



Instituto Metrópole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do  
Norte  
Campus de Natal

---

## **Lista de exercícios: Retas e Planos**

**Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior**

Lista de exercícios

Natal  
Setembro de 2022

# Sumário

1	Equação da reta
---	-----------------

2
---

# 1 Equação da reta

- b) Se duas retas não são coplanares, elas são ditas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas além de não concorrentes são não-paralelas, e, portanto, não-coplanares.

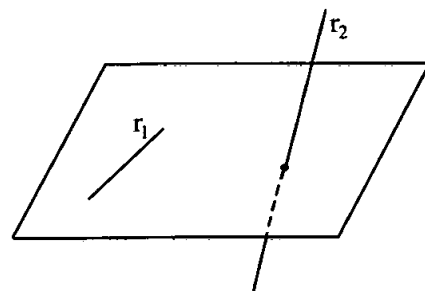


Figura 5.13

## Problemas Propostos

- Determinar uma equação vetorial da reta  $r$  definida pelos pontos  $A(2, -3, 4)$  e  $B(1, -1, 2)$  e verificar se os pontos  $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$  e  $D(-1, 3, 4)$  pertencem a  $r$ .
- Dada a reta  $r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0)$ , escrever equações paramétricas de  $r$ .
- Escrever equações paramétricas da reta que passa por  $A(1, 2, 3)$  e é paralela à reta  $r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1)$ .
- Dada a reta

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}, \text{ determinar o ponto de } r \text{ tal que}$$

- a ordenada seja 6;
  - a abscissa seja igual à ordenada;
  - a cota seja o quádruplo da abscissa.
- A reta  $r$  passa pelo ponto  $A(4, -3, -2)$  e é paralela à reta

$$s : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}. \text{ Se } P(m, n, -5) \in r, \text{ determinar } m \text{ e } n.$$

- Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  nos seguintes casos:

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 1, 0)$ | b) $A(3, 1, 4)$ e $B(3, -2, 2)$ |
| c) $A(1, 2, 3)$ e $B(1, 3, 2)$  | d) $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 1, 0)$  |

- Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por

- $A$  e  $B$
- $C$  e  $D$
- $A$  e  $D$
- $B$  e  $C$
- $D$  e  $E$
- $B$  e  $D$

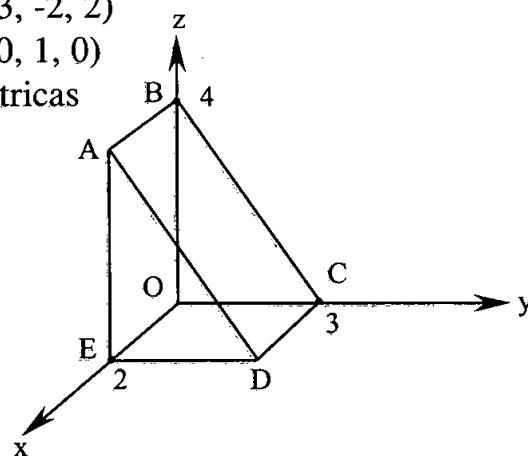


Figura 5.14

- 8) O ponto  $P(m, 1, n)$  pertence à reta que passa por  $A(3, -1, 4)$  e  $B(4, -3, -1)$ . Determinar  $P$ .
- 9) Seja o triângulo de vértices  $A(-1, 4, -2)$ ,  $B(3, -3, 6)$  e  $C(2, -1, 4)$ . Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado  $AB$  e pelo vértice oposto  $C$ .
- 10) Os pontos  $M_1(2, -1, 3)$ ,  $M_2(1, -3, 0)$  e  $M_3(2, 1, -5)$  são pontos médios dos lados de um triângulo  $ABC$ . Obter equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é  $M_1$ .
- 11) Os vértices de um triângulo são os pontos  $A(-1, 1, 3)$ ,  $B(2, 1, 4)$  e  $C(3, -1, -1)$ . Obter equações paramétricas dos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , e da reta  $r$  que contém a mediana relativa ao vértice  $B$ .
- 12) Verificar se os pontos  $P_1(5, -5, 6)$  e  $P_2(4, -1, 12)$  pertencem à reta
- $$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$
- 13) Determinar o ponto da reta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$  que possui
- abscissa 5;
  - ordenada 2.
- 14) Obter o ponto de abscissa 1 da reta  $r: \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z+4$  e encontrar um vetor diretor de  $r$  que tenha ordenada 2.
- 15) Obter equações reduzidas na variável  $x$ , da reta
- que passa por  $A(4, 0, -3)$  e tem a direção de  $\vec{v} = (2, 4, 5)$ ;
  - pelos pontos  $A(1, -2, 3)$  e  $B(3, -1, -1)$ ;
  - pelos pontos  $A(-1, 2, 3)$  e  $B(2, -1, 3)$ ;
  - dada por 
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$$
- 16) Escrever equações reduzidas na variável  $z$  da reta que passa por  $A(-1, 6, 3)$  e  $B(2, 2, 1)$ .
- 17) Na reta  $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ , determinar o ponto de
- ordenada igual a 9;
  - abscissa igual ao dobro da cota;
  - ordenada igual ao triplo da cota.
- 18) Representar graficamente as retas de equações
- $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$
  - $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$
  - $x = y = z$
  - $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$
  - $\begin{cases} y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$
  - $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$
  - $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$
  - $\begin{cases} x = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

- 19) Determinar equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por
- a)  $A(3, -2, 4)$  e é paralela ao eixo dos  $x$ ;
  - b)  $A(2, 2, 4)$  e é perpendicular ao plano  $xOz$ ;
  - c)  $A(-2, 3, 4)$  e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos  $x$  e dos  $y$ ;
  - d)  $A(4, -1, 3)$  e tem a direção de  $3\vec{i} - 2\vec{j}$ ;
  - e)  $A(3, -1, 3)$  e  $B(3, 3, 4)$ .
- 20) Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto  $A(4, -5, 3)$  e são, respectivamente, paralelas aos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ .
- 21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:
- a)  $r_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$  e  $r_2 : \frac{x}{2} = \frac{y + 6}{1} = \frac{z - 1}{1}$
  - b)  $r_1 : \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$  e  $r_2 : y = \frac{z + 1}{-1}; x = 4$
  - c)  $r_1 : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
  - d)  $r_1 : \frac{x - 4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{-2}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z - 2}{3} \end{cases}$
- 22) Determinar o valor de  $n$  para que seja de  $30^\circ$  o ângulo entre as retas
- a)  $r_1 : \frac{x - 2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$  e  $r_2 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$
  - b)  $r_1 : \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$  e  $r_2 : \text{eixo } Oy$
- 23) Sabendo que as retas  $r_1$  e  $r_2$  são ortogonais, determinar o valor de  $m$  para os casos:
- a)  $r_1 : \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$
  - b)  $r_1 : \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$  e  $r_2 : \text{reta por } A(1, 0, m) \text{ e } B(-2, 2m, 2m)$
-

24) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas  $r_1$  e  $r_2$ , nos casos:

a)  $A(3, 2, -1)$   $r_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

b)  $A(0, 0, 0)$   $r_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$  e  $r_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$

c) A é a interseção de  $r_1$  e  $r_2$

$r_1: x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$  e  $r_2: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

25) Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

a)  $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

b)  $r_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$  e  $r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$

c)  $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$  e  $r_2: x = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$

d)  $r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$

e)  $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$  e  $r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

f)  $r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

26) Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a)  $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$  e  $r_2: x - 5 = \frac{y}{m} = z + 1$

b)  $r_1: \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$  e  $r_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-2}$

27) Dadas as retas

$$r_1: \frac{x-1}{2} = -y; z = 3 \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},$$

encontrar equações reduzidas na variável  $x$  da reta que passa por  $A(0, 1, 0)$  e pelo ponto de interseção de  $r_1$  com  $r_2$ .

28) Determinar na reta  $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

um ponto equidistante dos pontos  $A(2, -1, -2)$  e  $B(1, 0, -1)$ .

29) Determinar os pontos da reta

$$r: x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 + 2t \quad \text{que}$$

a) distam 6 unidades do ponto  $A(2, 1, 3)$ ;

b) distam 2 unidades do ponto  $B(1, -1, 3)$ .

30) Escrever equações reduzidas da reta que passa por  $A(1, 3, 5)$  e intercepta o eixo dos  $z$  perpendicularmente.

31) Escrever equações reduzidas na variável  $z$ , de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:

a) passa por  $A(4, -2, 2)$  e é paralela à reta  $r: x = 2y = -2z$ ;

b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas

$$r: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = 2z-2 \quad \text{e} \quad s: x = -y = -z.$$

32) Determinar o ângulo que a reta que passa por  $A(3, -1, 4)$  e  $B(1, 3, 2)$  forma com a sua projeção sobre o plano  $xy$ .

33) Apresentar equações paramétricas da projeção da reta

$$r: \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases} \quad \text{sobre o plano } xy.$$

34) Dados o ponto  $A(3, 4, -2)$  e a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t, \end{cases}$$

a) determinar equações paramétricas da reta que passa por  $A$  e é perpendicular a  $r$ ;

b) calcular a distância de  $A$  a  $r$ ;

c) determinar o ponto simétrico de  $A$  em relação a  $r$ .

---



# Respostas de Problemas Propostos

- 1)  $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$ ,  $C \in r$  e  $D \notin r$ .
- 2)  $x = -1 + 2t$      $y = 2 - 3t$      $z = 3$
- 3)  $x = 1$      $y = 2$      $z = 3 + t$
- 4) a)  $(-1, 6, -10)$     b)  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$     c)  $(-4, 9, -16)$
- 5)  $m = 13, n = -15$
- 6) a)  $x = 1 + t$      $y = -1 + 2t$      $z = 2 - 2t$   
 b)  $x = 3$      $y = 1 - 3t$      $z = 4 - 2t$   
 c)  $x = 1$      $y = 2 + t$      $z = 3 - t$   
 d)  $x = 0$      $y = t$      $z = 0$  (eixo Oy)
- 7) a)  $x = 2 + 2t$      $y = 0$      $z = 4$   
 b)  $x = 2t$      $y = 3$      $z = 0$   
 c)  $x = 2$      $y = 3t$      $z = 4 - 4t$   
 d)  $x = 0$      $y = 3t$      $z = 4 - 4t$   
 e)  $x = 2$      $y = 3 + 3t$      $z = 0$   
 f)  $x = 2t$      $y = 3t$      $z = 4 - 4t$
- 8)  $P(2, 1, 9)$
- 9)  $x = 2 + t$      $y = -1 - \frac{3}{2}t$      $z = 4 + 2t$
- 10)  $x = 2 + t$      $y = -1 + 4t$      $z = 3 - 5t$
- 11) AB:  $x = -1 + 3t$      $y = 1$      $z = 3 + t$     com  $t \in [0,1]$   
 AC:  $x = -1 + 4t$      $y = 1 - 2t$      $z = 3 - 4t$     com  $t \in [0,1]$   
 BC:  $x = 2 + t$      $y = 1 - 2t$      $z = 4 - 5t$     com  $t \in [0,1]$   
 r:  $x = 2 + t$      $y = 1 + t$      $z = 4 + 3t$
- 12) Apenas  $P_1$
- 13)  $(5, -5, 8)$  e  $(-9, 2, -20)$
- 14)  $(1, \frac{4}{3}, -3)$  e  $\vec{v} = (\frac{9}{2}, 2, 3)$
- 15) a)  $y = 2x - 8$  e  $z = \frac{5}{2}x - 13$     c)  $y = -x + 1$  e  $z = 3$   
 b)  $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$  e  $z = -2x + 5$     d)  $y = -3x + 6$  e  $z = -4x + 3$
- 16)  $x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$  e  $y = 2z$
- 17) a)  $(3, 9, 2)$     b)  $(2, 7, 1)$     c)  $(6, 15, 5)$

19) a)  $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$       e)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20)  $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$        $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$        $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21) a)  $60^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $30^\circ$       d)  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48^\circ 11'$

22) a) 7 ou 1      b)  $\pm\sqrt{15}$

23) a)  $m = -\frac{7}{4}$       b) 1 ou  $-\frac{3}{2}$

24) a)  $x = 3 + t$        $y = 2 - t$        $z = -1$   
b)  $x = 2t$        $y = 6t$        $z = -5t$   
c)  $x = 2 + t$        $y = -1 - 5t$        $z = 3t$

25) a) (2, 1, 3)      b) (1, 2, -2)      c) reversas      d) (3, 8, 12)  
e) reversas      f) coincidentes

26) a) -3      b) 4

27)  $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28)  $\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

29) a) (4, 5, 7) e (0, -3, -1)      b)  $\left(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9}\right)$  e (1, -1, 1)

30)  $y = 3x, z = 5$

31) a)  $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32)  $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

33)  $x = 1 + t$        $y = -2 + 5t$        $z = 0$

34) a)  $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$       b)  $\sqrt{20}$       c) (-5, 4, 2)