Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Matrizes e sistemas lineares

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Setembro de 2022

Sumário

1 Sistemas de equações lineares

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada equação é linear.
- Determinar se uma dada ênupla é uma solução de um sistema linear.
- Encontrar a matriz aumentada de um sistema linear.
- Encontrar o sistema linear correspondente a uma dada matriz aumentada.
- Efetuar operações elementares com as linhas de um sistema linear e as correspondentes nas linhas da matriz aumentada.
- Determinar se um sistema linear é consistente ou inconsistente.
- Encontrar o conjunto das soluções de um sistema linear consistente.

Conjunto de exercícios 1.1

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x^2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ (d) $x_1^{-2} + x^2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$ (b) $$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2-2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3x_4 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$ (d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, determine se é consistente.

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

6. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com

(a) nenhuma solução

(b) exatamente uma solução

(c) uma infinidade de soluções

7. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, 1)$ (c) $(13, 5, 2)$

(d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ (e) $(17, 7, 5)$

8. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$ (b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$ (c) $(5, 8, 1)$

(d) $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

9. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

10. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

11. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+2x_4-3x_5} &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

14. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}-x_2} + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \phantom{{}-x_5} &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

15. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

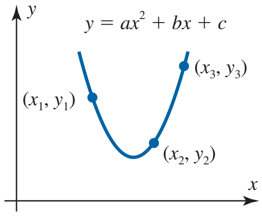


Figura Ex-15

16. Explique por que cada uma das operações elementares com linhas não afeta o conjunto das soluções de um sistema linear.

17. Mostre que se as equações lineares

$$x_1 + kx_2 = c \quad \text{e} \quad x_1 + lx_2 = d$$

têm o mesmo conjunto de soluções, então as duas equações são idênticas (isto é, $k = l$ e $c = d$).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um sistema linear cujas equações são todas homogêneas deve ser consistente.

(b) Multiplicar uma equação inteira por zero é uma operação elementar com as linhas aceitável.

(c) O sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não pode ter uma única solução, independentemente do valor de k.

(d) Uma equação linear só, com duas ou mais incógnitas, sempre deve ter uma infinidade de soluções.

(e) Se o número de equações de um sistema linear exceder o número de incógnitas, então o sistema deve ser inconsistente.

(f) Se cada equação de um sistema linear consistente for multiplicada por uma constante c, então todas as soluções do novo sistema podem ser obtidas multiplicando as soluções do sistema original por c.

(g) As operações elementares com linhas permitem que uma equação de um sistema linear seja subtraída de uma outra.

(h) O sistema linear de matriz aumentada correspondente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é consistente.

2 Método de Gauss-Jordan

computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de ***arredondamento***; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos ***instáveis***. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana. Alguns desses tópicos serão considerados no Capítulo 9.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direta, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstituição

Aptidões desenvolvidas

- Reconhecer se uma dada matriz está em forma escalonada, forma escalonada reduzida ou nenhuma dessas.
- Construir soluções de sistemas lineares cuja matriz aumentada correspondente está em forma escalonada ou escalonada reduzida.
- Usar a eliminação gaussiana para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Usar a eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Analisar sistemas lineares homogêneos usando o teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos.

Conjunto de exercícios 1.2

1. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan. ◀

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, resolva o sistema linear por eliminação gaussiana. ◀

9. Exercício 5

10. Exercício 6

11. Exercício 7

12. Exercício 8

▶ Nos Exercícios **13–16**, sem utilizar papel e lápis, determine se o sistema homogêneo tem soluções não triviais. ◀

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **17–24**, resolva o sistema linear dado por qualquer método. ◀

17. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \qquad - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \qquad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \qquad - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \qquad + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **25–28**, determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções. ◀

25. $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$

Nos Exercícios **29–30**, resolva o sistema dado, em que a, b e c são constantes.

29.
$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Encontre duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esse exercício mostra que uma matriz pode ter formas escalonadas distintas.

32. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida sem introduzir frações em estágios intermediários.

33. Mostre que o sistema não linear a seguir tem 18 soluções se $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha + 5 \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha - 5 \cos \beta + 5 \tan \gamma &= 0 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $x = \operatorname{sen} \alpha$, $y = \cos \beta$, e $z = \tan \gamma$.]

34. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nos ângulos incógnitos α, β e γ, com $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma &= 3 \\ 4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma &= 2 \\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para x, y e z.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$.]

36. Resolva o sistema a seguir para x, y e z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

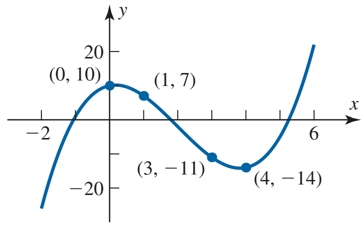


Figura Ex-37

38. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.

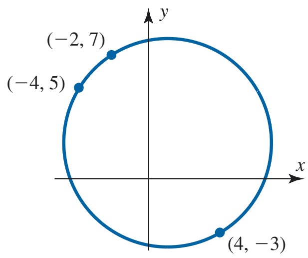


Figura Ex-38

39. Se o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 0 \end{aligned}$$

tiver somente a solução trivial, o que pode ser dito sobre as soluções do sistema a seguir?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 3 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 7 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 11 \end{aligned}$$

40. (a) Se A for uma matriz com três linhas e cinco colunas, qual é o número máximo possível de pivôs em sua forma escalonada reduzida?

(b) Se B for uma matriz com três linhas e seis colunas, cuja última coluna só tem zeros, qual é o número máximo possível de parâmetros da solução geral do sistema linear cuja matriz aumentada é B?

(c) Se C for uma matriz com cinco linhas e três colunas, qual é o número mínimo possível de linhas inteiras de zeros em qualquer forma escalonada de C?

41. (a) Mostre que se $ad - bc \ne 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que se $ad - bc \ne 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

42. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$ e $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ se (a) o sistema tiver apenas a solução trivial e (b) o sistema tiver soluções não triviais.

43. Descreva todas as formas escalonadas reduzidas possíveis de

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se uma matriz estiver em forma escalonada reduzida por linhas, então também estará em forma escalonada por linhas.

(b) Se efetuarmos uma operação elementar com as linhas de uma matriz em forma escalonada, a matriz resultante ainda estará em forma escalonada.

(c) Cada matriz tem uma única forma escalonada por linhas.

(d) Um sistema linear homogêneo em n incógnitas cuja matriz aumentada correspondente tem uma forma escalonada reduzida com r pivôs tem $n - r$ variáveis livres.

(e) Todos os pivôs de uma matriz em forma escalonada por linhas devem ocorrer em colunas distintas.

(f) Se cada coluna de uma matriz em forma escalonada por linhas tiver um pivô, então cada entrada que não for um pivô será nula.

(g) Se um sistema linear homogêneo de n equações em n incógnitas tiver uma matriz aumentada correspondente com uma forma escalonada reduzida com n pivôs, então o sistema linear só tem a solução trivial.

(h) Se a forma escalonada reduzida de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

(i) Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

1.3 Matrizes e operações matriciais

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção, começamos a estudar matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração e multiplicação.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2, usamos coleções retangulares de números, denominadas *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, essas coleções retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias numa certa semana.

	2ª	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**Sáb.**	**Dom.**
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Suprimindo os títulos, ficamos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada “matriz”.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

3 Matrizes e operações matriciais

DEFINIÇÃO 8 Se A for uma matriz quadrada, então o ***traço de A***, denotado por $\text{tr}(A)$, é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

▶ EXEMPLO 11 Traço de uma matriz

Alguns exemplos de matrizes e seus traços são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \text{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$ ◀

Nos exercícios, desenvolvemos alguma prática com as operações de transposição e traço.

Revisão de conceitos

- Matriz
- Entradas
- Vetor coluna (ou matriz coluna)
- Vetor linha (ou matriz linha)
- Matriz quadrada
- Diagonal principal
- Matrizes iguais
- Operações matriciais: soma, diferença, multiplicação por escalar
- Combinação linear de matrizes
- Produto de matrizes (multiplicação matricial)
- Matriz em blocos
- Submatrizes
- Método linha-coluna
- Método das colunas
- Método das linhas
- Matriz de coeficientes de um sistema linear
- Transposta
- Traço

Aptidões desenvolvidas

- Determinar o tamanho de uma dada matriz.
- Identificar os vetores linha e coluna de uma dada matriz.
- Efetuar as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes.
- Determinar se está definido o produto de duas matrizes.
- Calcular um produto matricial usando os métodos linha-coluna, das colunas e das linhas.
- Expressar o produto de uma matriz com um vetor coluna como uma combinação linear das colunas da matriz.
- Expressar um sistema linear como uma equação matricial e identificar a matriz de coeficientes.
- Calcular a transposta de uma matriz.
- Calcular o traço de uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$
(d) $AB + B$ (e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$
(g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) EA (b) AB^T (c) $B^T(A + E^T)$
(d) $2A + C$ (e) $(C^T + D)B^T$ (f) $CD + B^T E^T$
(g) $(BD^T)C^T$ (h) $DC + EA$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$
(d) $-7C$ (e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$ (i) $\text{tr}(D)$
(j) $\text{tr}(D - 3E)$ (k) $4\,\text{tr}(7B)$ (l) $\text{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$
(d) $B^T + 5C^T$ (e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$
(g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$ (i) $(CD)E$
(j) $C(BA)$ (k) $\text{tr}(DE^T)$ (l) $\text{tr}(BC)$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(d) $(AB)C$ (e) $A(BC)$ (f) CCT
(g) $(DA)^T$ (h) $(C^TB)A^T$ (i) $\text{tr}(DDT)$
(j) $\text{tr}(4E^T - D)$ (k) $\text{tr}(C^TA^T + 2E^T)$ (l) $\text{tr}((EC^T)^TA)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$
(c) $(-AC)^T + 5D^T$ (d) $(BA^T - 2C)T$
(e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de AB. (b) a terceira linha de AB.
(c) a segunda coluna de AB. (d) a primeira coluna de BA.
(e) a terceira linha de AA. (f) a terceira coluna de AA.

8. Usando as matrizes do Exercício 7, use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira coluna de AB.
(b) a terceira coluna de BB.
(c) a segunda linha de BB.
(d) a primeira coluna de AA.
(e) a terceira linha de AB.
(f) a primeira linha de BA.

9. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AA como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BB como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

10. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AB como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BA como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

11. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \phantom{{}+ x_2} - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \phantom{{}- 3x_3} - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+ 3x_3} &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 \phantom{{}- 2x_2} + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a)
$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–16**, encontre todos os valores de k, se houver, que satisfazem a equação. ◀

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

▶ Nos Exercícios **17–18**, resolva a equação matricial em termos de a, b, c e d. ◀

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Sejam A uma matriz $m \times n$ e 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $kA = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. (a) Mostre que se os produtos AB e BA estiverem ambos definidos, então AB e BA são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A for uma matriz $m \times n$ e $A(BA)$ estiver definida, então B é uma matriz $n \times m$.

21. Prove que se A e B são matrizes $n \times n$, então

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

22. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto AB está definido, então AB também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado análogo para uma coluna de zeros.

23. Em cada parte, encontre uma matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras em vez de números para entradas não nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$

(c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$

(d) $a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$

24. Em cada parte, encontre a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |i-j| > 1 \\ -1 & \text{se} \quad |i-j| \leq 1 \end{cases}$

25. Considere a função $y = f(x)$ definida com matrizes x de tamanho 2×1 por $y = Ax$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esboce $f(x)$ juntamente com x em cada caso dado. Como você descreveria a ação de f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $AI = IA = A$, com qualquer matriz $n \times n$ A.

27. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

28. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

29. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $BB = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

30. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.

(a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = A$? Justifique sua resposta.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(o), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

(b) Uma matriz $m \times n$ tem m vetores coluna e n vetores linha.

(c) Se A e B forem matrizes 2×2, então $AB = BA$.

(d) O i-ésimo vetor linha de um produto matricial AB pode ser calculado multiplicando A pelo i-ésimo vetor linha de B.

(e) Dada qualquer matriz A, vale $(A^T)^T = A$.

(f) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

(g) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^T = A^TB^T$.

(h) Dada qualquer matriz quadrada A, vale $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

(i) Se A for uma matriz 6×4 e B uma matriz $m \times n$ tal que B^TA^T é uma matriz 2×6, então $m = 4$ e $n = 2$.

(j) Se A for uma matriz $n \times n$ e c um escalar, então $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr}(A)$.

(k) Se A, B e C forem matrizes de mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

(l) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

(m) Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas de mesmo tamanho.

(n) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, AB também tem.

(o) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, BA também tem.

1.4 Inversas; propriedades algébricas das matrizes

Nesta seção, discutimos algumas das propriedades algébricas das operações matriciais. Veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas também que algumas não valem.

Propriedades das adição matricial e multiplicação por escalar

O teorema seguinte lista as propriedades algébricas básicas das operações matriciais.

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da aritmética matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) $A + B = B + A$ **[Lei da comutatividade da adição]**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Lei da associatividade da adição]**

(c) $A(BC) = (AB)C$ **[Lei da associatividade da multiplicação]**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ **[Lei da distributividade à esquerda]**

(e) $(A + B)C = AC + BC$ **[Lei da distributividade à direita]**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Para provar qualquer uma das igualdades nesse teorema, devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. A maioria das provas segue o mesmo padrão geral, portanto, provamos a parte (d) como amostra. A prova da lei da

4 Inversas; propriedades algébricas das matrizes

Conjunto de exercícios 1. 4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

(b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^TA^T$

▶ Nos Exercícios 4–7, use o Teorema 1.4.5 para calcular a inversa da matriz dada. ◀

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Use a matriz A do Exercício 4 para verificar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

11. Use a matriz B do Exercício 5 para verificar que $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

12. Use as matrizes A e B dos Exercícios 4 e 5 para verificar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Use as matrizes A, B e C dos Exercícios 4 a 6 para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

▶ Nos Exercícios 14–17, use a informação dada para encontrar A. ◀

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **15.** $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

16. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **17.** $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

18. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a quantidade dada.

(a) A^3 (b) A^{-3} (c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$, onde $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$, onde $p(x) = 2x^2 + x + 1$

(f) $p(A)$, onde $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Repita o Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios 22–24, sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$, com a matriz dada. ◀

22. A matriz A do Exercício 18.

23. A matriz A do Exercício 21.

24. Uma matriz quadrada A arbitrária.

25. Mostre que se $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

26. Mostre que se $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

27. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

28. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

29. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

30. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$C^TB^{-1}A^2BAC^{-1}DA^{-2}B^TC^{-2} = C^T$$

32. Se A for uma matriz quadrada e n um inteiro positivo, será verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justifique sua resposta.

33. Simplifique

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

34. Simplifique

$$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$$

▶ Nos Exercícios **35–37**, determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [*Sugestão*: resolva $AX = I$ para X igualando entradas correspondentes de ambos lados.] ◀

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

38. Prove o Teorema 1.4.2.

▶ Nos Exercícios **39–42**, use o método do Exemplo 8 para encontrar a única solução do sistema linear dado. ◀

39. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$ **40.** $\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$ **42.** $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$

43. Prove a parte (a) do Teorema 1.4.1.

44. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.1.

45. Prove a parte (f) do Teorema 1.4.1.

46. Prove a parte (b) do Teorema 1.4.2.

47. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.2.

48. Verifique a Fórmula (4) do texto calculando diretamente.

49. Prove a parte (d) do Teorema 1.4.8.

50. Prove a parte (e) do Teorema 1.4.8.

51. (a) Mostre que se A for invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

(b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.

52. Mostre que se A for invertível e k um escalar não nulo qualquer, então $(kA)^n = k^nA^n$, com qualquer valor inteiro de n.

53. (a) Mostre que se A, B e $A + B$ forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$

(b) O que o resultado da parte (a) nos diz sobre a matriz $A^{-1} + B^{-1}$?

54. Dizemos que uma matriz A é ***idempotente*** se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se A for idempotente, então $I - A$ também é.

(b) Mostre que se A for idempotente, então $2A - I$ é invertível e sua própria inversa.

55. Mostre que se A for uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$, com algum inteiro positivo k, então a matriz $I - A$ é invertível e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são inversas uma da outra se, e só se, $AB = BA = 0$.

(b) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(d) Se A e B forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e vale $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(e) Se A e B forem matrizes tais que o produto AB está definido, então vale $(AB)^T = A^TB^T$.

(f) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$

(g) Se A e B forem matrizes de mesmo tamanho e k uma constante, então $(kA + B)^T = kA^T + B^T$.

(h) Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível.

(i) Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e I for uma matriz identidade, então $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

(j) Uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros não pode se invertível.

(k) A soma de duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho sempre é invertível.

5 Matrizes elementares e um método para encontrar A^{-1}

Conjunto de exercícios 1.5

1. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, o resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **7–8**, use as matrizes a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ ◄

7. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EA = B$ (b) $EB = A$

(c) $EA = C$ (d) $EC = A$

8. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EB = D$ (b) $ED = B$

(c) $EB = F$ (d) $EF = B$

► Nos Exercícios **9–24**, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se essa inversa existir. ◄

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **25–26**, em cada parte, encontre a inversa da matriz 4×4 dada, em que k_1, k_2, k_3, k_4 e k são todos não nulos. ◀

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–28**, encontre todos os valores de c, se houver, com os quais a matriz dada é invertível. ◀

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **29–32**, escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **33–36**, escreva a *inversa* da matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

33. A matriz do Exercício 29.

34. A matriz do Exercício 30.

35. A matriz do Exercício 31.

36. A matriz do Exercício 32.

▶ Nos Exercícios **37–38**, mostre que as matrizes A e B dadas são equivalentes por linhas, e encontre uma sequência de operações elementares com linhas que produza B a partir de A. ◀

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Mostre que, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

for uma matriz elementar, então pelo menos uma das entradas da terceira linha deve ser nula.

40. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível, com qualquer valor das entradas.

41. Prove que se A e B forem matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e só se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

42. Prove que se A for uma matriz invertível e B for equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

43. Mostre que se B for obtida de A por meio de uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, aplicada a B, produz A.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto de duas matrizes elementares de mesmo tamanho é uma matriz elementar.

(b) Toda matriz elementar é invertível.

(c) Se A e B são equivalentes por linhas e B e C são equivalentes por linhas, então A e C são equivalentes por linhas.

(d) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma infinidade de soluções.

(e) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então a matriz obtida pela troca de duas linhas de A não pode ser invertível.

(f) Se A for uma matriz invertível, e um múltiplo da primeira linha de A for somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

(g) É única a expressão de uma matriz invertível A como um produto de matrizes elementares.

1.6 Mais sobre sistemas lineares e matrizes invertíveis

Nesta seção, mostramos como a inversa de uma matriz pode ser usada para resolver um sistema linear e desenvolvemos mais resultados sobre matrizes invertíveis.

Número de soluções de um sistema linear

Na Seção 1.1, afirmamos (tomando por base as Figuras 1.1.1 e 1.1.2) que todo sistema linear tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma solução, ou uma infinidade de soluções. Agora estamos em condições de provar esse resultado fundamental.

TEOREMA 1.6.1 *Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.*

Prova Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações: (a) o sistema não tem solução, (b) o sistema tem exatamente uma solução ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções no caso (c).

Suponha que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenha mais de uma solução e seja $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, onde $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são duas soluções distintas quaisquer. Como $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são distintas, a matriz $\mathbf{x}_0$ é não nula; além disso,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Se k for um escalar qualquer, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{b} + k\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

No entanto, isso significa que $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como $\mathbf{x}_0$ é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma infinidade de soluções. ◀

Resolvendo sistemas lineares por inversão matricial

Até aqui, estudamos dois *procedimentos* para resolver sistemas lineares, a saber, a eliminação de Gauss-Jordan e a eliminação gaussiana. O teorema seguinte fornece, efetivamente, uma *fórmula* para a solução de um sistema linear de n equações em n incógnitas no caso em que a matriz de coeficientes for invertível.

TEOREMA 1.6.2 *Se A for uma matriz invertível $n \times 1$, então para cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução, a saber, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*

6 Método de Jacobi-Richardson

k	0	1	2	3	4
x_1	0.7	0.96	0.978	0.9994	0.9979
x_2	-1.6	-1.86	-1.98	-1.9888	-1.9996
x_3	0.6	0.94	0.966	0.9984	0.9968

Agora, desde que:

$$x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0108 \\ 0.0016 \end{pmatrix} ,$$

e portanto

$$\frac{\| x^{(4)} - x^{(3)} \|_\infty}{\| x^{(4)} \|_\infty} = \frac{0.0108}{1.9996} \simeq 0.0054 < 10^{-2} ,$$

segue que a solução do sistema, com $\epsilon < 10^{-2}$, é:

$$x = \begin{pmatrix} 0.9979 \\ -1.9996 \\ 0.9978 \end{pmatrix} .$$

Exercícios

5.1 - *Usando o método de Jacobi-Richardson, obter a solução do sistema:*

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases} .$$

com 3 casas decimais corretas.

5.2 - *Dado o sistema:*

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 30 \end{cases} .$$

a) *Verificar a possiblidade de aplicação do método de Jacobi-Richardson.*

b) *Se possível resolvê-lo pelo método do item* **a)**, *obtendo o resultado com* $\epsilon < 10^{-2}$.

5.2.2 Método de Gauss-Seidel.

Suponhamos, como foi feito para o método de Jacobi-Richardson, que o sistema linear $Ax = b$ seja escrito na forma:

$$(L^* + I + R^*)x = b^* .$$

Transformamos então esse sistema como se segue:

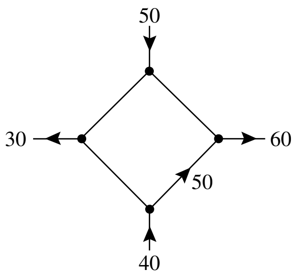
$$\begin{aligned} &(L^* + I)x = -R^*x + b^* \\ &x = -(L^* + I)^{-1}R^*x + (L^* + I)^{-1}b^* . \end{aligned}$$

que está na forma (5.1) com $B = -(L^* + I)^{-1}R^*$ e $g = (L^* + I)^{-1}b^*$.

7 Aplicações de sistemas lineares

Conjunto de exercícios 1.8

1. A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.



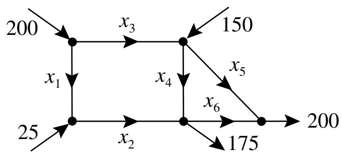
◄ **Figura Ex-1**

2. A figura dada mostra algumas taxas de fluxo de hidrocarbonetos para dentro e para fora de uma rede de canos de uma refinaria de petróleo.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo se $x_4 = 50$ e $x_6 = 0$.



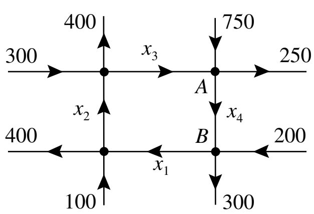
◄ **Figura Ex-2**

3. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?



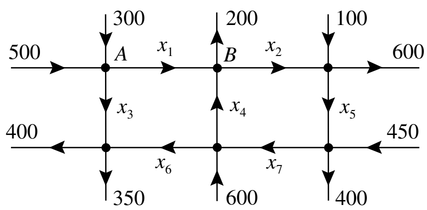
◄ **Figura Ex-3**

4. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

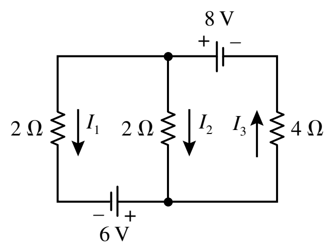
(c) É possível fechar a rua de A para B em virtude de uma obra e manter o tráfego fluindo em todas as outras ruas? Explique.



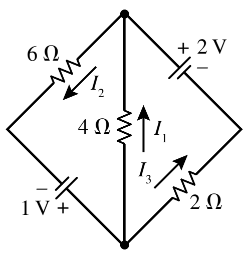
◄ **Figura Ex-4**

► Nos Exercícios **5–8**, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas. ◄

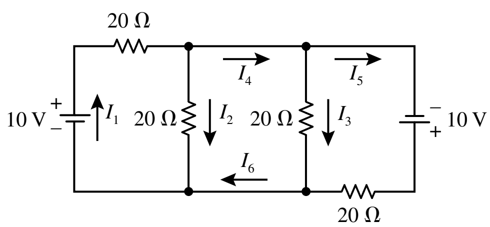
5.



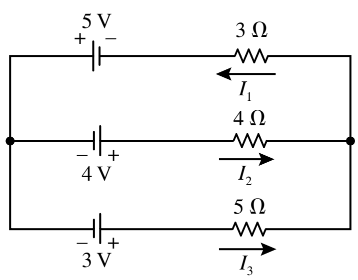
6.



7.



8.



► Nos Exercícios **9–12**, escreva uma equação equilibrada para a reação química dada. ◄

9. $C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O$ (queima de propano)

10. $C_6H_{12}O_6 \rightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentação do açúcar)

11. $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

12. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotossíntese)

13. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (1, 1), (2, 2) e (3, 5).

14. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (0, 0), $(-1, 1)$ e (1, 1).

15. Encontre o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos $(-1, -1)$, (0, 1), (1, 3), $(4, -1)$.

16. A figura dada mostra o gráfico de um polinômio cúbico. Encontre o polinômio.

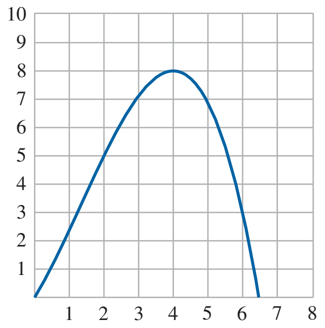


Figura Ex-16

17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de grau dois que passam pelos pontos (0, 1) e (1, 2). [*Sugestão*: a equação deve incluir um parâmetro arbitrário que produza os membros da família quando variar.]

(b) Esboce quatro curvas da família obtida a mão ou com a ajuda de uma ferramenta gráfica.

18. Nesta seção, selecionamos apenas algumas poucas aplicações de sistemas lineares. Usando uma ferramenta de busca na Internet, tente encontrar mais algumas aplicações desses sistemas ao mundo real. Selecione alguma de seu interesse e redija um parágrafo a respeito.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Numa rede qualquer, a soma dos fluxo para fora de algum nó deve ser igual à soma dos fluxos para dentro do nó.

(b) Quando uma corrente passa por um resistor, ocorre um aumento da tensão elétrica no circuito.

(c) A lei das correntes de Kirchhoff afirma que a soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.

(d) Uma equação química está equilibrada se o número total de átomos em cada lado da equação for o mesmo.

(e) Dados n pontos do plano xy, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

1.9 Modelos econômicos de Leontief

Em 1973, o economista Wassily Leontief foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta seção, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

Insumo e produto numa economia

Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em ***setores*** e estudar como os setores interagem entre si. Por exemplo, uma economia simples pode estar dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços. Tipicamente, um setor produz certos ***produtos***, mas requer ***insumos*** dos outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas requer insumo de máquinas agrícolas do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços e alimento de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede na qual fluem os insumos e os produtos entre os setores; o estudo desses fluxos é denominado ***análise de insumo-produto***. Os insumos e os produtos em geral são medidos em unidades monetárias (dólares, ou milhões de dólares, por exemplo, que denotamos simplesmente pelo cifrão $), mas também são possíveis outras medidas.

Os fluxos entre os setores de uma economia real não são sempre óbvios. Por exemplo, na Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos da América tiveram uma demanda por 50.000 novos aviões, que exigiu a construção de muitas novas fábricas de alumínio. Isso produziu uma demanda inesperadamente grande por certos componentes elétricos à base de cobre que, por sua vez, produziu uma escassez de cobre. O problema acabou sendo resolvido utilizando prata como substituto de cobre, sendo a prata tomada emprestada das

8 Respostas

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Conjunto de exercícios 1.1 (página 9)

1. (a), (c) e (f) são equações lineares; (b), (d) e (e) não são equações lineares.

3. (a) e (d) são sistemas lineares; (b) e (c) não são sistemas lineares. **5.** Ambos (a) e (d) são consistentes.

7. (a), (d) e (e) são soluções; (b) e (c) não são soluções. **9.** **(a)** $x = \frac{5}{7}t + \frac{3}{7}$, $y = t$ **(b)** $x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

11. **(a)** $\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}-4x_2} &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} 3x_1 \phantom{{}+x_2} - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$ **(c)** $\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.1

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.2 (página 22)

1. **(a)** Ambas **(b)** Ambas **(c)** Ambas **(d)** Ambas **(e)** Ambas **(f)** Ambas **(g)** Forma escalonada

3. **(a)** $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$ **(b)** $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$
(c) $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$ **(d)** Inconsistente

5. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$ **7.** $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$ **9.** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$

11. $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$ **13.** Tem soluções não triviais. **15.** Tem soluções não triviais. **17.** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

19. $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$ **21.** $w = t, x = -t, y = t, z = 0$ **23.** $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2$

25. Se $a = 4$, há uma infinidade de soluções; se $a = -4$, não há soluções; se $a \neq \pm 4$, existe exatamente uma solução.

27. Se $a = 3$, há uma infinidade de soluções; se $a = -3$, não há soluções; se $a \neq \pm 3$, existe exatamente uma solução.

29. $x = \frac{2a}{3} - \frac{b}{9}$, $y = -\frac{a}{3} + \frac{2b}{9}$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são duas possibilidades. **35.** $x = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{3}$, $z = \pm\sqrt{2}$

37. $a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$ **39.** O sistema não homogêneo terá exatamente uma única solução.

Verdadeiro/falso 1.2

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa **(i)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.3 (Página 35)

1. **(a)** Não está definida **(b)** 4×2 **(c)** Não está definida **(d)** Não está definida **(e)** 5×5 **(f)** 5×2 **(g)** Não está definida
(h) 5×2

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$ **(e)** Não definida

(f) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **(g)** $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(i)** 5 **(j)** 225 **(k)** 168 **(l)** Não definida

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** Não definida **(c)** $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $[67\ \ 41\ \ 41]$ **(b)** $[63\ \ 67\ \ 57]$ **(c)** $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$ **(e)** $[24\ \ 56\ \ 97]$ **(f)** $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

9. **(a)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 48 \\ 24 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 12 \\ 29 \\ 56 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 64 \\ 21 \\ 77 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 28 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 38 \\ 18 \\ 74 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 2 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -9 \end{array}$

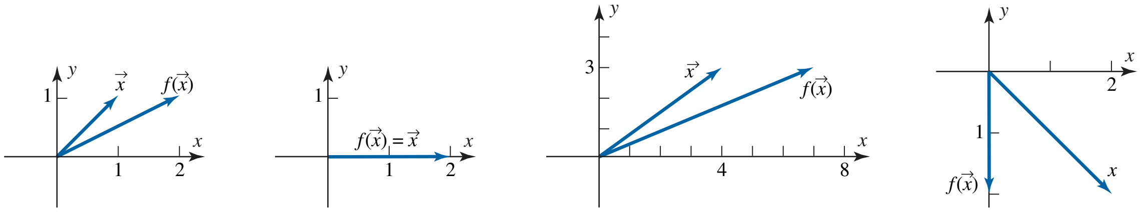
15. -1 **17.** $a = 4, b = -6, c = -1, d = 1$

23. **(a)** $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{54} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$

25. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(c)** $f\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



27. Uma, a saber, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

29. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** Quatro; $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.3

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira **(i)** Verdadeira
(j) Verdadeira **(k)** Verdadeira **(l)** Falsa **(m)** Verdadeira **(n)** Verdadeira **(o)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.4 (página 49)

5. $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ **7.** $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$

19. **(a)** $\begin{bmatrix} 41 & 15 \\ 30 & 11 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -30 & 41 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 39 & 13 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$

21. **(a)** $\begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & -18 \\ 0 & 18 & 26 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -15 \\ 0 & 15 & -14 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -24 \\ 0 & 24 & 32 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ **31.** $D = CA^{-1}B^{-1}A^{-2}BC^2(B^T)^{-1}A^2$ **33.** B^{-1} **35.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

37 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **39.** $x_1 = \frac{1}{23},\ x_2 = \frac{13}{23}$ **41.** $x_1 = -\frac{1}{11},\ x_2 = \frac{6}{11}$

Verdadeiro/falso 1.4

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira **(i)** Falsa
(j) Verdadeira **(k)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.5 (página 58)

1. **(a)** É elementar **(b)** Não é elementar **(c)** Não é elementar **(d)** Não é elementar

3. **(a)** Somar 3 vezes a linha 2 com a linha 1: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** Multiplicar a linha 1 por $-\frac{1}{7}$: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Somar 5 vezes a linha 1 com a linha 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** Trocar entre si as linhas 1 e 3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **(a)** Trocar entre si as linhas 1 e 2: $EA = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 & -6 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Somar -3 vezes a linha 2 com a linha 3: $EA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 9 & 4 & -12 & -10 \end{bmatrix}$

(c) Somar 4 vezes a linha 3 com a linha 1: $EA = \begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ **15.** Não existe inversa **17.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -3 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

25. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **27.** $c \neq 0, 1$

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. Somar -1 vez a linha 1 com a linha 2. Somar -1 vez a linha 1 com a linha 3. Somar -1 vez a linha 2 com a linha 1. Somar a linha 2 com a linha 3.

Verdadeiro/falso 1.5

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.6 (página 65)

1. $x_1 = 3, x_2 = -1$ **3.** $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$ **5.** $x = 1, y = 5, z = -1$ **7.** $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

9. **(i)** $x_1 = \frac{22}{17},\ x_2 = \frac{1}{17}$ **(ii)** $x_1 = \frac{21}{17},\ x_2 = \frac{11}{17}$

11. **(i)** $x_1 = \frac{7}{15},\ x_2 = \frac{4}{15}$ **(ii)** $x_1 = \frac{34}{15},\ x_2 = \frac{28}{15}$ **(iii)** $x_1 = \frac{19}{15},\ x_2 = \frac{13}{15}$ **(iv)** $x_1 = -\frac{1}{5},\ x_2 = \frac{3}{5}$

13. Consistente com quaisquer b. **15.** $b_3 = b_1 - b_2$ **17.** $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

19. $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.6

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 1.7 (página 71)

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} -15 & 10 & 0 & 20 & -20 \\ 2 & -10 & 6 & 0 & 6 \\ 18 & -6 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

9. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\ A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$

11. $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix},\ A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix},\ A^{-k} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$

13. Não é simétrica **15.** É simétrica **17.** Não é simétrica **19.** Não é simétrica **21.** Não é invertível **23.** $a = -8$

25. $x \neq 1, -2, 4$ **27.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **35.** **(a)** É simétrica **(b)** Não é simétrica (exceto se $n = 1$) **(c)** É simétrica
(d) Não é simétrica (exceto se $n = 1$)

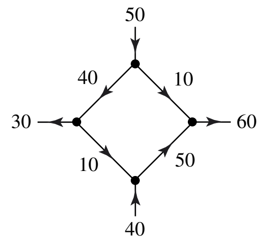
39. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **43.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.7

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira **(i)** Verdadeira
(j) Falsa **(k)** Falsa **(l)** Falsa **(m)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 1.8 (página 84)

1.



3. **(a)** $x_3 - x_4 = -500$, $-x_1 + x_4 = 100$, $x_1 - x_2 = 300$, $x_2 - x_3 = 100$
(b) $x_1 = -100 + t$, $x_2 = -400 + t$, $x_3 = -500 + t$, $x_4 = t$
(c) Para que todas as taxas sejam negativas, necessitamos de $t = 500$ carros por hora, portanto, $x_1 = 400$, $x_2 = 100$, $x_3 = 0$, $x_4 = 500$

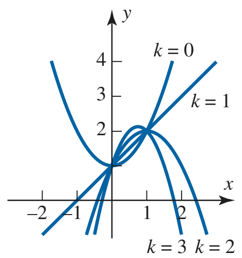
5. $I_1 = \frac{13}{5}$ A, $I_2 = -\frac{2}{5}$ A, $I_3 = \frac{11}{5}$ A **7.** $I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = \frac{1}{2}$ A, $I_2 = I_3 = 0$ A

9. $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3$ e $x_4 = 4$; a equação equilibrada é $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

11. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$; a equação equilibrada é $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

13. $p(x) = x_2 - 2x + 2$ **15.** $p(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

17. **(a)** Usando $a_1 = k$ como parâmetro, $p(x) = 1 + kx + (1 - k)x^2$, com $-\infty < k < \infty$.
(b) Mostramos o gráfico com $k = 0, 1, 2$ e 3.



Verdadeiro/falso 1.8

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.9 (página 90)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}10 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \$25.290 \\ \$22.581 \end{bmatrix}$ **3.** **(a)** $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \$31.500 \\ \$26.500 \\ \$26.300 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 123{,}08 \\ 202{,}56 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.9

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira

Capítulo 1 Exercícios suplementares (página 91)

1.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$
$x_1 = -\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{9}{2}s - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -4x_1 & & & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$
$x_1 = -\frac{17}{2}$, $x_2 = -\frac{26}{3}$, $x_3 = -\frac{35}{3}$

5. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ **7.** $x = 4, y = 2, z = 3$

9. **(a)** $a \neq 0, b \neq 2$ **(b)** $a \neq 0, b = 2$ **(c)** $a = 0, b = 2$ **(d)** $a = 0, b \neq 2$

11. $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **13.** **(a)** $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

15. $a = 1, b = -2, c = 3$