

Vetores no Plano e no Espaço

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br



Informações sobre os conteúdos de vetores

- Soma de vetores e multiplicação por escalar
- Norma e produto escalar
- Projeção ortogonal
- Produto vetorial
- Produto misto

Noção intuitiva - grandezas escalares

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As escalares são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade, são exemplos de grandezas escalares. Assim, quando dizemos que uma mesa tem 3m de comprimento, que o volume de uma caixa é de 10 dm^3 ou que a temperatura ambiente é de 30°C , estamos determinando perfeitamente estas grandezas.

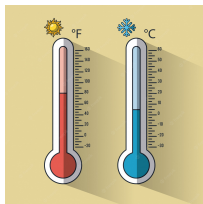


Figura 1: Exemplo de grandeza escalar.

Noção intuitiva - grandezas vetoriais

Existem, no entanto, grandezas que não ficam completamente definidas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas vetoriais, que para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais.

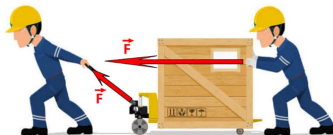


Figura 2: Exemplo de grandeza vetorial.

Noção de direção

A Figura 3 apresenta três retas. A reta r_1 determina, ou define, uma direção. A reta r_2 determina outra direção, diferente da direção de r_1 . Já a reta r_3 , por ser paralela a r_1 , possui a mesma direção de r_1 . Assim a noção de direção é dada por uma reta e por todas as que lhe são paralelas. Quer dizer, retas paralelas têm a mesma direção.



Figura 3: Exemplo de direção.

Noção de sentido

Na Figura 4 a direção é definida pela reta que passa pelos pontos A e B . O deslocamento de uma pessoa nessa mesma direção pode ser feito de duas maneiras: no sentido de A para B ou no sentido contrário, de B para A . Portanto, a cada direção podemos associar dois sentidos. Fica claro então que só podemos falar em "sentidos iguais" ou em "sentidos contrários" caso estejamos diante da mesma direção.



Figura 4: Exemplo de sentido.

Representantes de um mesmo vetor

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. Na Figura 7 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB , representam o mesmo vetor, que será indicado por

$$\vec{AB} \text{ ou } B - A, \quad (1)$$

onde A é a origem e B a extremidade do segmento. O vetor também costuma ser indicado por uma letra minúscula encimada por uma flecha, tal como \vec{v} .

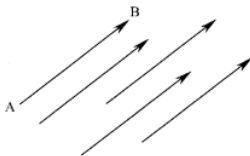


Figura 7: Representantes do vetor \vec{AB} .

Representantes de um mesmo vetor

Quando escrevemos $\vec{v} = \vec{AB}$ (Figura 8), estamos afirmando que o vetor \vec{v} é determinado pelo segmento orientado AB . Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o mesmo vetor \vec{v} . Assim sendo, cada ponto do espaço pode ser considerado como origem de um segmento orientado que é representante do vetor \vec{v} . Esta é a razão de o vetor também ser chamado vetor livre, no sentido de que o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto.

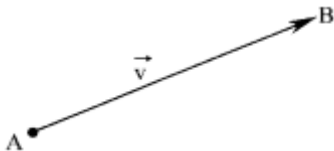


Figura 8: \vec{AB} representa o mesmo vetor \vec{v} .

Determinação de um mesmo vetor

Ainda, dados um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ e um ponto P , existe um só ponto Q (Figura 9) tal que o segmento orientado PQ tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB . Portanto, temos também $\vec{v} = \vec{PQ}$, o que vem reforçar o fato de que um representante de \vec{v} pode ter sua origem em qualquer ponto P do espaço.

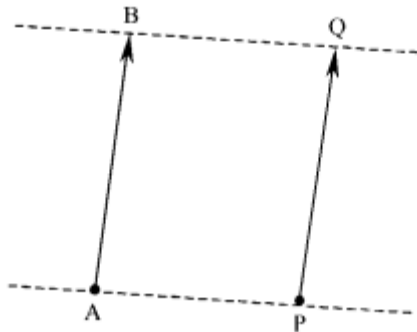


Figura 9: Existência e unicidade de um representante de \vec{v} no ponto Q .

Definição de módulo ou norma

O módulo, a direção e o sentido de um vetor \vec{v} é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de \vec{v} por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$.

Vetores paralelos

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos, e indica-se por $\vec{u} \parallel \vec{v}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção. Na Figura 10, tem-se $\vec{u} \parallel \vec{v} \parallel \vec{w}$, onde \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido, enquanto \vec{u} e \vec{v} , têm sentidos contrário ao de \vec{w} .

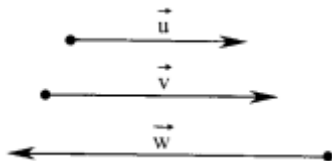


Figura 10: Vetores paralelos.

Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são iguais, e indica-se por $\vec{u} = \vec{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

Vetor nulo

Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo) , que é indicado por $\vec{0}$ ou \vec{AA} (a origem coincide com a extremidade). Pelo fato deste vetor não possuir direção e sentido definidos, considera-se o vetor zero paralelo a qualquer vetor.

Vetor oposto

A cada vetor não-nulo \vec{v} corresponde um vetor oposto $-\vec{v}$, de mesmo módulo e mesma direção de \vec{v} , porém, de sentido contrário (Figura 11). Se $\vec{v} = \vec{AB}$, o vetor \vec{BA} é oposto de \vec{AB} , isto é, $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

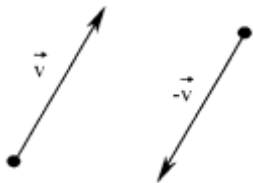


Figura 11: Vetores opostos.

Vetor unitário

Um vetor \vec{u} é unitário se $\|\vec{u}\| = 1$. A cada vetor \vec{v} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários de mesma direção de \vec{v} : \vec{u} e $-\vec{u}$ (Figura 12). Nesta Figura, tem-se $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\| = 1$. O vetor \vec{u} que tem o mesmo sentido de \vec{v} é chamado versor de \vec{v} . Na verdade o vetor \vec{u} não é versor só de \vec{v} , mas sim de todos os vetores paralelos e de mesmo sentido de \vec{v} e medidos com a mesma unidade.

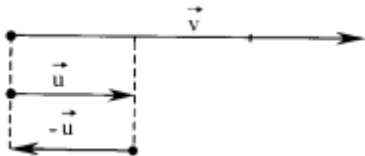


Figura 12: Vetor unitário.

Vetores coplanares

Dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano onde estes vetores estão representados. É importante observar que dois vetores \vec{u} e \vec{v} quaisquer são sempre coplanares, pois basta considerar um ponto P no espaço e, com origem nele, traçar os dois representantes de \vec{u} e \vec{v} pertencendo ao plano π (Figura 14) que passa por aquele ponto.

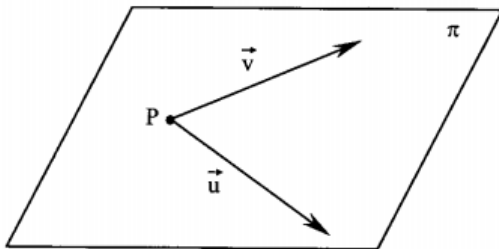


Figura 14: Vetores coplanares.

Exemplo

Example

A Figura 15 representa um paralelepípedoretângulo. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

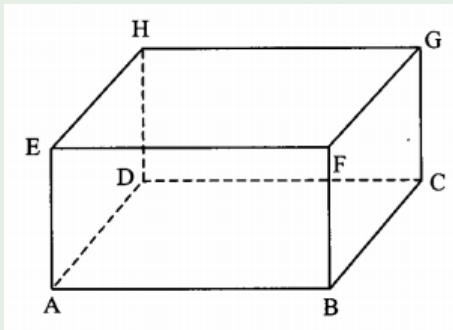


Figura 15: Paralelepípedo retângulo.

Example

- (a) $\vec{DH} = \vec{BF}$
- (b) $\vec{AB} = -\vec{HG}$
- (c) $\vec{AB} \perp \vec{CG}$
- (d) $\vec{AF} \perp \vec{BC}$
- (e) $|\vec{AC}| = |\vec{HF}|$
- (f) $|\vec{AB}| = |\vec{DF}|$
- (g) $\vec{BG} \parallel \vec{ED}$
- (h) \vec{AB} , \vec{BC} e \vec{CG} são coplanares

Adição de vetores

Consideremos os vetores \vec{u} e \vec{v} , cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 16) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor \vec{u} . Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de \vec{v} . O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma de \vec{u} e \vec{v} , isto é,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC} \quad (2)$$

ou

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \quad (3)$$

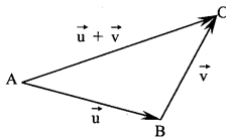


Figura 16: Soma de vetores.

Soma de vetores paralelos

Sendo $\vec{u} \parallel \vec{v}$, a maneira de se obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 17(a) (\vec{u} e \vec{v} de mesmo sentido) e na Figura 17(b) (\vec{u} e \vec{v} de sentidos contrários).

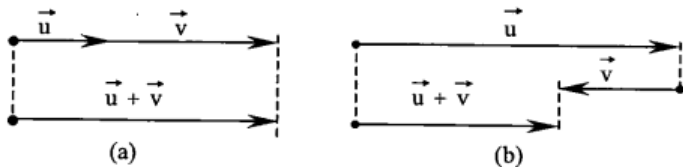


Figura 17: Soma de vetores paralelos.

Soma de vetores - regra do paralelogramo

No caso de os vetores \vec{u} e \vec{v} não serem paralelos, há uma outra maneira de se encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Representam-se $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A . Completa-se o paralelogramo $ABCD$ (Figura 18) e o segmento orientado de origem A , que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, isto é,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC} \quad (4)$$

ou

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}. \quad (5)$$

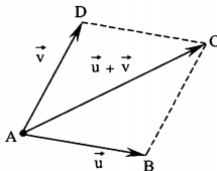


Figura 18: Regra do paralelogramo para soma de vetores.

Soma com mais de dois vetores

Para o caso de se determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo (Figura 19(a)) e, em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeiro (Figura 19(b)), a soma será o vetor nulo ($\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}$).

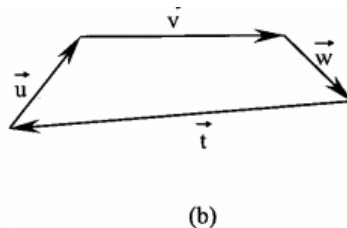
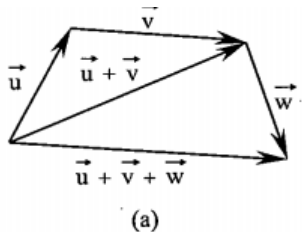


Figura 19: Soma com três ou mais vetores.

Propriedades da soma de vetores

Sendo \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

- I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Diferença entre vetores

O vetor \vec{u} e $(-\vec{v})$, escreve-se $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado diferença entre \vec{u} e \vec{v} . Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} (Figura 20), verifica-se que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representado por uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ pela outra diagonal.

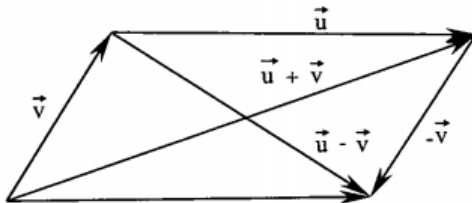


Figura 20: Diferença entre vetores.

Exemplos

Example

Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} não paralelos, construir no mesmo gráfico os vetores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{u}$ e $-\vec{u} - \vec{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

Example

Provar que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

- b) Vimos em casos particulares de vetores, que a cada vetor \vec{v} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a \vec{v} . O vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido de \vec{v} é o versor de \vec{v} . Por exemplo,
- se $|\vec{v}| = 5$, o versor de \vec{v} é $\frac{\vec{v}}{5}$;
 - se $|\vec{v}| = 3$, o versor de \vec{v} é $\frac{\vec{v}}{3}$;
 - se $|\vec{v}| = 10$, o versor de $-\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{10}$;

Exemplos

Example

Seja o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Determinar o vetor paralelo a \vec{v} tal que

- a) tenha o mesmo sentido de \vec{v} e módulo 5;
- b) tenha sentido contrário ao de \vec{v} e módulo 10.

Example

Representados os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} como na Figura 24, obter graficamente o vetor \vec{x} tal que $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

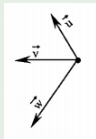


Figura 24: Representação dos vetores do exemplo.

Example

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Ainda com base na Figura anterior, os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{t} , \vec{x} e \vec{y} são expressos em função de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 por

- $\vec{u} = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$
- $\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$
- $\vec{w} = -4\vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- $\vec{t} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$
- $\vec{x} = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$
- $\vec{y} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Combinação linear de vetores

De modo geral, dados dois vetores quaisquer \vec{v}_1 e \vec{v}_2 não-paralelos, para cada vetor \vec{v} representado no mesmo plano de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2. \quad (7)$$

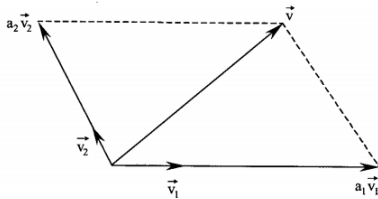


Figura 26: Combinação linear de vetores.

Combinação linear de vetores

A Figura 26 ilustra a situação onde \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são vetores não-paralelos quaisquer e \vec{v} é um vetor arbitrário do plano determinado por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Quando o vetor \vec{v} é expresso como em 7, diz que \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado base no plano. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não-paralelos constitui uma base no plano.

Os números a_1 e a_2 da igualdade 7 são chamados componentes ou coordenadas de \vec{v} na base B .

O vetor \vec{v} da igualdade 7 pode ser representado também por $\vec{v} = (a_1, a_2)$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

Na prática, as bases mais utilizadas são as ortonormais. Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, isto é, se $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

A base canônica

Dentre as infinitas bases ortonormais no plano, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal xOy . Os vetores ortogonais e unitários, neste caso são simbolizados por \vec{i} e \vec{j} , ambos com origem em O e extremidades em $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, (Figura 27), sendo a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ chamada canônica. Portanto, $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$. Daqui por diante, trataremos somente da base canônica.

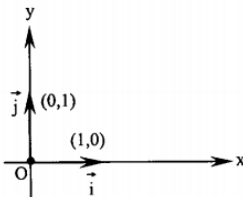


Figura 27: Representação da base canônica.