Cours : chapitre 3

1 La rotondité de la Terre

L'environnement « plat » à notre échelle de perception cache la forme réelle de la Terre, dont la compréhension résulte d'une longue réflexion.

Jusqu'au VIe siècle avant J.-C., on trouve des représentations où la Terre est considérée comme un disque ou un cylindre flottant à la surface d'un océan infini. Certains cependant se doutent que la Terre est « ronde » : les Anciens avaient remarqué que, lorsqu'un bateau arrive à l'horizon, on commence à voir le mât avant la proue. C'est entre les Ve et le IVe siècles avant notre ère que Pythagore, Platon et surtout Aristote apportent les premières preuves de la forme sphérique de la Terre :
– lors d'une éclipse de Lune, on observe la forme arrondie de l'ombre de la Terre sur la Lune (Fig. 1) ;
– lorsqu'on se déplace du Nord au Sud, l'aspect du ciel change : les étoiles apparaissent au-dessus de l'horizon, tandis que d'autres étoiles disparaissent sous l'horizon dans la direction opposée.

Aristote pense même qu'il n'y a qu'une seule mer de l'Afrique aux Indes. La forme sphérique de la Terre est devenue une évidence pour les savants grecs.

La rotondité étant un fait acquis, des progrès sur la connaissance de la forme de la Terre ne furent accomplis qu'aux XVIIe et XVIIIe siècles par la découverte de l'aplatissement de la Terre aux pôles : la Terre n'est pas exactement sphérique, mais a la forme d'un ellipsoïde.

Fig. 1 : Éclipse de Lune.

2 La longueur d'un méridien

Le calcul d'Ératosthène

Au IIIe siècle avant J.-C., le savant grec Ératosthène donne une estimation de la circonférence de la Terre. Il a observé qu'à midi, le jour du solstice d'été, il n'y a pas d'ombre à Syène. En revanche, à Alexandrie, à 5 000 stades (environ 800 km) plus au nord, l'ombre faite par un gnomon (bâton) permet de déterminer que les rayons du Soleil font un angle de 1/50 d'angle plein (7,2°) par rapport à la verticale (Fig. 2).

Il considère que la Terre est ronde, que les rayons du Soleil sont parallèles (car le Soleil est infiniment loin) et que les deux villes sont sur un même **méridien**.

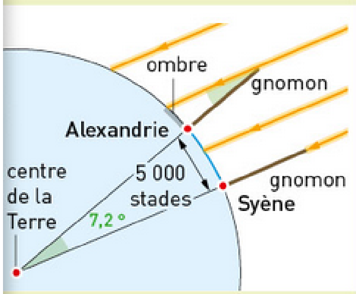


Fig. 2 : Les hypothèses d'Ératosthène.

Partant du fait que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle qui l'intercepte, Ératosthène calcule alors la circonférence de la Terre.
Il trouve une valeur $C = 5\,000 \times 50 = 250\,000$ stades, soit environ 40 000 km.

La triangulation de Delambre et Méchain

En 1791, en France, l'Académie des sciences décide que le **mètre**, nouvelle unité de longueur, serait défini comme étant égal au dix-millionième du quart du méridien terrestre.

Trois éléments ont été déterminants pour lancer une mission devant établir la longueur du méridien : la méthode de triangulation de Snellius (1615), les progrès de la trigonométrie sphérique et la mise au point d'un instrument très précis de mesure des angles, le cercle répétiteur de Borda.

La méthode de **triangulation** consiste à mesurer une seule distance (la « base »), puis de construire une chaîne de triangles à partir de cette base. On mesure les angles de ces triangles par visée avec le cercle de Borda, puis on en déduit les distances dans chaque triangle par une formule de trigonométrie : la loi des sinus (Fig. 3).

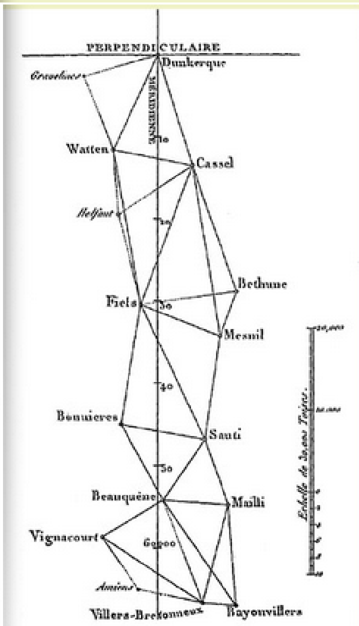


Fig. 3 : Triangulation de Dunkerque à Amiens.

En 1791, deux scientifiques, Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain, sont chargés de mesurer la partie du méridien de Paris située entre Dunkerque et Barcelone : ils réalisent durant sept ans des mesures avec une chaîne de 94 triangles. Une unique mesure de longueur sera effectuée : celle de la base, située à Melun.

3 Longueur d'un chemin sur Terre

Pour calculer la longueur d'un chemin reliant deux points à la surface de la Terre, on doit tout d'abord connaître la position de ces deux points.

Ce sont les méridiens et les parallèles, cercles imaginaires tracés sur le globe terrestre, qui permettent de faire ce repérage :
– un **méridien** est un cercle qui passe par les deux pôles ;
– un **parallèle** est l'intersection de la sphère terrestre et d'un plan parallèle à celui de l'équateur.

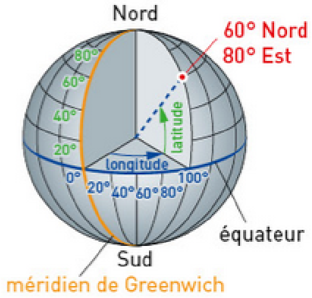


Fig. 4 : Latitude et longitude d'un point à la surface de la Terre.

Chaque point sur Terre peut être repéré par deux angles (Fig. 4) :
– la **longitude**, angle mesuré à partir du méridien de Greenwich ;
– la **latitude**, angle mesuré à partir de l'équateur.

Pour relier deux points, on peut imaginer différents trajets.

Lorsque deux points sont sur un même méridien, la longueur du chemin qui les relie suivant ce méridien est celle de l'**arc de méridien** intercepté par un angle que l'on déduit des latitudes des deux points.

Exemple : avec les données de la figure 5 a :
$\frac{L}{\widehat{AOB}} = \frac{L_M}{360}$ où $\widehat{AOB} = 60° - 22° = 38°$ et L_M, la circonférence du méridien :
$L_M \approx 40\,000$ km.

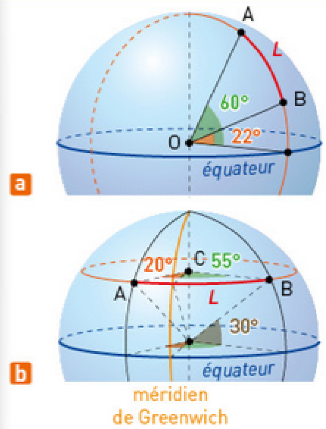


Fig. 5 : Arc de méridien (a) et arc de parallèle (b) reliant deux points à la surface de la Terre.

Lorsque deux points sont sur un même parallèle, la longueur du chemin qui les relie suivant ce parallèle est celle de l'**arc de parallèle** intercepté par un angle que l'on déduit des longitudes des points.

Exemple : avec les données de la figure 5 b :
$\frac{L}{\widehat{ACB}} = \frac{L_P}{360}$ où $\widehat{ACB} = 55° + 20° = 75°$ et où L_P est la longueur du parallèle de latitude 30° Nord. Ce chemin n'est pas le plus court.

Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du **grand cercle** qui les relie.

Cet arc de grand cercle est appelé « route orthodromique* » (Fig. 6). Des logiciels SIG (système d'information géographique) calculent sa longueur.

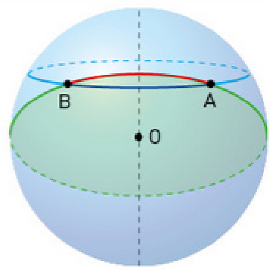


Fig. 6 : Grand cercle reliant deux points A et B.

Le vocabulaire à retenir

- **Arc de méridien :** chemin qui relie deux points d'un même méridien en suivant ce méridien.
- **Arc de parallèle :** chemin qui relie deux points d'un même parallèle en suivant ce parallèle.
- **Grand cercle :** intersection de la sphère terrestre et d'un plan qui passe par son centre.
- **Latitude :** angle mesuré à partir de l'équateur.
- **Longitude :** angle mesuré à partir du méridien de Greenwich.
- **Méridien :** grand cercle qui passe par les deux pôles. La circonférence d'un méridien est environ 40 000 km.
- **Mètre :** unité de mesure de longueur créée en 1799.
- **Parallèle :** intersection de la sphère terrestre et d'un plan parallèle à celui de l'équateur.
- **Triangulation :** méthode de mesure de distances à l'aide d'une chaîne de triangles.

Activité 1 : La forme de la Terre

DOC 1 Des conceptions anciennes

Les premières conceptions de la forme de la Terre proviennent des représentations mythologiques d'une déesse Terre (Gaïa) qui occupait le bas de l'Univers et qui possédait des racines. L'idée d'un disque terrestre entouré du fleuve Océan est présent dans les chants épiques attribués à Homère (VIIIe av. J.-C.) (a).

Le premier savant connu à avoir analysé la forme de notre planète est Thalès de Milet (625-547 av. J.-C.) : il émet l'idée d'une Terre en forme de disque flottant sur un océan infini. Pour Anaximandre (610-546 av. J.-C) (b), la Terre est cylindrique, au milieu d'un Univers infini. Certains de ses disciples, comme Anaximène, affirment que la Terre est un disque très aplati baignant dans un océan fini, le tout maintenu dans l'espace sur un coussin d'air.

Ce sont les disciples de Pythagore avec Parménide d'Élée (Ve av. J.-C.) qui vont affirmer les premiers la sphéricité de la Terre. Parménide a écrit ce poème : « *Mais, puisque* [le Monde] *est parfait sous une limite extrême, il ressemble à la masse d'une sphère arrondie de tous côtés, également distante de son centre en tous points.* »

Platon (429-348 av. J.-C.) affirme également que la Terre est entourée d'une sphère d'eau, d'une sphère d'air et d'une sphère de feu.

a

b

Représentations de la Terre dans l'Antiquité :
a selon Homère ; b selon Anaximandre.

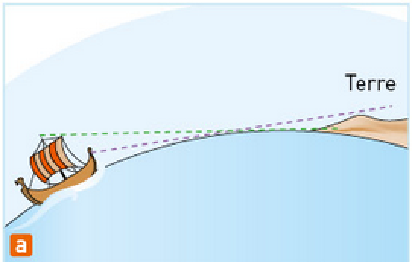
DOC 2 Les premières observations

Les navigateurs ont été les premiers à faire certaines observations. Au Ier siècle ap. J.-C., Pline l'Ancien écrit :

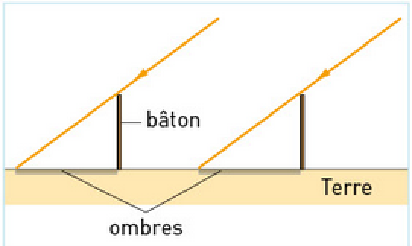
« *Du tillac d'un vaisseau, on n'aperçoit pas la terre et on la voit si on grimpe au haut du mât. Quand le navire s'éloigne, s'il y a quelque chose de brillant attaché au mât, cet objet semble peu à peu descendre et enfin disparaître entièrement.* » (a)

D'autres observations, sur terre, ont été faites sur les ombres en divers lieux. On place un bâton dans le sol un jour ensoleillé, puis on mesure la longueur de l'ombre du bâton. Au même moment, on fait la même chose avec un bâton de même taille à quelques kilomètres de là. Les longueurs des ombres sont différentes !

Puisque le Soleil est très éloigné, les rayons du Soleil atteignant deux points de la Terre sont quasiment parallèles. Si la Terre était plate, on pourrait enfoncer deux bâtons identiques dans le sol à n'importe quel endroit de la Terre ; les ombres que ces bâtons projettent auraient toujours la même longueur (b).



a



b Ombres si la Terre était plate.

DOC 3 Les arguments d'Aristote

Portrait du savant grec Aristote.

Dans son *Traité du Ciel*, le savant grec Aristote (384-322 av. J.-C.) est le premier à avancer des arguments physiques et empiriques pour affirmer que la Terre est ronde :

« Lors des éclipses, la Lune a toujours pour limite une ligne courbe : par conséquent, comme l'éclipse est due à l'interposition de la Terre, c'est la forme de la surface de la Terre qui est cause de la forme de cette ligne. »

« D'après la manière dont les astres se montrent à nous, il est prouvé que non seulement la Terre est ronde, mais même qu'elle n'est pas très grande, car il nous suffit de faire un léger déplacement, vers le sud ou vers l'Ourse, pour que le cercle de l'horizon devienne évidemment tout autre. [...] Ainsi, quand on suppose que le pays qui est aux colonnes d'Hercule va se rejoindre au pays qui est vers l'Inde, et qu'il n'y a qu'une seule et unique mer, on ne me paraît pas faire une supposition par trop incroyable. »

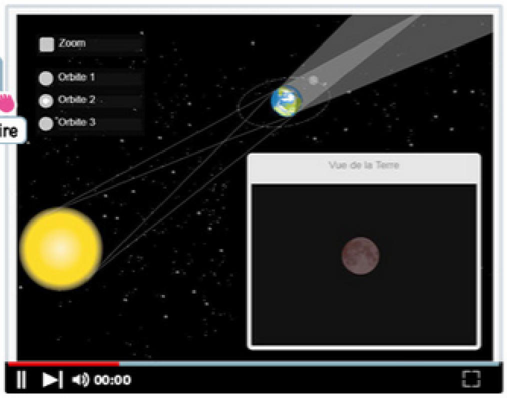
Le fait que la Terre soit sphérique devient alors communément admis et Ératosthène de Cyrène (276-194 av. J.-C.) l'utilise dans ses écrits.

DOC 4 Les éclipses de Lune

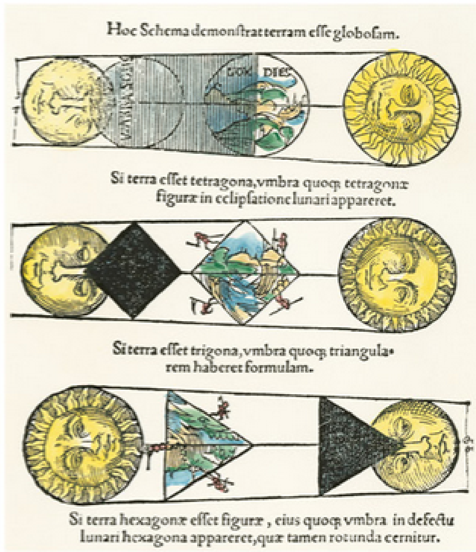
Une éclipse de Lune se produit chaque fois que la Lune se trouve dans l'ombre de la Terre (a). Cela se produit uniquement lorsque la Lune est éclairée et quand le Soleil, la Terre et la Lune sont alignés ou proches de l'être.

Les éclipses de Lune sont une preuve de la sphéricité de la Terre (b), car l'ombre projetée par la Terre sur la Lune est ronde.

ANIM ATION
Éclipse lunaire



a



b Démonstration d'Aristote de la sphéricité de la Terre (gravure de 1581).

Pistes de travail

Pour comprendre comment les Hommes en sont arrivés à la conception d'une Terre sphérique :

1. **Décrire** les premières conceptions des Hommes quant à la forme de la Terre.
2. **Expliquer** les éléments qui ont permis aux savants de l'Antiquité de faire évoluer leurs conceptions.
3. **Dire** à quelle période on peut situer une démarche scientifique aboutissant à des conclusions correctes sur la forme de la Terre.
4. **Préciser** s'il y a encore débat de nos jours sur la forme de la Terre.

Activité 2 : Circonférence de la Terre

DOC 1 Observation de l'ombre d'un gnomon

Vers l'an 434 av. J.-C., le philosophe grec Anaxagore de Clazomènes (vers 500-vers 428 av. J.-C.) calcule la distance de la Terre au Soleil : il trouve environ 6 500 km.

Deux cents ans plus tard, l'astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec Ératosthène (vers 276-vers 194 av. J.-C.) calcule la circonférence de la Terre : il trouve une valeur très proche de celle connue aujourd'hui.

Tous deux sont partis de la même observation : le jour du solstice d'été (21 juin), à midi, un gnomon (bâton) vertical planté à Syène (S) n'a pas d'ombre. Le même jour et à la même heure, un gnomon vertical planté à Alexandrie (A), 5 000 stades égyptiens (environ 800 km) plus au nord, fait une ombre et l'angle entre les rayons du Soleil et la verticale est de 1/50 d'angle plein (soit 7,2°).

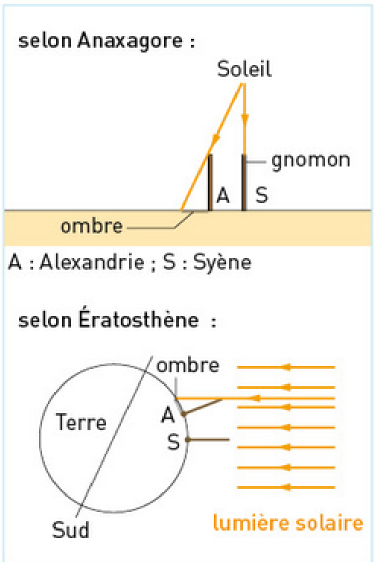
Ératosthène enseignant à Alexandrie (peinture de Bernardo Strozzi ; vers 1635).

DOC 2 Importance des hypothèses

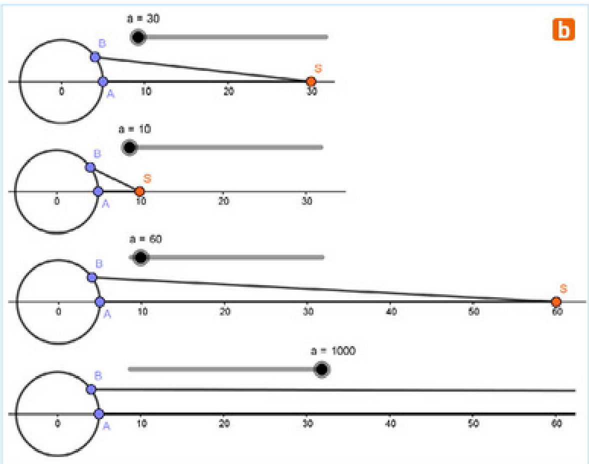
Anaxagore et Ératosthène sont partis de la même observation. Mais ils ne l'ont pas exploitée de la même façon (a).

Anaxagore a pourtant été l'un des premiers à utiliser les lois de la géométrie pour étudier les astres. Il est connu pour avoir expliqué les éclipses lunaires et solaires. Mais il pensait que la Terre était plate.

Ératosthène, appelé en Égypte pour assurer l'éducation du fils du roi et nommé directeur de la bibliothèque d'Alexandrie, avait accès à toutes les connaissances de l'époque, aussi bien astronomiques que géométriques. Il estimait que la Terre était sphérique et que le Soleil était très loin.



a Schémas illustrant la compréhension du phénomène par les deux savants.



Pour comprendre l'importance de l'hypothèse faite par Ératosthène sur le Soleil, on a réalisé avec un logiciel les figures ci-contre (b). Les points A et B sont fixes et le point S a pour abscisse *a*. La valeur de *a* peut varier de 10 à 1 000.

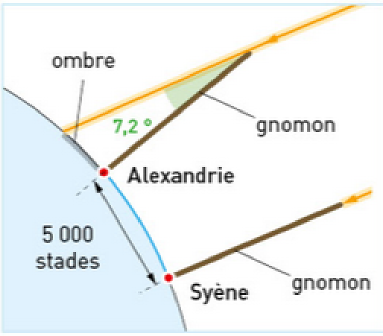
DOC 3 Construction de la figure permettant le calcul de la longueur du méridien

Voici un extrait de *De motu circulari corporum celestium* de Cléomède. On doit à Cléomède (IIe ou IIIe siècle après J.-C.) de connaître les procédés utilisés par Ératosthène et par Poseidonios pour leurs évaluations de la circonférence terrestre.

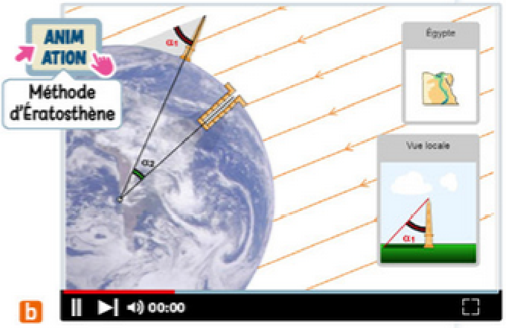
> Si nous nous représentons des droites passant par la Terre à partir de chacun des gnomons, elles se rejoindront au centre de la Terre. Lorsque donc le cadran solaire de Syène est à la verticale sous le Soleil, si nous imaginons une ligne droite venant du Soleil jusqu'au sommet du gnomon du cadran, il en résultera une ligne droite venant du Soleil jusqu'au centre de la Terre. Si nous imaginons une autre ligne droite à partir de l'extrémité de l'ombre du gnomon et reliant le sommet du gnomon du cadran d'Alexandrie au Soleil, cette dernière ligne et la ligne qui précède seront parallèles, reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre. Sur ces droites donc, qui sont parallèles, tombe une droite qui va du centre de la Terre jusqu'au gnomon d'Alexandrie, de manière à créer des angles alternes égaux ; l'un d'eux se situe au centre de la Terre à l'intersection des lignes droites qui ont été tirées des cadrans solaires jusqu'au centre de la Terre, l'autre se trouve à l'intersection du sommet du gnomon d'Alexandrie et de la droite tirée de l'extrémité de son ombre jusqu'au Soleil, à son point de contact avec le gnomon.
>
> Cléomède, *Théorie élémentaire*, traduction R. Goulet, Vrin, 1980.

Pour mener une investigation

- Utiliser cet extrait pour reproduire et compléter la figure **a** ci-contre.
- Vérifier la construction en utilisant l'animation proposée (**b**).



a



b

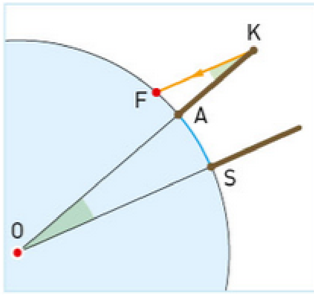
DOC 4 Quelques éléments pour réaliser les calculs

Ératosthène connaissait la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AS}$ (5 000 stades, soit environ 800 km) et la mesure de l'angle $\widehat{AOS}$ qui intercepte cet arc (1/50 d'angle plein, soit 7,2°).

Il savait que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle qui l'intercepte.

Il en a déduit que la circonférence de la Terre était 50 fois la distance entre Syène et Alexandrie.

En notant L_M la circonférence de la Terre (en km) et en exprimant les angles en degré, on peut aussi écrire : $\frac{800}{7,2} = \frac{L_M}{360}$.



Pistes de travail

Pour comprendre comment Ératosthène a calculé la longueur du méridien terrestre :

1. La distance entre la Terre et le Soleil est d'environ 150 millions de kilomètres. Anaxagore, par un calcul mathématiquement juste, a trouvé 6 500 km. **Expliquer** pourquoi il obtient un résultat aberrant.
2. **Calculer** la circonférence de la Terre avec les hypothèses d'Ératosthène. Que peut-on penser du résultat ?

Activité 3 : Histoire du mètre

DOC 1

Mesurer des longueurs sur la Terre

Un des premiers savants à établir des cartes complètes fut l'astronome grec Ptolémée (environ 100 ap. J.-C.). Pour situer des points connus sur la Terre, il utilise une méthode de quadrillage et calcule la **longitude** et la **latitude** de huit mille points. Son œuvre servira de base aux géographes du Moyen Âge. Mais, pour trouver avec précision la circonférence de la Terre, il fallait d'autres techniques.

Au XIIe siècle, Léonard de Pise met au point les premiers rudiments de la trigonométrie, permettant ainsi de déterminer la largeur d'un fleuve ou la hauteur d'une tour par des mesures indirectes.

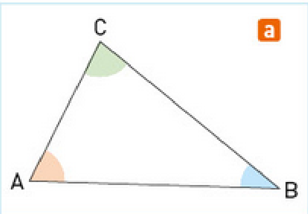
C'est le mathématicien hollandais Snellius qui, le premier, utilise la méthode de **triangulation** : en 1615, il mesure par cette méthode l'**arc de méridien** entre deux villes de Hollande.

La méthode de triangulation.

Entre 1669 et 1670, l'abbé Jean Picard, astronome français, équipé d'une lunette de visée, applique les méthodes de Snellius. Il réalise la mesure d'une distance correspondant à un degré de latitude le long du méridien de Paris avec un enchaînement de 13 triangles entre Malvoisine, près de Paris, et Sourdon, près d'Amiens.

DOC 2

La méthode de triangulation



Les mesures de distances sont souvent difficiles et peu précises à cause du relief, contrairement aux mesures d'angles. La méthode de triangulation est fondée sur la formule des sinus, formule de trigonométrie dans un triangle, qui s'énonce de la façon suivante pour un triangle ABC (a) :

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}}.$$

TRIANGLE ABC
Pour connaître le côté AC.
CAB 54° 4' 35''
ABC 95° 6' 55''
ACB 30° 48' 30''
AB 5 663 toises de mesure actuelle
Donc AC 11 012 toises 5 pieds
Et BC 8 954 toises

b Calculs de Picard.

Pour le premier triangle qu'il étudie, Picard mesure les trois angles et le côté AB. Il en déduit alors AC et BC (b). Ce calcul montre que la connaissance d'une seule distance suffit à trouver toutes les autres.

La méthode de triangulation nécessite donc de construire un réseau de triangles le long de la ligne à mesurer, de faire une unique mesure de distance, puis des mesures d'angles. Il suffit donc de trouver des clochers, des tours, des collines et de faire des visées afin de mesurer des angles : ces visées sont répétées un grand nombre de fois afin d'éliminer le plus possible les erreurs.

Pour mener une investigation

Pour trouver AC, Picard écrit :

$$\frac{AC}{\sin(95°6'55")} = \frac{5\,663}{\sin(30°48'30")}.$$

- Montrer alors que $AC \approx \dfrac{5\,663 \times \sin(95{,}115)}{\sin(30{,}808)}$ et retrouver le résultat de Picard (1 toise = 6 pieds).

DOC 3 La définition du mètre

À la fin du XVIIIe siècle, en France, les unités de mesure diffèrent selon les régions, ce qui complique le développement du commerce et de l'industrie. L'Académie des sciences est alors chargée par l'Assemblée nationale de définir une nouvelle unité qui serait universelle, qui n'ait plus pour modèle l'Homme (on mesurait alors en pouce, en pied...) mais le seul vrai patrimoine commun de l'humanité : la Terre.

Après beaucoup de débats, l'Académie des sciences décide que **le mètre, nouvelle unité de longueur, serait égal au dix-millionième du quart du méridien terrestre.** Le méridien choisi est celui de Paris ! En 1792, on charge deux scientifiques, Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain, de mesurer la partie du méridien de Paris située entre Dunkerque et Barcelone. Cette partie avait été déjà mesurée, mais l'amélioration des techniques de calcul et des techniques de visée impose de recommencer pour arriver à une meilleure précision.

■ Les mesures de l'Ancien Régime différaient selon la région : ici, la pinte (1), la livre (2) et l'aune (3).

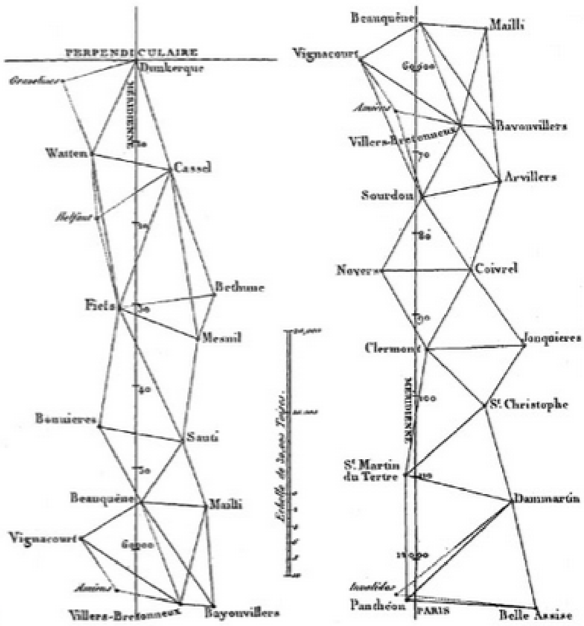
DOC 4 La mission de Delambre et Méchain

Pour calculer la longueur de l'arc de méridien, Delambre et Méchain réalisent durant 7 ans des mesures qui vont « enfermer » celui-ci dans une chaîne de 94 triangles entre Dunkerque et Barcelone le long du méridien de Paris appelé Méridienne.

Une unique mesure de longueur sera nécessaire sur le terrain et prise à l'aide de règles plates : celle de la base située à Melun. Une deuxième base est construite pour vérification près de Perpignan.

Après de nombreuses difficultés liées aux troubles de la Révolution, un comité de scientifiques annonce les résultats en 1799 : « l'arc du méridien entre Dunkerque et Barcelone est de 9°40'25,40. Il mesure 551 584,72 toises. Par conséquent, un quart du méridien mesure 5 130 740 toises ».

Un mètre-étalon en platine est alors fabriqué pour servir de référence à un système de mesure universel.



■ Deux tronçons de la Méridienne mesurée par Delambre et Méchain. L'échelle est en toise.

Pistes de travail

Pour comprendre pourquoi et comment on a mesuré le méridien terrestre au XVIIIe siècle :

1. **Montrer** que la méthode de triangulation apporte un changement radical.
2. **Finir les calculs** de Picard sur l'exemple donné dans le document 2.
3. **Expliquer** pourquoi on mesure des arcs de méridien terrestre.
4. **Expliquer** le but essentiel de l'expédition de Delambre et Méchain.

Activité 4 : Méridien et Parrallèle

DOC 1

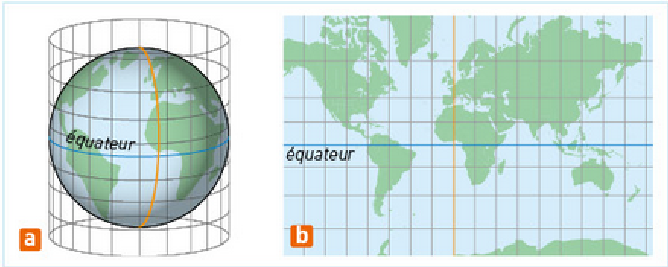
Distances sur un planisphère

La Terre peut être représentée de différentes façons : globe terrestre, planisphère, image satellite.

Le planisphère est obtenu en projetant la sphère terrestre sur une surface plane. Il y a différentes projections possibles.

Celle de Mercator (1569) est une projection sur un cylindre (a). Cette projection ne conserve pas les distances ni les aires. Plus on s'approche des pôles, plus les distances et les surfaces sont agrandies. Les **méridiens** sont espacés régulièrement, mais les **parallèles** sont de plus en plus espacés lorsque la latitude augmente (b).

L'animation c permet de calculer la distance loxodromique* entre deux points, c'est-à-dire la longueur du chemin qui relie ces points selon une ligne droite sur un planisphère.



Principe de la projection de Mercator. Le cylindre est déroulé pour obtenir le planisphère.

c

Pour mener une investigation

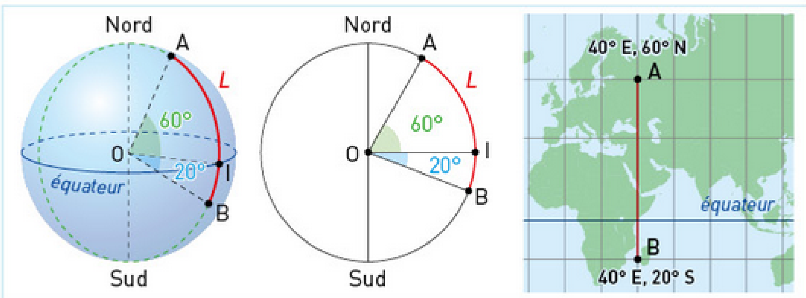
- Utiliser cette animation pour donner des exemples de distances égales sur le planisphère, mais qui ne le sont pas en réalité.

https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/924-orthodromie-et-loxodromie

DOC 2

Longueur d'un arc de méridien

Lorsque deux points sont sur un même méridien, calculer la longueur L du chemin qui les relie en suivant ce méridien revient à calculer la longueur d'un arc de cercle. On utilise la propriété suivante : **la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle qui l'intercepte.**



a Arc de méridien entre deux points A et B.

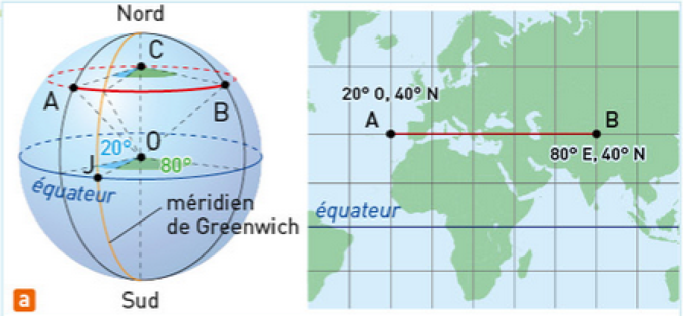
On considère, par exemple, les points A et B de coordonnées géographiques respectives :

40° Est - 60° Nord et 40° Est - 20° Sud (a).

En notant O le centre de la Terre et L_M la circonférence du méridien (environ 40 000 km) on a :

$$\frac{L}{\widehat{AOB}} = \frac{L_M}{360}.$$

DOC 3 Longueur d'un arc de parallèle



On considère les points A et B situés sur un même parallèle et de coordonnées géographiques respectives 20° Ouest - 40° Nord et 80° Est - 40° Nord (a). On peut utiliser la même propriété que pour un méridien : en notant C le centre du parallèle et L_C sa circonférence, on a :

$$\frac{L}{\widehat{ACB}} = \frac{L_C}{360}$$

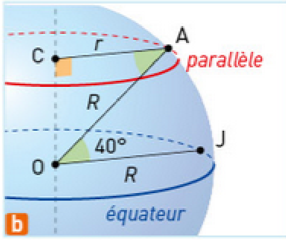
L'angle $\widehat{ACB}$ est déduit des longitudes des deux points A et B.

Ici, $\widehat{ACB} = 20° + 80° = 100°$.

La longueur L_C du parallèle s'obtient en utilisant les relations de trigonométrie ou en remarquant que le parallèle est une réduction du cercle de l'équateur.

Avec les indications portées sur la figure b, le rapport de cette réduction est $\frac{r}{R}$.

Or $\cos \widehat{OAC} = \frac{r}{R}$ et $\widehat{OAC} = \widehat{JOA} = 40°$ (car les angles $\widehat{OAC}$ et $\widehat{JOA}$ sont alternes-internes), donc $\frac{r}{R} = \cos 40°$.



Pour mener une investigation

- Expliquer pourquoi $L_C \approx 40\,000 \cos 40°$.

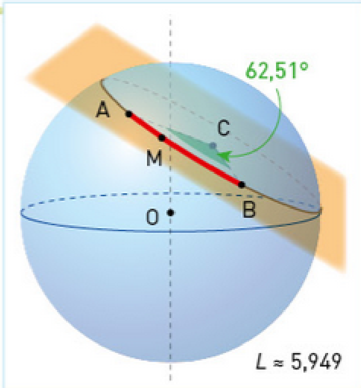
DOC 4 Le plus court chemin

FICHIER

Démarche expérimentale

L'animation du DOCUMENT 1 et certains logiciels SIG (système d'information géographique) permettent de calculer la longueur du plus court chemin entre deux points : c'est la route orthodromique*. Pour décrire ce plus court chemin, on va utiliser un logiciel de géométrie.

On considère deux points A et B à la surface de la Terre, et un point M par lequel on souhaite passer pour aller de A jusqu'à B. Le plan qui contient les trois points A, B et M coupe la sphère terrestre selon un cercle.



Sur la figure ci-contre, on a fait afficher une valeur approchée de la longueur L de l'arc $\widehat{AB}$ (en milliers de kilomètres) pour une position de M.

- Ouvrir le fichier GeoGebra.
- Déplacer le point M. En observant la longueur L affichée, faire une conjecture sur le plan dans lequel se trouvent A, B et M lorsque la longueur L est minimale.

Pistes de travail

Pour savoir comment déterminer des longueurs à la surface de la sphère terrestre :

1. **Calculer** la longueur L de l'arc de méridien reliant les points A et B de coordonnées géographiques 40° Est - 60° Nord et 40° Est - 20° Sud.
2. **Calculer** la longueur L de l'arc de parallèle reliant les points de coordonnées géographiques 20° Ouest - 40° Nord et 80° Est - 40° Nord.
3. **Comparer** les chemins loxodromique et orthodromique dans les deux cas.
4. **Décrire** le plus court chemin pour relier deux points quelconques à la surface de la Terre.

Exercices chapitre 3

6 Calcul de la longueur d'un arc de parallèle

On considère deux points à la surface de la Terre : le point A a pour coordonnées géographiques **100° Ouest et 40° Nord** et le point B a pour coordonnées : **42° Est et 40° Nord**.

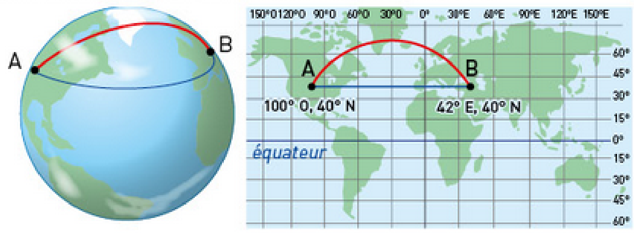
1. **Justifier** le fait qu'on puisse dire que A et B sont situés sur le même parallèle.

2. **Montrer** que la longueur du parallèle sur lequel sont situés A et B est d'environ 30 642 km.

3. On appelle C le centre du parallèle sur lequel sont situés A et B. **Justifier** que $\widehat{ACB} = 142°$.

4. **Calculer** la longueur de l'arc de parallèle qui relie A et B.

5. On donne ci-dessous deux chemins pour aller de A à B :



a. Quel chemin (rouge ou bleu) est celui dont on a calculé la longueur précédemment ?

b. Est-ce le plus court chemin pour aller de A en B ?

les clés de l'énoncé

- L'énoncé donne la **longitude** et la **latitude** des points A et B.

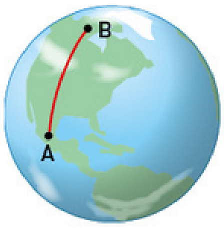
Les questions à la loupe

- **Justifier** : donner des arguments scientifiques pour rendre compte du résultat donné dans la question.
- **Montrer** : mettre en œuvre un raisonnement pour arriver au résultat.
- **Calculer** : utiliser les méthodes vues en cours pour trouver le résultat.

Exercice similaire ▸▸ solution p. 296 CORRIGÉ DÉTAILLÉ EN VERSION NUMÉRIQUE

7 Calcul de la longueur d'un arc de méridien

On considère deux points à la surface de la Terre : le point A a pour coordonnées géographiques 100° Ouest et 20° Nord et le point B a pour coordonnées : 100° Ouest et 66° Nord.



1. Pourquoi peut-on dire que A et B sont situés sur le même méridien ?

2. On appelle O le centre de la Terre. Justifier que $\widehat{AOB} = 46°$.

3. Calculer la longueur de l'arc de méridien qui relie A et B.

4. Est-ce le plus court chemin pour aller de A à B ?

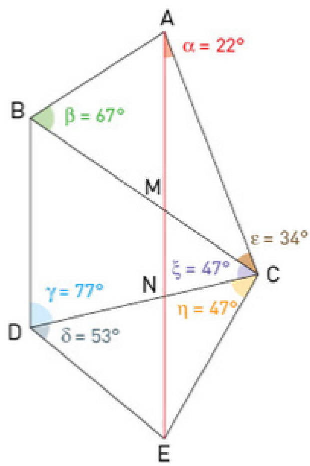
10 Triangulation avec une chaîne de trois triangles

Cet exercice illustre dans un cadre simplifié le calcul de la longueur du méridien, en utilisant trois triangles (au lieu des 94 triangles du travail de Delambre et Méchain).

On souhaite calculer la longueur d'un morceau du méridien de Paris, caractérisé par le segment [AE]. Pour cela, on a « enfermé » le segment correspondant dans une chaîne de trois triangles et on a réalisé les mesures angulaires portées sur le schéma. On arrondira les distances à 0,1 km près.

On dispose d'une seule distance : AC = 10 km.

Donnée : dans tout triangle ABC, on a : $\dfrac{BC}{\sin \hat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \hat{C}}$.



1. Calculer les distances AM et MC.

2. Calculer les angles du triangle CMN.

3. En déduire les distances MN et CN.

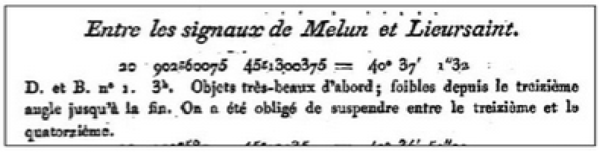
4. Déterminer les angles du triangle CNE, puis calculer la distance NE.

5. En déduire la distance AE.

11 Distance de Lieursaint à Malvoisine et à Monthléry à une toise près HISTOIRE DES SCIENCES

Les premières triangulations pour la mesure du méridien ont été réalisées par Jean-Baptiste Delambre au départ de la base de Melun. La base Melun-Lieursaint a été mesurée à 6 076 toises.

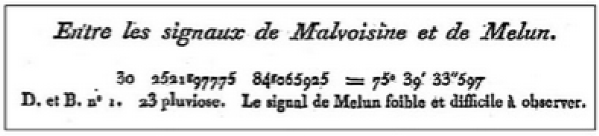
Delambre a consigné ses résultats (ci-contre).



Entre les signaux de Melun et Lieursaint.

20 902860075 45813oo375 = 40° 37′ 1″32

D. et B. n° 1. 3h. Objets très-beaux d'abord ; foibles depuis le treizième angle jusqu'à la fin. On a été obligé de suspendre entre le treizième et le quatorzième.



Entre les signaux de Malvoisine et de Melun.

30 2521897775 84ʀ065925 = 75° 39′ 33″597

D. et B. n° 1. 23 pluviose. Le signal de Melun foible et difficile à observer.

1. On note MLm le triangle Melun-Lieursaint-Malvoisine.

a. Avec les informations données par Delambre, donner une valeur approchée à un degré près des angles $\widehat{mLM}$ et $\widehat{LmM}$.

b. En utilisant la loi des sinus, en déduire la distance de Lieursaint à Malvoisine à une toise près.

2. Delambre a ensuite considéré comme nouvelle base Lieursaint-Malvoisine pour le triangle Lieursaint-Malvoisine-Monthléry, noté Lmm′. Il obtient les angles suivants : $\widehat{Lm'm} = 53°$ et $\widehat{Lmm'} = 76°$ à un degré près.

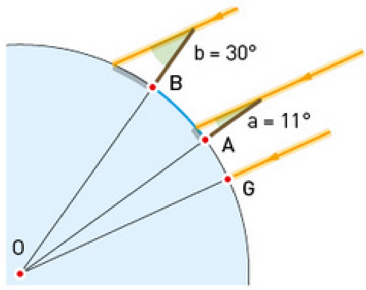
Avec la loi des sinus, en déduire la distance de Lieursaint à Monthléry à une toise près.

14 Méthode d'Ératosthène

Dans deux villes A et B situées sur un même méridien, on a mesuré un même jour, à midi au soleil, l'angle des rayons du Soleil avec la verticale. La distance qui sépare A et B est de 2 115 km.

1. Expliquer pourquoi la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est de 19°.

2. Avec les données de l'énoncé, calculer la circonférence de la Terre.



Prépa BAC CONTRÔLE CONTINU

15 Choisir le plus court chemin

On considère trois villes dont on donne les coordonnées géographiques (arrondies) :

– Chittagong (au Bengladesh) : 92° Est - 22,5° Nord
– Cracovie (en Pologne) : 20° Est - 50° Nord
– Ulaangom (en Mongolie) : 92° Est - 50° Nord

1. Quelles villes sont sur un même méridien ? sur un même parallèle ?

2. a. Calculer la longueur de l'arc de méridien qui relie Ulaangom et Chittagong.

b. Ce chemin est-il le plus court pour relier les deux villes ? Justifier.

3. a. Montrer que la longueur du parallèle passant par Ulaangom est d'environ 25 712 km.

b. Calculer la longueur de l'arc de parallèle qui relie Ulaangom et Cracovie.

c. Ce chemin est-il le plus court pour relier les deux villes ? Justifier.

4. Avec un logiciel, on a trouvé que la longueur du plus court chemin reliant Ulaangom et Cracovie est d'environ 4 933 km.

Pour un avion qui consomme en moyenne 300 litres de kérosène aux 100 km, quelle est la différence de consommation selon l'itinéraire choisi ?