Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo Numérico Avançado: Soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente

Junho de 2023

Sumário

1 Problema de valor inicial

1. O método de Euler Modificado é deduzido a partir da figura abaixo:

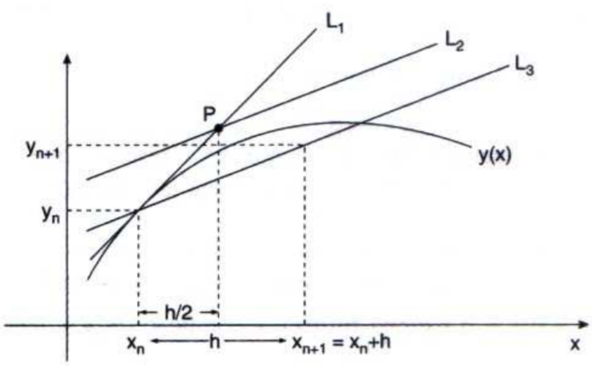

Figura 1: Euler Modificado.

- $y(x)$: solução exata da equação diferencial $y' = f(x, y)$
- $L_1 : z_1(x)$; reta que passa por (x_n, y_n) e é tangente a $y(x)$ em (x_n, y_n).
- $L_2 : z_2(x)$; reta que tem inclinação $f(P)$.
- $L_3 : z(x)$; reta que passa por (x_n, y_n) e é paralela a L_2.
- $y_{n+1} = z(x_n + h)$.

Deduza a expressão de y_{n+1}.

2. O problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y' &= -20y \\ y(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

tem por única solução exata $y(x) = e^{-20x}$.

a) Verifique a afirmação acima.

b) Verifique que qualquer método de Runge-Kutta de 2^a ordem, quando aplicado a este problema, nos fornece

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

3. Dado o PVI abaixo, considere $h = 0.5$, 0.25, 0.125 e 0.1

$$\begin{cases} y' = 4 - 2x \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{3}$$

a) Encontre uma aproximação para $y(5)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado, para cada h.

b) Compare seus resultados com a solução exata dada por $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.

c) Você espera o mesmo resultado do item b) usando o método de Euler? Justifique.

4. a) Deduza o método implícito para resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

do tipo $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$ onde usamos a regra dos Trapézios para calcular a integral acima.

b) Encontre a expressão do erro cometido.

c) Compare com o método de Euler, em termos de erros.

5. Dado o PVI $y' = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 20$, deseja-se encontrar a aproximação para $y(16)$. Resolva por

a) Runge-Kutta de 2^a ordem, $h = 2$.

b) Runge-Kutta de 4^a ordem, $h = 4$.

6. Substitua $y'(x)$ no PVI abaixo por $[y(x + h) - y(x)]/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial.

Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}\left(2y + x + 1\right) \\ y(1) = 0.5. \end{cases} \tag{5}$$

Solução exata: $y(x) = 2x^2 - x - \frac{1}{2}$. (O método de diferenças finitas descrito aqui é uma outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial.)

7. a) Reduza $y''' + g_1(x,y)y'' + g_2(x,y)y' = g_3(x,y)$ a um sistema de três equações de 1^a ordem.

b) Como fica o método de Euler para esta equação?

8. Calcule $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$, utilizando Euler e Runge-Kutta de 4^a ordem com $h = 0.2$. Comparar seus resultados com os valores exatos de $y(x)$ nos pontos x_i, sabendo que $y(x) = e^x + x + 1$.

9. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = \left(y^2 - 1\right) / \left(x^2 + 1\right) \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

a) Calcule aproximações para $y(1)$, usando o método de Euler com $h = 0.2$ e $h = 0.25$;

b) Repita o item (a), usando agora o método de Euler Aperfeiçoado.

10. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

a) Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece:

$$y_{i+1} = \left(1 + h + h^2/2\right)^{i+1}. \tag{8}$$

b) Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivese sempre o mesmo sinal? Justifique.

11. a) Apresente a fórmula de iteração para o método de Taylor de ordem 2 aplicado ao PVI abaixo:

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

sendo $h = 0.1$;

b) Verifique que $y(x) = e^{-x} + x - 1$ é solução do PVI;

c) Calcule um limitante superior para o erro do método obtido em (a).

12. Considere a equação diferencial $y' = y\sin(y) + x$ com a condição inicial $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$. Utilizando esta informação, calcule aproximadamente $y(0.2)$.

13. Utilizando o *colab*, resolva o PVI abaixo pelo método do ponto médio, Euler explícito, implícito e regra dos trapézios, no intervalo $[0, 2]$, usando $h = 0.1$.

$$y' = y - 1,\ y(0)1.2. \tag{10}$$

Explique o comportamento de cada um desses métodos à luz das propriedades discutidas neste capítulo. Soluão exata: $y(x) = 0.2e^x + 1$.

14. Consideramos o seguinte PVI

$$\begin{aligned} &y' + e^{-y^2+1} = 2,\ t > 1, \\ &y(1) = -1 \end{aligned} \tag{11}$$

Inicializando pelo Método de Euler, use os seguintes métodos de passo múltiplo com $h = 0.1$ para computar o valor aproximado de $y(2)$:

a) método de Adams-Bashforth de ordem 2.

b) método de Adams-Bashforth de ordem 3.

c) método de Adams-Bashforth de ordem 4.

15. Considere o PVI

$$\begin{aligned} &y' + \cos(t) = y, \ 0 < t \leq 1, \\ &y(0) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Usando um método de inicialização adequado, aplique os seguintes métodos para computar aproximações para $y(1)$:

   a) Método de Adams-Bashforth de 2 passos.

   b) Método de Adams-Bashforth de 4 passos.

   Em cada caso, verifque se seus resultados satisfazem a ordem esperado do erro de truncamento local.

16. Mostre o desenvolvimento do Método de Adams-Moulton de 2 passos.

2 Gabarito

1. Basta usar a inclinação no meio do intervalo ($y'(x_n + \frac{h}{2})$) no lugar de $y'(x_n)$ no método de Euler. Em resumo, temos o seguinte método:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)). \tag{13}$$

2. Para a resolução deste exercício usamos o fato de que os métodos de Runge-Kutta são baseados nos métodos de Taylor. Por exemplo, o método de Runge-Kutta de 2 estágios é construído a partir da seguinte combinação de duas inclinações k_1 e k_2:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(ak_1 + bk_2\right), \tag{14}$$

   onde a e b são os pesos obtidos a partir da comparação com o método de Taylor de segunda ordem. As expressões gerais de k_1 e k_2 são:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1). \end{aligned} \tag{15}$$

   Note que a inclinação k_1 é o coeficiente angular da reta tangente à y no ponto (x_n, y_n). Já a inclinação k_2 é determinada a partir do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ \alpha b &= \frac{1}{2} \\ \beta b &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

A partir destas informações, chegamos que

$$y_{n+1} = y_n \left(1 - 20h + h^2 200\right), \tag{17}$$

que por meio da condição inicial e substituições repetidas, chegamos em

$$y_{n+1} = \left(1 - 20h + h^2 200\right)^{n+1}. \tag{18}$$

3. a) A Figura 2 apresenta o gráfico da solução aproximada com diferentes valores de h.

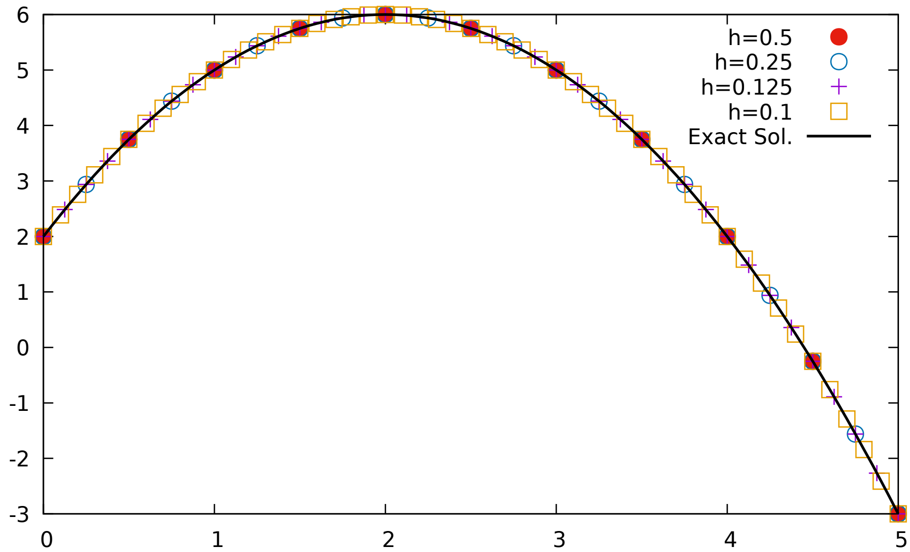

Figura 2: Solução aproximada pelo método de Euler Aperfeiçoado com diferentes valores de h.

b) O método de Euler Aperfeiçoado coincide com a solução exata do problema. Logo, o erro será zero qualquer que seja o valor de h. Isso pode ser verificado a partir de manipulações algébricas.

c) Solução pelo método de Euler Explícito 3.

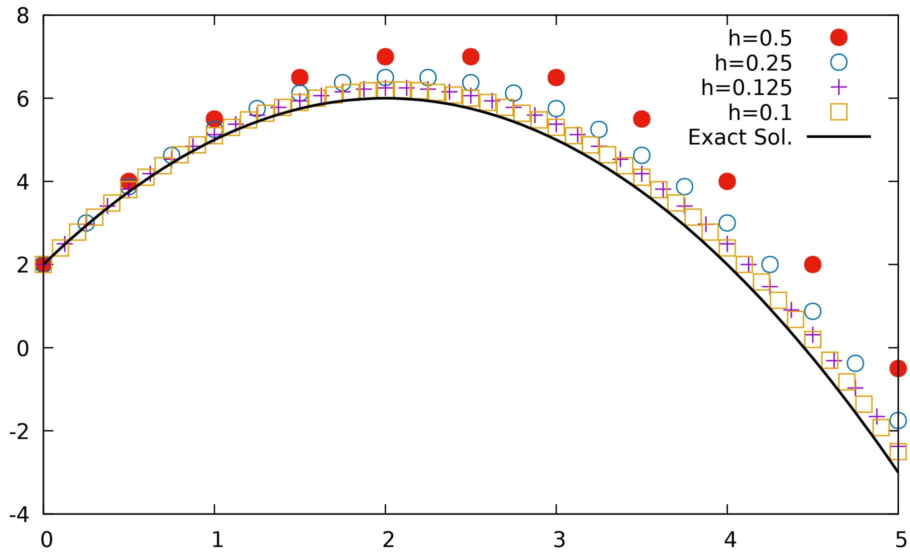

Figura 3: Solução aproximada pelo método de Euler Explícito com diferentes valores de h.