Axioma II$_3$. *Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.*

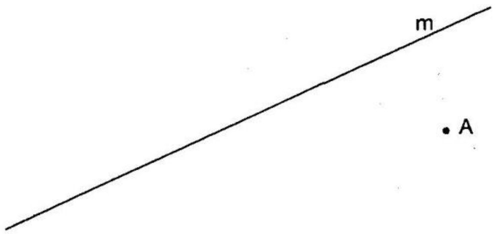


Figura 1.7

Exercícios

1. Sobre uma reta marque quatro pontos A, B, C e D, em ordem, da esquerda para a direita. Determine:

a) $AB \cup BC$	e) $S_{AB} \cap S_{BC}$
b) $AB \cap BC$	f) $S_{AB} \cap S_{AD}$
c) $AC \cap BD$	g) $S_{CB} \cap S_{BC}$
d) $AB \cap CD$	e) $S_{AB} \cup S_{BC}$

2. Quantos pontos comuns a pelo menos duas retas pode ter um conjunto de 3 retas do plano? E um conjunto de 4 retas do plano?

3. Prove o item (b) da proposição (1.4).

4. Prove a afirmação feita, no texto, de que existem infinitos pontos em um segmento.

5. Sejam $P = \{a, b, c\}$, $m_1 = \{a, b\}$, $m_2\{a, c\}$ e $m_3 = \{b, c\}$. Chame P de plano e m_1, m_2 e m_3 de retas. Verifique que nesta "geometria" vale o axioma I$_2$.

Definição: Um subconjunto do plano é *convexo* se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente contido nele.

6. Os exemplos mais simples de conjuntos convexos são o próprio plano e qualquer semi-plano. Mostre que a interseção de dois semi-planos é um convexo.

7. Mostre que a interseção de n semi-planos é ainda um convexo.

8. Mostre, exibindo um contra-exemplo, que a união de convexos pode não ser um convexo.

9. Três pontos não colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos sendo que quaisquer três deles são não colineares?

10. Repita o exercício anterior para o caso de 6 pontos.

PROBLEMAS

1. Discuta a seguinte questão utilizando apenas os conhecimentos geométricos estabelecidos, até agora, nestas notas: "Existem retas que não se interceptam?"

2. Prove que, se uma reta intercepta um lado de um triângulo e não passa por nenhum de seus vértices, então ela intercepta também um dos outros dois lados.

3. Repita o exercício 2 para o caso de 5 e 6 retas. Faça uma conjectura de qual será a resposta no caso de n retas.

4. Mostre que não existe um exemplo de uma "geometria" com 6 pontos, em que sejam válidos os axiomas I_1 e I_2 e em que todas as retas tenham exatamente 3 pontos.

5. Se C pertence a S_{AB} e $C \neq A$, mostre que: $S_{AB} = S_{AC}$, que $BC \subset S_{AB}$ e que $A \notin BC$.

6. Demonstre que a interseção de convexos é ainda um convexo.

7. Mostre que um triângulo separa o plano em duas regiões, uma das quais é convexa.

8. Generalize os exercícios 11 e 12 para o caso de n pontos.

9. Podem existir dois segmentos distintos tendo dois pontos em comum? E tendo exatamente dois pontos em comum?

COMENTÁRIO

Para se aprender a jogar algum jogo, tal como damas, firo, xadrez, etc., temos que, inicialmente, aprender as suas regras. Um pai tentando ensinar seu filho a jogar damas dirá algo como: "Este é o tabuleiro de damas e estas são as pedras com que se joga", "São 12 para cada jogador", "As pedras são arrumadas no tabuleiro assim.", e arrumará as pedras para o filho. Aí já terá recebido uma enxurrada de perguntas do tipo: "Por que as pedras só ficam nas casas pretas?", "Por que só são doze pedras?", "Eu acho mais bonitas as pedras brancas nas casas pretas e as pretas nas casas brancas, por que não é assim?", etc.

Todas estas perguntas têm uma única resposta: Porque esta é uma das regras do jogo. Se alguma delas for alterada, o jogo resultante, embora possa ser também muito interessante, não será mais um jogo de damas.

Observe que, ao ensinar um tal jogo, você dificilmente deter-se-ia em descrever o que são as pedras. O importante são as regras do jogo, isto é, a maneira de arrumar as pedras no tabuleiro, a forma de movê-las, a forma de "comer" uma pedra do adversário, etc. Qualquer criança, após dominar o jogo, improvisará tabuleiros com riscos no chão e utilizará tampinhas de garrafa, botões, cartões, etc., como pedras.

Ao criar-se um determinado jogo é importante que suas regras sejam suficientes e consistentes. Por *suficiente* queremos dizer que as regras devem estabelecer o que é permitido fazer em qualquer situação que possa vir a ocorrer no desenrolar de uma partida do jogo. Por *consistente* queremos dizer que as regras não devem contradizer-se, ou sua aplicação levar a situações contraditórias.

Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.

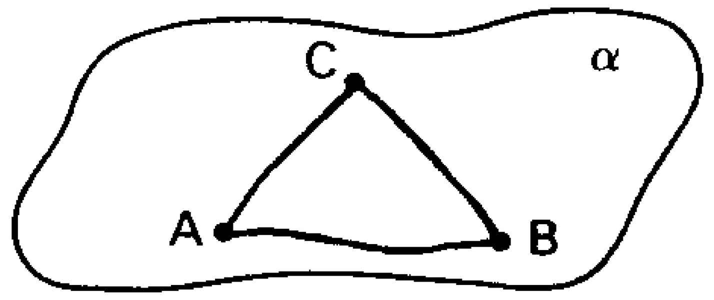
De fato, existem várias geometrias distintas dependendo do conjunto de axiomas fixado. A geometria que iremos estudar nestas notas é chamada de Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides que a descreveu no seu livro, denominado "Elementos".

b) *Do plano*

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

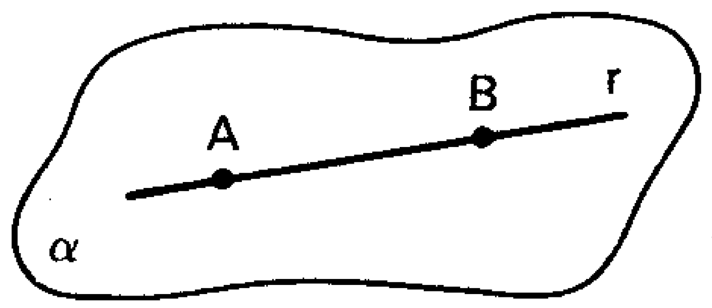
Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano α que indicamos por (A, B, C).

O plano α é o único plano que passa por A, B e C.



8. *Postulado da inclusão*

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.



$$(A \neq B,\ r = \overleftrightarrow{AB},\ A \in \alpha,\ B \in \alpha) \implies r \subset \alpha$$

Dados dois pontos distintos A e B de um plano, a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano.

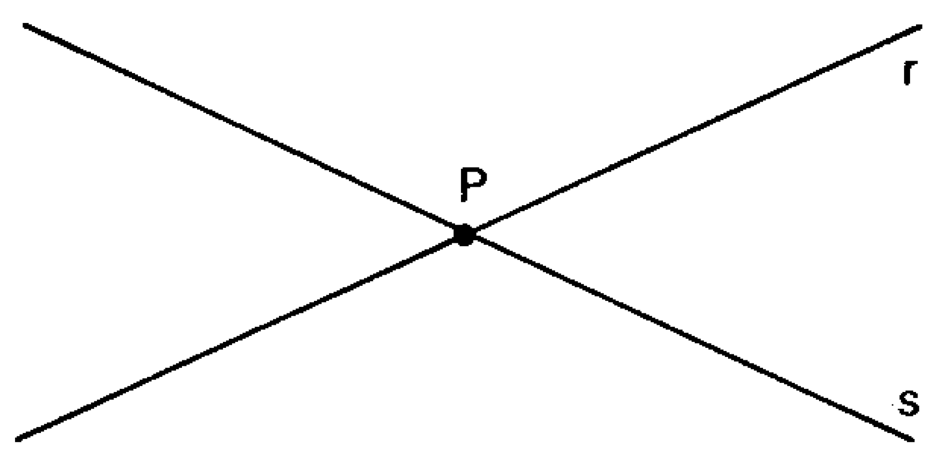
9. Pontos *coplanares* são pontos que pertencem a um mesmo plano.
Figura é qualquer conjunto de pontos.
Figura plana é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano.
A *Geometria Plana* estuda as figuras planas.

10. *Retas concorrentes*

a) *Definição*

Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm *um único* ponto comum.

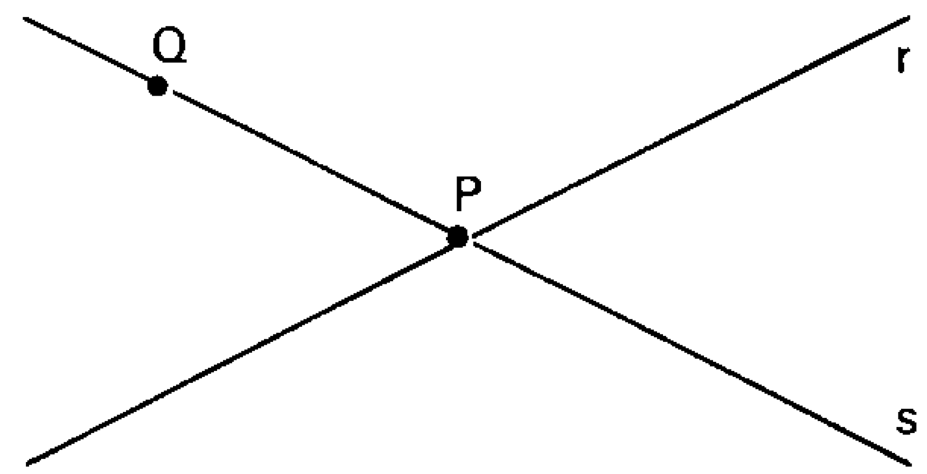
$$r \cap s = \{P\}$$



b) *Existência*

Usando o postulado da existência (item 4), tomemos uma reta r, um ponto P em r $(P \in r)$ e um ponto Q fora de r $(Q \notin r)$.

Os pontos P e Q são distintos, pois um deles pertence a r e o outro não.



Usando o postulado da determinação (item 7a), consideremos a reta s determinada pelos pontos P e Q $(s = \overleftrightarrow{PQ})$.

As retas r e s são distintas, pois se coincidissem o ponto Q estaria em r (e ele foi construído fora de r), e o ponto P pertence às duas. Logo,

r e s são concorrentes.

EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Por um ponto passam infinitas retas.
b) Por dois pontos distintos passa uma reta.
c) Uma reta contém dois pontos distintos.
d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Três pontos distintos são sempre colineares.
b) Três pontos distintos são sempre coplanares.
c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a tal que $A \in a$ e $B \in a$.

b) Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s, se P é distinto de Q, e P e Q pertencem às retas r e s, então $r = s$.

c) Qualquer que seja uma reta r, existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B, com $A \in r$ e $B \in r$.

d) Se $A = B$, existe uma reta r tal que $A, B \in r$.

4. Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

5. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.

b) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.

c) Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

CAPÍTULO II

Segmento de Reta

Conceitos

11. A noção *estar entre* é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:

Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

1) Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;

2) Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;

3) Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P;

e ainda

4) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.