

"Soluções da lista 3."

① $f(x) = e^x - x - 2$ (Função)

f é contínua em $[0, 2]$. Além disso,

$$\begin{cases} f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0. \quad (\text{I}) \\ f(2) = e^2 - 2 - 2 \cong (2.718)^2 - 4 = \\ = (2 + 0.718)^2 - 4 = 4 + 4 \cdot 0.718 + (0.718)^2 - 4 = \\ = 4 \cdot 0.718 + (0.718)^2 > 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

De (I) e (II), segue que f tem sinais opostos nos extremos, 0 e 2. Então, pelo teorema do anulamento, segue que existe $\xi \in [0, 2]$ tal que $f(\xi) = 0$.

② $f(x) = x^3 - 4x - 9$ no intervalo $[2, 3]$

$$\text{tol} = 10^{-3}$$

Primeiro, vamos verificar que há uma raiz no intervalo $[2, 3]$. De fato,

$$\begin{cases} f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 - 9 = 8 - 8 - 9 = -9 < 0 \quad (\text{I}) \\ f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 - 9 = 27 - 12 - 9 = 27 - 21 = \\ = 6 > 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Se segue da (I) e (II) que $\exists g \in [2,3]$ tal que $f(g) = 0$.

Agora, vamos obter uma aproximação para g .

1^a iteração:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\begin{aligned} f(2.5) &= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{5}{2} \cdot 4 - 9 = \frac{125}{8} - 10 - 9 = \\ &= \frac{125}{8} - 19 = \frac{125 - 152}{8} = -\frac{27}{8} < 0. \end{aligned}$$

Como $f(2) \cdot f(2.5) > 0$, então

$a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$, ou seja, o novo intervalo é $[2.5, 3]$

2^a iteração:

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{2.5 + 3}{2} = \frac{5/2 + 3}{2} = \frac{11}{4} = 2.75$$

$$\begin{aligned} f(2.75) &= \left(\frac{11}{4}\right)^3 - \frac{11}{4} \cdot 4 - 9 = \frac{1331}{64} - 20 = \\ &= 0.796875 > 0 \end{aligned}$$

Como $f(a_2) \cdot f(c_2) < 0$, então o novo intervalo é $a_3 = a_2$ e $b_3 = c_2$.

Logo, o novo intervalo é $[2.5, 2.75]$

Critério de parada:

Temos três formas de testar:

(i) $|f(c_2)| < tol$? (Valor de $f(c_2)$ próximo do zero?)

$$f(c_2) = 0.796875 > tol = 10^{-3}.$$

(ii) $|b_3 - a_3| < tol$? (Comprimento do intervalo próximo do zero?)

$$|2.75 - 2.5| = 0.25 > tol = 10^{-3}.$$

(iii) $\frac{|c_2 - c_1|}{|c_2|} < tol$? (Erro relativo)

$$|c_2|$$

$$\frac{|2.75 - 2.5|}{|2.75|} = \frac{0.25}{2.75} \approx 0.091 > tol = 10^{-3}.$$

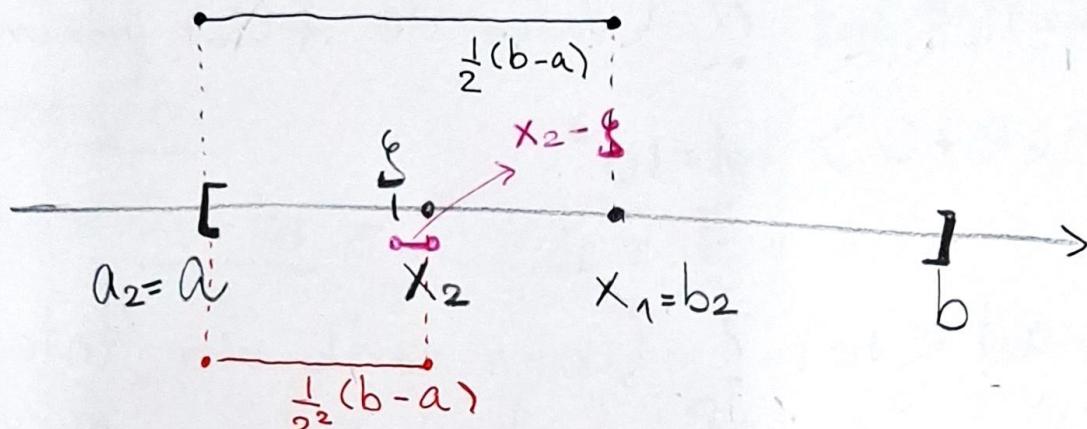
③ A existência da raiz é garantida pelo teorema do anulamento. Para provar a convergência, note que se $x_1 = \frac{a+b}{2}$

$$\frac{(b-a)/2}{[a \quad \overset{x_1-\xi}{\underset{\xi}{\cdot}} \quad x_1 \quad b]} >$$

então $|x_1 - \xi| < \frac{1}{2}(b-a)$

Novamente, pelo método da bisssecção

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{a + x_1}{2}$$



Assim, $|x_2 - g| < \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b - a)$.

Portanto, prosseguindo com o raciocínio, temos na iteração k , que

$$|x_k - g| < \frac{1}{2^k}(b - a) \quad \text{(I)}$$

Notemos que, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k}(b - a) = 0$. Então,

pelo teorema do confronto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - g| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = g.$$

Portanto, pelo limite acima, concluímos que o método da bisssecção é convergente.

Cálculo da ordem de convergência:

Sabemos da inequação (I) que

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_{k+1} - g| < \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \quad (*) \\ |x_k - g| < \frac{1}{2^k}(b-a) \quad (***) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_{k+1} - g| < \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \quad (**) \end{array} \right.$$

Fazendo $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$, temos

que $|x_k - g| < \epsilon_k$. Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)}{\left[\frac{1}{2^k}(b-a) \right]^P} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1-P} \cdot (b-a)^{1-P} =$$

$$= (b-a)^{1-P} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k(1-P)+1} =$$

Para que o valor do limite acima seja um número real, precisamos que $P \leq 1$. ($P \geq 1$ por definição — veja página 74 do livro da Neids Franco)

Portanto, temos que $\rho = 1$. Assim,

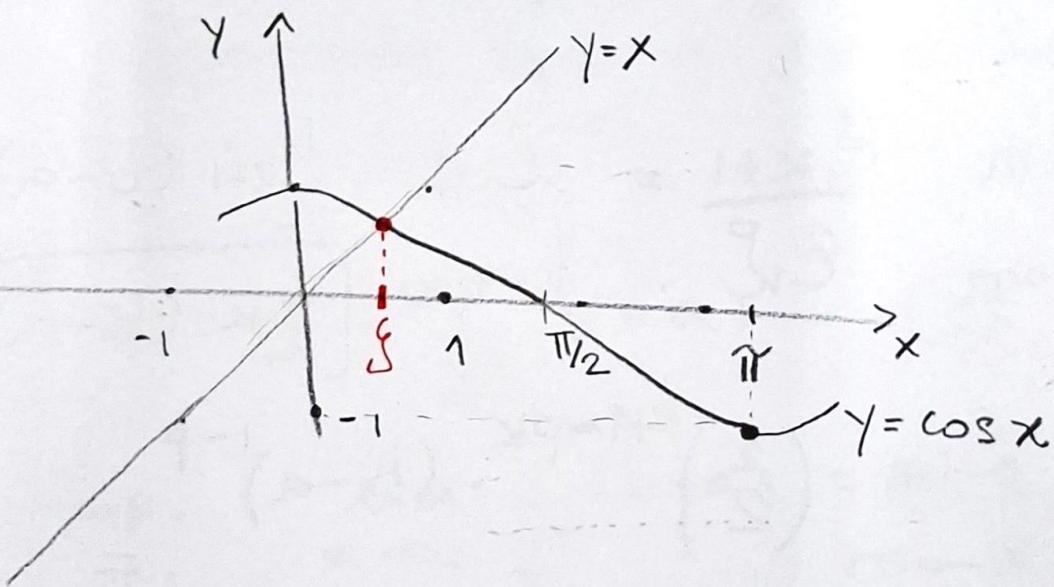
$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{E_{K+1}}{E_K} = \frac{1}{2}(b-a) \text{ cte.}$$

∴ A ordem de convergência do método da bisssecção é 1.

④ $x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \cos x$$

$$\text{tol} = 10^{-4}.$$



Usando $g(x) = \cos x$, então $g'(x) = -\sin x$.

Como a raiz está entre $[0, 1]$, temos que $|g'(x)| < 1, \forall x \in [0, 1]$. Assim, podemos afirmar que $|g'(g)| < 1$, satisfazendo o teorema da convergência do método do ponto fixo.

A solução do problema é feita em Python.
com $x_0 = 0.5$

Aproximação $g \approx 0.73910$.

⑤ O critério $|g'(x)| < 1$ é usado para valores de x pertencentes à uma vizinhança de g . Pois, isso irá garantir que $|g'(g)| < 1$.

Podemos usar um exemplo visto em sala de aula

$$f(x) = e^x - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^x - 1}{2} = g(x), \forall x \in [1, 2]$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{2} > 1, \forall x \in [1, 2].$$

∴ O método

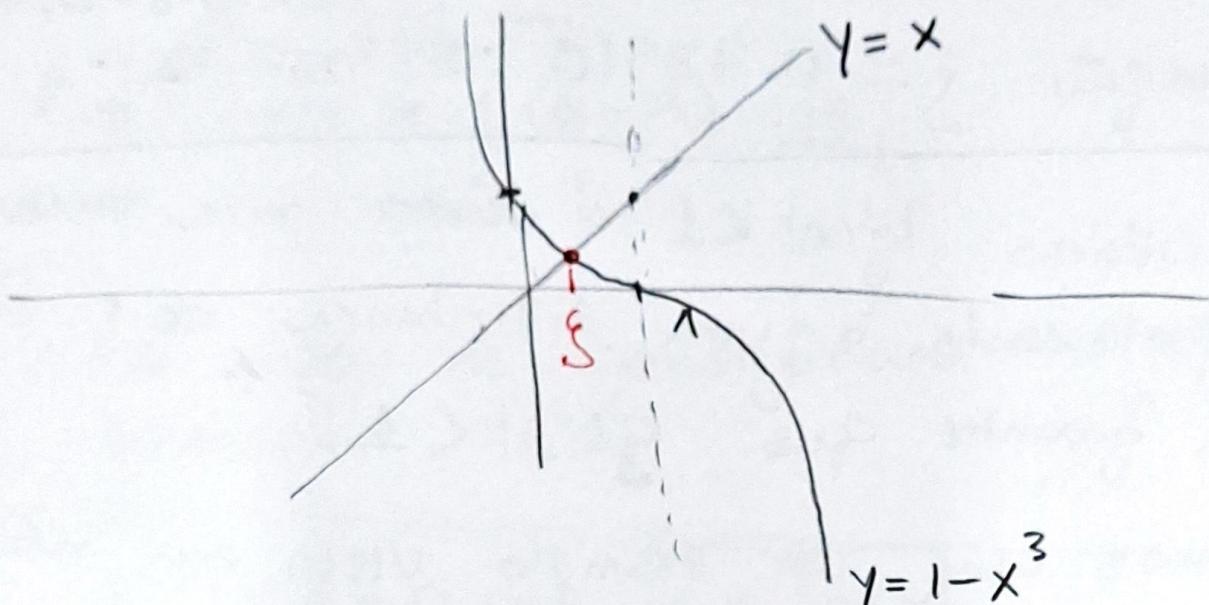
$$x_{k+1} = \frac{x_k}{e - 1}$$

não converge.

6.

$$x^3 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - x^3$$

8.



Pelo gráfico acima vemos que $g \in [0, 1]$.

fazendo. $x = \sqrt[3]{1-x}$. Temos

$g(x) = \sqrt[3]{1-x}$. Logo,

$$g'(x) = \frac{1}{3} (1-x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

Notemos que $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

Portanto, pelo teorema da convergência do método do ponto fixo o método

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{1-x_k} \text{ irá convergir.}$$

Solução feita em um código em python.
com $x_0 = 0.5$

$$f \approx 0.6823.$$

⑦ A fórmula do método de Newton é dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Logo, para a equação $x^2 - 3 = 0$, a função f é definida por

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Sua derivada é $f'(x) = 2x$. Desta forma, o método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^2 - 3)}{2x_k}.$$

A solução é feita no código em python.

$$f \approx 1.7320.$$

⑧ A convergência é quadrática pois:
o erro na iteração ($k+1$) tem a mesma ordem do erro anterior ao quadrado, isto é:

$$|x_{k+1} - g| \approx |x_k - g|^2 \cdot \mu.$$

10

Podemos dizer que o número de dígitos corretos da aproximação sobre a cada iteração.

A prova da ordem de convergência pode ser obtida através das equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{u+1} = x_u - \frac{f(x_u)}{f'(x_u)} \quad (*) \\ 0 = f(g) \end{array} \right. \quad (**)$$

Expandido a segunda equação em série de Taylor ao redor x_u , resulta em

$$0 = f(x_u + (g - x_u)) = f(x_u) + (g - x_u) f'(x_u) + \frac{(g - x_u)^2}{2!} f''(\eta_u), \text{ com } \eta_u \text{ entre } x_u \text{ e } g.$$

$$\Rightarrow 0 = - \underbrace{\frac{f(x_u)}{f'(x_u)}}_{(x_{u+1} - x_u)} - (g - x_u) - \frac{(g - x_u)^2}{2} \underbrace{\frac{f''(\eta_u)}{f'(x_u)}}_{(x_{u+1} - x_u) \text{ Eq } (*)}$$

$$0 = x_{u+1} - x_u - g + x_u - \frac{(g - x_u)^2}{2} \underbrace{\frac{f''(\eta_u)}{f'(x_u)}}_{\therefore}$$

$$\Rightarrow (\xi - x_{k+1}) = - \frac{(\xi - x_k)^2 f''(x_k)}{2 \cdot f'(x_k)}$$

Aplicamos o módulo:

$$|\xi - x_{k+1}| = \frac{|\xi - x_k|^2 |f''(x_k)|}{2 \cdot |f'(x_k)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\xi - x_{k+1}|}{|\xi - x_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \right|$$

aplicando o limite quando $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\xi - x_{k+1}|}{|\xi - x_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|.$$

O método de Newton pode falhar quando $f'(\xi) = 0$, pois na fórmula temos $f(x_k)$ no denominador ($\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$).

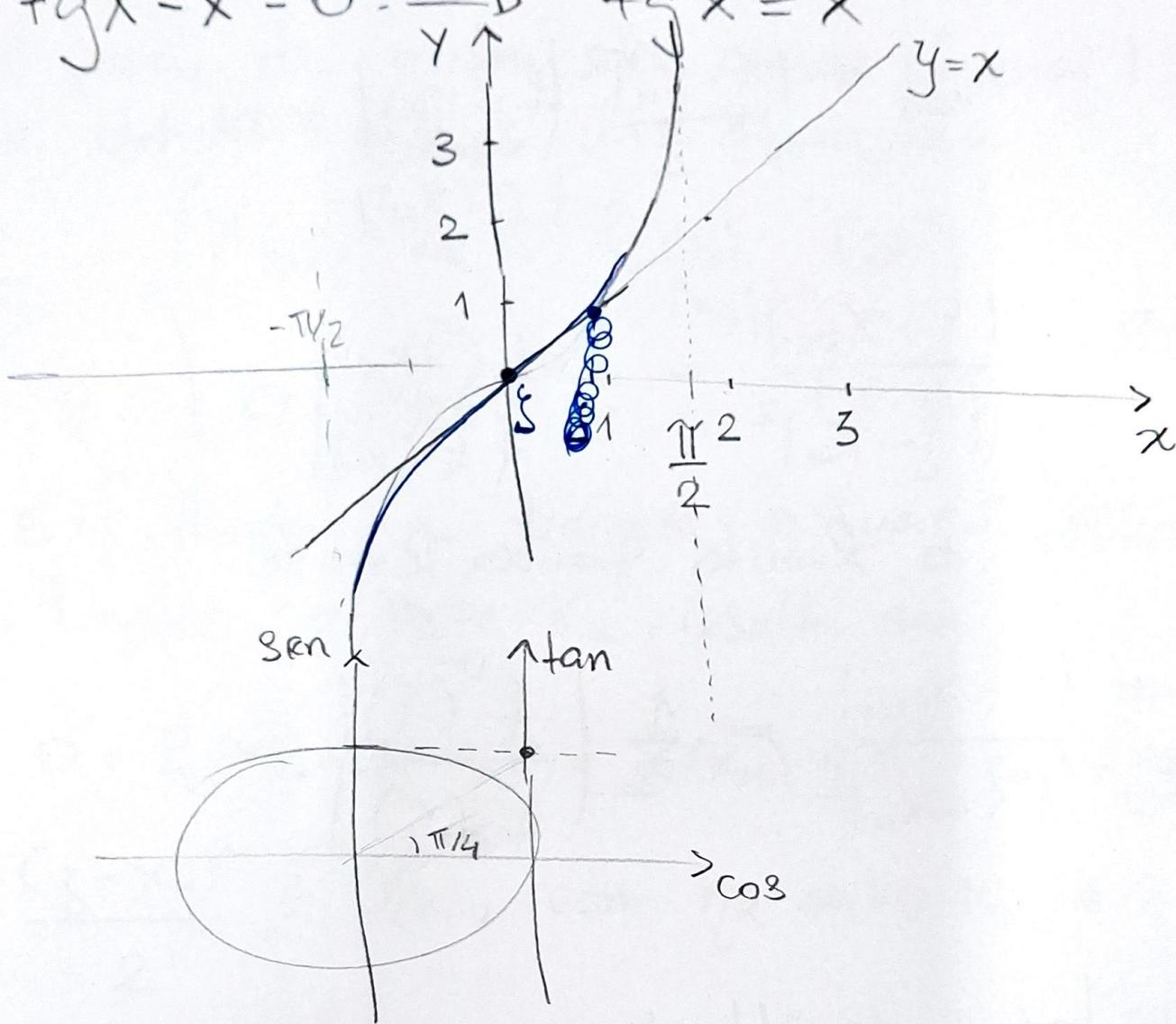
Exemplo: $f(x) = x^2$. A raiz é $\xi = 0$.

Porém, $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Logo, o método de Newton possivelmente divergirá.

Exemplo com comportamento oscilatório

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

⑨ $\tan x - x = 0 \Rightarrow \tan x = x$



$$\{ f \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} f(x) = \tan x - x \\ f'(x) = \sec^2 x - 1 \end{cases} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{(\tan x_k - x_k)}{(\sec^2 x_k - 1)}$$

$\boxed{f=0} \rightarrow$ O método tem dificuldades

com determinar f' , pois a derivada de f é pequena na vizinhança de 0.