lista decomposição L.U.

1.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{-1} & 3 & \underline{5} \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \underline{6} & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & \underline{0} & \underline{0} \\ 2 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \\ 3 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-2} & 1 & \underline{1} \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & \underline{3} & 5 \\ \underline{0} & 1 & \underline{4} & -2 \\ \underline{0} & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \underline{0} & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

A primeira linha do U coincide com a 1ª linha do A. Logo, $a_{14} = u_{14} = 5$ e $a_{12} = u_{12} = -1$. Também, $u_{13} = a_{13} = 3$. Por definição, a diagonal principal do L é composta por 1, ou seja, $l_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Além disso, $l_{ij} = 0$ quando $j > i$ e $u_{ij} = 0$ quando $i > j$.

O cálculo da 1ª coluna do L é dado por

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad i > 1.$$

Logo,

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \iff 2 = \frac{4}{u_{11}} \Rightarrow \boxed{u_{11} = 2}$$

A segunda linha do U é dada por

$$u_{2j} = a_{2j} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{kj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} \iff u_{23} = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

$$\therefore \boxed{u_{23} = 4}$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}}{u_{22}} = \frac{-2 - 0 \cdot (-1)}{1} = -2$$

$$\therefore \boxed{l_{42} = -2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \Rightarrow 3 = \frac{a_{31}}{2} \Rightarrow \boxed{a_{31} = 6}$$

---

2) a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1ª linha do U

$u_{11} = 5,\ u_{12} = 2,\ u_{13} = 1$

1ª coluna do L:

$l_{21} = -\frac{1}{5},\ l_{31} = \frac{2}{5}$

2ª linha do U:

$$u_{22} = 4 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 4 + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$u_{23} = 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{11}{5}$$

2ª coluna do L

$$l_{32} = \frac{-3 - \frac{2}{5} \cdot 2}{(22/5)} = \frac{-19}{5} \times \frac{5}{22} = -\frac{19}{22}$$

3ª linha de U

$$u_{33} = 10 - \left(\frac{2}{5}\times 1\right) - \left(-\frac{19}{22}\times\frac{11}{5}\right) = 10 - \frac{2}{5} + \frac{19}{10} =$$

$$= \frac{100 - 4 + 19}{10} = \frac{115}{10}$$

$$\therefore\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & -\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix},\quad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 22/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & \frac{115}{10} \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 2/5 & -\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -12$$

$$y_2 = 20 + \frac{1}{5}y_1 = 20 - \frac{1}{5}\times 12 = \frac{100-12}{5} = \frac{88}{5}$$

$$y_3 = 3 - \frac{2}{5}\times y_1 + \frac{19}{22}\cdot y_2 = 3 + \frac{2}{5}\times 12 + \frac{19}{22}\times\frac{88}{5}$$

$$= 3 + \frac{24}{5} + \frac{76}{5} = 3 + 20 = 23$$

$$\therefore\quad Y = \begin{pmatrix} -12 \\ 88/5 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \iff \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 22/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & \frac{115}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{88}{5} \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{23}{(115/10)} = \frac{230}{115} = \frac{46}{23} = 2$$

$$x_2 = \frac{\frac{88}{5} - \frac{11}{5}x_3}{(22/5)} = \frac{\left(88 - 22\right)}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{22} = 3$$

$$x_1 = \frac{-12 - 2x_2 - x_3}{5} = \frac{-12 - 2\times 3 - 2}{5} =$$

$$= -\frac{20}{5} = -4$$

$$\therefore \; x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

115
115
1265

---

b) $\det(A) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = \cancel{5} \times 22/\cancel{5} \times \frac{115}{10} =$

$$= \frac{11 \times 115}{5} = \frac{1265}{5} =$$

$$= \begin{matrix} 200 \\ 40 \\ 13 \end{matrix} = 253.$$

$$\therefore \boxed{\det(A) = 253.}$$

(3) De fato, pela decomposição $A = LU$ também

Podemos escrever as submatrizes de

A como:

$$A_i = L_i U_i \quad \left(\text{Teorema de Binet}\right)$$

Logo, $\det(A_i) = \det(L_i) \cdot \det(U_i)$

Como $l_{ii} = 1$, então $\left(\text{Det. da matriz triangular } i\right)$

$$\det(A_i) = \det(U_i) = \prod_{k=1}^{i} U_{kk}$$

Logo,

$$\det(A_i) = U_{ii} \prod_{k=1}^{i-1} U_{kk}$$

$$\det(A_i) = U_{ii} \cdot \det(A_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{ii} = \frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}.$$

---

(4) Método de Crout

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, & i \geq j \\ u_{ij} = \dfrac{\left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right)}{l_{ii}}, & i < j \end{cases}$$

6.

5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Feito computacional mente

6

$A = LU$ existe e L e U são únicas.
(Teorema da decomposição LU)

Definimos as matrizes D e $\overline{U}$ como:

$$D_{ij} = \begin{cases} U_{ij} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\overline{U}_{ij} = U_{ij}/U_{ii}, \ \forall i,j$$

Assim, $(D\overline{U})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} \cdot \overline{U}_{kj} =$

$$= U_{ii} \cdot \overline{U}_{ij} = \cancel{U_{ii}} \cdot U_{ij} / \cancel{U_{ii}} = U_{ij}$$

Portanto, $U = D\bar{U}$

A unicidade do D vem da unicidade do U, pois D é formada pela diagonal principal de U. Da mesma forma,

$$\bar{U} = D^{-1} U$$

será única pela unicidade de D e U.

Portanto, $A = LD\bar{U}$.

---

7) $A = A^t$

$$A = LD\bar{U} = (LD\bar{U})^t = A^t.$$

$$LD\bar{U} = \bar{U}^t D^t L^t$$

$$A = LD\bar{U} = \bar{U}^t \cdot D \cdot L^t$$

Pela unicidade da decomposição LDU, segue que $L = \bar{U}^t$ ou $\bar{U} = L^t$.

Como os elementos de D são todos positivos, então

$$D = D^{1/2} \cdot D^{1/2}, \text{ onde } (D^{1/2})_{ij} = \sqrt{D_{ij}}$$

Logo,

$$A = LDU = L(D^{1/2} \cdot D^{1/2})U =$$

Associativa

$$= (LD^{1/2})(D^{1/2} \cdot U) =$$

$$= (LD^{1/2})(U^t D^{1/2})^t = \text{(Simetria do } A\text{)}$$

$$= (LD^{1/2})(LD^{1/2})^t =$$

$$= QQ^t, \text{ onde } Q = LD^{1/2}$$

é uma matriz triangular inferior.

A decomposição $A = QQ^t$ é chamada de decomposição de Cholesky.