Cálculo numérico de autovalores e autovetores

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos

Método da potência

Theorem

Seja A uma matriz real de ordem n e sejam λ_1, λ_2, ..., λ_n seus autovalores e u_1, u_2, , u_n seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|. \tag{1}$$

Seja a sequência y_k definida por:

$$y_{k+1} = Ay_k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão:

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \tag{3}$$

com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então:

Theorem

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1, \tag{4}$$

onde o índice r indica a r-ésima componente. Além disso, quando $k \to \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.

Introdução

- O método das potências é um algoritmo iterativo utilizado para calcular o maior autovalor (em magnitude) e o autovetor correspondente de uma matriz.
- Requer uma matriz quadrada A e um vetor inicial x_0.
- Com uma escolha apropriada de x_0, o método converge para o autovalor dominante.

Definição do Problema

- Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o objetivo é encontrar o autovalor λ tal que:

$$Av = \lambda v$$

- O autovalor λ de maior magnitude é chamado de autovalor dominante.
- O vetor v correspondente é chamado de autovetor dominante.

Descrição do Método das Potências

- Começa com um vetor inicial x_0.
- Iterativamente multiplica-se a matriz A por x_k e normaliza-se o resultado:

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}$$

- O vetor x_k converge para o autovetor dominante, e o autovalor correspondente pode ser calculado como:

$$\lambda_k = \frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k}$$

Algoritmo do Método das Potências

Algorithm 1 Método das Potências

Escolha um vetor inicial x_0 com $\|x_0\| = 1$.
for k $= 1, 2, 3, \ldots$ **do**
    Calcule $x_{k+1} = Ax_k$.
    Normalize x_{k+1} para $\|x_{k+1}\| = 1$.
    Calcule $\lambda_k = \frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k}$.
end for
O vetor x_k converge para o autovetor dominante e λ_k para o autovalor dominante.

Exemplo Numérico

- Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Iniciando com $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, iteramos o método das potências.
- Após algumas iterações, obtemos o autovalor dominante $\lambda \approx 3.618$ e o autovetor correspondente $v \approx \begin{pmatrix} 0.5257 \\ 0.8507 \end{pmatrix}$.

Considerações Finais

- O método das potências é eficaz para encontrar o autovalor dominante de uma matriz.
- Convergência depende da escolha do vetor inicial e da diferença entre os autovalores.
- Não é apropriado para encontrar autovalores próximos em magnitude.

Perguntas?

Obrigado!

Método **QR**

Casos especiais de matrizes tridiagonais