



Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte
Campus de Natal

Lista de Cálculo 1: Limite e Continuidade

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal
Agosto de 2022

Sumário

1	Introdução ao conceito de limite	2
2	Função contínua	5
3	Definição de limite	10
4	Limites laterais	15
5	Propriedades	18
6	Limites fundamentais	23
7	Limites envolvendo o infinito	26
8	O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	32
9	Respostas dos exercícios	35

1 Introdução ao conceito de limite

Solução

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Temos

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = x^2 + 2x + 4, x \neq 2.$$

(Lembre-se: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.)

Assim

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12. \quad \blacksquare$$

A *derivada* é um limite. Então, para podermos estudar suas propriedades, precisamos antes estudar as propriedades do limite. É o que faremos a seguir.

Antes de passar à próxima seção, queremos destacar as funções de uma variável real que vão interessar ao curso; tais funções são aquelas que têm por domínio um *intervalo* ou uma *reunião de intervalos*. Portanto, de agora em diante, sempre que nos referirmos a uma função de uma variável real e nada mencionarmos sobre seu domínio, ficará implícito que o mesmo ou é um *intervalo* ou uma *reunião de intervalos*.

Exercícios 3.1

1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a ideia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| \geq 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

f) $f(x) = x^2 + 2$

2. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x + 3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + x)$$

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

4. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

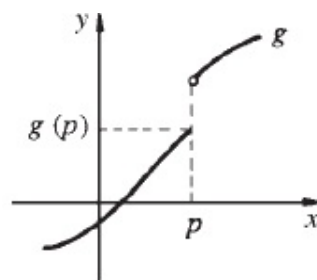
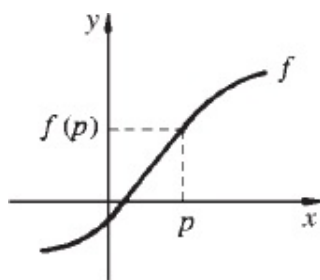
$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

3.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CONTÍNUA

Sejam f e g funções de gráficos



Observe que f e g se comportam de modo diferente em p ; o gráfico de f não apresenta “salto” em p , ao passo que o de g , sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

Veja as situações apresentadas a seguir.

2 Função contínua

Na seção 3.2 fazer apenas o exercício 1.

Solução

Como, por hipótese, f é contínua em p , dado $\epsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$

$$\textcircled{1} \quad p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

Como *para todo* $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\textcircled{1}$ ocorre, tomando-se, em particular, $\epsilon = f(p)$ (por hipótese $f(p) > 0$), existirá um $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - f(p) < f(x) < f(p) + f(p)$$

e, portanto,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

De modo análogo, prova-se que se f for contínua em p e $f(p) < 0$, então (neste caso basta tomar $\epsilon = -f(p)$) existirá $\delta > 0$ tal que

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < 0. \quad \blacksquare$$

Exercícios 3.2

1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$

b) $f(x) = x + 1$ em $p = 2$

c) $f(x) = -3x$ em $p = 1$

d) $f(x) = x^3$ em $p = 2$

e) $f(x) = x^4$ em $p = -1$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$

g) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $p = 1$

2. Prove que $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

3. Seja $n > 0$ um natural. Prove que $f(x) = x^n$ é contínua.

4. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique.

6. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua em todos os pontos, exceto em $-1, 0, 1$.
7. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua em todos os pontos exceto nos inteiros.
8. Seja f dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é descontínua em todo p real.
9. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é contínua.
 - a) $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ em que $\llbracket x \rrbracket = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (*Função maior inteiro.*)
 - b) $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$
 - c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
 - d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
10. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} e que seja contínua apenas em $-1, 0, 1$.
11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.
 - a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$
 - b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{em } p = 0$
12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

$$a) g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{em } p = 2$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{em } p = 0$$

$$c) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{em } p = 0$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3$$

$$e) g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{em } p = 1$$

$$f) f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2} \quad \text{em } p = 2$$

13. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

14. Sabe-se que f é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Prove que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$$

15. Seja f uma função definida em \mathbb{R} e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \geq M|x - p|$ para todo x . Prove que f é contínua em p .

16. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo x . Prove que f é contínua em 1.

17. Suponha que $|f(x)| \geq x^2$ para todo x . Prove que f é contínua em 0.

18. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em 0.

19. Sejam f e g definidas em \mathbb{R} e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|g(x) - g(p)|$ para todo x . Prove que se g for contínua em p , então f também será contínua em p .

20. Suponha f definida e contínua em \mathbb{R} e que $f(x) = 0$ para todo x racional.

- Prove que $f(x) = 0$ para todo x real.
21. Sejam f e g contínuas em \mathbb{R} e tais que $f(x) = g(x)$ para todo x racional. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo x real.
22. Suponha que f e g são contínuas em \mathbb{R} e que exista $a > 0$, $a \neq 1$, tal que para todo r racional, $f(r) = a^r$ e $g(r) = a^r$. Prove que $f(x) = g(x)$ em \mathbb{R} .
23. Seja $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Prove
- a) $|f(x) - f(1)| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) |x - 1|$ para $x > 0$
- b) $|f(x) - f(1)| \leq 3 |x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$
- c) f é contínua em $p = 1$
24. Seja $f(x) = x^3 + x$. Prove que
- a) $|f(x) - f(2)| \leq 20 |x - 2|$ para $0 \leq x \leq 3$
- b) f é contínua em 2
25. Prove que $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ é contínua em 1.
26. Prove que $f(x) = x + \frac{1}{x}$ é contínua em todo $p > 0$.
27. Sejam $f(x) = x^3$ e $p \neq 0$.
- a) Verifique que $|x^3 - p^3| \leq 7 p^2 |x - p|$ para $|x| \leq 2 |p|$
- b) Conclua de (a) que f é contínua em p

3.3. DEFINIÇÃO DE LIMITE

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f (veja o final da Seção 3.1). Consideremos as situações a seguir:

3 Definição de limite

Não fazer os exercícios 6 e 7.

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

Solução

Sendo $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, para todo $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Para $\epsilon = L$, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - L < f(x) < L + L,$$

ou seja,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

■

Exercícios 3.3

1. Calcule e justifique.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} x^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} (4x + 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -9} 50$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{5}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x + 1}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x - 3}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 10} 5$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 - 2x + 3)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$$

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases} \quad \text{em } p = 5$$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em -1 ? E em 0 ? Por quê?

4. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sendo f dada por

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = -x^3 + 2x$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 3x + 1$

5. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^4 + x}$

c) $\lim_{h \rightarrow 0} (x^2 + 3xh)$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$

f) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{p}}{x - p} \quad (p \neq 0)$

g) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p} \quad (p \neq 0)$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}$

j) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$

l) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^3 - p^3}{x - p}$

m) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^4 - p^4}{x - p}$

n) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^n - p^n}{x - p} \quad (n > 0 \text{ natural})$

o) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

q) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ onde $f(x) = \frac{1}{x}$

r) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}$ onde $g(x) = \frac{1}{x^2}$

s) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^2 - 3x$

6. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}.$$

7. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5 + 3x}{x^2 + 1} < 2 + \frac{1}{2}$$

8. Sejam f e g definidas em \mathbb{R} com $g(x) \neq 0$ para todo x . Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < |g(x)|.$$

9. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$, α e β tais que, para todo $x \in D_f$

$$0 < |x - p| < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

Interprete graficamente.

10. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $x \in D_f$

$$0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

11. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - L] = 0$.

12. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x) - L| = 0$.

13. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{x - p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{|x - p|} = 0$.

14. Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x - p| < r$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que $L \geq 0$.

(Sugestão: Suponha $L < 0$ e use a conservação do sinal.)

15. Suponha f contínua em \mathbb{R} e $f(x) \geq 0$ para todo x racional. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo x .

3.4. LIMITES LATERAIS

4 Limites laterais

EXEMPLO 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

Solução

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe. ■

Exercícios 3.4

1. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-1|}{x-1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$ em que $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$ sendo g a função do item (j)

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$ em que g é a função do item (j)

2. A afirmação

“ $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \Rightarrow f$ contínua em p ” é falsa ou verdadeira? Justifique.

3. Dada a função $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, verifique que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
Pergunta-se: f é contínua em 1? Por quê?
4. Dê exemplo de uma função definida em \mathbb{R} , que não seja contínua em 2, mas que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
5. Suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) \geq 0$ desde que o limite exista.
6. Sejam f uma função definida num intervalo aberto I e $p \in I$. Suponha que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$. Prove que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0$ desde que o limite exista.

(Sugestão: estude os sinais de $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ e de $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$)

3.5. LIMITE DE FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}f \subset D_g$, em que $\text{Im}f$ é a *imagem de f* , ou seja, $\text{Im}f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)).$$

Supondo que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ é razoável esperar que

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow p} g(\overbrace{f(x)}^u) = \lim_{u \rightarrow a} g(u)$$

desde que $\lim_{u \rightarrow a} g(u)$ exista (*observe: $u = f(x)$; $u \mapsto a$ para $x \mapsto p$*). Veremos que $\textcircled{1}$ se verifica se g for contínua em a ou se g não estiver definida em a . Veremos, ainda, que se g estiver definida em a , mas não for contínua em a ($\lim_{u \rightarrow a} g(u) \neq g(a)$) $\textcircled{1}$ se verificará desde que ocorra $f(x) \neq a$ para x próximo de p . Os casos que interessarão ao curso são aqueles em que g ou é contínua em a ou não está definida em a . O quadro que apresentamos a seguir mostra como iremos trabalhar com o limite de função composta no cálculo de limites.



5 Propriedades

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(u) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\textcircled{1} \quad 0 < |u - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - L| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$, para o $\delta_1 > 0$ acima existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\textcircled{2} \quad 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1.$$

Tomando-se $\delta = \min \{\delta_2, r\}$, segue de $\textcircled{2}$ e da hipótese

$$\textcircled{3} \quad 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - a| < \delta_1.$$

De $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ resulta

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = L = \lim_{u \rightarrow a} g(u). \quad \blacksquare$$

Observação. Se g não estiver definida em a , segue-se da hipótese $\text{Im}f \subset D_g$, que $f(x) \neq a$ para todo $x \in D_f$. Assim, neste caso, a condição “existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$ ” é dispensável. Entretanto, se g estiver definida em a , mas não for contínua em a , tal condição é indispensável como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 7. Sejam f e g definidas em \mathbb{R} e dadas por $f(x) = 1$ e $g(u) = \begin{cases} u+1 & \text{se } u \neq 1 \\ 3 & \text{se } u = 1 \end{cases}$

Temos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{u \rightarrow 1} g(u) = 2.$$

Como $g(f(x)) = 3$ para todo x , segue que

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) \neq \lim_{u \rightarrow 1} g(u).$$

Este fato ocorre em virtude de não estar satisfeita a condição “existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq 1$ para $0 < |x - p| < r$ ”. \blacksquare

Exercícios 3.5 =====

1. Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{x + 1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x + 5} - 2}{x^2 - 1}$$

2. Seja f definida \mathbb{R} . Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(7x)}{3x}$$

3. Seja f definida em \mathbb{R} e seja p um real dado. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L$. Calcule

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + 3h) - f(p)}{h}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p - h)}{h}$$

$$d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p - h) - f(p)}{h}$$

3.6. TEOREMA DO CONFRONTO

Teorema (do confronto). Sejam f, g, h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$$

então

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq M |f(x)|$$

para todo x em A . Daí, para todo x em A

$$-M |f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M |f(x)|.$$

De $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ segue que $\lim_{x \rightarrow p} M |f(x)| = 0$ e $\lim_{x \rightarrow p} -M |f(x)| = 0$. Pelo teorema do confronto

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot g(x)$ em que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Solução

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$; como $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe (verifique) não podemos aplicar a propriedade relativa a limite de um produto de funções. Entretanto, como g é limitada, ($|g(x)| \leq 1$ para todo x) e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, pelo exemplo anterior

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cancel{x^2} \cdot \overset{\text{limitada}}{g(x)} = 0.$$

■

Exercícios 3.6

1. Seja f uma função definida em \mathbb{R} tal que para todo $x \neq 1$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.
2. Seja f definida em \mathbb{R} e tal que, para todo x , $|f(x) - 3| \leq 2|x - 1|$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e justifique.
3. Suponha que, para todo x , $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.
4. a) Verifique que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ não existe.

- b) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. (Justifique.)
5. Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ em que f é dada por
- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
6. Sejam f e g duas funções definidas em \mathbb{R} e tais que, para todo x , $[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4$. Calcule e justifique.
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \sqrt[3]{x^2 - 9}$
7. Seja f definida em \mathbb{R} e suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo x , $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|^2$.
- a) Mostre que f é contínua em p .
- b) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.
8. Sejam a, b, c reais fixos e suponha que, para todo x , $|a + bx + cx^2| \leq |x|^3$. Prove que $a = b = c = 0$.
9. Prove: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = |L|$.
- (Sugestão: verifique que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ e aplique o teorema do confronto.)
10. A afirmação
- “ $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = |L| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ ” é falsa ou verdadeira? Por quê?
11. Dê exemplo de uma função f tal que $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)|$ existe, mas $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não exista.
12. Prove: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$.

3.7. CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

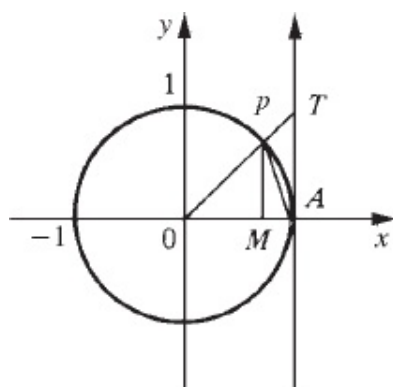
6 Limites fondamentaux

área $\Delta OAP = \frac{\text{sen } x}{2}$ e área $\Delta OAT = \frac{\text{tg } x}{2}$. (Veja figura na página seguinte.)

Por uma regra de três simples calculamos a área α do setor circular OAP :

2π rad – área π

$$\alpha = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$



x rad – área α

Portanto, área do setor circular $OAP = \frac{x}{2}$.

Assim, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (x é a medida em rad do arco AP),

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2}$$

ou

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

■

Exercícios 3.8 _____

1. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2x - \pi}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg}(x - p)}{x^2 - p^2}, p \neq 0$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + \frac{1}{x}) - \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - p^2)}{x - p}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x - 1}$$

2. a) Prove que existe $r > 0$ tal que

$$\cos x - 1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 < 0$$

para $0 < |x| < r$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

3. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p}{x - p}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cos x - \cos p}{x - p}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} p}{x - p}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sec x - \sec p}{x - p}$$

3.9. PROPRIEDADES OPERATÓRIAS. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DO CONFRONTO

7 Limites envolvendo o infinito

Solução

Vamos colocar em evidência a mais alta potência de x que ocorre no numerador e proceder da mesma forma no denominador. Deste modo, irão aparecer no denominador e numerador expressões do tipo $\frac{1}{x^n}$ que tendem a zero para $x \rightarrow +\infty$, o que poderá facilitar o cálculo do limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right]}{x^5 \left[2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 4.1

1. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right]$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x}}$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}]$

s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}]$

2. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para *todo* $x \geq a$. Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

4. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow 0 < \frac{x + 3}{x^3 + 2x - 1} < \frac{1}{2}.$$

5. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L > 0$. Prove que existe $r > 0$, $r > a$, tal que para todo $x > r$

$$\frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

Conclua daí que se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.2. LIMITES INFINITOS

Definição 1. Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$$

Logo,

$$x > \delta \Rightarrow f(x) g(x) < -\epsilon.$$

■

Exercícios 4.2

1. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x + 2)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x + 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 3)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x + 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x}{3 + 2x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + x}{3 + x^2}$$

2. Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, no qual $n > 0$ é um natural.

3. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + 3}]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1})$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{3x^3 + 2})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x + 3})$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{2 + 3x^3})$$

4. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{3-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{4}{2x-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2-x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x+1}{4x^2-1}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x^2-1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-5}{x^2+3x-4}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2-4}{1-x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4}{x-3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2-x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x^2-1}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$$

5. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L, L \neq 0, \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.
6. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] \neq 0$.
7. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.
8. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a > 0, b, c, d$ são reais dados. Prove que existem números reais x_1 e x_2 tais que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.
9. Sejam f e g duas funções definidas em $]a, +\infty[$ tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $g(x) > 0$ para todo $x > a$. Prove que existe $r > 0$ tal que

para todo $x > r$, $f(x) > g(x)$.

4.3. SEQUÊNCIA E LIMITE DE SEQUÊNCIA

Uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{N} . As sequências que vão interessar ao curso são aquelas cujo domínio contém um subconjunto do tipo $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq q\}$ no qual q é um natural fixo; só consideraremos tais sequências.

A notação a_n (leia: a índice n) é usada para indicar o valor que a sequência assume no natural n . Diremos que a_n é o *termo geral* da sequência.

EXEMPLO 1. Seja a sequência de termo geral $a_n = 2^n$. Temos

$$a_0 = 2^0, a_1 = 2^1, a_2 = 2^2, \dots$$

■

EXEMPLO 2. Seja a sequência de termo geral $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Temos

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2, s_3 = 1 + 2 + 3 \text{ etc.}$$

Sejam $m \leq n$ dois naturais. O símbolo

$$\sum_{k=m}^n a_k$$

(leia: somatória de a_k , para k variando de m até n) é usado para indicar a soma dos termos $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

■

EXEMPLO 3.

8 O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b) Faça você.

Segue do Exemplo 2 que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

■

EXEMPLO 3. Mostre que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Solução

Fazendo $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(1 + u)$ vem

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1 + u)} = \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

$(h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0)$; assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

■

Exercícios 6.3 =====

1. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

2. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

3. Calcule.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 1}{x^2}$$

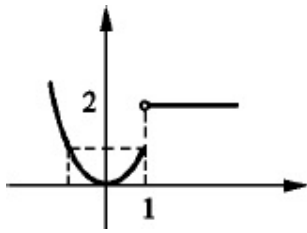
9 Respostas dos exercícios

2. *a)* $h(x) = 3x + 7$ *b)* $h(x) = \sqrt{2 + x^2}$ *c)* $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$
- d)* $h(x) = -4x^2 + 18x - 17$ *e)* $h(x) = \frac{2}{x - 1}$
- f)* $h(x) = -(2x + 1), x \neq -1$ *g)* $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$ *h)* $h(x) = x, x \neq 1$
3. *a)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}, h(x) = \frac{2}{x + 5}$
- b)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}, h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- c)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x > 3\}, h(x) = \sqrt{\frac{x + 4}{x - 3}}$
- d)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}, h(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$
- e)* $A =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{3}, +\infty[, h(x) = \sqrt{(x^2 - 2)^2 - 1}$
4. *a)* $f(x) = \frac{1}{x}$ *b)* $f(x) = \frac{x - 2}{1 - x}$ *c)* $f(x) = \sqrt{x}$ *d)* $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$
- e)* $f(x) = -1 + \frac{3}{x - 2}$ *f)* $f(x) = 2 + \sqrt{1 + x}$

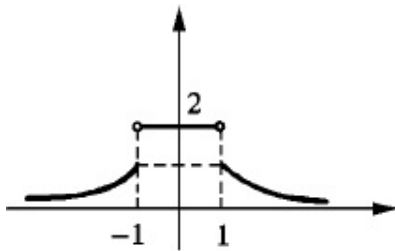
CAPÍTULO 3

3.1

1. *a)* Em todo p real
- b)* Em todo p real
- c)* Em todo p real
- d)* Em todo $p \neq 1$
- e)* Em todo $p \neq \pm 1$



f) Em todo p real



2. **a)** 3

b) 3

c) 1

d) 5

e) 1

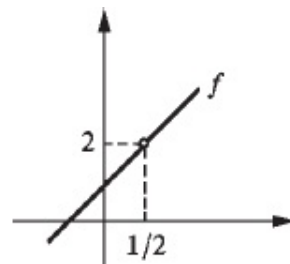
f) $\frac{6}{5}$

g) $\sqrt[3]{2}$

h) 0

3. $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2x + 1, x \neq 1/2$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$$



4. **a)** 4

b) 1

$$c) \frac{1}{2} \left(\text{Observe: } \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}, x \neq 1 \right)$$

d) 0

e) -2

f) 0

3.2

1. g) $\forall \epsilon > 0, x \geq 0, |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \epsilon^2$. Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon^2$, para todo $x \in D_f (x \geq 0)$

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \epsilon;$$

logo, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $p = 0$

- h) $\forall \epsilon > 0, 1 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1 - \epsilon)^3 < x < (1 + \epsilon)^3$. Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $I =](1 - \epsilon)^3, (1 + \epsilon)^3[$, $1 \in I$,

$$x \in I \Rightarrow 1 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 1 + \epsilon;$$

logo, $\sqrt[3]{x}$ é contínua em $p = 1$

2. Para todo $\epsilon > 0, x \neq 0$ e $p \neq 0$,

$$\frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon \Leftrightarrow \frac{1 - \epsilon p}{p} < \frac{1}{x} < \frac{1 + \epsilon p}{p}.$$

Para $p > 0$ e $1 - \epsilon p > 0 \left(\epsilon < \frac{1}{p} \right)$

$$\frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon \Leftrightarrow \frac{p}{1 + \epsilon p} < x < \frac{p}{1 - \epsilon p}.$$

Então, dado $\epsilon > 0, \epsilon < \frac{1}{p}, (p > 0)$, e tomando-se $I = \left] \frac{p}{1 + \epsilon p}, \frac{p}{1 - \epsilon p} \right[$,

$p \in I, x \in I \Rightarrow \frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon$, logo, $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $p > 0$.

Análise o caso $p < 0$. (Veja como as coisas acontecem graficamente.)

5. Não. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ não existe $\delta > 0$ que torna verdadeira a afirmação
 “ $\forall x \in D_f, 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \frac{1}{2} < f(x) < f(1) + \frac{1}{2}$,”
8. Seja p racional, então $f(p) = 1$; se f fosse contínua em p , pela conservação do sinal, existiria $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p - \delta < x < p + \delta$, que é impossível, pois em $]p - \delta, p + \delta[$ existem infinitos irracionais
9. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$
c) $\{0\}$ (só é contínua em 0)
d) $\{-1, 1\}$
11. **a)** $L = 4$; com $L = 4$, $f(x) = x + 2$ para todo x , que é contínua em $p = 2$
b) $L = -1$
12. **a)** 4
b) -1
c) Não existe
d) 6
e) 1
f) Não existe
13. Como f é contínua em 2, para *todo* $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow 8 - \epsilon < f(x) < 8 + \epsilon.$$

 Em particular, para $\epsilon = 1$ existirá $\delta > 0$ tal que $2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow 7 < f(x)$
15. Para se ter $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ basta que se tenha $M|x - p| < \epsilon$. Tomando-se $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$
17. Para se ter $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ (observe que $f(0) = 0$) basta que se tenha

$$\begin{aligned} x^2 = |x - 0|^2 < \epsilon \text{ ou } |x - 0| < \sqrt{\epsilon}. \quad \text{Tomando-se} \quad \delta = \sqrt{\epsilon}, \\ |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon \end{aligned}$$

18. Observe que $|f(x)| \leq |x|$

20. Suponha que exista p , com $f(p) \neq 0$, e aplique a conservação do sinal

21. Aplique o Exercício 20 à função $h(x) = g(x) - f(x)$

23. a) $|f(x) - f(1)| = \left| x + \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| = \left| \frac{x - 1}{x} \right| |x - 1|$

b) Observe que $\left| \frac{x - 1}{x} \right| \leq 1 + \frac{1}{|x|}$

c) Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{3} \right\}$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

25. Verifique $|f(x) - f(1)| \leq 7|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$ e proceda como no Exercício 23(c)

27. b) Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \min \left\{ |p|, \frac{\epsilon}{7p^2} \right\}$

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |x^3 - p^3| < \epsilon$$

3.3

1. a) 4

b) 4

c) -7

d) 5

e) 50

f) 4

g) 2

h) $\sqrt[3]{-3}$

i) $\sqrt{5}$

j) 6

l) 0

m) 2

n) 2

o) $\frac{1}{2}$

p) -2

q) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

r) $\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$

s) $\frac{1}{4\sqrt[4]{8}}$

t) $-\frac{1}{2}$

u) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. a) 12

b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{2}$

3. Não é contínua em -1. Em 0 é.

4. a) $2x$

b) $4x + 1$

c) 0

d) $-3x^2 + 2$

e) $-\frac{1}{x^2}$

f) 3

5. a) $-\frac{3}{2}$ b) 0 c) x^2 d) $3x^2$ e) 0 f) $\frac{1}{3\sqrt[3]{p^2}}$ g) $\frac{1}{4\sqrt[4]{p^3}}$ h) 0

i) $\frac{3}{7}$ j) $\sqrt{2}$ l) $3p^2$ m) $4p^3$ n) np^{n-1} o) $\frac{1}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}}$ p) $-\frac{1}{4}$

q) $-\frac{1}{p^2}$ r) $-\frac{2}{p^3}$ s) $2x - 3$

6. Como $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2$, tomando-se $\epsilon = \frac{1}{3} \dots$

8. Tomando-se $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 0 \right| < 1$, logo
...

10. Sugestão: $|f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |L| < 1$ (Por quê?)

11. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |(f(x) - L) - 0| < \epsilon \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} [f(x) - L] = 0.$

3.4

1. a) 1

b) -1

c) 1

d) 0

e) Não existe

f) Não existe

g) 1

h) 1

i) 2

j) 2

l) 1

m) Não existe

2. É falsa

3. Não, pois f não está definida em 1

3.5

1. ***a)*** $\sqrt[3]{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{8}$

2. ***a)*** 3

b) 0

c) 2

d) $\frac{7}{3}$

3. ***a)*** L

b) $3L$

c) $2L$

d) $-L$

3.6

1. 2

2. 3

3. 0. $\left(\text{Sugestão: Verifique que } -|x|^3 \leq \frac{g(x)}{x} \leq |x|^3, x \neq 0. \right)$

4. **b)** 0

5. **a)** 0

b) Não existe

6. **a)** 0. (Observe que $|g(x)| \leq \sqrt[4]{4}$)

b) 0

7. **b)** 0

12. *Sugestão:* Para (\Rightarrow) : $\frac{f(h)}{|h|} = \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{h}{|h|}$ e $\left| \frac{h}{|h|} \right| \leq 1$

3.8

1. **a)** 1

b) 1

c) 3

d) -1

e) 0

f) 3

g) $\frac{3}{4}$

h) 0

i) 0

j) 0

l) $\frac{1}{2p}$

m) $2p$

n) 0

o) -2

p) 0

q) $-\pi$

2. b) 0

3. a) $\cos p$

b) $-\operatorname{sen} p$

c) $\sec^2 p$

d) $\sec p \operatorname{tg} p$

CAPÍTULO 4

4.1

1. a) 0

b) 0

c) 5

d) 2

e) 2

f) 2

g) $\frac{1}{3}$

h) $\frac{5}{4}$

i)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

j) 0

l) $\sqrt[3]{5}$

m) 0

n) $\frac{1}{3}$

o) 1

p) 0

q) 0

r) 0

s)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = 0 \cdot (-1) = 0$$

2. 0. $(f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)).$

3. a) $\frac{1}{2}$

b) Aplique a definição de limite com $\epsilon = \frac{1}{4}$

4. a) 0

4.2

1. a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $-\infty$

d) $+\infty$

e) $\frac{5}{6}$

f) $+\infty$

g) 0

h) 2

i) $\frac{1}{3}$

j) $-\frac{1}{2}$

l) 0

m) 0

2. Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon^n, x > \delta \Rightarrow \sqrt[n]{x} > \epsilon$

3. **a)** 0

b) $\frac{1}{2}$

c) $+\infty$

d) $-\infty$

e) 0

f) $+\infty$

g) $\frac{1}{2}$

h) $-\infty$

4. **a)** $-\infty$

b) $-\infty$

c) $+\infty$

d) $-\infty$

e) $+\infty$

f) $-\infty$

g) $-\infty$

h) $+\infty$

i) $+\infty$

j) $-\infty$

l) $+\infty$

m) $+\infty$

n) $+\infty$

o) $+\infty$

p) $-\infty$

q) $+\infty$

r) $-\infty$

s) $-\infty$

9. Aplique a definição com $\epsilon = 1$

4.3

1. a) 2

b) $+\infty$

c) 1

d) 0

e) 2

f) 0

g) $+\infty$

h) $\frac{3}{2}$

i) $\frac{1}{1-t}$

3. $+\infty$

4. a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{3}$

6. a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}$

7. a) $\frac{aT^2}{2}$

4.4

1. a) 0 (Observe: $-|x| \leq f(x) \leq |x|$.)

2. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

4. 2

5. 2

6. Seja $f(x) = \sin \frac{1}{2^x}$ e considere as sequências $a_n = \frac{1}{n\pi}$ e $b_n = \frac{2^n}{(4n+1)\pi}$. Verifique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$.

CAPÍTULO 5

1. $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ e f é contínua em $[-1, 0]$

2. Verifique que $f(x) = x^3 - 4x + 2$ tem uma raiz real em cada intervalo $[-3, -2]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$

3. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$