Derivadas

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Introdução

Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Limites do tipo

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{1}$$

ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física. Consideremos, por exemplo, o problema de definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular.

Determinação da reta tangente

Consideremos, então, a reta s_x que passa pelos pontos $(p,(p))$ e $(x, f(x))$.

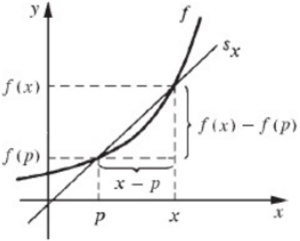

Figura 1: Reta secante s_x.

O coeficiente angular de s_x é dado por:

$$a_s = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \tag{2}$$

Coeficiente angular da reta tantente

Quando x tende a p, o coeficiente angular de s_x tende a $f'(p)$, onde

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \tag{3}$$

Observe que $f'(p)$ (leia: f linha de p) é apenas uma notação para indicar o valor do limite acima.

Determinação da reta tangente

Assim, à medida que x vai se aproximando de p, a reta s_x vai tendendo para a posição da reta T de equação

$$y - f(p) = f'(p)\,(x - p) \tag{4}$$

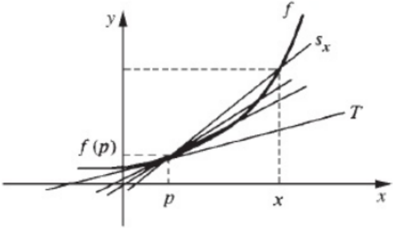

Figura 2: Reta Tangente T.

É natural, então, definir a reta tangente em $(p, f(p))$ como a reta de equação 4.

Exemplo - física

Example

Suponhamos, agora, que $s = f(t)$ seja a equação horária do movimento de uma partícula vinculada a uma reta orientada na qual se escolheu uma origem. Isto significa dizer que a função f fornece a cada instante a abscissa ocupada pela partícula na reta. A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é definida pelo quociente

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{5}$$

A velocidade (instantânea) da partícula no instante t_0 é definida como o limite

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - t(t_0)}{t - t_0}. \tag{6}$$

Definição de derivada

Definition

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{7}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{8}$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

Observações

Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $A \subset D_f$ se f for derivável em cada $p \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função dervável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto de seu domínio. Segue das propriedades dos limites que

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \tag{9}$$

Conforme vimos na anteriormente, a reta de equação

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \tag{10}$$

é, por definição, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Assim, a derivada de f, em p, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = x^2$. Calcule.

a) $f'(1)$
b) $f'(x)$
c) $f'(-3)$

Example

Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao grárfico de f no ponto

a) $(1, f(1))$.
b) $(-1, .f(-1))$.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = \kappa$ uma função constante. Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x. (A derivada de uma constante é zero.)

Example

Seja $f(x) = x$. Prove que $f'(x) = 1$, para todo x.

Example

Seja $f(x) = \sqrt{(}x)$. Calcule $f'(2)$.

Exemplos

Example

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Calcule, caso exista, $f'(0)$.

Example

Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.

Observação

Sejam f uma função e $(p, f(p))$ um ponto de seu gráfico. Seja s_x a reta que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$. Se $f'(p)$ existir, então o gráfico de f admitirá reta tangente T em $(p, f(p))$; neste caso, à medida que x se aproxima de p, quer pela direita, quer pela esquerda (só pela direita, se f não estiver definida à esquerda de p; só pela esquerda, se f não estiver definida à direita de p), a reta s_x tenderá para a posição da reta T

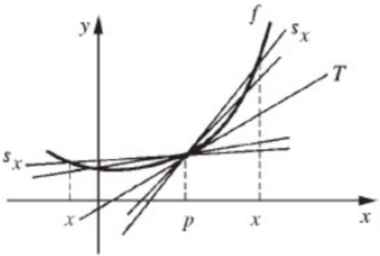

Figura 3: Reta secante tendendo à posição da reta tangente.

Observações

Por outro lado, se, à medida que x tender a p pela direita, s_x se aproximar da posição de uma reta T_1 e se à medida que x se aproximar de p pela esquerda, s_x se aproximar da posição de uma outra reta T_2, $T_1 \neq T_2$, então o gráfico de f não admitirá reta tangente em $(p, f(p))$, ou seja, $f'(p)$ não existirá.

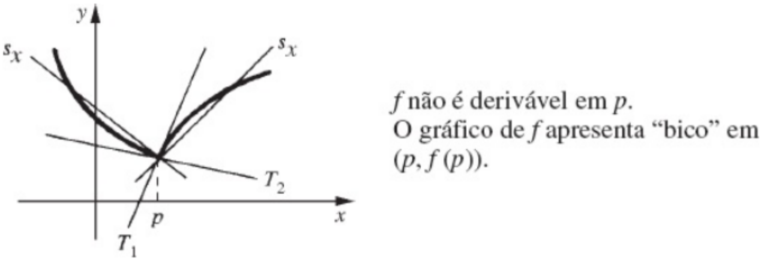

Figura 4: Gráfico de f apresenta "bico" em p.

Exemplos

Example

Suponha f derivável em p e seja $\rho(x)$, $x \in D_f$ e $x \neq p$, dada por

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \rho(x)(x-p). \tag{12}$$

Mostre que

$$\lim_{x \to p} \rho(x) = 0. \tag{13}$$

Observações

Se definirmos $(p) = 0$, então a igualdade que aparece no exemplo anterior será válida em $x = p$ e a função $\rho(x)$ tornar-se-á contínua em p. Façamos no exemplo anterior $E(x) = \rho(x)(x - p)$. Então, $E(x)$ será o erro que se comete na aproximação de f pela reta tangente em $(p, (p))$.

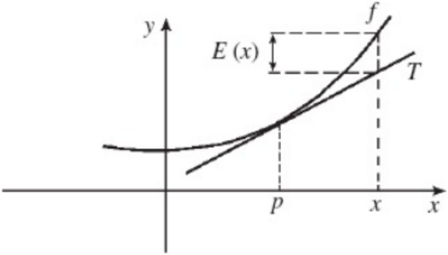

Figura 5: Erro que se comete ao aproximar f por T.

Observações

Quando x tende a p, evidentemente $E(x)$ tende a zero. O exemplo anterior nos diz mais: nos diz que quando x tende a p o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - p)$, isto é,

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x - p} = 0. \tag{14}$$

Fica para o leitor verifique que, entre todas as retas que passam por $(p, f(p))$, a reta tangente em $(p, f(p))$ é a única que aproxima $f(x)$ de modo que o erro tenda a zero mais rapidamente que $x - p$. (Sugestão: Suponha que $E(x)$ seja o erro que se comete na aproximação de f pela reta passando por $(p, f(p))$, com coeficiente angular $m \neq f'(p)$, e calcule o limite acima.)

Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$

Theorem

Seja $n \neq 0$ *um natural. São válidas as fórmulas de derivação:*

a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.

b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$.

c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, *em que* $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar* $(n \geq 2)$.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = x^4$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'(\frac{1}{2})$.

Example

Seja $f(x) = x^3$.

a) Calcule $f'(x)$.

b Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Exemplos

Example

Calcule $f'(x)$ sendo

a) $f(x) = x^{-3}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

Example

Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$.

Example

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 8.

Theorem

São válidas as fórmulas de derivação

a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.

b) $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$.

Exercícios

Example

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

Example

Determine a equação da retatangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

Theorem

São válidas as fórmulas de derivação.

a) $\sin' x = \cos x$

b) $cos' x = -\sin x$

c) $\tan' x = \sec^2 x$

d) $\sec' x = \sec x \tan x$

e) $\cot' x = -\csc^2 x$

f) $\csc' x = -\csc x \cot x$

Exercícios

Example

Seja $f(x) = \sin x$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Example

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sin x$ no ponto de abscissa 0.

A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$ (Figura 6); entretanto, esta função é contínua em $p = 0$, o que nos mostra que uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável neste ponto.

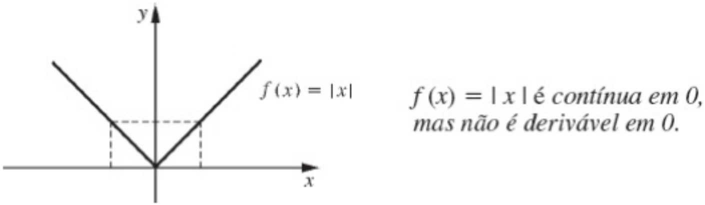

Figura 6: Derivabilidade e continuidade.

Deste modo, continuidade não implica derivabilidade. Entretanto, derivabilidade implica continuidade, como mostra o seguinte teorema.

Derivabilidade e continuidade

Theorem

Se f for derivável em p, então f será contínua em p.

Observação. Segue do teorema que, se f não for contínua em p, então f não poderá ser derivável em p.

Exemplos

Example

A função $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 2 \text{ se } x > 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$? Por quê?

Example

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x > 1. \end{cases}$

a) f é contínua em 1?

b) f é diferenciável em 1?

Exemplo

Example

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 2x - 1 \text{ se } x > 1. \end{cases}$

a) f é derivável em 1?

b) f é contínua em 1?

Theorem

Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f+g$, kf e $f.g$ são deriváveis em p e têm-se

(D1) $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

(D2) $(kf)'(p) = kf'(p)$.

(D4) $(f.g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

Regra do quociente

Theorem

Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será derivável em p e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}. \quad \text{(D4)}$$

(Em palavras: a derivada de um quociente é igual à derivada do numerador multiplicado pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador.)

Example

Seja $f(x) = 4x^3 + x^2$. Calcule.

a) $f'(x)$.
b) $f'(1)$.

Example

Calcule $g'(x)$ em que $g(x) = 5x^4 + 4$.

Example

Calcule $f'(x)$ em que $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$.

Example

Seja $f(x) = \left(3x^2 + 1\right) e^x$. Calcule $f'(x)$.

Exemplos

Example

Seja $h(x) = \frac{\sin x}{x+1}$. Calcule $h'(x)$.

Example

Seja $f(x) = x^3 + \ln x$. Calcule $f'(x)$.

Example

Sejam f_1, f_2, ..., f_n, $n \geq 2$, funções deriváveis em p. Prove, por indução finita, que $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ é derivável em p e que

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(p) = f_1'(p) + \ldots + f_n'(p). \tag{15}$$

Example

Calcule a derivada

a) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2.$

b) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}.$

Função derivada e derivadas de ordem superior

Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se função derivada ou, simplesmente, derivada de f; diremos, ainda que f' é a derivada de 1^a ordem de f. A derivada de 1^a ordem de f é também indicada por $f^{(1)}$. A derivada de f' denomina-se derivada de 2^a ordem de f e é indicada por f'' ou $f^{(2)}$, assim, $f'' = (f')'$. De modo análogo, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$. Determine, f', f'' e f'''.

Example

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

Esboce os gráficos de f e f'.

Notações para a derivada

Frequentemente, usamos expressões do tipo $y = f(x)$, $s = f(t)$, $u = f(v)$ etc. par aindicar uma função. Em $y = f(x)$, y é a variável dependente e x a variável independente; em $s = f(t)$, s é a variável dependente e t a variável independente.
Se a função vem dada por $y = f(x)$, a notação, devida a Leibniz, $\frac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x) é usada para indicar a derivada de f em x: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. De acordo com a definição de derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{16}$$

Notação para a derivada

Observe que o símbolo Δx (leia: delta x) desempenha aqui o mesmo papel que o h em $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Fazendo $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{17}$$

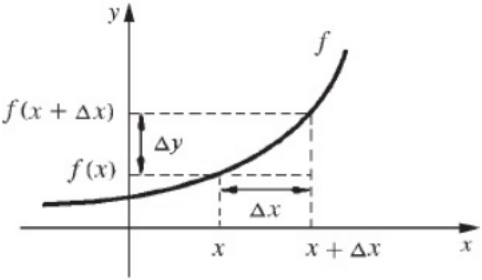

Figura 7: Quociente de Newton.

Notação de Leibniz

A notação $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ é usada para indicar a derivada de $y = f(x)$ em $x = x_0$: $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = f'(x_0)$.
Usaremos, ainda, a notação $\frac{df}{dx}$ para indicar a função derivada de $y = f(x) : \frac{df}{dx} = f'$.
A derivada de $y = f(x)$, em x, será indicada por $\frac{df}{dx}(x) : f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.
Se a função f for dada por $s = f(t)$, as notações $\frac{ds}{dt}$ e $\frac{df}{dt}(t)$ serão usadas para indicar $f'(t)$.
Pela definição de derivada

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{18}$$

em que $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$.

Exemplos

Example

Seja $y = 5x^3 + x^2$. Calcule a derivada.

Example

Calcule $\frac{ds}{dt}$ sendo $s = \frac{5t}{t^2+1}$.

Example

Seja $y = u^2$. Calcule $\frac{dy}{du}$, pela definição.

Exemplos

Example

Calce.

a) $\frac{d}{dx}\left[x^2 - 5x\right]$.

b) $\frac{d}{dt}[\cos t]$.

c) $\frac{d}{du}\left[u^2 - 5u\right]$.

d) $\frac{d}{dt}[u \tan u]$.

Example

Seja $x = t^2 \sin t$. Calcule.

a) $\frac{dx}{dt}$.

b) $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=\pi}$.

Exemplos

Example

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis num mesmo conjunto A. Segue das regras de derivação que para todo $x \in A$, tem-se

a) $y = u + v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[u + v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

b) $y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$.

c) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ em todo $x \in A$, com $v(x) \neq 0$.

Exemplos

Example

Seja $y = u^2$ em que $u = u(x)$ é uma função derivável. Verifique que $\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}$.

Example

Calcule $\frac{dy}{dx}$, em que $y = \left(x^2 + 3x\right)^2$.

Example (Regra da cadeia: um caso particular)

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis e tais que, para todo x no domínio de g, $g(x)$ pertença ao domínio de f. Suponhamos, ainda, que

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0 \tag{19}$$

para todo x e $x + \Delta x$ no domínio de g, com $\Delta x \neq 0$. Nestas condições, a composta $y = f(g(x))$ é derivável e vale a regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{20}$$

em que $\frac{dy}{du}$ deve ser calculada em $u = g(x)$.

Observação

De $\frac{dy}{du} = f'(u)$ e $\frac{du}{dx} = g'(x)$ temos, também,

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x), \ \ u = g(x), \tag{21}$$

ou seja,

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x). \tag{22}$$

Seja $y = f(x)$. A notação $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ será usada para indicar a derivada de segunda ordem de f, em x, isto é, $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$. A derivada de 3^a ordem será, também, indicada por $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e assim por diante.

Exemplos

Example

Seja $y = t^3 x$ em que $x = x(t)$ é uma função derivável até a 2^a ordem. Verifique que

a) $\frac{dy}{dt} = 3t^2 x + t^3 \frac{dx}{dt}$.

b) $\frac{d^2y}{dt^2} = 6tx + 6t^2 \frac{dx}{dt} + t^3 \frac{d^2x}{dt^2}$.

A regra da cadeia

Diferenciação implícita

Taxas relacionadas