Cálculo numérico de equações diferenciais ordinárias

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

É comum encontrarmos equações diferenciais de ordem m escritas na forma:

$$u^{(m)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}), \text{ como por exemplo:} \tag{1}$$

$$u''' = f(x, u, u', u'') = x^2 + u^2 \sin(x+u) - (x+1)\,u'' - \cos(xu') + \left(x^2 - 1\right) u. \tag{2}$$

É fácil transforma uma equação de ordem m deste tipo num sistema de m equações de ordem 1, assim:

$$\begin{cases} z_1 = u \\ z_1' = u' = z_2 \\ z_2' = u'' = z_3 \\ z_3' = u''' = z_4 \\ \vdots \\ z_{m-1}' = u^{(m-1)} = z_m \\ z_m' = u^{(m)} = f\left(x, u, u', \dots, u^{(m-1)}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Desenvolvimento do exemplo anterior

No exemplo anterior, fazemos

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w(= y'') \\ w' = f(x, y, y', y''). \text{ Para esta equação já vimos que:} \end{cases} \tag{4}$$

$$y(0) = 1.1, \;\; y'(0) = z(0) = 2.2, \;\; y''(0) = w(0) = 3.3. \tag{5}$$

Equações de ordem m, deste tipo, podem pois ser vistas como uma equação vetorial de ordem 1. No exemplo anterior, chamando:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

a equação transformada é:

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} z \\ w \\ f(x, y, y', y'') \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Continuação do exemplo anterior

com $Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \\ 3.3 \end{pmatrix}$, ou seja, temos de resolver a equação vetorial:

$$\begin{cases} \dot{Y} = F(x, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \\ 3.3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{8}$$

Exemplo de aplicação do método de Euler aperfeiçoado

Vamos aplicar o método de Euler aperfeiçoado, visto na aula anterior, para uma equação diferencial de 2^a ordem, como:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0'. \end{cases} \tag{9}$$

Inicialmente transformamos esta equação num sistema de duas equações de 1^a ordem. Assim, fazendo:

$$\begin{cases} y' = z \\ y'' = z' = f(x, y, y') = f(x, y, z), \end{cases} \tag{10}$$

e chamamos $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, então o PVI inicial se transforma em

$$\begin{cases} \dot{Y} = \begin{pmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{11}$$

O método de Euler aperfeiçoado

O método de euler aperfeiçoado, para uma equação é

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h), y_n + hy'_n\right]. \tag{12}$$

Assim, no nosso caso:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[F(x_n, Y_n) + F(x_n + h, Y_n + hY'_n)\right]. \tag{13}$$

Agora,

$$F(x_n, Y_n) = \begin{pmatrix} z_n \\ f(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix} \tag{14}$$

e

$$F(x_n + h, Y_n + hY'_n) = F\left(x_n + h, \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} z_n \\ f(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}\right) \tag{15}$$

Continuação do método de Euler aperfeiçoado

Então,

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n + hz_n + \frac{h^2}{2} f(x_n, y_n, z_n) \\ z_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n, z_n) + \frac{h}{2} f(x + h, y_n + hz_n, z_n + hf(x_n, y_n, z_n)). \end{pmatrix} \tag{16}$$

Chamando

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + k_1), \end{cases} \tag{17}$$

resulta em

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n + hz_n + \frac{h}{2} k_1 \\ z_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) . \end{pmatrix} \tag{18}$$

Exemplos

Example

Resolver o PVI abaixo pelo método de Euler aperfeiçoado:

$$\begin{cases} y'' = 4y' - 3y - x \\ y(0) = 4/9 \\ y'(0) = 7/3 \end{cases} \tag{19}$$

Problema de valor contorno

Exemplos

Example

Resolva o PVC linear abaixo:

$$\begin{cases} y'' + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1. \end{cases} \tag{20}$$

Example

Resolva o PVC não linear

$$\begin{cases} y'' = y \sin y + xy \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases} \tag{21}$$

Exemplos

Example

Construa um método de segunda ordem para resolver o seguinte PVF:

$$y'' + xy' + y = 2x, \; y(0) = 1, \; y(1) = 0. \tag{22}$$

Admitindo $h = 0.1$ construa o sistema linear associado e resolva-opor eliminação de Gauss.