Aplicações da Derivada

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de limite e continuidade

1. O teorema do valor médio

O Teorema do valor médio

Theorem (Teorema do valor médio (TVM))

Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existirá pelo menos um c em $]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{1}$$

Geometricamente, este teorema conta-nos que se s é uma reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, talque a reta tangente ao gráfico de f, neste ponto, é paralela à reta s. Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

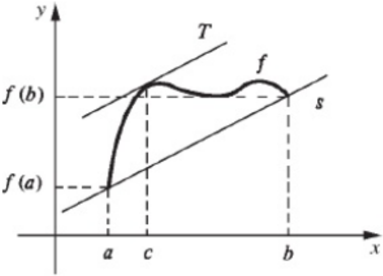


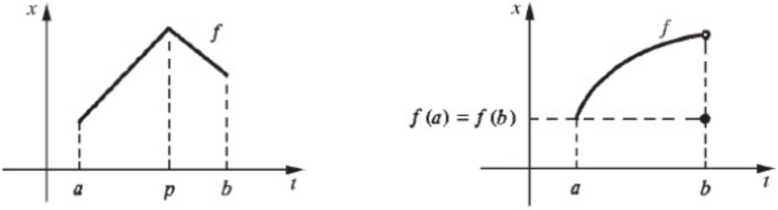
Figura 1: TVM.

Interpretação cinemática do TVM

Vejamos, agora, uma interpretação cinemática para o TVM. Suponhamos que $x = f(t)$ seja a função de posição do movimento de uma partícula sobre o eixo Ox. Assim, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Pois bem, o TVM conta-nos que se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então tal velocidade média será igual à velocidade (instantânea) da partícula em algum instante c entre a e b.

Importância das hipóteses no TVM

As situações que apresentamos a seguir mostram-nos que as hipóteses "f contínua em $[a, b]$ e f derivável em $]a, b[$" são indispensáveis.



f não é derivável em p; não existe c verificando ①.

f não é contínua em $[a, b]$; não existe c verificando ①.

Figura 2: Casos particulares.

Função crescente e decrescente

Vamos relembrar as seguintes definições. Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f. Dizemos que f é estritamente crescente (estritamente decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t) \quad (f(s) > f(t)). \tag{2}$$

Por outro lado, dizemos que f é crescente (decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

$$s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t) \quad (f(s) \geq f(t)). \tag{3}$$

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

Theorem (Intervalos de crescimento e de decrescimento)

Seja f contínua no intervalo I.

a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.*

b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Exemplos

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboce o gráfico.

Example

Seja $f(x) = \frac{x^2-x}{1+3x^2}$. Estude f com relação a crescimento e decrescimento. Esboce o gráfico.

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. Esboce o gráfico.

Exemplos

Example

Suponha $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ e que existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Example

Prove que $g(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$ admite uma única raiz real a, com $-3 < a < -2$.

Example

a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.

b) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.

c) Conclua de (b) que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Observação

Vamos mostrar, a seguite, que para $x \to +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x.
Seja $\alpha > 0$ um real dado. Observamos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha \frac{x}{\alpha}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{\alpha u} = +\infty. \tag{4}$$

Temos, agora,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} \right]^\alpha = \lim_{u \to +\infty} u^\alpha = +\infty. \tag{5}$$

Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \ (\alpha > 0) \tag{6}$$

Para $x \to +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x.

Exemplo

Example

Suponha g derivável no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tal que $\lim_{x \to p^+} g(x) = 0$. Nestas condições, prove que, para todo $x \in I$, tem-se $g(x) > 0$.

Exemplo

Example

Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to p^+} g(x) = 0. \tag{7}$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo $x \in I$, $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que, para todo $x \in I$, tem-se, também,

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta. \tag{8}$$

Exemplo

Example

Sejam f e g deriváveis no intervalo aberto $I =]m, p[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty. \tag{9}$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo x em I, $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que existem constantes M, N e s, com $s \in]m, p[$, tais que, para todo $x \in]s, p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}. \tag{10}$$