Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Vetores no plano e no espaço

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Agosto de 2022

Sumário

1 Soma de vetores e multiplicação por escalar

4) Seja o triângulo de vértices A(4, -1, -2), B(2, 5, -6) e C(1, -1, -2). Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.

Solução

A mediana em questão, de acordo com a Figura 1.64, é o segmento que tem como extremidades o ponto médio M de AB e o vértice oposto C. Então, o comprimento da mediana é o módulo do vetor $\overrightarrow{MC}$.

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right) \text{ ou } M(3, 2, -4)$$

e

$$\overrightarrow{MC} = C - M = (1, -1, -2) - (3, 2, -4) = (-2, -3, 2)$$

Portanto

$$|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

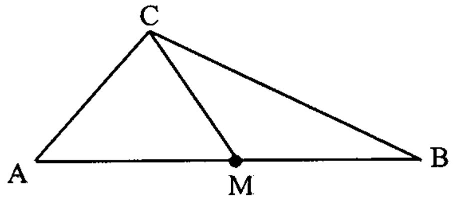

Figura 1.64

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

2) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$

b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

3) Dados os pontos A(-1, 3), B(2, 5), C(3, -1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$

c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$

5) Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $3\vec{v} - 2(A - B)$

6) Sejam os pontos A(-5, 1) e B(1, 3). Determinar o vetor $\vec{v} = (a, b)$ tal que

a) $B = A + 2\vec{v}$

b) $A = B + 3\vec{v}$

Construir o gráfico correspondente a cada situação.

7) Representar no gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:
   a) A(-1, 3) e B(3, 5)
   b) A(-1, 4) e B(4, 1)
   c) A(4, 0) e B(0, -2)
   d) A(3, 1) e B(3, 4)

8) Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente este segmento.

9) No mesmo sistema cartesiano xOy, representar
   a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos A(1, 4) e B(1, -4), respectivamente;
   b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10) Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).
    a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.
    b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

11) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
    a) A(-3, -1), B(4, 2) e C(5, 5)
    b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

12) Sabendo que A(1, -1), B(5, 1) e C(6, 4) são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

13) Dados os pontos A(-3, 2) e B(5, -2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, devendo P ser tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

14) Sendo A(-2, 3) e B(6, -3) extremidades de um segmento, determinar
    a) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;
    b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.

15) O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e a distância dele ao ponto A é a terça parte da distância dele ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

16) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular
    a) $|\vec{u}|$
    b) $|\vec{v}|$
    c) $|\vec{w}|$
    d) $|\vec{u} + \vec{v}|$
    e) $|2\vec{u} - \vec{w}|$
    f) $|\vec{w} - 3\vec{u}|$
    g) $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
    h) $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

19) Provar que os pontos A(-2, -1), B(2, 2), C(-1, 6) e D(-5, 3), nesta ordem, são vértices de um quadrado.

20) Encontrar um ponto P de eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto A(2, -3) seja igual a 5.

21) Dados os pontos A(-4, 3) e B(2, 1), encontrar o ponto P nos casos
   a) P pertence ao eixo Oy e é eqüidistante de A e B;
   b) P é eqüidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;
   c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.

22) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:
   a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$
   b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$
   c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$
   d) $\vec{v} = (0, 4)$

23) Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
   a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;
   b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;
   c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

24) Traçar no mesmo sistema de eixos os retângulos de vértices
   a) A(0, 0, 1), B(0, 0, 2), C(4, 0, 2) e D(4, 0, 1)
   b) A(2, 1, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 2) e D(0, 1, 2)

25) Traçar o retângulo formado pelos pontos (x, y, z) tal que
   a) $x = 0,\ 1 \leq y \leq 4$ e $0 \leq z \leq 4$
   b) $-1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3$ e $z = 3$

26) Construir o cubo constituído dos pontos (x, y, z), de modo que
   a) $-4 \leq x \leq -2,\ 1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$
   b) $-2 \leq x \leq 0,\ 2 \leq y \leq 4$ e $-4 \leq z \leq -2$

27) Construir o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos (x,y,z), de modo que $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq y \leq 5$ e $0 \leq z \leq 4$. Quais as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?

28) Calcular a distância do ponto A(3, 4, -2)
   a) ao plano xy;
   b) ao plano xz;
   c) ao plano yz;
   d) ao eixo dos x;
   e) ao eixo dos y;
   f) ao eixo dos z.

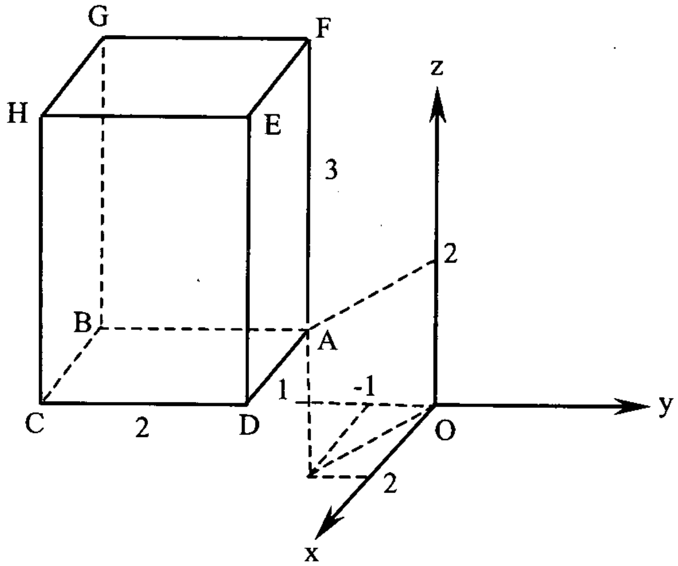

Figura 1.65

29) A Figura 1.65 apresenta um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo que A(2,-1,2).

30) O paralelepípedo retângulo de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema Oxyz conforme a Figura 1.66. Considerando um segundo sistema chamado de O'x'y'z', onde Ox//O'x', Oy//O'y' e Oz//O'z', e sendo O' um dos vértices do paralelepípedo de acordo com a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos sistemas dados.

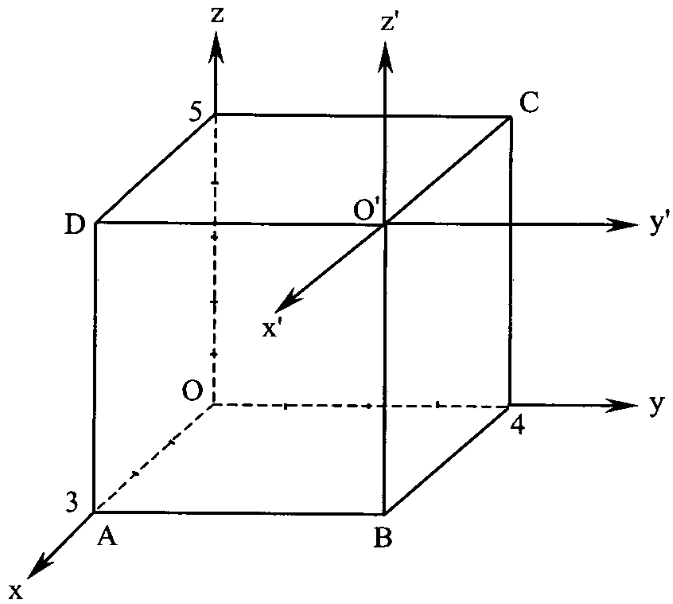

Figura 1.66

31) Dados os pontos A(2, -2, 3) e B(1, 1, 5) e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:

a) $A + 3\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 3(B - A)$

32) Dados os pontos A(3, -4, -2) e B(-2, 1, 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

33) Dados os pontos A(1, -2, 3), B(2, 1, -4) e C(-1, -3, 1), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

34) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b, e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

35) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$,

a) determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$;

b) encontrar os números a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$.

36) Represêntar no mesmo sistema Oxyz o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos O(0, 0, 0), A(-3, -4, 0), B(-2, 4, 2), C(3, 0, -4) e D(3, 4, -2).

37) Sendo A(2, -5, 3) e B(7, 3, -1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, -3, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

38) Determinar os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, -2), N(3, 1, -3) e P(4, 2, 1).

39) Dados os pontos A(1, -1, 3) e B(3, 1, 5), até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

40) Sendo A(-2, 1, 3) e B(6, -7, 1) extremidades de um segmento, determinar

a) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

41) O ponto A é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B, C e D. Sendo AA' uma diagonal do paralelepípedo, determinar o ponto A' nos seguintes casos:

a) A(3, 5, 0), B(1, 5, 0), C(3, 5, 4) e D(3, 2, 0)

b) A(-1, 2, 1), B(3, -1, 2), C(4, 1, -3) e D(0, -3, -1)

c) A(-1, 2, 3), B(2, -1, 0), C(3, 1, 4) e D(-2, 0, 5)

42) Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

a) paralelo ao eixo dos x;

b) representado no eixo dos z;

c) paralelo ao plano xy;

d) paralelo ao plano yz;

e) ortogonal ao eixo dos y;

f) ortogonal ao eixo dos z;

g) ortogonal ao plano xy;

h) ortogonal ao plano xz.

43) Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

44) Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

45) A reta que passa pelos pontos A(-2, 5, 1) e B(1, 3, 0) é paralela à reta determinada por C(3, -1, -1) e D(0, m, n). Determinar o ponto D.

46) Verificar se são colineares os pontos:

a) A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3) e C(-2, -7, -1)

b) A(2, 1, -1), B(3, -1, 0) e C(1, 0, 4)
c) A(-1, 4, -3), B(2, 1, 3) e C(4, -1, 7)

47) Sabendo que o ponto P(m, 4, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(-1, -2, 3) e B(2, 1, -5), calcular m e n.

48) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
a) A(-1, 0, 3), B(1, 1, 2) e C(3, -2, 5)
b) A(4, 0, 1), B(5, 1, 3) e C(3, 2, 5)

49) Verificar se são unitários os seguintes vetores:
$\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

50) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

51) Determinar o valor de a para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

52) Dados os pontos A(1, 0, -1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

53) Determinar o valor de y para que seja eqüilátero o triângulo de vértices A(4, y, 4), B(10, y, -2) e C(2, 0, -4).

54) Obter o ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A(3, -1, 4) e B(1, -2, -3).

55) Obter um ponto P do eixo das cotas cuja distância ao ponto A(-1, 2, -2) seja igual a 3.

56) Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha
a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;
b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;
c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) (3, -5) b) (-5, 4) c) $(1, -\frac{1}{2})$ d) $(\frac{13}{2}, -9)$

2) a) $(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ b) $(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})$

3) a) (-4, 1) b) (2, 5) c) (-5, -30)

4) $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$

5) a) (-8, 11) b) (6, -8) c) (-9, 11) d) (-14, 19)

6) a) $\vec{v} = (3, 1)$ b) $\vec{v} = (-2, -\frac{2}{3})$

8) (4, -2)

10) b) $\vec{0}$

11) a) D(-2, 2) b) D(1, 2)

12) (2, 2), (0, -4) e (10, 6)

13) M(1, 0), N($\frac{7}{3}$, -$\frac{2}{3}$), P(9, -4)

14) a) C(0, $\frac{3}{2}$), D(2, 0), E(4, -$\frac{3}{2}$)

b) F($\frac{2}{3}$, 1), G($\frac{10}{3}$, -1)

15) P($\frac{3}{4}x_1 + \frac{x_2}{4}$, $\frac{3}{4}y_1 + \frac{y_2}{4}$)

16) a) $\sqrt{2}$ c) 10 e) $2\sqrt{13}$ g) $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) 5 d) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{34}$ h) 1

17) $\pm 2\sqrt{3}$

18) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

20) (6, 0) ou (-2, 0)

21) a) P(0, 5) b) P(-5, -10) c) P(x, 3x + 5), x ∈ R

22) a) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$

c) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ d) (0, 1) e (0, -1)

23) a) (-2, 6) b) $(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$ c) $(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}})$

27) Vértices da base inferior: (1, 3, 0), (1, 5, 0), (3, 3, 0) e (3, 5, 0)
Vértices da base superior: (1, 3, 4), (1, 5, 4), (3, 3, 4) e (3, 5, 4)

28) a) 2 c) 3 e) $\sqrt{13}$

b) 4 d) $2\sqrt{5}$ f) 5

29) B(2, -3, 2), C(3, -3, 2), D(3, -1, 2), E(3, -1, 5), F(2, -1, 5), G(2, -3, 5), H(3, -3, 5)

30) em relação a Oxyz: O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 5), D(3, 0,5) e O'(3,4,5)
em relação a O'x'y'z': O(-3, -4, -5), A(0, -4, -5), B(0, 0, -5), C(-3, 0, 0), D(0, -4, 0) e O'(0, 0, 0)

31) a) (5, 7, -9) b) (0, -6, 2) c) (-1, 7, 9) d) (5, -3, -14)

32) N(1, -2, -$\frac{6}{5}$)

33) D(-2, -6, 8)

34) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$, $c = 4$

35) a) $\vec{x} = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$

37) C(6, -1, 3) e D(1, -9, 7)

38) (4, -1, -6), (6, 1, 2) e (2, 3, 0)

39) (9, 7, 11)

40) a) $(0, -1, \frac{5}{2})$, (2, -3, 2), $(4, -5, \frac{3}{2})$

b) $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

41) a) (1, 2, 4) b) (9, -7, -4) c) (5, -4, 3)

42) a) (x, 0, 0) c) (x, y, 0) e) (x, 0, z) g) (0, 0, z)
b) (0, 0, z) d) (0, y, z) f) (x, y, 0) h) (0, y, 0)

43) são paralelos: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$

44) a = 9 e b = -15

45) D(0, 1, 0)

46) a) sim b) não c) sim

47) m = 5 e n = -13

48) a) D(1, -3, 6) b) D(2, 1, 3)

49) $\vec{v}$ é unitário

50) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

51) $\pm\frac{1}{3}$

52) 3 ou $-\frac{13}{5}$

53) ± 2

54) P(3, 0, 0)

55) P(0, 0, 0) ou P(0, 0, -4)

56) a) (-6, 3, 9) b) $(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}})$ c) $(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}})$

2 Norma e produto escalar; Projeção ortogonal

Solução

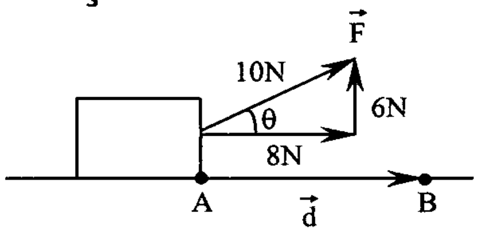

Figura 2.15

A Força $\vec{F}$ (Figura 2.15) é decomposta em $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, onde $8 = |\vec{F}|\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|\operatorname{sen}\theta$ e $\vec{d} = 20\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado por

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (produto escalar)

$W = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (20\vec{i} + 0\vec{j})$

$W = 160$ J

ou por

$W = |\vec{F}|\,|\vec{d}|\cos\theta$

$W = (10\text{N})(20\text{m})(\cos 36{,}9°)$

$W = 160$ J

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular
   a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$
   b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
   d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$
2) Sejam os vetores $\vec{u} = (2, a, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
3) Dados os pontos A (4, 0, -1), B (2, -2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que
   a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$
   b) $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$.
4) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.
5) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
6) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.
7) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.
8) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcular
   a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$
   b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$
   d) $(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} - 5\vec{v})$

9) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11) O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2.
Calcular:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$
f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

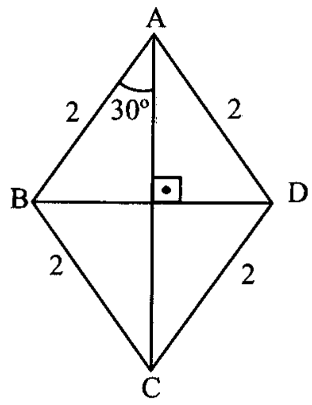

Figura 2.16

12) Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

13) Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$
b) $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14) Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)
b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16) Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17) Dados os pontos A(-1, 0, 5), B(2, -1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x - 3).

18) Provar que os pontos A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19) Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m - 1, 2m, 2) e C(1, 3, -1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20) Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4,1\ -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é 45° e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

22) Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Obter

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23) Sendo $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ e $|\vec{b}| = 8$, calcular $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.

24) Demonstrar que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$.

25) Determinar o ângulo entre os vetores

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

26) Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, -3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

27) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).

28) Calcular o valor de m de modo que seja 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, m + 1)$.

29) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-3, 1, n)$ e $\vec{k}$.

30) Se $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ e construir uma figura correspondente a estes dados.

31) Seja o cubo de aresta a representado na Figura 2.17. Determinar:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$

d) $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$

e) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$

f) $(\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$

g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;

h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

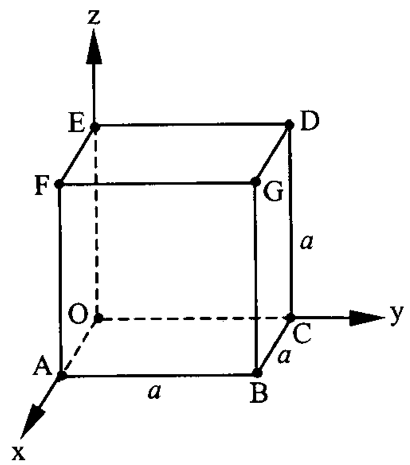

Figura 2.17

32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.

33) Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}| = 2$. Determinar $\vec{a}$.

34) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

35) Mostrar que existe um vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

36) Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60° com o vetor $\vec{i}$.

37) Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38) Determinar o vetor $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}| = 8$, forma ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}| = 2$, forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{21}$.

40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$

c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 5, 4)$

d) $\vec{u} = (3, 1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -3, 1)$

43) Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

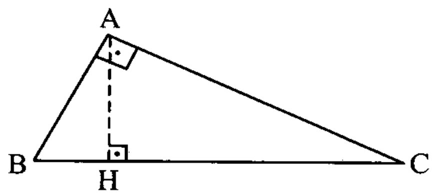

Figura 2.18

44) Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam

a) paralelos; b) ortogonais.

45) Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores

a) $4\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $(-2, 3)$ c) $(-1, -1)$

46) Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

47) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores

a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, -2)$

b) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$

48) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ c) $\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

49) Determinar o valor de a para que seja 45 ° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

50) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3)$ c) $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5)$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -2 b) 21 c) -4 d) 4

2) $a = \frac{5}{8}$

3) a) (3, 6, -9) b) $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$

4) (-6, 3, -9)

5) (0, 3, 4) ou (0, 3, -4)

6) (2, 0, -1)

7) $\vec{x} = (2, -3, 4)$

8) a) 7 b) 38 c) –4 d) -181

9) -19

10) 200 e -200

11) a) 0 b) 2 c) –2 d) 2 e) 4 f) -4

12) $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13) a) 37 b) $\sqrt{50}$

15) -5

16) 3 ou -6

17) $x = \frac{25}{2}$

18) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

19) $m = 1$ e $\frac{\sqrt{30}}{2}$

20) $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

21) $(1, -1, \sqrt{2})$ ou $(1, -1, -\sqrt{2})$

22) a) Dentre os infinitos possíveis: (1, 1, -1)

b) Um deles: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

c) Um deles: $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$

23) 10 e 10

25) a) 120° b)150°

26) 45° e 135°

27) $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$, $\hat{C} \cong 72°2'$

28) 0 ou -18

29) $\sqrt{30}$

30) $\text{arc cos } \frac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31) a) 0 c) 0 e) a^2 g) $\text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 d) $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ f) (a^3, a^3, a^3) h) $\text{arc cos } (\frac{1}{3}) \cong 70°31'$

32) $\alpha = \text{arc cos } (\frac{6}{7}) \cong 31°$ $\beta = \text{arc cos } (-\frac{2}{7}) \cong 107°$

$\gamma = \text{arc cos } (\frac{3}{7}) \cong 65°$

33) $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34) Não, $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35) $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

37) $\vec{a} = (-2\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5})$

38) a) $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ b) $(0, 1, \sqrt{3})$

39) $(-2, 1, 4)$

40) $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41) $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42) a) $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0, -2)$

c) $\vec{v}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 5, 4)$

d) $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43) a) $m = 3$ b) $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ c) $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44) a) $\frac{8}{3}$ b) -6

45) a) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47) a) $\text{arc cos }(\frac{3}{5}) \cong 53°$ b) $\text{arc cos }(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108°$ c) $90°$

48) a) $\sqrt{2}$, $45°$ d) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos }(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 117°$

b) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos }(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26°$ e) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos }(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63°$

c) 3, $0°$

49) 3 ou $-\frac{1}{3}$

50) a) $\vec{v}_1 = (4, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

3 Produto vetorial

Uma Aplicação na Física

O produto vetorial é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Dentre algumas de suas aplicações pode-se citar o *torque*.

O torque é uma grandeza vetorial, representado por $\vec{\tau}$, e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

onde $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado.

Lembrando o cálculo do módulo do produto vetorial visto em (3) tem-se

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Exemplo

Calcular o torque sobre a barra $\overline{AB}$ (Figura 3.11), onde $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros), $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo z.

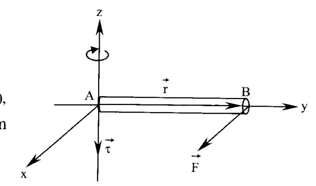

Figura 3.11

Solução

O vetor torque, para o caso desta figura, é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k})\text{mN}$$

ou

$$\vec{\tau} = (-20\vec{k})\text{mN}$$

A intensidade (módulo) do torque pode ser calculado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta = (2\text{m})(10\text{N})\,(\text{sen}\,90^\circ) = 20\text{mN}$$

ou por

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-20)^2} = 20\text{mN}$$

Observação

Caso a força $\vec{F}$ seja invertida (Figura 3.12), isto é, $\vec{F} = -10\vec{i}$ (em newtons), o torque é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (-10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (20\vec{k})\text{mN}.$$

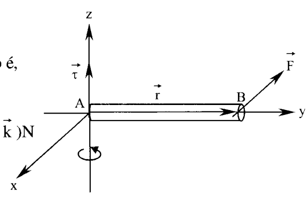

Figura 3.12

Problemas Propostos

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar

a) $|\vec{u} \times \vec{u}|$ e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$ i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$ f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$

c) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$ g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ k) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$ h) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ l) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

2) Efetuar

a) $\vec{i} \times \vec{k}$ e) $(3\vec{i}) \cdot (2\vec{j})$ i) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$

b) $\vec{j} \times (2\vec{i})$ f) $(3\vec{i}) \times (2\vec{j})$ j) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$

c) $(3\vec{i}) \times (2\vec{k})$ g) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{i})$ k) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$

d) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$ h) $\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$ l) $(\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{i}$

3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

4) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

5) Resolver os sistemas

a) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12 \end{cases}$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

7) Levando em conta a Figura 3.13, calcular

a) $\overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OD}$ d) $\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EA}$

b) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{FA}$ e) $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE})$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{AF}$

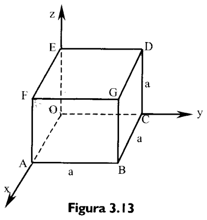

Figura 3.13

8) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.

b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

c) Mostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$

9) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

10) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, -1, 1) e C(4, 1, -2).

11) Dado $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

12) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, determinar

a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13) Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 2)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

14) Com base na Figura 3.14, calcular

a) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

b) $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$

c) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}|$

d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|$

e) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC}|$

f) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}|$

Figura 3.14

15) Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|2\vec{u} \times \vec{v}|$ b) $\left|\frac{2}{5}\vec{u} \times \frac{1}{2}\vec{v}\right|$

16) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 12$, $|\vec{u}| = 13$ e $\vec{v}$ é unitário.

17) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

18) Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(-1, 2, -2) e D (-2, 3, -1) é um paralelogramo e calcular sua área.

19) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são A(2, -4, 0) e B(1, -3, -1) e o ponto médio das diagonais é M (3, 2, -2). Calcular a área do paralelogramo.

20) Calcular o valor de m para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

21) Sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e 30° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;

c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

22) Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que suas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3, 4)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1, 2)$.

23) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, -1) e B(3, 1, 1).

24) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados

a) A(-4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, -1, 3)

b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0)

25) Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR.

a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 2)

b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1), R(2, 0, 2)

26) Calcular z, sabendo-se que A (2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.

27) Dados os pontos A(2, 1, -1) e B(0, 2, 1), determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.

28) Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, -2) são coplanares, calcular a área do quadrilátero ABCD.

29) Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são M(0, 1, 3), N(3, -2, 2) e P(1, 0, 2). Determinar a área do triângulo ABC.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) 0 d) $\vec{0}$ g) (-6, -20, 1) j) 0

b) $\vec{0}$ e) (-5, 0, -5) h) (8, -2, 13) k) 5

i) (8, -2, 13) l) 5

2) a) $-\vec{j}$ e) 0 i) $\vec{0}$

b) $-2\vec{k}$ f) $6\vec{k}$ j) $-\vec{i}$

c) $-6\vec{j}$ g) 0 k) $\vec{0}$

d) 1 h) 0 l) 1

3) D (-4, -1, 1)

4) $\vec{x} = (3, -1, 2)$

5) a) $\vec{x} = (1, -3, 0)$ b) $\vec{x} = (-4, 2, -6)$

6) Não existe $\vec{x}$ pois $\vec{u}$ não é ortogonal a $\vec{v}$.

7) a) $(-a^2, -a^2, a^2)$ c) $(0, 0, a^2)$ e) a^3

b) $(-a^2, -a^2, 0)$ d) $(-a^2, -a^2, -a^2)$ f) $\vec{0}$

9) Um deles: $(\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = (-12, -18, 9)$

10) Um deles: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -3, 10)$

11) Uma das infinitas soluções: $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$

12) a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

b) $(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}})$

13) $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

14) a) $2\sqrt{3}$ c) 0 e) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ d) 0 f) $2\sqrt{3}$

15) a) 16 b) $\frac{8}{5}$

16) 5 ou -5

17) a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10}$

18) $\sqrt{122}$

19) $2\sqrt{74}$

20) 0 ou 2

21) a) 6 b) 12 c) 24

22) $\sqrt{35}$

23) $\frac{\sqrt{65}}{3}$

24) a) $\sqrt{35}$ e $\frac{2\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{7}{2}$ e $\frac{7}{\sqrt{5}}$

25) a) $t(2, 2, 3), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ b) $t(1, 4, 6), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

26) 4 ou -4

27) C (0, 1, 0) ou C $(0, \frac{5}{2}, 0)$

28) $2\sqrt{61}$

29) $4\sqrt{2}$

4 Produto misto

Portanto, o volume do tetraedro é

$$V_t = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 \text{ u.v.}$$

b) Observemos na Figura 4.4 que a altura do tetraedro traçada do vértice D é a própria altura do paralelepípedo de base determinada por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Como o volume V do paralelepípedo é dado por

$$V = (\text{área da base})\ (\text{altura})$$
$$= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot h$$

tem-se

$$h = \frac{V}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Mas,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -6, -10)$$

e, portanto,

$$h = \frac{36}{|(2, -6, -10)|} = \frac{36}{\sqrt{4+36+100}} = \frac{36}{\sqrt{140}} = \frac{18}{\sqrt{35}} \text{ u.c.}$$

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular
   a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

2) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular
   a) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ c) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ d) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

3) Sabendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$, calcular
   a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$ c) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times \vec{v})$
   b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ d) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (3\vec{v})$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

4) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}) = 2$ e $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = 5$, calcular
   a) $(\vec{u}, \vec{x}, -\vec{w})$ b) $(3\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x})$ c) $(2\vec{u} + 4\vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ d) $(5\vec{u} - 3\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{x})$

5) Verificar se são coplanares os vetores
   a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$
   b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$

6) Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores
   a) $\vec{u} = (2, -1, k)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (k, 3, k)$
   b) $\vec{u} = (2, k, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, k)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$

7) Verificar se são coplanares os pontos
   a) A(1, 1, 0), B(-2, 1, -6), C(-1, 2, -1) e D(2, -1, -4)
   b) A(2, 1, 2), B(0, 1, -2), C(1, 0, -3) e D(3, 1, -2)

8) Para que valor de *m* os pontos A(*m*, 1, 2), B(2, -2, -3), C(5, -1, 1) e D(3, -2, -2) são coplanares?

9) Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

10) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

11) Calcular o valor de *m* para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = (0, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-4, 2, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, m, -2)$ seja igual a 33. Calcular a altura deste paralelepípedo relativa à base definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

12) O ponto A(1, -2, 3) é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B(2, -1, -4), C(0, 2, 0) e D(-1, *m*, 1). Determinar o valor de *m* para que o volume deste paralelepípedo seja igual ao 20 u.v. (unidades de volume).

13) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(-1, 0, 1) e C(3, 2, -2), determinar o ponto D do eixo Oz para que o volume do paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ seja 25 u.v.

14) Representar graficamente o tetraedro ABCD e calcular seu volume, sendo A(1, 1, 0), B(6, 4, 1), C(2, 5, 0) e D(0, 3, 3).

15) Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo A (2, 0, 0), B (2, 4, 0), C(0, 3, 0) e P(2, -2, 9). Qual a altura do tetraedro relativa ao vértice P?

16) Sabendo que os vetores $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (m, -1, 3)$ e $\overrightarrow{AD} = (-3, 1, -2)$ determinam um tetraedro de volume 3, calcular o valor de *m*.

17) Três vértices de um tetraedro de volume 6 são A(-2, 4, -1), B(-3, 2, 3) e C(1, -2, -1). Determinar o quarto vértice D, sabendo que ele pertence ao eixo Oy.

18) Calcular a distância do ponto D(2, 5, 2) ao plano determinado pelos pontos A(3, 0, 0), B(0, -3, 0) e C(0, 0, 3).

19) Sendo $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular
   a) $|\vec{u} + \vec{v}|$
   b) $|\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u})|$
   c) o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

20) Determinar m e n para que se tenha
a) $(m, n, 2) \cdot (4, -1, 3) = -2$
b) $(m, n, 2) \times (4, -1, 3) = (8, -1, -11)$
c) $(m, n, 2) \cdot ((3, 1, 2) \times (0, 1, -1)) = 9$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -29 b) -29
2) a) 5 b) 5 c) -5 d) -5
3) a) -2 b) 2 c) 2 d) -6 e) -4 f) -2
4) a) 2 b) –36 c) 24 d) -10
5) a) Não b) Sim
6) a) 6 b) 2 ou -3
7) a) Sim b) Não
8) $m = 4$
9) 1
10) 17 e $\frac{17}{\sqrt{30}}$
11) $m = 4$ ou $m = -\frac{17}{4}$ e $h = \frac{33}{\sqrt{89}}$
12) 6 ou 2
13) D(0, 0, -10) ou D(0, 0, 15)
14) $\frac{19}{2}$ u.v.
15) 12 u.v. e 9 u.c.
16) $m = -\frac{17}{2}$ ou $m = \frac{19}{2}$
17) D(0, 2, 0) ou D(0, -4, 0)
18) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ u.c.
19) a) $\sqrt{13}$ b) $6\sqrt{3}$ c) 108 u.v.
20) a) $n = 4m + 8$ b) $m = 3$ e $n = 2$ c) $n = m + 1$

MAKRON
Books

5

A Reta

Equação Vetorial da Reta

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto P(x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 5.1), isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \qquad (1)$$

para algum real t.

De (1), vem

$$P - A = t\vec{v}$$

ou

$$P = A + t\vec{v} \qquad (2)$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \qquad (3)$$

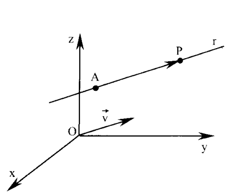

Figura 5.1

Qualquer uma das equações (1), (2) ou (3) é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

Exemplo

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial, de acordo com (3):