1 Lista de exercícios: Resolução de Equações Algébricas

1.1 Método da iteração linear

1. Justifique que a equação: $f(x) = 4x - e^x$ possui uma raiz no intervalo $(0,1)$ e outra no intervalo $(2,3)$.

2. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são: $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2.0$. Considere ainda os processos iterativos:

   a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$,

   b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$.

   Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz x_1? Por quê?

3. Considere as seguintes funções:

   a) $\psi_1(x) = 2x - 1$

   b) $\psi_2(x) = x^2 - 2 + 3$

   c) $\psi_3(x) = x^2 - 3x + 3$.

   Verifique que 1 é raiz de todas estas funções. Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$? Com a sua escolha, exiba a sequência gerada a partir da condição inicial $x_0 = 1.2$.

4. Deseja-se obter a raiz positiva da equação: $bx^2 + x - a = 0,\ a > 0,\ b > 0$, através do processo iterativo definido por:
$$x_{k+1} = a - bx_k^2. \tag{1}$$
   Qual condição que devemos impor para a e b para que haja convergência? Por quê?

5. A equação $x^2 - a = 0$ possui uma raiz $\bar{x} = \sqrt{a}$. Explicar algebricamente e geometricamente por quê a sequência $\{x_k\}$, obtida através do processo iterativo definido por $x_{k+1} = \frac{a}{x_k}$, não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor de x_0.

6. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a preparação óbvia da equação
$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}. \tag{2}$$

   a) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência:

      i) para a raiz próxima de -0.5, se o valor negativo for usado, e

      ii) para a raiz próxima de 1.0, se o valor positivo for usado.

   b) Mostrar que a forma anterior não converge para a terceira raiz próxima de qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

1.2 Método de Newton

7. Considere a equação $4\cos x - e^x = 0$. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas. Usando $p \approx \dfrac{\log\left(\frac{e_{k+1}}{e_k}\right)}{\log\left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)}$, confirme que a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, isto é, $p = 2$.

8. Usando o método de Newton, com erro inferior a 10^{-2}, determinar uma raiz das seguintes equações:

   a) $2x = \tan x$,

   b) $5x^3 + x^2 - 12x + 5 = 0$,

   c) $\sin x - e^x = 0$,

   d) $x^4 - 8 = 0$.

9. Considere a fórmula para determinar a raiz cúbica de Q:

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left[2x_k + \frac{Q}{x_k^2}\right],\ k = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

   a) Mostre que a fórmula anterior é um caso especial de iteração de Newton.

   b) Usando a fórmula dada no item a) calcule $\sqrt[3]{4}$, com precisão de 10^{-2}, determinando o valor inicial através do gráfico.

1.3 Método das secantes

10. Considere a equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas. Usando a relação $p \approx \dfrac{\log\left(\frac{e_{k+1}}{e_k}\right)}{\log\left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)}$, confirme que a ordem de convergência do método das secantes é $p \approx 1.618$.

11. Determinar, pelo método das secantes, uma raiz de cada uma das equações:

    a) $x = -2.7\ln x$,

    b) $\log x - \cos x = 0$,

    c) $e^{-x} - \log x = 0$.

1.4 Método regula falsi

12. Considere a equação $x - \cos x = 0$. Obtenha a raiz positiva com cinco casas decimais corretas. Usando o algoritmo do método regula falsi, confirme a ordem de convergência $p \approx 1.618$.

13. Determinar uma raiz de cada uma das equações:

    a) $\sin x - xe^x = 0$,

    b) $\cos x = e^x$,

    usando o método regula falsi.

14. A equação: $x - 2\sin x = 0$ possui uma raiz no intervalo $[1.8, 2.0]$. Determiná-la pelo método regula falsi, com duas casas decimais corretas.

1.5 Método da iteração linear para sistemas não lineares

15. Usando o método iterativo linear determinar a solução de:

$$\begin{cases} x = 0.7\sin x + 0.2\cos y \\ y = 0.7\cos x - 0.2\sin y \end{cases} \tag{4}$$

    próxima a $(0.5, 0.5)$.

16. O sistema não linear:

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 = 2 \\ xy - 3xy^3 = -4 \end{cases} \tag{5}$$

    possui uma raiz próxima a $(0.8, 1.2)$. Usando o método iterativo linear, determine essa raiz com precisão 10^{-1}.

1.6 Método de Newton

17. Usando o método de Newton determine, com precisão de 10^{-3}, uma raiz para cada um dos seguintes sistemas não lineares:

    i) $\begin{cases} 3x^2y - y^3 = 4 \\ x^2 + xy^3 = 9 \text{ com } \left(x_0, y_0\right) = (-1, -2)\,. \end{cases}$

    ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2} = 0 \text{ com } \left(x_0, y_0\right) = (0.5, 0.8)\,. \end{cases}$

    iii) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + \left(y-1\right)^2 = 4 \text{ com } \left(x_0, y_0\right) = (2, 1)\,. \end{cases}$