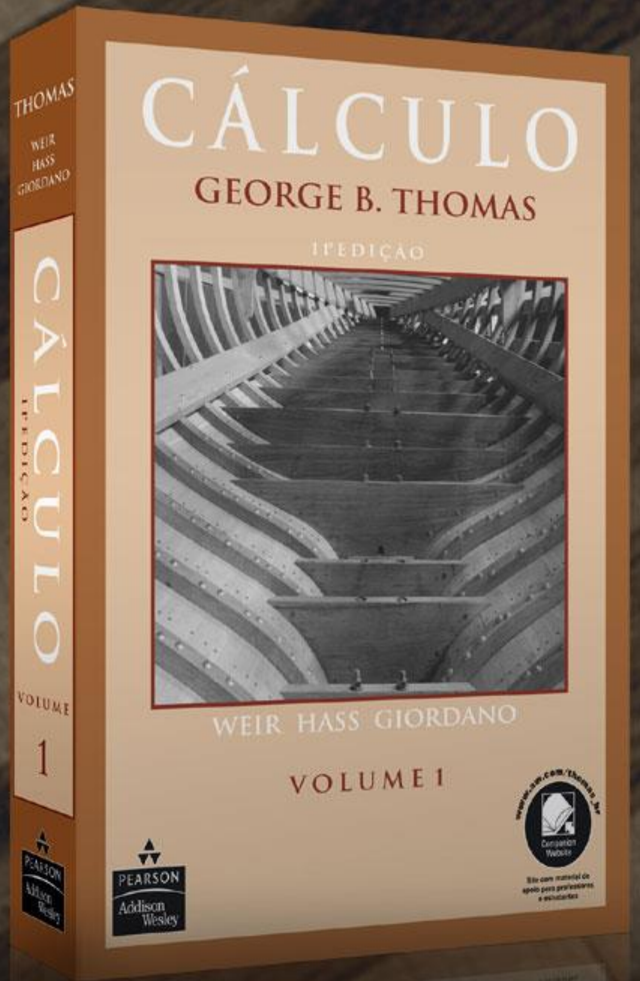
Capítulo 8

Técnicas de integração



Seção 8.1 - Fórmulas de Integração Básica

TABELA 8.1 Fórmulas de integração básica

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$ (qualquer número k)
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$
9. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$
10. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$
11. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$
12. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C = -\ln|\operatorname{cosec} u| + C$
14. $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
16. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$
21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C \qquad (u > a > 0)$

Realizando uma substituição para simplificar

- Exemplo 1: Calcule $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx$. (Exercício)

Completando o quadrado

- Exemplo 2: Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

Expandindo uma potência e usando uma identidade trigonométrica

- Exemplo 3: Calcule $\int (\sec x + \operatorname{tg} x)^2 \, dx$.

Eliminando uma raiz quadrada

- Exemplo 4: Calcule $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos(4x)}\,dx$.

Reduzindo uma fração imprópria

- Exemplo 5: Calcule $\int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2} dx$.

Separando uma fração

- Exemplo 6: Calcule $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Integral de $y = \sec x$ - multiplicando por 1

- Exemplo 7: Calcule $\int \sec x \, dx$.

TABELA 8.2 As integrais de secante e cossecante

1. $$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

2. $$\int \operatorname{cosec} u\, du = -\ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u| + C$$

Procedimento para adequar integrais a fórmulas básicas

Procedimento	Exemplo
Fazendo uma substituição para simplificar	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Completando o quadrado	$\sqrt{8x-x^2} = \sqrt{16-(x-4)^2}$
Usando uma identidade trigonométrica	$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$ $= \sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2\sec^2 x + 2\sec x \operatorname{tg} x - 1$
Eliminando uma raiz quadrada	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\,\lvert\cos 2x\rvert$
Reduzindo uma fração imprópria	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x+2}$
Separando uma fração	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
Multiplicando por uma forma de 1	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$ $= \dfrac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

Seção 8.2 – Integração por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

Fórmula da integração por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

Fórmula da integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad (3)$$

Usando integração por partes

- Exemplo 1: Determine $\int x \cos x \, dx$.
- Exemplo 3: Calcule $\int \ln x \, dx$.
- Exemplo 4: Calcule $\int x^2 e^x dx$.
- Exemplo 5: Calcule $\int e^x \cos x \, dx$.
- Exemplo 6: Encontre a área da região delimitada pela curva $y = xe^{-x}$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = 4$.

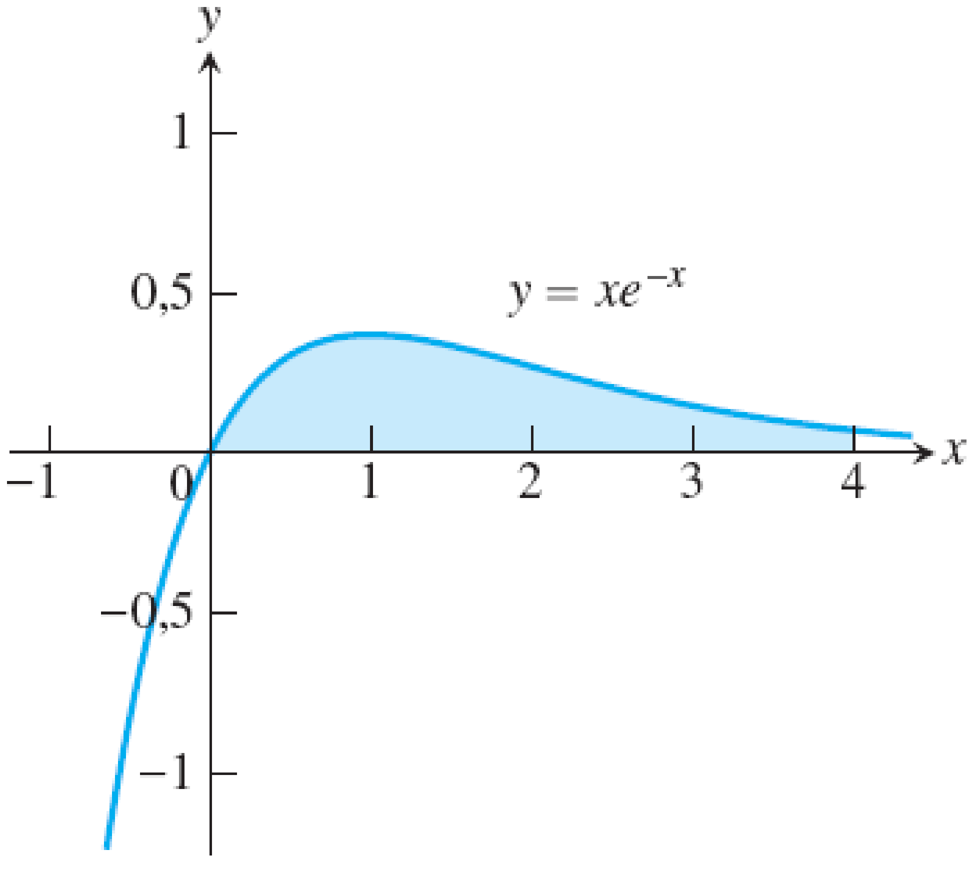


FIGURA 8.1 A região do Exemplo 6.

Seção 8.3 – Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Método de frações parciais (f(x)/g(x) própria)

1. Seja $x - r$ um fator linear de $g(x)$. Suponha que $(x - r)^m$ seja a maior potência de $x - r$ que divide $g(x)$. Então, associe a esse fator a soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}$$

Faça isso para cada fator linear distinto de $g(x)$.

2. Seja $x^2 + px + q$ um fator quadrático de $g(x)$. Suponha que $(x^2 + px + q)^n$ seja a maior potência desse fator que divide $g(x)$. Então, atribua a esse fator a soma de n frações parciais:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

Faça isso para cada fator quadrático distinto de $g(x)$ que não pode ser decomposto como produto de fatores lineares com coeficientes reais.

3. Iguale a fração original $f(x)/g(x)$ à soma de todas essas frações parciais. Elimine as frações da equação resultante e organize os termos em potências decrescentes de x.

4. Iguale os coeficientes das potências correspondentes de x e resolva o sistema de equações obtido desse modo para encontrar os coeficientes indeterminados.

Fatores lineares distintos

- Exemplo 1: Calcule $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$ usando frações parciais.

Um fator linear repetido

- Exemplo 2: Calcule $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$.

Integrando uma fração imprópria

- Exemplo 3: Calcule $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$. Note que $\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$

Fator quadrático irredutível no denominador

- Exemplo 4: Calcule $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$ usando frações parciais.

Um fator quadrático irredutível repetido

- Exemplo 5: Calcule $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

Método de Heaviside

1. *Escreva o quociente com $g(x)$ fatorado:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}$$

2. *Oculte os fatores $(x - r_i)$ de $g(x)$, um de cada vez,* substituindo a cada vez todos os x não ocultos por r_i. Isso dá um número A_i para cada raiz r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1 - r_2)\cdots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\cdots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\cdots(r_n - r_{n-1})}$$

3. *Escreva a decomposição em frações parciais de $f(x)/g(x)$* como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - r_n)}$$

Seção 8.4 – Integrais Trigonométricas

Produtos de potências de senos e cossenos

Começamos com integrais da forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

onde m e n são inteiros não negativos (positivos ou zero). Podemos dividir a tarefa em três casos possíveis.

Caso 1 Se m é ímpar, escrevemos m como $2k + 1$ e usamos a identidade $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obter

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x \qquad (1)$$

Então, combinamos o único sen x com dx na integral e igualamos sen $x\, dx$ a $-d(\cos x)$.

Caso 2 Se m é par e n é ímpar em $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, escrevemos n como $2k + 1$ e usamos a identidade $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para obter

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x$$

Então, combinamos o único $\cos x$ com dx e igualamos $\cos x\, dx$ a $d(\operatorname{sen} x)$.

Caso 3 Se tanto m quanto n são pares em $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, substituímos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{2}$$

para reduzir o integrando a outro que tenha potências mais baixas de $\cos 2x$.

Estudando os três casos

- Exemplo 1: Calcule $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$.
- Exemplo 2: Calcule $\int \cos^5 x \, dx$.
- Exemplo 3: Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Eliminando raízes quadradas

- Exemplo 4: Calcule $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos(4x)}\, dx$. (Exercício)

Integrais de potências de tg x e sec x

- Exemplo 5: Calcule $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$.
- Exemplo 6: Calcule $\int \sec^3 x\, dx$.

As integrais

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx \qquad \text{e} \qquad \int \cos mx \cos nx\, dx$$

costumam aparecer quando funções trigonométricas são aplicadas a problemas de matemática e ciência. Podemos calcular essas integrais usando integração por partes, mas sempre serão necessárias duas integrações desse tipo em cada caso. É mais simples usar as identidades

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \tag{3}$$

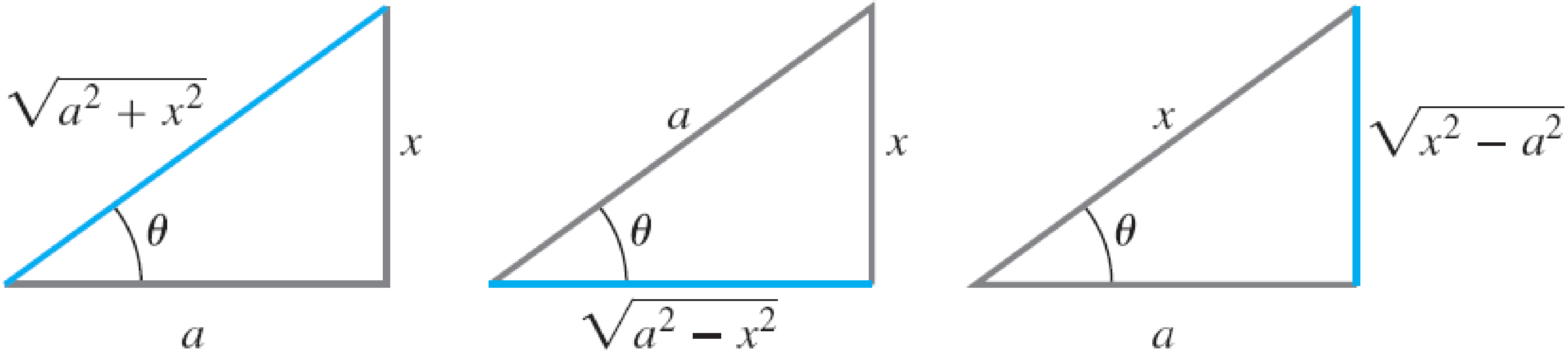
$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x] \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \tag{5}$$

Produtos de senos e cossenos

- Exemplo 7: Calcule $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(5x)\,dx$.

Seção 8.5 – Substituições Trigonométricas



$x = a \text{ tg } \theta$ $\qquad$ $x = a \text{ sen } \theta$ $\qquad$ $x = a \sec \theta$

$\sqrt{a^2 + x^2} = a|\sec \theta|$ $\qquad$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos \theta|$ $\qquad$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\text{tg } \theta|$

FIGURA 8.2 Triângulos de referência para as três substituições básicas; eles ajudam a identificar os lados x e a para cada substituição.

Como já vimos na Seção 1.6, nessas substituições as funções têm inversas somente para valores selecionados de θ (Figura 8.3). Para reversibilidade,

$$x = a \operatorname{tg} \theta \quad \text{exige } \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{exige} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \sec \theta \quad \text{exige} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad \dfrac{x}{a} \geq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi & \text{se} \quad \dfrac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$$

Para simplificar os cálculos com a substituição $x = a \sec \theta$, restringiremos seu uso a integrais nas quais $x/a \geq 1$. Isso colocará θ em $[0, \pi/2)$ e tornará $\operatorname{tg} \theta \geq 0$. Teremos, então, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = |a \operatorname{tg} \theta| = a \operatorname{tg} \theta$, livre de valores absolutos, desde que $a > 0$.

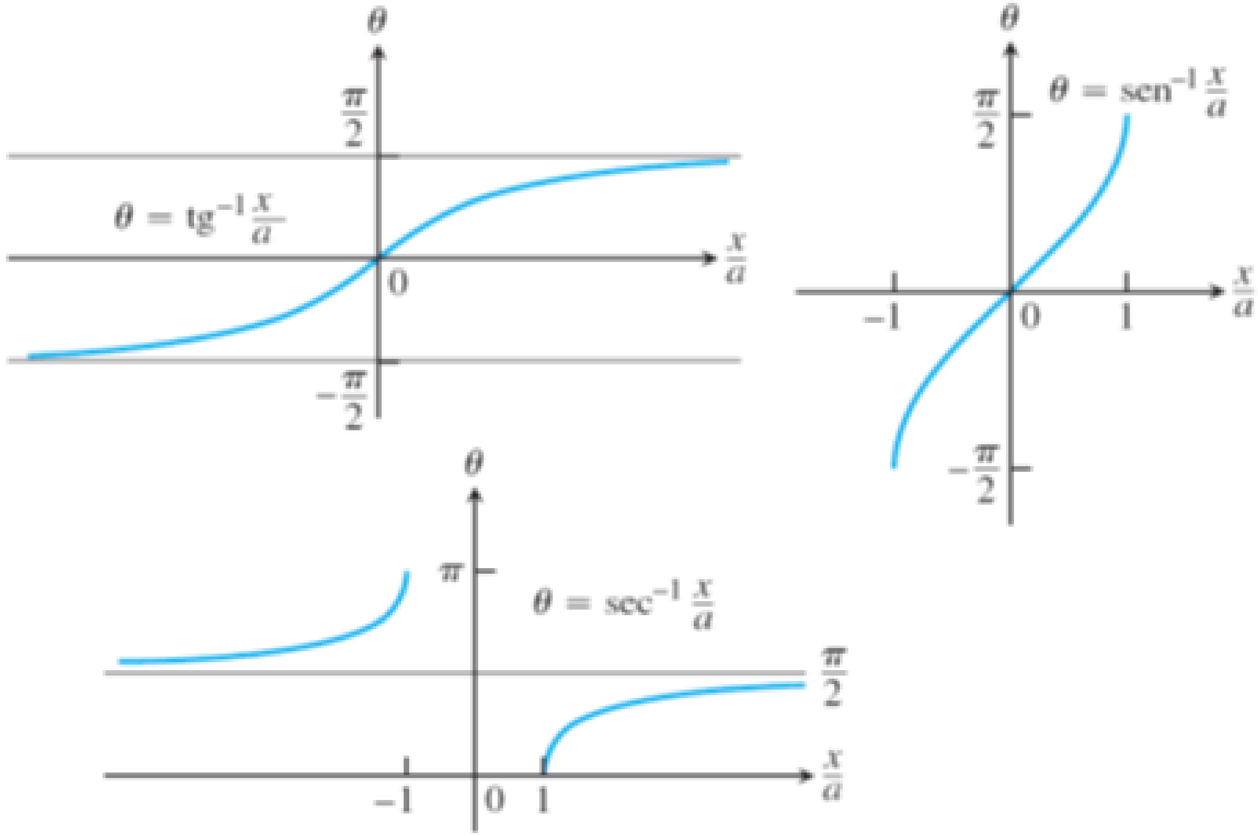


FIGURA 8.3 O arco tangente, o arco seno e o arco secante de x/a, representados graficamente como funções de x/a.

Usando a substituição $x = a \operatorname{tg} \theta$

- Exemplo 1: Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

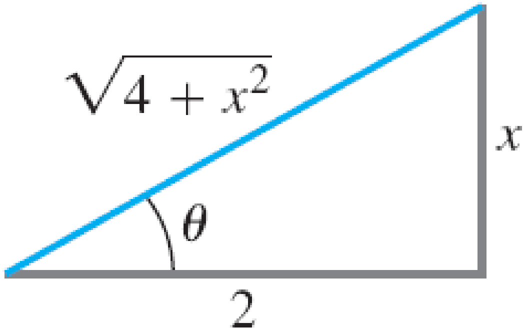


FIGURA 8.4 Triângulo de referência para $x = 2 \operatorname{tg} \theta$ (Exemplo 1):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2}$$

e

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

Usando a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$

- Exemplo 2: Calcule $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

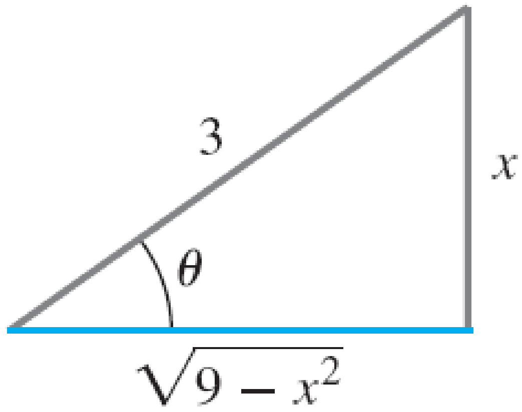


FIGURA 8.5 Triângulo de referência para $x = 3 \text{ sen } \theta$ (Exemplo 2):

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{3}$$

e

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

Usando a substituição $x = a \sec\theta$

- Exemplo 3: Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, x > \frac{2}{5}$.

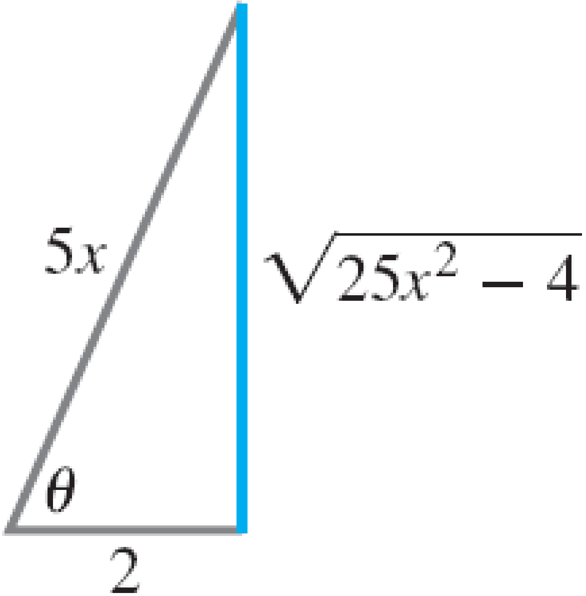


FIGURA 8.6 Se $x = (2/5) \sec \theta$, $0 \le \theta < \pi/2$, então $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$ e podemos ler os valores de outras funções trigonométricas de θ nesse triângulo retângulo (Exemplo 3).

Seção 8.8 – Integrais Impróprias

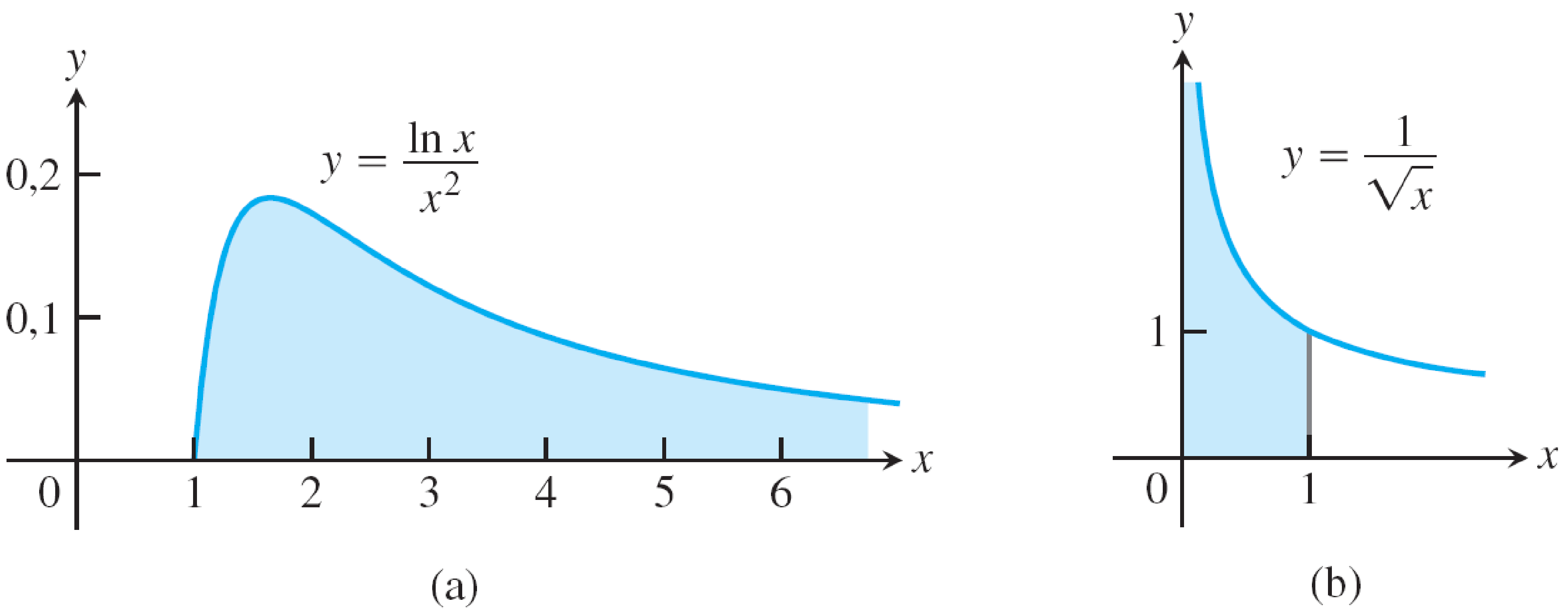


FIGURA 8.17 As áreas sob essas curvas infinitas são finitas?

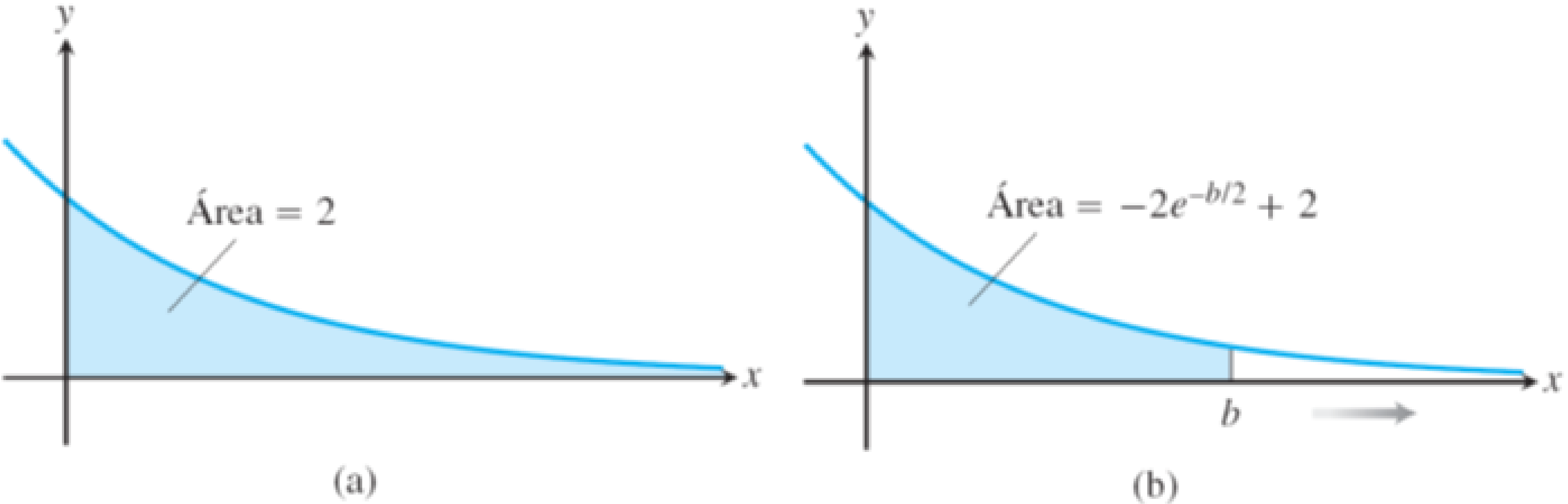


FIGURA 8.18 (a) A área no primeiro quadrante sob a curva $y = e^{-x/2}$ é (b) uma integral imprópria do primeiro tipo.

Definição **Integrais impróprias do tipo I**

Integrais com limites infinitos de integração são **integrais impróprias do tipo I**.

1. Se $f(x)$ é contínua em $[a, \infty)$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, \infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

onde c é qualquer número real.

Em todos os casos, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e que o limite é o **valor** da integral imprópria. Se o limite não existe, dizemos que a integral imprópria **diverge**.

Uma integral imprópria em $[1, +\infty)$

- Exemplo 1: A área sob a curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = +\infty$ é finita? Se for, qual será ela?

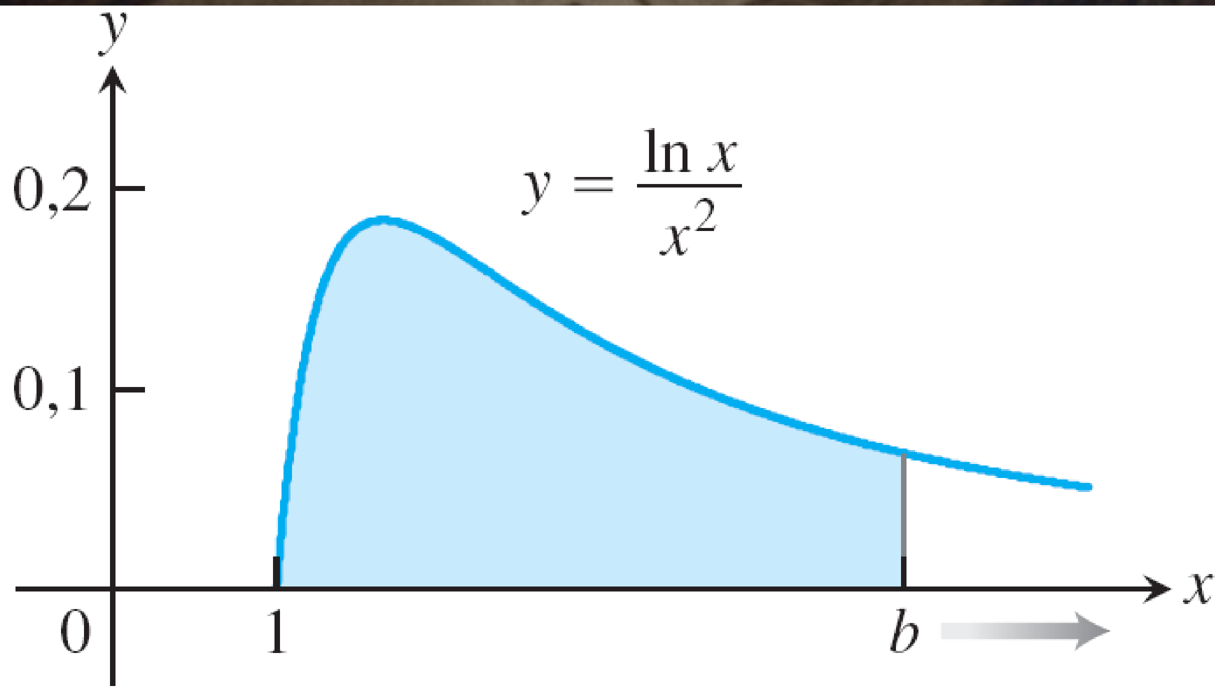


FIGURA 8.19 A área abaixo dessa curva é uma integral imprópria (Exemplo 1).

Uma integral imprópria em $(-\infty, +\infty)$

- Exemplo 2: Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

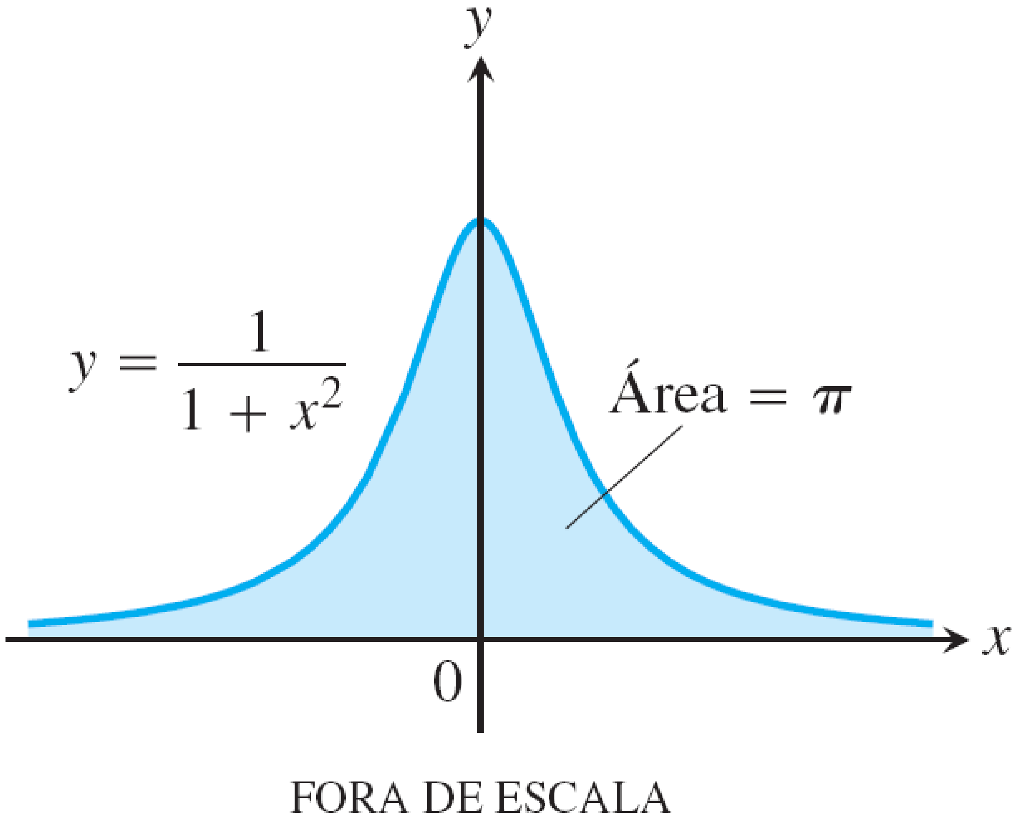


FIGURA 8.20 A área sob essa curva é finita (Exemplo 2).

EXEMPLO 3 Determinando a convergência

Para quais valores de p a integral $\int_1^\infty dx\,/\,x^p$ converge? Quando a integral converge, qual é o seu valor?

EXEMPLO 3 Determinando a convergência

SOLUÇÃO Se $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

Logo,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

porque

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a integral converge para o valor $1/(p-1)$ se $p > 1$ e diverge se $p < 1$.

Se $p = 1$, a integral também diverge:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln x\bigg]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

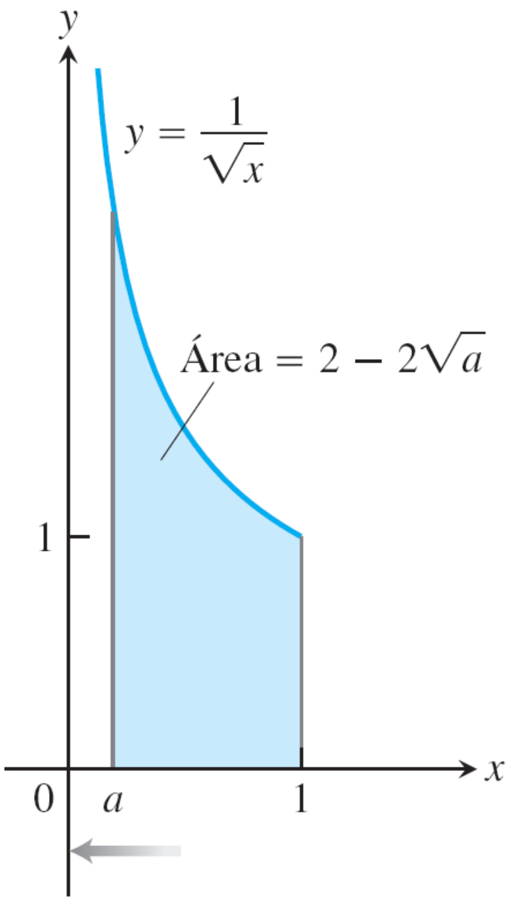


FIGURA 8.21 A área sob a curva é $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2$, uma integral imprópria do segundo tipo.

Definição **Integrais impróprias do tipo II**

Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são **integrais impróprias do tipo II**.

1. Se $f(x)$ é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. Se $f(x)$ é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

3. Se $f(x)$ é descontínua em c, onde $a < c < b$, e contínua em $[a, c) \cup (c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Em todos os casos, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e que o limite é o **valor** da integral imprópria. Se o limite não existe, dizemos que a integral imprópria **diverge**.

Uma integral imprópria divergente

- Exemplo 4: Verifique a convergência de $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$.

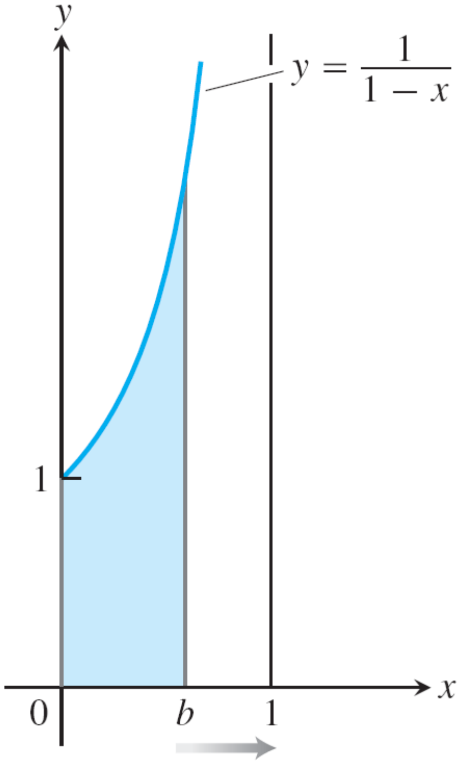


FIGURA 8.22 O limite não existe:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \infty.$$

A área sob a curva e acima do eixo x para $[0, 1)$ não é um número real (Exemplo 4).

Assíntota vertical em um ponto interior

- Exemplo 5: Calcule $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

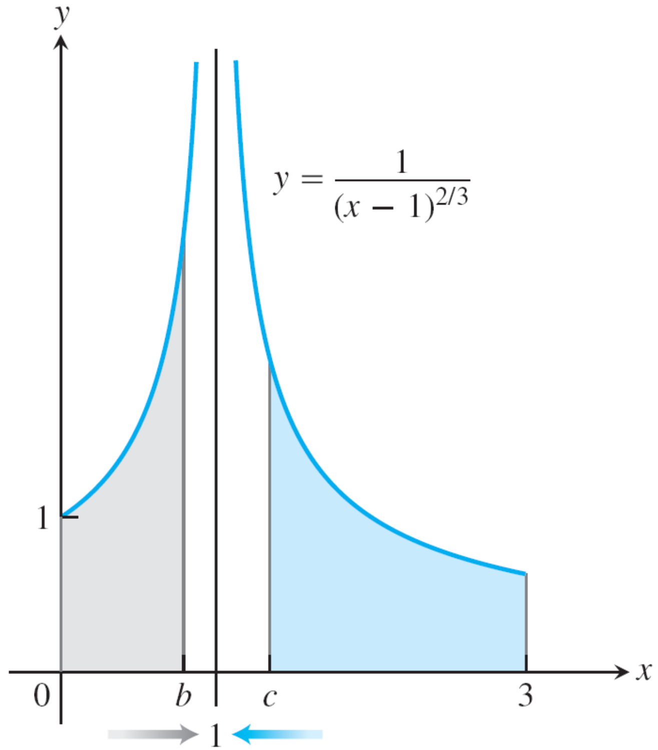


FIGURA 8.23 O Exemplo 5 mostra a convergência de $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$ portanto a área sob a curva existe (então se trata de um número real).

Uma integral imprópria convergente

- Exemplo 6: Calcule $\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx$. Use que $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}$ (exercício de frações parciais).

Um cálculo incorreto

- Exemplo 8: Calcule $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

Verificando a convergência

- Exemplo 9: A integral $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge?

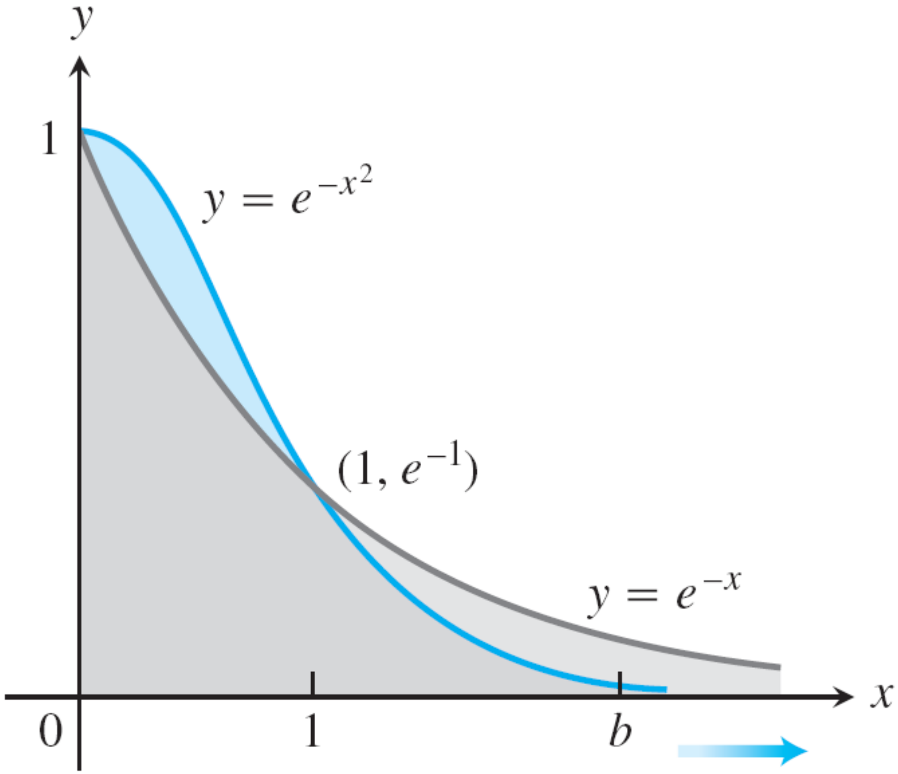


FIGURA 8.25 O gráfico de e^{-x^2} está abaixo do gráfico de e^{-x} para $x > 1$ (Exemplo 9).

Teorema 1 **Teste de comparação direta**

Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \geq a$.

Então

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge se $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge

2. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge se $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge

Usando o teste de comparação direta

- Exemplo 10: Estude a convergência das integrais

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx;$$

$$b)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}}\,dx.$$

Teorema 2 **Teste de comparação no limite**

Se as funções positivas f e g são contínuas em $[a, \infty)$ e se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

então

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{\infty} g(x)\, dx$$

são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Usando o teste de comparação no limite

- Exemplo 11: Mostre que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge por comparação com $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Calcule e compare os valores das duas integrais.

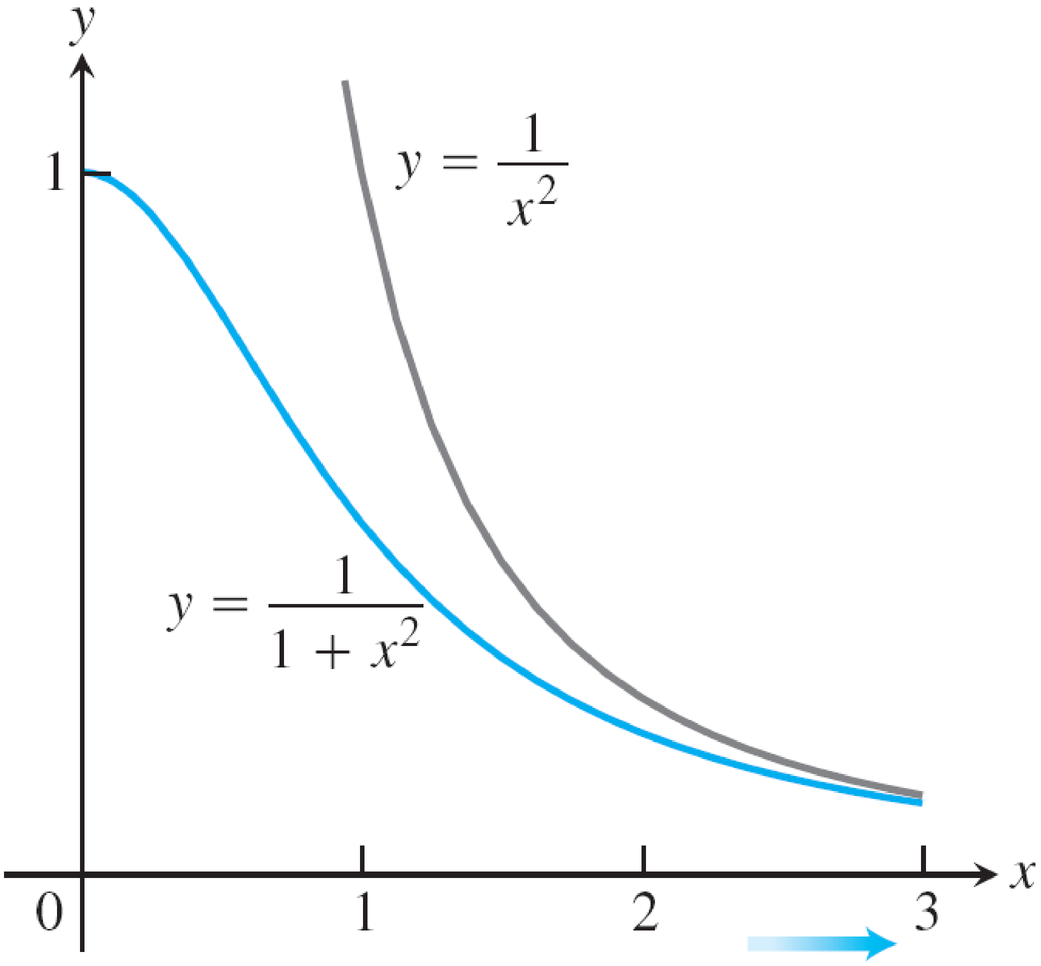


FIGURA 8.26 As funções do Exemplo 11.

Usando o teste de comparação no limite

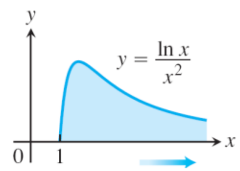
- Exemplo 12: Mostre que $\int_1^{+\infty} \frac{3}{e^x+5}\,dx$ converge.

Tipos de integrais impróprias discutidas nesta seção

Limites infinitos de integração: tipo I

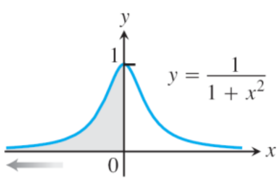
1. Limitante superior

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



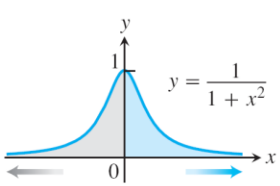
2. Limitante inferior

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Os dois limitantes

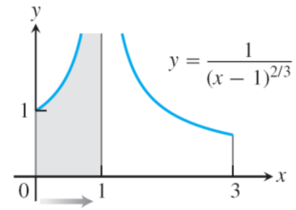
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} \frac{dx}{1+x^2}$$



O integrando se torna infinito: tipo II

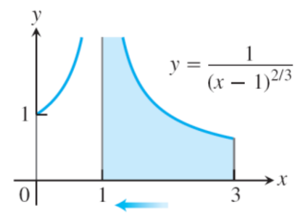
4. Extremidade superior

$$\int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-} \int_0^{b} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



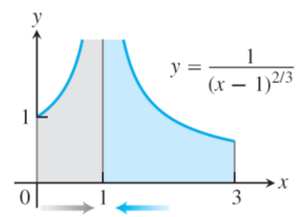
5. Extremidade inferior

$$\int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+} \int_d^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Ponto interior

$$\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



Figuras de exercícios

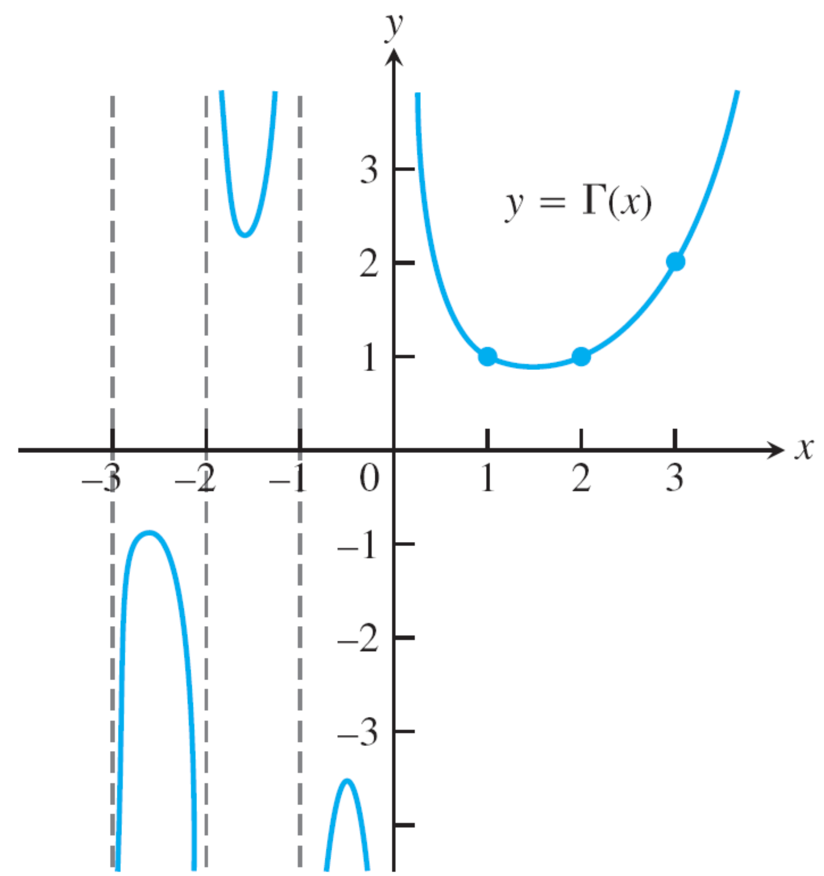


FIGURA 8.27 A função gama de Euler $\Gamma(x)$ é uma função contínua de x cujo valor em cada positivo inteiro $n + 1$ é $n!$. A fórmula de definição da integral para Γ é válida somente para $x > 0$, mas podemos estender Γ para valores negativos não inteiros de x com a fórmula $\Gamma(x) = (\Gamma(x + 1))/x$, que é o assunto do Exercício 49.