Série n° 1

Exercice 1. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à B est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Quel-est le rang de f ? f est-il bijectif ?

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$ e. v. de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -I_d$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout x de E, $\text{vect}(x, f(x))$ est stable par f.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$.

1- Montrer que $\phi^m = 0$, $\forall m \geqslant n$.

2- Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & +1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer le polynôme carractéristique de A.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.
5. Déduire A^2 en fonction de A et de I_3

Exercice 5. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1 - Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si λ est valeur propre de A associée au vecteur propre X alors λ^m est valeur propre de A^m associée à X.

2 - Déterminer les valeurs propres de A lorsque $A^2 = A$ (on dit que A est idempotente) ; même question lorsque $A^n = I_n$.

3 - Supposons que A est inversible. Montrer que si (λ, X) est élément propre de A alors (λ^{-1}, X) est élément propre de A^{-1}.

Exercice 6. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à deux et f l'application linéaire définie par :

$$f : E \longrightarrow E$$
$$P(X) = aX^2 + bX + c \longrightarrow f(P(X)) = (b-c)X^2 + (c+a)X + (b-a)$$

1. Vérifier que $B = (1, X, X^2)$ est une base de E.
2. Montrer que $L = (2, X-2, (X-2)^2)$ est une deuxième base de E et donner les matrices de passage P_L^B et P_B^L.
3. Calculer $M(f, B)$ et $M(f, L)$.
4. Déterminer les valeurs propres et la dimension des espaces propres de f.
5. f est-elle trigonalisable ? f est-elle diagonalisable ?
6. Déterminer le polynôme minimal de f.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

1) * Noyau de f :

on a : $\ker(f) = \ker(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / AX = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$AX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ z = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Alors : $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$

* Image de f :

on a : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A)$

et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) * Rang de f :

on a : $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

or : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

Alors : $rg(f) = 3$

Scanné avec CamScanner

* Conclusion :

puisque : $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

donc : f est injectif

et puisque : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$

donc : f est surjectif

Alors : f est bijectif

Exercice 2 :

1) Supposons que : la matrice associé à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a :

$$\mathcal{M}^2 = -I_2$$

$$\mathcal{M}.\mathcal{M} = -I_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc = -1 & (1) \\ ac+dc = 0 & (2) \\ ab+bd = 0 & (3) \\ d^2+bc = -1 & (4) \end{cases}$$

$(1) - (4) \Leftrightarrow a^2 - d^2 = 0 \Leftrightarrow d = \pm a$

Posons : $d = a$

donc (2) et (3) seront vraies $\forall b, c$

d'où : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$

Alors : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longrightarrow (ax + cy, bx + ay)$

2) Soit (λ, x) un élément propre de f dans E, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

donc : $f(x) = \lambda x$

or : $f^2(x) = -x \Leftrightarrow f \circ f(x) = -x$

$\Leftrightarrow f(f(x)) = -x$

$\Leftrightarrow f(\lambda x) = -x$

$\Leftrightarrow \lambda . \lambda x = -x$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$ absurde

car : $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : f n'a pas de valeurs propres réelles

* Parité de dimension de E.

Notons : $\dim(E) = n$

on a : $\dim(E) = \deg(P_f(X))$ avec $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f

Dans $\mathbb{C}$:

Un polynôme de degré n admet n racines conjuguées deux à deux

Supposons que : n est impaire

donc : le polynôme caractéristique admet au moins une racine réelle (absurde)

car : f n'a pas de valeurs propres réelles

Alors : n est paire

3\ Soit $x \in E$, on a : $\mathrm{vect}(x, f(x))$

puisque : $f(x) \in \mathrm{vect}(x, f(x))$ et $f(f(x)) = f^2(x) = -x \in \mathrm{vect}(x, f(x))$

Alors : $\mathrm{vect}(x, f(x))$ est stable par f

Exercice 3 :

1\ Soit $m \geq n$

on a : $m = m + n - n$

d'où : $\Phi^m = \Phi^{m+n-n} = \Phi^{m-n} \circ \Phi^n$

$$\Phi^m = \Phi^{m-n}(\Phi^n)$$

$$\Phi^m = \Phi^{m-n}(0)$$

Alors : $\forall m \geq n$: $\Phi^m = 0$

2\ Notons : $\mathcal{B} = \{x, \underbrace{\Phi(x), \Phi^2(x), \dots, \Phi^{n-1}(x)}_{n-1 \text{ éléments}}\}$

on a : $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n = \dim(E)$

donc : Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre

* Soit : $\alpha_0 x + \alpha_1 \Phi(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{n-1}(x) = 0$

d'où : $\Phi^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 \Phi(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{n-1}(x)) = \Phi^{n-1}(0) = 0$

$$\cancel{\alpha_0 \Phi^{n-1}(x) + \Phi^{n-1}(\alpha_1 \Phi(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{n-1}(x))} = 0$$

$$\cancel{\alpha_0 \Phi^{n-1}(x) + \Phi^{n-1}(-\alpha_0 x)} = 0$$

$$\alpha_0 \Phi^{n-1}(x) + \underbrace{\alpha_1 \Phi^{n}(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{2n-2}(x)}_{0} = 0$$

car : $\forall m \geq n$: $\Phi^m = 0$ (d'après question 1)

donc : $\alpha_0 \Phi^{n-1}(x) = 0$ or : $\Phi^{n-1}(x) \neq 0$

d'où : $\alpha_0 = 0$

* Soit : $\alpha_1 \Phi(x) + \alpha_2 \Phi^2(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{n-1}(x) = 0$

d'où : $\Phi^{n-2}(\alpha_1 \Phi(x) + \alpha_2 \Phi^2(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{n-1}(x)) = \Phi^{n-2}(0) = 0$

$$\alpha_1 \Phi^{n-1}(x) + \underbrace{\alpha_2 \Phi^{n}(x) + \dots + \alpha_{n-1} \Phi^{2n-3}(x)}_{0} = 0$$

car : $\forall m \geq n$: $\Phi^m = 0$

donc : $\alpha_1 \Phi^{n-1}(x) = 0$

d'où : $\alpha_1 = 0$

* ...

De la même manière, on trouve alors : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

donc : $\mathcal{B}$ est libre

Alors : la famille $\{x, \Phi(x), \dots, \Phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1\ Polynôme caractéristique de A :

On a : $P_A(X) = \det(A - XI_3)$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ -1 & 3-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \end{matrix}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1-X & -2(1-X) & 1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (X-1)^2 (1(1-X+2) - 0 + 1(-1))$$

$$P_A(X) = (X-1)^2 (3 - X - 1)$$

Alors : $P_A(X) = -(X-1)^2 (X-2)$

2\ D'après le polynôme caractéristique : $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow mult(1) = 2 \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow mult(2) = 1 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

* $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$

On a : $X \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \Rightarrow (A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x + 2y + z = 0$$

$$\Rightarrow z = x - 2y \quad , \forall x, y$$

Alors : $E_1 = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ avec $\dim(E_1) = 2 = \mathrm{mult}(1)$

* $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$

On a : $X \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \Rightarrow (A - 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \quad , \forall x \\ z = 0 \end{cases}$$

Alors : $E_2 = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ avec $\dim(E_2) = 1 = \mathrm{mult}(2)$

3\ Puisque : $\begin{cases} P_A(X) \text{ est scindé} \\ \dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \end{cases}$

Alors : A est diagonalisable.

4\ On a : $P_A(X) = -(X - 1)^2(X - 2)$

d'où : $\mu_A(X) = -(X-1)^\alpha (X-2)^\beta$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$ et $\beta = 1$

Posons $\alpha = 1$: $\mu_A(X) = -(X-1)(X-2)$

$$\mu_A(A) = -(A - I_3)(A - 2I_3) = -\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Alors : $\mu_A(X) = -(X-1)(X-2)$ est le polynôme minimal de A

5\ On a : $\mu_A(A) = -(A - I_3)(A - 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

c-à-d : $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$A^2 - 2A - A + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Alors : $A^2 = 3A - 2I_3$

Exercice 5 :

1\ Montrons par récurrence que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$: (λ^m, X) est un élément propre de A^m

- Pour $m = 1$:

on a : (λ, X) est un élément propre de A

c-à-d : $AX = \lambda X$

- Pour $m = 2$: $A^2X = A.AX = A.\lambda X = \lambda(A.X) = \lambda.\lambda X$

$A^2X = \lambda^2 X$

donc : (λ^2, X) est un élément propre de A^2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

- on suppose que : (λ^m, X) est un élément propre de A^m (H.R)
- montrons que : (λ^{m+1}, X) est un élément propre de A^{m+1}

on a : $A^{m+1}X = A.A^mX$

$= A.\lambda^m X$ (d'après H.R : $A^mX = \lambda^m X$)

$= \lambda^m.AX$

$= \lambda^m.\lambda X$

donc $A^{m+1}X = \lambda^{m+1}X$

Alors : D'après le principe de récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$: (λ^m, X) élément propre de A

2\ - Soit : (λ, X) un élément propre de A

c-à-d : $AX = \lambda X$

d'où : D'après la question 1 : (λ^2, X) est élément propre de A^2

c-à-d : $A^2X = \lambda^2 X$

or : $A^2 = A \Rightarrow A^2X = AX$

$\Rightarrow \lambda^2 X = \lambda X$

$A^2 = A \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

Alors : $Sp(A) = \{0, 1\}$

Scanné avec CamScanner

* Soit : (λ, X) un élément propre de A

c-à-d : $AX = \lambda X$

d'où : D'après la question 1 : (λ^n, X) est élément propre de A^n

c-à-d : $A^n X = \lambda^n X$

or : $A^n = I_n$

donc : $X = \lambda^n X \Rightarrow \lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; $k \in \mathbb{Z}$

Alors : $Sp(A) = \{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z} \}$

3) on a : A est inversible

donc : $0 \notin Sp(A)$

Soit : (λ, X) un élément propre de A, avec : $\lambda \neq 0$

c-à-d : $AX = \lambda X$

d'où : $A^{-1} AX = \lambda A^{-1} X$

$X = \lambda A^{-1} X$

donc : $A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X = \lambda^{-1} X$

Alors : (λ^{-1}, X) est un élément propre de A^{-1}

Exercice 6 :

1) Soit : $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

on a : $card(\mathcal{B}) = 3 = dim(E)$

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre

Soit : $\alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0$

d'où : $(\alpha + \beta X + \gamma X^2)^{(2)} = 0 \Leftrightarrow 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$

donc : $\alpha + \beta X = 0$

d'où : $(\alpha + \beta X)^{(1)} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

donc : $\alpha = 0$

Alors : $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre

d'où : $\mathcal{B}$ est une base de E

2) Soit : $\mathcal{Z} = (2, X-2, (X-2)^2)$

on a : $card(\mathcal{Z}) = 3 = dim(E)$

Il suffit de montrer que $\mathcal{Z}$ est libre

Soit : $2\alpha + \beta(X-2) + \gamma(X-2)^2 = 0$

Scanné avec CamScanner

c-à-d: $\gamma X^2 + (\beta - 4\gamma)X + (2\alpha - 2\beta + 4\gamma) = 0$

d'où: $(\gamma X^2 + (\beta - 4\gamma)X + (2\alpha - 2\beta + 4\gamma))^{(2)} = 0 \Leftrightarrow 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$

donc: $\beta X + (2\alpha - 2\beta) = 0$

d'où: $(\beta X + (2\alpha - 2\beta))^{(1)} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

donc: $2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Alors: $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow \mathcal{Z}$ est libre

d'où $\mathcal{Z}$ est une base de E

- Matrice de passage: $P_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{Z}$ à $\mathcal{B}$)

on a: $\begin{cases} 1 = \alpha . 2 + \beta . (X-2) + \gamma . (X-2)^2 \\ X = \alpha' . 2 + \beta' . (X-2) + \gamma' . (X-2)^2 \\ X^2 = \alpha'' . 2 + \beta'' . (X-2) + \gamma'' . (X-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} ; \beta = 0 ; \gamma = 0 \\ \alpha' = 1 ; \beta' = 1 ; \gamma' = 0 \\ \alpha'' = 2 ; \beta'' = 4 ; \gamma'' = 1 \end{cases}$

Alors:

$$P_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array}$$

- Matrice de passage: $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Z}}$ (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{Z}$)

on a: $\begin{cases} 2 = \alpha . 1 + \beta . X + \gamma . X^2 \\ X - 2 = \alpha' . 1 + \beta' X + \gamma' . X^2 \\ (X-2)^2 = \alpha'' 1 + \beta'' X + \gamma'' X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 ; \beta = 0 ; \gamma = 0 \\ \alpha' = -2 ; \beta' = 1 ; \gamma' = 0 \\ \alpha'' = 4 ; \beta'' = -4 ; \gamma'' = 1 \end{cases}$

Alors:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Z}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

3\ voir page suivante

4\ Notons: $M = M(f, \mathcal{B})$

Polynôme caractéristique: $P_M(X)$

on a: $P_M(X) = \det(M - XI_3)$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{array}$$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ X-1 & 1-X & -X \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = (X-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 6:

3\ • Matrice $\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$

on a, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

et $f : E \longrightarrow E$

$c + bX + aX^2 \longrightarrow (b-a) + (c+a)X + (b-c)X^2$

donc,

$$\begin{cases} 1 = 1 + 0X + 0X^2 \\ X = 0\times 1 + 1X + 0X^2 \\ X^2 = 0\times 1 + 0X + 1X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0\times 1 + 1X - 1X^2 \\ f(X) = 1 + 0X + 1X^2 \\ f(X^2) = -1 + 1X + 0X^2 \end{cases}$$

Alors,

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

• Matrice $\mathcal{M}(f,\mathcal{Z})$

on a, $\mathcal{Z} = (2, X-2, (X-2)^2)$

et $f : E \longrightarrow E$

$c + bX + aX^2 \longrightarrow (b-a) + (c+a)X + (b-c)X^2$

donc

$$\begin{cases} 2 = 2\times 1 + 0X + 0X^2 \\ X-2 = -2\times 1 + 1X + 0X^2 \\ (X-2)^2 = 4\times 1 - 4X + 1X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 + 2X - 2X^2 = -2.2 - 6(X-2) - 2(X-2) \\ f(X-2) = 1 - 2X + 3X^2 = \frac{9}{2}.2 + 10(X-2) + 3(X-2 \\ f((X-2)^2) = -5 + 5X - 8X^2 = \frac{-27}{2}.2 - 27(X-2) \\ \qquad -8(X-2)^2 \end{cases}$$

Alors,

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(2) & f(X-2) & f((X-2)^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & \frac{9}{2} & -\frac{27}{2} \\ -6 & 10 & -27 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{array} \end{array}$$

$$P_M(X) = (X-1)^2(-1(X+1)-1)$$

$$P_M(X) = (X-1)^2(-2-X)$$

Alors: $P_M(X) = -(X-1)^2(X+2)$

Valeurs propres :

$Sp(M) = \{-2, 1\}$ avec $mult(1) = 2$ et $mult(-2) = 1$

Sous-espaces propres :

- $E_1 = Ker(M - I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$

$$X \in Ker(M - I_3) \Rightarrow (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x + y - z = 0$$

$$\Rightarrow z = -x + y, \ \forall x, y$$

Alors: $E_1 = vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(E_1) = 2$

- $E_{-2} = Ker(M + 2I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}$

$$X \in Ker(M + 2I_3) \Rightarrow (M + 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2x + y \\ 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}, \ \forall x$$

Scanné avec CamScanner

Alors: $E_{-2} = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(E_{-2}) = 1$

5\ puisque: • $P_M(X)$ est scindé

Alors: M est trigonalisable $\Leftrightarrow$ f est trigonalisable

De plus, puisque: • $\dim(E_1) = \text{mult}(1) = 2$

• $\dim(E_{-2}) = \text{mult}(-2) = 1$

Alors: f est diagonalisable

6\ On a: $P_M(X) = -(X-1)^2(X+2)$

d'où: $\mu_M(X) = (X-1)^\alpha (X+2)^\beta$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$ et $\beta = 1$

Posons: $\alpha = 1$: $\mu_M(X) = (X-1)(X+2)$

$$\mu_M(M) = (M - I_3)(M + 2I_3) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\mu_M(M) = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Alors: $\mu_M(X) = (X-1)(X+2)$ est le polynôme minimal de f.

Scanné avec CamScanner

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année 2022-2023
LE-Maths
Algèbre 4

Série n° 2

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, $A^2 + 6\, I_3$ et en déduire un polynôme de degré 2 annulant A.
2. Déterminer le polynôme minimal annulant A. Déterminer A^{-1} en fonction de A.
3. Sachant que les valeurs propres de A sont 2 (mult(2)=2) et 3 (simple), déduire le polynôme caractéristique (Sans calcul).
4. Déterminer les sous-espaces propres.
5. Démontrer que A est diagonalisable et donner la matrice de passage P.
6. Calculer P^{-1} et D tels que $A = P\, D\, P^{-1}$, puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire sup. T telles que $A = PTP^{-1}$.
3. Montrer que $T = \lambda(I_3 + N)$, où λ est un réel et N est une matrice vérifiant $N^2 = 0$.
4. Déterminer A^npour $n \geqslant 0$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer une réduite de Jordan de A en précisant la base et la matrice de passage.
3. Calculer le polynôme minimal de A.
4. Déterminer A^n. En déduire l'expression de A^{-1}.

Exercice 4. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une réduite de Jordan de A.
4. Déterminer les matrices de passage P et P^{-1}.
5. Déterminer l'exponentielle de A.

Exercice 5. Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Devoir à rendre (Début de Janvier)!!

Exercice 6. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice 2×2 donnée par $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$. On suppose que $\alpha \neq 1$.

1. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ montrer que
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Posons $\lambda_1 = 1$ et $v_1 = (\frac{\beta-1}{\alpha-1}, 1)$. Montrer que (λ_1, v_1) est un élément propre de A.
3. Posons $v_2 = (-1, 1)$. Montrer que v_2 est un vecteur propre de A. On notera λ_2 sa valeur propre associée. En déduire la valeur de λ_2.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A (Sans calcul).
5. Proposer une condition sur le couple (α, β) pour que soit diagonalisable (justifier).
6. Soit $v_3 = (0, 1)$, montrer que la matrice, dans la base (v_3, v_2), de l'endomorphisme associé à A est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta - 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
7. Supposons que $\alpha + \beta = 1$, justifier pourquoi A n'est pas inversible (sans calculer le déterminant.)
8. Supposons que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Diagonaliser A et calculer A^n.

Exercice 7. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_m du $\mathbb{R}$ e.v. $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{array}{rccc} f_m : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -mx + m^2 y \\ -m^2 y \\ m^2 y - z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Écrire la matrice A_m de f_m dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_m
3. Pour quelles valeurs de m (noté ensemble E_m), A_m est diagonalisable (justifier) ?
4. Pour quelles valeurs de m, A_m est inversible (justifier) ?
5. On suppose que $m \in E_m$.
   (a) Déterminer les sous-espaces propres de A_m.
   (b) Déterminer P_m, P_m^{-1} et D_m tels que $A_m = P_m D_m P_m^{-1}$
   (Ranger les vecteurs et les valeurs propres suivant leurs simpliciter.)
   (c) Calculer A_m^n.
   (d) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -mu_n + m^2 v_n \\ v_{n+1} = -m^2 v_n \\ w_{n+1} = m^2 v_n - w_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = m \\ v_0 = 0 \\ w_0 = m^2 \end{cases}$$
   Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de m et n.
6. Soit le système différentiel suivant
$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \\ x_3'(t) = x_2(t) - x_3(t) \end{cases} \qquad (S)$$
   (a) Écrire le système différentiel (S) sous forme Matricielle.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ une base de $\mathbb{R}^3$, avec $\mathbf{e}_1' = e_1$, $\mathbf{e}_2' = e_1 + e_3$ et $\mathbf{e}_3' = e_2 + e_3$.
   (c) Écrire la matrice J de (S) dans la base canonique $\mathcal{B}'$, puis calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$ et e^{tJ}.
   (d) Résoudre le système différentiel (S), sachant que : $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = -1$, et $x_3(0) = -2$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

1\ $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -15 & -30 \\ -10 & 9 & 10 \\ 30 & -15 & -26 \end{pmatrix}$

- $A^2 + 6I_3 = \begin{pmatrix} 34 & -15 & -30 \\ -10 & 9 & 10 \\ 30 & -15 & -26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -15 & -30 \\ -10 & 15 & 10 \\ 30 & -15 & -20 \end{pmatrix}$

d'où, $A^2 + 6I_3 = 5\begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 5A$

donc : $A^2 - 5A + 6I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Alors : $Q(X) = X^2 - 5X + 6$ est un polynôme annulant A

2\ on a, $Q(X) = X^2 - 5X + 6$

$\Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ d'où, $X = 2$ ou $X = 3$

donc : $Q(X) = (X-2)(X-3)$

puisque, $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

d'où, $(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Alors : $\mu_A(X) = (X-2)(X-3)$ est le polynôme minimal annulant A

Déterminons A^{-1} :

on a, $A.A^{-1} = I_3$

d'où, $6A.A^{-1} = 6I_3$

or : $A^2 - 5A + 6I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow 6I_3 = -A^2 + 5A$

donc, $6\cancel{A}.A^{-1} = -A^2 + 5A = \cancel{A}(-A + 5I_3)$ $\quad (A \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$

d'où, $6A^{-1} = -A + 5I_3$

Alors, $A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_3$

3\ on a, $\mu_A(X) = (X-2)(X-3)$ le polynôme minimal de A

puisque, $Sp(A) = \{2, 3\}$ avec : $mult(2) = 2$ et $mult(3) = 1$

Alors, $P_A(X) = (-1)^{mult(2)+mult(3)}(X-2)^{mult(2)}(X-3)^{mult(3)}$

$P_A(X) = -(X-2)^2(X-3)$

Scanné avec CamScanner

est le polynôme caractéristique de A

4) * $E_2 = \ker(A - 2I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$

$X \in \ker(A - 2I_3) \Rightarrow (A - 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y - 6z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ 6x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x + y + 2z = 0$$

$$\Rightarrow y = 2x - 2z, \ \forall x, z$$

Alors: $E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(E_2) = 2$

* $E_3 = \ker(A - 3I_3)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3$

$X \in \ker(A - 3I_3) \Rightarrow (A - 3I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 6z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 6x - 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 6x = -x - 3y = 0 \\ z = x \\ 6x - 3y - 7x = -x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ -x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x = -3y \\ x = -3y \end{cases}, \ \forall y$$

Alors: $E_3 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(E_3) = 1$

Scanné avec CamScanner

5\ puisque : * $P_A(X)$ est scindé

* $\dim(E_2) = mult(2) = 2$
* $\dim(E_3) = mult(3) = 1$

Alors, A est diagonalisable

d'où : la matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

6\ on a : $A = P.D.P^{-1}$

avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculons P^{-1} :

On a :

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2e_2 + e_3 \\ v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -3e_1 + e_2 - 3e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - 2e_2 = v_1 + v_2 - e_3 \\ e_2 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ v_3 = -3v_1 + -3v_2 + \cancel{3e_3} - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}e_3 - \cancel{3e_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + v_2 - e_3 \\ e_2 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ v_3 = -3v_1 - \frac{7}{2}v_2 + \frac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + v_2 - 6v_1 - 7v_2 - 2v_3 \\ e_2 = -\frac{1}{2}v_2 + 3v_1 + \frac{7}{2}v_2 + v_3 \\ e_3 = 6v_1 + 7v_2 + 2v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = -5v_1 - 6v_2 - 2v_3 \\ e_2 = 3v_1 + 3v_2 + v_3 \\ e_3 = 6v_1 + 7v_2 + 2v_3 \end{cases}$$

Alors, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$A^n = (P.D.P^{-1})^n = P.D^n.P^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -3^{n+1} \\ 2^{n+1} & -2^{n+1} & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$A^n = \begin{pmatrix} -5(2^n)+2(3^{n+1}) & 3(2^n)-3^{n+1} & 6(2^n)-2(3^{n+1}) \\ 2^{n+1}-2(3^n) & 3^n & -2^{n+1}+2(3^n) \\ -6(2^n)+2(3^{n+1}) & 3(2^n)-3^{n+1} & 7(2^n)-2(3^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1\ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

on a : $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$

$P_A(X) = -X(4-X)(2-X) - 1(-8+4X)$

$P_A(X) = -X(8-4X-2X+X^2) + 8 - 4X$

$P_A(X) = -8X + 6X^2 - X^3 + 8 - 4X$

$P_A(X) = 8 - 12X + 6X^2 - X^3 = 2^3 - 3\times 2^2 X + 3\times 2 X^2 - X^3$

$P_A(X) = (2-X)^3$

Alors : $P_A(X) = -(X-2)^3$

puisque : $P_A(X)$ est scindé

Alors : A est trigonalisable $\Leftrightarrow$ f est trigonalisable

on a : $Sp(A) = \{2\}$ avec $mult(2) = 3$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 = Ker(A - 2I_3)$

$X \in Ker(A-2I_3) \Rightarrow (A-2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -4x+2y=0 \\ -2x+y=0 \end{cases}, \forall z$

$\Rightarrow -2x+y=0, \forall z$

$\Rightarrow y = 2x, \forall x, z$

alors : $E_2 = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(E_2) = 2$

puisque : $\dim(E_2) \neq mult(2)$

Alors : f n'est pas diagonalisable

2\ on pose : $E_2 = vect\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

on complet en une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$: (e_1, e_2, e_3)

on prend : $v_3 = e_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc : $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

avec : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = e_3 \\ v_3 = e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_3 \\ v_1 = v_3 + 2e_2 \\ e_3 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_3 \\ e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3 \\ e_3 = v_2 \end{cases}$$

donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$:

on a :

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 & \text{(vecteur propre)} \\ f(v_2) = 2v_2 & \text{(vecteur propre)} \\ f(v_3) = f(e_1) = -4e_2 - 2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = 2v_2 \\ f(v_3) = -2v_1 + 2v_3 - 2v_2 \end{cases}$$

Alors :

$$T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

3) on a :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

puisque : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors : $T = \lambda(I_3 + N)$ avec $\lambda = 2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = (P.T.P^{-1})^n = P.T^n.P^{-1}$

$T^n = (2(I_3 + N))^n = 2^n(I_3 + N)^n$

Scanné avec CamScanner

puisque : $I_3 . N = N . I_3$

donc : on peut utiliser le binôme de Newton :

$$T^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k I_3^{n-k} . N^k = 2^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k$$

$$T^n = 2^n \left(\sum_{k=0}^{1} C_1^k N^k + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} C_n^k N^k}_{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}} \right) \quad (\text{car } N \text{ est nilpotent : } N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$$

$$C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$$

$$T^n = 2^n \sum_{k=0}^{1} C_1^k N^k = 2^n \left(C_1^0 N^0 + C_1^1 N \right) = 2^n \left(I_3 + N \right)$$

donc :

$$A^n = P . T^n . P^{-1} = P . \left(2^n (I_3 + N) \right) . P^{-1} = 2^n . P . (I_3 + N) . P^{-1}$$

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] . \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Alors : } A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 \\ -2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ -2^n & 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

1\ on a : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + (1-\beta) x_2 = y_1 & (1) \\ (1-\alpha) x_1 + \beta x_2 = y_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow \cancel{\alpha x_1} + x_2 - \cancel{\beta x_2} + x_1 - \cancel{\alpha x_1} + \cancel{\beta x_2} = y_1 + y_2$$

Alors : $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

2\ on a : $A v_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\beta-1)/(\alpha-1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta-1)/(\alpha-1) + 1 - \beta \\ -(\beta-1) + \beta \end{pmatrix}$

$$A v_1 = \begin{pmatrix} (\beta-1)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{\alpha-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc : $A v_1 = v_1$

Scanné avec CamScanner

Alors : (λ_1, v_1) est un élément propre de A

3\ on a : $Av_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta \\ -1+\alpha+\beta \end{pmatrix}$

$$Av_2 = (-1+\alpha+\beta)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc : $Av_2 = (-1+\alpha+\beta)v_2$

Alors : v_2 est un vecteur propre de A

Sa valeur propre associée à v_2 est : $\lambda_2 = \alpha+\beta-1$

4\ on a : $Sp(A) = \{1, \alpha+\beta-1\}$

et : $mult(1) = mult(\alpha+\beta-1) = 1$

Alors : $P_A(X) = (X-1)(X-(\alpha+\beta-1))$

5\ pour que A soit diagonalisable

il faut que : $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow 1 \neq \alpha+\beta-1$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta \neq 2$

6\ Calculons $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (v_3, v_2)$

on a : $\begin{cases} v_3 = e_2 \\ v_2 = -e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(v_3) = f(e_2) = (1-\beta)e_1 + \beta e_2 \\ f(v_2) = (-1+\alpha+\beta)v_2 \quad \text{(vecteur propre)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(v_3) = (1-\beta)(-v_2+v_3) + \beta \cdot v_3 \\ f(v_2) = (-1+\alpha+\beta)v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(v_3) = (\beta-1)v_2 + v_3 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \quad (\lambda_2 = -1+\alpha+\beta) \end{cases}$

Alors :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(v_3) & f(v_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta-1 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_3 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

7\ Supposons que $\alpha+\beta = 1$:

donc : $\lambda_2 = \alpha+\beta-1 = 0$

d'où : $0 \in Sp(A)$

Alors : A n'est pas inversible

8\ Supposons que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

Scanné avec CamScanner

donc : $P_A(X) = (X-1)(X-2)$

et : $Sp(A) = \{1, 2\}$ avec $mult(1) = mult(2) = 1$

et : $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où : $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons P^{-1} :

on a : $\begin{cases} v_1 = e_2 \\ v_2 = -e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2 = v_1 \\ v_2 = -e_1 + v_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_2 \\ e_2 = v_1 \end{cases}$

donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$A^n = (P.D.P^{-1})^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Alors : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 :

1\ Polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_4)$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-X & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{matrix}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1-X & 2-X & -1 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (1-X)(2-X)\big((1-X)(2-X) + (2-X) + 0\big)$$

$$P_A(X) = (1-X)(2-X)(2-X)(1-X+1)$$

$$P_A(X) = (1-X)(2-X)^3$$

Alors : $P_A(X) = (X-2)^3(X-1)$

d'où : $Sp(A) = \{1, 2\}$ où $mult(1) = 1$ et $mult(2) = 3$

Sous-espaces propres de A :

- $E_2 = Ker(A - 2I_4)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E_2$

$$X \in Ker(A - 2I_4) \Rightarrow (A - 2I_4)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}^{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + y - z + w = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}, \forall z$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \quad , \forall z \\ w = 0 \end{cases}$$

Alors, $E_2 = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(E_2) = 1$

- $E_1 = \text{Ker}(A - I_4)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E_1$

$$X \in \text{Ker}(A - I_4) \Rightarrow (A - I_4)X = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - z + w = 0 \\ -x + y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad , \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -x + 2x = x \\ y = x \\ w = 0 \end{cases} \quad , \forall x$$

Alors, $E_1 = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(E_1) = 1$

puisque, - $P_A(X)$ est scindé

- $\dim(E_2) \neq \text{mult}(2)$
- $\dim(E_1) = \text{mult}(1)$

Alors, A n'est pas diagonalisable

2\ On a :

$$\begin{cases} P_A(X) = (X-1)(X-2)^3 \\ Sp(A) = \{1, 2\} \; ; \; \text{mult}(1) = 1 \text{ et } \text{mult}(2) = 3 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} E_1 = \text{vect}(1,1,1,0) = v_1 \Rightarrow \text{Il existe un seul bloc associé à 1 de taille 1} \\ E_2 = \text{vect}(0,1,1,0) = v_2 \Rightarrow \text{Il existe un seul bloc associé à 2 de taille 3} \end{cases}$$

Notons la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

Calculons v_3 et v_4 :

* Soit : $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, on a :

$$(A - 2I_4)v_3 = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + y - z + w = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{1} + w = \cancel{1} \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y - 1 \quad \forall y \\ w = 0 \end{cases}$$

Alors : $v_3 = (0, 1, 0, 0)$

* Soit : $v_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, on a :

$$(A - 2I_4)v_4 = v_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + y - z + w = 1 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ w = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \quad \forall y \\ w = 1 \end{cases}$$

Alors : $v_4 = (0, 0, 0, 1)$

donc :

$$\underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_2 \\ v_4 = e_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_2 \\ e_2 = v_3 \\ e_3 = v_2 - v_3 \\ e_4 = v_4 \end{cases}$$

d'où :

$$\underset{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}{P^{-1}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Alors

$$J = P^{-1} . A . P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3\ Remarque : La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal

puisque :

- Il existe un seul bloc de Jordan associé à 1 de taille 1
- Il existe un seul bloc de Jordan associé à 2 de taille 3

Alors : $\mu_A(X) = (X-2)^3 (X-1)$

4\ On a : $A = P . J . P^{-1}$

d'où : $\forall n \geq 0$: $A^n = P . J^n . P^{-1}$

Soit $n \geq 0$, on a :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

Scanné avec CamScanner

avec : $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où : $J^n = (D + N)^n$

puisque : D et N commutent

$$N.D = D.N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc, utilisons le binôme de Newton :

$$J^n = \sum_{K=0}^{n} C_K^n D^{n-K} N^K$$

$$J^n = C_0^n D^n N^0 + C_1^n D^{n-1} N + C_2^n D^{n-2} N^2 + \cancel{\sum_{K=3}^{n} C_K^n D^{n-K} N^K} \to 0$$

$$J^n = C_0^n D^n + C_1^n D^{n-1} N + C_2^n D^{n-2} N^2$$

$$J^n = D^n + n D^{n-1} N + \frac{(n-1)n}{2} D^{n-2} N^2$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{(n-1)n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{(n-1)n}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (n-1)n2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & (n-1)n2^{n-3} \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Alors:

$$A^n = P.J^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & (n-1)n2^{n-3} \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & n2^{n-1}+2^n & (n-1)n2^{n-3}+n2^{n-1} \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} & (n-1)n2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & 2^{n-1}(n+2) & n2^{n-3}(n+3) \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} & (n-1)n2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow \forall n > 0 \; A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^{n-1}(n+2) & -2^{n-3}(n^2-n-8) & n2^{n-3}(n+3) \\ 1-2^n & n2^{n-1} & & n2^{n-3}(n-1) \\ 0 & 0 & & 2^n \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 0 : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^{n-1}(n+2) & -n2^{n-1} & n2^{n-3}(n+3) \\ 1-2^n & n2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) & n2^{n-3}(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$\to 0$

N^k

* Expression de A^{-1} :

On a : $\mu_A(A) = 0_{\mathbb{R}^4}$

c-à-d : $(A - 2I_4)^3 (A - I_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow (A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_4)(A - I_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow A^4 - A^3 - 6A^3 + 6A^2 + 12A^2 - 12A - 8A + 8I_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow A^4 - 7A^3 + 18A^2 - 20A = -8I_4$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}A^4 + \frac{7}{8}A^3 - \frac{9}{4}A^2 + \frac{5}{2}A = I_4$

$\Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{8}A^3 + \frac{7}{8}A^2 - \frac{9}{4}A + \frac{5}{2}I_4\right) = I_4$

Alors :

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\left(A^3 - 7A^2 + 18A - 20I_4\right)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 20 & -12 & 18 \\ -7 & 12 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 20\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 20 & -12 & 18 \\ -7 & 12 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -56 & 28 & -35 \\ 21 & -28 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ -18 & 54 & -18 \\ -18 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/8 \\ 1/2 & -1/4 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 :

1\ Polynôme caractéristique de A.

on a $P_A(X) = \det(A - XI_4)$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -2-X & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4-X & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5-X & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -3-X & -1 & 1 & 2 \\ -3-X & -4-X & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5-X & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-3-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4-X & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5-X & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-3-X)\left(1\begin{vmatrix} -4-X & 1 & 2 \\ 0 & -5-X & 4 \\ 0 & -1 & -1-X \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5-X & 4 \\ 0 & -1 & -1-X \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + 1\begin{vmatrix} 1 & -4-X & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -4-X & 1 \\ 0 & 0 & -5-X \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$P_A(X) = (-3-X)\left((-4-X)\begin{vmatrix} -5-X & 4 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -5-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right.$$
$$+ 1\begin{vmatrix} -5-X & 4 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -5-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$+ 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} - (-4-X)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$- 2\begin{vmatrix} 0 & -5-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-4-X)\begin{vmatrix} 0 & -5-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-3-X)\left((-4-X)\left((-5-X)(-1-X)+4\right) + (-5-X)(-1-X) + 4\right)$$

$$P_A(X) = (-3-X)\left((-4-X)(5+6X+X^2+4) + 5+6X+X^2+4\right)$$

$$P_A(X) = (-3-X)(-4-X+1)(X^2+6X+9)$$

$$P_A(X) = (-3-X)(-3-X)(X+3)^2$$

$$P_A(X) = (-3-X)^2(X+3)^2$$

Alors $P_A(X) = (X+3)^4$ ✓

2\ on a $P_A(X) = (X+3)^4$ d'où $Sp(A) = \{-3\}$

où $mult(-3) = 4$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E_{-3} = Ker(A + 3I_4)$

$$X \in Ker(A + 3I_4) \Rightarrow (A + 3I_4)X = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ x - y + z + 2w = 0 \\ -2z + 4w = 0 \\ -z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ -z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 4w = 0 \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + 4w \\ z = 2w \end{cases}, \forall x, w$$

Alors $E_{-3} = vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(E_{-3}) = 2$

puisque : • $P_A(X)$ est scindé

• $\dim(E_{-3}) \neq mult(-3)$

Alors A n'est pas diagonalisable ✓

3\ on a

$$\begin{cases} P_A(X) = (X+3)^4 \Rightarrow \mu_A(X) = (X+3)^3 \\ Sp(A) = \{-3\} \; ; \; mult(-3) = 1 \\ E_{-3} = vect\{(1,1,0,0),(0,4,2,1)\} = (u',u) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il existe deux blocs associés à -3 l'un de taille 3 et l'autre de taille 1

Alors,

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

4\ Calculons $F_2 = \ker(A + 3I_4)^2$

on a : $(A + 3I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in F_2$,

$X \in \ker(A+3I_4)^2 \Rightarrow (A+3I_4)^2 X = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -4z + 8w = 0$, $\forall x, y$

$\Rightarrow z = 2w$, $\forall x, y, w$

donc: $F_2 = \text{vect}\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,2,1)\}$

Calculons $F_3 = \ker(A+3I_4)^3$

on a: $(A+3I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc: $F_3 = \mathbb{R}^4 = \text{vect}\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

Notons la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

Cherchons v_4:

on pose: $v_4 = (0,0,1,0)$; $v_4 \in F_3$ et $\notin F_2$

Calculons v_3: Soit $v_3 = (x, y, z, w)$:

on a: $v_3 = (A+3I_4)v_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ w = -1 \end{cases}$$

donc: $v_3 = (1, 1, -2, -1)$

Calculons v_2: Soit $v_2 = (x, y, z, w)$:

on a: $v_2 = (A+3I_4)v_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

donc: $v_2 = (-4, -4, 0, 0) = -4u'$

Calculons v_1:

Scanné avec CamScanner

on a : $v_1 = u = (0, 4, 2, 1)$

Alors :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 4e_2 + 2e_3 + e_4 \\ v_2 = -4e_1 - 4e_2 \\ v_3 = e_1 + e_2 - 2e_3 - e_4 \\ v_4 = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_3 - e_2 + 2e_3 + e_4 \\ v_1 = -4v_3 + \cancel{4e_2} - 8e_3 - 4e_4 - \cancel{4e_2} \\ e_3 = v_4 \\ e_4 = v_1 - 4e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_3 - e_2 + \cancel{2e_3} + v_1 - 4e_2 \quad -\cancel{2e_3} \\ v_2 = -4v_3 - \cancel{8e_3} - 4v_1 + 16e_2 + \cancel{8e_3} \\ e_3 = v_4 \\ e_4 = v_1 - 4e_2 - 2v_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + v_3 - 5e_2 \\ v_2 = -4v_1 - 4v_3 + 16e_2 \\ e_3 = v_4 \\ e_3 = v_1 - 2v_4 - 4e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + v_3 - 5e_2 \\ e_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{16}v_2 + \frac{1}{4}v_3 \\ e_3 = v_4 \\ e_4 = v_1 - 2v_4 - 4e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\frac{1}{4}v_1 - \frac{5}{16}v_2 - \frac{1}{4}v_3 \\ e_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{16}v_2 + \frac{1}{4}v_3 \\ e_3 = v_4 \\ e_4 = -\frac{1}{4}v_2 - v_3 - 2v_4 \end{cases}$$

donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ -5/16 & 1/16 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Ex5 :

* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 3 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= (4-X)\left[(1-X)(4-X)+3\right] - 1$$

$$= (4-X)(4-5X+X^2+3) - 1$$

$$= (4-X)(X^2-5X+7) - 1$$

$$= 4X^2 - 20X + 28 - X^3 + 5X^2 - 7X - 1$$

$$= -X^3 + 9X^2 - 27X + 27$$

$$= -(X^3 - 9X^2 + 27X - 27)$$

$$P_A(X) = -(X-3)^3$$ ✓

Valeurs propres :

$Sp(A) = \{3\}$ avec $mult(3) = 3$

Polynôme minimal :

* $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

* $(A - 3I_3)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mu_A(X) = (X-3)^3$$ ✓

Sous-espaces caractéristiques

Soit $X = (x, y, z) \in F_3 = \ker(A - 3I_3)^2$

$X \in \ker(A - 3I_3)^2 \Rightarrow (A - 3I_3)^2 X = 0_{\mathbb{R}^3}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x + y - 2z = 0$$

$$\Rightarrow x = -y + 2z \ , \forall y, z$$

donc : $F_3 = \text{vect}\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\} = (v_1, v_2)$

Posons : $v_3 = (0, 0, 1) = e_3$

donc : $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

d'où :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -e_1 + e_2 \\ v_2 = 2e_1 + e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2 = v_1 + e_1 \\ v_2 = 2e_1 + v_3 \\ e_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3 \\ e_1 = \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3 \\ e_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

<u>Matrice $A_0 = P^{-1} \cdot A \cdot P$:</u>

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \\ -3/2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N_0} = A_1 + N_0$$

donc : $A = P \cdot A_0 \cdot P^{-1} = P \cdot A_1 \cdot P^{-1} + P \cdot N_0 \cdot P^{-1}$

Scanné avec CamScanner

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} + P.N_0.P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} + P.N_1.P^{-1}$$

Alors: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{N} = U + N$ ✓

avec: * $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisable $(U = 3I_3)$ ✓

* $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A - 3I_3$ nilpotente $\left((A-3I_3)^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\right)$ ✓

* $UN = NU = 3(A - 3I_3)$ ✓

* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Polynôme caractéristique</u>

$$P_B(X) = \det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -3 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P_B(X) = (4-X)(2-X)^2 + (2-X)$$

$$P_B(X) = (2-X)[(4-X)(2-X)+1]$$

$$P_B(X) = -(X-2)(8-4X-2X+X^2+1)$$

$$P_B(X) = -(X-2)(X^2-6X+9)$$

$$P_B(X) = -(X-3)^2(X-2)$$

<u>Valeurs propres:</u>

$Sp(B) = \{2, 3\}$ avec $mult(2) = 1$ et $mult(3) = 2$

<u>Polynôme minimal:</u>

Scanné avec CamScanner

$$* \ (B-3I_3)(B-2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$* \ (B-3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (B-3I_3)^2(B-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_B(X) = (X-3)^2(X-2)$$

<u>Sous-espaces caractéristiques:</u>

* Soit $X = (x, y, z) \in F_2 = \ker(B - 2I_3)$

$$X \in \ker(B-2I_3) \Rightarrow (B-2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}, \forall x$$

donc: $F_2 = \text{vect}(1, 1, 1) = v_1$ ✓

* Soit $X = (x, y, z) \in F_3 = \ker(B - 3I_3)^2$

$$X \in \ker(B-3I_3)^2 \Rightarrow (B-3I_3)^2 X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z = 0, \forall x, y$$

donc: $F_3 = \text{vect}\{(1,0,0), (0,1,0)\} = (v_2, v_3)$ ✓

d'où: $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

d'où:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \quad ✓ \Rightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_2 \\ e_2 = v_3 \\ e_3 = v_1 - v_2 - v_3 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

<u>Matrice $B_0 = P^{-1} \cdot B \cdot P$:</u>

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{N_0} = B_1 + N_0$$

donc : $B = P \cdot B_0 \cdot P^{-1} = P \cdot B_1 \cdot P^{-1} + P \cdot N_0 \cdot P^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + P \cdot N_0 \cdot P^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + P \cdot N_0 \cdot P^{-1}$$

Alors : $B = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = U + N$

avec : * $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable (semblable à une matrice diagonale)

* $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente ($N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$)

* $UN = NU = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 7.

1\ $f_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (-mx + m^2y, -m^2y, m^2y - z)$

on a : $\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_m(e_1) = (-m.1 + m^2.0, -m^2.0, m^2.0 - 0) \\ f_m(e_2) = (-m.0 + m^2.1, -m^2.1, m^2.1 - 0) \\ f_m(e_3) = (-m.0 + m^2.0, -m^2.0, m^2.0 - 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f_m(e_1) = (-m, 0, 0) \\ f_m(e_2) = (m^2, -m^2, m^2) \\ f_m(e_3) = (0, 0, -1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f_m(e_1) = -m e_1 \\ f_m(e_2) = m^2 e_1 - m^2 e_2 + m^2 e_3 \\ f_m(e_3) = -e_3 \end{cases}$

Alors,

$$A_m = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_m(e_1) & f_m(e_2) & f_m(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -m & m^2 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2\ Polynôme caractéristique :

on a : $P_{A_m}(X) = \det(A_m - XI_3) = \begin{vmatrix} -m-X & m^2 & 0 \\ 0 & -m^2-X & 0 \\ 0 & m^2 & -1-X \end{vmatrix}$

$P_{A_m}(X) = (-m-X)\begin{vmatrix} -m^2-X & 0 \\ m^2 & -1-X \end{vmatrix} - m^2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -m^2-X \\ 0 & m^2 \end{vmatrix}$

$P_{A_m}(X) = (-m-X)(-m^2-X)(-1-X)$

Alors, $P_{A_m}(X) = -(X+m^2)(X+m)(X+1)$

3\ Pour que A_m soit diagonalisable ;

il faut que ses valeurs propres soient distincts deux à deux

or : $Sp(A_m) = \{-m^2, -m, -1\}$ et $m \in \mathbb{R}$

donc : $\begin{cases} -m^2 \neq -m \\ -m^2 \neq -1 \\ -m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq m \\ m^2 \neq 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Alors : $E_m = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

d'où, $\forall m \in E_m$, A_m est diagonalisable

4\ Pour que A_m soit inversible ;

Scanné avec CamScanner

il faut que $\det(A_m) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} -m & m^2 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\iff -m \cdot m^2 \neq 0$

$\iff -m^3 \neq 0$

$\iff m \neq 0 \; ; \; m \in \mathbb{R}$

Alors : $\forall m \in \mathbb{R}^*$, A_m est inversible

5\ Soit $m \in E_m = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

a) on a : $P_{A_m}(X) = -(X+m^2)(X+m)(X+1) \Rightarrow Sp(A_m) = \{-m^2, -m, -1\}$

* $E_{-m} = \ker(A_m + mI_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_{-m}$

$X \in \ker(A_m + mI_3) \Rightarrow (A_m + mI_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & m^2 & 0 \\ 0 & m-m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} m^2 y = 0 \\ (m-m^2)y = 0 \\ m^2 y + (m-1)z = 0 \end{cases}, \forall x$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \forall x$

Alors, $E_{-m} = \text{vect}(1, 0, 0) \Rightarrow \dim(E_{-m}) = 1$

* $E_{-m^2} = \ker(A_m + m^2 I_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_{-m^2}$

$X \in \ker(A_m + m^2 I_3) \Rightarrow (A_m + m^2 I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-m & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} (m^2-m)x + m^2 y = 0 \\ m^2 y + (m^2-1)z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (m-m^2)x = m^2 y \\ (1-m^2)z = m^2 y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2}{m-m^2} y = \dfrac{m}{1-m} y \\ z = \dfrac{m^2}{1-m^2} y \end{cases}, \forall y$

Alors : $E_{-m^2} = \text{vect}\left(\dfrac{m}{1-m}, 1, \dfrac{m^2}{1-m^2}\right) \Rightarrow \dim(E_{-m^2}) = 1$

* $E_{-1} = \ker(A_m + I_3)$

Scanné avec CamScanner

Soit $X = (x, y, z) \in E_{-1}$

$$X \in \ker(A_m + I_3) \Rightarrow (A_m + I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-m & m^2 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-m)x + m^2 y = 0 \\ (1-m^2)y = 0 \\ m^2 y = 0 \end{cases}, \forall z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \forall z$$

Alors : $E_{-1} = \text{vect}(0, 0, 1) \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1$

b) On note : $v_1 = (1, 0, 0)$; $v_2 = \left(\frac{m}{1-m}, 1, \frac{m^2}{1-m^2}\right)$; $v_3 = (0, 0, 1)$

On a :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = \frac{m}{1-m} e_1 + e_2 + \frac{m^2}{1-m^2} e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow P_m = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{1-m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{1-m^2} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

d'où :

$$\begin{cases} e_1 = v_1 \\ v_2 = \frac{m}{1-m} v_1 + e_2 + \frac{m^2}{1-m^2} v_3 \\ e_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = \frac{m}{m-1} v_1 + v_2 + \frac{m^2}{m^2-1} v_3 \\ e_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_m^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{m-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{m^2-1} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

et on a : $D_m = \begin{pmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A_m^n = (P_m D_m P_m^{-1})^n = P_m D_m^n P_m^{-1}$$

$$A_m^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{1-m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{1-m^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-m)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-m^2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{m-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{m^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_m^n = \begin{pmatrix} (-m)^n & \frac{m(-m^2)^n}{1-m} & 0 \\ 0 & (-m^2)^n & 0 \\ 0 & \frac{m^2(-m^2)^n}{1-m^2} & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{m-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{m^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$A_m^n = \begin{pmatrix} (-m)^n & \frac{(-1)^n m^{2n+1}}{1-m} & 0 \\ 0 & (-1)^n m^{2n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n m^{2n+2}}{1-m^2} & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{m-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{m^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_m^n = \begin{pmatrix} (-m)^n & \frac{(-1)^{n+1} m^{n+1}(m^n-1)}{m-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n m^{2n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{n+1} m^2 (m^{2n}-1)}{m^2-1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

d) Remarquons que :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & m^2 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $A_m^n = P_m D_m^n P_m^{-1}$

on pose : $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$; $Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m^2 \end{pmatrix}$

Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} : Z_n = A_m^n Z_0$

* pour $n=0$, on a :

$$A_m^0 . Z_0 = I_3 . Z_0 = Z_0$$

donc : pour $n=0$, l'égalité $Z_n = A_m^n Z_0$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$

* on suppose que : $Z_n = A_m^n . Z_0$ (H.R)
* montrons que : $Z_{n+1} = A_m^{n+1} . Z_0$

on a : $Z_{n+1} = A_m . Z_n$ (d'après (*))

d'où : $Z_{n+1} = A_m . A_m^n . Z_0$ (d'après H.R)

donc : $Z_{n+1} = A_m^{n+1} . Z_0$

Alors : D'après le principe de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : Z_n = A_m^n . Z_0$$

donc :

$$Z_n = \begin{pmatrix} (-m)^n & \frac{(-1)^{n+1} m^{n+1}(m^n-1)}{m-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n m^{2n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{n+1} m^2 (m^{2n}-1)}{m^2-1} & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n m^{n+1} \\ 0 \\ (-1)^n m^2 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} u_n = (-1)^n m^{n+1} \\ v_n = 0 \\ w_n = (-1)^n m^2 \end{cases}$$

6\ Notons : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$; $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$; $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$

a) on a : $X'(t) = M . X(t)$

Scanné avec CamScanner

avec : $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Soit : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

On a : $\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre

Soit $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0 \iff \alpha e_1 + \beta(e_1 + e_3) + \gamma(e_2 + e_3) = 0$

$\iff (\alpha + \beta) e_1 + \gamma e_2 + (\beta + \gamma) e_3 = 0$

$\iff \alpha + \beta = 0$ et $\gamma = 0$ et $\beta + \gamma = 0$

$\iff \alpha = 0$ et $\gamma = 0$ et $\beta = 0$

donc : $\alpha = \beta = \gamma = 0 \iff \mathcal{B}'$ est libre

Alors : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

c) * on a : M est la matrice de (S) dans la base canonique $\mathcal{B}$

Déterminons J la matrice de (S) dans la base $\mathcal{B}'$

on a :

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e'_1 \\ e_3 = -e'_1 + e'_2 \\ e_2 = e'_1 - e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

d'où,

$$P^{-1}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

Alors : $J = P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: J^n

on a : * $J^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & (-1)^0 \cdot 1 \\ 0 & 0 & (-1)^1 \end{pmatrix}$

* $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & (-1)^1 \cdot 2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$

* $J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & (-1)^2 \cdot 3 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$

Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1} \cdot n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

- pour $n = 1$,

Scanné avec CamScanner

l'égalité : $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$:

- supposons que : $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (H.R)
- montrons que :

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

on a :

$$J^{n+1} = J^n \cdot J = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(d'après H.R)}$$

donc :

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n + (-1)^n n \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^n(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Alors : d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

* Calculons $\exp(tJ)$:

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

donc :

$$t^n J^n = (tJ)^n = t^n \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-t)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-t)^n & -n(-t)^n \\ 0 & 0 & (-t)^n \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\exp(tJ) = \sum_{n \geq 0} \frac{(tJ)^n}{n!}$$

puisque * $\sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} = e^{-t}$

* $\sum_{n \geq 0} \frac{-n(-t)^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{-n(-t)^n}{n!} = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{(n-1)!}$

$$= -\sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{n!} = -\sum_{n \geq 0} (-t) \frac{(-t)^n}{n!}$$

$$= t \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} = te^{-t}$$

Alors :

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

d) * Calculons $\exp(tM)$:

on a : $M = PJP^{-1}$

donc : $tM = PtJP^{-1}$

d'où : $\exp(tM) = P\exp(tJ)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\exp(tM) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & (t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\exp(tM) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

* Résolvons le système différentiel (S) :

on a : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$; $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$; $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

on sait que :

$$X'(t) = M.X(t)$$

donc :

$$X(t) = \exp(tM).X(0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(t+3)e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -(t+2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = -(t+3)e^{-t} \\ x_2(t) = -e^{-t} \\ x_3(t) = -(t+2)e^{-t} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Année 2022-2023
LE-Maths
Algèbre 4

Série n° 3

Exercice 1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à au vecteur (x_1, x_2, x_3) associe le vecteur $(4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3)$

1- On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$.

2- Calculer les valeurs propres de f. Vérifier que f est diagonalisable.
L'endomorphisme f est-il bijectif ?

3- Calculer les vecteurs propres de f.

4 - Soit $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f. Écrire $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$

5 - On considère l'endomorphisme $g = f^3 - 9f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ou $f^3 \overset{not.}{=} f \circ f \circ f$.
Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$ et en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par $u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le système suivant : (S)

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = -u_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}$$

1 - Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2 - Calculer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable. Proposer une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de A.

3 - Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{C}$. Calculer P et P^{-1}, puis expliciter la matrice B définie par $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$.

4- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 - En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 3. Considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$

1. Vérifier que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Vérifier que l'on a $A = PJP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer par récurrence que $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ $(J \neq D + N)$.
4. En déduire la solution du système vérifiant $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de f.
2. Déterminer les sous-espaces propres.

f.
60

Scanné avec CamScanner

3. (a) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de f par rapport à cette base est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, avec $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = -e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_3$.

(c) Donner $P = Pass(B, B')$ puis calculer P^{-1}

(d) Calculer $M_{B'}(f)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tT}.

5. Donner les solutions des système différentiel :

$$Y' = T\,Y \text{ et } X' = A\,X.$$

Exercice 5. (12 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer les matrices P, P^{-1} et D tels que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \\ x'_2(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \\ x'_3(t) &= -4x_1(t) + 4x_2(t) + 3x_3(t). \end{cases}$$

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies sous forme récurrente par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = -2 \\ v_0 = 4 \\ w_0 = 1 \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 6. (8 pts)

Dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

1. Donner les valeurs propres de T et son polynôme caractéristique $P_T(X)$.
2. Pour quels valeurs de t, la matrice T est non inversible (justifier) ?
3. Déterminer les sous-espaces propres. La matrice T est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer la réduite J de Jordan semblable à T.
   Quel est le polynôme minimal de T ?
5. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

Ex1 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3) = (4x_3 ; x_1 + 2x_2 + x_3 ; 2x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

1\ $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$; $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$: Base canonique de $\mathbb{R}^3$

on a :

* $f(e_1) = f(1,0,0) = (0,1,2)$ ✓
* $f(e_2) = f(0,1,0) = (0,2,4)$ ✓
* $f(e_3) = f(0,0,1) = (4,1,-2)$ ✓

donc :
$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 + 2e_3 \\ f(e_2) = 2e_2 + 4e_3 \\ f(e_3) = 4e_1 + e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

Alors :
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$ ✓

2\ on a : $P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_3)$

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 4 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & 4 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$P_f(X) = -X\left[(2-X)(-2-X) - 4\right] + 4\left[4 - 2(2-X)\right]$$

$$P_f(X) = -X\left(-(4-X^2) - 4\right) + 4(\cancel{4} - \cancel{4} + 2X)$$

$$P_f(X) = -X(X^2 - 4 - 4) + 8X$$

$$P_f(X) = X(-X^2 + 8 + 8)$$

$$P_f(X) = -X(X^2 - 16)$$

donc : $P_f(X) = -X(X-4)(X+4)$ ✓

Scanné avec CamScanner

Alors, $Sp(f) = \{-4, 0, 4\}$ avec $mult(-4) = mult(0) = mult(4) = 1$ ②

puisque : f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable

Vérifions donc que : A est diagonalisable,

Scanné avec CamScanner

on a : $P_A(X) = -X(X-4)(X+4) \Rightarrow P_A(X)$ est scindé

Or : Toutes les racines de $P_A(X)$ sont simples ($mult(-4) = mult(4) = mult(0) = 1$) et distincts deux à deux

donc : A est diagonalisable

Alors f est diagonalisable

* De plus : $0 \in Sp(A)$

donc : A n'est pas inversible

alors : f n'est pas bijective

3) Sous-espaces propres

* $E_{-4} = Ker(A + 4I_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_{-4}$

$$X \in Ker(A + 4I_3) \Rightarrow (A + 4I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ x + 6y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ 6y = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} ; \forall x$$

Alors $E_{-4} = vect(1, 0, -1)$

* $E_0 = Ker(A)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_0$

$$X \in Ker(A) \Rightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}, \forall y$$

Alors, $E_0 = vect(-2, 1, 0)$

- $E_4 = Ker(A - 4I_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_4$

$$X \in Ker(A - 4I_3) \Rightarrow (A - 4I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ 2x - 2y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}, \forall x$$

Alors: $E_4 = vect(1, 1, 1)$

4) $D = \mathcal{M}(f, C)$; $C = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a: $\begin{cases} f(v_1) = 4v_1 \\ f(v_2) = -4v_2 \\ f(v_3) = 0v_3 \end{cases}$

Alors:

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

5) Vérifier la réponse

5\ * $\mathcal{M}(g,C)$

on a : $g = f^3 - 9f + id_{\mathbb{R}^3}$

Forme matricielle : $\mathcal{M}(g,C) = [\mathcal{M}(f,C)]^3 - 9\mathcal{M}(f,C) + I_3$

c-à-d : $\mathcal{M}(g,C) = D^3 - 9D + I_3$

$$= \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, $\mathcal{M}(g,C) = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

* $\mathcal{M}(g,\mathcal{B})$:

on a : f est diagonalisable

donc : $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = P.\mathcal{M}(f,C).P^{-1}$

c-à-d : $A = P.D.P^{-1}$

avec : P : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à C : $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 - e_3 \\ v_3 = -2e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_1 + v_3 + e_1 - v_2 \\ e_3 = e_1 - v_2 \\ e_2 = 2e_1 + v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 + v_3 + 4e_1 \\ e_3 = e_1 - v_2 \\ e_2 = 2e_1 + v_3 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3 \\ e_2 = 2\left(\frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3\right) + v_3 \\ e_3 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3 - v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3 \\ e_2 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \\ e_3 = \frac{1}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3 \end{cases}$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

donc : $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = [\mathcal{M}(f, \mathcal{B})]^3 - 9\,\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) + I_3$

c-à-d : $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = A^3 - 9A + I_3$

$$= (P.D.P^{-1})^3 - 9\,P.D.P^{-1} + I_3$$

$$= P.D^3.P^{-1} - 9\,P.D.P^{-1} + P.P^{-1}$$

$$= P.(D^3 - 9D + I_3).P^{-1}$$

$$= P.\mathcal{M}(g, C).P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -27 & -2 \\ 29 & 0 & 1 \\ 29 & 27 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Alors : $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 \\ 7 & 15 & 7 \\ 14 & 28 & -13 \end{pmatrix}$

Ex 2 :

1\ on a : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ d'où $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$

donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Alors : $X_{n+1} = A X_n$ avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

2.\ Polynôme caractéristique :

On a : $P_A(X) = \det(A - XI_3)$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ -1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (2-X)(X^2-1) - 3(\cancel{X+1}) - 3(\cancel{-1-X})$$

$$P_A(X) = (2-X)(X-1)(X+1)$$

Alors : $P_A(X) = -(X-2)(X-1)(X+1)$

d'où : $Sp(A) = \{-1, 1, 2\}$ avec $mult(-1) = mult(1) = mult(2) = 1$

Scanné avec CamScanner

- puisque $P_A(X)$ est scindé, et toutes ses racines sont simples ($mult(-1) = mult(1) = mult(2) = 1$) et distincts deux à deux

Alors : A est diagonalisable

- Sous-espaces propres

- $E_2 = Ker(A - 2I_3)$

$B = \{$

Soit $X = (x, y, z) \in E_2$

$X \in \ker(A - 2I_3) \Rightarrow (A - 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y \\ -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases}, \forall x$$

donc: $E_2 = \text{vect}(1, -1, -1) = v_1$

- $E_1 = \ker(A - I_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_1$

$X \in \ker(A - I_3) \Rightarrow (A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3y + 3z \\ 2y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\cancel{3y} + \cancel{3y} \\ z = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}, \forall y$$

donc: $E_1 = \text{vect}(0, 1, 1) = v_2$

- $E_{-1} = \ker(A + I_3)$

Soit $X = (x, y, z) \in E_{-1}$

$X \in \ker(A + I_3) \Rightarrow (A + I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 0 \\ x = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}, \forall x$$

Scanné avec CamScanner

donc : $E_{-1} = \text{vect}(1,0,1) = v_3$

Alors $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres de A, avec : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3\ voir page suivante

4\ voir page suivante

5\ Soit $n \in \mathbb{N}$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$; $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a : $X_{n+1} = A X_n$

d'où : $X_n = A^n X_0$

$$X_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & -(2^n + (-1)^{n-1}) \\ 1 - 2^n & 2(1 - 2^{n-1}) & -(1 - 2^n) \\ 1 - 2^n & 2(1 - 2^{n-1}) + (-1)^{n-1} & -(1 - 2^n) + (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 2(3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n+1}) \\ 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \\ 2(2 - 3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} u_n = 2(3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n+1}) \\ v_n = 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \\ w_n = 2(2 - 3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n+1} \end{cases}$$

3\ On a :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

: la matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ (base canonique de $\mathbb{R}^3$) à $C = (v_1, v_2, v_3)$

Scanné avec CamScanner

$$-2-e_3$$
$$-2+e_3$$
$$v_3=e_1+e_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1=e_1-e_2-e_3 \\ e_2=v_2-e_3 \\ e_3=v_3-e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=\cancel{e_1}-v_2+\cancel{v_3}-\cancel{e_1}-\cancel{v_3}+e_1 \\ e_2=v_2-v_3+e_1 \\ e_3=v_3-e_1 \end{cases}$$

8

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1=v_1+v_2 \\ e_2=v_1+2v_2-v_3 \\ e_3=-v_1-v_2+v_3 \end{cases}$$

d'où,

$$P^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

donc: $B=P^{-1}.A.P$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors: $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4\ Soit $n\in\mathbb{N}$, on a: $A=P.B.P^{-1}$

d'où: $A^n=(P.B.P^{-1})^n=P.B^n.P^{-1}$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & (-1)^n \\ -2^n & 1 & 0 \\ -2^n & 1 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors: $$\boxed{A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 2^n+(-1)^{n+1} & -(2^n+(-1)^{n-1}) \\ 1-2^n & 2(1-2^{n-1}) & -(1-2^n) \\ 1-2^n & 2(1-2^{n-1})+(-1)^{n+1} & -(1-2^n)+(-1)^n \end{pmatrix}}$$

Scanné avec CamScanner

Ex3 :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases} \Rightarrow \text{Forme matricielle : } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1\ on a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ✓

<u>Polynôme caractéristique :</u>

Scanné avec CamScanner

$$P_A(X) = \det(A - XI_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(3-X-3X+X^2+1) - 0 + 0$$

$$= (1-X)(X^2-4X+4)$$

$$= (1-X)(X-2)^2$$

donc: $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2 \Rightarrow Sp(A) = \{1, 2\}$; $mult(1) = 1$ et $mult(2) =$

<u>Sous-espaces propres:</u>

* $E_1 = \ker(A - I_3)$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1$, on a:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) \Rightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases}, \forall a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}, \forall a$$

donc: $E_1 = vect(1, 0, 0) \Rightarrow \dim(E_1) = 1 = mult(1)$

* $E_2 = \ker(A - 2I_3)$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2$, on a:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3) \Rightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+3b=0 \\ c=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3b \\ c=b \end{cases}, \forall b$$

donc : $E_2 = \text{vect}(3,1,1)$ $\Rightarrow \dim(E_2) = 1 \neq \text{mult}(2)$

Alors, A n'est pas diagonalisable.

Scanné avec CamScanner

2\ on a : A est trigonalisable ($P_A(X)$ scindé)

* $E_1 = \text{vect}(1,0,0) = v_1$
* $E_2 = \text{vect}(3,1,1) = v_2$

on complet en une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$

on prend : $v_3 = e_3 = (0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

on a : $\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = 3e_1 + e_2 + e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = -3v_1 + v_2 - v_3 \\ e_3 = v_3 \end{cases}$

donc :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

$\mathcal{B} =$

bo

Calculons : $J = P^{-1} . A . P$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3\ Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

* pour $n = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^1) \\ 0 & 2^1 & 2^{1-1} . 1 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = J^1$$

donc : pour $n = 1$, l'égalité : $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$

* on suppose que $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ (HR)

* montrons que : $J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^{n+1}) \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n (n+1) \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

on a : $J^{n+1} = J^n . J^1 = J^n . J$

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ (d'après HR)}$$

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 - 4(-1+2^n) \\ 0 & 2 . 2^n & 2^n + 2 . 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2 . 2^n \end{pmatrix}$$

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+4-2^{n+2} \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + 2^n n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - 2^{n+1} . 2 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n (n+1) \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc : $J^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^{n+1}) \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n (n+1) \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

Alors : d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* . \ J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4\ Notons : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$; $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$; $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a : $X'(t) = A X(t)$

d'où : $X(t) = \exp(tA) X(0)$

Déterminons $\exp(tA)$

on a : $A = P J P^{-1}$

$\Rightarrow$ $tA = P \, tJ . P^{-1}$

d'où, $\exp(tA) = P.\exp(tJ).P^{-1}$

avec : $\exp(tJ) = \sum_{n\geq 0} \frac{(tJ)^n}{n!}$

or : $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-1+2^n) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow (tJ)^n = \begin{pmatrix} t^n & 0 & -2(-1+2^n)t^n \\ 0 & (2t)^n & (2t)^n \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & (2t)^n \end{pmatrix}$

puisque :

- $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t$
- $\sum_{n\geq 0} \frac{(2t)^n}{n!} = e^{2t}$
- $\sum_{n\geq 0} \frac{-2(-1+2^n)t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{2t^n - 2^{n+1}t^n}{n!}$
$= \sum_{n\geq 0} \frac{2t^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{2(2t)^n}{n!}$
$= 2e^t - 2e^{2t}$
- $\sum_{n\geq 0} \frac{(2t)^n}{n!} \frac{n}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(2t)^n}{n!} \frac{n}{2}$
$= \sum_{n\geq 1} \frac{(2t)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(2t)^{n+1}}{n!}$
$= t \sum_{n\geq 0} \frac{(2t)^n}{n!}$
$= te^{2t}$

donc : $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

d'où :

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{2t} & 2e^t + (3t-2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & (5e^t - 3te^t - 5)e^t & -(2e^t - 3te^t - 2)e^t \\ 0 & -(t-1)e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & (5e^t - 3te^t - 5)e^t & -(2e^t - 3te^t - 2)e^t \\ 0 & -(t-1)e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} (10e^t - 6te^t - 9)e^t \\ -2(t-1)e^{2t} \\ -2te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = (10e^t - 6te^t - 9)e^t \\ y(t) = -2(t-1)e^{2t} \\ z(t) = -2te^{2t} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Ex 4 :

1\ on a :

$$P_f(X) = P_A(X) = \det(A - X I_3)$$

Scanné avec CamScanner

$$f(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P_f(X) = (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -X \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P_f(X) = (1-X)(X^2-2X) + 2-X-1$$

$$P_f(X) = X^2 - 2X - X^3 + 2X^2 + 1 - X$$

$$P_f(X) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$$

Alors: $P_f(X) = -(X-1)^3 \Rightarrow Sp(f) = \{1\}$ avec $mult(1) = 3$

2\ $E_1 = Ker(A - I_3)$:

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1$, on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Ker(A - I_3) \Rightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a - b - c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = a \end{cases}, \forall a$$

Alors: $E_1 = vect(1,0,1) = u$

3\ a - on a:

$$\begin{cases} P_f(X) = -(X-1)^3 \Rightarrow P_{f_{min}}(X) = (X-1)^3 \\ Sp(f) = \{1\} \; ; \; mult(1) = 3 \\ E_1 = vect(1,0,1) = u \Rightarrow \text{Il existe un seul bloc associé à 1 de taille 3} \end{cases}$$

or :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(réduction de Jordan de } f\text{)}$$

Notons $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ dont $\mathcal{M}(f, \mathcal{C}) = T$

Scanné avec CamScanner

Déterminons v_1, v_2 et v_3 :

Sous-espaces caractéristiques :

* $F_2(1) = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$

on a : $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F_2(1)$, on a :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 \Rightarrow (A - I_3)^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = a - b, \ \forall a, b$$

donc : $F_2(1) = \operatorname{vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$

* $F_3(1) = \operatorname{Ker}(A - I_3)^3$

on a : $(A - I_3)^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

donc : $F_3(1) = \operatorname{vect}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \mathbb{R}^3$

- on pose : $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$; $v_3 \in F_3(1)$ et $v_3 \notin F_2(1)$

Calculons v_2 :

Soit $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a :

$$v_2 = (A - I_3)v_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

donc : $v_2 = (0, -1, 1)$

Calculons v_1 :

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a :

$$v_1 = (A - I_3)v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

donc : $v_1 = (1,0,1) = u$

Alors, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3\b- on a :
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3 = (1,0,1) = v_1 \\ e'_2 = -e_2 + e_3 = (0,-1,1) = v_2 \\ e'_3 = e_3 = (0,0,1) = v_3 \end{cases}$$

donc : $(e'_1, e'_2, e'_3) = (v_1, v_2, v_3)$ c-à-d $\mathcal{B}' = \mathcal{C}$

alors, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3\c- on a :
$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3 \\ e'_2 = -e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e'_1 - e'_3 \\ e_2 = -e'_2 + e'_3 \\ e_3 = e'_3 \end{cases}$$

donc :
$$P^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

3\d- puisque : $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{C})$

et, $\mathcal{C} = \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

donc : $T = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$

alors, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

4\ Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$T = U + N \Rightarrow tT = tU + tN$$

avec : • $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale $\Rightarrow tU = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \Rightarrow (tU)^n = \begin{pmatrix} t^n & 0 & 0 \\ 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$

• $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente ($N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$) $\Rightarrow tN = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc : $\exp(tT) = \exp(tU) \cdot \exp(tN)$

où : • $\exp(tU) = \sum_{n \geq 0} \frac{(tU)^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$

• $\exp(tN) = \sum_{n \geq 0} \frac{(tN)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2} \frac{(tN)^n}{n!}$

$$= \frac{(tN)^0}{0!} + \frac{(tN)^1}{1!} + \frac{(tN)^2}{2!}$$

$$= I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\exp(tT) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tT) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & t^2e^t/2 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

5\ • $Y' = TY$:

mettons : $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$; $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$; $Y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$

on a : $Y'(t) = T\,Y(t)$

d'où : $Y(t) = \exp(tT)\,Y(0)$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \left(y_1(0) + y_2(0)t + \frac{y_3(0)}{2}t^2\right)e^t \\ (y_2(0) + y_3(0)t)e^t \\ y_3(0)e^t \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} y_1(t) = \left(y_1(0) + y_2(0)t + \frac{y_3(0)}{2}t^2\right)e^t \\ y_2(t) = (y_2(0) + y_3(0)t)e^t \\ y_3(t) = y_3(0)\,e^t \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

• $X' = AX$:

notons : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}$; $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x'_3(0) \end{pmatrix}$

on a : $X'(t) = AX(t)$

d'où : $X(t) = \exp(tA)\, X(0)$

or : $A = P\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)\, P^{-1} = P\, T\, P^{-1}$

$\Rightarrow$ $\exp(tA) = P \exp(tT)\, P^{-1}$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & -e^t & -te^t \\ e^t & (t+1)e^t & \frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(t^2-2)e^t & \frac{t}{2}(t-2)e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ te^t & -(t-1)e^t & -te^t \\ -\frac{t}{2}(t+2)e^t & \frac{t^2}{2}e^t & \frac{1}{2}(t^2+2t-2)e^t \end{pmatrix}$$

Alors :

$$X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(t^2-2)e^t & \frac{t}{2}(t-2)e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ te^t & -(t-1)e^t & -te^t \\ -\frac{t}{2}(t+2)e^t & \frac{t^2}{2}e^t & \frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}(x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t^2 - x_2(0)t + x_1(0)\right)e^t \\ \left((x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t + x_2(0)\right)e^t \\ \left(-\frac{1}{2}(x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t^2 - (x_1(0)-x_3(0))t + x_3(0)\right)e^t \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = \left[-\frac{1}{2}(x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t^2 - x_2(0)t + x_1(0)\right]e^t \\ x_2(t) = \left[(x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t + x_2(0)\right]e^t \\ x_3(t) = \left[-\frac{1}{2}(x_1(0)-x_2(0)-x_3(0))t^2 - (x_1(0)-x_3(0))t + x_3(0)\right]e^t \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner