Espaces topologiques :

Définitions et Exemples :

Définition d'une topologie :

C'est une famille τ de parties d'un ensemble non vide E qui -cette famille- vérifie 3 axiommes :

- $\phi, E \in \tau$
- $\forall A, B \in \tau : A \cap B \in \tau$ "$\cap$ de 2 éléments de τ est un élément de τ"
- $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \tau : \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ "$\cup$ quelconque (fini ou infini) d'une famille d'éléments de τ est un élément de τ"

Définition d'un espace topologique :

C'est l'ensemble E muni de la topologie τ : (E, τ)

Définition d'un ouvert :

C'est tout élément de la topologie τ :

$A \in \tau \Leftrightarrow A$ est un ouvert (par rapport à τ)

Exemples de topologies :

Soit E un ensemble non vide,

"Topologie discrète" $\tau_d = \mathcal{P}(E)$ "L'ensemble de toute les parties de E"	i) $\phi, E \in \tau_d$ ii) Soient $A, B \in \tau_d$, donc : $A \cap B \in \tau_d$ iii) Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \tau_d$, donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_d$ Alors : τ_d est une topologie. et : Pour toute topologie τ quelconque $\tau \subset \tau_d$ "τ_d est la plus grande topo sur E"
"Topologie grossière" $\tau_g = \{\phi, E\}$	i) $\phi, E \in \tau_g$ ii) $\phi \cap E = \phi \in \tau_g$ iii) $\phi \cup E = E \in \tau_g$ Alors : τ_g est une topologie. et : Pour toute topologie τ quelconque $\tau_g \subset \tau$ "τ_g est la plus petite topo sur E"
"Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$" $\tau_u = \{\phi, \mathbb{R}, \{\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$ avec $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}\}\}$	i) $\phi, \mathbb{R} \in \tau_u$ ii) Soient $A, B \in \tau_u$: $A = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$, $B = \bigcup_{i \in I}]c_i, d_i[$ • Si $A \cap B = \phi \Rightarrow A \cap B \in \tau$ • Si $A \cap B \neq \phi \Rightarrow A \cap B = \bigcup_{k \in I}]x_k, y_k[$ donc : $A \cap B \in \tau_u$ iii) Soit $(A_j)_{j \in I} \subset \tau_u$, $\forall j \in I : A_j = \bigcup_{i \in I}]a_{j_i}, b_{j_i}[$ d'où : $\bigcup_{j \in I} A_j = \bigcup_{j \in I}\left(\bigcup_{i \in I}]a_{j_i}, b_{j_i}[\right) = \bigcup_{k \in I}]x_k, y_k[$ donc : $\bigcup_{j \in I} A_j \in \tau_u$ Alors : τ_u est une topologie.

Définition d'un fermé :

C'est toute partie de E dont le complémentaire -sur E- est un ouvert (par rapport à τ) :

A fermé (par rapport à τ) $\Leftrightarrow \exists O \in \tau / A = O^c$

Remarques :

Soit (E, τ) un espace topologique,

Les ouverts dans (E, τ) sont :	stable par $\cup$ quelconque : $\forall (O_i)_{i \in I} \subset \tau : \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$	Soit $(O_i)_{i \in I} \subset \tau$, donc : $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$ "Par définition"
	stable par $\cap$ fini : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall O_1, \ldots, O_n \in \tau$, $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau$, Mq : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$ "Récurrence" • pour $n = 2$, $O_1 \cap O_2 \in \tau$ "Par définition" Soit $n \in \mathbb{N}^*$, • supposons que : $\bigcap_{i=1}^{n-1} O_i \in \tau$ • montrons que : $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$ on a : $\bigcap_{i=1}^{n-1} O_i \in \tau$ et $O_n \in \tau$ d'où : $\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} O_i\right) \cap O_n \in \tau$ "Par déf" c-à-d : $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$ Alors, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$
	non stable -en général- par $\cap$ infini.	Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$: on a : $\forall n \geq 1 :]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est ouvert, mais : $\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas ouvert.
Les fermés dans (E, τ) sont :	stable par $\cup$ fini : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall F_1, \ldots, F_n$ des fermés : $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des fermés dans (E, τ), d'où : $\forall 1 \leq i \leq n, \exists (O_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \tau / F_i = O_i^c$ donc : $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} O_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right)^c$ or : $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$ donc : $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé dans (E, τ),
	stable par $\cap$ quelconque : $\forall (F_i)_{i \in I}$ famille de fermés : $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé	Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés dans (E, τ), d'où : $\forall i \in I, \exists (O_i)_{i \in I} \subset \tau / F_i = O_i^c$ donc : $\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} O_i^c = \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)^c$ or : $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$ donc : $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé dans (E, τ).
	non stable -en général- par $\cup$ infini	Dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$: on a : $\forall n \geq 1 : [\frac{1}{n}, 1]$ est fermé, mais : $\bigcup [\frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$ n'est pas fermé.

⚠ Si une partie de (E,τ) n'est pas ouverte, on ne peut pas dire qu'elle est fermée :
Dans $(\mathbb{R},\tau_u)$: $]a,b]$ est ni ouvert ni fermé

Définition d'un voisinage :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit $a\in E$,
Soit $V\subset E$ ($V\in\mathcal{P}(E)$),
Alors :
V est un voisinage de $a \iff \exists O\in\tau / a\in O\subset V$
↳ $V\in\mathcal{V}_a$ "L'ensemble de tous les voisinages de a dans E"

Propriétés de voisinage :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit $a\in E$,

$\forall V\in\mathcal{V}_a : a\in V$	Soit $V\in\mathcal{V}_a$: $\exists O\in\tau / a\in O\subset V$ d'où : $a\in V$
Soit $V\in\mathcal{V}_a$: $\forall U\subset E : V\subset U \Rightarrow U\in\mathcal{V}_a$	Soit $V\in\mathcal{V}_a$: $\exists O\in\tau / a\in O\subset V$ or : $V\subset U$, donc : $\exists O\in\tau / a\in O\subset U$ d'où : $U\in\mathcal{V}_a$
Soit $O\in\tau$: $a\in O \Rightarrow O\in\mathcal{V}_a$ "Tout ouvert contenant a est un voisinage de a" ouvert $\Rightarrow$ Voisinage	on a : $a\in O\subset O$ avec $O\in\tau$ d'où : $O\in\mathcal{V}_a$
Soient $V,U\in\mathcal{V}_a$: $V\cap U\in\mathcal{V}_a$	Soit $V\in\mathcal{V}_a$: $\exists O\in\tau / a\in O\subset V$ Soit $U\in\mathcal{V}_a$: $\exists O'\in\tau / a\in O'\subset U$ on a : $O,O'\in\tau \Rightarrow O\cap O'\in\tau$ et on a : $\begin{cases} a\in O \\ a\in O'\end{cases} \Rightarrow a\in O\cap O'$ comme : $O\cap O'\subset O\subset V \Rightarrow O\cap O'\subset V$ $O\cap O'\subset O'\subset U \Rightarrow O\cap O'\subset U$ donc : $O\cap O'\subset V\cap U$ d'où : $a\in O\cap O'\subset V\cap U$ avec $O\cap O'\in\tau$ alors : $V\cap U\in\mathcal{V}_a$
$\cap$ finie de voisinages de a est un voisinage de a : $\forall (V_i)_{1\le i\le n}\subset\mathcal{V}_a$: $\bigcap_{i=1}^{n} V_i\in\mathcal{V}_a$	Soit : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$: $V_i\in\mathcal{V}_a$ Mq : $\bigcap_{i=1}^{n} V_i\in\mathcal{V}_a$ on a : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$: $V_i\in\mathcal{V}_a$ d'où : $\forall i\in\{1,\dots,n\}, \exists O_i\in\tau / a\in O_i\subset V_i$ on a : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$: $O_i\in\tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i\in\tau$ et on a : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$: $a\in O_i \Rightarrow a\in\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ comme : $\forall i\in\{1,\dots,n\}$: $O_i\subset V_i \Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\}$: $\bigcap_{i=1}^{n} O_i\subset V_i$ $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i\subset\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ donc : $a\in\bigcap_{i=1}^{n} O_i\subset\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} O_i\in\tau$ alors : $\bigcap_{i=1}^{n} V_i\in\mathcal{V}_a$
$\cup$ quelconque de voisinages de a est un voisinage de a : $\forall (V_i)_{i\in I}\subset\mathcal{V}_a$: $\bigcup_{i\in I} V_i\in\mathcal{V}_a$	Soit : $\forall i\in I$: $V_i\in\mathcal{V}_a$ Mq : $\bigcup_{i\in I} V_i\in\mathcal{V}_a$ Soit $i_0\in I$: $V_{i_0}\in\mathcal{V}_a \Rightarrow \exists O_{i_0}\in\tau / a\in O_{i_0}\subset V_{i_0}$ or : $V_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I} V_i$, donc : $\exists O_{i_0}\in\tau / a\in O_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I} V_i$ d'où : $\bigcup_{i\in I} V_i\in\mathcal{V}_a$
$E\in\mathcal{V}_a$	on a : $a\in E\subset E$ avec $E\in\tau$ d'où : $E\in\mathcal{V}_a$
$\emptyset\notin\mathcal{V}_a$	car : $a\notin\emptyset$

Théorème sur les voisinages :

> Soit (E,τ) un espace topologique,
> Soit $A\subset E$,
> Alors : A est un ouvert (par rapport à τ) si et seulement si A est un voisinage de tous ses points sur E.
> Autrement dit : $A\in\tau \iff \forall x\in A : A\in\mathcal{V}_x$

$\Rightarrow$/ Supposons que $A\in\tau$,
Soit $x\in A$,
on a : $x\in A\subset A$ avec $A\in\tau$
d'où : $A\in\mathcal{V}_x$
donc : $\forall x\in A : A\in\mathcal{V}_x$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\forall x\in A \cdot A\in\mathcal{V}_x$
d'où : $\forall x\in A, \exists O_x\in\tau / x\in O_x\subset A$
on a : $\forall x\in A$: $x\in O_x\subset\bigcup_{x\in A} O_x$
d'où : $A\subset\bigcup_{x\in A} O_x$
et on a : $\forall x\in A$: $O_x\subset A$
d'où : $\bigcup_{x\in A} O_x\subset A$
donc : $A=\bigcup_{x\in A} O_x$
or : $(O_x)_{x\in A}\subset\tau \Rightarrow \bigcup_{x\in A} O_x\in\tau$
alors : $A\in\tau$

Définition d'une base de topologie :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit B une famille d'éléments de τ ($B\subset\tau$),
B est une base de la topologie τ / une base d'ouverts $\iff \forall O\in\tau, \exists (b_i)_{i\in I}\subset B / O=\bigcup_{i\in I} b_i$

Exemples d'une base de topologie :

$B=\{\{x\}/x\in E\}$ est une base de la topologie discrète sur E.	on a : $\forall O\in\tau_d$: $O=\bigcup_{x\in O}\{x\}$ avec : $\{\{x\}/x\in O\}\subset B$ donc : B est une base de la topologie τ_d sur E.
$B=\{]a,b[,]-\infty,b[,]a,+\infty[/ a,b\in\mathbb{R}\}$ est une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.	on a : $\tau_u=\{\emptyset,\mathbb{R},\{\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$ avec $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}\}\}$ d'où : $\forall O\in\tau_u$: $O=\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$ avec : $\{]a_i,b_i[/ (a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\subset\mathbb{R}\}\subset B$ donc : B est une base de la topologie τ_u sur $\mathbb{R}$.

Définition d'une base de voisinages :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit $x\in E$,
Soit B_x une partie de $\mathcal{V}_x$ ($B_x\subset\mathcal{V}_x$),
B_x est une base de voisinages de x / un système fondamentale de voisinages de x $\iff \forall V\in\mathcal{V}_x, \exists b_x\in B_x / x\in b_x\subset V$

Exemples d'une base de voisinages :

Propriétés sur les bases :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit $B \subset \tau$ "une famille d'éléments de τ",
Alors : B est une base de τ sur E si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille B_x formée des éléments de B qui contiennent x est une base de voisinages de x pour (E,τ). Autrement dit :
B est une base de τ sur $E \Leftrightarrow \forall x \in E$, $B_x = \{b \in B / x \in b\}$ est une base de voisinages de x pour (E,τ)

$\Rightarrow$/
Soit $V \in \mathcal{V}_x$: $\exists O \in \tau / x \in O \subset V$
on a : $O \in \tau \Rightarrow O = \bigcup_{i \in I} b_i$ avec $(b_i)_{i \in I} \subset B$
d'où : $x \in \bigcup_{i \in I} b_i \subset V$
donc : $\exists i_0 \in I / x \in b_{i_0} \subset V$ $(x \in \bigcup_{i \in I} b_i \Rightarrow \exists j \in I / x \in b_j \subset \bigcup_{i \in I} b_i)$
autrement dit : $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists b_{i_0} \in B / x \in b_{i_0} \subset V$
Alors : $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists b_{i_0} \in \{b \in B / x \in b\} / b_{i_0} \subset V$
d'où : $B_x = \{b \in B / x \in b\}$ est une base de voisinages de x pour (E,τ),
donc : $\forall x \in E$, B_x est une base de voisinages de x pour (E,τ).
$\Leftarrow$/ Soit $x \in E$, Supposons que B_x est une base de voisinages de x pour (E,τ),
Soit $O \in \tau$,
Soit $x \in O$,
On a : $x \in O \subset O$ avec $O \in \tau$
d'où : $O \in \mathcal{V}_x$
donc : $\exists b_j \in B_x / x \in b_j \subset O$
Alors $\forall x \in O, \exists b_j \in B_x / x \in b_j \subset O$
or : $\forall x \in O$: $x \in b_j \subset \bigcup_{i \in I} b_i \Rightarrow O \subset \bigcup_{i \in I} b_i$
et : $b_j \subset O \Rightarrow \bigcup_{i \in I} b_i \subset O$
d'où : $O = \bigcup_{i \in I} b_i$
avec : $\forall i \in I$: $b_i \in B_x \Rightarrow b_i \in B$ et $x \in b_i$
Alors : $\forall O \in \tau, \exists (b_i)_{i \in I} \subset B / O = \bigcup_{i \in I} b_i$
donc : B est une base de la topologie τ sur E.

Définition d'un espace topologique séparé / un espace de Hausdorff :

C'est un espace topologique (E,τ) qui vérifie :
$\forall x, x' \in E / x \neq x', \exists (V, V') \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_{x'} / V \cap V' = \phi$

Exemples d'un espace topologique séparé :

(E,τ_d) est séparé.	Soit $x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$, on a : $(\{x\},\{x'\}) \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_{x'}$ avec : $\{x\} \cap \{x'\} = \phi$ donc : (E,τ_d) est séparé.
(E,τ_g) n'est pas séparé.	car : $\forall x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$, E est le seul voisinage de x et de x' sur (E,τ_g).
$(\mathbb{R},\tau_u)$ est séparé.	Soit $x, x' \in \mathbb{R}$ tel que $x < x'$, Prenons : $V =]-\infty, \frac{x+y}{2}[$ $V' =]\frac{x+y}{2}, +\infty[$ on a : $x \in V \in \tau_u \Leftrightarrow V \in \mathcal{V}_x$ et : $x' \in V' \in \tau_u \Leftrightarrow V' \in \mathcal{V}_{x'}$ d'où : $(V, V') \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_{x'}$ avec : $V \cap V' =]-\infty, \frac{x+y}{2}[\cap]\frac{x+y}{2}, +\infty[= \phi$ donc : $(\mathbb{R},\tau_u)$ est séparé.

Proposition sur l'espace topologique séparé :

Dans un espace topologique séparé, les singletons sont des fermés.
Autrement dit : (E,τ) séparé $\Rightarrow \forall x \in E, \{x\}$ est fermé

Soit (E,τ) un espace topologique séparé,
Soit $x \in E$,
montrons que : $\{x\}$ est un fermé,
c-à-d : $\{x\}^c$ est un ouvert,
c-à-d : $\forall a \in \{x\}^c$: $\{x\}^c \in \mathcal{V}_a$
Soit $a \in \{x\}^c$,
donc : $a \neq x$
Comme : (E,τ) est séparé,
alors $\exists (V_1, V_2) \in \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_x / V_1 \cap V_2 = \phi$
c-à-d : $\exists (O_1, O_2) \in \tau^2 / a \in O_1 \subset V_1$ et $x \in O_2 \subset V_2$
avec : $O_1 \cap O_2 = \phi$
on a : $a \in O_1$
Comme : $O_1 \cap O_2 = \phi$
donc : $a \notin O_2$ c-à-d $a \in O_2^c$
d'où : $O_1 \subset O_2^c$ (1)
et on a : $x \in O_2$
d'où : $\{x\} \subset O_2$
donc : $O_2^c \subset \{x\}^c$ (2)
de (1) et (2) : $O_1 \subset \{x\}^c$
alors : $\exists O_1 \in \tau / a \in O_1 \subset \{x\}^c$
d'où : $\{x\}^c \in \mathcal{V}_a$
donc : $\forall a \in \{x\}^c$, $\{x\}^c \in \mathcal{V}_a$
Conclusion : $\forall a \in \{x\}^c$: $\{x\}^c$ est un ouvert,

c-à-d : $\forall a \in \{x\}^c$, $\{x\}$ est un fermé.

Fin de Chapitre //

Espaces topologiques :

Intérieur, Adhérent, Frontière, Point isolé et Point d'accumulation :

Définition de point intérieur :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

Soit $x\in A$,

* on dit que x est un point intérieur à A si A est un voisinage de x dans E : $A\in\mathcal{V}_x$

Autrement dit : x pt intérieur à $A \Leftrightarrow \exists O\in\tau / x\in O\subset A$

* L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur / l'ouverture de A, on la note :

$\mathring{A}=\{x\in A / \exists O\in\tau / x\in O\subset A\}=\{x\in A / A\in\mathcal{V}_x\}$

Définition de point adhérent :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

Soit $x\in E$,

* on dit que x est un point adhérent à A si tout voisinage V de x dans E contient un point de A.

Autrement dit : x pt adhérent à $A \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_x : V\cap A\neq\emptyset$

* L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence / la fermeture de A, on la note :

$\bar{A}=\{x\in E / \forall V\in\mathcal{V}_x : V\cap A\neq\emptyset\}$

Définition de point d'accumulation :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

Soit $x\in E$,

on dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage V de x dans E contient un point de A différent de x.

Autrement dit :

x pt d'accumulation de $A \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_x : (V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_x : V\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A\setminus\{x\}}$

Définition de point isolé :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

Soit $x\in E$,

on dit que x est un point isolé de A s'il existe un voisinage V de x dans E tel que : $V\cap A=\{x\}$

Autrement dit : x pt isolé de $A \Leftrightarrow \exists V\in\mathcal{V}_x / V\cap A=\{x\}$

Définition de la frontière :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

on appelle frontière de A : $\bar{A}\setminus\mathring{A}$

on note : $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$

Propriétés de l'intérieur et de l'adhérence :

Soit (E,τ) un espace topologique,

Soit A une partie de E ($A\subset E$),

$\mathring{A}\subset A$	Soit $x\in\mathring{A}=\{a\in A / A\in\mathcal{V}_a\}$ d'où : $x\in A$ donc : $\mathring{A}\subset A$
$\mathring{A}$ est un ouvert.	Soit $x\in\mathring{A}$, montrons que : $\mathring{A}\in\mathcal{V}_x$ on a : $x\in\mathring{A}\Leftrightarrow x\in A$ et $A\in\mathcal{V}_x$ d'où : $\exists O\in\tau / x\in O\subset A$ Soit $y\in O$, ($y\in A$ car $O\subset A$) d'où : $O\in\mathcal{V}_y$ or : $O\subset A$ donc : $A\in\mathcal{V}_y$ donc : $y\in\mathring{A}$ alors : $O\subset\mathring{A}$ donc : $\exists O\in\tau / x\in O\subset\mathring{A}\subset A$ d'où : $\mathring{A}\in\mathcal{V}_x$ Alors $\mathring{A}$ est voisinage de tous ses points, $\Leftrightarrow\mathring{A}$ est un ouvert.
$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A : $\forall O\in\tau$: $O\subset A\Rightarrow O\subset\mathring{A}$	Soit $O\in\tau$ tel que $O\subset A$ Soit $x\in O$, ($x\in A$ car $O\subset A$) d'où : $O\in\mathcal{V}_x$ or : $O\subset A$ donc : $A\in\mathcal{V}_x$ donc : $x\in\mathring{A}$ alors : $O\subset\mathring{A}$
Soit la famille $(O_i)_{i\in I}\subset\tau$ de tous les ouverts contenus dans A : $\mathring{A}=\bigcup_{i\in I}O_i$	on a : $\mathring{A}\subset A$ et : $\forall i\in I$: $O_i\subset A$ Comme $\mathring{A}$ est un ouvert, donc : $\exists j\in I / \mathring{A}=O_j\subset\bigcup_{i\in I}O_i$ d'où : $\mathring{A}\subset\bigcup_{i\in I}O_i$ (1) on a : $\forall i\in I$, O_i est un ouvert contenu dans A d'où : $\bigcup_{i\in I}O_i$ est un ouvert contenu dans A or : $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, donc : $\bigcup_{i\in I}O_i\subset\mathring{A}$ (2) de (1) et (2) : $\mathring{A}=\bigcup_{i\in I}O_i$

$A\subset\bar{A}$	Soit $x\in A$, on sait que : $\forall V\in\mathcal{V}_x$: $x\in V$ donc : $\forall V\in\mathcal{V}_x$: $V\cap A=\{x\}\neq\phi$ d'où : $x\in\bar{A}$ alors : $A\subset\bar{A}$
$\bar{A}$ est un fermé.	Soit : $x\in(\bar{A})^c \iff x\notin\bar{A}$ $\iff \exists V\in\mathcal{V}_x / V\cap A=\phi$ $\iff \exists V\in\mathcal{V}_x / \forall a\in V : a\notin A$ $\iff \exists V\in\mathcal{V}_x / \forall a\in V : a\in A^c$ $\iff \exists V\in\mathcal{V}_x / V\subset A^c$ $\iff A^c\in\mathcal{V}_x$ $\iff x\in\mathring{A^c}$ d'où : $(\bar{A})^c=\mathring{A^c}$ comme : $\mathring{A^c}$ est un ouvert, donc : $(\bar{A})^c$ est un ouvert, alors : $\bar{A}$ est un fermé,
$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A : $\forall F$ fermé : $A\subset F\Rightarrow\bar{A}\subset F$	Soit F un fermé tel que : $A\subset F$ on a : F fermé $\iff \exists O\in\mathcal{T}/F=O^c$ donc : $A\subset O^c$ d'où : $O\subset A^c \Rightarrow O\subset\mathring{A^c}$ or : $\mathring{A^c}=(\bar{A})^c$ donc : $O\subset(\bar{A})^c$ d'où : $\bar{A}\subset O^c$ alors : $\bar{A}\subset F$
Soit la famille $(F_i)_{i\in I}$ de tous les fermés contenant A : $\bar{A}=\bigcap_{i\in I}F_i$	on a : $A\subset\bar{A}$ et : $\forall i\in I$: $A\subset F_i$ comme : $\bar{A}$ est un fermé, donc : $\exists j\in I/ \bar{A}=F_j$ or : $\bigcap_{i\in I}F_i\subset F_j$ d'où : $\bigcap_{i\in I}F_i\subset\bar{A}$ (1) on a : $\forall i\in I$, F_i est un fermé contenant A, d'où : $\bigcap_{i\in I}F_i$ est un fermé contenant A or : $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A donc : $\bar{A}\subset\bigcap_{i\in I}F_i$ (2) de (1) et (2) : $\bar{A}=\bigcap_{i\in I}F_i$

Propriétés :

$(\mathring{A})^c=\overline{A^c}$	on a : $\mathring{A}\subset A$ d'où : $A^c\subset(\mathring{A})^c$ comme : $\mathring{A}$ est un ouvert, donc : $(\mathring{A})^c$ est un fermé contenant A^c, or : $\overline{A^c}$ est le plus petit fermé contenant A^c, alors : $\overline{A^c}\subset(\mathring{A})^c$ (1) d'où : $\mathring{A}\subset(\overline{A^c})^c\subset A$ (car $A^c\subset\overline{A^c}\Rightarrow(\overline{A^c})^c\subset A$) comme : $\overline{A^c}$ est un fermé, donc : $(\overline{A^c})^c$ est un ouvert contenu dans A, or : $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, alors : $(\overline{A^c})^c\subset\mathring{A}$ d'où : $(\mathring{A})^c\subset\overline{A^c}$ (2) de (1) et (2) : $(\mathring{A})^c=\overline{A^c}$
$\mathring{A^c}=(\bar{A})^c$	on a : $A\subset\bar{A}$ d'où : $(\bar{A})^c\subset A^c$ comme : $\bar{A}$ est un fermé, donc : $(\bar{A})^c$ est un ouvert contenu dans A^c, or : $\mathring{A^c}$ est le plus grand ouvert contenu dans A^c, alors : $(\bar{A})^c\subset\mathring{A^c}$ (1) d'où : $A\subset(\mathring{A^c})^c\subset\bar{A}$ (car $\mathring{A^c}\subset A^c\Rightarrow A\subset(\mathring{A^c})^c$) comme : $\mathring{A^c}$ est un ouvert, donc : $(\mathring{A^c})^c$ est un fermé contenant A, or : $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A, alors : $\bar{A}\subset(\mathring{A^c})^c$ d'où : $\mathring{A^c}\subset(\bar{A})^c$ (2) de (1) et (2) : $\mathring{A^c}=(\bar{A})^c$
$\partial A=\bar{A}\cap\overline{A^c}$	Par définition : $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$ c-à-d : $\partial A=\bar{A}\cap(\mathring{A})^c$ or : $(\mathring{A})^c=\overline{A^c}$ donc : $\partial A=\bar{A}\cap\overline{A^c}$

Propriétés :

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique,
Soient A et B deux parties de E ($A\subset E$, $B\subset E$),

$A\subset B\Rightarrow\mathring{A}\subset\mathring{B}$	on a : $\mathring{A}\subset A\subset B$ d'où : $\mathring{A}\subset B$ donc : $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans B, or : $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert contenu dans B, alors : $\mathring{A}\subset\mathring{B}$
$A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$	on a : $A\subset B\subset\bar{B}$ d'où : $A\subset\bar{B}$ donc : $\bar{B}$ est un fermé contenant A, or : $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A, alors : $\bar{A}\subset\bar{B}$
$\mathring{A}=E\setminus\overline{A^c}=(\overline{A^c})^c$	on sait que : $(\mathring{A})^c=\overline{A^c}$ d'où : $\mathring{A}=(\overline{A^c})^c=E\setminus\overline{A^c}$
$\bar{A}=E\setminus\mathring{A^c}=(\mathring{A^c})^c$	on sait que : $(\bar{A})^c=\mathring{A^c}$ d'où : $\bar{A}=(\mathring{A^c})^c=E\setminus\mathring{A^c}$

Propriétés :

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique,

U ouvert $\iff\mathring{U}=U$	$\Rightarrow$/ on suppose que : U est ouvert, montrons que : $\mathring{U}=U$ on sait que : $\mathring{U}\subset U$ (1) montrons que : $U\subset\mathring{U}$ on a : U est un ouvert contenu dans lui-même, et : $\mathring{U}$ est le plus grand ouvert contenu dans U, donc : $U\subset\mathring{U}$ (2) de (1) et (2) : $\mathring{U}=U$ $\Leftarrow$/ on suppose que : $\mathring{U}=U$ comme : $\mathring{U}$ est un ouvert, alors : U est un ouvert.

F fermé $\Leftrightarrow \overline{F}=F$	$\Rightarrow$/ on suppose que : F est fermé, montrons que : $\overline{F}=F$ On sait que : $F\subset\overline{F}$ (1) montrons que : $\overline{F}\subset F$ on a : F est un fermé contenant lui-même, et $\overline{F}$ est le plus petit fermé contenant F, donc : $\overline{F}\subset F$ (2) de (1) et (2) : $\overline{F}=F$ $\Leftarrow$/ on suppose que : $\overline{F}=F$ Comme : $\overline{F}$ est un fermé, alors : F est un fermé.

Propriétés :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soient A et B deux parties de E ($A\subset E$ et $B\subset E$),

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	on a : $A\subset\overline{A}$ et $B\subset\overline{B}$ donc : $(A\cup B)\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$ comme : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des fermés, donc : $\overline{A}\cup\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cup B$, or : $\overline{A\cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A\cup B$, alors : $\overline{A\cup B}\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$ (1) on a : $A\subset(A\cup B)\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ et : $B\subset(A\cup B)\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ donc : $(\overline{A}\cup\overline{B})\subset\overline{A\cup B}$ (2) de (1) et (2) : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
$\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$	on a : $\mathring{A}\subset A$ et $\mathring{B}\subset B$ donc : $(\mathring{A}\cap\mathring{B})\subset(A\cap B)$ comme : $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts, donc : $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cap B$, or : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A\cap B$, alors : $(\mathring{A}\cap\mathring{B})\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ (1) on a : $(A\cap B)\subset A\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset\mathring{A}$ et : $(A\cap B)\subset B\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset\mathring{B}$ donc : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset(\mathring{A}\cap\mathring{B})$ (2) de (1) et (2) : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$
$\overline{A\cap B}\subset(\overline{A}\cap\overline{B})$ $(\overline{A}\cap\overline{B})\not\subset\overline{A\cap B}$? Dans $(\mathbb{R},\tau_u)$, Pour $A=[0,1[$ $B=]1,2]$ d'où $A\cap B=\emptyset$ $\Rightarrow\overline{A\cap B}=\emptyset$ or : $\overline{A}=[0,1]$ $\overline{B}=[1,2]$ d'où $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}\not\subset\emptyset$	on a : $(A\cap B)\subset A\subset\overline{A}$ et $(A\cap B)\subset B\subset\overline{B}$ d'où : $(A\cap B)\subset\overline{A}$ et $(A\cap B)\subset\overline{B}$ donc : $(A\cap B)\subset(\overline{A}\cap\overline{B})$ comme : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des fermés, donc : $\overline{A}\cap\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cap B$, or : $\overline{A\cap B}$ est le plus petit fermé contenant $A\cap B$, alors : $\overline{A\cap B}\subset(\overline{A}\cap\overline{B})$
$(\mathring{A}\cup\mathring{B})\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}\not\subset(\mathring{A}\cup\mathring{B})$? Dans $(\mathbb{R},\tau_u)$, Pour : $A=[0,1[$ $B=]1,2]$ d'où : $A\cup B=[0,2]$ $\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}=]0,2[$ or : $\mathring{A}=]0,1[$ $\mathring{B}=]1,2[$ d'où $\mathring{A}\cup\mathring{B}=]0,1[\cup]1,2[\not\supset]0,2[$	on a : $\mathring{A}\subset A\subset(A\cup B)$ et $\mathring{B}\subset B\subset(A\cup B)$ d'où : $\mathring{A}\subset(A\cup B)$ et $\mathring{B}\subset(A\cup B)$ donc : $(\mathring{A}\cup\mathring{B})\subset(A\cup B)$ comme : $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts, donc : $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cup B$, or : $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A\cup B$, alors : $(\mathring{A}\cup\mathring{B})\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$
$A\subset(A\cup B)\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$	on a : $A\subset(A\cup B)\subset\overline{A\cup B}$ d'où : $A\subset\overline{A\cup B}$ donc : $\overline{A\cup B}$ est un fermé contenant A, or : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, alors : $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$
$A\subset(A\cup B)\Rightarrow\mathring{A}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$	on a : $\mathring{A}\subset A\subset(A\cup B)$ d'où : $\mathring{A}\subset(A\cup B)$ donc : $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans $A\cup B$, or : $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A\cup B$, alors : $\mathring{A}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$
$(A\cap B)\subset A\Rightarrow\overline{A\cap B}\subset\overline{A}$	on a : $(A\cap B)\subset A\subset\overline{A}$ d'où : $(A\cap B)\subset\overline{A}$ donc : $\overline{A}$ est un fermé contenant $A\cap B$, or : $\overline{A\cap B}$ est le plus petit fermé contenant $A\cap B$, alors : $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}$
$(A\cap B)\subset A\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset\mathring{A}$	on a : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset(A\cap B)\subset A$ d'où : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset A$ donc : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ est un ouvert contenu dans A, or : $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, alors : $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset\mathring{A}$

Fin de Chapitre #

Topologie induite, Topologie produit, Topologie quotient

Définition de topologie induite :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit A une partie de E non vide $(A\subset E)$,
La famille $\tau_A=\{O\cap A / O\in\tau\}$ est une topologie sur A appelée la topologie induite sur A.
(A,τ_A) s'appelle sous-espace topologique de (E,τ)

i) on a : $\phi=\phi\cap A$ avec $\phi\in\tau$
d'où : $\phi\in\tau_A$
et : $A=E\cap A$ avec $E\in\tau$
d'où : $A\in\tau_A$

ii) Soient $U,U'\in\tau_A$,
d'où : $U=O\cap A$ et $U'=O'\cap A$ avec $O,O'\in\tau$
on a : $U\cap U'=(O\cap A)\cap(O'\cap A)$
$U\cap U'=(O\cap O')\cap A$
avec : $O,O'\in\tau \Rightarrow O\cap O'\in\tau$
donc : $U\cap U'\in\tau_A$

iii) Soient $(U_i)_{i\in I}\subset\tau_A$,
d'où : $\forall i\in I$: $U_i=O_i\cap A$ avec $(O_i)_{i\in I}\subset\tau$
on a : $\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcup_{i\in I}(O_i\cap A)$
$\bigcup_{i\in I}U_i=(\bigcup_{i\in I}O_i)\cap A$
avec : $(O_i)_{i\in I}\subset\tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$
donc : $\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau_A$

Alors τ_A est une topologie sur A.

Remarque sur la topologie induite :

En général, les ouverts de τ_A ne sont pas des ouverts de τ : Par exemple : Dans $(\mathbb{R},\tau_u)$,
Considérons : $\tau_{\mathbb{Q}}=\{O\cap\mathbb{Q} / O\in\tau_u\}$ "La topologie induite sur $\mathbb{Q}$"
on a : $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ est un fermé dans $(\mathbb{R},\tau_u)$
mais : $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$ est un ouvert dans $(\mathbb{Q},\tau_{\mathbb{Q}})$
car : $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}=]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ avec $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\in\tau_u$
d'où : $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}\in\tau_{\mathbb{Q}}$

Proposition sur la topologie induite :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit (A,τ_A) un sous-espace topologique de (E,τ),
Soit $a\in A$,
Alors : V est un voisinage de a dans (A,τ_A) si et seulement si $V=W\cap A$ avec W est un voisinage de a dans (E,τ).
Autrement dit :
V voisinage de a dans $(A,\tau_A) \Leftrightarrow \exists W$ voisinage de a dans (E,τ) / $V=W\cap A$

$\Rightarrow$/ Supposons que V est un voisinage de a dans (A,τ_A),
d'où : $\exists U\in\tau_A$ / $a\in U\subset V$
or : $U=O\cap A$ avec $O\in\tau$
donc : $a\in U\Rightarrow a\in O$
d'où : $a\in O\subset O$ avec $O\in\tau$
alors O est un voisinage de a dans (E,τ),
Posons $W=O\cup V$,
on a : $a\in O\subset W$ avec $O\in\tau$
donc : W est un voisinage de a dans (E,τ),
et on a : $W\cap A=(O\cup V)\cap A$
$=(O\cap A)\cup(V\cap A)$ $(V\subset A)$
$=U\cup V$ $(U\subset V)$
d'où : $W\cap A=V$
alors : il existe W un voisinage de a dans (E,τ) / $V=W\cap A$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\exists W$ voisinage de a dans (E,τ) / $V=W\cap A$,
on a : W est un voisinage de a dans (E,τ),
donc : $\exists O\in\tau$ / $a\in O\subset W$
d'où : $a\in(O\cap A)\subset(W\cap A)$
c-à-d : $a\in(O\cap A)\subset V$
avec : $O\in\tau\Rightarrow O\cap A\in\tau_A$
alors V est un voisinage de a dans (A,τ_A).

Définition de topologie quotient :

Soit (E,τ) un espace topologique,
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E,
On pose : $\hat{E}=E\backslash_{\mathcal{R}}$ "l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$",
Soit : $q: E\longrightarrow\hat{E}$, $x\longmapsto|x|=\{y\in E / x\mathcal{R}y\}$ "la surjection canonique",
La famille $\hat{\tau}=\{U\subset\hat{E} / q^{-1}(U)\in\tau\}$ est une topologie sur $\hat{E}$ appelée la topologie quotient sur $\hat{E}$

i) on a : $q^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$

avec : $\phi \subset \hat{E}$

d'où : $\phi \in \hat{\tau}$

et : $q^{-1}(\hat{E}) = E \in \tau$

avec : $\hat{E} \subset \hat{E}$

d'où : $\hat{E} \in \hat{\tau}$

ii) Soient $A, B \in \hat{\tau}$,

d'où : $q^{-1}(A) \in \tau$ avec : $A \subset \hat{E}$

$q^{-1}(B) \in \tau$ avec $B \subset \hat{E}$

on a : $A, B \subset \hat{E}$

d'où : $A \cap B \subset \hat{E}$.

et on a : $q^{-1}(A \cap B) = q^{-1}(A) \cap q^{-1}(B) \in \tau$

comme τ est une topologie,

d'où : $q^{-1}(A \cap B) \in \tau$ avec $A \cap B \subset \hat{E}$

donc : $A \cap B \in \hat{\tau}$

iii) Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \hat{\tau}$,

d'où : $\forall i \in I$. $q^{-1}(A_i) \in \tau$ avec $(A_i)_{i \in I} \subset \hat{E}$

on a : $\forall i \in I$: $A_i \subset \hat{E}$

d'où $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \hat{E}$

et on a : $q^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(A_i) \in \tau$

comme τ est une topologie,

d'où : $q^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) \in \tau$ avec $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \hat{E}$

donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \hat{\tau}$

Alors : $\hat{\tau}$ est une topologie sur $\hat{E}$.

Définition de topologie produit :

Soient $(E_i, \tau_i)_{1 \leq i \leq m}$ m espaces topologiques,
Soit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ "le produit cartésienne",
la famille $\tau_\pi = \{ \bigcup_{i \in I} V_i \,/\, \forall i \in I : V_i = \prod_{k=1}^{m} O_k \subset E$ avec $\forall 1 \leq k \leq m : O_k \in \tau_k \}$ est une topologie sur E appelée la topologie produit sur E

i) on a : $\phi = \bigcup_{i \in I} \phi$

avec : $\phi = \prod_{k=1}^{m} \phi$ et $\forall 1 \leq k \leq m : \phi \in \tau_k$

d'où : $\phi \in \tau_\pi$

et : $E = \bigcup_{i \in I} E$

avec : $E = \prod_{k=1}^{m} E_k$ et $\forall 1 \leq k \leq m$: $E_k \in \tau_k$

d'où : $E \in \tau_\pi$

ii) Soient $A, B \in \tau_\pi$, d'où :

$A = \bigcup_{i \in I} V_i$ tel que : $\forall i \in I$: $V_i = \prod_{k=1}^{m} O_k \subset E$

avec : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \in \tau_k$

et : $B = \bigcup_{j \in J} V'_j$ tel que : $\forall j \in J$: $V'_j = \prod_{k=1}^{m} O'_k \subset E$

avec : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O'_k \in \tau_k$

on a : $A \cap B = (\bigcup_{i \in I} V_i) \cap (\bigcup_{j \in J} V'_j)$

$A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (V_i \cap V'_j)$

avec : $\forall (i,j) \in I \times J$: $V_i \cap V'_j = (\prod_{k=1}^{m} O_k) \cap (\prod_{k=1}^{m} O'_k)$

$\forall (i,j) \in I \times J$: $V_i \cap V'_j = \prod_{k=1}^{m} (O_k \cap O'_k) \subset E$

et : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \in \tau_k$ et $O'_k \in \tau_k \Rightarrow O_k \cap O'_k \in \tau_k$

d'où : $A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (V_i \cap V'_j)$ tel que $\forall (i,j) \in I \times J$:

$V_i \cap V'_j = \prod_{k=1}^{m} (O_k \cap O'_k) \subset E$

avec : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \cap O'_k \in \tau_k$

donc : $A \cap B \in \tau_\pi$

iii) Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \tau_\pi$,

donc : $\forall i \in I$: $A_i \in \tau_\pi$

d'où : $\forall i \in I$: $A_i = \bigcup_{j \in J_i} V_j$ tel que : $\forall j \in J_i$: $V_j = \prod_{k=1}^{m} O_k \subset E$

avec : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \in \tau_k$

on a : $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} V_j)$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} V_j$

avec : $\forall j \in \bigcup_{i \in I} J_i$: $V_j = \prod_{k=1}^{m} O_k \subset E$

et : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \in \tau_k$

d'où : $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} V_j$ tel que : $\forall j \in \bigcup_{i \in I} J_i$: $V_j = \prod_{k=1}^{m} O_k \subset E$

avec : $\forall 1 \leq k \leq m$: $O_k \in \tau_k$

donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_\pi$

Alors : τ_π est une topologie sur E.

Fin de Chapitre #

Espaces topologiques :

Applications Continues dans les Espaces Topologiques :

Définition de limite :

Soient (E,τ) et (F,τ') deux espaces topologiques,
Soit $f : E \to F$ une application,
Soit $a \in E$,
Soit $b \in F$,
Alors :
f admet b comme limite en a / $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a $\iff \forall V \in \mathcal{V}_b, \exists U \in \mathcal{V}_a / f(U) \subset V$

* Si b est unique, on écrit : $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Remarque sur les limites :

Si l'espace d'arrivé F n'est pas séparé,
Alors : f peut avoir plusieurs limites au même point.

Par exemple :
Prenons F muni de la topologie grossière $\tau_g = \{\phi, F\}$ ((F,τ_g) n'est pas séparé),
Soit $a \in E$,
Soit $b \in F$,
on a : F est le seul voisinage de b (pour τ_g),
et E est un voisinage de a,
avec : $f(E) \subset F$ (car f est une application)
donc : f admet b comme limite en a,
alors : tout point b de F est limite de f en a.

Proposition sur les limites :

> Soient (E,τ) et (F,τ') deux espaces topologiques,
> Soit $f : E \to F$ une application,
> Soit $a \in E$,
> Soit $b \in F$,
> on suppose que (F,τ') est séparé,
> Alors : Si f admet b comme limite en a, alors b est unique.

Supposons que f admet deux limites distincts b et b' en a,
on a : $b, b' \in F$ tels que $b \neq b'$
Comme : (F,τ') est séparé,
donc : $\exists (V,V') \in \mathcal{V}_b \times \mathcal{V}_{b'} / V \cap V' = \phi$
or :
* f admet b comme limite en a,
donc : $\exists U \in \mathcal{V}_a / f(U) \subset V$
* f admet b' comme limite en a,
donc : $\exists U' \in \mathcal{V}_a / f(U') \subset V'$
d'où : $(f(U) \cap f(U')) \subset (V \cap V')$
or : $f(U \cap U') \subset (f(U) \cap f(U'))$
car : $\begin{cases} (U \cap U') \subset U \Rightarrow f(U \cap U') \subset f(U) \\ (U \cap U') \subset U' \Rightarrow f(U \cap U') \subset f(U') \end{cases}$
donc : $f(U \cap U') \subset (f(U) \cap f(U')) \subset \phi$
alors : $f(U \cap U') = \phi$ "Contradiction"
Comme : $U, U' \in \mathcal{V}_a$
d'où : $a \in U$ et $a \in U'$
c-à-d : $a \in (U \cap U')$
donc : $f(a) \in f(U \cap U')$
d'où : $f(U \cap U') \neq \phi$
alors : f admet une limite unique en a.

Définition d'une application continue :

Soient (E,τ) et (F,τ') deux espaces topologiques,
Soit $f : E \to F$ une application,
* Soit $y \in E$, Alors :
f est continue en $y \iff f(x)$ tend vers $f(y)$ quand x tend vers y
* Soit A une partie de E ($A \subset E$), Alors :
f est continue sur $A \iff \forall a \in A : f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a
* f est continue $\iff f$ est continue sur E
$\iff \forall y \in E : f(x)$ tend vers $f(y)$ quand $x \to y$

Théorème sur les applications continues :

> Soient (E,τ) et (F,τ') deux espaces topologiques
> Soit $f : E \to F$ une application,
> Les assertions suivantes sont équivalentes :
> a) f est continue.
> b) Pour tout ouvert $U \subset F$, $f^{-1}(U)$ est ouvert : $\forall U \in \tau' : f^{-1}(U) \in \tau$
> c) Pour tout fermé $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ est fermé.
> d) Pour toute partie $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Montrons que : $a \Rightarrow d \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$

$a \Rightarrow d$:

Soit $A \subset E$,

montrons que : $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Soit $b \in f(\bar{A})$,

d'où : $\exists a \in \bar{A} / b = f(a)$

avec : $a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}_a : V \cap A \neq \phi$

on a : f est continue,

d'où : f est continue en tout point de E,

or : $a \in E$ (car $a \in \bar{A} = \{x \in E / \forall O \in \mathcal{V}_x : O \cap A \neq \phi\}$)

donc f est continue en a,

d'où : $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}, \exists U \in \mathcal{V}_a / f(U) \subset V$

Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$,

on a : $U \in \mathcal{V}_a$ et $a \in \bar{A}$

donc : $U \cap A \neq \phi$

d'où : $f(U \cap A) \neq \phi$

et on a : $U \cap A \subset U$ et $U \cap A \subset A$

d'où : $f(U \cap A) \subset f(U)$ et $f(U \cap A) \subset f(A)$

d'où : $f(U \cap A) \subset (f(U) \cap f(A))$

puisque : $f(U) \subset V \Rightarrow (f(U) \cap f(A)) \subset (V \cap f(A))$

donc : $f(U \cap A) \subset (V \cap f(A))$

et comme : $f(U \cap A) \neq \phi$

alors : $V \cap f(A) \neq \phi$

d'où : $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} : V \cap f(A) \neq \phi$

donc : $f(a) \in \overline{f(A)}$

c-à-d : $b \in \overline{f(A)}$

Alors : $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

$d \Rightarrow c$:

Soit $V \in F$ un fermé (par rapport à τ'),

montrons que : $f^{-1}(V)$ est un fermé (par rapport à τ),

or : $f^{-1}(V)$ fermé $\Leftrightarrow \overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(V)$

d'où : mq : $\overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(V)$

on sait que : $f^{-1}(V) \subset \overline{f^{-1}(V)}$ (1)

montrons que : $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$

Soit $x \in \overline{f^{-1}(V)}$,

on a : $x \in \overline{f^{-1}(V)} \Rightarrow f(x) \in f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(f^{-1}(V))}$

$\Rightarrow f(x) \in \overline{f(f^{-1}(V))}$

$\Rightarrow f(x) \in \bar{V}$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(\bar{V})$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\bar{V})$

donc : $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ (2)

de (1) et (2) : $\overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(\bar{V})$

Alors : $f^{-1}(V)$ est un fermé.

$c \Rightarrow b$:

Soit $U \subset F$ un ouvert (par rapport à τ'),

d'où : U^c_F est un fermé (par rapport à τ'),

comme : pour tout fermé $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ est un fermé,

donc : $f^{-1}(U^c)$ est un fermé,

on a : $f^{-1}(U^c) = \{x \in E / f^{-1}(x) \in U^c\}$

$f^{-1}(U^c) = \{x \in E / f^{-1}(x) \notin U\}$

d'où : $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c$

donc : $(f^{-1}(U))^c$ est un fermé,

Alors : $f^{-1}(U)$ est un ouvert.

$b \Rightarrow a$:

Soit $a \in E$,

Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$,

d'où : $\exists O \in \tau' / f(a) \in O \subset V$

comme : pour tout ouvert $U \subset F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert,

donc : $f^{-1}(O) \in \tau$

avec : $f(a) \in O \Rightarrow a \in f^{-1}(O)$

d'où : $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_a$

donc : $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}, \exists f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_a / f(f^{-1}(O)) \subset O \subset V$

d'où : f est continue en a,

alors : $\forall a \in E$, f est continue en a,

Donc : f est continue.

Corollaire sur les applications continues :

La composition de deux applications continues est une application continue.

Soient (E,τ), (F,τ') et (G,τ'') trois espaces topologiques,

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications continues,

montrons que : $g \circ f$ est une application continue,

or : $g \circ f$ continue $\Leftrightarrow \forall U \in \tau'' : (g \circ f)^{-1}(U) \in \tau$

d'où : mq : $\forall U \in \tau'' : (g \circ f)^{-1}(U) \in \tau$

Soit $U \in \tau''$,

comme : g est une application continue,

donc : $g^{-1}(U) \in \tau'$

et comme : f est une application continue,

donc : $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$

on a : $f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1} \circ g^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U)$

d'où :

donc : $\forall U \in \tau''$: $(g\circ f)^{-1}(U) \in \tau$

Alors $g\circ f$ est continue.

Définition d'un homéomorphisme :

Soient (E,τ) et (F,τ') deux espaces topologiques,

Soit $f : E \rightarrow F$ une application,

Alors :

$$f \text{ est homéomorphisme} \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijective} \\ f \text{ continue} \\ f^{-1} \text{ continue} \end{cases}$$

* (E,τ) et (F,τ') sont appelés homéomorphes.

Fin de Chapitre II

Topologie d'un espace métrique :

Définition d'une distance / métrique :

Une application d de $E\times E$, avec E un ensemble non vide, dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie 3 axiomes :

- $\forall x,y\in E$: $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
- $\forall x,y\in E$: $d(x,y)=d(y,x)$ "Symétrie"
- $\forall x,y,z\in E$: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ "Inégalité triangulaire"

Définition d'un espace métrique :

Un ensemble E muni d'une métrique d : (E,d)

Exemples des métriques :

Métrique Discrète Soit E un ensemble non vide, l'application d définie sur E par : $\forall x,y\in E$, $d(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x\neq y\\ 0 \text{ si } x=y\end{cases}$ est une métrique sur E : C'est la métrique discrète.	i) Soient $x,y\in E$, Par définition de l'application d, on a : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ii) Soient $x,y\in E$, on a : $d(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x\neq y\\ 0 \text{ si } x=y\end{cases}$ $=\begin{cases}1 \text{ si } y\neq x\\ 0 \text{ si } y=x\end{cases}$ donc : $d(x,y)=d(y,x)$ iii) Soient $x,y,z\in E$, 1er cas : Si $x=y$, d'où : $d(x,y)=0\leq d(x,z)+d(z,x)$ car d est positive, donc : $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,x)$ 2ème cas : Si $x\neq y$ et $z=x \Rightarrow z\neq y$, d'où $d(x,y)=1$; $d(x,z)=0$; $d(z,y)=1$ donc : $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ $(1\leq 0+1)$ 3ème cas : Si $x\neq y$, $z\neq x\neq y$, d'où $d(x,y)=1$; $d(x,z)=1$; $d(z,y)=1$ donc : $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ $(1\leq 1+1)$ Alors : d est une métrique sur E.
Dans $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application d définie par : $\forall x,y\in E$, $d(x,y)=\lvert x-y\rvert$ est une métrique sur E. ($\lvert\cdot\rvert$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$) (le module dans $\mathbb{C}$ respecte les mêmes propriétés que la valeur absolue dans $\mathbb{R}$)	i) Soient $x,y\in E$, on a : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \lvert x-y\rvert=0 \Leftrightarrow x-y=0$ donc : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ii) Soient $x,y\in E$, on a : $d(x,y)=\lvert x-y\rvert$ $=\lvert-(y-x)\rvert$ $=\lvert y-x\rvert$ donc : $d(x,y)=d(y,x)$ iii) Soient $x,y,z\in E$, on a : $d(x,y)=\lvert x-y\rvert$ $=\lvert x-z+z-y\rvert$ $\leq\lvert x-z\rvert+\lvert z-y\rvert$ donc : $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ Alors : d est une métrique sur E.
Soit $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Posons $X=E^n$, Soient $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X, l'application définie par : $d(x,y)=\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert$ est une métrique sur X.	i) Soient $x,y\in X$, $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$; $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert=0$ or : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert$ c-à-d : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert\leq 0$ Comme : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert\geq 0$ donc : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert=0$ d'où : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert=0$ $\Leftrightarrow \forall 1\leq i\leq n$: $x_i=y_i$ donc : $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ ii) Soient $x,y\in X$, $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$; $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $d(x,y)=\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert$ $=\sup_{1\leq i\leq n}\lvert y_i-x_i\rvert$ donc : $d(x,y)=d(y,x)$ iii) Soient $x,y,z\in X$, $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$; $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$; $z=(z_i)_{1\leq i\leq n}$ on a $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-z_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-z_i\rvert$ et $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert z_i-y_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert z_i-y_i\rvert$ d'où $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-z_i\rvert+\lvert z_i-y_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-z_i\rvert+\sup_{1\leq i\leq n}\lvert z_i-y_i\rvert$ or : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert\leq\lvert x_i-z_i\rvert+\lvert z_i-y_i\rvert$ donc : $\forall 1\leq i\leq n$: $\lvert x_i-y_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-z_i\rvert+\sup_{1\leq i\leq n}\lvert z_i-y_i\rvert$ or : $\forall 1\leq i\leq n$, $\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert$ est le plus petit majorant de $\lvert x_i-y_i\rvert$, donc : $\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-y_i\rvert\leq\sup_{1\leq i\leq n}\lvert x_i-z_i\rvert+\sup_{1\leq i\leq n}\lvert z_i-y_i\rvert$ c-à-d : $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ Alors : d est une métrique sur X,
Soit $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Posons $X=E^n$, Soient $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$	i) Soient $x,y\in X$, $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$; $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $d_\alpha(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^\alpha}=0$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^\alpha=0$

dans X, Si $\alpha\in[1,+\infty[$, l'application définie par: $d_\alpha(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ est une métrique sur X. Si $\alpha=2$, on obtient la métrique euclid-ienne: $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^2}$	$\iff \forall 1\le i\le n: \lvert x_i-y_i\rvert^\alpha=0$ car: $\forall 1\le i\le n: \lvert x_i-y_i\rvert^\alpha\geq 0$ $\iff \forall 1\le i\le n: x_i-y_i=0$ $\iff \forall 1\le i\le n: x_i=y_i$ donc: $d_\alpha(x,y)=0 \iff x=y$ ii) Soient $x,y\in X$, $x=(x_i)_{1\le i\le n}$, $y=(y_i)_{1\le i\le n}$ on a: $d_\alpha(x,y)=\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^\alpha}$ $=\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{n}\lvert y_i-x_i\rvert^\alpha}$ donc: $d_\alpha(x,y)=d_\alpha(y,x)$ iii) Soient $x,y,z\in X$, $x=(x_i)_{1\le i\le n}$; $y=(y_i)_{1\le i\le n}$; $z=(z_i)_{1\le i\le n}$ on a: $d_\alpha(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $=\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-z_i+z_i-y_i\rvert^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $\le\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-z_i\rvert^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert z_i-y_i\rvert^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ d'après l'inégalité de Minkowski, donc: $d_\alpha(x,y)\le d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y)$ Alors d_α est une métrique sur X.

Propriétés sur les métriques :

Soit E un ensemble non vide,
Soit d une distance sur E,

Pour tout $x_1,x_2,\dots,x_n\in E$, on a: $d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+\dots+d(x_{n-1},x_n)$	* pour $n=3$, d'après l'inégalité triangulaire, on a: $d(x_1,x_3)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, * on suppose que: $d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+\dots+d(x_{n-1},x_n)$ * montrons que: $d(x_1,x_{n+1})\le d(x_1,x_2)+\dots+d(x_n,x_{n+1})$ on a: $d(x_1,x_{n+1})\le d(x_1,x_n)+d(x_n,x_{n+1})$ d'où: $d(x_1,x_{n+1})\le d(x_1,x_2)+\dots+d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})$ Alors, d'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*: d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+\dots+d(x_{n-1},x_n)$
Pour tout $x,y,z\in E$, on a: $\lvert d(x,y)-d(y,z)\rvert\le d(x,z)$	montrons que: $-d(x,z)\le d(x,y)-d(y,z)\le d(x,z)$ on a: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ or: $d(z,y)=d(y,z)$ "la symétrie" d'où: $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$ donc: $d(x,y)-d(y,z)\le d(x,z)$ (1) et on a: $d(y,z)\le d(y,x)+d(x,z)$ or: $d(y,x)=d(x,y)$ d'où: $d(y,z)\le d(x,y)+d(x,z)$ donc: $-d(x,z)\le d(x,y)-d(y,z)$ (2) de (1) et (2): $-d(x,y)\le d(x,y)-d(y,z)\le d(x,z)$

Pour tout $x,x',y,y'\in E$, on a: $\lvert d(x,y)-d(x',y')\rvert\le d(x,y')+d(x',y)$	montrons que: $-(d(x,y')+d(x',y))\le d(x,y)-d(x',y')\le d(x,y')+d(x',y)$ on a: $d(x,y)\le d(x,y')+d(y',y)$ et: $d(y',y)\le d(y',x')+d(x',y)$ d'où: $d(x,y)\le d(x,y')+d(y',x')+d(x',y)$ or: $d(y',x')=d(x',y')$ donc: $d(x,y)\le d(x,y')+d(x',y')+d(x',y)$ d'où: $d(x,y)-d(x',y')\le d(x,y')+d(x',y)$ (1) et on a: $d(x',y')\le d(x',x)+d(x,y')$ et: $d(x',x)\le d(x',y)+d(y,x)$ d'où: $d(x',y')\le d(x',y)+d(y,x)+d(x,y')$ or: $d(y,x)=d(x,y)$ donc: $d(x',y')\le d(x',y)+d(x,y)+d(x,y')$ d'où: $-d(x,y')-d(x',y)\le d(x,y)-d(x',y')$ (2) de (1) et (2): $-(d(x,y')+d(x',y))\le d(x,y)-d(x',y')\le d(x,y')+d(x',y)$

Définition de Boule ouverte :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $a\in E$,
Soit $r\in\mathbb{R}_+$,
on appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble $B(a,r)$ définie dans E par:

$$B(a,r)=\{x\in E\,/\,d(x,a)<r\}$$

Définition de Boule fermée :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $a\in E$,
Soit $r\in\mathbb{R}_+$,
on appelle boule fermée de centre a et de rayon r, l'ensemble $B_f(a,r)$ définie dans E par:

$$B_f(a,r)=\{x\in E\,/\,d(x,a)\le r\}$$

Définition de Sphère :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $a\in E$,
Soit $r\in\mathbb{R}_+$,
on appelle sphère de centre a et de rayon r, l'ensemble $S(a,r)$ définie dans E par:

$$S(a,r)=\{x\in E\,/\,d(x,a)=r\}$$

Exemples des boules :

dans l'espace métrique $(\mathbb{R},\lvert\cdot\rvert)$ $(a\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}_+)$ on a: - $B(a,r)=]a-r,a+r[$ - $B_f(a,r)=[a-r,a+r]$	En effet: * $B(a,r)=\{x\in E/d(x,a)<r\}$ $=\{x\in E/\lvert x-a\rvert<r\}$ $=\{x\in E/-r<x-a<r\}$ $=\{x\in E/a-r<x<a+r\}$ $=]a-r,a+r[$ * $B_f(a,r)=\{x\in E/d(x,a)\le r\}$ $=\{x\in E/\lvert x-a\rvert\le r\}$ $=\{x\in E/-r\le x-a\le r\}$ $=\{x\in E/a-r\le x\le a+r\}=[a-r,a+r]$

Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ($a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$); on a: $B(a,r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r, $B_f(a,r)$ est le disque de centre a et de rayon r, $S(a,r)$ est le cercle de centre a et de rayon r,	En effet, $B(a,r)=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / d_2(x,a)<r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2\}$ C'est l'équation du disque ouvert de centre a et de rayon r. $B_f(a,r)=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/d_2(x,a)\leq r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\leq r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2\leq r^2\}$ C'est l'équation du disque de centre a et de rayon r. $S(a,r)=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/d_2(x,a)=r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}=r\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^2/(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=r^2\}$ C'est l'équation du cercle de centre a et de rayon r.
Soit E un ensemble non vide muni de la métrique discrète, Alors, pour $a\in E$: $B(a,2)=B_f(a,2)=E$ $B(a,\frac{1}{2})=B_f(a,\frac{1}{2})=E$ $S(a,2)=S(a,\frac{1}{2})=\phi$	En effet, $B(a,2)=\{x\in E/d(x,a)<2\}$ on $\forall x\in E: d(x,a)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq a\\ 0 & \text{si } x=a\end{cases}$ d'où: $B(a,2)=E$ $B_f(a,2)=\{x\in E/d(x,a)\leq 2\}$ on: $\forall x\in E: d(x,a)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq a\\ 0 & \text{si } x=a\end{cases}$ d'où $B_f(a,2)=E$ $S(a,2)=\{x\in E/d(x,a)=2\}=\phi$ De même, $B(a,\frac{1}{2})=\{x\in E/d(x,a)<\frac{1}{2}\}$ $=\{x\in E/d(x,a)=0\}$ $=\{x\in E/x=a\}$ $=\{a\}$ $B_f(a,\frac{1}{2})=\{x\in E/d(x,a)\leq\frac{1}{2}\}$ $=\{x\in E/d(x,a)=0\}$ $=\{x\in E/x=a\}$ $=\{a\}$ $S(a,\frac{1}{2})=\{x\in E/d(x,a)=\frac{1}{2}\}=\phi$

Définition d'une parties bornée :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $A\subset E$,
A est dite bornée s'il existe une boule $B(a,r)$ de E contenant A,
Autrement dit: A bornée $\Leftrightarrow \exists (a,r)\in E\times\mathbb{R}_+$, $A\subset B(a,r)$

Remarque sur les parties bornée :

E est bornée si E est égal à une boule ou d est bornée (au sens d'application).

* Supposons que E est égal à une boule,
c-à-d: $E=B(a,r)$ avec $(a,r)\in E\times\mathbb{R}_+$
comme: $E\subset B(a,r)$
donc: E est bornée.
* Supposons que d est bornée,
c-à-d: $\exists M>0, \forall x,y\in E, |d(x,y)|<M$
$\exists M>0, \forall x,y\in E, d(x,y)<M$ $(d(x,y)\geq 0)$
Soit $a\in E$,
Considérons $B(a,M)=\{x\in E/d(x,a)<M\}$
Soit $x\in E$,
on a $d(x,a)<M$
d'où: $x\in B(a,M)$
donc: $E\subset B(a,M)$
Alors E est bornée

Définition de diamètre :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $A\subset E$,
Le diamètre de A notée $\delta(A)$ est définie par:
$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

Exemple de diamètres:

Dans $(\mathbb{R}^2,d_2)$, on a: $\delta(S(a,r))=2r$

on a, $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2/d_2(x,a)=r\}$
Soient $x,y\in S(a,r)$,
d'où: $d_2(x,a)=d_2(y,a)=r$
comme: $d_2(x,y)\leq d_2(x,a)+d_2(y,a)$
donc: $d_2(x,y)\leq 2r$
d'où: $\sup_{x,y\in S(a,r)} d_2(x,y)=2r$
Alors $\delta(S(a,r))=2r$

Proposition sur les parties bornées :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $A\subset E$,
Alors: A bornée $\Leftrightarrow \delta(A)$ fini

$\Rightarrow$/ Supposons que A est bornée,
d'où: $\exists (a,r)\in E\times\mathbb{R}_+$, $A\subset B(a,r)$
Soient $x,y\in A$,
d'où: $x,y\in B(a,r)$
donc: $d(x,a)<r$ et $d(y,a)=d(a,y)<r$
Comme $d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)$
donc: $d(x,y)\leq 2r$
d'où: $\delta(A)=\sup_{x,y\in A} d(x,y)=2r$
Alors $\delta(A)$ est fini.

$\Leftarrow$/ Supposons que $\delta(A)$ est fini,
Soit $a\in A$,
Soit $x\in A$,
on a: $d(x,a)\leq \sup_{x,y\in A} d(x,y)$
c-à-d $d(x,a)\leq\delta(A)$
d'où: $d(x,a)<\delta(A)+1$
donc: $x\in\{x\in E/d(x,a)<\delta(A)+1\}=B(a,\delta(A)+1)$
d'où: $A\subset B(a,\delta(A)+1)$
Alors A est bornée.

Théorème sur la topologie d'espace métrique :

Soit (E,d) un espace métrique,
La famille T_d de parties de E définie par :

$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{O \subset E : O = \bigcup_{qlq} \text{Boules ouvertes}\}$ est une topologie sur E.

Propriétés sur les ouverts et les fermés:

Soit (E,d) un espace métrique,

Une boule ouverte est un ouvert par rapport à τ_d
Une boule fermée est un fermé par rapport à τ_d
Une Sphère est un fermé par rapport à τ_d

Remarque sur la topologie discrète:

d est la métrique discrète $\Longleftrightarrow$ τ_d est la topologie discrète

Proposition sur la base d'ouverts:

Soit (E,d) un espace métrique,
Les boules ouvertes constituent une base de la topologie τ_d,
Autrement dit: $\{B(x,r) : x \in E \text{ et } r>0\}$ est une base de τ_d

Proposition sur la base de voisinages:

$\{B(x,r) : r>0\}$ est une base de voisinages de x

$\{B(x,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinages de x

il suffit de montrer que: $\forall r>0, \exists m \in \mathbb{N}^*$,
$B(x,\frac{1}{m}) \subset B(x,r)$

Soit $r>0$,
d'où: $\exists m \in \mathbb{N}^*, rm>1$ (d'après archimède)
donc: $r > \frac{1}{m}$
d'où: $B(x,r) \supset B(x,\frac{1}{m})$

Proposition sur la séparation:

Soit (E,d) un espace métrique,
Alors, la topologie τ_d est séparée.

Soient $a,b \in E$ tels que: $a \neq b$,
Prenons: $0 < r < \frac{d(a,b)}{2}$
d'où: $B(a,r)$ est un voisinage de a,
$B(b,r)$ est un voisinage de b,
avec: $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$
Alors: τ_d est séparée.

Proposition sur l'intérieur et l'adhérence:

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $A \subset E$,

$a \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall r>0 : B(a,r) \cap A \neq \emptyset$
$a \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r>0,\ B(a,r) \subset A$

Propriétés sur les ouverts et les fermés:

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $A \subset E$,

A est un ouvert $\Longleftrightarrow \forall a \in A, \exists r>0, B(a,r) \subset A$
A est un fermé $\Longleftrightarrow \forall a \in A, \forall r>0, B(a,r) \cap A \neq \emptyset$

Définition d'une partie dense:

Soit (X,τ) un espace topologique,
Soit $A \subset X$,
A est dite dense dans X si $\bar{A} = X$

Exemple des parties denses:

$\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

- on a: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
avec, $\mathbb{R}$ est un fermé (par rapport à τ_u),
or: $\bar{\mathbb{Q}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{Q}$,
d'où: $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ (1)
- Soit $x \in \mathbb{R}$,
Soit $r>0$,
Considérons $B(x,r)$
Par la densité des nbrs rationnels dans les réels ($\forall x,y \in \mathbb{R}, x<y \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Q}, x<d<y$)
$\exists q \in \mathbb{Q},\ q \in B(x,r)$
d'où: $B(x,r) \cap \mathbb{Q} = \{q\} \neq \emptyset$
donc: $x \in \bar{\mathbb{Q}}$
Alors: $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Q}}$ (2)
de (1) et (2): $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Définition d'un espace séparable:

Soit (X,τ) un espace topologique,
(X,τ) est dite séparable s'il existe une partie au plus dénombrable (finie ou dénombrable) qui est dense dans X.

Exemples des espace séparables:

$(\mathbb{R}, \lvert\cdot\rvert)$ est séparable. en effet: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$
$(\mathbb{R}, \tau_g)$ est séparable. en effet: $\{0\} \subset \mathbb{R}$ est fini et dense dans $\mathbb{R}$
$(\mathbb{R}, \tau_{discrète})$ est non séparable.
$\mathbb{R}^n$ est séparable. en effet: $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$

Théorème

Un espace métrique (E,d) est séparable si et seulement s'il existe une base au plus dénombrable de τ_d

$\Rightarrow$/ Supposons que (E,d) est séparable,
Soit D une partie au plus dénombrable de E telle que: D dense dans E
Notons: $\mathcal{B} = \{B(z,r) : z \in D \text{ et } r \in \mathbb{Q}^{+*}\}$

$\mathcal{B}$ est dénombrable, d'où au plus dénombrable,

Soit $\theta \in \tau_d$,

Soit $x \in \theta$,

d'où : $\exists r \in \mathbb{Q}^+$, $B(x, 2r) \subset \theta$

et : $\exists z \in D$, $z \in B(x, r)$

donc : $x \in B(z, r) \subset B(x, 2r) \subset \theta$

alors, $\mathcal{B}$ est une base de τ_d.

$\Leftarrow$/ Supposons que τ_d possède une base dénombrable $\mathcal{B}$,

Soit $B \in \mathcal{B}$ non vide,

Soit $x_B \in B$,

Posons : $D = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$

D est dénombrable, d'où au plus dénombrable

et on a : D dense dans E

car : $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, $B(x_B, r) \cap D = \{x_B\} \neq \phi$

donc : E est séparable.

Fin de Chapitre

Espace métriques :

Suites et Applications dans les espaces métriques :

Définition de limite d'une suite :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $\ell \in E$,
Une suite (x_n) d'éléments de E tend vers ℓ
si : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n,\ell) < \varepsilon$
et on dit : ℓ est la limite de la suite (x_n) dans (E,d).

Remarques sur la limite d'une suite :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit (x_n) une suite d'éléments de E,

Si la suite (x_n) admet $\ell \in E$ comme limite,
Alors : ℓ est unique et on note $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$

L'unicité de ℓ vient de fait que τ_d est séparé.

Si la suite (x_n) admet une limite dans (E,d),
on dit que (x_n) est convergente dans (E,d).

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell}_{\text{Dans }(E,d)} \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d(x_n,\ell) = 0}_{\text{Dans }(\mathbb{R},|\cdot|)}$$

Définition de suite extraite :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit $x=(x_n)$ une suite d'éléments de E,
Une suite extraite / sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $x\circ\phi : \mathbb{N} \longrightarrow E$
où $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Une suite extraite est souvent notée :
$(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Proposition :

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite

Soit (x_n) une suite convergente de limite ℓ,
Soit $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de (x_n),
Comme : $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante,
montrons que : $\forall k \in \mathbb{N} : \phi(k) \geq k$
* pour $k=0$: $\phi(0) \geq 0$ vraie, car $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Soit $k \in \mathbb{N}$,
* supposons que : $\phi(k) \geq k$ (HR)
* On a : $k+1 > k \Rightarrow \phi(k+1) > \phi(k)$; ϕ est stric. ↗
$\Rightarrow \phi(k+1) \geq \phi(k)+1 \geq k+1$
$\Rightarrow \phi(k+1) \geq k+1$

Soit $\varepsilon>0$,
puisque : (x_n) converge vers ℓ,
donc : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow d(x_n,\ell) < \varepsilon$
or : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\phi(k) \geq k$
en particulier : $\forall k \geq N$, $\phi(k) \geq k$
d'où : $\phi(k) \geq k \geq N \Rightarrow d(x_{\phi(k)},\ell) < \varepsilon$
alors : $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Définition de valeur d'adhérence :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit (x_n) une suite d'éléments de E,
Un point $x \in E$ est valeur d'adhérence de (x_n),
si x est la limite d'une suite extraite de (x_n)

Remarques :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit (x_n) une suite d'éléments de E,
Soit $x \in E$,

Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, Alors : x est l'unique valeur d'adhérence de (x_n).

La réciproque est fausse :
Dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, la suite définie par :
$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ paire} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$$
est divergente
or : $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, d'où : 0 est la seule valeur d'adhérence de (x_n)

Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente

Une valeur d'adhérence de (x_n) est un point adhérent à la partie $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$:
x valeur d'adhérence de $(x_n) \Rightarrow x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$

La réciproque est fausse.

Proposition :

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit (x_n) une suite d'élément de E,
Les conditions suivantes sont équivalentes :
1/ a est valeur d'adhérence de (x_n)
2/ il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) qui converge vers a
3/ $\forall \varepsilon>0$, l'ensemble $\{x_n : x_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini
4/ $\forall \varepsilon>0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n : x_m \in B(a,\varepsilon)$
5/ $a \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k : k \geq m\}}$

* $1/ \Rightarrow 2/$

Par définition de valeur d'adhérence d'une suite

* $2/ \Rightarrow 3/$

Soit $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N} : k\geq N \Rightarrow d(x_{n_k},a)<\varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_k}\in B(a,\varepsilon)$

donc: $\{x_{n_k} : k\geq N\}\subset\{x_n : x_n\in B(a,\varepsilon)\}$

Comme $(n_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante,

alors: $\{x_{n_k} : k\geq N\}$ est infini,

d'où: $\{x_n : x_n\in B(a,\varepsilon)\}$ est infini.

* $3/ \Rightarrow 4/$
* $4/ \Rightarrow 5/$

on a: $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0, \exists m\geq n : x_m\in B(a,\varepsilon)$

d'où: $\forall n\in\mathbb{N} : a\in\overline{\{x_m : m\geq n\}}$

donc: $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_m : m\geq n\}}$

* $5/ \Rightarrow 1/$

on a: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a\in\overline{\{x_m : m\geq n\}}$

d'où, $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0$, $\{x_m : m\geq n\}\cap B(a,\varepsilon)\neq\emptyset$

c-à-d: $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0, \exists m\geq n : x_m\in B(a,\varepsilon)$

donc: $\forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N} : m\geq n \Rightarrow d(x_m,a)<\varepsilon$

alors: a est la limite de la suite (x_m)

c-à-d: $\lim_{m\to+\infty} x_m = a$

Alors: a est valeur d'adhérence de (x_m) (c'est l'unique)

Théorème:

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit A une partie non vide de E,
Alors: $a\in\overline{A} \Leftrightarrow \exists(x_n)\subset A : \lim_{n\to+\infty} x_n = a$

$\Rightarrow$/ Soit $a\in\overline{A}$

Comme $\{B(a,\frac{1}{n}) : n\in\mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de a,

donc: $\forall n\in\mathbb{N}^* : B(a,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$

Soit $x_n\in B(a,\frac{1}{n})\cap A$

d'où $(x_n)\subset A$ (c'est une suite d'éléments de A)

de plus: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\in B(a,\frac{1}{n})$

c-à-d: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d(x_n,a)<\frac{1}{n}$

puisque: $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc: $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,a)=0$

Alors: $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$

$\Leftarrow$/ Supposons que a est limite d'une suite $(x_n)\subset A$,

Soit $\varepsilon>0$

donc: $\exists N\in\mathbb{N} : n\geq N \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$

en particulier: $d(x_0,a)<\varepsilon \quad (0\geq N)$

d'où: $x_0\in B(a,\varepsilon)$ et $x_0\in A$

donc: $x_0\in B(a,\varepsilon)\cap A \Rightarrow B(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

Alors: $a\in\overline{A}$

Corollaire:

Soit (E,d) un espace métrique,
Soit A une partie non vide de E,
Alors: A est fermé $\Leftrightarrow \forall(x_n)\subset A$ convergente, on a: $\lim_{n\to+\infty} x_n\in A$

$\Rightarrow$/ Supposons que A est fermé,

Soit $(x_n)\subset A$ telle que: $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$

d'où: $a\in\overline{A}$ (d'après théorème précédente)

Comme A est fermé,

donc: $A=\overline{A}$

d'où: $a\in A$

c-à-d: $\lim_{n\to+\infty} x_n\in A$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\forall(x_n)\subset A$ convergente, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n\in A$

Soit $a\in\overline{A}$,

d'où, $\exists(y_n)\subset A : \lim_{n\to+\infty} y_n = a$

donc: $a\in A$

alors: $\overline{A}\subset A$

or: $A\subset\overline{A}$

donc: $A=\overline{A}$

d'où A est fermé

Définition des métriques équivalentes:

Soit E un ensemble non vide,

Alors: Deux métriques d_1 et d_2 sur E sont dite équivalentes si et seulement si:

$$\exists c_1,c_2>0,\quad c_1 d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq c_2 d_1(x,y),\ \forall x,y\in E$$

Exemple sur les métriques équivalentes:

Pour $E=\mathbb{R}^2$, on pose:

$d_1(x,y)=\operatorname{Sup}_{1\leq i\leq 2}|x_i-y_i|$ et $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

avec $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$

on a: $0\leq|x_1-y_1|\leq d_1(x,y)$

d'où: $\sqrt{(x_1-y_1)^2}\leq d_1(x,y)$

de même: $0\leq|x_2-y_2|\leq d_1(x,y)\Rightarrow\sqrt{(x_2-y_2)^2}\leq d_2(x,y)$

donc: $\sqrt{(x_1-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-y_2)^2}\leq 2d_1(x,y)$

Comme $(x_1-y_1)^2\geq 0$ et $(x_2-y_2)^2\geq 0$

alors: $\sqrt{(x_1-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-y_2)^2}\geq\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=d_2(x,y)$

d'où: $d_2(x,y)\leq 2d_1(x,y)$ (1)

d'autre part, on a: $(x_1-y_1)^2\leq(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$

d'où: $|x_1-y_1|\leq\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=d_2(x,y)$

de même: $(x_2-y_2)^2\leq(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$

$\Rightarrow|x_2-y_2|\leq d_2(x,y)$

donc: $|x_1-y_1|\leq d_2(x,y)$ et $|x_2-y_2|\leq d_2(x,y)$

Alors: $\operatorname{Sup}_{1\leq i\leq 2}|x_i-y_i|\leq d_2(x,y)$

c-à-d: $d_1(x,y)\leq d_2(x,y)$ (2)

Définition des métriques topologiquement équivalentes :

Soit E un ensemble non vide,
Alors : deux métriques d_1 et d_2 sur E sont dites topologiquement équivalentes, si (E,d_1) et (E,d_2) ont les mêmes ouverts.
d_1 et d_2 définissent donc la même topologie.

Proposition :

Deux métriques équivalentes sont topologiquement équivalentes.

Soient d_1 et d_2 deux métriques équivalentes,
donc : $\exists c_1, c_2 > 0, \forall x,y \in E, c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$
Soit U un ouvert dans (E,d_1),
donc : $\forall x \in U, \exists r>0, B_{d_1}(x,r) \subset U$
or : $B_{d_2}(x, c_1 r) \subseteq B_{d_1}(x,r)$ car : $c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$
alors : $\forall x \in U, \exists r' = c_1 r > 0, B_{d_2}(x,r') \subset U$
d'où U est un ouvert dans (E,d_2).

La réciproque est fausse

Théorème :

Soit E un ensemble non vide,
Soient d et d' deux métriques topologiquement équivalentes sur E,
Alors :

1) $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans $(E,d) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans (E,d')
2) θ est un ouvert dans $(E,d) \Leftrightarrow \theta$ est un ouvert dans (E,d')
3) F est un fermé dans $(E,d) \Leftrightarrow F$ est un fermé dans (E,d')

2) Par définition de métriques topologiquement équivalentes.

3) Par définition de métriques topologiquement équivalentes, car : F^c est un ouvert.

1) $\Rightarrow$/ Supposons que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans (E,d),
donc : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n,x) < \varepsilon$
c-à-d : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in B_d(x,\varepsilon)$
comme d et d' sont topologiquement équivalentes,
donc les ouverts dans (E,d) sont les mêmes dans (E,d')
en particulier : $B_d(x,\varepsilon)$ est un ouvert dans (E,d)
donc : $B_d(x,\varepsilon)$ est un ouvert dans (E,d')
Alors : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d'(x_n,x) < \varepsilon$
d'où : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans (E,d').
$\Leftarrow$/ de la même manière.

Définition sur la continuité :

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $f: E \to F$ une application,
Soient $a \in E$ et $b \in F$,

- Alors :
  - on dit que f a pour limite b lorsque x tend vers a, si :
    $\forall \varepsilon>0, \exists r>0, d(x,a) < r \Rightarrow d'(f(x),b) < \varepsilon$
    on écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = b$
  - on dit que f est continue en a, si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
  - on dit que f est continue, si f est continue en tout point de E.

Théorème :

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $f: E \to F$ une application,
Soient $a \in E$ et $b \in F$,
Alors :
$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b

$\Rightarrow$/ Supposons que : $\lim_{x\to a} f(x) = b$
alors : $\forall \varepsilon>0, \exists r>0, d(x,a) < r \Rightarrow d'(f(x),b) < \varepsilon$
Soit $(x_n) \subset E$ telle que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$
donc : $\forall \alpha>0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n,a) < \alpha$
pour $\alpha = r$,
$\exists N \in \mathbb{N} ; n \geq N \Rightarrow d(x_n,a) < r$
d'où : $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d'(f(x_n),b) < \varepsilon$
donc : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$
$\Leftarrow$/ Supposons que $\forall (x_n) \subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b,
Supposons par absurde que : $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$
donc : $\exists \varepsilon>0, \forall r>0, d(x,a) < r \Rightarrow d'(f(x),b) \geq \varepsilon$
Soit $n \in \mathbb{N}$,
Posons : $r = \frac{1}{n+1}$
Alors : $\exists x_n \in E, d(x_n,a) < \frac{1}{n+1} \Rightarrow d'(f(x_n),b) \geq \varepsilon$
avec : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
donc : $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq b$ "Absurde"
car : $\forall (x_n) \subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b

Corollaire :

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $f: E \to F$ une application,
Soient $a \in E$ et $b \in F$,
Alors :
f est continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$

on a : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

et d'après le théorème précédent, on a :
$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Rightarrow \forall (x_n)\subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$

Corollaire :

> La composée de deux applications continues est une application continue.

Soient $f: E\to F$ et $g: F\to G$ deux applications continues,
Soit $a\in E$,
Soit $(x_n)\subset E$ une suite convergeant vers a,
Comme f est continue sur E, d'où continue en a,
donc : la suite $(f(x_n))\subset F$ converge vers $f(a)$.
et comme g est continue sur F, d'où continue en $f(a)$,
donc : la suite $(g(f(x_n)))\subset G$ converge vers $g(f(a))$,
Alors : $\forall (x_n)\subset E$ convergeant vers a, la suite $(g\circ f(x_n))$ converge vers $g\circ f(a)$,
d'où : $g\circ f$ est continue en a,
donc : $g\circ f$ est continue.

Proposition :

> Soient (E,d) et (F,d') deux espace métriques
> Soit $A\subset E$ une partie dense,
> Soient $f: E\to F$ et $g: E\to F$ continues,
> Alors : $f_{|A}=g_{|A} \Rightarrow f=g$

Soit $a\in E$,
comme : A est une partie dense dans E,
donc : $\bar{A}=E$
d'où : $a\in\bar{A}$
Alors : $\exists (x_n)\subset A,\ \lim_{n\to+\infty} x_n=a$
puisque f et g sont continues,
donc : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a)$ et $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=g(a)$
et comme : $f_{|A}=g_{|A}$ et $(x_n)\subset A$
donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x_n)=g(x_n)$
Par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$:
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$$
d'où : $f(a)=g(a)$
donc : $f=g$

Définition de continuité uniforme :

Soient (E,d) et (F,d') deux espace métriques,
Soit $f: E\to F$,
on dit que f est uniformément continue si :
$$\forall \varepsilon>0, \exists r>0,\ d(x,y)<r \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Remarques :

> Une application uniformément continue est continue.

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $f: E\to F$ une application uniformément continue,
Soit $a\in E$,
montrons que : $\forall (x_n)\subset E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$
f est uniformément continue,
donc : $\forall\varepsilon>0, \exists r>0,\ d(x,y)<r \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$
Soit $\varepsilon>0$, et Soit $(x_n)\subset E$ convergeant vers a,
donc : $\forall \alpha>0, \exists N\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow d(x_n,a)<\alpha$
Pour $\alpha=r$,
d'où : $d(x_n,a)<r \Rightarrow d'(f(x_n),f(a))<\varepsilon$
donc : $\exists N\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow d'(f(x_n),f(a))<\varepsilon$
alors : $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$,
d'où : f est continue en a,
donc : f est continue.

> Les applications continues entre deux espaces métriques (E,d) et (F,d') restent les mêmes si on passe à des métriques topologiquement équivalentes sur E ou F, mais les applications uniformément continues ne restent pas les mêmes.

Définition du prolongement continue :

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $A\subset E$,
Soit $g: A\to F$ une application continue,
on appelle prolongement continue de g, toute application $f: E\to F$ continue telle que :
$$f_{|A}=g$$

Définition :

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques,
Soit $A\subset E$,
Soient $a\in\bar{A}$ et $b\in F$,
on dit qu'une application $f: E\to F$ tend vers b en a par rapport à A si :
$$\forall\varepsilon>0, \exists r>0,\ (x\in A \text{ et } d(x,a)<r) \Rightarrow d'(f(x),b)<\varepsilon$$
on écrit : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$

Proposition :

> $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b \Leftrightarrow \forall (x_n)\subset A$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n=a$, on ait : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=b$

$\Rightarrow$/ Supposons que : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$

donc : $\forall \varepsilon>0, \exists r>0, (x \in A$ et $d(x,a)<r) \Rightarrow d'(f(x),b)<\varepsilon$

Soit $\varepsilon>0$,

Soit $(x_n) \subset A$ une suite telle que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$

et : $\forall \alpha>0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \alpha$

Posons $\alpha = r$,

donc : $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (d(x_n,a)<r$ et $x_n \in A)$

d'où : $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d'(f(x_n), b) < \varepsilon$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$

$\Leftarrow$/ Supposons que $\forall (x_n) \subset A$ telle que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$

on ait : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$

Supposons par absurde que : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) \neq b$

donc : $\exists \varepsilon>0, \forall r>0, (x\in A$ et $d(x,a)<r) \Rightarrow d'(f(x),b) \geq \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Posons $r = \frac{1}{n+1}$,

Alors : $\exists x_n, x_n \in A$ et $d(x_n,a) < \frac{1}{n+1} \Rightarrow d'(f(x_n), b) \geq \varepsilon$

avec : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc : $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq b$ "Absurde"

car : $\forall (x_n) \subset A$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on ait :

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$

Proposition :

> Soient (E,d) et (F,d') deux espace métriques,
> Soit x_0 un point non isolé de E,
> Soit $f : E\setminus\{x_0\} \to F$ une application continue,
> Si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} f(x) = b$, Alors l'application :
> $$\tilde{f} : E \longrightarrow F$$
> $$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ b & si\ x = x_0 \end{cases}$$
> est l'unique prolongement continue de f en x_0

* montrons que $\tilde{f}$ est prolongement continue de f en x_0,

i) montrons que $\tilde{f}$ est continue en x_0 ;

on a : $\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} f(x)$

car : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E\setminus\{x_0\}$

donc : $\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = b = \tilde{f}(x_0)$

d'où : $\tilde{f}$ est continue en x_0.

ii) montrons que $\tilde{f}_{|E\setminus\{x_0\}} = f$,

on a : $\forall x \in E\setminus\{x_0\}, \tilde{f}_{|E\setminus\{x_0\}}(x) = f(x)$ car $x \neq x_0$

d'où : $\tilde{f}_{|E\setminus\{x_0\}} = f$

* montrons que $\tilde{f}$ est unique,

Soit $h : E \to F$ un prolongement continue de f en x_0,

on a : $\tilde{f}_{|E\setminus\{x_0\}} = f$ et $h_{|E\setminus\{x_0\}} = f$

donc : $\tilde{f}_{|E\setminus\{x_0\}} = h_{|E\setminus\{x_0\}}$

d'où : $\forall x \in E\setminus\{x_0\}, \tilde{f}(x) = h(x)$ (1)

de plus, on a : $\tilde{f}$ et h sont continues en x_0,

donc : $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)$ et $h(x_0) = \lim_{x\to x_0} h(x)$

comme $\tilde{f}$ et h sont des prolongements continues de f en x_0,

et : $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} f(x) = b$

alors : $\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = b = \lim_{x\to x_0} h(x) = b$

d'où : $\tilde{f}(x_0) = h(x_0)$ (2)

de (1) et (2) : $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = h(x)$

donc : $\tilde{f} = h$

d'où : $\tilde{f}$ est unique.

Fin de Chapitre #1