Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Retas e Planos

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal
Setembro de 2022

Sumário

1 Equação da reta

b) Se duas retas não são coplanares, elas são ditas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas além de não concorrentes são não-paralelas, e, portanto, não-coplanares.

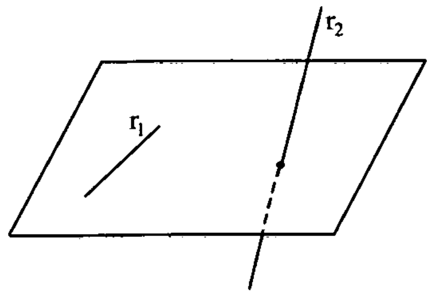

Figura 5.13

Problemas Propostos

1) Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, -3, 4) e B(1, -1, 2) e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e D(-1, 3, 4) pertencem a r.
2) Dada a reta r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0), escrever equações paramétricas de r.
3) Escrever equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1).
4) Dada a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6;
b) a abscissa seja igual à ordenada;
c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

5) A reta r passa pelo ponto A(4,-3,-2) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Se $P(m, n, -5) \in r$, determinar m e n.

6) Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:
   a) A(1, -1, 2) e B(2, 1, 0) b) A(3, 1, 4) e B(3, -2, 2)
   c) A(1, 2, 3) e B(1, 3, 2) d) A(0, 0, 0) e B(0, 1, 0)
7) Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por
   a) A e B
   b) C e D
   c) A e D
   d) B e C
   e) D e E
   f) B e D

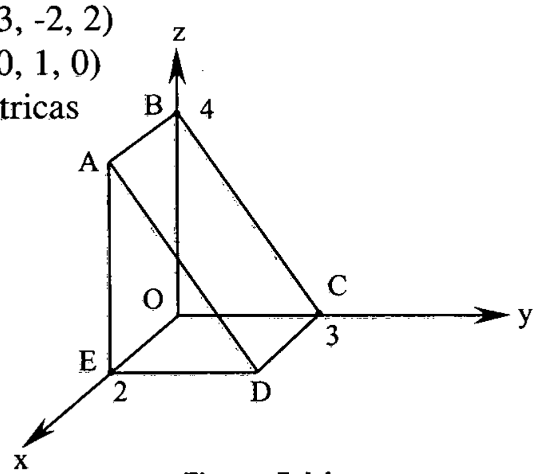

Figura 5.14

8) O ponto P(m, 1, n) pertence à reta que passa por A(3, -1, 4) e B(4, -3, -1). Determinar P.

9) Seja o triângulo de vértices A(-1, 4, -2), B(3, -3, 6) e C(2, -1, 4). Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado AB e pelo vértice oposto C.

10) Os pontos $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(1, -3, 0)$ e $M_3(2, 1, -5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

11) Os vértices de um triângulo são os pontos A(-1, 1, 3), B(2, 1, 4) e C(3, -1, -1). Obter equações paramétricas dos lados AB, AC e BC, e da reta r que contém a mediana relativa ao vértice B.

12) Verificar se os pontos $P_1(5, -5, 6)$ e $P_2(4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

13) Determinar o ponto da reta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;
b) ordenada 2.

14) Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r: \dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{3y-2}{2} = z + 4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

15) Obter equações reduzidas na variável x, da reta

a) que passa por A(4, 0, -3) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$;
b) pelos pontos A(1, -2, 3) e B(3, -1, -1);
c) pelos pontos A(-1, 2, 3) e B(2, -1, 3);
d) dada por $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$

16) Escrever equações reduzidas na variável z da reta que passa por A(-1, 6, 3) e B(2, 2, 1).

17) Na reta $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$, determinar o ponto de

a) ordenada igual a 9;
b) abscissa igual ao dobro da cota;
c) ordenada igual ao triplo da cota.

18) Representar graficamente as retas de equações

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$ c) $x = y = z$ d) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

19) Determinar equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por
   a) A(3, -2, 4) e é paralela ao eixo dos x;
   b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xOz;
   c) A(-2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;
   d) A(4, -1, 3) e tem a direção de $3\vec{i} - 2\vec{j}$;
   e) A(3, -1, 3) e B(3, 3, 4).
20) Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto A(4, -5, 3) e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.
21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:
   a) $r_1: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-1}{1}$
   b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \dfrac{z+1}{-1}; x = 4$
   c) $r_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\,t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
   d) $r_1: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$
22) Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas
   a) $r_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$
   b) $r_1: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$ e r_2 : eixo Oy
23) Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:
   a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$
   b) $r_1: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e r_2 : reta por A(1, 0, m) e B(-2, 2m, 2m)

24) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, nos casos:

a) A(3, 2, -1) $\quad r_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ e $\quad r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

b) A(0, 0, 0) $\quad r_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ e $\quad r_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$

c) A é a interseção de r_1 e r_2

$r_1: x-2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $\quad r_2: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

25) Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $\quad r_2: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

b) $r_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$ e $\quad r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$

c) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $\quad r_2: x = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

d) $r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$ e $\quad r_2: \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$

e) $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$ e $\quad r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

f) $r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $\quad r_2: \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

26) Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $\quad r_2: x - 5 = \dfrac{y}{m} = z + 1$

b) $r_1: \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e $\quad r_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}$

27) Dadas as retas

$$r_1 : \frac{x - 1}{2} = -y;\ z = 3 \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},$$

encontrar equações reduzidas na variável x da reta que passa por A(0, 1, 0) e pelo ponto de interseção de r_1 com r_2.

28) Determinar na reta

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

um ponto eqüidistante dos pontos A(2,-1,-2) e B(1,0,-1).

29) Determinar os pontos da reta

r: $x = 2 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + 2t$ que

a) distam 6 unidades do ponto A(2, 1, 3);

b) distam 2 unidades do ponto B(1, -1, 3).

30) Escrever equações reduzidas da reta que passa por A(1, 3, 5) e intercepta o eixo dos z perpendicularmente.

31) Escrever equações reduzidas na variável z, de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:

a) passa por A(4, -2, 2) e é paralela à reta $r: x = 2y = -2z$;

b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas

$$r : \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-2} = 2z - 2 \quad \text{e} \quad s : x = -y = -z.$$

32) Determinar o ângulo que a reta que passa por A(3, -1, 4) e B(1, 3, 2) forma com a sua projeção sobre o plano xy.

33) Apresentar equações paramétricas da projeção da reta

$$r : \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases}$$ sobre o plano xy.

34) Dados o ponto A(3, 4, -2) e a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t, \end{cases}$$

a) determinar equações paramétricas da reta que passa por A e é perpendicular a r;

b) calcular a distância de A a r;

c) determinar o ponto simétrico de A em relação a r.

Respostas de Problemas Propostos

1) $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$, $C \in r$ e $D \notin r$.
2) $x = -1 + 2t$ $\quad y = 2 - 3t$ $\quad z = 3$
3) $x = 1$ $\quad y = 2$ $\quad z = 3 + t$
4) a) $(-1, 6, -10)$ b) $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$ c) $(-4, 9, -16)$
5) $m = 13$, $n = -15$
6) a) $x = 1 + t$ $\quad y = -1 + 2t$ $\quad z = 2 - 2t$
   b) $x = 3$ $\quad y = 1 - 3t$ $\quad z = 4 - 2t$
   c) $x = 1$ $\quad y = 2 + t$ $\quad z = 3 - t$
   d) $x = 0$ $\quad y = t$ $\quad z = 0$ (eixo Oy)
7) a) $x = 2 + 2t$ $\quad y = 0$ $\quad z = 4$
   b) $x = 2t$ $\quad y = 3$ $\quad z = 0$
   c) $x = 2$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$
   d) $x = 0$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$
   e) $x = 2$ $\quad y = 3 + 3t$ $\quad z = 0$
   f) $x = 2t$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$
8) $P(2, 1, 9)$
9) $x = 2 + t$ $\quad y = -1 - \frac{3}{2}t$ $\quad z = 4 + 2t$
10) $x = 2 + t$ $\quad y = -1 + 4t$ $\quad z = 3 - 5t$
11) AB: $x = -1 + 3t$ $\quad y = 1$ $\quad z = 3 + t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    AC: $x = -1 + 4t$ $\quad y = 1 - 2t$ $\quad z = 3 - 4t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    BC: $x = 2 + t$ $\quad y = 1 - 2t$ $\quad z = 4 - 5t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    r: $x = 2 + t$ $\quad y = 1 + t$ $\quad z = 4 + 3t$
12) Apenas P_1
13) $(5, -5, 8)$ e $(-9, 2, -20)$
14) $(1, \frac{4}{3}, -3)$ e $\vec{v} = (\frac{9}{2}, 2, 3)$
15) a) $y = 2x - 8$ e $z = \frac{5}{2}x - 13$
    b) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ e $z = -2x + 5$
    c) $y = -x + 1$ e $z = 3$
    d) $y = -3x + 6$ e $z = -4x + 3$
16) $x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$ e $y = 2z$
17) a) $(3, 9, 2)$ b) $(2, 7, 1)$ c) $(6, 15, 5)$

19) a) $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21) a) 60° b) 30° c) 30° d) $\theta = \text{arc}\cos(\frac{2}{3}) \cong 48°11'$

22) a) 7 ou 1 b) $\pm\sqrt{15}$

23) a) $m = -\frac{7}{4}$ b) 1 ou $-\frac{3}{2}$

24) a) $x = 3 + t$ $y = 2 - t$ $z = -1$
b) $x = 2t$ $y = 6t$ $z = -5t$
c) $x = 2 + t$ $y = -1 - 5t$ $z = 3t$

25) a) (2, 1, 3) b) (1, 2, -2) c) reversas d) (3, 8, 12)
e) reversas f) coincidentes

26) a) -3 b) 4

27) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28) $(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

29) a) (4, 5, 7) e (0, -3, -1) b) $(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9})$ e (1, -1, 1)

30) $y = 3x$, $z = 5$

31) a) $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32) $\theta = \text{arc}\cos\,(\frac{\sqrt{30}}{6})$

33) $x = 1 + t$ $y = -2 + 5t$ $z = 0$

34) a) $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$ b) $\sqrt{20}$ c) (-5, 4, 2)

2 Equação do plano

e daí resulta $t = -1$.

Substituindo este valor nas equações de r obtém-se

$x = -1 + 2(-1) = -3 \qquad y = 5 + 3(-1) = 2 \qquad z = 3 - (-1) = 4$

Logo, a interseção de r e π é o ponto $(-3, 2, 4)$.

2) Determinar a interseção da reta

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{com o plano } \pi: x + 3y + 2z - 5 = 0$$

Solução

Se existir um ponto $I(x, y, z) \in r$ que também pertence a π, suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados. Logo, I será a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se: $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, $I(2, -1, 3)$ é a interseção de r e π, ou seja, é a interseção dos três planos.

Problemas Propostos

Os problemas de 1 a 48 estão de acordo com a ordem do texto e os demais se constituem em ótimo reforço.

1) Seja o plano

$\pi: 3x + y - z - 4 = 0$

Calcular:

a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;

b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;

c) O valor de k para que o ponto $P(k, 2, k - 1)$ pertença a π;

d) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota;

e) O valor de k para que o plano $\pi_1: kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Nos problemas de 2 a 4, determinar uma equação geral do plano

2) paralelo ao plano $\pi: 2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contenha o ponto $A(4,-2,1)$;

3) perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases} \qquad \text{e que contenha o ponto } A(-1, 2, 3);$$

4) que passa pelo ponto médio do segmento de extremos $A(5,-1,4)$ e $B(-1,-7,1)$ e seja perpendicular a ele.

5) Dada a equação geral do plano $\pi: 3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

6) Sendo

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π, obter uma equação geral.

Nos problemas de 7 a 11, escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

7) A(1, 0, 2), B(-1, 2, -1) e C(1, 1, -1).
8) A(0, 0, 0), B(1, 1, 5) e C(-1, 1, 1).
9) A(2, 0, -1), B(-2, 6, 3) e C(0, 3, 4).
10) A(2, 1, 0), B(-4, -2, -1) e C(0, 0, 1).
11) A(2, 1, 3), B(-3, -1, 3) e C(4, 2, 3).
12) Determinar o valor de α para que os pontos A(α, 1, 9), B(2, 3, 4), C(-4, -1, 6) e D(0, 2, 4) sejam coplanares.

Nos problemas de 13 a 18, determinar uma equação geral do plano nos seguintes casos:

13) O plano passa por A(2, 0, -2) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
14) O plano passa pelos pontos A(-3, 1, -2) e B(-1, 2, 1) e é paralelo à reta
$r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{-3}; \ y = 4.$
15) O plano contém os pontos A(1, -2, 2) e B(-3, 1, -2) e é perpendicular ao plano $\pi_1 : 2x + y - z + 8 = 0$.
16) O plano contém os pontos A(2, 1, 2) e B(1, -1, 4) e é perpendicular ao plano xOy.
17) O plano contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano π_1: $2x + 2y - 3z = 0$

18) O plano contém o ponto A(4, 1, 1) e é perpendicular aos planos π_1: $2x + y - 3z = 0$ e π_2: $x + y - 2z - 3 = 0$.

Nos problemas de 19 a 22, os pares de retas r_1 e r_2 são paralelas ou concorrentes. Encontrar uma equação geral do plano que as contém.

19) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{z - 1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$

20) $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

21) $r_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$

22) $r_1: \begin{cases} x = z \\ y = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Nos problemas 23 e 24, determinar uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

23) A(4, 3, 2) e $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

24) A(1, -1, 2) e o eixo dos z

Nos problemas de 25 a 30, obter uma equação geral do plano

25) paralelo ao eixo dos z e que contenha os pontos A(0, 3, 4) e B(2, 0, -2);
26) paralelo ao eixo dos x e que contenha os pontos A(-2, 0, 2) e B(0, -2, 1);
27) paralelo ao eixo dos y e que contenha os pontos A(2, 3, 0) e B(0, 4, 1);
28) paralelo ao plano xOy e que contenha o ponto A(5, -2, 3);
29) perpendicular ao eixo dos y e que contenha o ponto A(3, 4, -1);
30) que contenha o ponto A(1, -2, 1) e o eixo dos x.
31) Representar graficamente os planos de equações:

a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$
b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$
e) $3y + 4z + 12 = 0$
f) $2z - 5 = 0$
g) $y + 4 = 0$
h) $2x - y = 0$

32) Determinar o ângulo entre os seguintes planos

a) $\pi_1: x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z + 3 = 0$
b) $\pi_1: x - y + 4 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z = 0$
c) $\pi_1: x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2: y = 0$
d) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases}$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$

33) Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos

$\pi_1: x + my + 2z - 7 = 0$ e $\pi_2: 4x + 5y + 3z + 2 = 0$

34) Determinar m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares:

a) $\pi_1: mx + y - 3z - 1 = 0$ e $\pi_2: 2x - 3my + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 2h + 3 \\ z = t - 2h + 1 \end{cases}$ e $\pi_2: 2mx + 4y - z - 1 = 0$

35) Dados a reta r e o plano π, determinar o valor de m para que se tenha I) $r // \pi$ e II) $r \perp \pi$, nos casos:

a) $r : x = -3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t$ e $\pi : mx - y - 2z - 3 = 0$

b) $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, m, -1)$ e $\pi : 3x + 2y + mz = 0$

36) Verificar se a reta r está contida no plano π:

a) $r: \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ e $\pi : 2x + y - 3z - 4 = 0$

b) $r: x - 2 = \dfrac{y + 2}{2} = z + 3$ e $\pi : \begin{cases} x = h + t \\ y = -1 + 2h - 3t \\ z = -3 + h - t \end{cases}$

Nos problemas de 37 a 39, calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:

37) $r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ e $\pi : mx + 2y - 3z + n = 0$

38) $r : \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + m \end{cases}$ e $\pi : 5x - ny + z + 2 = 0$

39) $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + mt \\ z = n - 4t \end{cases}$ e $\pi : 3x - 3y + z - 7 = 0$

Nos problemas de 40 a 42, estabelecer equações reduzidas na variável x da reta interseção dos planos:

40) $\pi_1: 3x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 3z - 4 = 0$

41) $\pi_1: 3x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - z - 7 = 0$

42) $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$

Nos problemas 43 e 44, encontrar equações paramétricas da reta interseção dos planos:

43) $\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$

44) $\pi_1: 2x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: z = 5$

Nos problemas de 45 a 47, determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π:

45) $r: x = 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -t$ e $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

46) $r: \begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e $\pi: 2x - y + 3z - 9 = 0$

47) $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

48) Sejam a reta r e o plano π dados por

$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $\pi: 2x + 4y - z - 4 = 0$. Determinar:

a) o ponto de interseção de r com o plano xOz;
b) o ponto de interseção de r com π;
c) equações da reta interseção de π com o plano xOy.

49) Dado o ponto P(5, 2, 3) e o plano $\pi: 2x + y + z - 3 = 0$, determinar
a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;
b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;
c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;
d) a distância de P ao plano π.

50) Determinar equações reduzidas na variável x, da reta que passa pelo ponto A(3, -2, 4) e é perpendicular ao plano $\pi: x - 3y + 2z - 5 = 0$.

51) Obter equações paramétricas das retas nos casos:
a) A reta passa por A(-1, 0, 2) e é paralela a cada um dos planos $\pi_1: 2x + y + z + 1 = 0$ e $\pi_2: x - 3y - z - 5 = 0$.
b) A reta passa pela origem, é ortogonal à reta $r: 2x = y = 3z$ e paralela ao plano $\pi: x - y - z + 2 = 0$.

52) Escrever uma equação geral do plano que passa por A(-1, 2, -1) e é paralelo a cada uma das retas $r_1: y = x, z = 1 - 3x$ e $r_2: 2x = y = 3z$.

53) Achar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s, nos casos:
a) A(2, 1, -4), $\pi: x - y + 3z - 5 = 0$, $s: x = 1 + 3t, \quad y = 3 - t, \quad z = -2 - 2t$;
b) A(3, -2, -4), $\pi: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $s: x = 2 + t, \quad y = -4 - 2t, \quad z = 1 + 3t$.
Determinar ainda o ponto de interseção entre r e s.

54) Dada a reta $r: x = 3 + t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -1 + 2t$, determinar equações reduzidas das retas projeções de r sobre os planos xOy e xOz.

55) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A(3, 6, 4), intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano $\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0$.

Nos problemas de 56 a 62 apresentar uma equação geral dos planos:

56) O plano que passa por A(-1, 2, -4) e é perpendicular aos planos $\pi_1: x + z = 2$ e $\pi_2: y - z = 0$.

57) O plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

58) O plano que passa por A(1, -3, 4) e intercepta os três semi-eixos de mesmo sinal a igual distância à origem do sistema.

59) O plano paralelo ao eixo dos z e que intercepta o eixo dos x em -3 e o dos y em 4.

60) O plano paralelo ao plano xOz e que intercepta o eixo dos y em -7.

61) O plano que passa pela origem e é paralelo às retas
$r_1: y = -x, z = 2$ e $r_2: (x, y, z) = (2, -1, 4) + t(1, 3, -3)$.

62) O plano que passa por A(-1, 2, 5) e é perpendicular à interseção dos planos
$\pi_1: 2x - y + 3z - 4 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 4z + 1 = 0$.

63) Estabelecer equações gerais dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xOz e yOz.

64) Calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:
a) $r: x = 2 - 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3$ e $\pi: 2mx - ny - z + 4 = 0$
b) $r: (x, y, z) = t(2, m, n) + (n, 2, 0)$ e $\pi: x - 3y + z = 1$

65) Calcular k de modo que a reta determinada por A(1, -1, 0) e B(k, 1, 2) seja paralela ao plano $\pi: x = 1 + 3h, \quad y = 1 + 2h + t, \quad z = 3 + 3t$.

Nos problemas 66 e 67, obter uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

66) A(3, -2, -1) e $r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$

67) A(1, 2, 1) e a reta interseção do plano $x - 2y + z - 3 = 0$ com o plano yOz.

68) Mostrar que as retas
$r_1: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$
são paralelas e encontrar uma equação geral do plano determinado por estas retas.

69) Determinar o ponto P de interseção dos planos $2x - y + z - 8 = 0$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$ e $3x - z - 3 = 0$ e uma equação geral do plano determinado por P e pela reta $r: x = y$, $z = 2y$.

70) Dadas as retas $r_1: y = -2x, \quad z = x$ e $r_2: x = 2 - t, \quad y = -1 + t, \quad z = 4 - 2t$, determinar
a) o ponto P' simétrico de P(1, 0, 5) em relação à reta r_1;
b) o ponto O' simétrico de O(0, 0, 0) em relação à reta r_2.

71) Achar o ponto N, projeção ortogonal do ponto P(3, -1, -4) no plano determinado pelos pontos A(2, -2, 3), B(4, -3, -2) e C(0, -4, 5). Qual o ponto simétrico de P em relação a este plano?

72) O plano π: $3x + 2y + 4z - 12 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular:

a) a área do triângulo ABC;

b) a altura deste triângulo relativa à base que está no plano xOz;

c) o volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) (1, 3, 2) b) (0, 6, 2) c) $k = \frac{1}{2}$ d) (2, -4, -2) e) $k = -12$

2) $2x - 3y - z - 13 = 0$ 3) $2x - 3y + 4z - 4 = 0$

4) $4x + 4y + 2z + 3 = 0$ 5) Existem infinitos. Um deles é: $x = t$, $y = h$, $z = -6 + 3h - 2t$

6) $2x - 2y - z + 4 = 0$

7) $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ e $\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = 2h + t \\ z = 2 - 3h - 3t \end{cases}$

8) $2x + 3y - z = 0$ e $\begin{cases} x = h - t \\ y = h + t \\ z = 5h + t \end{cases}$

9) $3x + 2y - 6 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 4h - 2t \\ y = 6h + 3t \\ z = -1 + 4h + 5t \end{cases}$

10) $x - 2y = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 6h - 2t \\ y = 1 - 3h - t \\ z = -h + t \end{cases}$

11) $z - 3 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 5h + 2t \\ y = 1 - 2h + t \\ z = 3 \end{cases}$

12) $\alpha = 3$

13) $3x - 2y - 5z - 16 = 0$

14) $3x - 12y + 2z + 25 = 0$

15) $x - 12y - 10z - 5 = 0$

16) $2x - y - 3 = 0$

17) $x - 7y - 4z + 17 = 0$

18) $x + y + z - 6 = 0$

19) $x + y + 3z - 3 = 0$

20) $5x - 2y + 4z - 21 = 0$

21) $6x + 6y - z + 9 = 0$

22) $2x + y - 2z + 3 = 0$

23) $x - 9y - 5z + 33 = 0$

24) $x + y = 0$

25) $3x + 2y - 6 = 0$

26) $y - 2z + 4 = 0$

27) $x + 2z - 2 = 0$

28) $z = 3$

29) $y = 4$

30) $y + 2z = 0$

32) a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) arc cos $\frac{2}{\sqrt{5}}$ d) arc cos $\frac{3}{\sqrt{14}}$

33) 1 ou 7

34) a) -12 b) 2

35) a) 10 e $-\frac{1}{2}$ b) -6 e não existe valor para m

36) a) sim b) sim

37) m = 10 e n = 14

38) m = -4 e n = 2

39) $m = \frac{5}{3}$ e n = -2

40) $\begin{cases} y = -11x + 11 \\ z = -7x + 6 \end{cases}$

41) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$

42) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 1 \end{cases}$

43) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t - 2 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = 5 \end{cases}$

45) (6, -3, -2)

46) (2, -8, -1)

47) (1, -3, 7)

48) a) $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ b) $(\frac{18}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$ c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ z = 0 \end{cases}$

49) a) x = 5 + 2t, y = 2 + t, z = 3 + t b) (1, 0, 1) c) (-3, -2, -1) d) $2\sqrt{6}$

50) y = -3x + 7, z = 2x - 2

51) a) x = 2t - 1, y = 3t, z = -7t + 2 b) x = 4t, y = -5t, z = 9t

52) 20x - 11y + 3z + 45 = 0

53) a) x = 2 + 7t, y = 1 + t, z = -4 - 2t e $\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$

b) x = 3 - 2t, y = -2 + 3t, z = -4 - 4t e (-5, 10, -20)

54) $y = -2x + 7, \quad z = 0$ e $z = 2x - 7, \quad y = 0$
55) $x = 3 + t, \quad y = 6 + 2t, \quad z = 4 + t$
56) $x - y - z - 1 = 0$
57) $10x - 5y + 6z + 30 = 0$
58) $x + y + z - 2 = 0$
59) $4x - 3y + 12 = 0$
60) $y = -7$
61) $3x + 3y + 4z = 0$
62) $2x - 11y - 5z + 49 = 0$
63) $x + y = 0$ e $x - y = 0$
64) a) $m = -\frac{1}{8}, \quad n = -\frac{1}{2}$ b) $m = 3, \quad n = 7$
65) 3
66) $2x + 3y + z + 1 = 0$
67) $6x - 2y + z - 3 = 0$
68) $4x + 2y - 3z + 5 = 0$
69) $P(2, -1, 3), \quad 5x + y - 3z = 0$
70) a) $P'(1, -4, -3)$ b) $O'(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$
71) $N(5, -2, -3), \quad (7, -3, -2)$
72) a) $3\sqrt{29}$ u.a. b) $\frac{6\sqrt{29}}{5}$ u.c. c) 12 u.v.