TD:1 LE-Math **Semestre 4**
Analyse numérique 1 2023–2024

Exercice 1. A l'aide d'une méthode numérique, nous avons obtenu le tableau suivant :

n	Erreur	Ordre de CV
8	5.21×10^{-5}	–
16	2.85×10^{-6}	?
32	1.64×10^{-7}	?
64	9.79×10^{-9}	?
128	5.97×10^{-10}	?

avec Ordre de CV= $\left|\dfrac{\log\left(\frac{Err_n}{Err_{2n}}\right)}{\log(2)}\right|$ vitesse.

Calculer l'ordre de convergence numérique de cette méthode.

Exercice 2. Soit $f(x)$ une fonction qui vérifie $f(2) = 2.9093$, $f'(2) = 0.583853$, $f''(2) = -0.909297$ et $|f^{(3)}(2)| \leq 0.416147$ pour $|x-2| < 0.1$.

1. A l'aide de ces informations (DL), estimer $f(2.1)$.
2. On suppose que $f_{exact} = 2.96321$. Donnez l'erreur théorique et numérique associée à l'approximation de $f(2.1)$. Conclure.

Exercice 3.

1. Trouver $P(x) \in vect\{x+1, x^2, x^3-1\}$ qui interpole les points $(-1,3)$, $(0,1)$ et $(1,3)$.
2. $P(x) \in vect\{1, \sin(x), \cos(x)\}$ qui interpole les points $(-\pi,\pi)$, $(0,0)$ et (π,π).
3. $P(x) \in vect\{x, \sin(x), \cos(x)\}$ qui interpole les points $(-\pi,-\pi)$, $(0,0)$ et (π,π).
4. Posons $\mathscr{A} = \{(x_0,y_0) = (-1,2), (x_1,y_1) = (0,-1), (x_2,y_2) = (2,23)\}$
   (a) Construire le polynôme d'interpolation qui interpole les points de l'ensemble $\mathscr{A}$ (Cramer).
   (b) Construire le polynôme d'interpolation de **Lagrange** qui interpole les points de l'ensemble $\mathscr{A}$.
   (c) Construire le polynôme d'interpolation de **Newton** qui interpole les points de l'ensemble $\mathscr{A}$.
   (d) Construire le polynôme d'interpolation d'**Aitken** qui interpole les points de l'ensemble $\mathscr{A}$.
   (e) Construire le polynôme d'interpolation de **Neville** qui interpole les points de l'ensemble $\mathscr{A}$.

Exercice 4.

1. Montrer que $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$
2. Montrer par récurrence que $\pi'(x_i) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$ avec $\pi(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$
3. Déduire que le polynôme élémentaire de Lagrange $L_{i,n}$ peut aussi s'écrire $L_{i,n}(x) = \dfrac{\pi(x)}{(x-x_i)\pi'(x_i)}$
4. Déduire que $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\pi'(x_i)}$
5. Grâce à la question 4. retrouver les expressions de $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$ et $f[x_0, x_1, x_2]$.

Exercice 5.

Soit $I = [a,b]$ et $f \in \mathscr{C}^n([a,b])$. Posons $x_i = a + i\,h,\ i = 0, \ldots, n$ et $h = \frac{b-a}{n}$

1. Montrer que

$$\forall\, x \in]a,b[\quad \text{on a} \quad \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right| \leq n!\, \frac{h^{n+1}}{4} \tag{1}$$

2. Soit L_n l'interpolant de Lagrange de f aux points x_i. Monter que

$$\max_{x\in I}\left|f(x)-L_n(x)\right| \leq \frac{\max_{x\in I}|f(\xi_x)^{(n+1)}|}{4(n+1)}h^{n+1} \tag{2}$$

3. Si $f(x)=x^n$, calculer l'erreur de l'interpolant de Lagrange. Expliquer le résultat.
4. Pour $(n+1)$ points quel est le degré m du polynôme d'interpolation de Lagrange. Que se passe-t-il si $m>n$.

Exercice 6.
Soit $p(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points (x_i,y_i), $i=0,\ldots,n$, avec $x_i=i$ et $y_i=\frac{1}{\binom{n}{i}}$. On rappelle l'expression pour les coefficients binomiaux : $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$

1. Donner l'expression de $p(x)$, donner $P_n(x)$ sans calcule. remarque :
2. Montrer que

$$\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{i-j}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!\,i!} \tag{3}$$

3. Simplifier la formule de $p(x)$.

Exercice 7. Soit $\{x_i\}$, $i=0,\cdots,n$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de pas $h=\frac{b-a}{n}$. Pour une fonction f continue on note $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ et $J(f)=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.

1. On choisit $w_i=\int_a^b \mathscr{L}_{i,n}(x)dx$, avec $\mathscr{L}_{i,n}$ est les polynôme de la base de Lagrange associée aux points $\{x_i\}$, $i=0,\cdots,n$.
   Montrer que $I(p)=J(p)$, $\forall\ p\in\mathbb{P}_n$.
2. On suppose que $I(p)=J(p)$, $\forall\ p\in\mathbb{P}_n$, montrer que $w_i=\int_a^b \mathscr{L}_{i,n}(x)dx$.
3. Si on note par $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ (avec $e_i(x)=x^i$) la base canonique de $\mathbb{P}_n$, montrer que

$$I(p)=J(p),\ \forall\ p\in\mathbb{P}_n \quad\Longleftrightarrow\quad I(e_i)=J(e_i),\ i=0,\cdots,n.$$

Exercice 8. On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^3(\mathbb{R})$.

1. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 associé à f aux points $x_0=-\frac{1}{4}$, $x_1=0$ et $x_2=\frac{1}{4}$.
2. Donner l'expression de l'erreur $E(x)=f(x)-P_2(x)$.
3. Montrer que $|E(x)|\leq\frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{576\sqrt{3}}$
4. Construire la formule de quadrature $\mathscr{I}_2(f)$ associée à P_2.
5. Calculer l'ordre de la formule de quadrature $\mathscr{I}_2(f)$.
6. Calculer la dérivée $\mathscr{D}_2=P_2'(x)$
7. Monter que la formule de dérivation $\mathscr{D}_2$ est d'ordre 2.

TD:2	LE-Math	**Semestre 4**
Analyse numérique 1		2022–2023

Exercice 1. Soit $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ et P_g sont polynôme d'interpolation de Lagrange aux points 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Le but de l'exercice est d'approcher la valeur $g''(\frac{1}{2})$.

1. Calculer P_g et puis calculer $P_g''(\frac{1}{2})$.
2. Posons $D_2 g = 4g(0) - 8g(\frac{1}{2}) + 4g(1)$
   (a) Montrer que $\forall\ Q \in \mathbb{P}_2$ on a $D_2 Q = Q''(\frac{1}{2})$.
   (b) Montrer que $g[0,\ \frac{1}{2},\ 1] = \frac{1}{2} D_2 g$.
3. On pose pour tout $x \in [0,\ 1]$, $r(x) = g(x) - P_g(x)$
   (a) Montrer qu'il existe $\xi \in [0,\ 1]$ tel que $r''(\xi) = 0$
   (b) Montrer que $g''(\frac{1}{2}) - D_2 g = r''(\frac{1}{2})$
   (c) Écrire $r(x)$ en fonction de l'erreur d'interpolation et en déduire une majoration de $\left|g''(\frac{1}{2}) - D_2 g\right|$.

Exercice 2.

1. A l'aide des développements de Taylor donner l'expression des deux premiers l'erreur liée à la formule de dérivation suivante : $\frac{f(x+ah)-f(x-bh)}{(a+b)h}$
2. On considère le θ-schéma $f_\theta'(x) = (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)$.
   (a) Montrer que les deux premiers termes de l'erreur associée au θ-schéma sont données par : $\frac{2\theta-1}{2} h f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x)$, en déduire l'ordre de précision du θ-schéma en fonction de θ.

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire :
$\int_0^1 f(x)dx \simeq w_0 f(0) + w_1 f(\xi) + w_2 f'(0)$, où $\xi \in]0,1[$ et w_0, w_1, w_2 sont des réels.

1. Déterminer les paramètres ξ, w_0, w_1 et w_2 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. On pose $E(f) = \int_0^1 f(x)dx - (w_0 f(0) + w_1 f(\xi) + w_2 f'(0))$. Calculer $E(x^4)$, et en déduire l'ordre.
3. A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature sur un intervalle $[a, b]$.
4. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = log(2)$. Donnez une approximation de $log(2)$.

Exercice 4. Déterminer w_1, w_2 et t_2 de sorte que la formule d'intégration numérique
$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 f(-1) + w_2 f(t_2)$ soit de degré de précision le plus élevé possible. Quel est ce degré ?

Exercice 5. Soit $[p,\ q]$ un intervalle sur lequel f est définie, $m = \frac{p+q}{2}$ son milieu et $y = ax^2 + bx + c$ la prabole passant par les 3 points $(p,\ f(p))$, $(q, f(q))$ et $(m, f(m))$.

1. Ecrire les 3 équations traduisant le fait que ces 3 points sont sur la parabole.
2. Calculer $I = \int_p^q \left(ax^2 + bx + c\right)dx$, (on mettra $\frac{q-p}{6}$ en facteur).
3. Montrer que $I = \frac{q-p}{6}\left(f(p) + 4f(\frac{p+q}{2}) + f(q)\right)$.
4. La formule de quadrature est-elle exacte pour les polynômes de degré 3?
5. A l'aide d'un changement de variable, exprimer l'intégral $\int_0^1 f(t)dt$ en fonction de I.

Exercice 6. Soient $\varepsilon \in]0,1[$ et f une fonction de classe $C^3([0,1])$. On note $a = f(0)$ et $b = f(1)$.

1. Déterminer le polynôme de Newton P_ε qui interpole f aux points 0, ε et 1.
2. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[0,1]$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} P_\varepsilon = (b-a-f'(0))x^2 + f'(0)x + a, \quad \text{on note cette limite} \quad P(x).$$

3. Vérifier que P est l'unique polynôme de degré 2 qui vérifie $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$ et $P'(0) = f'(0)$.
4. Pour $x \in]0,1[$ fixé, on considère la fonction ϕ sur $[0,1]$ définie par : $\phi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)} t^2(t-1)$
   Vérifier que $\phi(0) = \phi(1) = \phi(x) = \phi'(0) = 0$.
5. En déduire qu'il existe $\zeta_x \in]0,1[$ tel que $\phi^{(3)}(\zeta_x) = 0$ et que $f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\zeta_x)}{6} x^2(x-1)$.
6. Déterminer la formule de quadrature associé à P.

Exercice 7. On connaît les valeurs d'une fonction f pour trois abscisses équidistantes x_0, x_1 et x_2.

1. Former le polynôme de Lagrange $P(x)$ qui interpole f aux points x_0, x_1 et x_2.
2. Posons $h = x_{i+1} - x_i$ et $x = x_0 + m\,h$. Exprimer $P(x)$ en fonction de m et $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2$.
3. Utilisez le polynôme P pour calculer $J = \displaystyle\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$
4. Pour $h = \frac{1}{2}$. Calculer $J_1 = \displaystyle\int_0^2 (x^3)dx$ et $J_2 = \displaystyle\int_0^2 (x^4)dx$. Comparer avec les valeur exactes. Conclure.

Exercice 8.
Étant donnée un fonction f et un constante positive h. Nous définissons la différence latérale par :

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{1}$$

1. Posons $\Delta^0 f \equiv f(x)$. Montrer que

$$\Delta^{p+1} = \Delta^p f(x+h) - \Delta^p f(x) \tag{2}$$

2. Posons $x_i = x_0 + ih$ et notons $f_i = f(x_i)$ et $\Delta f(x_i) = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. Montrer que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\,h^k} \tag{3}$$

3. Soit $p_n = a_n x^n$. Notons $a_{n-k}^{(k)}$ le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $\Delta^k p_n(x)$.
   (a) Montrer que $a_{n-k}^{(k)} = a_n n(n-1)\ldots(n-k+1)h^k$
   (b) En déduire la valeur du $a_0^{(n)}$
4. Montrer que $\Delta^k f_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+j}$

TD:3
Analyse numérique 1

LE-Math

Semestre 4
2023–2024

Exercice 1. On cherche à trouver la solution de l'équation $f(x) = x^3 + 9x - 10 = 0. \quad (1)$

1. Faire une étude de la fonction f et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1).
2. Réaliser trois itérations de la méthode de dichotomie pour la fonction f sur l'intervalle $[0, 3]$.
3. Appliquer la méthode de dichotomie pour la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$.
   Combien de fois f a été calculée pour atteindre cette solution? Commentez les résultats!
4. Réaliser trois itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = -1$.
5. Appliquer la méthode de Newton pour $x_0 = -\frac{1}{2}$. Commentez les résultats!
6. Réaliser trois itérations de la méthode de la sécante pour $x_0 = \frac{2}{3}$ et $x_1 = \frac{3}{4}$.
7. Appliquer la méthode de la sécante pour $x_0 = -1$, $x_1 = 0$. Commentez les résultats!
8. Réaliser quatre itérations de la méthode de point fixe pour $\phi(x) = \frac{10}{9} - \frac{x^3}{9}$ et $x_0 = 1.125$.

Exercice 2. On veut résoudre l'équation $\sin(x) - 4x = 0$, $x \in [-1, 1]$, par la méthode du point fixe.
Posons $\phi(x) = \frac{x+\sin(x)}{5}$, $x \in [-1, 1]$.

1. Monter que $\phi(x) : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Faire une étude de la fonction ϕ'.
2. Monter que $\exists\, k$ tel que $0 < k < 1$, $\forall (x, y) \in [-1, 1]^2$, $|\phi(y) - \phi(x)| \leq k\,|y - x|$.
3. En déduire que ϕ possède un unique ponit fixe $\alpha \in [-1, 1]$.
4. Utiliser la méthode de point fixe pour calculer α avec une précision de 10^{-2} ($x_0 = \frac{1}{2}$).

Exercice 3. **(Facultatif)** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose $f(a) < 0 < f(b)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$. On considère la suite récurrente $\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = F(x_n), \quad n \neq 0, \end{cases}$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Montrer que f a un unique zero $\alpha \in [a, b]$ et calculer $F'(\alpha)$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $z \in [x, \alpha]$ tel que : $F(x) - \alpha = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-\alpha)^2$
3. En déduire qui'il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - \alpha| \leq C|x - \alpha|^2$ pour tout $x \in [a, b]$.
4. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α.
5. Supposons que $\forall\, x \in [a, b], f''(x) > 0$. Soit $x_0 \in]\alpha, b]$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par α. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe α de F.
6. Posons $f(x) = x^2 - a$ avec $a > 0$. Monter que $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\frac{(x_n^2-a)^2}{x_n^2}$.
7. Monter que si $n \geq 1$, $x_n \geq \sqrt{a}$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 4. On se propose de calculer les zéros de la fonction $f(x) = x - sin(x) - \frac{1}{4} = 0$.

1. Démontrez que cette équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Vérifiez que f satisfait les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode Newton.
3. Pour $x_0 = 1.34927$, calculer les 3 premiers termes de (x_n) de la méthode de Newton. Calculer l'ordre de CV.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \quad (1)$.

1. Montrer que la fonction f admet un zéro unique α. Donnez le tableau de variation de f sur $[0, 1]$.
2. Écrire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de la méthode de Newton.
3. On suppose que $\alpha \leq \frac{3}{4}$, étudier sur $[0, 1]$ le signe de la fonction $g(x)$ définie par : $g(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - \alpha$.

4. Supposons que $\alpha \leq \frac{3}{4}$ et $x_0 \in [\alpha, 1]$, montrer que $x_n \geq \alpha$, $\forall\, n \geq 1$. et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et conclure.
5. En prenant $x_0 = \frac{3}{4}$, donner une valeur approchée de α avec une précision 10^{-2}.
6. L'équation (1) est équivalente à l'équation $x = g(x)$, où
   $g(x) = \{$ cas 1 : $x^3 + 2x - 1$; cas 2 : $1 - x^3$; cas 3 : $\sqrt[3]{1-x}$; cas 4 : $\frac{1}{x^2+1}$; $\}$
   (a) Étudier la convergence de la suite (x_n) définie par la fonction g pour rechercher α. Dans le cas où il y a convergence, donner un intervalle $I_0 \subset]0, 1[$ tel que la méthode converge pour tout choix $x_0 \in I_0$.
   (b) Utilisez la méthode du point fixe avec $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour calculer une valeur approché x_k a $\varepsilon = 0.01$ près de la racine α de (1) à partir de $x_0 = 0.5$.

Exercice 6. On se propose de résoudre numériquement l'équation : $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$. (2)

1. Montrer que l'équation (2) admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Donnez le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que $\alpha \in]0, 1[$.
3. L'équation (2) est équivalente à l'équation $x = g(x)$. où
   $g(x) = \{$ cas 1 : $x^5 + 2x - 1$; cas 2 : $1 - x^5$; cas 3 : $\sqrt[5]{1-x}$ $\}$
   (a) Étudier dans chacun des trois cas, la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par g pour la recherche de α. Dans le cas où il y a convergence, donner un intervalle $I_0 \subset]0, 1[$ tel que la méthode converge $\forall\, x_0 \in I_0$.
   (b) Utilisez $g(x) = \sqrt[5]{1-x}$ pour calculer x_1, x_2, x_3 et x_4 en partant de $x_0 = 0.649689$.
4. Écrire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de la méthode de Newton.
5. On suppose que $\alpha \leq \frac{5}{6}$, étudier sur $[0, 1]$ le signe de la fonction $g(x)$ définie par : $g(x) = 4x^5 - 5\alpha x^4 + 1 - \alpha$.
6. Supposons que $\alpha \leq \frac{5}{6}$ et $x_0 \in [\alpha, 1]$. Montrer que $x_n \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$. et que $x_{n+1} \in [\alpha, x_n]$. Conclure.
7. Pour $x_0 = \frac{5}{6}$, calculer les trois premières itérations de la suite de Newton $(x_n)_{n\geq 1}$ approximant la solution α.

Exercice 7. On se propose de résoudre l'équation $f(x) = x^3 + 6x^2 + 14x + 12 = 0$, en utilisant la suite : $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $g(x) = x + \rho f(x)$ et $\rho \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeur de ρ, -2 est un point douteux.
2. Pour quelles valeur de ρ, -2 est un point attractif (resp. répulsif).
3. Quel est l'ordre de convergence pour $\rho = \frac{-1}{2}$. Dans ce cas calculer x_1, x_2 en partant de $x_0 = -1.48766$, puis calculer l'ordre numérique. Commentez les résultats.

Exercice 8. Soient $\rho \in]0, \sqrt{3}[$ et $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$.

1. Montrer que l'equation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1, \frac{2-\rho}{\rho}[$.
2. Etudier la convergence de la méthode de point fixe définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $x_0 \in]-1, \frac{2-\rho}{\rho}[$, avec $\phi(x) = x - \rho\, f(x)$.
3. Que se passe t'il lorsque $\rho = 1$?

Exercice 9. (Facultatif)
Soit $f(x) = h(x)(x-2)^3$ où $h(x)$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[1,3]$ telle que $h(2) \neq 0$.

1. Calculez la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ et la deuxième dérivée $f''(x)$ de la fonction $f(x)$.
2. Vérifiez que la racine $r = 2$ est une racine multiple de $f(x)$ de multiplicité 3.
3. Appliquez la méthode de Newton généralisée pour la fonction $f(x)$: $x_{n+1} = x_n - 3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4. Montrez que la méthode de Newton-Raphson généralisée converge vers la racine $r = 2$ de multiplicité 3 pour la fonction $f(x)$ en utilisant le théorème de convergence de la méthode de Newton.
5. Déterminez l'ordre numérique de convergence de la méthode de Newton pour cette fonction.