1 Lista de exercícios: Sistemas Lineares

1.1 Decomposição LU

1. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 3 & \dots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \dots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \tag{1}$$

obteve-se as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & 5 \\ \dots & 1 & \dots & -2 \\ \dots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 10 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Preencher os espaços pontilhados com valores adequados.

2. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \tag{3}$$

   a) Resolva-o usando decomposição LU.

   b) Calcule o determinante de A usando a decomposição.

3. Seja A, $n \times n$, decomponível em LU. Sejam A_i, $i = 1, 2, \dots, n$ os menores principais de ordem i. Mostre que:

$$u_{ii} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

onde:

$$\Delta_i = \det A_i, \quad \Delta_n = \det A \ \text{ e } \ \Delta_0 = 1. \tag{5}$$

4. Considere a matriz A, $n \times n$, com todas as sub-matrizes principais não singulares. Exiba as fórmulas da decomposição LU, onde L é matriz triangular inferior e U é a matriz triangular superior com 1 na diagonal. (A decomposição de uma matriz no produto LU onde U tem 1 na diagonal é conhecida também como **Método de Crout**.)

5. Resolva o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

usando a decomposição LU do exercício anterior.

6. Mostre que se A satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então A se decompõe de maneira única no produto LDU, onde L e U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, ambas com 1 na diagonal, e D é matriz diagonal. Além disso, $\det A = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$.

7. Mostre que se A é uma matriz simétrica e satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então $A = LDU$ implica $U = L^T$ (transposta de L).

8. Mostre que se A é uma matriz simétrica, positiva definida e satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então $A = LDL^T$, onde os elementos diagonais de D são todos positivos.

1.2 Eliminação de Gauss

9. Considere o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

   a) Resolva-o pelo método de Eliminação de Gauss.
   b) Calcule o determinante de A usando a matriz triangular obtida no item a).

10. Verificar, usando o método de Eliminação de Gauss, que o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{8}$$

não tem solução.

11. Usando o método de Eliminação de Gauss, verificar que o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \tag{9}$$

a) possui uma única solução quando $\alpha = 0$,

b) possui infinitas soluções quando $\alpha = 1$ e

c) não tem solução quando $\alpha = -1$.

12. Considere um sistema linear de ordem 12 que tem a matriz de Hilbert como matriz dos coeficientes e que a solução exata seja o vetor que possui todas as componentes iguais a 1. Resolva o sistema linear usando:

    a) o método de Eliminação de Gauss;

    b) o método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

1.3 Decomposição de Cholesky

13. Aplicando-se o processo de Cholesky à matriz A, obteve-se:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & 8 & 10 & -8 \\ 3 & 10 & 14 & -5 \\ \dots & -8 & \dots & 29 \end{pmatrix} = GG^t, \tag{10}$$

onde:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ 2 & \dots & & \\ \dots & 2 & 1 & \\ 0 & -4 & \dots & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Preencher os espaços pontilhados com valores adequados.

14. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} eB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Escolha adequadamente e resolva um dos sistemas lineares $Ax = b$, $Bx = b$, pelo processo de Cholesky, onde $b = (2, 1, 5)^t$.

15. Mostre que: Se o sistema de equações lineares algébricas $Ax = b$, onde A é matriz não singular, é transformado no sistema linear equivalente $Bx = c$, com $B = A^tA$, $c = A^tb$, onde A^t é a transposta de A, então o último sistema linear pode sempre ser resolvido pelo processo de Cholesky (isto é, a matriz B satisfaz as condições para aplicação do método). Aplicar a técnica anterior para determinar, pelo processo de Cholesky, a

solução do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

1.4 Cálculo de Matriz Inversa

16. Usando a decomposição LU, inverter a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

17. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

calcular A^{-1} utilizando o processo de Cholesky.

18. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Usando o método de Eliminação de Gauss, calcule A^{-1}.

19. Usando o método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial, calcule A^{-1}, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$