Vetores no Plano e no Espaço

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de vetores

- Soma de vetores e multiplicação por escalar
- Norma e produto escalar
- Projeção ortogonal
- Produto vetorial
- Produto misto

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As escalares são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade, são exempos de grandezas escalares. Assim, quando dizemos que uma mesa tem 3m de comprimento, que o volume de uma caixa é de 10 dm^3 ou que a temperatura ambiente é de $30^o C$, estamos determinando perfeitamente estas grandezas.

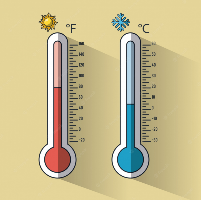


Figura 1: Exemplo de grandeza escalar.

Noção intuitiva - grandezas vetoriais

Existem, no entanto, grandezas que não ficam complemente definidas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas vetoriais, que para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais.

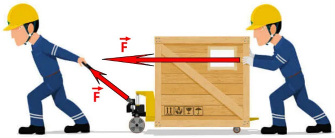


Figura 2: Exemplo de grandeza vetorial.

Noção de direção

A Figura 3 apresenta três retas. A reta r_1 determina, ou define, uma direção. A reta r_2 deterina outra direção, diferente da direção de r_1. Já a reta r_3, por ser paralela a r_1, possui a mesma direção de r_1. Assim a noção de direção é dada por uma reta e por todas as que lhe são paralelas. Quer dizer, retas paralelas têm a mesma direção.

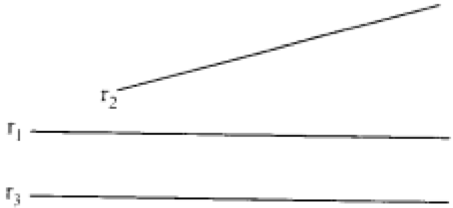


Figura 3: Exemplo de direção.

Na Figura 4 a direção é definida pela reta que passa pelos pontos A e B. O deslocamento de uma pessoa nessa mesma direção pode ser feito de duas maneiras: no sentido de A para B ou no sentido contrário, de B para A. Portanto, a cada direção podemos associar dois sentidos. Fica claro então que só podemos falar em "sentidos iguais" ou em "sentidos contrários" caso estejamos diante da mesma direção.

Figura 4: Exemplo de sentido.

Exemplo

Consideremos um avião com uma velocidade constante de 400 km/h, deslocando-se para nordeste, sob um ângulo de 40^o (na navegação aérea, as direções são dadas pelo ângulo considerado a partir do norte (N), em sentido horário). Esta grandeza (velocidade) seria representada por um segmento orientado (uma flecha - Figura 5), sendo o seu módulo dado pelo comprimento do segmento (no caso, 4cm, e cada 1cm corresponde a 100 km/h), com a direção e o sentido definidos pelo ângulo de 40^o. O sentido será indicado por uma seta na extremidade superior do segmento.

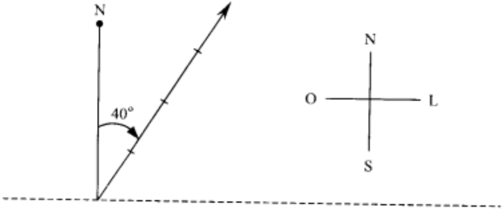


Figura 5: Exemplo do uso de vetores na navegação aérea.

Definição de vetor

Abstendo-se da idéia de grandezas vetoriais, diríamos que o vetor é representado por um segmento orientado (um segmento está orientado quando nele se escolhe um sentido de percurso, considerado positivo).

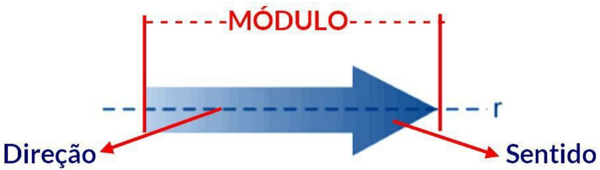


Figura 6: Definição de vetor.

Representantes de um mesmo vetor

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. Na Figura 7 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor, que será indicado por

$$\vec{AB} \text{ ou } B - A, \tag{1}$$

onde A é a origem e B a extremidade do segmento. O vetor também costuma ser indicado por uma letra minúscula encimada por uma flecha, tal como $\vec{v}$.

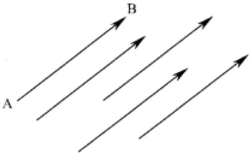


Figura 7: Representantes do vetor $\vec{AB}$.

Representantes de um mesmo vetor

Quando escrevemos $\vec{v} = \vec{AB}$ (Figura 8), estamos afirmando que o vetor $\vec{v}$ é determinado pelo segmento orientado AB. Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim sendo, cada ponto do espaço pode ser considerado como origem de um segmento orientado que é representante do vetor $\vec{v}$. Esta é a razão de o vetor também ser chamado vetor livre, no sentido de que o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto.

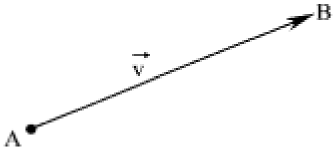


Figura 8: $\vec{AB}$ representa o mesmo vetor $\vec{v}$.

Determinação de um mesmo vetor

Ainda, dados um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ e um ponto P, existe um só ponto Q (Figura 9) tal que o segmento orientado PQ tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Portanto, temos também $\vec{v} = \vec{PQ}$, o que vem reforçar o fato de que um representante de $\vec{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto P do espaço.

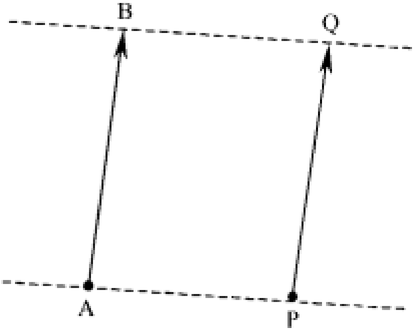


Figura 9: Existência e unicidade de um representante de $\vec{v}$ no ponto Q.

Definção de módulo ou norma

O módulo, a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, e indica-se por $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção. Na Figura 10, tem-se $\vec{u} /\!/ \vec{v} /\!/ \vec{w}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, enquanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$, têm sentidos contrário ao de $\vec{w}$.

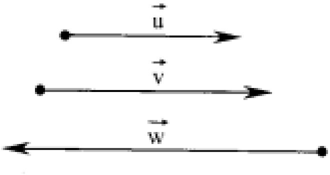


Figura 10: Vetores paralelos.

Igualdade de vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais, e indica-se por $\vec{u} = \vec{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

Vetor nulo

Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo) , que é indicado por $\vec{0}$ ou $\vec{AA}$ (a origem coincide com a extremidade). Pelo fato deste vetor não possuir direção e sentido definidos, considera-se o vetor zero paralelo a qualquer vetor.

Vetor oposto

A cada vetor não-nulo $\vec{v}$ corresponde um vetor oposto $-\vec{v}$, de mesmo módulo e mesma direção de $\vec{v}$, porém, de sentido contrário (Figura 11). Se $\vec{v} = \vec{AB}$, o vetor $\vec{BA}$ é oposto de $\vec{AB}$, isto é, $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

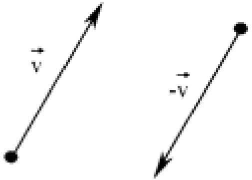


Figura 11: Vetores opostos.

Vetor unitário

Um vetor $\vec{u}$ é unitário se $\|\vec{u}\| = 1$. A cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários de mesma direção de $\vec{v}$: $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ (Figura 12). Nesta Figura, tem-se $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\| = 1$. O vetor $\vec{u}$ que tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ é chamado versor de $\vec{v}$. Na verdade o vetor $\vec{u}$ não é versor só de $\vec{v}$, mas sim de todos os vetores paralelos e de mesmo sentido de $\vec{v}$ e medidos com a mesma unidade.

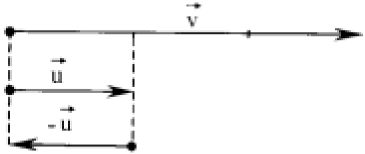


Figura 12: Vetor unitário.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 13) são ortogonais, e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. A Figura 13 apresenta dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem no ponto A, formando ângulo reto. Considera-se o vetor zero ortogonal a qualquer vetor.

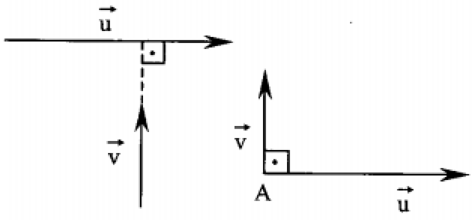


Figura 13: Vetores ortogonais.

Vetores coplanares

Dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano onde estes vetores estão representados. É importante observar que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer são sempre coplanares, pois basta considerar um ponto P no espaço e, com origem nele, traçar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo ao plano π (Figura 14) que passa por aquele ponto.

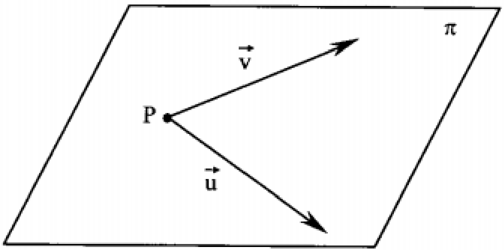


Figura 14: Vetores coplanares.

Exemplo

Example

A Figura 15 representa um paralelepípedoretângulo. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

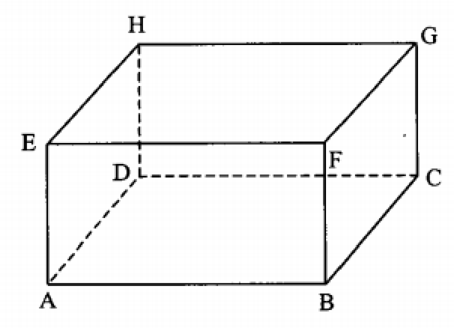


Figura 15: Paralelepípedo retângulo.

Exemplo - continuação

Example

(a) $\vec{DH} = \vec{BF}$

(b) $\vec{AB} = -\vec{HG}$

(c) $\vec{AB} \perp \vec{CG}$

(d) $\vec{AF} \perp \vec{BC}$

(e) $|\vec{AC}| = |\vec{HF}|$

(f) $|\vec{AB}| = |\vec{DF}|$

(g) $\vec{BG} \mathbin{/\!/} \vec{ED}$

(h) $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ e $\vec{CG}$ são coplanares

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 16) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC} \tag{2}$$

ou

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \tag{3}$$

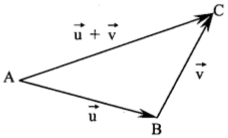


Figura 16: Soma de vetores.

Sendo $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, a maneira de se obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 17(a) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido) e na Figura 17(b) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de sentidos contrários).

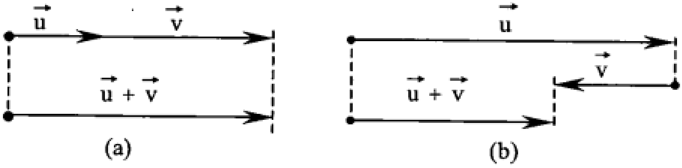


Figura 17: Soma de vetores paralelos.

Soma de vetores - regra do paralelogramo

No caso de os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não serem paralelos, há uma outra maneira de se encontrar o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$. Representam-se $\vec{u}=\vec{AB}$ e $\vec{v}=\vec{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A. Completa-se o paralelogramo $ABCD$ (Figura 18) e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\vec{u}+\vec{v}$, isto é,

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{AC} \tag{4}$$

ou

$$\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}. \tag{5}$$

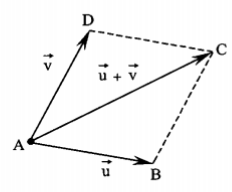


Figura 18: Regra do paralelogramo para soma de vetores.

Para o caso de se determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo (Figura 19(a)) e, em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeito (Figura 19(b)), a soma será o vetor nulo ($\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{t}=\vec{0}$).

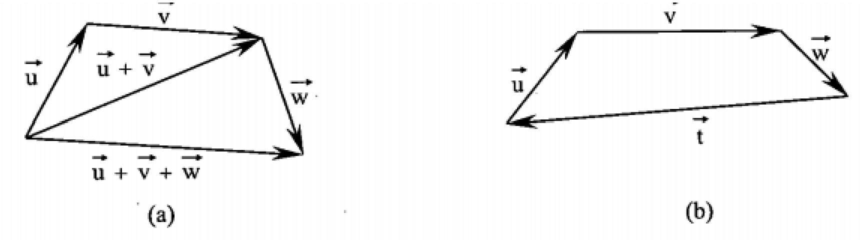


Figura 19: Soma com três ou mais vetores.

Propriedades da soma de vetores

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

O vetor $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$, escreve-se $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 20), verifica-se que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representado por uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ pela outra diagonal.

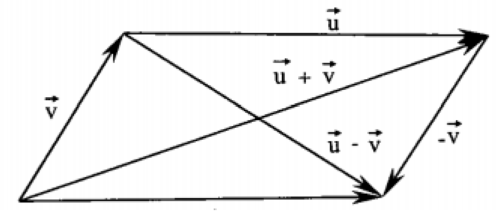


Figura 20: Diferença entre vetores.

Exemplos

Example

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos, construir no mesmo gráfico os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$ e $-\vec{u}-\vec{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

Example

Provar que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Multiplicação de número real por vetor

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, chama-se produto do número real α pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que

a) módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, isto é, o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;

b) direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$;

c) sentido: $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$, e contrário se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

A Figura 21 apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns de seus múltiplos.

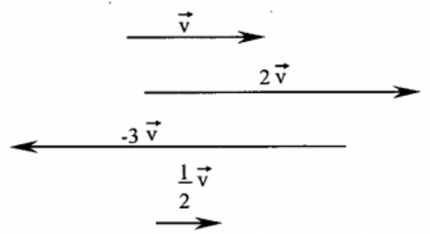


Figura 21: Multiplos do vetor $\vec{v}$.

Observações

a) Considerando o ponto O como origem de $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, e de todos os vetores $\alpha\vec{v}$ que lhe são paralelos (Figura 22), se fizermos α assumir todos os valores reais, teremos representados em uma só reta todos os vetores paralelos a $\vec{v}$.

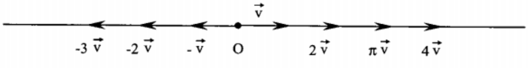


Figura 22: Multiplos do vetor $\vec{v}$.

Por outro lado, suponto $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, sempre existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Por exemplo, na Figura 23, tem-se

$$\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{AB}, \quad \vec{BD} = -2\vec{AB}, \quad \vec{CD} = -\frac{5}{2}\vec{AB} \tag{6}$$

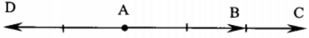


Figura 23: Multiplos de vetor.

b) Vimos em casos particulares de vetores, que a cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$. O vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido de $\vec{v}$ é o versor de $\vec{v}$. Por exemplo,

- se $|\vec{v}| = 5$, o versor de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{5}$;
- se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{3}$;
- se $|\vec{v}| = 10$, o versor de $-\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{10}$;

Example

Seja o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ tal que

a) tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 5;

b) tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 10.

Example

Representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na Figura 24, obter graficamente o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

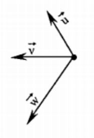


Figura 24: Representação dos vetores do exemplo.

Exemplos

Example

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralels, repsentados com origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo estes representantes, respectivamente, (Figura 25)

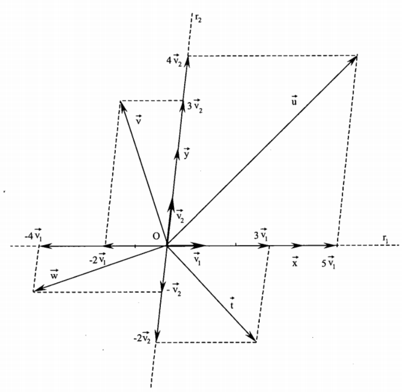


Figura 25: Combinação de vetores para construir outros.

Ainda com base na Figura anterior, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são expressos em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por

- $\vec{u} = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$
- $\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$
- $\vec{w} = -4\vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- $\vec{t} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$
- $\vec{x} = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$
- $\vec{y} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Combinação linear de vetores

De modo geral, dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não-paralelos, para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2. \tag{7}$$

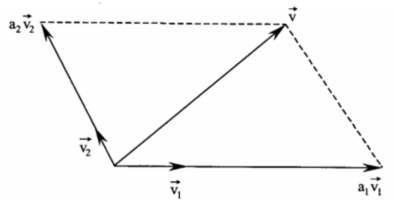


Figura 26: Combinação linear de vetores.

Combinação linear de vetores

A Figura 26 ilustra a situação onde $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são vetores não-paralelos quaisquer e $\vec{v}$ é um vetor arbitrário do plano determinado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Quando o vetor $\vec{v}$ é expresso como em 7, diz que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado base no plano. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não-paralelos constitui uma base no plano.
Os números a_1 e a_2 da igualdade 7 são chamados componentes ou coordenadas de $\vec{v}$ na base B.
O vetor $\vec{v}$ da igualdade 7 pode ser representado também por $\vec{v} = (a_1, a_2)$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

Na prática, as bases mais utilizadas são as ortonormais. Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, isto é, se $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

A base canônica

Dentre as infinitas bases ortonormais noplano, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal xOy. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ambos com origem em O e extremidades em $(1,0)$ e $(0,1)$, respectivamente, (Figura 27), sendo a base $C = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ chamada canônica. Portanto, $\vec{i} = (1,0)$ e $(0,1)$. Daqui por diante, trataremos somente da base canônica.

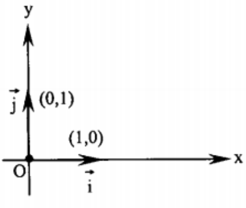


Figura 27: Representação da base canônica.

Representação de um vetor na base canônica

Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só dupla de números x e y tal que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{8}$$

Os números x e y são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica. A primeira componente é chamada abscissa de $\vec{v}$ e a segunda componente y é a ordenada de $\vec{v}$. O vetor $\vec{v}$ também pode ser representado por

$$\vec{v} = (x, y)\,, \tag{9}$$

dispensando-se a referência à base canônica C.

Relação entre vetor e par ordenado

Definition

Vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais.

O par (x, y) é chamado expressão analítica de $\vec{v}$. Para exemplificar, veja a seguir alguns vetores e suas correspondentes expressões analíticas:

$$\begin{array}{ll} 3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5) & -4\vec{i} = (-4, 0) \\ 3\vec{j} = (0, 3) & \vec{0} = (0, 0). \end{array} \tag{10}$$

Igualdade de vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais, se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Example

Determine os valores de x e y de modo que os vetores $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ e $\vec{u} = (x + 1, 4)$ sejam iguais.

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- Soma: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- Multiplicação por escalar: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

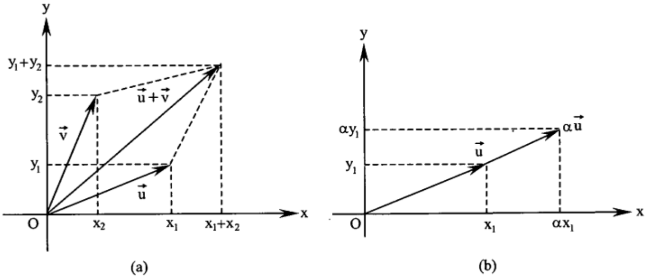


Figura 28: Operações com vetores.

Observações

Tem-se ainda

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = (-x_1, -y_1) \tag{11}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \tag{12}$$

Propriedades das operações

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e α e β escalares, tem-se:

- Comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- Elemento oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})$
- Associativa: $\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}$
- Distributiva: $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
- Distributiva: $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
- Elemento neutro: $1\vec{v}=\vec{v}$

Prove todas as propriedades.

Exemplos

Example

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determinar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Example

Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Example

Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $10\vec{,}\,2$, $\vec{v}_1 = (3, 5)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 2)$.

Vetor definido por dois pontos

Consderemos o vetor $\vec{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$ Figura 29. Os vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ têm expressões analíticas: $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ e $\vec{OB} = (x_2, y_2)$. Por outro lado, do triângulo OAB, vem

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \tag{13}$$

donde

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \tag{14}$$

ou

$$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1), \tag{15}$$

isto é, $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

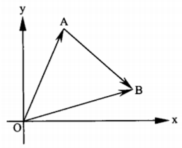


Figura 29: Triângulo formado por O, A e B.

Representante natural de $\vec{AB}$

É importante lembrra que um vetor têm infinitos representantes que são os segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. E, dentre os infinitos representantes do vetor $\vec{AB}$, o que melhor caracteriza é aquele que tem origem em $O(0,0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ Figura 30. O vetor $\vec{v} = \vec{OP}$ é também chamado vetor posição ou representante natural de $\vec{AB}$.

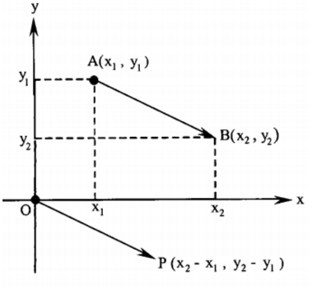


Figura 30: Representante natural.

Na Figura 31, os segmentos orientados OP, AB e CD representam o mesmo vetor $\vec{v} = P - O = B - A = D - C = (3, 1)$. Esta Figura deixa claro que o fato de os segmentos orientados ocuparem posições diferentes, é irrelevante. O que importa, é que eles tenham o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido para representarem o mesmo vetor.

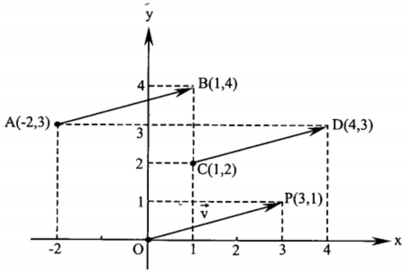


Figura 31: Mesmos representantes.

Por outro lado, sempre que tivermos

$$\vec{v} = \vec{AB} \text{ ou } \vec{v} = B - A \tag{16}$$

podemos também concluir que

$$B = A + \vec{v} \text{ ou } B = A + \vec{AB}, \tag{17}$$

isto é, o vetor $\vec{v}$ transporta o ponto inicial A para o ponto extremo B.

Exemplos

Example

Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$, determinar o ponto D de modo que $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Example

Sendo $A(-2, 4)$ e $B(4, 1)$ extremidades de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.

Example

Sendo $A(2, 1)$ e $B(5, 2)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

Ponto médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ Figura **??**. Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como $\vec{AM} = \vec{MB}$ ou

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y) \tag{18}$$

e daí

$$x - x_1 = x_2 - x \text{ e } y - y_1 = y_2 - y \tag{19}$$

Resolvendo em relação a x e y,temos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{20}$$

Exemplo

Determine o ponto médio M do segmento de extremos $A(-2, 3)$ e $B(6, 2)$.

Paralelismo de dois vetores

Vimos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha. \tag{21}$$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores, isto é, dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.

Exemplo e observações

Example

Os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (-4, 6)$ são paralelos.

Remark

Considera-se o vetor $\vec{0} = (0, 0)$ *paralelo a qualquer vetor.*

Remark

Se uma das componentes de um vetor for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também será nula.

Módulo de um vetor

Seja o vetor $\vec{v} = (x, y)$ Figura 32. Pelo teorema de Pitágoras, vem

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{22}$$

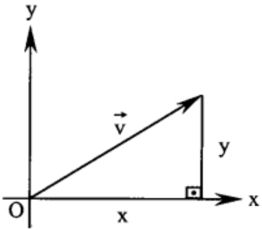


Figura 32: Cálculo da norma de um vetor.

Exemplo

Cálcule a norma do vetor $\vec{v} = (2, -3)$.

Observações

a) Distância entre dois pontos. A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é o comprimento (módulo) do vetor $\vec{AB}$, isto é,

$$d(A, B) = |\vec{AB}|. \tag{23}$$

Como $\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, temos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{24}$$

b) Vetor unitário Vimos que a cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplos

Example

Calcule o versor de $\vec{v} = (3, -4)$.

Example

Dados os pontos $A(2, -1)$ e $B(-1, 4)$ e os vetores $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -1)$, determinar

$$\begin{array}{ll} \text{a) } |\vec{u}| & \text{c) } |2\vec{u} - 3\vec{v}| \\ \text{b) } |\vec{u} + \vec{v}| & \text{d)a distância entre os pontos } A \text{ e } B \end{array} \tag{25}$$

Example

Determinar, no eixo Ox, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, -4)$.

Exemplo

Example

Dado o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$, achar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha

a) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e a metade do módulo de $\vec{v}$;

c) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

d) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 2.

Vetores no espaço

No espaço, de forma análoga, consideraremos a base canônica $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ como aquela que irá determinar o sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ Figura 33, onde estes três vetores unitários e dois a dois ortogonais estão representados com origem no ponto O. Este ponto e a direção de cada um dos vetores da base determinam os três eixos cartesianos.

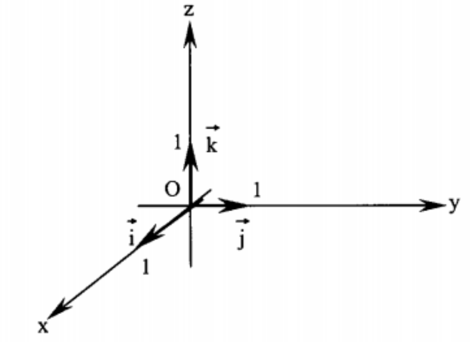
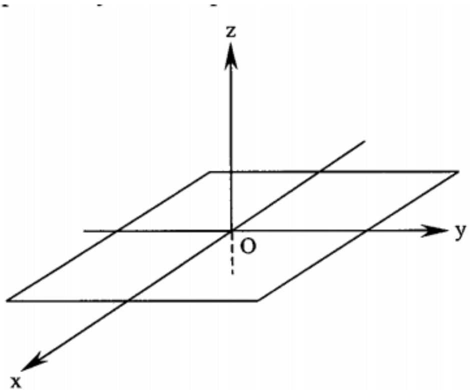
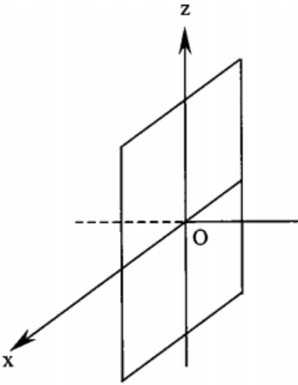


Figura 33: Base canônica no espaço.

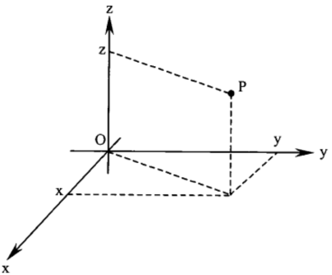
Planos

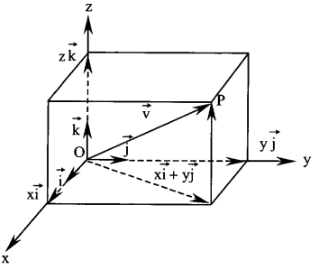
Cada dupla de vetores da base, e, consequentemente, cada dupla de eixos, determina um plano coordenado. Portanto, temos três planos coordenados: o plano xOy ou xy, o plano xOz ou xz e o plano yOz ou yz. A Figura 34 dão uma iédia dos planos xy e xz, respectivamente.





Assim como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço irá corresponder o vetor $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, isto é, as próprias coordenadas x, y e z do ponto P são as componentes do vetor $\vec{OP}$ na base canônica. As coordenadas x, y e z são denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente. A Figura 35 apresenta um ponto $P(x, y, z)$ no espaço, juntamente com o correspondente vetor $\vec{v} = \vec{OP}$, que representa a diagonal do paralelepípedo cujas arestas são definidas pelos vetores $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.





Representação de um vetor como tripla ordenada

O vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ também será expresso por

$$\vec{v} = (x, y, z) \tag{26}$$

que é a expressão analítica de $\vec{v}$. Para exemplificar

$$\begin{aligned} &2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1) \\ &\vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0) \\ &2\vec{j} - \vec{k} = (0, 2 - 1) \\ &4\vec{k} = (0, 0, 4) \end{aligned} \tag{27}$$

e, em particular, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Exemplo

Example

Marque o ponto $A(3,-2,4)$ no espço cartesiano.

As definições e conclusões no espaço, relativas aos títulos acima, são análogas às do plano:

I) Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

II) Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \alpha\vec{u} &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1). \end{aligned} \tag{28}$$

III) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então

$$\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{29}$$

Ponto médio - Paralelismo - Módulo de um vetor

As definições e conclusões no espaço, relativas aos títulos acima, são análogas às do plano:

IV) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são pontos extremos de um segmento, o ponto médio M de AB é:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \tag{30}$$

V) Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos, então

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \text{ ou } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{31}$$

VI) O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{32}$$

Exemplos

Example

Dados os pontos $A(0, 1, -1)$ e $B(1, 2, -1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que

$$\vec{w} = a_1 \vec{AB} + a_2 \vec{u} + a_3 \vec{v}. \tag{33}$$

Example

Encontrar o vértice oposto a B no paralelogramo $ABCD$, sendo dados $A(3, -2, 4)$, $B(5, 1, -3)$ e $C(0, 1, 2)$.

Exemplos

Example

Sabendo que o ponto $P(-3, m, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(1, -2, 4)$ e $B(-1, -3, 1)$, determinar m e n

Example

Seja o triângulo de vértices $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$. Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.