Resolução de equações algébricas

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos

1. Equações não lineares
2. Método da Bissecção
   - Processo de parada
3. Método da iteração linear
   - Ordem de convergência
4. Método de Newton
   - Ordem de convergência
5. Método das secantes
   - Ordem de convergência
6. Método regula falsi
   - Ordem de convergência
7. Sistemas de equações não lineares
   - Iteração linear para sistemas não lineares
   - Método de Newton

Equações não lineares

Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente em trabalhos científcos é calcular as raízes de equações da forma:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

onde $f(x)$ pode ser um polinômio em x ou uma função transcendente. Em raros casos é possível obter as raízes extas de $f(x) = 0$, como ocorre, por exemplo, supondo-se $f(x)$ um polinômio fatorável.

Introdução

Através de técnicas numéricas, é possível obter uma solução aproximada, em alguns casos, tão próxima da solução exata, quanto se deseja. A maioria dos procedimentos numéricos fornecem uma sequência de aproximações, cada uma das quais mais precisas que a anterior, de tal modo que a repetição do procedimento fornece uma aproximação a qual difere do valor verdadeiro por alguma tolerância pré-fixada. Estes procedimentos são, portanto, muito semelhantes ao conceito de limite da análise matemática.

Vamos considerar vários métodos iterativos para a determinação de aproximações para raízes isoladas de $f(x) = 0$.

Será dada uma atenção especial às equações polinomiais em virtude da importância que as mesmas gozam em aplicações práticas.

Teorema

Theorem (Teorema do anulamento)

Se uma função contínua $f(x)$ *assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo* $[a, b]$, *isto é, se* $f(a) \times f(b) < 0$, *então existe pelo menos um ponto* $\bar{x} \in [a, b]$, *tal que* $f(x) = 0$.

Definição de zero de função

Definition

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função dada, um ponto $\bar{x} \in [a, b]$ é um zero (ou raiz) de f se $f(\bar{x}) = 0$.

Exemplos

Example

Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Determinar as raízes de $f(x) = \ln x$.

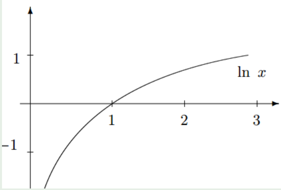


Figura 1: Gráfico de $f(x) = \ln x$.

Example

Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Determinar as razíes de $f(x) = e^x$.

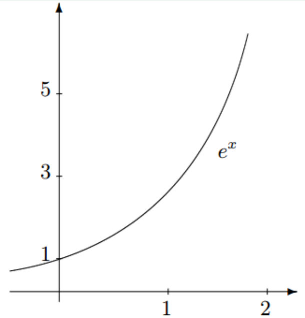


Figura 2: Gráfico de $f(x) = \exp x$.

Example

Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Determinar as raízes de $f(x) = \cos x$.

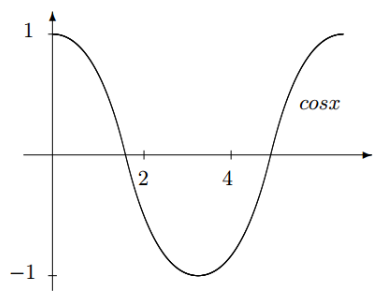


Figura 3: Gráfico de $f(x) = \cos x$.

Multiplicidade de raízes

Definition

Um ponto $\bar{x} \in [a, b]$ é uma raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$ se $f(x) = (x - \bar{x})^m g(x)$, com $g(\bar{x}) \neq 0$.

Exemplos

Example

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determina as raízes da equação:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0. \quad (2)$$

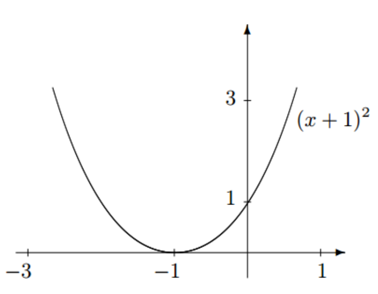


Figura 4: Gráfico de $(x+1)^2$.

Observação

Como vimos nos exemplos anteriores, podemos obter o número exato de raízes e sua localização exata ou aproximada traçando o gráfixo da função e encontrando o ponto onde a curva intercepta o eixo dos x. Entretanto, algumas vezes é mais conveniente rearranjar a equação dada como $y_1(x) = y_2(x)$, para duas funções y_1 e y_2, cujos gráficos são mais fáceis de serem traçados do que o de f. As raízes da equação original são dadas então pelos pontos onde o gráfixo de y_1 intercepta o de y_2. Ilustraremos este fato no próximo exemplo.

Exemplos

Example

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinar as raízes da equação:

$$f(x) = (x+1)^2 \, e^{\left(x^2-2\right)} - 1 = 0. \tag{3}$$

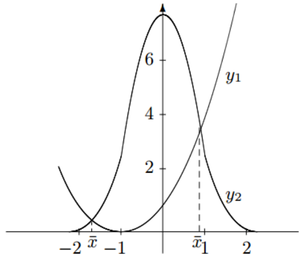


Figura 5: Gráfico de $y_1 = (x+1)^2$ e $y_2 = e^{2-x^2}$.

Observações

Este último exemplo ilustra bem a razão da utilização de métodos numéricos para determinar a solução de equações não lineares. Ao contrário dos exemplos anteriores, onde foi razoavelmente fácil determinar as raízes da função dada, aqui fica difícil dizer com exatidão qual é o valor de $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.
Para descrevermos um método numérico extremamente simples e de fácil compreensão, suponha que $f(x)$ seja uma função contínua em $[a, b]$. Pelo teorema do anulamento, temos que se $f(x)$ em $x = a$ e $x = b$ tem sinais opostos, então $f(x)$ tem no mínimo um zero em $[a, b]$. Este resultado fornece um caminho simples, mas efetivo, para encontrar a localização aproximada dos zeros de f.

Considere novamente a equação $f(x) = (x+1)^2 \, e^{x^2-2} - 1 = 0$. Valores de $f(x)$ para $x = -3, -2, \ldots, 3$ estão contidos na tabela a seguir:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4385.5	6.4	-1.0	-0.9	0.5	65.5	17545.1

Tabela 1: Tabela com os valores da função $f(x)$.

A função, portanto, possui zeros no intervalo $[-2, -1]$ e $[0, 1]$. (Note que o mesmo resultado foi obtido graficamente.) Estamos agora em condições de descrever um método numérico, conhecido como Método da bissecção, o qual reduz o comprimento do intervalo que contém a raiz, de maneira sistemática.

Método da bissecção

Considere o intervalo $[a, b]$ para o qual $f(a) \times f(b) < 0$. No método da bissecção calculamos o valor da função $f(x)$ no ponto médio: $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Portanto, existem três possibilidades.

- Primeiramente, ficaríamos felizes (embora seja quase impossível) se o valor da função calculado no ponto x_1 fosse nulo, isto é: $f(x_1) = 0$. Neste caso, x_1 é o zero de f e não precisamos fazer mais nada.
- Em segundo lugar, se $f(a) \times f(x_1) < 0$, então f tem um zero entre a e x_1. O processo pode ser repetido sobre o novo intervalo $[a, x_1]$.
- Finalmente, se $f(a) \times f(x_1) > 0$, segue que $f(b) \times f(x_1) < 0$, desde que é conhecido que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos. Portanto, f tem um zero entre x_1 e b, e o processo pode ser repetido com $[x_1, b]$.

A repetição do método é chamado iteração e as aproximações sucessivas são os termos iterados. Assim, o método da bissecção pode ser descrito como:

Para $k = 1, 2, \ldots,$ faça:

$$x_k = \frac{a+b}{2}. \tag{4}$$

$$\text{Se } f(a) \times f(x_k) \begin{cases} < 0 \text{ então } b = x_k \\ > 0 \text{ então } a = x_k \end{cases}$$

Uma interpretação geométrica do método da bissecção é dada na Figura abaixo:

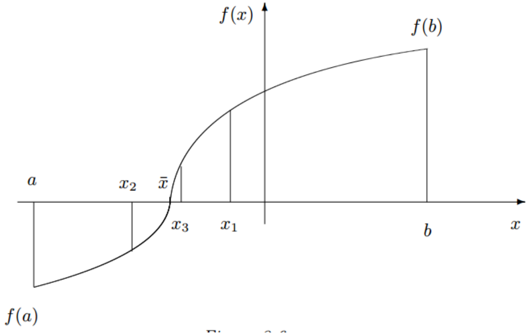


Figura 6: Interpretação geométrica do método da bissecção.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determina pelo método da bissecção as raízes da equação:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0. \tag{5}$$

Exercícios

1. Dadas as funções:
   a) $x^3 + 3x - 1 = 0$,
   b) $x^2 - \sin x = 0$.

   pesquisar a existência de raízes reais e isolá-las em intervalos.
2. Justifique que a função:

$$f(x) = \cos\frac{\pi(x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062 = 0 \tag{6}$$

   possui uma raiz no intervalo $(-1, 0)$ e outra no intervalo $(0, 1)$.

Observações

Existem vários métodos numéricos para determinação (aproximada) das raízes da equação $f(x) = 0$, mais eficientes que o método da bissecção. Descreveremos a seguir alguns desses métodos, discutindo suas vantagens e desvantagens. Antes, porém, daremos um procedimento que deve ser seguido na aplicação de qualquer método numérico para determinar um zero de $f(x) = 0$, com uma precisão pré-fixada.

Processo de parada

- Para aplicar qualquer método numérico deveremos ter sempre uma idéia sobre a localização da raiz a ser determinada. Essa localização é obtida, em geral, através de gráfixo. (Podemos também localizar o intervalo contém a raiz fazendo uso do teorema do anulamento). A partir da localização da raiz, escolhemos então x_0 como uma aproximação inicial para a raiz $\bar{x}$ de $f(x) = 0$. Com essa aproximação inicial e um método numérico refinamos a solução até obtê-la com uma determinada precisão (número de casas decimais corretas).
- Para obtermos uma raiz com uma determinada precisão ϵ devemos, durante o processo iterativo, efetuar o seguinte teste: Se

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon, \text{ (erro relativo)}, \tag{7}$$

onde ϵ é uma precisão pré-fixada; x_k e x_{k+1} são duas aproximações consecutivas para $\bar{x}$, então x_{k+1} é a raiz procurada, isto é, tomamos $\bar{x} = x_{k+1}$.

Observações

- Em relação à precisão pré-fixada, normalmente, tomamos $\epsilon = 10^{-m}$, onde m é o número de casas decimais que queremos corretas no resultado.
- Apesar de alguns autores considerarem como teste de parada o fato de $|f(x_{k+1})| < \epsilon$, é preciso ter muito cuidado, pois, a menos que se tenha uma idéia muito clara do comportamento da função, o fato deste teste ser satisfeito não implica necessariamente que x_{k+1} esteja próximo da raiz procurada, como pode ser observado no exemplo: considere $f(x) = x^{-3} \ln x = 0$, onde a única raiz é $\bar{x} = 1$. Calculando $f(x)$ para $x = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ obtemos, respectivamente: $0.866, 0.0217, 0.00406, 0.0007769, 0.0001058, \ldots$, isto é, quanto mais longe estamos e $\bar{x}$, menor é o valor de $f(x)$.

Observações

- Alguns autores consideram como teste de parada o fato de $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$, chamado de erro absoluto. Entretanto, se esses números forem muito grandes e ϵ for muito pequeno, pode não ser possível calcular a raiz com uma precisão tão exigente. Como exemplo, resolva a equação: $f(x) = (x - 1)(x - 2000) = 0$ com $\epsilon = 10^{-4}$ usando os critérios de erro relativo e erro absoluto. Você irá verificar que o número de iterações é muito maior para o critério do erro absoluto. Isso ocorre porque a raiz que estamos procurando tem módulo grande e, portanto, é muito mais difícil tornar o erro absoluto menor do que ϵ.

Observações

- Quando fazemos um programa computacional, devemos considerar o erro relativo escrito na seguinte forma:

$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon * \max\{1, |x_{k+1}|\}, \tag{8}$$

  pois se $|x_{k+1}|$ estiver próximo de zero, o processo não estaciona. Além do teste do erro relativo, devemos colocar um número máximo de iterações pois se o programa não estiver bem, ou se o método não se aplicar ao problema que s e está resolvendo, o programa entrará em *looping*.

Método da iteração linear

A fim de introduzir o método de iteração linear para o cálculo de uma raiz da equação:

$$f(x) = 0, \tag{9}$$

onde $f(x)$ é uma função contínua num intervalo que contenha a raiz procurada, expressamos, inicialmente, a equação (9) na forma

$$x = \psi(x), \tag{10}$$

de maneira que qualquer solução de (10) seja, também, solução de (9). Para qualquer função ψ, qualquer solução de (10) é chamada de ponto fixo de $\psi(x)$. Assim, o problema de determinar um zero de $f(x)$ foi transformado no problema de determinar o ponto fixo de $\psi(x)$, e essa transformação não deve alterar a posição da raiz procurada.

Iteração linear

Em geral, há muitos modeos de expressar $f(x)$ na forma (10). Basta considerarmos:

$$\psi(x) = x + A(x)f(x), \tag{11}$$

para qualquer $A(x)$ tal que $A(\bar{x}) \neq 0$.

Nem todas, porém serão igualmente satisfatórias para as nossas finalidades. Algumas formas possíveis da equação:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \tag{12}$$

cujas raízes são -1 e 2, por exemplo, são:

a) $x = x^2 - 2$,
b) $x = \sqrt{2 + x}$
c) $x = 1 + \frac{2}{x}$,
d) $x = x - \frac{x^2 - 2x - 8}{m}$, $m \neq 0$.

É claro que não necessitamos de um métodos numérico para calcular as raízes de uma equação do segundo grau, contudo este exemplo ilustrará de maneira objetiva os nossos propósitos.
Como já dissemos anteriormente, geometricamente, a equação (9) tem como solução a interseção do gráfico de f com o eixo x, enquanto que uma raiz de (10) é um número $\bar{x}$, para o qual a reta $y_1 = x$ intercepta a curva $y_2 = \psi(x)$. Pode ocorrer, naturalmente, que estas curvas não se interceptem, caso em que não haverá raiz real. Admitiremos, contudo, que essas curvas se interceptem, no mínimo, uma vez; que estamos interessados em determinar uma dessas raízes, digamos $\bar{x}$, e que $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ sejam contínua num intervalo que conhenha essa raiz.

Método iterativo linear

Seja x_0 uma aproximação inicial para a raiz $\bar{x}$ de (10). Obtemos as aproximações sucessivas x_k, para a solução desejada $\bar{x}$, usando o processo iterativo definido por:

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \; k = 0, 1, \ldots . \tag{13}$$

Esse processo é chamado método iterativo linear.
Para que este processo seja vantajoso, devemos obter aproximações sucessivas x_k, convergentes para a solução desejada $\bar{x}$. Contudo, é fácil obter exemplos para os quais a sequência x_k diverge.

Exemplos

Example

Considerando a equação $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, temos que $x = x^2 - 2$ e tomando $x_0 = 2.5$, determinar a raiz $\bar{x} = 2$.

Observação

Assim, a escolha de $\psi(x) = x^2 - 2$ não produz um processo iterativo que seja convergente.
As condições suficientes que a função $\psi(x)$ deve satisfazer para assegurar a convergência da iteração linear estão contidas no teorema apresentado a seguir. Vejamos antes dois teoremas que serão utilizados na prova desse Teorema.

Theorem (Teorema do valor médio)

Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) então existe pelo menos um ponto ξ entre a e b tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ \textit{isto é}, \ f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)\,. \tag{14}$$

Theorem (Teorema da permanência do sinal)

Seja f uma função real de variável real definida e contínua numa vizinhança de x_0. Se $f(x_0) \neq 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo x pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de x_0.

Teorema

Theorem (Condições para convergência do método iterativo linear)

Seja $\psi(x)$ uma função contínua, com derivadas primeira e segunda contínuas num intervalo fechado I da forma $I = (\bar{x} - h, \bar{x} + h)$, cujo centro $\bar{x}$ é solução de $x = \psi(x)$. Seja $x_0 \in I$ e M um limitante da forma $|\psi'(x)| \leq M < 1$ em I. Então:

a) *a iteração $x_{k+1} = \psi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, pode ser executada indefinidamente, pois $x_k \in I$, $\forall k$.*

b) $|x_k - \bar{x}| \to 0$.

c) *Se $\psi'(\bar{x}) \neq 0$ ou $\psi'(\bar{x}) = 0$ e $\psi''(\bar{x}) \neq 0$ e se $|x_0 - \bar{x}|$ for suficientemente pequeno então a sequeência $x_1, x_2, \ldots$ será monotônica ou oscilante.*

Observações

Consideremos novamente a equação $x^2 - x - 2 = 0$. Se nosso objetivo é encontrar a raiz $\bar{x} = 2$, usando o problema de ponto fixo equivalente, teremos:

$$x = x^2 - 2 = \psi(x). \tag{15}$$

Para que o processo $x_{k+1} = x_k^2 - 2$ seja convergente devemos ter $|\psi'(x)| < 1$ na vizinhança de $\bar{x} = 2$. Temos que, $\psi'(x) = 2x$, e desde que $|\psi'(x)| > 1$ para $x > \frac{1}{2}$, o Teorema anterior não pode ser usado para garantir convergência. Entretanto, a iteração $x_{k+1} = x_k^2 - 2$ divergirá para qualquer escolha de $x_0 > \frac{1}{2}$, como vimos anteriormente.
Por outro lado, se usarmos o problema de ponto fixo $x = \sqrt{2 + x}$, teremos $\psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$. Portanto, $|\psi'(x)| < 1$ se e somente se $x > -1.75$. Assim, pelo Teorema anterior, podemos crer que a iteração

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, \tag{16}$$

será convergente para qualquer escolha de $x_0 > -1.75$, como pode ser observado no próximo exemplo.

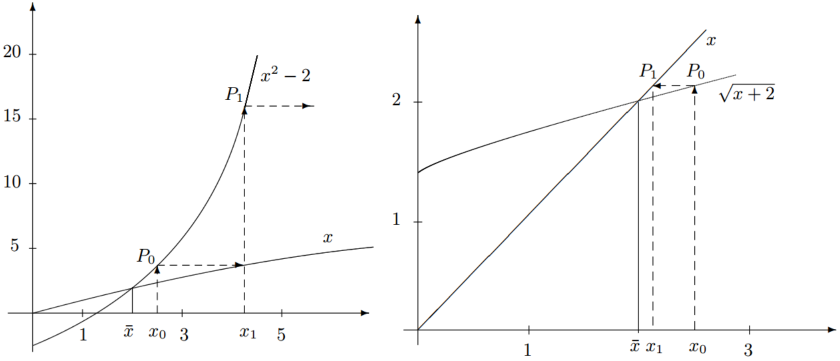
Exemplo

Example

Considerando a forma $x = \sqrt{2+x}$ e tomando $x_0 = 2.5$, determinar a raiz $\bar{x} = 2$.

Observações

Uma ilustração geométrica da não convergência e da convergência do método iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$ em ambos os casos: $x_{k+1} = x_k^2 - 2$ e $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_x}$ é dada pelas Figuras 7 a) e 7 b), respetivamente.



$x^2 - 2$ $\quad\quad$ $\sqrt{x+2}$

Figura 7: Gráfico de $x^2 - 2$ e $\sqrt{x+2}$ comparados com x.

Observações

Observe que, em cada uma das figuras, escolhido o ponto x_0 caminhamos verticalmente até encontrar a curva $\psi(x)$; em seguida caminhamos horizontalmente até encontrar a reta $y = x$ e, finalmente, caminhamos verticalmente até encontrar o eixo dos x onde estará localizado o ponto x_1. O processo é repetido partindo-se de x_1, e assim sucessivamente. Assim em a) temos que o processo iterativo é divergente e, em b), que o processo iterativo é convergente.

Ordem de convergência

A ordem de convergência de um método mede a velocidade com que as iterações produzidas por esse método aproximam-se da solução exata. Assim, quanto maior for a ordem de convergência melhor será o método numérico pois mais rapidamente obteremos a solução. Analisaremos aqui a ordem de convergência do método iterativo linear. Antes, porém, apresentamos a definição de ordem de convergência de um método numérico.

Definition

Sejam x_k o resultado da aplicação de um método numérico na iteração k e $e_k = x_k - \bar{x}$ o seu erro. Se existirem um número $p \geq 1$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c, \tag{17}$$

então p é a ordem de convergência desse método.

Teorema

Theorem (Ordem de convergência do método iterativo linear)

A ordem de convergência do método iterativo linear é linear, ou seja, $p = 1$.

Observações

a) A convergência do processo iterativo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de $\psi'(x)$.

b) Por outro lado, se a declividade $\psi'(x)$ for maior que 1 em valor absoluto, para todo x pertencente a um intervalo numa vizinhança da raiz, vimos que a iteração $x_{k+1} = \psi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots,$ divergirá.

c) Da definição de ordem de convergência podemos afirmar que para k suficientemente grande teremos:

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\approx c|e_k|^p, \\ |e_k| &\approx c|e_{k-1}|^p. \end{aligned} \tag{18}$$

Dividindo uma equação pela outro eliminamos a constante c e obtemos:

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \approx \left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)^p. \tag{19}$$

Observações

Assim, uma aproximação para o valor de p pode ser obtida aplicando-se logaritmo em ambos os membros da expressão anterior. Fazendo isto, segue que:

$$p \approx \frac{\log\left(\frac{e_{k+1}}{e_k}\right)}{\log\left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)}. \tag{20}$$

Example

Com os valores obtidos no exemplo $x = \sqrt{2+x}$ e tomando $x_0 = 2.5$, verifique que o método iterativo linear realmente possui ordem de convergência $p = 1$.

Conclusão

Assim, podemos dizer que a importância do método iterativo linear está mais nos conceitos que são introduzidos em seu estudo que em sua eficiência computacional. Além disso, tem a desvantagem de que é preciso testar se $|\psi'| < 1$ no intervalo que contém a raiz, se desejamos ter garantia de convergência.

1. Justifique que a equação: $f(x) = 4x - e^x$ possui uma raiz no intervalo $(0, 1)$ e outra no intervalo $(2, 3)$.
2. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são: $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2.0$. Considere ainda os processos iterativos:
   a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$,
   b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$.

   Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz x_1? Por quê?
3. Considere as seguintes funções:
   a) $\psi_1(x) = 2x - 1$
   b) $\psi_2(x) = x^2 - 2 + 3$
   c) $\psi_3(x) = x^2 - 3x + 3$.

   Verifique que 1 é raiz de todas estas funções. Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$? Com a sua escolha, exiba a sequência gerada a partir da condição inicial $x_0 = 1.2$.

Exercícios

1. Deseja-se obter a raiz positiva da equação:
   $bx^2 + x - a = 0,\ \ a > 0,\ \ b > 0$, através do processo iterativo definido por:
   $$x_{k+1} = a - bx_k^2. \tag{21}$$
   Qual condição que devemos impor para a e b para que haja convergência? Por quê?
2. A equação $x^2 - a = 0$ possui uma raiz $\bar{x} = \sqrt{a}$. Explicar algebricamente e geometricamente por quê a sequência $\{x_k\}$, obtida através do processo iterativo definido por $x_{k+1} = \frac{a}{x_k}$, não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor de x_0.

Exercícios

1. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a preparação óbvia da equação

$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}. \tag{22}$$

   a) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência:
      i) para a raiz próxima de -0.5, se o valor negativo for usado, e
      ii) para a raiz próxima de 1.0, se o valor positivo for usado.
   - Mostrar que a forma anterior não converge para a terceira raiz próxia de qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

O método de Newton é uma das técnicas mais populares para se determinar raízes de equações não lineares. Existem várias maneiras de deduzir o método de Newton. A que apresentaremos aqui é baesada no método de iteração linear. Assim, para descrever tal método, consideremos a equação

$$\psi(x) = x + A(x)f(x), \ \text{com} \ f'(x) \neq 0, \tag{23}$$

onde a função $A(x)$ deve ser escolhida de tal forma que $A(\bar{x} \neq 0$.
Vimos, pelo teorema da convergência, que temos garantia de convergência se $\max|\psi'(x)| < 1$ para $x \in I$. Assim, se escolhermos $A(x)$ tal que $\psi'(\bar{x}) = 0$, teremos que para $x \in I$, $\max|\psi'(x)| < 1$, garantindo então a convergência do método.

Método de Newton

Derivando a equação $\psi(x) = x + A(x)f(x)$ em relação a x, obtemos

$$\psi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x). \tag{24}$$

Fazendo $x = \bar{x}$, segue que:

$$\psi'(x) = 1 + A(\bar{x})f'(\bar{x}), \text{ pois } f(\bar{x})0, \tag{25}$$

e colocando

$$\psi'(\bar{x}) = 0, \text{teremos } A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})} \text{ desde que } f'(\bar{x}) \neq 0. \tag{26}$$

Método de Newton

Tomando então: $A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$, obtemos $\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. O processo iterativo definido por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{27}$$

é chamado método de Newton, que converge sempre que $|x_0 - \bar{x}|$ for suficientemente pequeno.

Interpretação geométrica do método de Newton

Uma interpretação geométrica do método de Newton é dada na Figura 8.

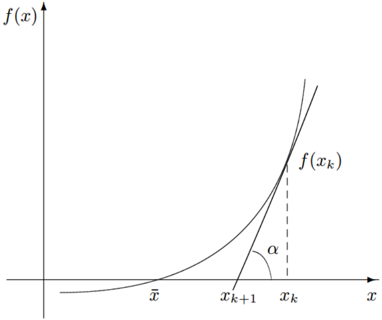


Figura 8: Interpretação geométrica do método de Newton.

Dado x_k, o valor x_{k+1} pode ser obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de interseção da tangente com o eixo dos x determina x_{k+1}.

Interpretação geométrica do método de Newton

De fato, pela lei da tangente:

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= \tan\alpha = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\ \Rightarrow x_k - x_{k+1} &= \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Devido à sua interpretação geométrica o método de Newton é, também, chamado de método das tangentes.

Exemplo

Example

Determinar, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação:

$$4\cos x - e^x = 0, \tag{29}$$

com erro inferior a 10^{-2}.

Ordem de convergência

Theorem

Ordem de convergência do método de Newton Se f, f', f'' são contínuas em I cujo centro $\bar{x}$ é solução de $f(x) = 0$ e se $f'(\bar{x}) \neq 0$ então a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, ou seja, $p = 2$.

Assim, a vantagem do método de Newton é que sua ordem de convergência é quadrática. Isto significa que a quantidade de dígitos significativos corretos duplica à medida que os valores da sequência se aproximam de $\bar{x}$. Note uqe essa correção não acontece em relção às primeiras iterações realizadas. A desvantagem do método de Newton está no fato de termos que calcular a derivada da função e, em cada iteração, calcular o seu valor numérico, o que pode ser muito caro computacionalmente. Além disso, a função pode ser não diferenciável em alguns pontos do domínio.

1. Considere a equação $4\cos x - e^x = 0$. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas. Usando $p \approx \dfrac{\log\left(\frac{e_{k+1}}{e_k}\right)}{\log\left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)}$, confirme que a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, isto é, $p = 2$.
2. Usando o método de Newton, com erro inferior a 10^{-2}, determinar uma raiz das seguintes equações:
   a) $2x = \tan x$,
   b) $5x^3 + x^2 - 12x + 5 = 0$,
   c) $\sin x - e^x = 0$,
   d) $x^4 - 8 = 0$.

Exercícios

1. Considere a fórmula para determinar a raiz cúbica de Q:

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left[2x_k + \frac{Q}{x_k^2}\right], \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{30}$$

   a) Mostre que a fórmula anterior é um caso especial de iteração de Newton.

   b) Usando a fórmula dada no item a) calcule $\sqrt[3]{4}$, com precisão de 10^{-2}, determinando o valor inicial através do gráfico.

Como foi observado anteriormente, uma série desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$, bem como calcular seu valor numérico, a cada passo. Há várias maneiras de modificar o método de Netwon a fim de eliminar essa desvantagem. Uma modificação consiste em substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \tag{31}$$

onde x_k, x_{k-1} são duas aproximações quaisquer para a raiz $\bar{x}$.

Método das secantes

Note que $f'(x_k)$ é o limite da relação (31) para $x_{k-1} \to x_k$.
O método de Newton, quando modificado desta maneira, é conhecido como método das secantes. Substituindo (31) na expressão do método de Newton, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}} \\ &= x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})\, f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \end{aligned} \tag{32}$$

Assim, colocando o segundo membro sobre o memso denominador, obtemos uma expressão mais simples para o método das secantes:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \tag{33}$$

Observe que devem estar disponíveis duas aproximações iniciais antes que o método da secante se inicie. Na Figura 9, ilustramos graficamente como uma nova aproximação pode ser obtida de duas anteriores.

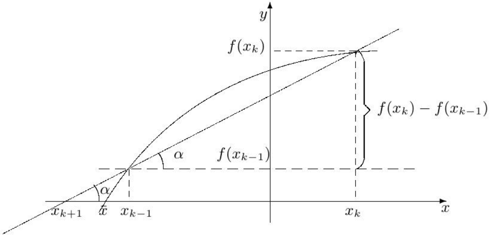


Figura 9: Interpretação geométrica do método das secantes.

Pela Figura 9 vemos que, geometricamente, o método das secantes consiste em considerar como aproximação seguinte a interseção da corda que une os pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo dos x.
Tomando:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)\,(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\
\Rightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} &= \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\
\Rightarrow \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_{k-1} - x_k} = \tan\alpha.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Example

Determine a raiz positiva da equação:

$$\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0, \tag{35}$$

pelo método das secantes, com erro inferior a 10^{-2}.

Ordem de convergência

Daremos aqui a ordem de convergência do método das secantes.

Theorem

A ordem de convergência do método das secantes é $p = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618$.

Observe que apesar da ordem de convergência do método das secantes ser inferior do método de Newton, ele fornece uma alternativa viável, desde que requer somente um cálculo da função f por passo, enquanto dois cálculos $(f(x_k))$ e $f'(x_k)$ são necessários para o método de Newton.

Exercícios

1. Considere a equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas. Usando a relação $p \approx \dfrac{\log\left(\frac{e_{k+1}}{e_k}\right)}{\log\left(\frac{e_k}{e_{k-1}}\right)}$, confirme que a ordem de convergência do método das secantes é $p \approx 1.618$.
2. Determinar, pelo método das secantes, uma raiz de cada uma das equações:
   a) $x = -2.7 \ln x$,
   b) $\log x - \cos x = 0$,
   c) $e^{-x} - \log x = 0$.

Método regula falsi

O método regula falsi é uma variação do método das secantes. Ele consiste em tomar duas aproximações iniciais x_0 e x_1 tais que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ tenham sinais opostos, isto é:

$$f(x_0) \times f(x_1) < 0. \tag{36}$$

Uma nova aproximação é determinada usando o método das secantes, ou seja:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}. \tag{37}$$

Se

$$\left|\frac{x_2 - x_0}{x_2}\right| < \epsilon \quad \text{ou} \quad \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| < \epsilon, \tag{38}$$

para um ϵ pré-fixado, então x_2 é a raiz procurada. Caso contrário, calculamos $f(x_2)$ e escolhemos entre x_0 e x_1 aquele cuja f tenha sinal oposto ao de $f(x_2)$. Com x_2 e esse ponto, calculamos x_3 usando a fórmula das secantes e assim sucessivamente. O processo iterativo deve ser continuado até que se obtenha a raiz com a precisão pré-fixada.

Uma interpretação geométrica do método regula falsi é dada na Figura 10. Observe que, na Figura 10, x_{k+1} é o ponto de interseção da corda que une os pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ com o eixo dos x. Neste caso, o novo intervalo contendo a raiz será (x_{k-1}, x_{k+1}). A aproximação x_{k+2} será o ponto de interseção da corda que une os pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ com o eixo dos x. Observe ainda que a aplicação do método regula falsi sempre mantém a raiz procurada entre as aproximações mais recentes.

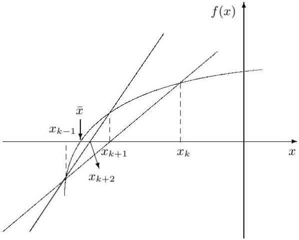


Figura 10: Interpretação geométrica do método reula falsi.

Example

Determinar a menor raiz positiva da equação:

$$x - \cos x = 0, \tag{39}$$

pelo método regula falsi, com erro inferior a 10^{-3}.

Ordem de convergência

A ordem de convergência do método regula falsi é semelhante à do método das secantes, uma vez que o procedimento para o cálculo das aproximações é o mesmo em ambos os casos. Assim, a ordem de convergência do método Regula falsi também é $p = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618$.

Exercícios

1. Considere a equação $x - \cos x = 0$. Obtenha a raiz positiva com cinco casas decimais corretas. Usando o algoritmo do método regula falsi, confirme a ordem de convergência $p \approx 1.618$.
2. Determinar uma raiz de cada uma das equações:
   a) $\sin x - xe^x = 0$,
   b) $\cos x = e^x$,

   usando o método regula falsi.
3. A equação: $x - 2\sin x = 0$ possui uma raiz no intervalo $[1.8, 2.0]$. Determiná-la pelo método regula falsi, com duas casas decimais corretas.

Sistemas de equações não lineares

Neste slide, consideramos o problema da determinação de raízes de equações não lineares simultâneas da forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

onde cada f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, é uma função real de m variáveis reais. Embora esse tópico seja de considerável importância, daremos aqui apenas uma breve introdução.

Assim, para efeito de simplicidade, e sem perda de generalidade, consideraremos apenas o caso de duas equações a duas incógnitas, isto é, sistemas não lineares da forma

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Geometricamente, as raízes deste sistema são os pontos do plano $(\bar{x}, \bar{y})$, onde as curvas definidas por f e g se interceptam.

Iteração linear

A resolução de sistemas não lineares através do método de iteração linear é muito semelhante ao método iterativo linear estudado anteriormente. Assim, um primeiro passo ao se aplicar iteração linear é reescrever o sistema

$$\begin{cases} x = F(x,y) \\ y = G(x,y) \end{cases} \tag{42}$$

de forma que qualquer solução de (42) seja, também, solução do sistemas não linear original.

Algoritmo

Sejam $(\bar{x}, \bar{y})$ uma solução do sistema não linear e (x_0, y_0) uma aproximação para $(\bar{x}, \bar{y})$. Obtemos as aproximações sucessivas (x_k, y_k) para a solução desejada $(\bar{x}, \bar{y})$ usando o processo iterativo definido por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = G(x_k, y_k) \end{cases} \tag{43}$$

Esse processo é chamado Método iterativo linear para sistemas não lineares.

Critérios para convergência

O método iterativo linear para sistemas não lineares irá convergir sob as seguintes condições suficientes (mas não necessárias):

a) F, G e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas numa vizinhança V da raiz $(\bar{x}, \bar{y})$.

b) As seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} |F_x| + |F_y| &\leq k_1 < 1, \\ |G_x| + |G_y| &\leq k_2 < 1, \end{aligned} \tag{44}$$

para todo ponto (x, y) pertencente a uma vizinhança V de $(\bar{x}, \bar{y})$, onde:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \;\; F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ etc.} \tag{45}$$

c) A aproximação inicial (x_0, y_0) pertença à vizinhança V de $(\bar{x}, \bar{y})$.

Para obtermos uma solução com uma determinada precisão ϵ devemos, durante o processo iterativo, calcular o erro relativo para todas as componentes do vetor solução. A convergência deste método é linear.

Exemplo

Example

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0.2x^2 + 0.2xy - x + 0.6 = 0 \\ g(x,y) = 0.4x + 0.1xy^2 - y + 0.5 = 0 \end{cases} \tag{46}$$

a) Verifique que reescrevendo o sistema dado na forma:

$$\begin{cases} x = 0.2x^2 + 0.2xy + 0.6 = F(x,y) \\ y = 0.4x + 0.1xy^2 + 0.5 = G(x,y) \end{cases} \tag{47}$$

as condições suficientes para garantir a convergência são satisfeitas.

b) Aplique o método iterativo linear para resolver o sistema dado.

Exercícios

1. Usando o método iterativo linear determinar a solução de:

$$\begin{cases} x = 0.7 \sin x + 0.2 \cos y \\ y = 0.7 \cos x - 0.2 \sin y \end{cases} \tag{48}$$

   próxima a $(0.5, 0.5)$.

2. O sistema não linear:

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 = 2 \\ xy - 3xy^3 = -4 \end{cases} \tag{49}$$

   possui uma raiz próxima a $(0.8, 1.2)$. Usando o método iterativo linear, determine essa raiz com precisão 10^{-1}.

Para adaptar o método de Newton a sistemas não lineares, procedemos como segue:
Seja (x_0, y_0) uma aproximação para a solução $(\bar{x}, \bar{y})$ de

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Admitindo que f e g sejam suficientemente diferenciáveis, expandimos $f(x,y)$ e $g(x,y)$, usando série de Taylor para funções de duas variáveis, em torno de (x_0, y_0). Assim:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0) f_x(x_0,y_0) + (y - y_0) f_y(x_0,y_0) + \ldots \\ g(x,y) = g(x_0,y_0) + (x - x_0) g_x(x_0,y_0) + (y - y_0) g_y(x_0,y_0) + \ldots \end{cases} \tag{51}$$

Método de Newton

Admitindo que (x_0, y_0) esteja suficientemente próximo da solução $(\bar{x}, \bar{y})$ a ponto de poderem ser abandonados os termos de mais alta ordem, podemos determinar uma nova aproximação para a raiz $(\bar{x}, \bar{y})$ fazendo $f(x, y) = g(x, y) = 0$. Obtemos, então, o sistema:

$$\begin{cases} f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0) = -f \\ g_x\,(x - x_0) + g_y\,(y - y_0) = -f \end{cases} \tag{52}$$

onde está entendido que todas as funções e derivadas parciais devem ser calculadas em (x_0, y_0). Observe que o novo sistema é agora um sistema linear. Além disso, se não tivéssemos desprezado os termos de mais alta ordem no desenvolvimento de Taylor, então (x, y) seria a solução exata do sistema não linear. Entretanto, a resolução do sistema fornecerá uma solução que chamaremos de (x_1, y_1). Devemos, então, esperar que (x_1, y_1) esteja mais próxima de $(\bar{x}, \bar{y})$ do que (x_0, y_0).

Resolvendo pela regra de Cramer, obtemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = \left[\frac{-fg_y + gf_y}{J(f,g)}\right]_{(x_0,y_0)} \\
y_1 - y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = \left[\frac{-gf_x + fg_x}{J(f,g)}\right]_{(x_0,y_0)},
\end{aligned}
\tag{53}
$$

onde $J(f,g) = f_x g_y - f_y g_x \neq 0$ em (x_0, y_0).

A função $J(f,g)$ é denominada de jacobiano das funções f e g. A solução (x_1, y_1) desse sistema fornece, agora, uma nova aproximação para $(\bar{x}, \bar{y})$. A repetição desse processo conduz ao método de Newton para sistemas não lineares.

Assim, o método de Newton para sistemas não lineares é definido por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \left[\dfrac{fg_y - gf_y}{J(f,g)} \right]_{(x_k, y_k)} \\ y_{k+1} = y_k - \left[\dfrac{gf_x - fg_x}{J(f,g)} \right]_{(x_k, y_k)} \end{cases} \tag{54}$$

com $J(f,g) = f_x g_y - f_y g_x$.

Observações

- Quando essa iteração converge, a convergência é quadrática.
- O método de Newton converge sob as seguintes condições suficientes:
  - f, g e suas derivadas parciais até segunda ordem sejam contínuas e limitadas numa vizinhança V contendo $(\bar{x}, \bar{y})$.
  - O jacobiano $J(f, g)$ não se anula em V.
  - A aproximação inicial (x_0, y_0) seja escolhiada suficientemente próxima da raíz $(\bar{x}, \bar{y})$.
- Valem aqui as mesmas observações citadas no processo de parada, só que agora temos um vetor como solução. Assim, o processo pára se o erro relativo em relação a cada componente do vetor solução for menor do que uma precisão pré-fixada ϵ. Observe que, se você estiver fazendo um programa computacional o erro relativo para cada componente do vetor solução deve ser calculado usando a fórmula do erro relativo ou então através do cálculo da norma de vetor.

Observações

O método de Newton pode ser, obviamente, aplicado a um sistema não linear de n equações a n incógnitas. Em cada etapa da iteração teremos, então, que calcular n^2 funções derivadas parciais e n funções. Isso representa um considerável custo computacional. Novamente, a menos que esteja disponível uma informação, a priori, a respeito da localização da raiz desejada, há claramente, a possibilidade da iteração não convergir ou que ela convirja para uma outra raiz. A solução de um sistema não linear de n equações, sendo n um valor elevado, torna-se muito difícil mesmo com o uso de computadores.

Example

Determinar uma raiz do sistema não linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \tag{55}$$

com precisão de 10^{-3}, usando o método de Newton.

Exercícios

1. Usando o método de Newton determine, com precisão de 10^{-3}, uma raiz para cada um dos seguintes sistemas não lineares:

   i) $\begin{cases} 3x^2y - y^3 = 4 \\ x^2 + xy^3 = 9 \text{ com } (x_0, y_0) = (-1, -2)\,. \end{cases}$

   ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2} = 0 \text{ com } (x_0, y_0) = (0.5, 0.8)\,. \end{cases}$

   iii) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \text{ com } (x_0, y_0) = (2, 1)\,. \end{cases}$