Aula 10

Matemática Elementar

Funções Trigonométricas

21 de novembro de 2018

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

Índice

Apresentação da Aula

A trigonometria é estudada desde os gregos e sua motivação inicial era determinar os seis elementos principais do triângulo (seus lados e ângulos) quando conhecidos alguns deles.

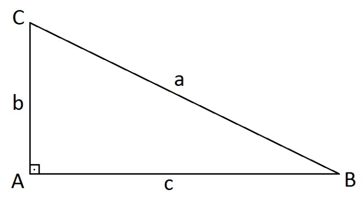
Com a criação do Cálculo Infinitesimal veio a necessidade da criação de funções trigonométricas definidas em $\mathbb{R}$, conforme estudaremos nessa aula.

Tais funções ganharam notoriedade quando, em 1822, Joseph Fourier provou que toda função periódica é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a\cos(nx) + b\text{sen}(nx)$. Tal descoberta deu origem a toda uma área da matemática, a Análise de Fourier. Além disso, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

Definição

Definição 1

Em um triângulo retânglulo *ABC* como na figura abaixo, define-se o <u>cosseno</u> (cos) e o <u>seno</u> (sen) dos ângulos agudos do triângulo:



$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}, \quad \text{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}},$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \text{sen}\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Propriedades

As relações definidas dessa maneira são únicas para cada ângulo em decorrência da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes. Portanto, calcula-se o seno e o cosseno de um ângulo independentemente do triângulo retângulo que o contém.

Proposição 2

- O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complementar e vice-versa. Daí a palavra "cosseno"(seno do complemento);
- O seno e o cosseno são números compreendidos entre 0 e 1 por serem razões entre um cateto pela hipotenusa de um triângulo retângulo.

Relação Fundamental da Trigonometria

Proposição 3 (Relação Fundamental da Trigonometria)

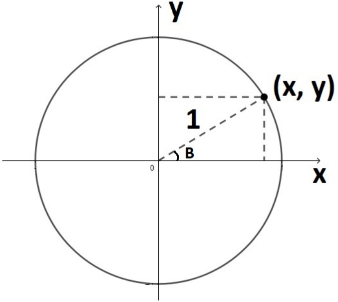
Seja $\widehat{B}$ um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a e os catetos, b e c. Então:

$$\text{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1.$$

Atividade Online

Atividade 19 – Razões Trigonométricas em Triângulos Retângulos
Atividade 20 – Como Calcular a Medida de um Lado em Triângulos Retângulos
Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

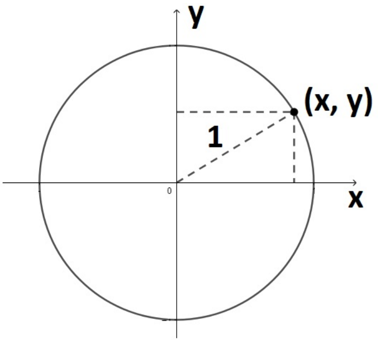
A relação fundamental $\text{sen}^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1$ sugere que os pontos do plano cartesiano $\left(\cos \widehat{B}, \text{sen} \widehat{B}\right)$ pertencem a uma circunferência de raio 1, como mostra a figura abaixo.



Dessa forma, sendo $\widehat{B}$ o ângulo medido a partir do eixo positivo de x e tomando o sentido anti-horário como sentido positivo, os pontos (x, y) do círculo acima são tais que $x = \cos \widehat{B}$ e $y = \text{sen} \widehat{B}$.

O Círculo Trigonométrico

Agora, a fim de definirmos as funções trigonométricas como funções reais, considere a seguinte função, chamada de função de Euler: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $E(t)$ é o ponto (x, y) do círculo trigonométrico obtido após “enrolarmos”, com corda de comprimento t, o círculo trigonométrico iniciando no ponto $(1, 0)$ e tomando como sentido positivo o sentido anti-horário.



O Círculo Trigonométrico

Definição 4

As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \, .$$

Em outras palavras, $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ são, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Propriedades

Considere as seguintes definições acerca de funções reais.

Definição 5

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe $T \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ao menor número $T > 0$ que faz a propriedade anterior ser satisfeita, damos o nome de período da função f.

Propriedades

Considere as seguintes definições acerca de funções reais.

Definição 5

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe $T \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ao menor número $T > 0$ que faz a propriedade anterior ser satisfeita, damos o nome de período da função f.

Como uma volta completa no círculo trigonométrico tem 2π de comprimento, é fácil ver que a função seno e cosseno são periódicas de período 2π.

Propriedades

Definição 6

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se for o caso de $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que f é ímpar.

Definição 6

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se for o caso de $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que f é ímpar.

Proposição 7

A função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Propriedades

Segue imediatamente da definição das funções trigonométricas que a relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale para todo $t \in \mathbb{R}$.
Além disso, valem as seguintes igualdades para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(t+\pi) &= -\cos t, & \operatorname{sen}(t+\pi) &= -\operatorname{sen} t,\\
\cos\left(t+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}\left(t+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos t,\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-t\right) &= \operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-t\right) &= \cos t,\\
\cos(\pi-t) &= -\cos t, & \operatorname{sen}(\pi-t) &= \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Atividade Online

Atividade 21 – Valores Trigonométricos de Ângulos Especiais
Atividade 22 – Use a Identidade Trigonométrica Fundamental
Atividade 23 – Resolva Equações Senoidais (Básico)

Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

Exemplo 8

O gráfico da função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por:

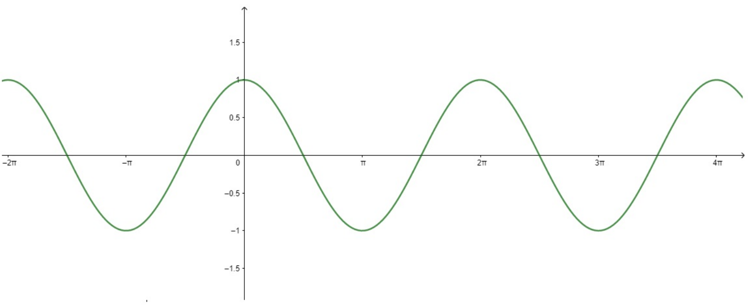
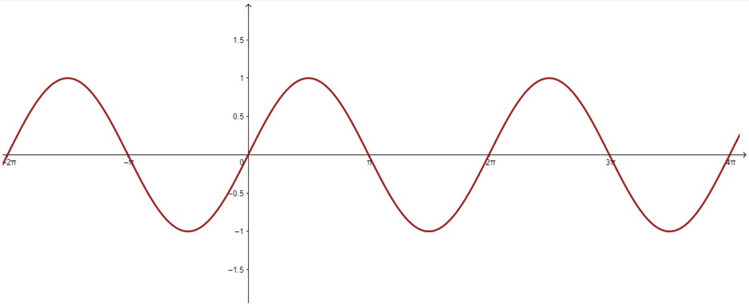


Gráfico da Função Seno

Exemplo 9

O gráfico da função $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por:



Atividade 24 - Gráfico de Funções Senoidais

Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

Definições

Definição 10

Define-se, através das funções seno e cosseno, as funções trigonométricas com as seguintes leis de formação:

- $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, <u>tangente</u>;
- $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, <u>cotangente</u>;
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, <u>secante</u>;
- $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, <u>cossecante</u>.

Os domínios dessas funções não contêm o conjunto dos valores de x que zeram seus respectivos denominadores.

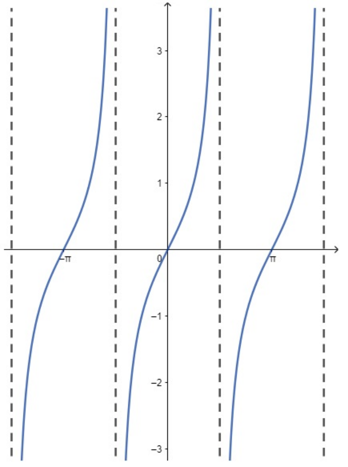
Por exemplo, o maior subconjunto dos reais no qual podemos definir as funções tangente e secante é

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Gráfico da Função Tangente

Exemplo 11

O gráfico da função $\tan : \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é:



Propriedades da Função Tangente

Proposição 12

Valem as seguintes propriedades acerca da função tangente:

- Embora não seja definida para todo número real, a função tangente pode ser considerada uma função periódica de período π em todo o seu domínio, pois $\tan(x + \pi) = \tan x$;
- Para todo par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em uma reta não vertical, com $x_1 \neq x_2$, se α é o ângulo formado pela reta e o eixo x, então

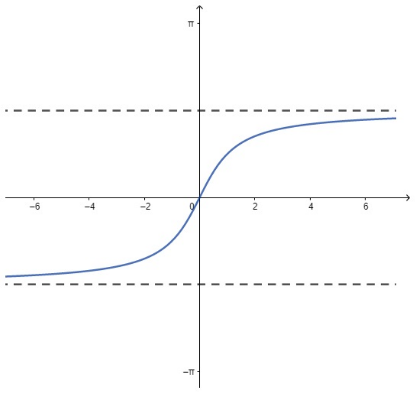
$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- Ao definirmos $tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, obtemos uma bijeção. Assim, o intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.

A Função Inversa da Tangente

Exemplo 13

Como $tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é bijetiva, então essa função possui inversa, que chamamos de arco tangente e denotamos por $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Seu gráfico é



Atividade Online

Atividade 25 – Razões Trigonométricas Recíprocas

Atividade 26 – Problemas com Triângulos Retângulos

Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

Proposição 14

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \mathrm{sen}\alpha \cdot \mathrm{sen}\beta$$

e

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Proposição 14

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

e

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Da paridade das funções seno e cosseno seguem que:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

e

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Além disso, temos os casos particulares

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad \text{e} \quad \text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha.$$

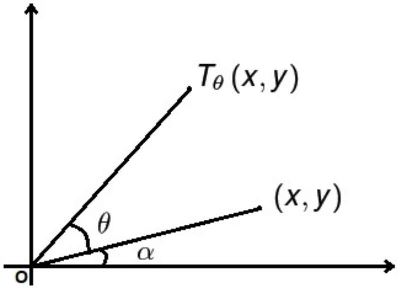
As fórmulas acima valem para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Rotação de Pontos no Plano Cartesiano

Considere o ponto $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e chame de α o ângulo formado pelo segmento OA com o eixo positivo de x. A função $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T_\theta\,(x, y) = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta, x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta)$$

é a rotação de ângulo θ do ponto $A = (x, y)$ em torno da origem.



Atividade Online

Atividade 27 – Uso das Identidades Trigonométricas de Soma de Ângulos
Atividade 28 – Calcule Valores Trigonométricos a Partir de Identidades de Soma de Ângulos
Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

Teorema 15 (Lei dos Cossenos)

Seja ABC um triângulo com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Então

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

A Lei dos Cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Note que, se $\widehat{B}$ é um ângulo reto, então $\cos \widehat{B} = 0$ e b será a hipotenusa do triângulo.

Lei dos Senos

Teorema 16 (Lei dos Senos)

Seja ABC um triângulo com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ *e* $c = \overline{AB}$. *Então*

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}}$$

A Lei dos Senos nos diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante.

Lei dos Senos

Teorema 16 (Lei dos Senos)

Seja ABC um triângulo com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Então

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}}$$

A Lei dos Senos nos diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante.

As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos.

Atividade Online

Atividade 29 – Problemas com Triângulos Gerais

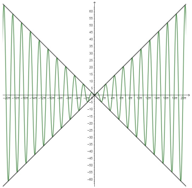
Veja o desempenho na Missão Trigonometria.

1. Na Definição 1 definimos seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo. Como você definiria, com os lados de um triângulo retângulo, as demais relações trigonométricas da Definição 10?
2. Saber para quais valores t são válidas algumas equações envolvendo equações trigonométricas é muito importante. Determine o conjunto solução de cada uma das equações abaixo:

(a) $\text{sen} t = 0$, $\cos t = 0$ e $\tan t = 0$;
(b) $\text{sen} t = 1$, $\cos t = 1$;
(c) $\text{sen} t = -1$, $\cos t = -1$ e $\tan t = -1$;
(d) $\text{sen} t = \cos t$ e $\tan t = 1$;
(e) $\csc t = 0$, $\sec t = 0$ e $\cot t = 0$;
(f) $\csc t = 1$, $\sec t = 1$;
(g) $\csc t = -1$, $\sec t = -1$ e $\cot t = -1$;
(h) $\csc t = \sec t$ e $\cot t = 1$.

Exercícios

3. A figura abaixo representa o gráfico da função $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$, traçado no intervalo $[-20\pi, 20\pi]$, juntamente com as retas $y = x$ e $y = -x$.

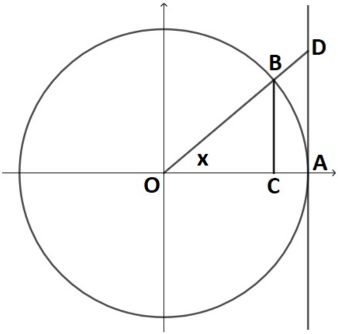


(a) Explique por que o gráfico de f_1 fica limitado entre essas retas e indique todos os pontos em que o gráfico toca as retas;

(b) Considere a seguinte afirmação: *Os máximos e mínimos locais da função f_1 ocorrem nos mesmos valores de x que os da função seno.* Esta afirmação é verdadeira?

(c) Como você espera visualizar o gráfico da função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_2(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$?

4. Na figura abaixo, os segmentos AD e OD representam, respectivamente, $\tan x$ e $\sec x$.



(a) Justifique a afirmação acima;

(b) Qual a interpretação dos sinais de $\tan x$ e $\sec x$ na figura?

(c) Faça uma figura análoga para representar $\cot x$ e $\csc x$, justificando a construção.

5. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

6. Mostre que o perímetro do pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \operatorname{sen}(bx)$, em que a e b são constantes reais.

(a) Mostre que, se a e b são racionais, então f é periódica; *Dica:* Mostre que o período de $\operatorname{sen}(ax)$ é $\frac{2\pi}{a}$.

(b) A recíproca da afirmação do item anterior é verdadeira? Justifique sua resposta.

Exercícios

8. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

(a) $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 - 2\text{sen}^2 x$;

(b) $\frac{\cos x - \text{sen} x}{\cos x + \text{sen} x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$;

(c) $\frac{\text{sen} x}{\csc x - \cot x} = 1 + \cos x$;

(d) $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$;

(e) $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$;

(f) $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x)$;

(g) $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 2\text{sen} x \cos x = \text{sen}(2x)$.

Exercícios

9. Use as fórmulas de seno e cosseno da soma para determinar os senos e cossenos dos seguintes ângulos (medidos em radianos): $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

10. Obtenha fórmulas para $\tan(\alpha+\beta)$ e para $\sec(\alpha+\beta)$, em função de $\tan\alpha$ e $\tan\beta$.

Bibliografia

[1] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria - Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.