"Solução da lista 3".

① $f(x) = e^x - x - 2$ (Função)

f é contínua em $[0,2]$. Além disso,

$$\begin{cases} f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \quad (I) \\ f(2) = e^2 - 2 - 2 \cong (2.718)^2 - 4 = \end{cases}$$

$$= (2 + 0.718)^2 - 4 = \cancel{4} + 4 \times 0.718 + (0.718)^2 - \cancel{4} =$$

$$= 4 \times 0.718 + (0.718)^2 > 0 \qquad (II)$$

De (I) e (II), segue que f tem sinais opostos nos extremos, 0 e 2. Então, pelo teorema do anulamento, segue que existe $\xi \in [0,2]$ tal que $f(\xi) = 0$.

---

② $f(x) = x^3 - 4x - 9$ no intervalo $[2,3]$

$tol = 10^{-3}$.

Primeiro, vamos verificar que há uma raiz no intervalo $[2,3]$. De fato,

$$\begin{cases} f(2) = 2^3 - 4 \times 2 - 9 = \cancel{8} - \cancel{8} - 9 = -9 < 0 \quad (I) \\ f(3) = 3^3 - 4 \times 3 - 9 = 27 - 12 - 9 = 27 - 21 = \\ \qquad = 6 > 0 \quad (II) \end{cases}$$

Segue de (I) e (II) que $\exists\, \xi \in [2,3]$ tal que $f(\xi)=0$.

Agora, vamos obter uma aproximação para ξ.

1ª iteração:

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f(2.5) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{5}{2} \times 4 - 9 = \frac{125}{8} - 10 - 9 =$$

$$= \frac{125}{8} - 19 = \frac{125-152}{8} = -\frac{27}{8} < 0.$$

Como $f(2) \times f(2.5) > 0$, então

$a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$, ou seja, o novo intervalo é $[2.5, 3]$

2ª iteração:

$$c_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{2.5+3}{2} = \frac{5/2+3}{2} = \frac{11}{4} = 2.75$$

$$f(2.75) = \left(\frac{11}{4}\right)^3 - \frac{11}{4} \times 4 - 9 = \frac{1331}{64} - 20 =$$

$$= 0.796875 > 0$$

Como $f(a_2) \times f(c_2) < 0$, então

$a_3 = a_2$ e $b_3 = c_2$.

Logo, o novo intervalo é $[2.5, 2.75]$

Critério de parada:

Temos três formas de testar:

(i) $|f(c_2)| < tol$? (Valor de $f(c_2)$ próximo de zero?)

$f(c_2) = 0.796875 > tol = 10^{-3}$.

(ii) $|b_3 - a_3| < tol$? (Comprimento do intervalo próximo de zero?)

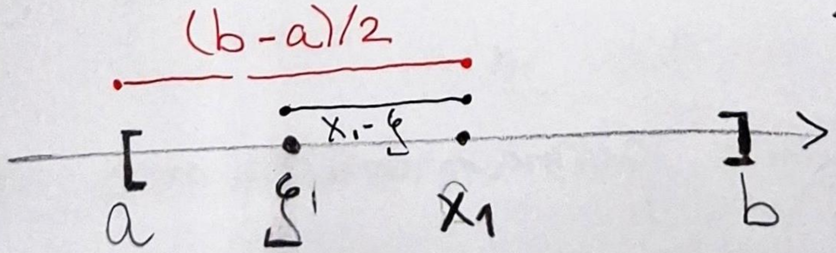
$|2.75 - 2.5| = 0.25 > tol = 10^{-3}$.

(iii) $\dfrac{|c_2 - c_1|}{|c_2|} < tol$? (Erro relativo)

$$\frac{|2.75 - 2.5|}{|2.75|} = \frac{0.25}{2.75} \simeq 0.091 > tol = 10^{-3}.$$

---

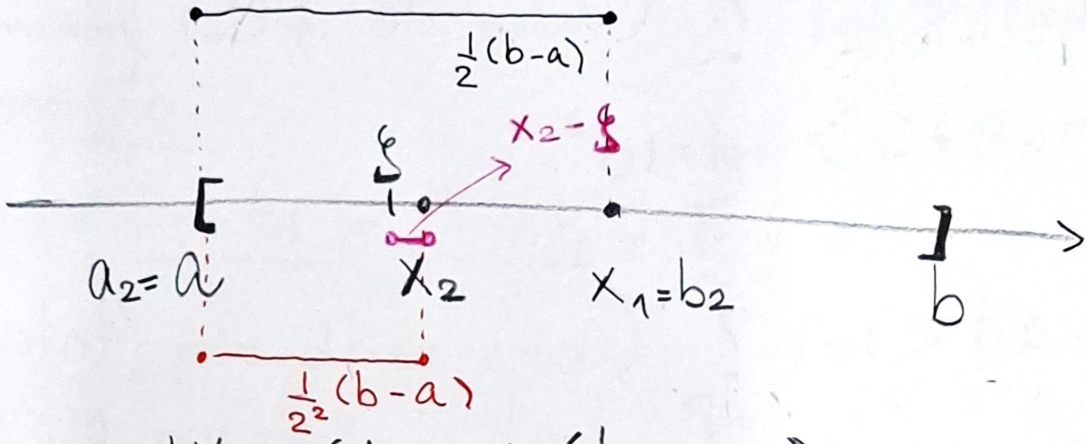
(3) A existência da raiz é garantida pelo teorema do anulamento. Para provar a convergência, note que se $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$



então $|x_1 - \xi| < \frac{1}{2}(b-a)$

Novamente, pelo método da bissecção

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{a + x_1}{2}$$



Assim, $|x_2 - \xi| < \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b-a).$

Portanto, prosseguindo com o raciocínio, teremos na iteração k, que

$$|x_k - \xi| < \frac{1}{2^k}(b-a) \quad \text{I}$$

Note que, $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{2^k}(b-a) = 0$. Então, pelo teorema do confronto

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - \xi| = 0 \iff \lim_{k \to \infty} x_k = \xi.$$

Portanto, pelo limite acima, concluímos que o método da bissecção é convergente.

Cálculo da ordem de convergência:

Sabemos da inequação (I) que

$$\begin{cases} |x_{k+1} - \xi| < \dfrac{1}{2^{k+1}} (b-a) & (*) \\ |x_k - \xi| < \dfrac{1}{2^{k+1}} \cdot (b-a) & (**) \end{cases}$$

Fazendo $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k} (b-a)$, temos que $|x_k - \xi| < \varepsilon_k$. Além disso,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1}} (b-a)}{\left[\frac{1}{2^k} (b-a)\right]^p} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-pk} \cdot (b-a)^{1-p} =$$

$$= (b-a)^{1-p} \cdot \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k(1-p)+1} =$$

Para que o valor do limite acima seja um número real, precisamos que $p \leq 1$. ($p \geq 1$ por definição - veja página 74 do livro da Neide Franco)

Portanto, temos que $p = 1$. Assim,

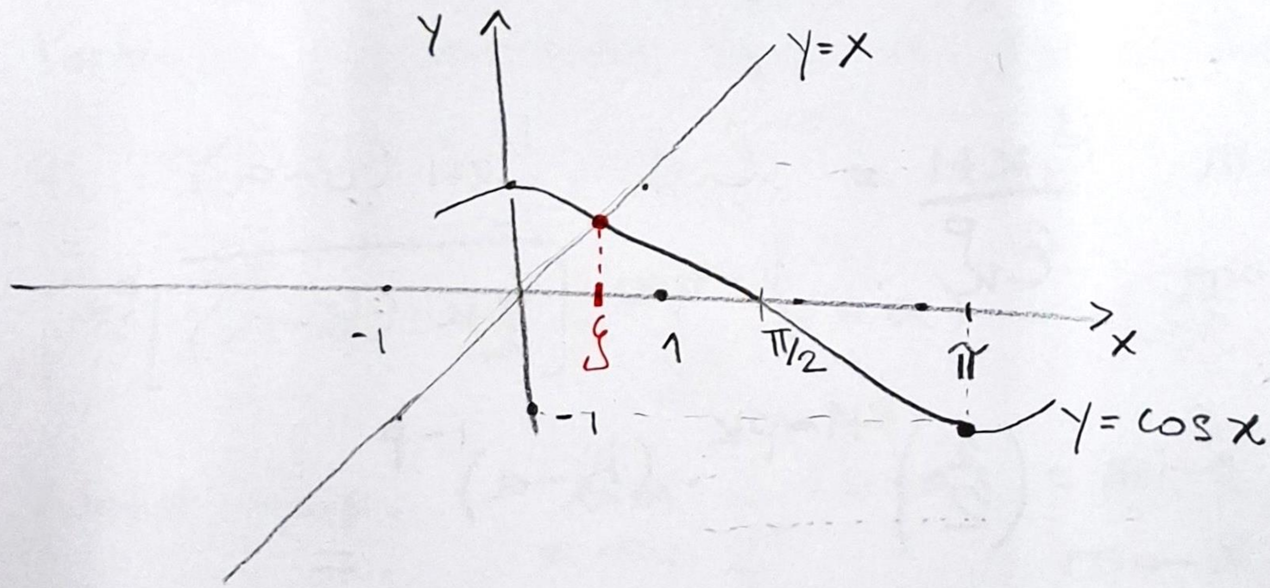
$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}(b-a) \; \underline{cte}.$$

$\therefore$ A ordem de convergência do método da bissecção é 1.

---

④ $x - \cos x = 0 \iff \boxed{x = \cos x}$

$tol = 10^{-4}$.



Usando $g(x) = \cos x$, então $g'(x) = -\sin x$.

Como a raiz está entre $[0,1]$, temos que $|g'(x)| < 1, \forall x \in [0,1]$. Assim, podemos afirmar que $|g'(\xi)| < 1$, satisfazendo o teorema da convergência do método do ponto fixo.

A solução do problema é feita em python com $x_0 = 0.5$

Aproximação $\xi \simeq 0.73910.$

---

⑤ O critério $|g'(x)| < 1$ é usado para valores de x pertencente à uma vizinhança de ξ. Pois, isso irá garantir que $|g'(\xi)| < 1$.

Podemos usar um exemplo visto em sala de aula

$$f(x) = e^x - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^x - 1}{2} = g(x), \forall x \in [1,2]$$

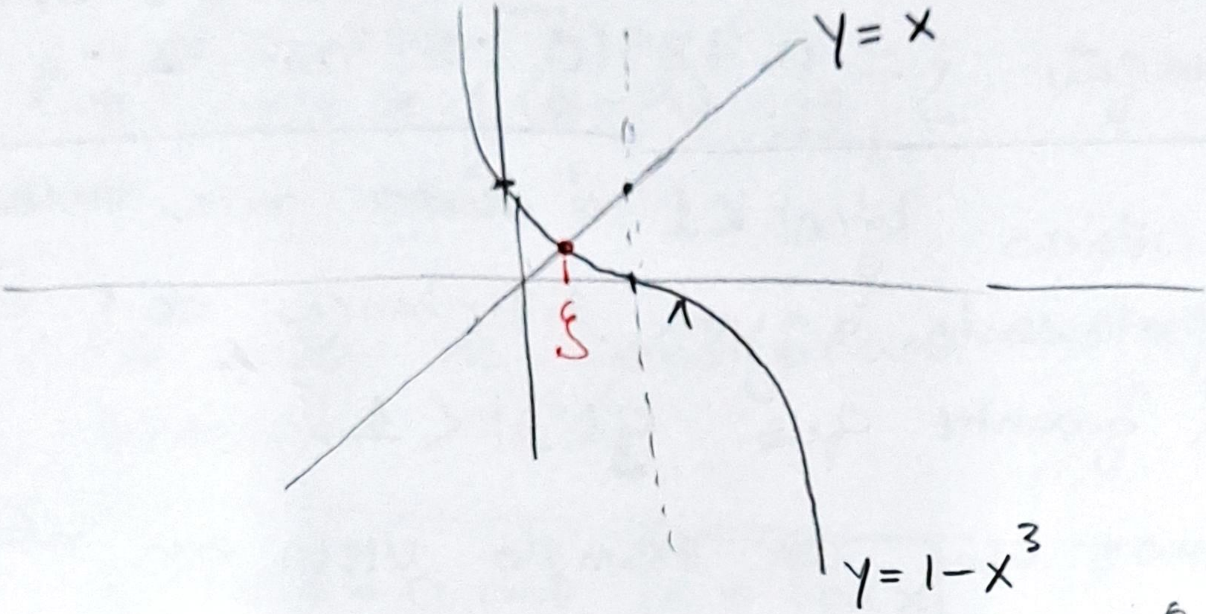
$$g'(x) = \frac{e^x}{2} > 1, \forall x \in [1,2].$$

$\therefore$ O método

$$x_{k+1} = \frac{e^{x_k} - 1}{2}$$

não converge.

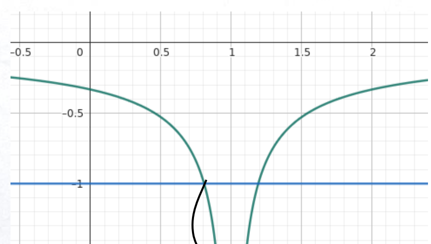
6. $x^3 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - x^3$



Pelo gráfico acima vemos que $\xi \in [0,1]$.

Fazendo $x = \sqrt[3]{1-x}$. Teremos

$g(x) = \sqrt[3]{1-x}$. Logo,



$$g'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

Note que $|g'(x)| < 1, \forall x \in [0, 0.8]$

Portanto, pelo teorema da convergência do método do ponto fixo o método

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{1 - x_k}$$ irá convergir.

Solução feita em um código em python com $x_0 = 0.5$

$\xi \simeq 0.6823.$

---

⑦ A fórmula do método de Newton é dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Logo, para a equação $x^2 - 3 = 0$, a função f é definida por

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Sua derivada é $f'(x) = 2x$. Desta forma, o método de Newton será:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^2 - 3)}{2x_k}.$$

A solução é feita no código em python.

$\xi \simeq 1.7320.$

---

⑧ A convergência é quadrática pois o erro na iteração $(k+1)$ tem a mesma ordem do erro anterior ao quadrado, isto é:

$$|x_{k+1} - \xi| \simeq |x_k - \xi|^2 \cdot \mu.$$

Podemos dizer que o número de digitos corretos da aproximação dobra a cada iteração.

A prova da ordem de convergência pode ser obtida através das equações:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} & (*) \\ 0 = f(\xi) & (**) \end{cases}$$

Expandindo a segunda equação em série de Taylor ao redor x_n, resulta em

$$0 = f(x_n + (\xi - x_n)) = f(x_n) + (\xi - x_n) f'(x_n) + \frac{(\xi - x_n)^2}{2!} f''(\eta_n),$$ com η_n entre x_n e ξ.

$$\Longrightarrow \quad 0 = \underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{(x_{n+1} - x_n) \text{ Eq } (*)} - (\xi - x_n) - \frac{(\xi - x_n)^2}{2} \frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)}$$

$$0 = x_{n+1} - \cancel{x_n} - \xi + \cancel{x_n} - \frac{(\xi - x_n)^2}{2} \frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)}.$$

$$\Rightarrow (\xi - x_{k+1}) = -\frac{(\xi - x_k)^2}{2} \cdot \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)}$$

Aplicamos o módulo:

$$|\xi - x_{k+1}| = \frac{|\xi - x_k|^2}{2} \frac{|f''(\eta_k)|}{|f'(x_k)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\xi - x_{k+1}|}{|\xi - x_k|^2} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} \right|$$

aplicando o limite quando $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\xi - x_{k+1}|}{|\xi - x_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|.$$

O método de Newton pode falhar quando $f'(\xi) = 0$, pois na fórmula temos $f'(x_k)$ no denominador $\left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)$.

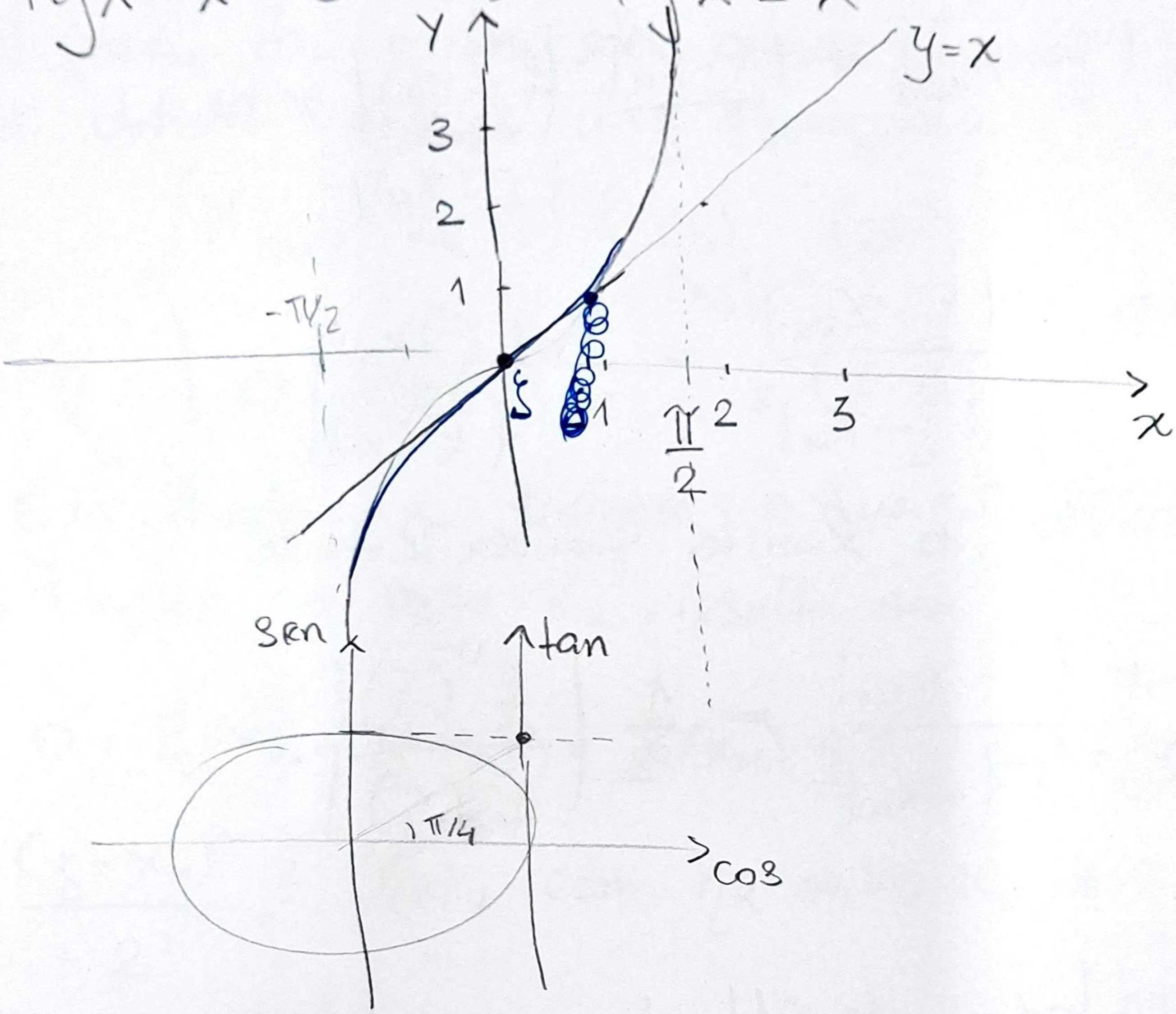
Exemplo: $f(x) = x^2$. A raiz é $\xi = 0$. Porém, $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Logo, o método de Newton possivelmente divergirá.

Exemplo com comportamento oscilatório

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

---

9 $tg\,x - x = 0 \Rightarrow tg\,x = x$



$\xi \in [0, 1]$

$$\begin{cases} f(x) = tg\,x - x \\ f'(x) = sec^2 x - 1 \end{cases} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{(tg\,x_k - x_k)}{(sec^2 x - 1)}$$

$\boxed{\xi = 0}$ → O método tem dificuldades em determinar ξ, pois a derivada de f é pequena na vizinhança de 0.