Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de Cálculo 1: Aplicações da derivada

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Setembro de 2022

Sumário

1 Intervalos de crescimento e decrescimento **2**

2 Concavidade e pontos de inflexão **7**

3 Regras de L'Hospital **11**

1 Intervalos de crescimento e decrescimento

$$\beta\, g'(x) - f'(x) > 0.$$

Segue que, para todo $x \in\ ]s, p[$, tem-se

$$\alpha\, g(x) - f(x) < \alpha\, g(s) - f(s)$$

e

$$\beta\, g(x) - f(x) > \beta\, g(s) - f(s)$$

Fazendo $M = f(s) - \alpha\, g(s)$, $N = f(s) - \beta\, g(s)$ e lembrando que $g(x) > 0$ em I, resulta, para todo $x \in\ ]s, p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios 9.2

1. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários).

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

e) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

g) $x = \dfrac{t}{1 + t^2}$

h) $x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$

i) $x = 2 - e^{-t}$

j) $y = e^{-x^2}$

l) $f(x) = e^{2x} - e^x$

m) $g(t) = e^{\frac{1}{t}}$

n) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

o) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

p) $g(x) = x\, e^x$

q) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$

r) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

s) $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x - 1)}$

t) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

u) $g(x) = x - e^x$

2. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.

3. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais distintas. Localize tais raízes.

4. Determine a, para que a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

admita uma única raiz real.

5. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ *b*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$ *d*) $\lim\limits_{x \to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ *f*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$

6. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (para isto, calcule todos os limites necessários).

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

b) $f(x) = x \ln x$

c) $g(x) = \dfrac{x}{2 \ln x}$

d) $g(x) = x^x$, $x > 0$

7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Calcule $f'(0)$, pela definição

b) Determine f'

c) Esboce o gráfico, calculando, para isto, todos os limites necessários

8. Seja $n \geq 2$ um natural dado. Prove que $x^n - 1 \geq n(x - 1)$ para todo $x \geq 1$.

(*Sugestão*: Verifique que $f(x) = [x^n - 1] - n(x - 1)$ é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.)

9. Prove que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $e^x > x + 1$

b) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

10. Mostre que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ *b*) $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}$

11. Mostre que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

b) $0 < \operatorname{sen} x - \left[x - \frac{x^3}{3!}\right] < \frac{x^5}{5!}$

(*Sugestão*: Utilize o item (*b*) do Exercício 10 e o item (*a*) acima.)

12. *a*) Mostre que, para todo $x > 0$,

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \operatorname{sen} x$$

b) Mostre que, para todo $x \neq 0$,

$$\left|\operatorname{sen} x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]\right| < \frac{|x|^7}{7!}.$$

Generalize tal resultado.

13. Suponha que f tenha derivada contínua no intervalo I e que f' nunca se anula em I. Prove que f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I.

14. Seja $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Verifique que f' é contínua em $\mathbb{R}$
   b) Verifique que $f'(x) \neq 0$ em $\mathbb{R}$
   c) Tendo em vista que $f'(0) > 0$, conclua que f é estritamente crescente

   (*Sugestão*: Veja Exercício 13.)

15. Seja f uma função tal que $f'''(x) > 0$ para todo x em $]a, b[$. Suponha que existe c em $]a, b[$ tal que $f''(c) = f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente crescente em $]a, b[$.

16. Suponha f derivável no intervalo aberto I. Prove que, se f for estritamente crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ para todo x em I.

17. Suponha f derivável no intervalo I. A afirmação: "f é estritamente crescente em I se, e somente se, $f'(x) > 0$ em I" é falsa ou verdadeira? Justifique.

18. Suponha f derivável no intervalo I. Prove: f crescente em $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ em I.

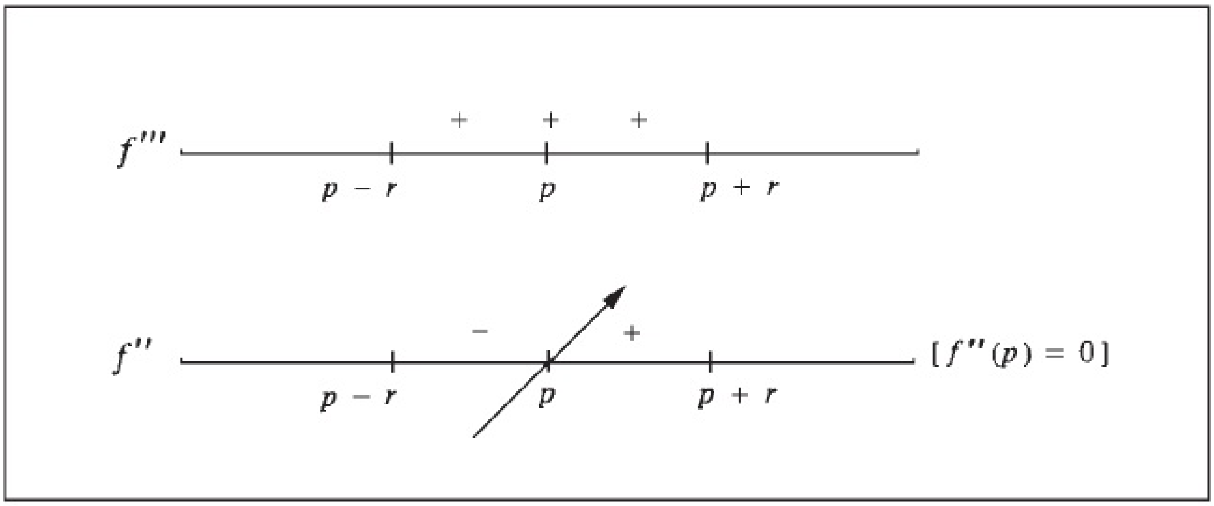
   (*Lembrete*: f se diz crescente em I se quaisquer que sejam s e t em I, $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.)

19. Sejam f, g duas funções deriváveis em $]a, b[$, tais que $f'(x) < g'(x)$ $\forall$ x em $]a, b[$. Suponha que exista c em $]a, b[$, com $f(c) = g(c)$. Prove que $f(x) < g(x)$ para $x > c$ e $f(x) > g(x)$ para $x < c$.

9.3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

2 Concavidade e pontos de inflexão



■

EXEMPLO 4. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p. Prove que $f''(p) = 0$ é *condição necessária* (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f.

Solução

Se $f''(p) \neq 0$, pela conservação do sinal, existe $r > 0$ tal que $f''(x)$ tem o mesmo sinal que $f''(p)$ em $]p - r, p + r[$, logo p não poderá ser ponto de inflexão. Fica provado, assim, que, se p for ponto de inflexão, deveremos ter necessariamente $f''(p) = 0$. Para verificar que a condição não é suficiente, basta olhar para a função $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, mas 0 não é ponto de inflexão. ■

Exercícios 9.3

1. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$b)\ f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

$c)\ f(x) = x\ e^{-2x}$

$d)\ x(t) = t^2 + \dfrac{1}{t}$

$e)\ g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

$f)\ g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

$g)\ y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

$h)\ f(x) = 1 - e^{-x}$

$i)\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$j)\ f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

$l)\ g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

$m)\ y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

$n)\ f(x) = x\ e^{\frac{1}{x}}$

$o)\ f(x) = x \ln x$

2. Esboce o gráfico de cada uma das funções do exercício anterior.

3. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Prove que f admite um único ponto de inflexão.

4. Se p for ponto de inflexão de f e se $f'(p) = 0$, então diremos que p é *ponto de inflexão horizontal* de f. Cite uma condição suficiente para que p seja ponto de inflexão horizontal de f.

5. Se p for ponto de inflexão de f e se $f'(p) \neq 0$, então diremos que p é *ponto de inflexão oblíquo* de f. Cite uma condição suficiente para que p seja ponto de inflexão oblíquo de f.

6. Sejam f uma função derivável até a 5.ª ordem no intervalo aberto I e $p \in I$. Suponha $f^{(5)}$ contínua em p. Prove que

$$f''(p) = f'''(p) = f^{(4)}(p) = 0 \text{ e } f^{(5)}(p) \neq 0$$

é uma *condição suficiente* para p ser ponto de inflexão de f. Generalize tal resultado.

7. Seja f derivável até a 2.ª ordem em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $x f''(x) + f'(x) = 4$.

a) Mostre que f'' é contínua em todo $x \neq 0$

b) Mostre que f não admite ponto de inflexão horizontal

8. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$.

a) Que condições b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f? Justifique.

b) Existem b e c que tornam 1 ponto de inflexão horizontal? Em caso afirmativo, determine-os.

9. Suponha que $f''(x) > 0$ em $]a, +\infty[$ e que existe $x_0 > a$ tal que $f'(x_0) > 0$. Prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

10. Seja f definida e derivável no intervalo aberto I, com $1 \in I$, tal que

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + f^2(x) \text{ para todo } x \text{ em } I \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que, para todo x em I, $f''(x)$ existe e que f'' é contínua em I

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ em $]1 - r, 1 + r[$

c) Esboce o gráfico de $y = f(x)$, $x \in \,]1 - r, 1 + r[$

11. Seja f definida e derivável no intervalo $]-r, r[$ $(r > 0)$. Suponha que

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + f^2(x) \quad \text{para todo } x \text{ em }]-r, r[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que 0 é ponto de inflexão horizontal

b) Mostre que $f'(x) > 0$ para $x \neq 0$

c) Estude f com relação à concavidade

d) Mostre que $f(x) > \frac{2}{3!} x^3$ para $0 < x < r$

e) Faça um esboço do gráfico de f

9.4. REGRAS DE L'HOSPITAL

As regras de L'Hospital, que vamos enunciar a seguir e cujas demonstrações são deixadas para o final da seção, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

3 Regras de L'Hospital

Observação. As regras de L'Hospital contam-nos que, se $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ ou $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ e se $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ também existirá e $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Entretanto, $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ poderá existir, sem que $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista (veja Exercício 4).

Exercícios 9.4

1. Calcule

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \cos x) \ln x$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$

j) $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec^3 x}{1 - \cos x}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-4x}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \sqrt[3]{x^3 - x}]$

p) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2 - 1}}}{x - 1}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{x^2 + 1}\right]^x$

r) $\lim\limits_{x \to 0^+} [\cos 3x]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

s) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{tg} x^2}$

2. Sejam *f* e *g* deriváveis até a 2.ª ordem em $]p, b[$, com $g''(x) \neq 0$ em $]p, b[$.

Suponha que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^+} f'(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = \lim_{x \to p^+} g'(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^+} f'(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = \lim_{x \to p^+} g'(x) = \pm\infty.$$

Prove que, se $\lim_{x \to p^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ existir (finito ou infinito) então $\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e $\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Generalize tal resultado.

3. Calcule

$a)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

$b)$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}$

$c)$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

$d)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}$

4. Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $g(x) = x.$ Verifique que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$ $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e que $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe. Há alguma contradição com a 1.ª regra de L'Hospital?

9.5. GRÁFICOS

Para o esboço do gráfico de uma função f, sugerimos o roteiro:

a) explicitar o domínio;

b) determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento;

c) estudar a concavidade e destacar os pontos de inflexão;

d) calcular os limites laterais de f, em p, nos casos:

(i) $p \notin D_f$, mas p é extremo de um dos intervalos que compõem D_f.