Retas e Planos

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de retas e planos

- Equações da reta
- Equações do plano
- Ângulos e distâncias
- Posições relativas de retas e planos

Equação Vetorial da Reta

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 1, próx. slide), isto é,

$$\vec{AP} = t\vec{v} \tag{1}$$

para algum real t. De (1), vem

$$P - A = t\vec{v} \Rightarrow P = A + t\vec{v} \tag{2}$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c). \tag{3}$$

Equação vetorial da reta

Qualquer uma das e quações (1), (2) e (3) é denominada **equação vetorial de** r. O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta r e t é denominado **parâmetro**.

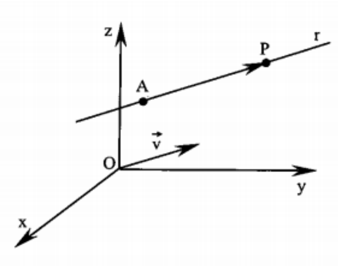

Figura 1: Reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

Exemplo

Example

Determine a equação vetorial da reta r que passa por $A(1, -1, 4)$ e tem direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$.

a) Vimos que para cada real t corresponde um ponto $P \in r$. recíproca também é verdadeira, isto é, a cada $P \in r$ corresponde um número real t.

b) Existem infinitas equações vetorial de uma mesma reta r, pois basta tomar outro ponto de r ou qualquer vetor não-nulo que seja múltiplo de $\vec{v}$.

Equações paramétricas da reta

Da equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \tag{4}$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_1 + at.y_1 + bt, z_1 + ct), \tag{5}$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct. \end{cases} \tag{6}$$

As equações (6) são chamadas **equações paramétricas** da reta.

Exemplos

Example

Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

Example

Dado o ponto $A(2, 3, -4)$ e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.

d) Verificar se os pontos $D(4, -1, 2)$ e $E(5, -4, 3)$ pertencem a r.

e) Determinar para que valores de m e n o ponto $F(m, 5, n)$ pertence a r.

f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \vec{AB}$.

Example

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por $A(3, -1, -2)$ e $B(1, 2, 4)$.

Equações paramétricas de um segmento de reta

Consideremos uma reta r e nela o segmento AB (origem A e extremidade B) (Figura 2).
As equações paramétricas do segmento AB são as mesmas da reta r, porém, com $0 \leq t \leq 1$.

Figura 2: Equação de um segmento de reta.

Equações simétricas da reta

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \quad y = y_1 + bt \quad z = z_1 + ct \tag{7}$$

supondo $abc \neq 0$, vem

$$t = \frac{x - x_1}{a} \quad t = \frac{y - y_1}{b} \quad t = \frac{z - z_1}{c} \tag{8}$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t, obtemos as igualdades

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{9}$$

As equações (9) são denominadas **equações simétricas** da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

Em vez de realizar um tratamento genérico, tomaremos um caso particular. Seja a reta r definida pelo ponto $A(2,-4,-3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v}=(1,2,3)$ e expressa pelas equações simétricas

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}. \tag{10}$$

A partir destas equações pode-se expressar duas variáveis em função da terceira. Isolando, primeiramente, as variáveis y e z e expressando-as em função de x, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{1} &= \frac{y+4}{2} & \frac{x-2}{1} &= \frac{z+3}{-3} \\ 1(y+4) &= 2(x-2) & 1(z+3) &= -3(x-2) \\ y+4 &= 2x-4 & z+3 &= -3x+6 \\ y &= 2x-8 & z &= -3x+3 \end{aligned} \tag{11}$$

Estas duas últimas equações são equações reduzidas da reta r, na variável x.

Retas paralelas aos planos coordenados

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Neste caso, uma das componentes do vetor é nula.

A Figura 3 mostra a reta r $(r /\!/ xOy)$ que passa pelo ponto $A(-1, 2, 4)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 3, 0)$ (a 3^a componente é nula porque $\vec{v} /\!/ xOy$).

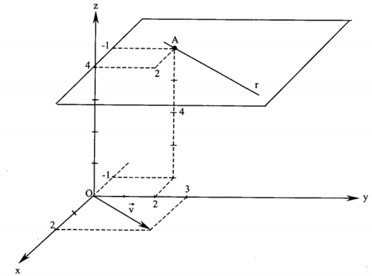

Figura 3: Reta r paralela ao plano xOy.

Retas paralelas aos eixos coordenados

Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i} = (1,0,0)$ ou a $\vec{j} = (0,1,0)$ ou $\kappa = (0,0,1)$. Neste caso, **duas das componentes do vetor são nulas**.

Example

Seja a reta r que passa por $A(2,3,4)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (0,0,3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo Oz (Figura 4).

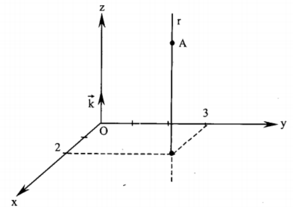

Figura 4: Reta paralela ao eixo Oz.

Observações

Para o caso particular da reta ser paralela a um eixo coordenado, costuma-se fazer uma simplificação, expressando as equações só pelas constantes. Para o caso particular acima, diz-se que as equações de r são

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \tag{12}$$

subentendendo-se z variável livre que assume todos os valores reais. Na verdade, todos os pontos de r são do tipo $(2, 3, z)$ e as coordenadas constantes identificam perfeitamente a reta.

Ângulo de duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente (Figura 5).

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 . \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

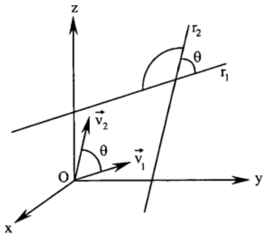

Figura 5: Ângulo de duas retas.

Exemplo

Example

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1 : \{x = 3 + t$$

y=t
z=-1-2t e $r_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}(14)$

Retas ortogonais

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Então,

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0 \tag{15}$$

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 6, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Neste caso, diz-se que são **perpendiculares**.

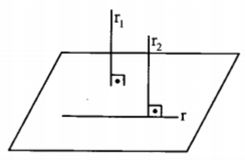

Figura 6: Retas r_1 e r_2 orgotonais a r.

Exemplo

Example

Verifique que as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

$$r_1 : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \tag{16}$$

Reta ortogonal a duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não-paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Toda reta r ao mesmo tempo ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v}.\vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}.\vec{v}_2 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Em vez de tomarmos um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ como uma solução particular do sistema poderíamos utilizar o produto vetorial, isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{18}$$

Definido um vetor diretor, a reta r estará determinada quando for conhecido um de seus pontos.

Exemplo

Example

Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3,4,-1)$ e é ortogonal às retas

$$r_1 : (x,y,z) = (0,0,1) + t(2,3,-4) \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \tag{19}$$

Example

Verificar se as retas r_1 e r_2 são concorrentes e, em caso afirmativo, determinar o ponto de interseção:

1) $r_1 : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

2) $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

3) $r_1 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 2x - 5 \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{4}$

Equação geral do plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 7)

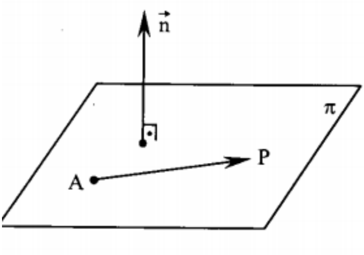

Figura 7: Vetor ortogonal ao plano π.

Equação geral do plano

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$é ortogonal a todo vetor representado em π . Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\vec{n}.(P - A) = 0 \tag{20}$$

ou

$$(a, b, c).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \tag{21}$$

ou, ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0. \tag{22}$$

Fazendo $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{23}$$

Esta é a equação geral do plano π.

Observações

a) Assim como $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $\kappa\vec{n}$, $\kappa \neq 0$, é também vetor normal ao plano.

b) É importante norta que os três coeficientes a, b e c da equação (23) representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano π é dada por

$$\pi : 3x + 2y - z + 1 = 0, \tag{24}$$

um de seus vetores normais é $\vec{n} = (3, 2, -1)$.

c) Para obter pontos de um plano dado por um equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas variáveis e calcular o valor da outra na equação dada. Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$z = 9 \tag{25}$$

e, portanto, o ponto $A(4, -2, 9)$ pertence a este plano.

Exemplos

Example

Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Example

Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano

$$\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0. \tag{26}$$

Exemplo

Example

A reta

$$r : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y - 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \tag{27}$$

é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto $A(2, 1, -2)$. Determinar uma equação geral de π e representá-lo graficamente.

Observação

Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ e $(0, 0, r)$ com $p.q.r \neq 0$, então π admite a equação

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \tag{28}$$

denominada equação segmentária do plano π.
Para o caso do problema anterior, onde estes pontos são $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(0, 3, 0)$ e $A_3(0, 0, 6)$, a equação segmentária do plano é

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \tag{29}$$

que é equivalente à equação $3x + 2y + z - 6 = 0$, ao eliminarmos os denominadores e ordenarmos os termos. Reciprocamente, se escrevermos esta última equação como $3x + 2y + z = 6$ e dividirmos ambos os membros por 6, voltaremos a ter a equação segmentária (29).

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π (Figura 8), porém, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-paralelos.

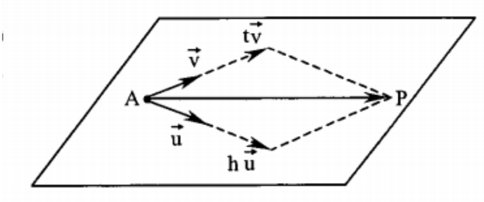

Figura 8: Vetores paralelos ao plano π.

Equação vetorial do plano

Para todo ponto P do plano, os vetores $\vec{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existem números reais h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v} \tag{30}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v} \tag{31}$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h\,(a_1, b_1, c_1) + t\,(a_2, b_2, c_2)\,, \;\; h, \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Esta equação é denominada equação vetorial do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π.

Equações paramétricas do plano

Da equação (32) obtém-se

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t, y_0 + b_1 h + b_2 t, z_0 + c_1 h + c_2 t) \tag{33}$$

que, pela condição de igualdade, vem

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t, \;\; h, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{34}$$

Estas equações são chamadas equações paramétricas de π e h e t são variáveis auxiliáres denominadas parâmetros.

Exemplos

Example

Seja o plano π que passa pelo ponto $A(2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Example

Dado o plano π determinado pelos pontos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -3)$ e $C(-1, -2, 6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Example

Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Exemplo

Example

Determinar uma equação geral do plano π que contenha as retas

$$r_1 : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \tag{35}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases} \tag{36}$$

Equação vetorial de um paralelogramo

Dados os pontos A, B e C não em linha reta, os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ determinam o paralelogramo (Figura 9) cuja equação vetorial é

$$P = A + h\vec{AB} + t\vec{AC} \text{ com } h,\ t \in [0,1] \tag{37}$$

onde P representa um ponto qualquer deste paralelogramo.

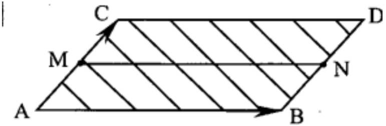

Figura 9: Paralelogramo.

Casos particulares da equação geral do plano

No caso de um ou mais coeficientes da equação geral do plano $ax + by + cz + d = 0$ serem nulos, o plano ocupará uma posição particular em relação aos eixos ou palnos coordenados.

Faremos uma análise dos diversos casos a partir de uma equação completa $ax + by + cz + d = 0$. Por exemplo

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0 \tag{38}$$

onde $a = 3, b = 4, c = 2$ e $d = -12$. O plano que esta equação representa intercepta os três eixos coordenados em $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 6)$ (Figura 10)

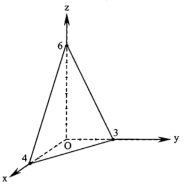

Figura 10: Plano interceptando eixos coordenados.

1. Se tivéssemos $d = 0$, a equação (38) seria

$$3x + 4y + 2z = 0 \tag{39}$$

e representa um plano paralelo ao da Figura 10, porém, passando pela origem $O(0, 0, 0)$, pois as coordenadas deste ponto verificam a equação:

$$3(0) + 4(0) + 2(0) = 0. \tag{40}$$

2) Se tivéssemos $a = 0$, a equação (38) seria

$$4y + 2z - 12 = 0 \tag{41}$$

e representa um plano paralelo ao eixo dos x, interceptando os outros dois eixos ainda em $(0,3,0)$ e $(0,06)$ (Figura 11).
Observemos ainda que nenhum ponto do tipo $(x,0,0)$ satisfaz a equação 41 pois

$$0(x) + 4(0) + 2(0) - 12 = 0 \tag{42}$$

é falso.

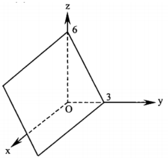

Figura 11: Plano paralelo ao eixo x.

Ora, se nenhum ponto do eixo dos x verifica a equação (41), significa que o plano não tem ponto em comum com este eixo e, portanto, só pode ser paralelo a ele.
Desta análise ainda se conclui que o plano é paralelo ao eixo da variável ausente na equação.
Se em (41) tivéssemos ainda $d = 0$, a equação resultante

$$4y + 2z = 0 \tag{43}$$

representa um palno pela origem e, portanto, contém o eixo Ox (Figura 12).

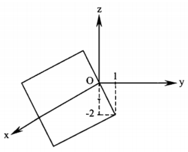

Figura 12: Plano contém o eixo Ox.

3) Se tivéssemos $a = b = 0$, a equação $3x + 4y + 2z - 12 = 0$ seria

$$2z - 12 = 0 \tag{44}$$

ou, simplesmente, $z = 6$.
Observemos que todos os pontos do tipo $(x, y, 6)$ verificam a equação (44). Ora, se todos os pontos deste plano têm cota 6, significa que todos estão 6 unidades afastados do plano xOy. Portanto, trata-se de um plano paralelo a xOy e que intercepta o eixo Oz perpendicularmente em $(0, 0, 6)$.

Assim, concluímos que toda equação de forma $z = k$ representa um plano paralelo ao plano xOy e intercepta o eixo Oz em $(0, 0, k)$.
Na Figura 13 estão representados os planos de equação $z = 6$ e $z = 0$ (plano xOy).

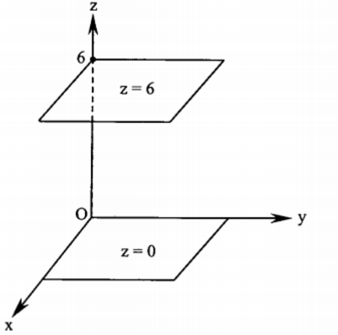

Figura 13: Planos paralelos ao plano xOy.

Ângulo de dois planos

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente (Figura 14)

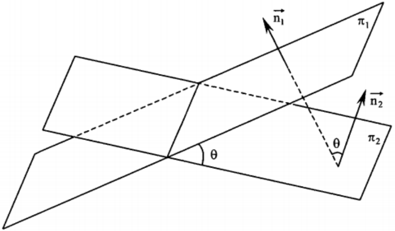

Figura 14: Ângulo entre dois planos.

Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{45}$$

Exemplo

Example

Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x + y - 4 = 0. \tag{46}$$

Planos perpendiculares

Consideremos dois planos π_1 e π_2, e sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Pela Figura 15 conclui-se imediatamente:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0. \tag{47}$$

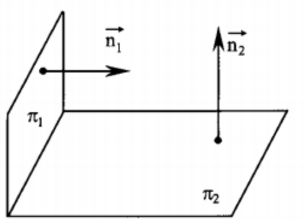

Figura 15: Planos perpendiculares.

Exemplo

Example

Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

a) $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$

b) $\pi_1 : x + y - 4 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Pela Figura 16 conui-se imediatamente:

I) $r /\!/ \pi \iff \vec{v} \perp \vec{n} \iff \vec{v}.\vec{n} = 0$

II) $r \perp \pi \iff \vec{v} /\!/ \vec{n} \iff \vec{v} = \alpha\vec{n}$

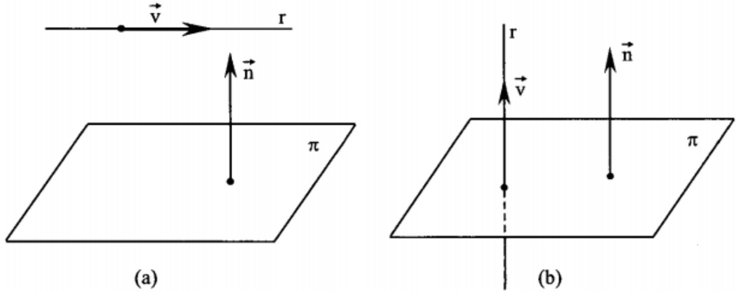

Figura 16: Reta e plano.

Exemplo

Example

Mostre que a reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$
é paralela ao plano $\pi : 5x + 2y - 4z - 1 = 0$.

Reta contida em plano

Uma reta r está contida em um plano π (Figura 17) se

I) dois pontos A e B de r forem também de π

II) $\vec{v}.\vec{n} = 0$, onde $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$, sendo $A \in r$.

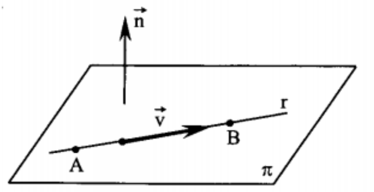

Figura 17: Reta contida em plano.

Exemplo

Example

Determinar os valores de m e n para que a reta

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - t \end{cases} \tag{48}$$

esteja contida no plano $\pi : 2x + my + nz - 5 = 0$.

Interseção de dois planos

Sejam os planos não-paralelos $\pi_1 : 5x - y + z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 2z - 7 = 0$. A interseção de dois planos não-paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar. Para tanto, dentre os vários procedimentos, apresentaremos dois.

Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x, y, z) \in r$ devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema:

$$r : \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \tag{49}$$

O sistema tem infinitas soluções (são os infinitos pontos de r) e, em termos de x, sua solução é

$$r : \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases} \tag{50}$$

que são equações reduzidas de r.

Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor. Seja determinar o ponto $A \in r$ que tem abscissa zero. Então, fazendo $x = 0$ nas equações do sistema, resulta o sistema

$$\begin{cases} -y + z - 5 = 0 \\ y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \tag{51}$$

cuja solução é $y = -1$ e $z = 4$. Logo, A(0,-1,4). Como um vetor diretor $\vec{v}$ de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1 = (5, -1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, (Figura 18), o vetor $\vec{v}$ pode ser dado por $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-3, -9, 6)$.

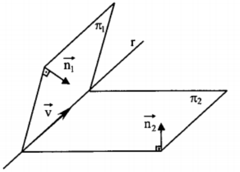

Figura 18: Interseção de dois planos.

Example

Determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π, onde

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \tag{52}$$

e

$$\pi : 2x - y + 3z - 4 = 0 \tag{53}$$

Interseção de reta com plano - exemplo

Example

Determinar a interseção da reta

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \tag{54}$$

com o plano $\pi : x + 3y + 2z - 5 = 0$.