Métodos iterativos para sistemas lineares

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Método de Jacobi-Richardson

Método de Gauss-Seidel

Decomposição do método SOR

O Método de Sobre-Relaxação Sucessiva ou *Successive Over-Relaxation (SOR)* pode ser visto como um melhoramento do método de Gauss-Seidel (ou simplesmente uma generalização do mesmo) para a solução de sistemas de equações lineares. A partir da decomposição da matriz A^* como

$$A^* = L^* + I + R^*, \tag{1}$$

podemos reenscrever a igualdade acima como

$$A^* = L^* + \frac{1}{\omega} I + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) I + R^*. \tag{2}$$

O parâmetro ω tem por objetivo acelerar a convergência para a solução do sistema.

Substituindo a decomposição (2) ao sistema linear $A^*x = b$, resulta em

$$\left(L^* + \frac{1}{\omega}I + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) I + R^*\right) x = b^*, \tag{3}$$

que implica em

$$\left(L^* + \frac{1}{\omega}I\right) x = -\left(\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) I + R^*\right) x + b^*. \tag{4}$$

Aplicando os índices das iterações, resulta em

$$\left(L^* + \frac{1}{\omega}I\right) x^{(k+1)} = -\left(\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) I + R^*\right) x^{(k)} + b^* \tag{5}$$

Algoritmo do método SOR

Mediante algumas munipulações algébricas na equação (5), obtemos

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega \left(-L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^* \right), \tag{6}$$

ou ainda, em termos das componentes do vetor x:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^* x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^* x_j + b_{*\,i} \right), \tag{7}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Determinando o parâmetro ω

Como determinar o valor ótimo do parâmetro ω?

Caso	Resultado
$0 < \omega < 1$	Método sub-relaxado
$\omega = 1$	Método de Gauss-Seidel
$1 < \omega < 2$	Método sobre-relaxado
$\omega < 0$ ou $\omega \geq 2$	O método SOR diverge.

Tabela 1: Fator de relaxação ω.

Observações sobre ω

- Usamos $0 < \omega < 1$ quando:
  - O sistema não converge para Gauss-Seidel
  - Queremos obter uma taxa de convergência maior que o método de Jacobi.
- Usamos $1 < \omega < 2$ quando:
  - Podemos obter uma taxa de convergência mais rápida do que Gauss-Seidel.

Teoremas que auxiliam o cálculo de ω

Theorem

Se $a_{ii} \neq 0$ para todos os valores de i, então $\rho(B_{SOR}) \geq |\omega - 1|$ (B_{SOR} é a matriz de iteração e ρ representa seus autovalores). Isso implica que o Método SOR somente converge para $0 < \omega < 2$.

Theorem

Se A é uma matriz positiva definida e $0 < \omega < 2$, então o método SOR converge para qualquer aproximação inicial de x_i.

Theorem

Se A é uma matriz positiva definida e tridiagonal, então $\rho(B_{Gauss}) = \rho(B_{Jacobi})^2 < 1$ e a opção ótima para ω é dada por
$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_{Jacobi})^2}}$$

Example

Resolva o sistema linear dado usando o método SOR com $\omega = 1.2$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\epsilon < 10^{-2}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Example

Resolva o sistema linear abaixo usando o método SOR.

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &= 20 \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 &= 12. \\ -x_2 + 9x_3 &= 51 \end{aligned} \tag{9}$$

Método dos gradientes conjugados

Nesta seção veremos o método dos gradientes e, na sequência, o método dos gradientes conjugados. A ideia central destes métodos é substituir o problema de se determinar a solução de um sistema linear pelo problema de se minimizar uma função. Para isto, consideremos o sistema linear da forma

$$Ax = b \Longleftrightarrow Ax - b = 0, \tag{10}$$

onde A é uma matriz simétrica e positiva definida. Note que, se $\bar{x}$ for a solução exata, então $A\bar{x} - b = 0$. Entretanto, se v é uma aproximação da solução $\bar{x}$, então a diferença $Av - b$ irá gerar um resíduo, ou seja,

$$Av - b = r. \tag{11}$$

Multiplicando ambos os membros da Eq. (11) por v^T, resulta em

$$v^T Av - v^T b = v^T r, \tag{12}$$

ou na forma de produto interno (é o produto escalar usual)

$$< Av, v > - < b, v > = < r, v > . \tag{13}$$

Abrindo os termos $< Av, v >$ e $< b, v >$

Observe que $< Av, v >$ e $< b, v >$ são números, dados por

$$\begin{cases} < Av, v >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j v_i \\ < b, v >= \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \end{cases} \tag{14}$$

Além disso, observe que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial < Av, v >}{\partial v_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \\ \dfrac{\partial < b, v >}{\partial v_i} = b_i. \end{cases} \tag{15}$$

Construção da função F

Assim, definido a função F como

$$F(v) = \frac{1}{2} < Av, v > - < b, v >, \tag{16}$$

resulta que

$$\nabla F(v) = Av - b = r. \tag{17}$$

Além disso, se $r = 0$, então teremos que v é ponto de mínimo da função F, uma vez que A é positiva definida.
Portanto, queremos fazer com que $r \to 0$ mediante a busca pelo ponto de mínimo da função F.

Ideia inicial do algoritmo

A partir de um valor inicial v da solução $\bar{x}$, queremos determinar um valor v' de tal forma que $F(v') < F(v)$, que resultará em $r' < r$.
Seja v a solução inicial e $r = Av - b$ o resíduo. Escolhemos uma direção p e variamos v nessa direção, com o objetivo de diminuir $F(v)$, para ir atingindo seu ponto de minimo que é a solução do sistema, ou seja, tentamos anular o resíduo na direção p.
Assim, variando v na direção p, isto é, tomando:

$$v' = v + tp, \tag{18}$$

procuramos determinar o parâmetro t de modo que a função F diminua. Logo, devemos procurar o mínimo de F na direção p.

Temos então que:

$$
\begin{aligned}
F(v') &= \frac{1}{2} < Av', v' > - < b, v' > \\
&= \frac{1}{2} \left(< Av, v > + 2t < Av, p > + t^2 < Ap, p > \right) - 2 < b, v > - 2t < b, p > \\
&= F(v) + \frac{t^2}{2} < Ap, p > + t < Av - b, p > \\
&= F(v) + \frac{t^2}{2} < Ap, p > + t < r, p >,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

que é função do parâmetro t.

Determinação do parâmetro t

Finalmente, o parâmetro t é selecionado de tal forma que F é mínimo dentro do conjunto acima examinado. A condição necessária para isso ocorro é:

$$\frac{\partial F(v')}{\partial t} = t < Ap, p > + < r, p >= 0, \tag{20}$$

que implica em

$$t = -\frac{< r, p >}{< Ap, p >}, \tag{21}$$

que é um ponto estacionário da F.

Teorema do método dos métodos de relaxação

Theorem

Para o ponto de mínimo v' *com* $t = t_{min}$ *o novo resíduo* $r' = Av' - b$ *é ortogonal à direção* p *da relaxação.*