Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Inversão de matrizes e determinantes

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Novembro de 2022

Sumário

1 Determinantes por expansão em cofatores

ADVERTÊNCIA A técnica de setas só funciona com determinantes de matrizes 2×2 e 3×3.

direita e subtraindo os produtos das entradas nas setas para a esquerda. Esse procedimento executa as seguintes contas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

que estão de acordo com a expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

▶ EXEMPLO 7 Uma técnica para calcular determinantes 2×2 e 3×3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240 \blacktriangleleft$$

Revisão de conceitos

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada.
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3.
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Conjunto de exercícios 2.1

▶ Nos Exercícios **1–2**, encontre todos os menores e cofatores da matriz A. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{13} e C_{13}.   (b) M_{23} e C_{23}.

(c) M_{22} e C_{22}.   (d) M_{21} e C_{21}.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{32} e C_{32}. (b) M_{44} e C_{44}.

(c) M_{41} e C_{41}. (d) M_{24} e C_{24}.

▶ Nos Exercícios **5–8**, calcule o determinante da matriz. Se a matriz for invertível, use a Equação (2) pra encontrar a inversa. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **9–14**, use a técnica de setas para calcular o determinante da matriz. ◀

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–18**, encontre todos os valores de λ com os quais $(A) = 0$. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$

19. Calcule o determinante da matriz do Exercício 13 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

20. Calcule o determinante da matriz do Exercício 12 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

▶ Nos Exercícios **21–26**, calcule det(A) com uma expansão em cofatores ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha. ◀

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–32**, obtenha por inspeção o determinante da matriz dada. ◀

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do determinante independe de θ.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e só se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Sem fazer contas, descubra uma relação entre os determinantes

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para qualquer matriz A de tamanho 2×2.

37. O que pode ser dito sobre um determinante de enésima ordem com todas as entradas iguais a 1? Explique seu raciocínio.

38. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 3×3 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

39. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

40. Prove que os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove: a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se A for uma matriz triangular superior e se B_{ij} for a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de tamanho 2×2 é $ad + bc$.

(b) Duas matrizes quadradas A e B podem ter o mesmo determinante se, e só se, forem de mesmo tamanho.

(c) O menor M_{ij} é igual ao cofator C_{ij} se, e só se, $i + j$ for par.

(d) Se A for uma matriz simétrica de tamanho 3×3, então $C_{ij} = C_{ji}$, com quaisquer i e j.

(e) O valor da expansão em cofatores de uma matriz A é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.

(f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.

(g) Dados uma matriz quadrada A e um escalar c quaisquer, temos $\det(cA) = c\det(A)$.

(h) Dadas quaisquer matrizes quadradas A e B, temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(i) Dada qualquer matriz A de tamanho 2×2, temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Nesta seção, mostramos como calcular um determinante por meio da redução da matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos cálculos que a expansão em cofatores e é, portanto, o método preferido para matrizes grandes.

Um teorema básico

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1 *Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então* $\det(A) = 0$.

Prova Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros.

2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Conjunto de exercícios 2.2

▶ Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–9**, calcule por inspeção o determinante da matriz elementar dada. ◀

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **10–17**, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas. ◀

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

▶ Nos Exercícios **20–27**, calcule o determinante, sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$ ◀

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Mostre que

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

▶ Nos Exercícios **30–33**, confirme as identidades sem calcular o determinante diretamente. ◀

30. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$