

Limite e Continuidade

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br



Informações sobre os conteúdos de limite e continuidade

- 1 Introdução ao conceito de limite
- 2 Função contínua
- 3 Definição de limite
- 4 Propriedades
- 5 Limites laterais
- 6 Limites fundamentais
- 7 Limites envolvendo o infinito

Introdução

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "salto" em p .

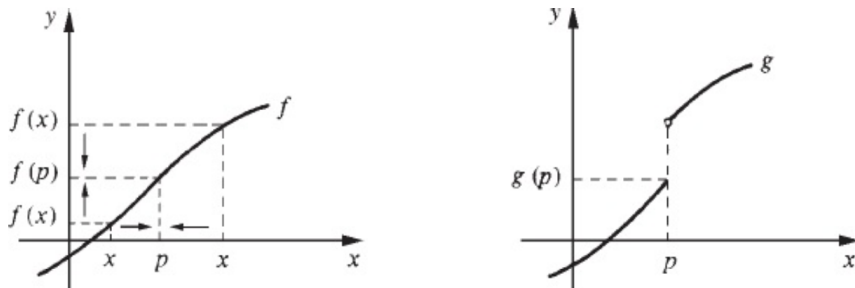


Figura 1: Noção intuitiva de continuidade.

Exemplo

Considieremos as funções f e g dadas por

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (1)$$

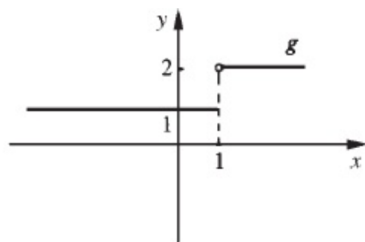
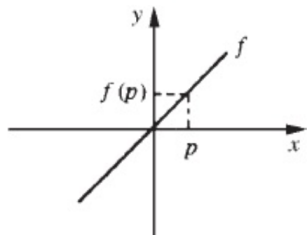


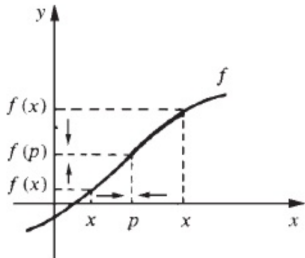
Figura 2: Exemplo 1.

Noção intuitiva de limite

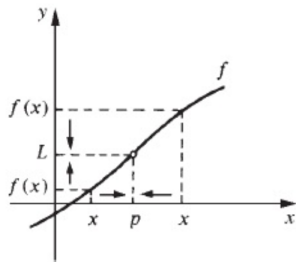
Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p , é igual a L que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \quad (2)$$

significa que quando x tende a p , $f(x)$ tende a L .



Quando x tende a p , $f(x)$
tende a $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$



Quando x tende a p , $f(x)$ tende
a L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$

Figura 3: Noção intuitiva de limite.

Example

Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$.

Example

Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Continuidade definida por limite

Intuitivamente, é razoável esperar que se f estiver definida em p e for contínua em p , então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, e reciprocamente.

$$f \text{ contínua em } p \iff \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p). \quad (3)$$

O limite em p pode existir, mas f não ser contínua

Veremos, ainda, que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p , então L será aquele valor que f deveria ter em p para ser contínua neste ponto.

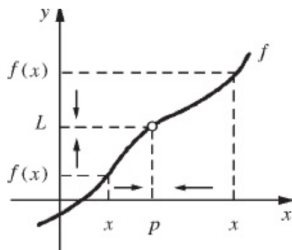


Figura 4: L é o valor que f deveria ter em p para ser contínua em p .

f não está definida em p .

Derivada como um limite

Com toda certeza

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \quad (4)$$

é o limite mais importante que ocorre na matemática, e seu valor, quando existe, é indicado por $f'(p)$ (leia: f linha de p) e é denominado derivada de f em p :

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \quad (5)$$

Reta secante e tangente

Este limite aparece de forma natural quando se procura definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. O quociente $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, chamado às vezes de razão incremental, nada mais é do que o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos $M = (p, f(p))$ e $N = (p+h, f(p+h))$ do gráfico de $y = f(x)$

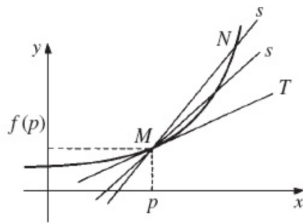
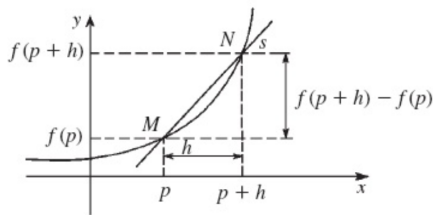


Figura 5: Reta secante e tangente ao gráfico de f .

Exemplos

Example

Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(1)$.

Example

Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(x)$.

Example

Seja $f(x) = x^3$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(2)$.

Definição de função contínua

Sejam f e g funções de gráficos

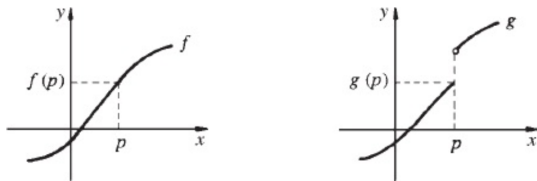


Figura 6: Exemplo de função contínua e descontínua em p .

Observe que f e g se comportam de modo diferente em p ; o gráfico de f não apresenta "salto" em p , ao passo que o de g , sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

Definição de função contínua

Veja as situações apresentadas a seguir.

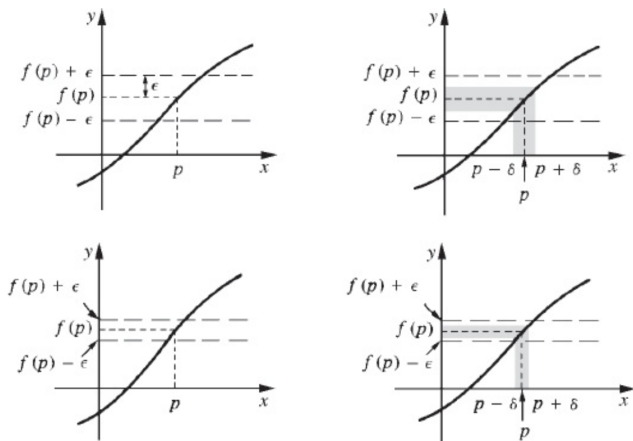


Figura 7: Exemplo de função contínua em p .

Definição de função contínua

Assim, para que a função f seja contínua em p , tem-se:

Definition

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x no domínio de f .

ou de forma equivalente

Definition

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ). tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \quad (6)$$

Intervalo por meio de módulo

Sabemos que

$$|x - p| < \delta \iff p - \delta < x < p + \delta \quad (7)$$

e

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \iff f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \quad (8)$$

Definição de função contínua em um ponto p

Definition

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

$$f \text{ contínua em } p \iff \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0, \\ \text{tal que, para todo } x \in D_f, \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow \\ f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$.

Dizemos simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.

Exemplos

Example

Prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $p = 1$.

Example

A função constante $f(x) = \kappa$ é contínua em todo p real.

Example

A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua.

Definição de limite

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f . Consideremos as situações a seguir:

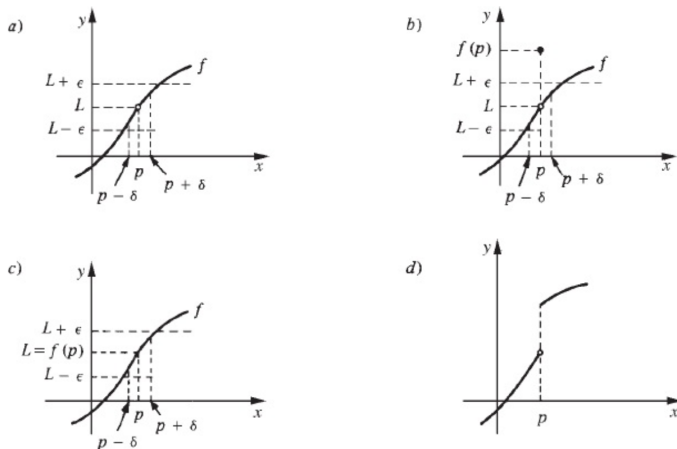


Figura 8: Diferentes situações para o cálculo do limite.

Definition

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (10)$$

Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$. Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases} \quad (11)$$

Observações importantes

- Suponhamos f definida em p . Comparando as definições de limite e continuidade, resulta

$$f \text{ contínua em } p \iff \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p). \quad (12)$$

- O limite de f em p não depende do valor (caso f esteja definida em p) que f assume em p , mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p . Quando estivermos interessados no limite de f em p , basta olharmos para os valores que f assume num "pequeno" intervalo aberto contendo p ; o conceito de limite é um conceito local.
- Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$, $x \neq p$, e se $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ também existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x). \quad (13)$$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow p} k$ (k constante).

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1, \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Propriedades dos limites

Sejam $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$, então

- $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$.
(O limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas.)
- $\lim_{x \rightarrow p} kf(x) = kL_1$ (k constante).
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = L_1.L_2$.
(O limite de um produto é igual ao produto dos limites dos fatores.)
- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 8)$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$.

Example

Sejam f , g contínuas em p e k uma constante. Então $f + g$, $k.f$ e $f.g$ são contínuas em p ; $\frac{f}{g}$ também será contínua em p , desde que $g(p) \neq 0$.

Example

Toda função polinomial é contínua.

Example

Toda função racional é contínua.

Exemplos

Example

$f(x) = \frac{3x^5+6x+1}{x^2-3}$ é contínua em todo $p \neq \pm\sqrt{3}$.

Example

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = 0. \quad (14)$$

Example

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(p+h) = L. \quad (15)$$

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0. \quad (16)$$

Limites laterais à direita

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases} \quad (17)$$

O número L , quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f , em p .

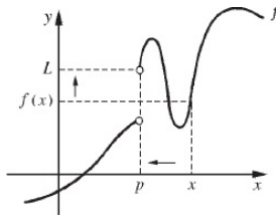


Figura 9: Limite lateral à direita.

É uma consequência imediata das definições de limite e de limites laterais que se $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ e se, para algum $r > 0$, $f(x) = g(x)$ em $]p, p + r[$, então $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1, \\ 2x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Theorem

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f . Então, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) =$

$$L \iff \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ e \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Limites laterais - Observações

- 1 Se $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existirá.
- 2 Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e se, em p , um dos limites laterais não existir, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existirá.
- 3 Se existirem reais $r > 0$ e b tais que $]p, b[\subset D_f$ e $]p - r, p[\cap D_f = \emptyset$, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $]b, p[\subset D_f$ e $]p, p + r[\cap D_f = \emptyset$, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

Example

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

Limite de função composta

Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \subset D_g$, em que Im_f é a imagem de f , ou seja, $Im_f = \{f(x) | x \in D_f\}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)). \quad (19)$$

Supondo que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ é razoável esperar que

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow a} g(u), \quad (20)$$

desde que $\lim_{u \rightarrow a} g(u)$ exista. Veremos que (20) se verifica se g for contínua em a ou se g não estiver definida em a .

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$.

Example

Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow p} [f(x)]^2 = L^2$.

Teorema do confronto

Theorem (do confronto)

Sejam f , g e h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad (21)$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x) \quad (22)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L. \quad (23)$$

Exemplos

Example

Seja f uma função e suponhamos que para todo x

$$|f(x)| \leq x^2. \quad (24)$$

- (a) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (b) f é contínua em 0? Por quê?

Example

Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A tais que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A , em que $M > 0$ é um número real fixo. Prove que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0. \quad (25)$$

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot g(x)$ em que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Theorem

As funções \sin e \cos são contínuas.

O limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Theorem

A partir da propriedade

$$0 < \sin x < x < \tan x \quad (26)$$

temos o seguinte limite especial:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (27)$$

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Limites no infinito

Nosso objetivo é dar um significado para os símbolos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad (28)$$

(leia: limite de $f(x)$, para x tendendo a mais infinito, é igual a L) e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (29)$$

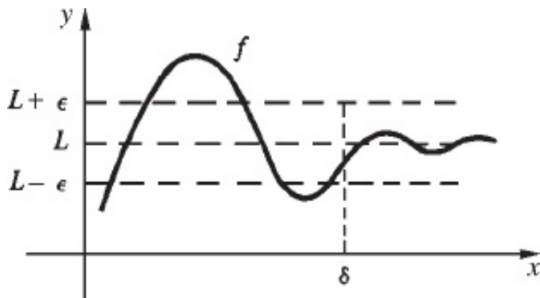


Figura 11: Limite de $f(x)$ para $x \rightarrow +$.

Definição de limites no infinito

Definition (Limite para quando $x \rightarrow +\infty$)

Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \end{cases} \quad (30)$$

Definition (Limite para quando $x \rightarrow -\infty$)

Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $] -\infty, a[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \end{cases} \quad (31)$$

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ e justifique.

Teorema - Mudança de variável na função composta

Theorem

Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}_f \subset D_g$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

- Se g for contínua em a , então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow a} g(u). \quad (32)$$

- Se g não estiver definida em a e se $\lim_{u \rightarrow a} g(u)$ existir, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow a} g(u). \quad (33)$$

Theorem

Seja k uma constante e suponhamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1$. Então

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = L + L_1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = kL$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = LL_1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L_1}$, desde que $L_1 \neq 0$.

Observamos que os teoremas acima continuam válidos se substituirmos $x \rightarrow +\infty$ por $x \rightarrow -\infty$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$, no qual $n > 0$ é um número natural dado.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$.

Definition

Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$$

Limites laterais infinitos

Definition

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \delta > 0, \text{ com } p + \delta < b, \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases} \quad (34)$$

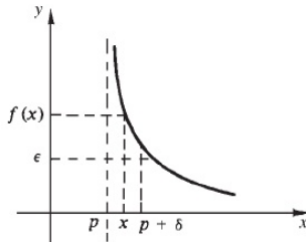


Figura 12: Limite lateral com resultado no infinito.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ e justifique.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ e justifique.

Teorema - operações com o infinito

Theorem

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty \end{array} \right. \quad (35)$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \text{ } L \text{ real,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty \text{ se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = -\infty \text{ se } L < 0 \end{array} \right. \quad (36)$$

Para mais detalhes sobre as operações com o símbolo do infinito, veja o livro de Hamilton Luiz Guidorizzi - Um curso de Cálculo Vol. 1.

Operações com o infinito e indeterminações

Os teoremas estudados nos sugere como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$: $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $L.(+\infty) = +\infty$ se $L > 0$, $L.(+\infty) = -\infty$ se $L < 0$, $L.(-\infty) = -\infty$ se $L > 0$, $L.(-\infty) = +\infty$ se $L < 0$, $L + (+\infty) = +\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $L + (-\infty) = -\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $+\infty.(+\infty) = +\infty$, $(-\infty).(-\infty) = +\infty$ e $+\infty.(-\infty) = -\infty$. Indeterminações: $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$.

Example

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Prove que

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty. \quad (37)$$

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$.

Example

Sejam f e g duas funções tais que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L$, $L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow g(x)} = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que, nestas condições, ou $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 1}$.

Example

Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Prove

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.