

# Aula 3

## Geometria Euclidiana Axiomas sobre Medição de Ângulos

9 de junho de 2018

Igor Oliveira

`igoroliveira@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

# Índice



Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

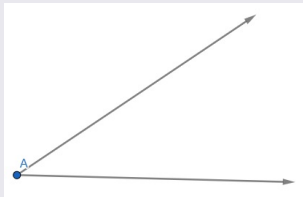
IMD1003  
Geometria Euclidiana  
Igor Oliveira

Ângulo  
Axioma  $III_4$   
Axioma  $III_5$   
Axioma  $III_6$   
Ângulos opostos pelo Vértice  
Ângulo reto  
Exercícios  
Bibliografia

# Definição de Ângulo

## Definição 3.1

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.



- ▶ As semi-retas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo.
- ▶ Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso.



### 2 Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

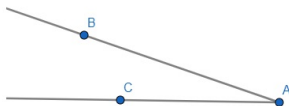
Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

# Notação de Ângulo



- Chamamos o ângulo acima de  $\widehat{BAC}$  ou  $\widehat{CAB}$ . Sempre colocamos a letra indicativa do vértice com o acento circunflexo entre as outras duas que representam pontos das semi-retas que formam o ângulo.
- Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, pode-se usar somente a letra do vértice para denotar o ângulo, ou seja teríamos o ângulo  $\widehat{A}$ .
- Podemos também usar letras gregas para designar ângulo, escrevendo a letra próximo ao vértice (como figura no quadro).

## 3 Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

# Axioma $III_4$



IMD1003  
Geometria Euclidiana  
Igor Oliveira

Ângulo

4 Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo  
Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

## Axioma $III_4$

Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.

## Definição 3.2

Diremos que uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

## Axioma $III_5$

É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas da mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

Ângulo

Axioma  $III_4$

5 Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a uma dada semi-reta é denominado coordenada da semi-reta.

Se  $a$  e  $b$  são as coordenadas dos lados do ângulo  $\widehat{AOB}$ , calculamos

$$\widehat{AOB} = |b - a|.$$

Observe que as semi-retas que formam um ângulo raso serão sempre numeradas por 0 e 180, sendo assim, a medida de tais ângulos sempre  $180^\circ$ .

# Axioma $III_6$



IMD1003  
Geometria Euclidiana  
Igor Oliveira

Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

7 Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

## Definição 3.3

Sejam  $S_{OA}$ ,  $S_{OB}$  e  $S_{OC}$  semi-retas de mesma origem. Se o segmento  $AB$  interceptar  $S_{OC}$ , diremos que  $S_{OC}$  divide o ângulo  $\widehat{AOB}$ .

## Axioma $III_6$

Se uma semi-reta  $S_{OC}$  divide um ângulo  $\widehat{AOB}$ , então,

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

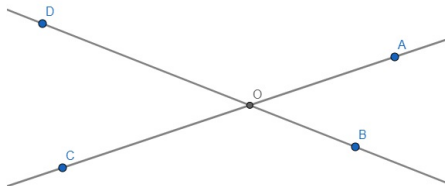
## Definição 3.4

Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ . O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.



# Ângulos opostos pelo Vértice

Quando duas retas distintas se interceptam, formam-se quatro ângulos, como indicado na figura abaixo. Os ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{DOC}$  são ditos opostos pelo vértice. Do mesmo modo, o são os ângulos  $\widehat{AOD}$  e  $\widehat{BOC}$ .



## Proposição 3.5

Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

IMD1003  
Geometria Euclidiana  
Igor Oliveira

Ângulo  
Axioma  $III_4$   
Axioma  $III_5$   
Axioma  $III_6$

8 Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto  
Exercícios  
Bibliografia

## Definição 3.6

Um ângulo cuja medida é  $90^\circ$  é chamado ângulo reto.

- ▶ O suplemento de um ângulo reto é um ângulo reto.
- ▶ Se duas retas se intersectam e um dos quatro ângulos formados for reto, então todos os outros ângulos também o serão. Neste caso, diremos que as retas são perpendiculares.

## Teorema 3.7

Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

9 Ângulo reto

Exercícios

Bibliografia

1. Mostre que se um ângulo e seu suplemento têm a mesma medida, então o ângulo é reto.
2. Um ângulo é chamado agudo se mede menos de  $90^\circ$ , e é chamado de obtuso se mede mais de  $90^\circ$ . Mostre que o suplemento de um ângulo agudo é sempre obtuso.
3. Dado um ângulo  $\widehat{AOB}$ , mostre que existe uma única semi-reta  $S_{OC}$ , tal que  $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$ . A semi-reta  $S_{OC}$  é chamada de bissetriz do ângulo  $\widehat{AOB}$ .
4. Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.
5. Duas retas se interceptam formando quatro ângulos. Se um deles é reto, mostre que os outros também são retos. Se, ao invés de ser reto, um deles medisse  $60^\circ$ , qual seriam as medidas dos outros?

6. Dois ângulos são ditos complementares se sua soma é um ângulo reto. Determine:

- A medida do ângulo agudo que tem a mesma medida do seu complemento;
- O ângulo agudo que mede o dobro do seu complemento;
- A diferença entre o suplemento de um ângulo e seu complemento.

7. Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e pelos seguimentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ . Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados. Desenhe a poligonal  $ABCD$ , com auxílio de uma régua e transferidor, sabendo que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2cm$ ,  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  e  $\widehat{BCD} = 100^\circ$ .

Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo Vértice

Ângulo reto

11 Exercícios

Bibliografia

Um polígono é uma poligonal em que as seguintes 4 condições são satisfeitas:

- $A_n = A_1$ ;
- Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- Cada vértice é extremidade de dois lados;
- Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Um polígono de vértices  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} = A_1$  será representado por  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Ele tem  $n$  lados,  $n$  vértices e  $n$  ângulos.

**8.** Mostre que todo polígono é limitado.

9. A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada de perímetro do polígono. O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma diagonal do polígono. Mostre que o comprimento de qualquer diagonal de um polígono de quatro lados é menor do que a metade de seu perímetro.

10. Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semi-planos determinados pelas retas que contém seus lados. Desenhe 2 polígonos de 5 lados onde um deles é convexo e o outro não é, argumentando segundo a definição dada.

11. Mostre que, em um polígono convexo, as diagonais estão sempre contidas na região limitada pelo polígono (ou região interior do polígono).

De acordo com a quantidade de lados de um polígono convexo, ele recebe um nome em particular. Pesquise os nomes dos polígonos convexos que tenham de 3 a 10 lados.

**12.** Os ângulos formados pelos lados de um polígono convexo são chamados de ângulos do polígono. Suponha que tenha sido demonstrado que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é um valor constante  $s$ . Com esta informação, demonstre que a soma dos ângulos de um polígono convexo de  $n$  lados é  $(n - 2) s$ .

**13.** Descreva um processo pelo qual um desenhista, sem usar transferidor, possa "copiar" um ângulo, isto é, dado um ângulo desenhado em uma folha de papel, desejamos estabelecer um procedimento pelo qual possamos desenhar um outro ângulo (sem ter o vértice em comum) que tenha a mesma medida do primeiro, isto sem fazer uso de um transferidor.

**14.** Descreva um método, em que se faça uso apenas de um compasso e de uma régua não numerada, de construção de um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento.

**15.** O método do exercício anterior se estende para o caso de 5 lados?



IMD1003  
Geometria Euclidiana  
Igor Oliveira

Ângulo

Axioma  $III_4$

Axioma  $III_5$

Axioma  $III_6$

Ângulos opostos pelo  
Vértice

Ângulo reto

Exercícios

16 Bibliografia

- [1] BARBOSA, João L M.  
*Geometria Euclidiana Plana*.  
11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.