Lista 5 - Interpolação polinomial: fórmula de Lagrange e erro na interpolação

0.1 Interpolação polinomial e Fórmula de Lagrange

1. Considere a tabela

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

Table 1: Valores de x e $f(x)$.

   a) Determine o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

   b) Calcule $f(3.5)$.

2. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $y = \sin \pi x$, escolhendo os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1 - \kappa^2 \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Por uma tabela de valores desta integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739$$

. Determinar $K(2.5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

4. Calcular $e^{3.1}$ usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

Table 2: Valores de x e $f(x)$.

5. Sabendo-se que $e \approx 2.72$, $\sqrt{e} \approx 1.65$ e que a equação $x - e^{-x} = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor desta raiz usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos.

6. Dar uma outra prova de unicidade do polinômio de interpolação $P_n(f; x)$ de uma função $y = f(x)$ sobre o conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Sugestão: supor a existência de outro polinômio $Q_n(f;x)$ que seja de interpolação para f sobre $x_0, x_1, \dots, x_n$ e considerar o polinômio:

$$D_n(x) = P_n(f;x) - Q_n(f;x)$$

.

0.2 Erro na interpolação

7. Seja $f(x) = 7x^5 - 3x^2 - 1$.

   a) Calcular $f(x)$ nos pontos $x = 0$, $x = \pm 1, x = \pm 2$ e $x = \pm 3$ (usar o algoritmo de Briot-Ruffini). Construir a seguir a tabela segundo os valores crescentes de x.

   b) Construir o polinômio de interpolação para esta função sobre os pontos -2, -1, 0 e 1.

   c) Determinar, pela fórmula do limitante do erro, isto é,

   $$|R_n(x)| \leq \frac{|x-x_0||x-x_1|\dots|x-x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b}\{|f^{(n+1)}(t)|\}$$

   , um limitante superior para o erro de truncamento em $x = -0.5$ e $x = 0.5$.

8. Conhecendo-se a tabela calcular um limitante superior para o erro de truncamento

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.3	1.5
$\cos x$	0.6967	0.6216	0.5403	0.4536	0.2675	0.0707

Table 3: Valores de x e $\cos x$.

quando calculamos $\cos 1.05$ usando polinômio de interpolação sobre quatro pontos.

9. Um polinômio $P_n(x)$, de grau n, coincide com $f(x) = e^x$ nos pontos: $\frac{0}{n}$, $\frac{1}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n}$. Qual o menor valor de n que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ ?}$$