Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Vetores no plano e no espaço

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Agosto de 2022

Sumário

1 Soma de vetores e multiplicação por escalar

4) Seja o triângulo de vértices A(4, -1, -2), B(2, 5, -6) e C(1, -1, -2). Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.

Solução

A mediana em questão, de acordo com a Figura 1.64, é o segmento que tem como extremidades o ponto médio M de AB e o vértice oposto C. Então, o comprimento da mediana é o módulo do vetor $\overrightarrow{MC}$.

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right) \text{ ou } M(3, 2, -4)$$

e

$$\overrightarrow{MC} = C - M = (1, -1, -2) - (3, 2, -4) = (-2, -3, 2)$$

Portanto

$$|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

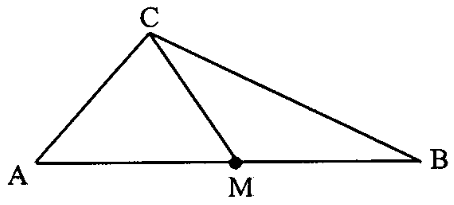

Figura 1.64

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

2) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$

b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

3) Dados os pontos A(-1, 3), B(2, 5), C(3, -1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$

5) Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $3\vec{v} - 2(A - B)$

6) Sejam os pontos A(-5, 1) e B(1, 3). Determinar o vetor $\vec{v} = (a, b)$ tal que

a) $B = A + 2\vec{v}$ b) $A = B + 3\vec{v}$

Construir o gráfico correspondente a cada situação.

7) Representar no gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:
   a) A(-1, 3) e B(3, 5) c) A(4, 0) e B(0, -2)
   b) A(-1, 4) e B(4, 1) d) A(3, 1) e B(3, 4)

8) Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente este segmento.

9) No mesmo sistema cartesiano xOy, representar
   a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos A(1, 4) e B(1, -4), respectivamente;
   b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10) Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).
   a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.
   b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

11) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
   a) A(-3, -1), B(4, 2) e C(5, 5)
   b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

12) Sabendo que A(1, -1), B(5, 1) e C(6, 4) são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

13) Dados os pontos A(-3, 2) e B(5, -2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, devendo P ser tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

14) Sendo A(-2, 3) e B(6, -3) extremidades de um segmento, determinar
   a) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;
   b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.

15) O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e a distância dele ao ponto A é a terça parte da distância dele ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

16) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular
   a) $|\vec{u}|$ c) $|\vec{w}|$ e) $|2\vec{u} - \vec{w}|$ g) $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
   b) $|\vec{v}|$ d) $|\vec{u} + \vec{v}|$ f) $|\vec{w} - 3\vec{u}|$ h) $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

19) Provar que os pontos A(-2, -1), B(2, 2), C(-1, 6) e D(-5, 3), nesta ordem, são vértices de um quadrado.

20) Encontrar um ponto P de eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto A(2, -3) seja igual a 5.

21) Dados os pontos A(-4, 3) e B(2, 1), encontrar o ponto P nos casos
   a) P pertence ao eixo Oy e é eqüidistante de A e B;
   b) P é eqüidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;
   c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.

22) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:
   a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$
   c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ d) $\vec{v} = (0, 4)$

23) Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
   a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;
   b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;
   c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

24) Traçar no mesmo sistema de eixos os retângulos de vértices
   a) A(0, 0, 1), B(0, 0, 2), C(4, 0, 2) e D(4, 0, 1)
   b) A(2, 1, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 2) e D(0, 1, 2)

25) Traçar o retângulo formado pelos pontos (x, y, z) tal que
   a) $x = 0$, $1 \leq y \leq 4$ e $0 \leq z \leq 4$
   b) $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ e $z = 3$

26) Construir o cubo constituído dos pontos (x, y, z), de modo que
   a) $-4 \leq x \leq -2$, $1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$
   b) $-2 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 4$ e $-4 \leq z \leq -2$

27) Construir o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos (x,y,z), de modo que $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq y \leq 5$ e $0 \leq z \leq 4$. Quais as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?

28) Calcular a distância do ponto A(3, 4, -2)
   a) ao plano xy; d) ao eixo dos x;
   b) ao plano xz; e) ao eixo dos y;
   c) ao plano yz; f) ao eixo dos z.

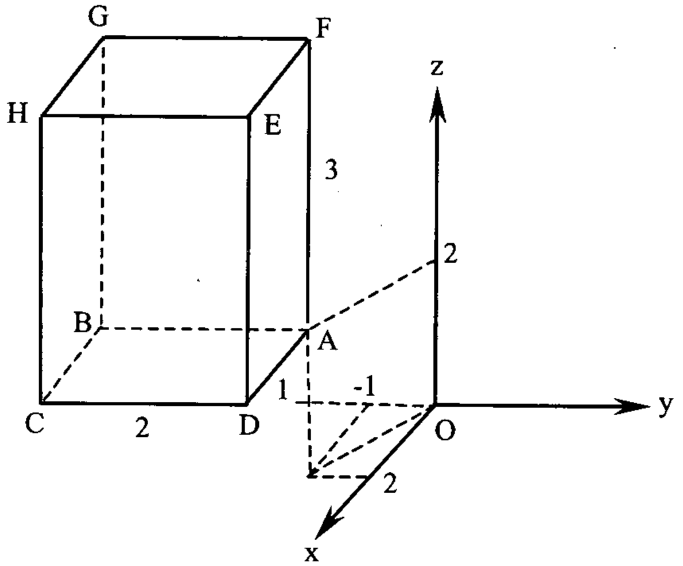

Figura 1.65

29) A Figura 1.65 apresenta um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo que A(2,-1,2).

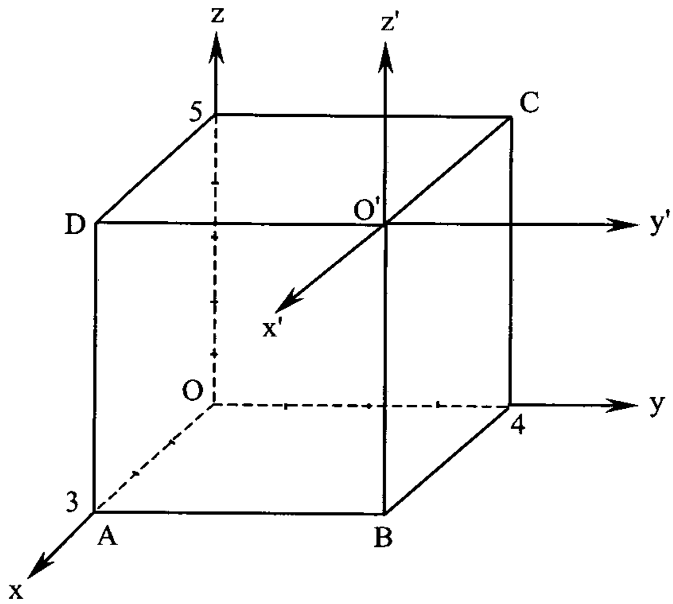

Figura 1.66

30) O paralelepípedo retângulo de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema Oxyz conforme a Figura 1.66. Considerando um segundo sistema chamado de O'x'y'z', onde Ox//O'x', Oy//O'y' e Oz//O'z', e sendo O' um dos vértices do paralelepípedo de acordo com a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos sistemas dados.

31) Dados os pontos A(2, -2, 3) e B(1, 1, 5) e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:

a) $A + 3\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 3(B - A)$

32) Dados os pontos A(3, -4, -2) e B(-2, 1, 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

33) Dados os pontos A(1, -2, 3), B(2, 1, -4) e C(-1, -3, 1), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

34) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b, e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

35) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$,

a) determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$;

b) encontrar os números a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$.

36) Reprèsentar no mesmo sistema Oxyz o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos O(0, 0, 0), A(-3, -4, 0), B(-2, 4, 2), C(3, 0, -4) e D(3, 4, -2).

37) Sendo A(2, -5, 3) e B(7, 3, -1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, -3, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

38) Determinar os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, -2), N(3, 1, -3) e P(4, 2, 1).

39) Dados os pontos A(1, -1, 3) e B(3, 1, 5), até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

40) Sendo A(-2, 1, 3) e B(6, -7, 1) extremidades de um segmento, determinar

a) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

41) O ponto A é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B, C e D. Sendo AA' uma diagonal do paralelepípedo, determinar o ponto A' nos seguintes casos:

a) A(3, 5, 0), B(1, 5, 0), C(3, 5, 4) e D(3, 2, 0)

b) A(-1, 2, 1), B(3, -1, 2), C(4, 1, -3) e D(0, -3, -1)

c) A(-1, 2, 3), B(2, -1, 0), C(3, 1, 4) e D(-2, 0, 5)

42) Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

a) paralelo ao eixo dos x;

b) representado no eixo dos z;

c) paralelo ao plano xy;

d) paralelo ao plano yz;

e) ortogonal ao eixo dos y;

f) ortogonal ao eixo dos z;

g) ortogonal ao plano xy;

h) ortogonal ao plano xz.

43) Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

44) Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

45) A reta que passa pelos pontos A(-2, 5, 1) e B(1, 3, 0) é paralela à reta determinada por C(3, -1, -1) e D(0, m, n). Determinar o ponto D.

46) Verificar se são colineares os pontos:

a) A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3) e C(-2, -7, -1)

b) A(2, 1, -1), B(3, -1, 0) e C(1, 0, 4)
c) A(-1, 4, -3), B(2, 1, 3) e C(4, -1, 7)

47) Sabendo que o ponto P(m, 4, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(-1, -2, 3) e B(2, 1, -5), calcular m e n.

48) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
a) A(-1, 0, 3), B(1, 1, 2) e C(3, -2, 5)
b) A(4, 0, 1), B(5, 1, 3) e C(3, 2, 5)

49) Verificar se são unitários os seguintes vetores:
$\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

50) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

51) Determinar o valor de a para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

52) Dados os pontos A(1, 0, -1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

53) Determinar o valor de y para que seja eqüilátero o triângulo de vértices A(4, y, 4), B(10, y, -2) e C(2, 0, -4).

54) Obter o ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A(3, -1, 4) e B(1, -2, -3).

55) Obter um ponto P do eixo das cotas cuja distância ao ponto A(-1, 2, -2) seja igual a 3.

56) Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha
a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;
b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;
c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) (3, -5) b) (-5, 4) c) $(1, -\frac{1}{2})$ d) $(\frac{13}{2}, -9)$

2) a) $(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ b) $(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})$

3) a) (-4, 1) b) (2, 5) c) (-5, -30)

4) $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$

5) a) (-8, 11) b) (6, -8) c) (-9, 11) d) (-14, 19)

6) a) $\vec{v} = (3, 1)$ b) $\vec{v} = (-2, -\frac{2}{3})$

8) (4, -2)

10) b) $\vec{0}$

11) a) D(-2, 2) b) D(1, 2)

12) (2, 2), (0, -4) e (10, 6)

13) M(1, 0), N($\frac{7}{3}$, $-\frac{2}{3}$), P(9, -4)

14) a) C(0, $\frac{3}{2}$), D(2, 0), E(4, $-\frac{3}{2}$)

b) F($\frac{2}{3}$, 1), G($\frac{10}{3}$, -1)

15) P($\frac{3}{4}x_1 + \frac{x_2}{4}$, $\frac{3}{4}y_1 + \frac{y_2}{4}$)

16) a) $\sqrt{2}$ c) 10 e) $2\sqrt{13}$ g) $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) 5 d) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{34}$ h) 1

17) $\pm 2\sqrt{3}$

18) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

20) (6, 0) ou (-2, 0)

21) a) P(0, 5) b) P(-5, -10) c) P(x, 3x + 5), x ∈ R

22) a) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$

c) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ d) (0, 1) e (0, -1)

23) a) (-2, 6) b) $(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$ c) $(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}})$

27) Vértices da base inferior: (1, 3, 0), (1, 5, 0), (3, 3, 0) e (3, 5, 0)
Vértices da base superior: (1, 3, 4), (1, 5, 4), (3, 3, 4) e (3, 5, 4)

28) a) 2 c) 3 e) $\sqrt{13}$

b) 4 d) $2\sqrt{5}$ f) 5

29) B(2, -3, 2), C(3, -3, 2), D(3, -1, 2), E(3, -1, 5), F(2, -1, 5), G(2, -3, 5), H(3, -3, 5)

30) em relação a Oxyz: O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 5), D(3, 0, 5) e O'(3, 4, 5)
em relação a O'x'y'z': O(-3, -4, -5), A(0, -4, -5), B(0, 0, -5), C(-3, 0, 0), D(0, -4, 0) e O'(0, 0, 0)

31) a) (5, 7, -9) b) (0, -6, 2) c) (-1, 7, 9) d) (5, -3, -14)

32) N(1, -2, $-\frac{6}{5}$)

33) D(-2, -6, 8)

34) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$, $c = 4$

35) a) $\vec{x} = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$

37) C(6, -1, 3) e D(1, -9, 7)

38) (4, -1, -6), (6, 1, 2) e (2, 3, 0)

39) (9, 7, 11)

40) a) $(0, -1, \frac{5}{2})$, (2, -3, 2), $(4, -5, \frac{3}{2})$

b) $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

41) a) (1, 2, 4) b) (9, -7, -4) c) (5, -4, 3)

42) a) (x, 0, 0) c) (x, y, 0) e) (x, 0, z) g) (0, 0, z)
b) (0, 0, z) d) (0, y, z) f) (x, y, 0) h) (0, y, 0)

43) são paralelos: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$

44) a = 9 e b = -15

45) D(0, 1, 0)

46) a) sim b) não c) sim

47) m = 5 e n = -13

48) a) D(1, -3, 6) b) D(2, 1, 3)

49) $\vec{v}$ é unitário

50) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

51) $\pm\frac{1}{3}$

52) 3 ou $-\frac{13}{5}$

53) ± 2

54) P(3, 0, 0)

55) P(0, 0, 0) ou P(0, 0, -4)

56) a) (-6, 3, 9) b) $(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}})$ c) $(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}})$

2 Norma e produto escalar; Projeção ortogonal

Solução

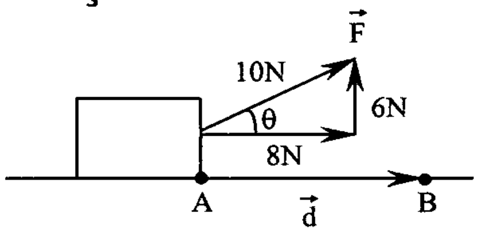

Figura 2.15

A Força $\vec{F}$ (Figura 2.15) é decomposta em $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, onde $8 = |\vec{F}|\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|\operatorname{sen}\theta$ e $\vec{d} = 20\vec{i} + 0\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado por

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (produto escalar)

$W = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (20\vec{i} + 0\vec{j})$

$W = 160$ J

ou por

$W = |\vec{F}|\,|\vec{d}|\cos\theta$

$W = (10N)(20m)(\cos 36{,}9^\circ)$

$W = 160$ J

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular
   a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$
   b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
   d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$
2) Sejam os vetores $\vec{u} = (2, a, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
3) Dados os pontos A (4, 0, -1), B (2, -2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que
   a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$
   b) $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$.
4) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.
5) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
6) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.
7) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.
8) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcular
   a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$
   b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$
   c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$
   d) $(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} - 5\vec{v})$

9) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11) O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2. Calcular:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$
f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

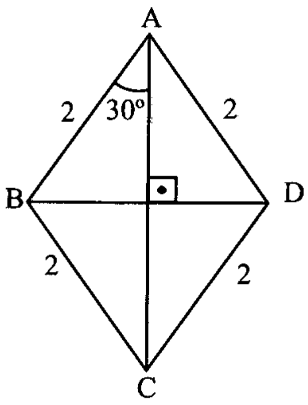

Figura 2.16

12) Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

13) Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\dfrac{3\pi}{4}$ rad, determinar

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$
b) $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14) Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)
b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16) Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17) Dados os pontos A(-1, 0, 5), B(2, -1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x - 3).

18) Provar que os pontos A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19) Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m - 1, 2m, 2) e C(1, 3, -1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20) Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4,1\ -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é 45° e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

22) Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Obter

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23) Sendo $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ e $|\vec{b}| = 8$, calcular $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.

24) Demonstrar que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$.

25) Determinar o ângulo entre os vetores

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

26) Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, -3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

27) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).

28) Calcular o valor de m de modo que seja 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, m + 1)$.

29) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-3, 1, n)$ e $\vec{k}$.

30) Se $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ e construir uma figura correspondente a estes dados.

31) Seja o cubo de aresta a representado na Figura 2.17. Determinar:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$

d) $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$

e) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$

f) $(\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$

g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;

h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

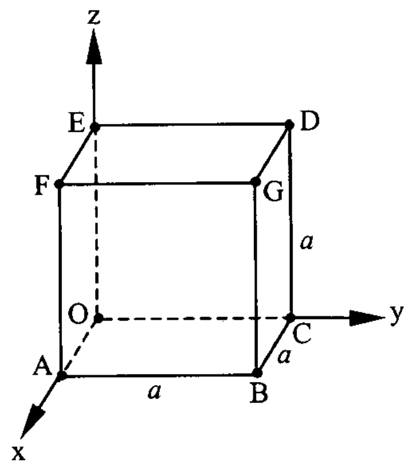

Figura 2.17

32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.

33) Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}| = 2$. Determinar $\vec{a}$.

34) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

35) Mostrar que existe um vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

36) Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60° com o vetor $\vec{i}$.

37) Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38) Determinar o vetor $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}| = 8$, forma ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}| = 2$, forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{21}$.

40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$

c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 5, 4)$

d) $\vec{u} = (3, 1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -3, 1)$

43) Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

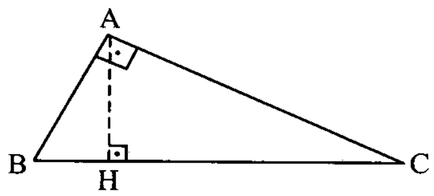

Figura 2.18

44) Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam

a) paralelos; b) ortogonais.

45) Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores

a) $4\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $(-2, 3)$ c) $(-1, -1)$

46) Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

47) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores

a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, -2)$

b) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$

48) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ c) $\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

49) Determinar o valor de a para que seja 45 ° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

50) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3)$ c) $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5)$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -2 b) 21 c) -4 d) 4

2) $a = \frac{5}{8}$

3) a) (3, 6, -9) b) $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$

4) (-6, 3, -9)

5) (0, 3, 4) ou (0, 3, -4)

6) (2, 0, -1)

7) $\vec{x} = (2, -3, 4)$

8) a) 7 b) 38 c) –4 d) -181

9) -19

10) 200 e -200

11) a) 0 b) 2 c) –2 d) 2 e) 4 f) -4

12) $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13) a) 37 b) $\sqrt{50}$

15) -5

16) 3 ou -6

17) $x = \frac{25}{2}$

18) $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = 0$

19) $m = 1$ e $\frac{\sqrt{30}}{2}$

20) $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

21) $(1, -1, \sqrt{2})$ ou $(1, -1, -\sqrt{2})$

22) a) Dentre os infinitos possíveis: (1, 1, -1)

b) Um deles: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

c) Um deles: $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$

23) 10 e 10

25) a) 120° b) 150°

26) 45° e 135°

27) $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$, $\hat{C} \cong 72°2'$

28) 0 ou -18

29) $\sqrt{30}$

30) $\text{arc cos } \frac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31) a) 0 c) 0 e) a^2 g) $\text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 d) $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ f) (a^3, a^3, a^3) h) $\text{arc cos } (\frac{1}{3}) \cong 70°31'$

32) $\alpha = \text{arc cos } (\frac{6}{7}) \cong 31°$ $\beta = \text{arc cos } (-\frac{2}{7}) \cong 107°$

$\gamma = \text{arc cos } (\frac{3}{7}) \cong 65°$

33) $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34) Não, $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35) $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

37) $\vec{a} = (-2\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5})$

38) a) $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ b) $(0, 1, \sqrt{3})$

39) $(-2, 1, 4)$

40) $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41) $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42) a) $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0, -2)$

c) $\vec{v}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 5, 4)$

d) $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43) a) $m = 3$ b) $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ c) $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44) a) $\frac{8}{3}$ b) -6

45) a) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47) a) $\arccos(\frac{3}{5}) \cong 53°$ b) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108°$ c) $90°$

48) a) $\sqrt{2}$, $45°$ d) $\sqrt{5}$, $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 117°$

b) $\sqrt{5}$, $\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26°$ e) $\sqrt{5}$, $\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63°$

c) 3, $0°$

49) 3 ou $-\frac{1}{3}$

50) a) $\vec{v}_1 = (4, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$