Capítulo 7

Matemática Elementar
Funções Reais e Gráficos

5 de maio de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Função Real

Definição 1

Uma função na forma $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função real (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) de variável real (pois sua variável independente assume valores reais, isto é, seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$).

Gráfico de Função Real

Definição 2

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in D, y = f(x)\right\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Gráfico de Função Real

Exemplo 3

Esboce o gráfico da função real

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Translações de gráficos

Exemplo 4

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen}x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Translações de gráficos

Exemplo 4

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen} x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen} x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

Translações de gráficos

Exemplo 4

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen}x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

- O translado vertical será:
  - No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
  - No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.

Translações de gráficos

Exemplo 4

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen}x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

- O translado vertical será:
  - No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
  - No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.
- O translado horizontal será:
  - No sentido positivo do eixo x (para a direita), se $b < 0$;
  - No sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se $b > 0$.

Dilatações de gráficos

Exemplo 5

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}x$,
$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}x$,
$h(x) = f(2 \cdot x) = \text{sen}(2 \cdot x)$.

Dilatações de gráficos

Exemplo 5

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen} x$,
$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen} x$,
$h(x) = f(2 \cdot x) = \text{sen}(2 \cdot x)$.

Exemplo 6

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen} x$,
$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \text{sen} x$,
$h(x) = f(-1 \cdot x) = \text{sen}(-1 \cdot x)$.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- A dilatação vertical será:
  - Um esticamento se $c > 1$;
  - Um encolhimento se $0 < c < 1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- A dilatação vertical será:
  - Um esticamento se $c > 1$;
  - Um encolhimento se $0 < c < 1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.
- A dilatação horizontal será:
  - Um encolhimento se $d > 1$;
  - Um esticamento se $0 < d < 1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo y se $d < -1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo y se $-1 < d < 0$.

Atividade Online

`Atividade 10 - Deslocamento de Funções`
`Atividade 11 - Como Transformar Funções`

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Definição 7

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

(i) f é monótona (estritamente) crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

(ii) f é monótona não decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

(iii) f é monótona (estritamente) decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

(iv) f é monótona não crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funções Monótonas

Nas mesmas condições da Definição 7 , se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.

Nas mesmas condições da Definição 7 , se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.
Se $I \subset D$ é um intervalo, definimos a monotonicidade de f no intervalo I de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:
f é monótona (estritamente) crescente em I se, para todos $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Definição 8

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$;

(ii) f é limitada inferiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, para todo $x \in D$;

(iii) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo absoluto de f se $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D$;

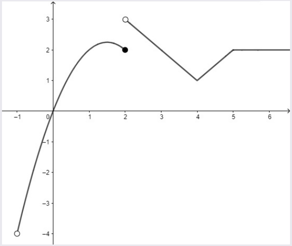
(iv) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo absoluto de f se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$;

(v) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$;

(vi) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$.

Exemplo 9

A função $h : (-1; 6] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é esboçado abaixo, é definida por $h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x-4|+1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}$.



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de h.

Atividade Online

`Atividade 12 - Intervalos Crescentes e Decrescentes`
`Atividade 13 - Mínimos e Máximos Relativos`
`Atividade 14 - Mínimos e Máximos Absolutos`
Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

Exercícios

1. Considere a função $g : [0;5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se} \quad x < 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

(a) $g(x) = -1$;

(b) $g(x) = 0$;

(c) $g(x) = 3$;

(d) $g(x) = 4$;

(e) $g(x) < 3$;

(f) $g(x) \geq 3$.

Exercícios

2. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto;

(b) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo local;

(c) Se f tem um máximo local, então f tem um máximo absoluto;

(d) Todo máximo local de f é máximo absoluto;

(e) Todo máximo absoluto de f é máximo local;

(f) Se x_0 é o ponto de extremo local de f, então é ponto de extremo local de f^2, onde $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$;

(g) Se x_0 é o ponto de extremo local de f^2, então é ponto de extremo local de f.

Exercícios

3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f e g são crescentes, então a composta $f \circ g$ é uma função crescente;

(b) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente, onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(c) Se f é crescente em $A \subset \mathbb{R}$ e em $B \subset \mathbb{R}$, então f é crescente em $A \cup B \subset \mathbb{R}$.

4. Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Bibliografia

[1] IEZZI, Gelson; et al.
Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 - Conjuntos e Funções.
São Paulo: Editora Atual.