Integral Indefinida

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de Integral Indefinida

1. Relação entre funções com derivadas iguais

2. Primitiva de uma função

Já sabemos que a derivada de uma função constante é zero. Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

é tal que $f'(x) = 0$ em todo x no seu domínio, mas f não é constante. O próximo teorema, que é uma consequência do TVM, conta-nos que se f tiver derivada zero em todos os pontos de um intervalo, então f será constante neste intervalo.

Teorema

Theorem

Seja f contínua no intervalo I. Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I, então existirá uma constante κ tal que $f(x) = \kappa$ para todo x em I.

Como consequência deste teorema, provaremos que se duas funções tiverem derivadas iguais num intervalo, então, neste intervalo, elas diferirão por uma constante.

Corolário

Corollary

Sejam f e g contínuas no intervalo I. Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x interior a I, então existirá uma constante κ tal que

$$g(x) = f(x) + \kappa \tag{2}$$

para todo x em I.

Observamos que se f e g satisfizerem as hipóteses do corolário e se $f(x_0) = g(x_0)$ para algum $x_0 \in I$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. De fato, pelo corolário, existe κ tal que

$$g(x) = f(x) + \kappa \tag{3}$$

para todo $x \in I$. Em particular, $g(x_0) = f(x_0) + \kappa$, logo $\kappa = 0$. Portanto, $g(x) = f(x)$ em I.

Exemplo

Já vimos que se $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, então, $f'(x) = e^x$, ou seja, a função $f(x) = e^x$ goza da seguinte propriedade: a sua derivada é ela própria. O próximo exemplo nos mostra que as únicas funções que gozam desta propriedade são as funções da forma $f(x) = \kappa e^x$, em que κ é uma constante.

Example

Seja f definida e derivável em I e tal que, para todo x, $f'(x) = f(x)$. Prove que existe uma constante κ tal que, para todo x, tem-se $f(x) = \kappa e^x$.

O exemplo acima nos diz que as soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ são funções da forma $y = \kappa e^x$, κ constante, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = y \Longleftrightarrow y = \kappa e^x. \tag{4}$$

Observe que $y = f(x)$ é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ se, e somente se, a derivada de f for ela própria.

Exemplos

Example

Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ e } f(0) = 2. \tag{5}$$

Consideremos, agora, a função $f(x) = e^{\alpha x}$, α constante. Temos $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, ou seja, $f'(x) = \alpha f(x)$. As únicas funções que satisfazem a equação $f'(x) = \alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e α constante, são as funções da forma $f(x) = \kappa e^{\alpha} x$, κ constante. Ou seja, sendo α constante, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x \Longleftrightarrow y = \kappa e^{\alpha x}, \ \kappa \text{ constante} \tag{6}$$

ou

$$f'(x) = \alpha f(x) \Longleftrightarrow f(x) = \kappa e^{\alpha x}, \ \kappa \text{ constante.} \tag{7}$$

Exemplos

Example

Determine a função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaz as condições

$$\frac{dy}{dx} = 3y \text{ e } y(0) = -1. \tag{8}$$

Example

Determine uma função $y = f(x)$, definida num intervalo aberto I, com $1 \in I$, tal que $f(1) = 1$ e, para todo x em I,

$$\frac{dy}{dx} = xy. \tag{9}$$

Exemplos

Example

Determine uma função $y = f(x)$, definida num intervalo aberto I, com $1 \in I$, tal que $f(1) = -1$ e, para todo x em I,

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2. \tag{10}$$

Primitiva de uma função

Seja f uma função derinida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$F'(x) = f(x), \tag{11}$$

para todo x em I.

Example

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$, pois, para todo x em $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]' = x^2. \tag{12}$$

Observe que, para toda constante κ, $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \kappa$ é, também, prmitiva de $f(x) = x^2$.

Exemplo

Example

Para toda constante κ, $F(x) = 2x + \kappa$ é primitiva, em $\mathbb{R}$, de $f(x) = 2$, pois,

$$F'(x) = (2x + \kappa)' = 2 \tag{13}$$

para todo x.

Primitivas

Sendo F uma primitiva de f em I, então, para toda constante κ, $F(x)+\kappa$ é, também, primitiva de f. Por outro lado, como vimos anteriormente, se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Segue as primitivas de f em I são funções da forma $F(x)+\kappa$, com κ constante. Diremos, então, que

$$y = F(x) + \kappa, \quad \kappa \text{ constante} \tag{14}$$

é a família das primitivas de f em I. A notação $\int f(x)dx$ será usada para representar a família das primitivas de f:

$$\int f(x)dx = F(x) + \kappa. \tag{15}$$

Na notação $\int f(x)dx$, a função f denomina-se integrando. Uma primitiva de f será, também, denominada uma integral indefinida de f. É comum referir-se a $\int f(x)dx$ como a integral indefinida de f.

Observação

O domínio da função f que ocorre em $\int f(x)dx$ deverá ser sempre um intervalo; nos casos em que o domínio não for mencionado, ficará implícito que se trata de um intervalo.

Exemplos

Example

Calcule.

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int dx$.

Example

Calcule $\int x^\alpha dx$, em que $\alpha \neq -1$ é um real fixo.

Example

Calcule

a) $\int x^3 dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx$.

Exemplos

Example

Calcule $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

Example

Calcule $\int \left(x^5 + \frac{1}{x^3} + 4\right) dx$.

Example

Calcule $\int \frac{1}{x} dx$, $x > 0$.

Resultado principal

Seja α um real fixo. Dos exemplos visto anteriormente, resulta

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \kappa \text{ se } \alpha \neq -1 \\ \ln x + \kappa \text{ se } \alpha = -1 \ (x > 0). \end{cases} \tag{16}$$

Exemplos

Example

Calcule $\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) dx$.

Example

Seja α um real fixo, $\alpha \neq 0$. Calcule $\int e^{\alpha x} dx$.

Example

Calcule.

a) $\int e^{x} dx$

b) $\int e^{2x} dx$.

Exemplos

Example

Determine $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{dy}{dx} = x^2. \tag{17}$$

Example

Determine a única função $y = y(x)$, definida em $\mathbb{R}$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{18}$$

Exemplos

Example

Determine a função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x + 1,\ y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0. \tag{19}$$

Example

Uma partícula desloca-se sobre o eixo x e sabe-se que no instante t, $t \geq 0$, a velocidade é $v(t) = 2t + 1$. Sabe-se, ainda, que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 1$. Determine a posição $x = x(t)$ da partícula no instante t.