

Capítulo 6

Matemática Elementar Progressões

7 de maio de 2019

Igor Oliveira

`igoroliveira@imd.ufrn.br`

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n primeiros termos de uma PA

Progressão Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n primeiros termos de uma PG

Progressões e Funções

Exercícios

Bibliografia

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Definição 1

Uma progressão aritmética (ou simplesmente PA) é uma sequência na qual a diferença entre um termo e seu anterior (exceto quando o termo em questão é o primeiro) é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r .

De maneira recursiva, o n -ésimo, $n > 1$, termo de uma PA é escrito como

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 2

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos foram produzidos em junho?

3 Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 2

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos foram produzidos em junho?

Em uma PA (a_1, a_2, a_3, \dots) , para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Dessa forma, teremos $a_{13} = a_5 + 8r$, $a_4 = a_{17} - 13r$, e, mais geralmente,

$$a_i = a_j + (i - j)r.$$

Em particular:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

3 Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 3

Em uma PA, o quinto termo vale 30, e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

4 Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 3

Em uma PA, o quinto termo vale 30, e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Exemplo 4

Qual a razão da PA que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

4 Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Progressão Aritmética



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Exemplo 3

Em uma PA, o quinto termo vale 30, e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Exemplo 4

Qual a razão da PA que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

Exemplo 5

O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na Era Cristã?

4

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

5 Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Atividade 06 – Use Fórmulas de Progressão
Aritmética

Atividade 07 – Conversão das Formas Recursiva
e Explícita de Progressões Aritméticas

Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

Progressão Aritmética



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

6 Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 6

O preço de um carro novo é de R\$ 30000,00 e diminui R\$ 1000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Progressão Aritmética



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

6 Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 6

O preço de um carro novo é de R\$ 30000,00 e diminui R\$ 1000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Exemplo 7

Determine 4 números em uma PA crescente tais que sua soma é 8 e a soma de seus quadrados é 36.

Definição 8

Uma PA de razão $r \neq 0$ é chamada de progressão aritmética de primeira ordem. Se $r = 0$, chamamos de progressão aritmética estacionária.

Essas definições são motivadas pelo fato de que, em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n ,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = r \cdot n + (a_1 - r).$$

Assim, se $r \neq 0$, esse polinômio é de grau 1. Note que, se $r = 0$, a PA é constante.

Definição 8

Uma PA de razão $r \neq 0$ é chamada de progressão aritmética de primeira ordem. Se $r = 0$, chamamos de progressão aritmética estacionária.

Essas definições são motivadas pelo fato de que, em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n ,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = r \cdot n + (a_1 - r).$$

Assim, se $r \neq 0$, esse polinômio é de grau 1. Note que, se $r = 0$, a PA é constante.

A recíproca desse resultado também é válida, ou seja, se uma sequência tiver seu termo de ordem n (a_n) definido por um polinômio em n de grau menor ou igual a 1, então essa sequência será uma PA.

Soma dos n primeiros termos de uma PA



Proposição 9

A soma dos n primeiros termos da PA (a_1, a_2, a_3, \dots) é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}.$$

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

8

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Soma dos n primeiros termos de uma PA



Proposição 9

A soma dos n primeiros termos da PA (a_1, a_2, a_3, \dots) é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}.$$

Corolário 10

Nas condições da Proposição anterior, temos:

$$S_n = \frac{r}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n.$$

Tem-se que todo polinômio de segundo grau em n que não possua o termo independente é o somatório de alguma PA. De fato, tendo $P(n) = an^2 + bn$, basta tomar $r = 2a$ e $a_1 = a + b$. Verifique!

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética
Atividade Online

8 Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG
Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 11

Uma pessoa, começando com R\$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

- a) Ganha dinheiro;
- b) Não ganha nem perde dinheiro;
- c) Perde R\$ 27,00;
- d) Perde R\$ 37,00;
- e) Ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Exemplo 12

A população de um país é, hoje, igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

10 Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Progressão Geométrica



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

10 Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 12

A população de um país é, hoje, igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Exemplo 13

A torcida de certo clube é, hoje, igual a T_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Note que, nos exemplos anteriores, se uma grandeza teve taxa de crescimento igual a i , então cada valor da grandeza é igual a $(1 + i)$ vezes o valor anterior.

Definição 14

Uma progressão geométrica (ou, simplesmente, PG) é uma sequência na qual a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 15

A sequência $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ é um exemplo de uma PG. Aqui, a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior.

Exemplo 16

A sequência $(1000, 800, 640, 512, \dots)$ é um exemplo de uma PG. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20% .

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

12 Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Progressão Geométrica



É claro que, numa PG, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1 + i$ de razão da progressão e a representamos por q . Assim, para $n \geq 2$,

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Portanto, uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior (exceto quando o termo anterior é o primeiro).

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

13 Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Progressão Geométrica



É claro que, numa PG, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1 + i$ de razão da progressão e a representamos por q . Assim, para $n \geq 2$,

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Portanto, uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior (exceto quando o termo anterior é o primeiro). Em uma PG (a_1, a_2, a_3, \dots) , para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Assim,

$$a_i = a_j \cdot q^{i-j}.$$

Em particular,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

13 Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Progressão Geométrica



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

14 Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 17

Em uma PG, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135.
Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Exemplo 18

Qual é a razão da PG que se obtém inserindo 3 termos entre
os números 30 e 480?

Atividade 08 - Use Fórmulas de Progressão Geométrica

Atividade 09 - Conversão das Formas Recursiva e Explícita de Progressões Geométricas (no Khan aparece errado como Aritméticas)
Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

IMD1001 Matemática Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n primeiros termos de uma PA

Progressão Geométrica

Fórmulas de uma PG

15 Atividade Online

Somatório dos n primeiros termos de uma PG

Progressões e Funções

Exercícios

Bibliografia

Soma dos n primeiros termos de uma PG



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

16

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Proposição 19

A soma dos n primeiros termos de uma PG (a_n) de razão $q \neq 1$ é

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

17

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 20

Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Sabendo que o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, qual o número de grãos pedido pelo inventor do jogo?

Soma dos n primeiros termos de uma PG



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

17 Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 20

Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Sabendo que o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, qual o número de grãos pedido pelo inventor do jogo?

Resposta: 18446744073709551615.

Progressões e Funções



IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

18 Progressões e
Funções

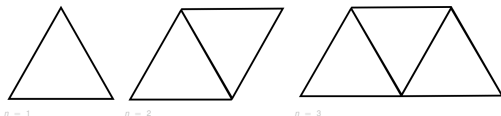
Exercícios

Bibliografia

Considere a PA (ou PG) (a_1, a_2, a_3, \dots) . Os elementos dessa progressão podem ser vistos através da função $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercícios

1. Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura abaixo.



Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

2. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é igual a 540° e estes ângulos estão em PA. Determine a mediana dos valores dos ângulos.

3. Se $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}, \dots$ é uma PA, determine x e calcule o quinto termo.

4. Calcule a soma dos termos da PA 2, 5, 8, 11, \dots desde o 25° termo até o 41° termo, inclusive.

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

19 Exercícios

Bibliografia

5. Determine o maior valor inteiro que pode ter a razão de uma PA que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.
6. Em um quadrado mágico (relembre a definição na Aula 03), chamamos de constante mágica o valor da soma de quaisquer uma das linhas, colunas ou diagonais. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico $n \times n$.
7. Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é 16, 1. Determine o valor de n e qual foi o elemento suprimido.

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

20 Exercícios

Bibliografia

8. O gordinho jaguatirica e Júnio vão jogar um jogo com as seguintes regras:

- ▶ Na primeira jogada, o gordinho jaguatirica escolhe um número no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e diz esse número;
- ▶ Os jogadores jogam alternadamente;
- ▶ Cada jogador ao jogar escolhe um elemento de A , soma-o ao número DITO pelo jogador anterior e DIZ a soma;
- ▶ O vencedor é aquele que disser 63.

Pode o gordinho jaguatirica ou Júnio ter uma estratégia vencedora? Se sim, quem pode e qual é essa estratégia?

9. Mostre que Júnio pode ter uma estratégia que impeça o gordinho vencer o jogo se a condição de vitória for 62 e $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

21 Exercícios

Bibliografia

10. Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto total de quanto?

11. Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

12. Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão quando reduzimos em 20% o volume?

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

22 Exercícios

Bibliografia

13. Considere um triângulo retângulo tal que seus lados formam uma PG crescente. Determine a razão dessa progressão.

14. Qual o quarto termo da PG $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots$?

15. Determine três números em PG, tais que a soma desses números é 19 e a soma de seus quadrados é 133.

16. A soma de três números em PG é 19. Subtraindo-se 1 do primeiro, eles passam a formar uma PA. Calcule-os.

17. Quatro números que estão em sequência são tais que, os três primeiros formam uma PA de razão 6, os três últimos uma PG e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

18. Será formada uma pilha de folhas de estanho que têm, cada uma, espessura de 0,1 mm. Inicialmente, adiciona-se uma folha na pilha. Nas operações seguintes, é inserida uma quantidade de folhas igual ao número de folhas que já estavam na pilha no momento da inserção. Após serem realizadas 33 adições de folhas, a altura da pilha será, aproximadamente:

- a. A altura de um poste de luz;
- b. A altura de um prédio de 40 andares;
- c. O comprimento da praia de Copacabana;
- d. A distância Rio-São Paulo;
- e. O comprimento do equador terrestre.

19. Larga-se uma bola de uma altura de 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{4}{9}$ da altura anterior. Qual a distância total percorrida pela bola até o décimo choque com o solo? E até o centésimo?

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

24 Exercícios

Bibliografia

20. Começando com um segmento de tamanho 1, divide-se esse segmento em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$. Repetimos agora essa operação com cada um desses segmentos e assim por diante. Sendo S_n a soma dos comprimentos dos intervalos que restaram depois de n dessas operações, determine o valor de S_n .

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

25 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2.
5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

IMD1001 Matemática
Elementar
Igor Oliveira

Progressão Aritmética

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PA

Progressão
Geométrica

Fórmulas de uma PG

Atividade Online

Somatório dos n
primeiros termos de
uma PG

Progressões e
Funções

Exercícios

26

Bibliografia