Capítulo 9

Matemática Elementar
Funções Exponenciais e Logarítmicas

9 de maio de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação da Aula

As funções do tipo exponenciais modelam problemas nos quais o crescimento é calculado dependendo do valor no momento anterior, como em juros compostos. Por que será que a expressão “crescimento exponencial” é sinônimo de um crescimento muito acentuado?
Além disso, a função exponencial é a única função real contínua que transforma somas em produtos, ou seja,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

A função logarítmica, *que será apresentada na segunda parte desse capítulo*, é a inversa da função exponencial. Por isso, teremos que ela é a única função real contínua que transforma produtos em somas, ou seja,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Definição

Definição 1

Seja a um número real positivo diferente de 1. Chamamos de <u>função exponencial</u> uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com lei de <u>formação $f(x) = a^x$</u>. O número a é chamado de <u>base</u> da função exponencial.

Definição

Definição 1

Seja a um número real positivo diferente de 1. Chamamos de função exponencial uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com lei de formação $f(x) = a^x$. O número a é chamado de base da função exponencial.

Definição 2

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando $f(x) = b \cdot a^x$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, b é não nulo e a é positivo e diferente de 1.

Propriedades

Proposição 3 (Propriedades Fundamentais da Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial de base a. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ valem:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

(ii) $a^1 = a$, ou seja, $f(1) = a$;

(iii) $x < y \implies \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando} \quad a > 1 \\ a^y < a^x, & \text{quando} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$.

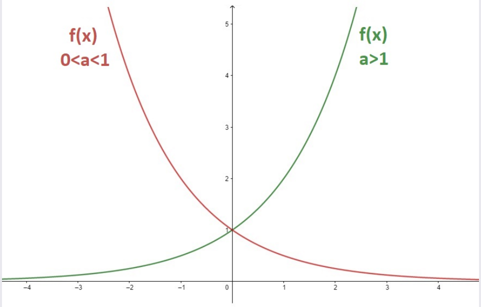
Propriedades

Devido a essas propriedades, podemos concluir os seguintes resultados acerca de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$:

- $f^{-1}(0) = \emptyset$, ou seja, f não pode assumir o valor zero;
- $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- Ao escolhermos o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ como contradomínio de f, obtemos a sobrejetividade da função;
- f é ilimitada superiormente;
- O gráfico de f é uma linha contínua;
- f é bijetiva e crescente se $a > 1$, ou decrescente se $0 < a < 1$.

Exemplo 4

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial tal que $f(x) = a^x$. O gráfico de f é:



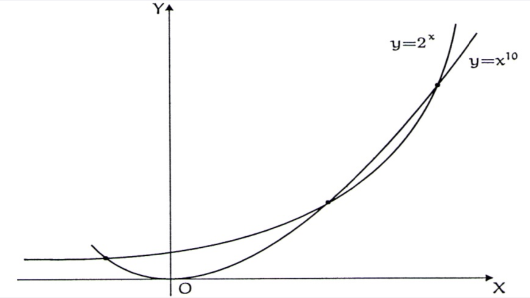
O gráfico de f nunca toca o eixo x, mas fica tão próximo quanto queiramos. Isso equivale dizer que a reta $y = 0$ é assíntota do gráfico de f.

Gráfico da Função Exponencial

Exemplo 5

O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Ao compararmos, por exemplo, as funções $f(x) = 2^x$ e $p(x) = x^{10}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
0 < x < 1{,}077 &\implies 2^x > x^{10} \\
1{,}077 < x < 58{,}77 &\implies x^{10} > 2^x \\
x > 58{,}77 &\implies 2^x > x^{10}
\end{aligned}
$$



Atividade Online

Atividade 10 – Problemas (Algébricos) de Expressões Exponenciais
Atividade 11 – Representação Gráfica de Crescimento e Decaimento Exponencial
Veja o desempenho na Missão Álgebra I.
Atividade 12 – Gráficos de Funções Exponenciais
Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Caracterização da Função Exponencial

Teorema 6 (Caracterização da Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$;

(iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposição 7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função do tipo exponencial e $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ é uma PA, então a sequência formada pelos pontos $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ é uma PG. Reciprocamente, se f for monótona injetiva e transformar qualquer PA $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ numa PG com termo geral $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ então f é uma função real tal que $f(x) = b \cdot a^x$ com $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.

Definição

Definição 8

A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. No caso de $a = 10$, escrevemos, por simplicidade, $\log_{10} x = \log x$.

Definição

Definição 8

A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. No caso de $a = 10$, escrevemos, por simplicidade, $\log_{10} x = \log x$.

Pela definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Propriedades

Proposição 9

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica tal que $f(x) = \log_a x$. Os seguintes valem para quaisquer $x, y, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e qualquer $k \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

(b) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$;

(c) $\log_a 1 = 0$;

(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

(e) f é bijetiva com contradomínio $\mathbb{R}$, logo é ilimitada superiormente e inferiormente;

(f) O gráfico de f é traçado por uma linha contínua;

(g) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Atividade Online

Atividade 13 - Cálculo de Logaritmos (Avançado)
Atividade 14 - Use as Propriedades dos Logaritmos
Atividade 15 - Use a Regra da Mudança de Base dos Logaritmos

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Gráfico da Função Logarítmica

Exemplo 10

Considere as funções logarítmicas tais que $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Os gráficos de f e g são apresentados abaixo.

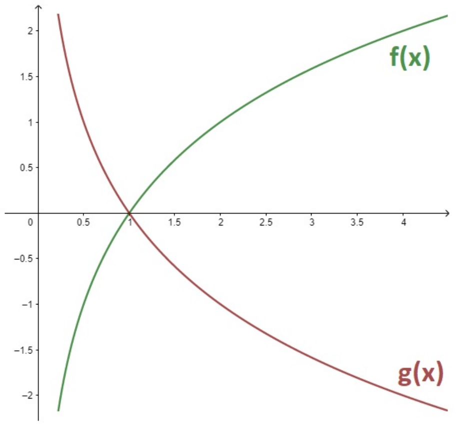
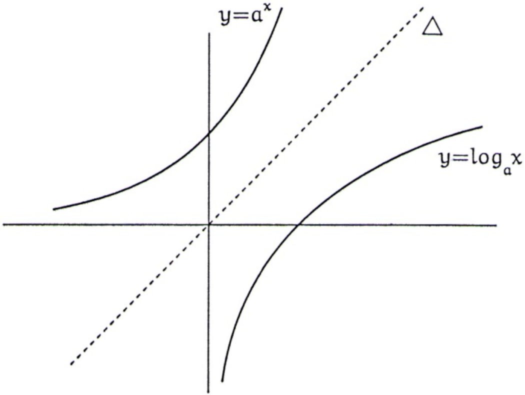


Gráfico da Função Logarítmica

Já vimos que o crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Por ser a inversa da função exponencial, a função logarítmica possui um crescimento muito lento. Mesmo assim, a função logarítmica é ilimitada superiormente. Compare os gráficos abaixo:



Atividade Online

`Atividade 16 – Gráficos de Funções Logarítmicas`

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Caracterização da Função Logarítmica

Teorema 11 (Caracterização da Função Logarítmica)

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

O número *e*

Definição 12

Definimos o número *e* como sendo o número cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Em outras palavras, quanto maior for $n \in \mathbb{N}^*$, melhor a aproximação de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para *e*, e ela se dá na medida que desejarmos.

O número e

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2{,}718281828459$.
Muito usado como base das funções exponenciais e logarítmicas, principalmente no estudo dessas funções no Cálculo Infinitesimal, o logaritmo na base e recebe uma notação e nomenclatura especial. Denotamos

$$\log_e x = \ln x$$

e o chamamos de logaritmo natural.

Atividade 17 – Solução de Equações Exponenciais Usando Logaritmos: Base 10 e Base e

Atividade 18 – Problemas com Modelos Exponenciais

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Exercícios

1. Mostre que a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decescente se $0 < a < 1$.
2. Mostre que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decescente se $0 < a < 1$.
3. Uma alga cresce de modo que, em cada dia, ela cobre uma superfície de área igual ao dobro da coberta no dia anterior. Se esta alga cobre a superfície de um lago em 100 dias, qual é o número de dias necessários para que duas algas, da mesma espécie anterior, cubram a superfície do mesmo lago? E se forem quatro algas? Você consegue responder esta pergunta para 3 algas?
4. O gordinho Jaguatirica, certo dia, fez compras em 5 lojas de um shopping. Em cada loja, gastou metade do que possuia e pagou, na saída, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

Exercícios

5. Se (a_n) é uma PA, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma PG.

6. Existe exemplo de função crescente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que, para todo $x \in \mathbb{N}$, a sequência $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$, ..., $f(x+n)$, ... é uma progressão geométrica mas f não é do tipo $f(x) = b \cdot a^x$?

Exercícios

7. Use as aproximações $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$ e $\log 5 \approx 0,699$ para obter valores aproximados para:

(a) $\log 9$;

(b) $\log 40$;

(c) $\log 200$;

(d) $\log 3000$;

(e) $\log 0{,}003$;

(f) $\log 0{,}81$.

Exercícios

8. Uma interpretação do logaritmo decimal é sua relação com a ordem de grandeza, isto é, com o número de algarismos na representação decimal. As questões a seguir exploram essa relação.

(a) Considere o número $x = 58.932{,}1503$. Qual é a parte inteira de $\log x$?

(b) Considere $x > 1$ um número real cuja parte inteira tem k algarismos. Use que a função logarítmica é crescente para mostrar que a parte inteira de $\log x$ é igual a $k - 1$;

(c) Generalizando o item anterior, considere o sistema de numeração posicional de base $b \geq 2$. Mostre que, se a representação de um número real $x > 1$ nesse sistema tem k algarismos, então, a parte inteira de $\log_b x$ é igual a $k - 1$.

9. (UNIRIO/1994) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot 1{,}1^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 11 \approx 1{,}04$, determine:

(a) A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

(b) A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1{,}6m$.

Exercícios

10. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual é a relação entre $\log x$ e $\log y$?
11. Se (a_n) é uma PG com todos os termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \ln a_n$ é uma PA.
12. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida (tempo necessário para que uma substância seja reduzida à metade da quantidade inicial) é de vinte e oito anos, ou seja, sendo f a função exponencial de base a que modele a quantidade de estrôncio-90 em função do tempo, tem-se $\log_a \frac{f(0)}{2} = 28$. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] IEZZI, Gelson; et al.
Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 2 - Logaritmos.
São Paulo: Editora Atual.