Interpolação polinomial

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Introdução

Estudar interpolação polinomial é importante por várias razões:

- **Aproximação de Funções**: A interpolação polinomial é uma técnica fundamental para aproximar funções que não são facilmente tratadas de forma analítica. Isso é útil em diversas áreas da matemática, física, engenharia e ciência computacional, onde é necessário estimar valores intermediários de funções desconhecidas.
- **Interpolação de Dados Experimentais**: Muitas vezes, temos apenas um conjunto discreto de pontos experimentais e precisamos extrapolar ou interpolar valores intermediários. A interpolação polinomial nos permite preencher esses espaços entre os pontos conhecidos de uma maneira suave e contínua.
- **Simplificação de Cálculos**: A interpolação polinomial pode simplificar cálculos complexos ao representar uma função complicada por meio de um polinômio mais simples, facilitando assim a análise e manipulação.

Introdução

- **Análise Numérica**: A interpolação polinomial é uma ferramenta essencial em análise numérica para resolver uma variedade de problemas, incluindo integração numérica, diferenciação numérica e resolução de equações diferenciais.
- **Gráficos e Visualização**: A interpolação polinomial é útil na criação de gráficos suaves e contínuos a partir de conjuntos de dados discretos. Isso é crucial para visualizar dados de forma compreensível e interpretativa.

Portanto, estudar interpolação polinomial é essencial para entender e aplicar uma variedade de conceitos matemáticos e científicos em diversos campos.

Polinômio de interpolação

O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, dados $n+1$ números (ou pontos) distintos (reais ou complexos) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $n+1$ números (reais ou complexos) $y_0, y_1, \ldots, y_n$, números estes que, em geral, são $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, determinar-se um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que:

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Vamos mostrar que tal polinômio existe e é único, na hipótese de que os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sejam distintos.

Teorema da existência e unidade do polinômio interpolador

Theorem

Dados $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (reais ou complexos) e $n+1$ valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um e só um polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Para provar este teorema, mostre que a matriz dos coeficientes tem determinante não nulo, garantindo a existência e unicidade de $P_n(x)$.

Definição forma de polinômio de interpolação

Definition

Chama-se polinômio de interpolação de uma função $y = f(x)$ sobre um conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ao polinômio de grau no máximo n que coincide com $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tal polinômio será designado por $P_n(f; x)$ e, sempre que não causar confusão, simplesmente por $P_n(x)$.

Exemplo

Example

Conhecendo a seguinte tabela:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

Tabela 1: Tabela contendo valores de x e $f(x)$.

determinar o polinômio de interpolação para a função definida por este conjunto de pares de pontos.

Observações

- Observe que nos pontos tabelados, o valor do polinômio encontrado e o valor da função devem coincidir. Se os valores forem diferentes, você terá cometido erros de cálculo.
- A determinação do polinômio de interpolação através da solução de sistemas lineares é muito trabalhosa. Além disso, na solução de sistemas lineares pode ocorrer erros de arredondamento, fazendo com que a solução obtida seja irreal. Vamos, por isto, procurar outros métodos para determinação deste polinômio.

Fórmula de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$ pontos distintos. Consideremos para $k = 0, 1, \dots, n$ os seguintes polinômios $l_k(x)$ de grau n:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}. \tag{3}$$

É fácil verificar que:

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j, \\ 1, & \text{se } k = j. \end{cases} \tag{4}$$

Fórmula de Lagrange

De fato, substituindo x por x_k na fórmula de $l_k(x)$, vemos que o númerador e o denominador são exatamente iguais $\Rightarrow l_k(x_k) = 1$. Agora, se substituímos x por x_j, com $j \neq k$, vemos que o numerador anula-se e, assim, $l_k(x_j) = 0$.

Assim, para valores dados: $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, …, $f_n = f(x_n)$ de uma função $y = f(x)$, o polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$

é de grau no máximo n e satisfaz:

$$P_n(x_k) = f(x_k), \; k = 0, 1, \ldots, n$$

. Logo, $P_n(x)$, assim definido, é o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo

Example

Conhecendo a seguinte tabela:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

Tabela 2: Tabela contendo valores de x e $f(x)$.

a) Determine o polinômio interpolador usando a fórmula de Lagrange.
b) Calcule uma aproximação para $f(1)$, usando o item a).

Exemplo

Example

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

Tabela 3: Valores de x e e^{3x}.

calcular $f(0.25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$ usando polinômio de interpolação do 2^o grau.

Vimos então que, para obter o valor da função num ponto não tabelado, podemos aproximar a função por seu polinômio de interpolação e através deste ter uma aproximação do valor da função no ponto. Mas se você estiver fazendo um programa para obter o valor aproximado de uma função num ponto através do polinômio de interpolação você pode utilizar o seguinte esquema prático o qual calcula o valor do polinômio de interpolação num ponto (não tabelado) sem determinar a expressão do polinômio.

Cálculo do polinômio de interpolação em um ponto fixo

Consideremos a fórmula de Lagrange e a fórmula dos $l_k(x)$. Fazendo:

$$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \tag{5}$$

podemos escrever:

$$l_k(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x - x_k)\pi'_{n+1}(x_k)}, \tag{6}$$

onde: $\pi'_{n+1}(x_k)$ é a derivada de $\pi_{n+1}(x)$ avaliada em $x = x_k$.
Primeiramente, calculamos as diferenças:

$$\begin{array}{lllll}
x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \dots & x_0 - x_n \\
x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \\
x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \dots & x_2 - x_n \\
\dots & & & & \\
x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \dots & x - x_n
\end{array}$$

Cálculo do polinômio de interpolação em um ponto fixo

Denotaremos o produto dos elementos da primeira linha por D_0, o da segunda por D_1 e assim por diante. Observe que o produto dos elementos da 1^a linha é exatamente o denominador de $l_0(x)$; o produto dos elementos da 2^a linha, o denominador de $l_1(x)$ etc. O produto dos elementos da diagonal principal será, obviamente, $\pi_{n+1}(x)$ e, então, segue que:

$$l_k(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{D_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

. Assim, a fórmula de Lagrange se reduz a:

$$P_n(x) = \pi_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{D_k} = \pi_{n+1}(x) \times S,$$

onde $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{D_k}$.

Exemplo

Example

Aplicar o esquema anterior para calcular $f(1)$, sabendo que:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

Tabela 4: Tabela contendo valores de x e $f(x)$.

Exercícios

1. Considere a tabela

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

Tabela 5: Valores de x e $f(x)$.

   a) Determine o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.
   b) Calcule $f(3.5)$.

2. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $y = \sin \pi x$, escolhendo os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1 - \kappa^2 \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Por uma tabela de valores desta integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739$$

. Determinar $K(2.5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

4. Calcular $e^{3.1}$ usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

Tabela 6: Valores de x e $f(x)$.

5. Sabendo-se que $e \approx 2.72$, $\sqrt{e} \approx 1.65$ e que a equação $x - e^x = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor desta raiz usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos.
6. Dar uma outra prova de unicidade do polinômio de interpolação $P_n(f; x)$ de uma função $y = f(x)$ sobre o conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
   Sugestão: supor a existência de outro polinômio $Q_n(f; x)$ que seja de interpolação para f sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e considerar o polinômio:

$$D_n(x) = P_n(f; x) - Q_n(f; x)$$

Como vimos, o polinômio de interpolação $P_n(x)$ para uma função $y = f(x)$ sobre um conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tem a propriedade

$$P_n(x_k) = f_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

. Nos pontos $\bar{x} \neq x_k$ nem sempre é verdade que $P_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Entretanto, para avaliar $f(x)$ nos pontos $\bar{x} \neq x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, consideramos $P_n(x)$ como uma aproximação para a função $y = f(x)$ em um intervalo que contenha os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e calculamos $f(\bar{x})$ atavés de $P_n(\bar{x})$. Perguntas que surgem são, por exemplo, as seguintes: é o polinômio de interpolação uma boa aproximação para $f(x)$? Podemos ter idéia do erro que cometemos quando substituímos $f(x)$ por $P_n(x)$? Estas e outras perguntas são respondidas quando estudamos a teoria do termo do erro. Para isto, introduziremos dois lemas, cujas demonstrações podem ser encontradas em livros de cálculo ou análise matemática.

Theorem (Teorema de Rolle)

Seja $f(x)$ *contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em cada ponto de* (a, b)*. Se* $f(a) = f(b)$*, então existe um ponto* $x = \xi$*,* $a < \xi < b$*, tal que* $f'(\xi) = 0$*.*

Theorem (Teorema de Rolle generalizado)

Seja $n \geq 2$*. Suponhamos que* $f(x)$ *seja contínua em* $[a, b]$ *e que* $f^{(n-1)}(x)$ *exista em cada pontos de* (a, b)*. Suponhamos que* $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$ *para* $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$*. Então existe um ponto* ξ*,* $x_1 < \xi < x_n$*, tal que* $f^{(n-1)}(\xi) = 0$*.*

Teorema do erro na interpolação

Theorem (Teorema do erro na interpolação)

Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e suponhamos que $f^{(n+1)}(x)$ exista em cada ponto (a,b). Se $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, então:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

, onde $\min\{x, x_0, x_1, , x_n\}\xi < \max\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$*. O ponto* ξ *depende de* x*.*

Observações

O termo $R_n(x)$ é chamado termo do erro ou erro de truncamento. É o erro que se comete no ponto x quando se substitui a função por seu polinômio de interpolação calculado em x.
A importância deste teorema é mais teórica do que prática, visto que não conseguimos determinar o ponto ξ de tal modo que seja válida a igualdade. Na prática, para estimar o erro cometido ao aproximar o valor da função num ponto por seu polinômio interpolador, utilizamos o corolário apresentado a seguir.

Corollary

Seja $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Se $f(x)$ e suas derivadas até ordem $n+1$ são contínuas em $[a, b]$ então:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \ldots |x - x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} \{|f^{(n+1)}(t)|\}$$

.

Exemplo

Example

Dada a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

Tabela 7: Valores de x e e^{3x}.

calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando avaliamos $f(0.25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$, usando polinômio de interpolação do 2^o grau.

Observações

- O número de zeros depois do ponto decimal, no resultado do erro, fornece o número de dígitos significativos corretos que teremos na aproximação.
- Observe que poderíamos ter tomado: $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.2$ e $x_3 = 0.3$. Se tomarmos estes pontos, obtemos que $|R_2(f;x)| \approx 0.0054 \approx 5 \times 10^{-3}$, o que implica que obteremos duas casas decimais corretas na aproximação. Assim, tanto faz tomarmos um ponto à esquerda e dois à direita de 0.25, ou dois pontos à esquerda e um à direita, que o erro será da mesma ordem de grandeza.

Exercícios

1. Seja $f(x) = 7x^5 - 3x^2 - 1$.
   a) Calcular $f(x)$ nos pontos $x = 0$, $x = \pm 1, x = \pm 2$ e $x = \pm 3$ (usar o algoritmo de Briot-Ruffini). Construir a seguir a tabela segundo os valores crescentes de x.
   b) Construir o polinômio de interpolação para esta função sobre os pontos -2, -1, 0 e 1.
   c) Determinar, pela fórmula do limitante do erro, isto é,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} \{|f^{(n+1)}(t)|\}$$

   , um limitante superior para o erro de truncamento em $x = -0.5$ e $x = 0.5$.

Exercícios

2. Conhecendo-se a tabela

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.3	1.5
$\cos x$	0.6967	0.6216	0.5403	0.4536	0.2675	0.0707

Tabela 8: Valores de x e $\cos x$.

calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando calculamos $\cos 1.05$ usando polinômio de interpolação sobre quatro pontos.

3. Um polinômio $P_n(x)$, de grau n, coincide com $f(x) = e^x$ nos pontos: $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Qual o menor valor de n que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \ \text{para} \ 0 \leq x \leq 1 \ ?$$