Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo Numérico Avançado: Métodos computacionais para decomposição matricial

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente
Junho de 2023

Sumário

1 Decomposição LU

1. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 3 & \dots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \dots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

obteve-se as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & 5 \\ \dots & 1 & \dots & -2 \\ \dots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 10 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Preencher os espaços pontilhados com valores adequados.

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \tag{3}$$

   a) Resolva-o usando decomposição LU.
   b) Calcule o determinante de A, usando a decomposição.

3. Considere a matriz A, $n \times n$, com todas as sub-matrizes principais não singulares. Exiba as fórmulas da decomposição LU, onde L é a matriz triangular inferior e U é matriz triangular superior com 1 na diagonal.

4. Resolva o sistema $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

usando a decomposição LU.

5. Mostre que se A satisfaz as hipóteses da decomposição LU então A se decompõe de maneira única no produto LDU, onde L e U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, ambas com 1 na diagonal, e D é matriz diagonal. Além disso, $\det(A) = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$.

6. Mostre que se A é uma matriz simétrica e satisfaz as hipóteses da decomposição LU então $A = LDU$ implica $U = L^T$ (transposta de L).

7. Mostre que se A é uma matriz simétrica, positiva definida e satisfaz as hipóteses da decomposição LU então os elementos diagonais de D são todos positivos.

2 Decomposição de Cholesky

1. Aplicando-se o processo de Cholesky à matriz A, obteve-se:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & 8 & 10 & -8 \\ 3 & 10 & 14 & -5 \\ \dots & -8 & \dots & 29 \end{pmatrix} = GG^T, \tag{5}$$

   onde:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \dots & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   Preencher os espaços pontilhados com valores adequados.

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

   Escolha adequadamente e resolva um dos sistemas $Ax = b$, $Bx = b$, pelo processo de Cholesky, onde $b = (2, 1, 5)^t$.

3. Mostre que: Se o sistema de equações algébricas $Ax = b$, onde A é matriz não singular, é transformado no sistema equivalente $Bx = c$, com $B = A^T A$; $c = A^T b$, onde A^T é a transposta de A, então o último sistema pode sempre ser resolvido pelo processo de Cholesky (isto é, a matriz B satisfaz as condições para a aplicação do método). Aplicar a técnica acima para determinar pelo processo de Cholesky, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3 Decomposição QR

1. Questão 1

4 Decomposição SVD

1. Questão 1

5 Gabarito

5.1 Decomposição LU

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ 6 & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. a)

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{19}{22} & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases} \tag{12}$$

$$y = \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{88}{5} \\ 23 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

b)

$$\det A = \det U = 253. \tag{14}$$

3. As formulas para o cálculo das matrizes U e L são:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad (i \leq j), \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}, \quad (i > j). \end{cases} \tag{15}$$

4.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

5. Ideia para demonstração: a partir da decomposição LU (garantida pela hipótese), defina as matrizes D e U^* como

$$D = (d_{ij}),\ \ U^* = (u^*_{ij}), \tag{18}$$

onde

$$d_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad u^*_{ij} = \left\{ \frac{u_{ij}}{u_{ii}} \right., \tag{19}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Por fim, mostre que $U = DU^*$ (use a definição de produto de matrizes a partir de componentes, ou seja, $u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} u^*_{kj}$), resultando em

$$A = LU = L\left(DU^*\right) = LDU^*. \tag{20}$$

Além disso, $\det A = \det LU = \det U = \det DU^* = \det D = d_{11} d_{22} \ldots d_{nn}$.

6. Ideia para demonstração: do exercício anterior, segue que A pode ser decomposta de maneira única como $A = LDU$. Por outro lado, $A = A^T = U^T D L^T$. Pela unicidade da decomposição, resulta que $U = L^T$.

7. Ideia para demonstração: pela definição de matriz simétrica e positiva definida, temos que $\det A_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Assim, tem-se que $\det A_1 = a_{11} = d_{11} > 0$. Da mesma forma, para $k = 2$ $\det A_2 = d_{11} d_{22} > 0$. Como já foi verificado que $d_{11} > 0$, então $d_{22} > 0$. Prosseguindo com o raciocínio chegamos que $d_{kk} > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

5.2 Decomposição de Cholesky

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \\ 3 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -8 & -5 & 29 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

2. Considerando o sistema $Ax = b$, temos que

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Assim, resolvendo os sistemas $Gy = b$ e $G^T x = y$, resulta em

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Note que a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ não é definida positiva, pois $\det B = -3$. Portanto, não podemos aplicar o método de Cholesky.

3. A matriz B é simétrica: de fato, $B^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = B$. Além disso, B é definida positiva. De fato,

$$x^T B x = x^T \left(A^T A\right) x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 > 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, x \neq \vec{0}. \tag{24}$$

Portanto, a matriz B pode ser decomposta na fatoração Cholesky.

A matriz A dada no exercício é singular, isto é, $\det A = 0$. Assim, teremos um sistema que é possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções. Porém, é possível calcular a matriz G, que é dada por

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$