Langage de base de la théorie des ensembles

École Normale Supérieure de Tétouan

November 24, 2024

Plan

Définition d'un ensemble

Définition d'un ensemble

Définition

Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets, appelés **éléments** de l'ensemble. On note généralement un ensemble avec des accolades, par exemple $A = \{1, 2, 3\}$ représente un ensemble contenant les éléments 1, 2, et 3.

Définition d'un ensemble

Définition

Un **ensemble** est une collection bien définie d'objets, appelés **éléments** de l'ensemble. On note généralement un ensemble avec des accolades, par exemple $A = \{1, 2, 3\}$ représente un ensemble contenant les éléments 1, 2, et 3.

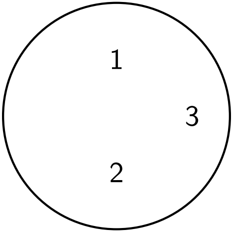


Figure: Ensemble $A = \{1, 2, 3\}$

Ensemble défini en extension -Ensemble défini en compréhension

- **Ensemble défini par extension** est un ensemble qui est défini par une liste des éléments entre accolades.

Ensemble défini en extension -Ensemble défini en compréhension

- **Ensemble défini par extension** est un ensemble qui est défini par une liste des éléments entre accolades.

- **Ensemble défini par compréhension** est un ensemble qui est défini par un prédicat admissible $P(x)$. Il existe alors un ensemble

$$E = \{x : P(x)\},$$

qui est l'ensemble de tous les éléments qui vérifient P.

Ensemble défini en extension -Ensemble défini en compréhension

- **Ensemble défini par extension** est un ensemble qui est défini par une liste des éléments entre accolades.

- **Ensemble défini par compréhension** est un ensemble qui est défini par un prédicat admissible $P(x)$. Il existe alors un ensemble

$$E = \{x : P(x)\},$$

qui est l'ensemble de tous les éléments qui vérifient P.

Exemple

Soit $E = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$

Ensemble défini en extension -Ensemble défini en compréhension

- **Ensemble défini par extension** est un ensemble qui est défini par une liste des éléments entre accolades.

- **Ensemble défini par compréhension** est un ensemble qui est défini par un prédicat admissible $P(x)$. Il existe alors un ensemble

$$E = \{x : P(x)\},$$

qui est l'ensemble de tous les éléments qui vérifient P.

Exemple

Soit $E = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Exemples d'ensembles

Exemples

- **L'ensemble des entiers naturels** :
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Exemples d'ensembles

Exemples

- **L'ensemble des entiers naturels** :
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **L'ensemble des entiers relatifs** :
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Exemples d'ensembles

Exemples

- **L'ensemble des entiers naturels** :
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **L'ensemble des entiers relatifs** :
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **L'ensemble des nombres rationnels** :
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Exemples d'ensembles

Exemples

- **L'ensemble des entiers naturels** :
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **L'ensemble des entiers relatifs** :
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **L'ensemble des nombres rationnels** :
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
- **L'ensemble des nombres réels** :
  $\mathbb{R} =$ ensemble des points sur la droite réelle

Exemples d'ensembles

Exemples

- **L'ensemble des entiers naturels** :
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **L'ensemble des entiers relatifs** :
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **L'ensemble des nombres rationnels** :
  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$
- **L'ensemble des nombres réels** :
  $\mathbb{R} =$ ensemble des points sur la droite réelle
- **L'ensemble des nombres complexes** :
  $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Ensembles finis et infinis

Définition

Un ensemble est dit **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Le **cardinal** d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qu'il contient, noté $card(E)$ pour un ensemble E.

Ensembles finis et infinis

Définition

Un ensemble est dit **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Le **cardinal** d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qu'il contient, noté $card(E)$ pour un ensemble E.

Exemples

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble fini ayant pour cardinal $card(A) = 5$.

Ensembles finis et infinis

Définition

Un ensemble est dit **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Le **cardinal** d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qu'il contient, noté $card(E)$ pour un ensemble E.

Exemples

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble fini ayant pour cardinal $card(A) = 5$.
- $B = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini avec $card(B) = 3$.

Définition d'un ensemble infini

Définition

Un ensemble est dit **infini** s'il possède un nombre infini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est impossible de lui attribuer un cardinal fini.

Définition d'un ensemble infini

Définition

Un ensemble est dit **infini** s'il possède un nombre infini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est impossible de lui attribuer un cardinal fini.

Remarques

- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.
- Un **ensemble singleton** est un ensemble qui contient exactement un seul élément. Si a est cet élément, alors l'ensemble singleton contenant a est noté $\{a\}$.

Inclusion et Égalité entre deux Ensembles

Définition

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$, si

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Inclusion et Égalité entre deux Ensembles

Définition

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$, si

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

La négation est notée $A \not\subset B$, et on a

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A : x \notin B.$$

Exemple d'inclusion

Exemple

Soient les ensembles suivants :

$$E = \{0, 1, 2\}, \quad F = \{1, 2, 3\}, \quad G = \{0, 1, 2, 4\}.$$

Dans ce cas, $E \subset G$ mais $E \not\subset F$.

Exemple d'inclusion

Exemple

Soient les ensembles suivants :

$$E = \{0, 1, 2\}, \quad F = \{1, 2, 3\}, \quad G = \{0, 1, 2, 4\}.$$

Dans ce cas, $E \subset G$ mais $E \not\subset F$.

Propositions

- L'ensemble vide est par convention inclus dans tout ensemble.
- Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Égalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles E et F sont égaux, noté $E = F$, si et seulement si

$$(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Égalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles E et F sont égaux, noté $E = F$, si et seulement si

$$(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Exemple

Soient $A = \{k \in \mathbb{Z} : \ |2k+1| \leq 3\}$ et $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, on a $A = B$.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$, cela signifie $A \subset E$.

Exemple d'ensemble des parties

Exemple

- Soit $E = \{a, b, c\}$, on veut déterminer les sous-ensembles de E.

Exemple d'ensemble des parties

Exemple

- Soit $E = \{a, b, c\}$, on veut déterminer les sous-ensembles de E.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Ainsi, on a $card(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^{card(E)}$.

Exemple d'ensemble des parties

Exemple

- Soit $E = \{a, b, c\}$, on veut déterminer les sous-ensembles de E.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Ainsi, on a $card(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^{card(E)}$.

- Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est donné par

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\ \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}$$

Cardinal de l'ensemble des parties

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E, et le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est 2^n.

Preuve

Soit E un ensemble de cardinal $n = card(E)$. Nous allons montrer par récurrence que le cardinal de l'ensemble des parties de E est 2^n.

- **Initialisation** : si $n = 1$, alors $E = \{a\}$ est un singleton. Les deux sous-ensembles de E sont $\emptyset$ et E, donc il y a bien $2^1 = 2$ sous-ensembles.

Cardinal de l'ensemble des parties

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E, et le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est 2^n.

Preuve

Soit E un ensemble de cardinal $n = card(E)$. Nous allons montrer par récurrence que le cardinal de l'ensemble des parties de E est 2^n.

- **Initialisation** : si $n = 1$, alors $E = \{a\}$ est un singleton. Les deux sous-ensembles de E sont $\emptyset$ et E, donc il y a bien $2^1 = 2$ sous-ensembles.
- **Hérédité** : supposons que la proposition est vraie pour un entier fixé $n \geq 1$, c'est-à-dire que pour tout ensemble F de n éléments, F admet 2^n sous-ensembles. Montrons que la proposition est vraie pour $n + 1$ éléments.

Suite de la preuve

Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Fixons un élément $a \in E$. Alors, les sous-ensembles de E se répartissent en deux catégories :

- Les sous-ensembles A qui **ne contiennent pas** a. Ce sont les sous-ensembles de $E \setminus \{a\}$. Par hypothèse de récurrence, il y a 2^n sous-ensembles de ce type.

Suite de la preuve

Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Fixons un élément $a \in E$. Alors, les sous-ensembles de E se répartissent en deux catégories :

- Les sous-ensembles A qui **ne contiennent pas** a. Ce sont les sous-ensembles de $E \setminus \{a\}$. Par hypothèse de récurrence, il y a 2^n sous-ensembles de ce type.
- Les sous-ensembles A qui **contiennent** a. Ces sous-ensembles sont de la forme $A = \{a\} \cup A'$, où $A' \subseteq E \setminus \{a\}$. Par hypothèse de récurrence, il y a aussi 2^n sous-ensembles A', et donc 2^n sous-ensembles A contenant a.

D'où, le nombre de sous-ensembles de E est $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Union de deux ensembles

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. L'**union** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Autrement dit,

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Union de deux ensembles

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. L'**union** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Autrement dit,

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

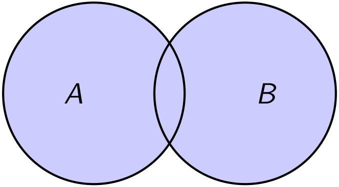


Figure: $A \cup B$

Propriétés de l'union

Propriétés

- $A \cup (A \cup B) = A \cup B$

Propriétés de l'union

Propriétés

- $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
- $B \cup (A \cup B) = A \cup B$

Propriétés de l'union

Propriétés

- $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
- $B \cup (A \cup B) = A \cup B$
- **Commutativité** :

$$A \cup B = B \cup A$$

Propriétés de l'union

Propriétés

- $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
- $B \cup (A \cup B) = A \cup B$
- **Commutativité** :
$$A \cup B = B \cup A$$

Applications

- Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.

Propriétés de l'union

Propriétés

- $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
- $B \cup (A \cup B) = A \cup B$
- **Commutativité** :
$$A \cup B = B \cup A$$

Applications

- Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.
- Vérifier que $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$ et $A \cup E = E$.

Intersection de deux ensembles

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Autrement dit,

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Intersection de deux ensembles

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Autrement dit,

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

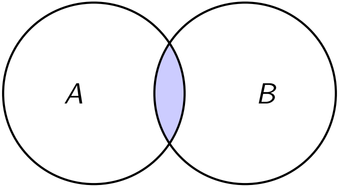


Figure: $A \cap B$

Propriétés de l'intersection

Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Propriétés de l'intersection

Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Propriétés de l'intersection

Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$ et $A \cap E = A$.

Propriétés de l'intersection

Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$ et $A \cap E = A$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Propriétés de l'intersection

Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$ et $A \cap E = A$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Différence entre deux ensembles

Définition

La **différence** entre deux ensembles A et B d'un ensemble E, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. Alors

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Différence entre deux ensembles

Définition

La **différence** entre deux ensembles A et B d'un ensemble E, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B. Alors

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

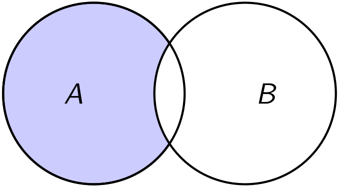


Figure: $A \setminus B$

Différence symétrique

Définition

La différence symétrique de deux ensembles A et B, notée $A\Delta B$, est définie par :

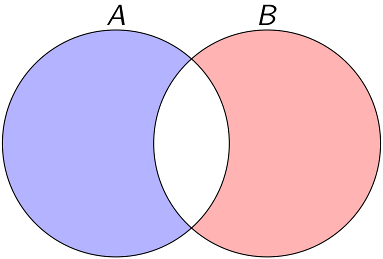
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Différence symétrique

Définition

La différence symétrique de deux ensembles A et B, notée $A\Delta B$, est définie par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



Différence symétrique $A\Delta B$

Complémentaire d'un ensemble

Définition

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le **complémentaire** de A dans E, noté $C_E(A)$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Complémentaire d'un ensemble

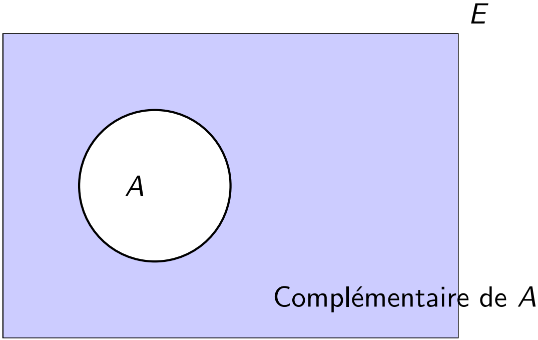
Définition

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le **complémentaire** de A dans E, noté $C_E(A)$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Illustration du complémentaire

En d'autres termes, $C_E(A)$ représente tous les éléments qui appartiennent à E mais pas à A.



Propriétés du complémentaire

Propriétés

1. **Complémentaire du complémentaire :**

$$C_E(C_E(A)) = A.$$

Propriétés du complémentaire

Propriétés

1. **Complémentaire du complémentaire :**

$$C_E(C_E(A)) = A.$$

2. **Complémentaire de l'union :**

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B).$$

Propriétés du complémentaire

Propriétés

1. **Complémentaire du complémentaire :**

$$C_E(C_E(A)) = A.$$

2. **Complémentaire de l'union :**

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B).$$

3. **Complémentaire de l'intersection :**

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Propriétés du complémentaire

Propriétés

4. **Complémentaire de l'ensemble vide :**

$$C_E(\emptyset) = E.$$

Propriétés du complémentaire

Propriétés

4. **Complémentaire de l'ensemble vide :**

$$C_E(\emptyset) = E.$$

5. **Complémentaire de l'ensemble universel :**

$$C_E(E) = \emptyset.$$

6. $A \subset B \Rightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$.

Propriétés du complémentaire

Propriétés

4. **Complémentaire de l'ensemble vide :**

$$C_E(\emptyset) = E.$$

5. **Complémentaire de l'ensemble universel :**

$$C_E(E) = \emptyset.$$

6. $A \subset B \Rightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$.
7. $A \setminus B = A \cap C_E(B)$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$$

Exemples

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x, y \in \mathbb{R}$.

Autrement dit :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemples

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x, y \in \mathbb{R}$.

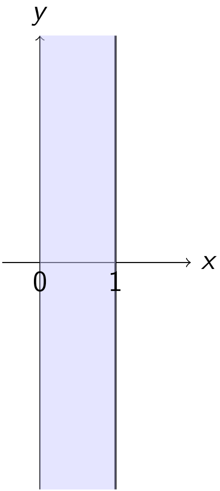
Autrement dit :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- L'ensemble $[0, 1] \times \mathbb{R}$ représente tous les couples (x, y) où $x \in [0, 1]$ et $y \in \mathbb{R}$. En d'autres termes :

$$[0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}.$$

Illustration de $[0, 1] \times \mathbb{R}$



Recouvrement d'un ensemble

Définition

Soit I un ensemble d'indices et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit que cette famille est un **recouvrement** de E si :

$$E \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Recouvrement d'un ensemble

Exemple 1

Considérons l'ensemble $E = [0, 1]$, le segment des réels entre 0 et 1. Un possible recouvrement de E est la famille d'intervalles ouverts :

$$\mathcal{C} = \{A_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

où chaque A_n est un intervalle ouvert plus large que $[0, 1]$.

- Pour $n = 1$, $A_1 = (-1, 2)$,
- Pour $n = 2$, $A_2 = (-0.5, 1.5)$,
- Pour $n = 3$, $A_3 = (-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3})$, etc.

Recouvrement d'un ensemble

Exemple 1

Considérons l'ensemble $E = [0, 1]$, le segment des réels entre 0 et 1. Un possible recouvrement de E est la famille d'intervalles ouverts :

$$\mathcal{C} = \{A_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

où chaque A_n est un intervalle ouvert plus large que $[0, 1]$.

- Pour $n = 1$, $A_1 = (-1, 2)$,
- Pour $n = 2$, $A_2 = (-0.5, 1.5)$,
- Pour $n = 3$, $A_3 = (-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3})$, etc.

L'union de ces ensembles couvre $E = [0, 1]$, car :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \supseteq [0, 1].$$

Recouvrement d'un ensemble

Exemple 2: Recouvrement discret

Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c\}$, constitué de trois éléments.
Un recouvrement possible est la famille :

$$\mathcal{C} = \{A_1, A_2\},$$

où :

$$A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{b, c\}.$$

Recouvrement d'un ensemble

Exemple 2: Recouvrement discret

Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c\}$, constitué de trois éléments.
Un recouvrement possible est la famille :

$$\mathcal{C} = \{A_1, A_2\},$$

où :

$$A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{b, c\}.$$

L'union de ces deux ensembles donne :

$$A_1 \cup A_2 = \{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} = E.$$

Partition d'un ensemble

Définition

Soit I un ensemble d'indices et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On dit que cette famille est une **partition** de E si :

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad (i \neq j) \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

Partition d'un ensemble

Définition

Soit I un ensemble d'indices et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On dit que cette famille est une **partition** de E si :

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad (i \neq j) \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Exemple

La famille $([0,5]$ et $]5,8])$ est une partition de $[0,8]$ car :

$$[0,5]\cap]5,8] = \emptyset \quad \text{et} \quad [0,5]\cup]5,8] = [0,8].$$