Quelques méthodes itératives

Comment construire une méthode itérative ?

Une technique générale pour construire des méthodes itératives est basée sur une décomposition (splitting) de la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont des matrices à déterminer avec M non singulière. La matrice M est appelée matrice de préconditionnement. Plus précisément, $x^{(0)}$ étant donné, on peut calculer $x^{(k)}$, pour $k \geq 1$, en résolvant le système

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \ k \geq 0 \tag{6.6}$$

Clairement, la solution exacte x satisfait $Mx = Nx + b$ et donc $Ax = b$. Le système (6.6) peut être écrit également sous la forme (6.4), avec $B = M^{-1}N$, et $c = M^{-1}b$. Une relation de récurrence équivalente à (6.6) est la suivante :

$$M\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = r^{(k)}, \ k \geq 0 \tag{6.7}$$

où $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ est le résidu à l'itération k. On peut généraliser la relation précédente par

$$M\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = \alpha_k r^{(k)}, \ k \geq 0 \tag{6.8}$$

où on a introduit un paramètre α_k (qui peut être différent à chaque itération k) afin d'accélérer la convergence. Cette méthode est dite de Richardson. Les relations (6.6), (6.7) et (6.8) montrent qu'on doit résoudre un système linéaire de matrice M à chaque itération ; donc M doit être telle que la résolution du système ait un coût raisonnable. Par exemple, on pourra choisir M diagonale ou triangulaire.

Nous allons maintenant considérer trois exemples classiques : les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation. Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique décomposition de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sous la forme $A = D - E - F$ avec :

— $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale, telle que $d_{i,i} = a_{i,i}$ et $d_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$;

— $E = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaire inférieure **stricte** telle que $e_{i,j} = -a_{i,j}$ si $i > j$ et $e_{i,j} = 0$ si $i \leq j$;

A. LAMMI

Scanné avec CamScanner

— $F = (f_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire supérieure **stricte** telle que $f_{i,j} = -a_{i,j}$ si $i < j$ et $f_{i,j} = 0$ si $i \geq j$.

Exemple 6.11.9

Considérons le système

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de A sous la forme $A = D - E - F$ décrite ci-dessus s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F}$$

On supposera de plus que D est inversible et on distingue les trois méthodes suivantes :

— Méthode de Jacobi : $M = D,\ N = E + F$;

— Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E,\ N = F$;

— Méthode de relaxation : $M = \frac{1}{\omega}\big(D - \omega E\big),\ N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$ avec ω paramètre réel non nul.

On remarque que la méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier de la méthode relaxation pour $\omega = 1$.

6.11.9.1 Méthode de Jacobi

On considère un système linéaire (S) : $Ax = b$ avec A inversible. On pose $A = M - N$ avec $M = D$ inversible et $N = E + F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b, \ \ \forall k \geq 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b, \ \ \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Chaque itération consiste donc à résoudre un système linéaire diagonal.

Définition 6.11.10

La matrice $B_J = D^{-1}(E+F)$ s'appelle la matrice de Jacobi associée à A.

On calcul $x^{(k+1)}$ par l'algorithme suivant

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\Big)/a_{i,i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Scanné avec CamScanner

Données : A, b, x^0, n, ε et N_{max}
Pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
Fin Pour
$nb \leftarrow 0$
Tant que ($||Ax^{new} - b|| > \varepsilon$ et $nb < N_{max}$) **faire**
  nb $\leftarrow$ nb+1
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  Fin Pour
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{new} \leftarrow \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} x_j^{old}\right) / a_{i,i}$
  Fin Pour
Fait

Algorithme 6 – *Algorithme de la méthode de Jacobi*

Exemple 6.11.11

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mis sous la forme

$$\begin{cases} x &= 1 - y/2 - z/4 \\ y &= 1 + x/2 \\ z &= 9/4 - x/2 - y/4 \end{cases}$$

Soit $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ le vecteur initial, en calculant les itérées on trouve

$$x^{(1)} = (1, 1, 9/4) \qquad x^{(2)} = (-1/16, 3/2, 3/2)$$
$$x^{(3)} = (-1/8, -1/32, 3/2) \qquad x^{(4)} = (5/128, 15/16, 265/128)$$
$$x^{(5)} = (7/512, 261/256, 511/256)$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers la solution du système $(0, 1, 2)$.

D'après le théorème 6.11.7, on a le résultat suivant :

Théorème 6.11.12

La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(B_J) < 1$.

Scanné avec CamScanner

Exemple 6.11.13

Pour la matrice A donnée par 6.11.9, on obtient :

$$B_J = D^{-1}\Big(E+F\Big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrices B_J sont 0 et $\pm\, i\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ et la méthode de Jacobi diverge.

6.11.13.1 Méthode de Gauss-Seidel

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on choisi $M = D - E$ et $N = F$ ce qui conduit à considérer la relation de récurrence

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ (D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b, \quad \forall k \geq 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = \Big(D-E\Big)^{-1} Fx^{(k)} + \Big(D-E\Big)^{-1} b, \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Définition 6.11.14

La matrice $B_{GS} = \Big(D-E\Big)^{-1} F$ s'appelle la matrice de Gauss-Seidel associée à A.

On calcul $x^{(k+1)}$ par l'algorithme suivant

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}\Big)/a_{i,i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Remarque 6.11.15

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de jacobi dans laquelle les vecteurs calculées sont utilisées au fur et à mesure du calcul et non à l'issue d'une itération comme dans la méthode de Jacobi. On améliore ainsi la vitesse de convergence.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

Données : A, b, x^0, n, ε et N_{max}
Pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
Fin Pour
$nb \leftarrow 0$
Tant que ($||Ax^{new} - b|| > \varepsilon$ et $nb < N_{max}$) **faire**
  nb $\leftarrow$ nb+1
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  Fin Pour
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{new} \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{old}\right) / a_{i,i}$
  Fin Pour
Fait

Algorithme 7 – *Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel*

Exemple 6.11.16

Considérons le système

$$\begin{cases} x &= 1 - y/2 - z/4 \\ y &= 1 + x/2 \\ z &= 9/4 - x/2 - y/4 \end{cases}$$

Partant du point $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, on calcule successivement

$$x^{(1)} = (1, 3/2, 11/8) \qquad x^{(2)} = (-3/32, 61/64, 527/256)$$
$$x^{(3)} = (9/1024, 2047/2048, 16349/8192)$$

Cet ensemble de points converge vers la solution exacte $(0, 1, 2)$.

D'après le théorème 6.11.7, on a le résultat suivant :

Théorème 6.11.17

La méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(B_{GS}) < 1$.

Scanné avec CamScanner

Exemple 6.11.18

Pour la matrice A donnée par 6.11.9, on obtient :

$$B_{GS} = \Big(D - E\Big)^{-1} F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrices B_{GS} sont 0 et $-\dfrac{1}{2}$ (de multiplicité 2). On a donc $\rho(B_{GS}) = \dfrac{1}{2} < 1$ donc la méthode de Gauss-Seidel converge.

La méthode de Gauss-Seidel est aussi utilisé pour résoudre des système non-linéaires.

Exemple 6.11.19

Considérons le système

$$\begin{cases} x &= \sin(xy) - y/2\pi \\ y &= 2\pi x - (\pi - 1/4)(e^{2x-1} - 1) \end{cases}$$

Partant du point $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, on calcule successivement

$$x^{(1)} = (0.455, 3.03) \quad x^{(2)} = (0.499, 3.11) \quad x^{(3)} = (0.505, 3.14)$$

qui converge vers la solution exacte $(1/2, \pi)$.

Remarque 6.11.20

Pour que la méthode de Gauss-Seiled soit bien définie, il faut que la matrice D soit inversible, mais, là encore, cette condition n'est pas très restrictive en pratique. On peut également introduire dans cette méthode un paramètre de relaxation ω. On parle alors de la méthode de Relaxation.

6.11.20.1 Méthode de Relaxation

Dans la méthode de Relaxation, on pose $A = M - N$ avec $M = \frac{1}{\omega}\Big(D - \omega E\Big)$ inversible et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{\omega}\Big(D - \omega E\Big) x^{(k+1)} = \Big(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\Big) x^{(k)} + b, \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = \Big(D - \omega E\Big)^{-1}\Big((1-\omega)D + F\Big)x^{(k)} + \omega\Big(D - \omega E\Big)^{-1} b, \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Définition 6.11.21

La matrice $B_R(\omega) = \Big(D - \omega E\Big)^{-1}\Big((1-\omega)D + F\Big)$ s'appelle la matrice de relaxation associée à A et ω est le facteur de relaxation. Si $\omega < 1$, on parle de sous-relaxation, si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel et si $\omega > 1$, on parle de sur-relaxation.

On calcul $x^{(k+1)}$ par l'algorithme suivant

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Données : A, b, x^0, n, ε, ω et N_{max}
Pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
Fin Pour
$nb \leftarrow 0$
Tant que ($||Ax^{new} - b|| > \varepsilon$ et $nb < N_{max}$) **faire**
  nb $\leftarrow$ nb+1
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  Fin Pour
  Pour i **de** 1 **à** n **faire**
    $x_i^{new} \leftarrow \omega x_{GS,i}^{new} + (1-\omega)x_i^{old}$
  Fin Pour
Fait

Algorithme 8 – *Algorithme de la méthode de Relaxation*

Avec

$$x_{GS,i}^{new} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{old}\Big)/a_{i,i}$$

Remarque 6.11.22

Pour $\omega = 1$, nous retrouvons la méthode de Gauss Seidel. Pour $\omega < 1$ on appelle cette méthode méthode de sous-relaxation et pour $\omega > 1$ méthode de sur-relaxation.

A. LAMNII

Scanné avec CamScanner

D'après le théorème 6.11.7, on a le résultat suivant :

Théorème 6.11.23

La méthode de Relaxation converge si et seulement si $\rho(B_R(\omega)) < 1$.

Exemple 6.11.24

Pour la matrice A donnée par 6.11.9, on obtient :

$$B_R(\omega) = \begin{pmatrix} 1-\omega & \frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{2}\omega \\ \omega(1-\omega) & -\frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \omega & -\frac{1}{2}\omega^2 - \omega \\ \frac{1}{2}\omega(1-\omega)^2 & -\frac{1}{4}\omega^3 - \frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega & \frac{1}{4}\omega^3 - \frac{3}{4}\omega^2 + 1 - \omega \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $B_R(\omega)$ dépendent en général de ω donc la convergence de la méthode de relaxation dépendra aussi de la valeur de ω.

6.11.25 Résultats de convergence dans des cas particuliers

Nous allons maintenant examiner la convergence de ces méthodes itératives dans le cas d'une matrice symétrique définie positive.

Théorème 6.11.26

Soit A une matrice symétrique définie positive et soit $A = M - N$ une décomposition de A où M est inversible. On suppose que la matrice ${}^tM + N$ est symétrique définie positive. Alors, la méthode itérative $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ converge.

On peut déduire de ce résultat le corollaire suivant :

Corollaire 6.11.27

Si A est symétrique définie positive, la méthode de relaxation avec $0 < \omega < 2$ converge.

Remarque 6.11.28

Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

Scanné avec CamScanner

Corollaire 6.11.29

Soit A une matrice symétrique définie positive telle que $2D - A$ soit définie positive. Alors, la méthode de Jacobi converge.

Une autre catégorie de matrices pour lesquelles l'utilisation des méthodes de décomposition est intéressante est celle des matrices à diagonale dominante.

Définition 6.11.30

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,i})_{1 \leq i,j \leq n}$ est à diagonale dominante si on a

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad |a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

On dit qu'elle est à diagonale strictement dominante si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Théorème 6.11.31

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Alors A est inversible. De plus, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite et plus souvent que la méthode de Jacobi. La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.
La convergence des méthodes itératives se teste généralement en utilisant un paramètre de tolérance ε. On arrête ainsi les calculs dès que l'erreur relative est assez petite :

$$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||}{||x^{(k)}||} < \varepsilon$$

Une autre alternative est de tester le résidu :

$$||Ax^{(k+1)} - b|| < \varepsilon$$

6.12 Exercices

1. Effectuer une élimination de Gauss avec et sans pivot sur les système linéaires suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan déterminer l'inverse de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. Effectuer une factorisation **LU** de la matrice A où L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Soit A une matrice tri-diagonale donnée par :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = a_i, \\ a_{i,i} = b_i, \\ a_{i,i+1} = c_i. \end{cases}$$

   (a) Trouver L et U telle que $A = LU$.
   (b) Écrire l'algorithme de décomposition de A. Donner la complexité de cet algorithme.
   (c) Résoudre le système linéaire $Ax = b$.
   (d) Application. Résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Soient A et B deux matrices triangulaires inférieures. Prouver que AB reste triangulaire inférieure.
6. Vérifier que si $A = \lambda Id$, alors A est définie positive si et seulement si $\lambda > 0$.
7. Si A est une matrice diagonale, vérifier qu'elle est définie positive si et seulement si tous les coefficients de la diagonale sont strictement positifs.
8. Écrire l'algorithme de factorisation LU pour une matrice bande de largeur de bande k.
9. Soient a et b deux réel tels que $a \neq 0$ et $b \neq a$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$ Effectuer une factorisation **LU** de la matrice A

A. LAMMNII

Scanné avec CamScanner