Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo Numérico Avançado: Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente

Junho de 2023

Sumário

1 Método de Jacobi-Richardson

1. Usando o método de Jacobi-Richardson, obter a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases} \tag{1}$$

   com três casas decimais corretas.

2. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 30 \end{cases} \tag{2}$$

   a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Jacobi-Richardson.

   b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item a), obtendo o resultado com erro relativo $< 10^{-2}$.

2 Método de Gauss-Seidel

1. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{3}$$

mostrar que, reordenando as equações e incógnitas, podemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o das linhas.

2. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases} \tag{4}$$

   a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Seidel, usando o critério de Sassenfeld.

   b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item a), obtendo o resultado com erro relativo $< 10^{-2}$.

3 Método SOR

1. Encontre as duas primeiras iterações do método SOR com $\omega = 1.1$ para os seguintes sistemas lineares, utilizando $x^{(0)} = \mathbf{0}$:

   (a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{5}$$

   (b)
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned} \tag{6}$$

   (c)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned} \tag{7}$$

   (d)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned} \tag{8}$$

2. Seja o teorema

   Theorem 1 *Se A for uma matriz definida positiva e tridiagonal, então $\rho(T_G) = [\rho(T_J)]^2 < 1$ (ρ representa o raio espectral e T_G e T_J são as matrizes de iteração dos métodos de Gauss-Seidel e Jacobi-Richardson, respectivamente), e a escolha ótima de ω para o método SOR será*

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\rho(T_J)\right)^2}}. \tag{9}$$

   Com essa escolha de ω, temos $\rho(T_\omega) = \omega - 1$.

   Com base neste teorema determine o valor ótimo de ω do sistema abaixo. Após isto, resolva o sistema pelo método SOR utilizando o valor de ω encontrado.

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 &= 24 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\
- x_2 + 4x_3 &= -24.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

3. Determine quais matrizes no Exercício 1 são tridigonais e definidas positivas. Repita o Exercício 1 para essas matrizes, utilizando a escolha ótima de ω.

4. Considere o teorema de *kahan*:

   Theorem 2 *Se $a_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Isso implica que o método SOR pode convergir somente se $0 < \omega < 2$.*

   Além disso, vimos em aula que a condição necessária e suficiente para a convergência de um método iterativo é que $\rho(B) < 1$, onde B é a matriz de iteração do processo.

   Assim com base nestas informações, mostre que se $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$, então $0 < \omega < 2$.

4 Método dos gradientes conjugados

1. Prove o seguinte teorema:

   Theorem 3 *O problema de determinar a solução do sistema linear $Ax = b$, onde A é simétrica e positiva definida, é equivalente ao problema de determinar o ponto de mínimo de $F(v) = \frac{1}{2} < Av, v > - < b, v >$.*

2. Seja o sistema linear $Ax = b$, dado por:

$$\begin{cases} 100x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 100x_2 = 100. \end{cases} \tag{11}$$

   Calcule a função quadrática dada por

$$F(v) = \frac{1}{2} < Av, v > - < b, v > \tag{12}$$

   e mostre que o ponto de mínimo desta função é solução do sistema dado.

3. Prove o seguinte teorema sobre o método dos gradientes:

   Theorem 4 *Para o ponto de mínimo v', com $t = t_{min} = -\frac{<r,p>}{<Ap,p>}$, o novo resíduo $r' = Av' - b$ é ortogonal à direção p de relaxação.*

4. Usando o método dos gradientes, obter a solução do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

   com precisão de 10^{-1}.

5. Deseja-se resolver um sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & a \end{pmatrix}. \tag{14}$$

   e a é real, pelo método dos gradientes.

   (a) Quais os valores possíveis para a?

   (b) Sendo $b = -(1, 2, 3)^T$ e considerando $a = 0.4$, obtenha a solução do sistema linear com duas casas decimais corretas usando o método dos gradientes.

6. Usando o método dos gradientes, obtenha a solução do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

com erro relativo inferior a 10^{-3}.

7. Mostre que, no método dos gradientes conjugados, o resíduo em cada passo é ortogonal ao resíduo anterior, à direção de relaxação do passo e à direção de relaxação do passo anterior.

8. Resolva o sistema linear do exercício 6 usando o método dos gradientes conjugados.