

Capítulo 5

Solução de Sistemas Lineares: Métodos Iterativos

5.1 Introdução

Ao lado dos métodos exatos para resolver sistemas lineares, existem os métodos iterativos os quais passamos a discutir agora. Em certos casos, tais métodos são melhores do que os exatos, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero). Eles ainda são mais econômicos no sentido que utilizam menos memória do computador. Além disso, possuem a vantagem de se auto corrigir se um erro é cometido, e eles podem ser usados para reduzir os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos, como discutido no Capítulo 4. Podem também sob certas condições ser aplicado para resolver um conjunto de equações não lineares.

5.2 Processos Estacionários.

Um método é **iterativo** quando fornece uma sequência de aproximantes da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo.

Um método iterativo é **estacionário** se cada aproximante é obtido do anterior sempre pelo mesmo processo.

Quando os processos variam de passo para passo mas se repetem ciclicamente de s em s passos dizemos que o processo é **s -cíclico**. Agrupando-se os s passos de cada ciclo num único passo composto, obtemos um método estacionário.

No caso de métodos iterativos precisamos sempre saber se a sequência que estamos obtendo está convergindo ou não para a solução desejada. Além disso, precisamos sempre ter em mente o significado de convergência. (Revise: norma de vetor e norma de matriz , Capítulo 1).

Definição 5.1 - *Dados uma sequência de vetores $x^{(k)} \in E$ e uma norma sobre E , onde E é um espaço vetorial, dizemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para $x \in E$ se $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.*

Consideremos então um sistema linear $Ax = b$ determinado, ($\det(A) \neq 0$), onde A é uma matriz quadrada de ordem n , x e b são vetores $n \times 1$.

Como no caso de equações não lineares (Capítulo 3), para determinar a solução de um sistema linear por métodos iterativos, precisamos transformar o sistema dado em um outro sistema onde possa ser definido um processo iterativo; e mais, que a solução obtida para o sistema transformado seja também solução do sistema original, isto é, os sistemas lineares devem ser equivalentes.

Suponha então, que o sistema $Ax = b$ tenha sido transformado num sistema equivalente da forma:

$$x = Bx + g. \quad (5.1)$$

(por exemplo: $B = I - A$ e $g = b$), de maneira que a solução \bar{x} de (5.1) seja, também, solução de $Ax = b$.

Seja $x^{(0)}$ uma aproximação inicial para a solução \bar{x} de (5.1). Obtemos as aproximações sucessivas $x^{(k)}$ para a solução desejada \bar{x} , usando o processo iterativo estacionário definido por:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g. \quad (5.2)$$

Se a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para \bar{x} então \bar{x} coincide com a solução x de $Ax = b$.

De fato, passando-se ao limite ambos os membros de (5.2), obtêm-se:

$$\bar{x} = B\bar{x} + g.$$

Pela hipótese de equivalência \bar{x} é também solução de $Ax = b$.

O próximo teorema fornece a condição necessária e suficiente para a convergência da sequência $x^{(k)}$.

Teorema 5.1 - *A condição necessária e suficiente para a convergência do processo iterativo definido por (5.2) é que $\max|\lambda_i| < 1$, onde λ_i são os auto-valores da matriz B .*

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em

Em geral é difícil verificar as condições do teorema 5.1. Entretanto, podemos obter uma condição **suficiente** que a matriz B deve satisfazer para assegurar a convergência do processo iterativo definido por (5.2). Enunciamos formalmente tal condição no próximo corolário.

Corolário 5.1 - (Critério Geral de convergência)- *O processo iterativo definido por (5.2) é convergente se para qualquer norma de matrizes, $\|B\| < 1$.*

Prova: A convergência da sequência $x^{(k)}$ para a solução x de $Ax = b$ é estudada introduzindo-se o vetor erro:

$$e^{(k)} = x - x^{(k)}.$$

Subtraindo-se (5.2) membro a membro de (5.1), obtemos:

$$x - x^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}),$$

e portanto:

$$e^{(k)} = B e^{(k-1)}. \quad (5.3)$$

De (5.3) podemos escrever:

$$e^{(k-1)} = B e^{(k-2)} \Rightarrow e^{(k)} = B^2 e^{(k-2)},$$

e assim por aplicações sucessivas, segue que:

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)},$$

onde $e^{(0)}$ é o erro inicial. Tomando normas consistentes, (definição 1.13), na expressão acima, segue que:

$$\|B^k e^{(0)}\| \leq \|B\|^k \|e^{(0)}\|.$$

Portanto:

$$\|e^k\| \leq \|B\|^k \|e^{(0)}\|.$$

Desta desigualdade vemos que se $\|B\| < 1$ teremos:

$$\|e^{(k)}\| = \|x - x^{(k)}\| \rightarrow 0,$$

isto é, se $\|B\| < 1$ para alguma norma, então temos garantida a convergência do processo iterativo definido por (5.2).

A matriz B de (5.2) é chamada **matriz de iteração** do processo iterativo.

Exemplo 5.1 - *Seja*

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Verificar se um sistema $Ax = b$ que tenha a matriz B acima, como matriz de iteração, convergirá para a solução.

Solução: Calculando $\|B\|_\infty$ obtemos $\|B\|_\infty = 1.2$ e nada podemos concluir. Calculando $\|B\|_1$ obtemos $\|B\|_1 = 0.9 < 1$ e podemos agora afirmar que o processo iterativo com essa matriz é convergente.

Processo de Parada

Para aplicar qualquer método iterativo escolhemos $x^{(0)}$ como uma aproximação inicial para a solução de $Ax = b$. Com essa aproximação inicial e um método numérico, do tipo (5.2), *refinamos* a solução até obtê-la com uma determinada precisão (número de casas decimais corretas).

Para obtermos a solução com uma determinada precisão ϵ devemos, durante o processo iterativo, efetuar o seguinte teste: Se

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \epsilon \quad (\text{erro relativo}),$$

onde ϵ é uma precisão pré-fixada; x^k e x^{k+1} são duas aproximações consecutivas para \bar{x} , então x^{k+1} é a solução procurada, isto é, tomamos $x = x^{k+1}$.

Veremos agora alguns métodos particulares.

5.2.1 Método de Jacobi-Richardson

Considere o sistema linear $Ax = b$ de ordem n , determinado, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.4)$$

A matriz A do sistema (5.4) pode ser decomposta na forma:

$$A = L + D + R,$$

onde L é uma matriz triangular inferior formada pela parte inferior da matriz A , D é a diagonal de A e R é uma matriz triangular superior formada pela parte superior da matriz A , isto é:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases} \quad ; \quad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad ; \quad r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases}.$$

Supondo $\det(D) \neq 0$, podemos transformar o sistema original em:

$$\begin{aligned}(L + D + R) x &= b \\ \Rightarrow Dx &= -(L + R) x + b \\ \Rightarrow x &= -D^{-1} (L + R) x + D^{-1} b.\end{aligned}$$

que está na forma (5.1) com $B = -D^{-1}(L + R)$ e $g = D^{-1}b$.

O processo iterativo definido por:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R) x^{(k)} + D^{-1} b, \quad (5.5)$$

é chamado de **Método de Jacobi-Richardson**.

Comparando (5.5) com (5.2) vemos que a matriz de iteração do método de Jacobi-Richardson é : $-D^{-1}(L + R)$.

Por hipótese $a_{ii} \neq 0$, pois estamos supondo $\det(D) \neq 0$. Podemos então, antes de decompor a matriz A em $L + D + R$, dividir cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal, resultando assim:

$$A^* = L^* + I + R^*,$$

onde A^* é a matriz obtida de A após a divisão, I é a matriz identidade.

Assim, o processo iterativo pode ser escrito como:

$$x^{(k+1)} = -(L^* + R^*) x^{(k)} + b^*, \quad (5.6)$$

onde os elementos de L^* , R^* e b^* são, respectivamente, dados por:

$$\ell_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* & = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i > j \\ 0 & , \quad i \leq j \end{cases} ; \quad r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* & = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i < j \\ 0 & , \quad i \geq j \end{cases} ;$$

$$b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vemos por (5.6) que as componentes de x^{k+1} podem ser calculadas sucessivamente sem necessidade de se calcular D^{-1} , e a matriz de iteração do método de Jacobi-Richardson é dada por: $-(L^* + R^*)$.

Dado o sistema (5.4), o método de Jacobi-Richardson consiste na determinação de uma sequência de aproximantes da iteração k :

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

a partir de valores iniciais:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)},$$

através do processo iterativo definido por (5.6), isto é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -a_{12}^* x_2^{(k)} - a_{13}^* x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}^* x_n^{(k)} + b_1^* \\ x_2^{(k+1)} = -a_{21}^* x_1^{(k)} - a_{23}^* x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}^* x_n^{(k)} + b_2^* \\ x_3^{(k+1)} = -a_{31}^* x_1^{(k)} - a_{32}^* x_2^{(k)} - \dots - a_{3n}^* x_n^{(k)} + b_3^* \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} = -a_{n1}^* x_1^{(k)} - a_{n2}^* x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k)} + b_n^* \end{cases}$$

Observe que o método de iteração linear para uma única equação, que foi discutido no Capítulo 3, e o método de Jacobi-Richardson são exatamente o mesmo, com a diferença que este último é aplicado

a um sistema de equações. É fácil ver que no método de Jacobi-Richardson as equações são mudadas simultaneamente usando-se o valor mais recente do vetor x , e por causa disso esse método é também conhecido por **Método dos Deslocamentos Simultâneos**.

Critérios de Convergência

Fazendo $B = -(L^* + R^*)$ no critério geral de convergência, (Lema 5.1) e escolhendo sucessivamente as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ obtemos critérios suficientes de convergência para o método de Jacobi-Richardson. Assim o método de Jacobi-Richardson **converge** se:

a) o **critério das linhas** for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*| < 1, \quad (5.7)$$

b) o **critério das colunas** for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^*| < 1, \quad (5.8)$$

Observe que basta apenas um dos critérios ser satisfeito para garantirmos a convergência.

Definição 5.2 - Uma matriz A é **estritamente diagonalmente dominante** se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.9)$$

Observação:

Com a definição 5.2 fica fácil ver que se a matriz dos coeficientes for estritamente diagonalmente dominante então o critério das linhas é satisfeito. De fato, se (5.9) é satisfeita para todo i , então se dividimos cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal segue que:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*| < 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*| < 1.$$

Portanto obtemos mais um critério de convergência, isto é, podemos verificar se o método de Jacobi-Richardson converge testando se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Exemplo 5.2 - Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}.$$

pelo método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$ e $\epsilon < 10^{-2}$.

Solução: Em primeiro lugar devemos testar se temos garantia de convergência. Temos que a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante, pois satisfaz (5.9). De fato:

$$\begin{aligned} |a_{12}| + |a_{13}| &= |2| + |1| < |10| = |a_{11}|, \\ |a_{21}| + |a_{23}| &= |1| + |1| < |5| = |a_{22}|, \\ |a_{31}| + |a_{32}| &= |2| + |3| < |10| = |a_{33}|. \end{aligned}$$

Portanto podemos garantir que o processo de Jacobi-Richardson aplicado ao sistema dado será convergente.

Dividindo então cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal obtemos:

$$\begin{cases} x_1 & + & 0.2x_2 & + & 0.1x_3 & = & 0.7 \\ 0.2x_1 & + & x_2 & + & 0.2x_3 & = & -1.6 \\ 0.2x_1 & + & 0.3x_2 & + & x_3 & = & 0.6 \end{cases}$$

Apesar de não ser necessário, pois já sabemos que o processo de Jacobi-Richardson será convergente, por se tratar de exemplo, verificaremos também o critério das linhas e o critério das colunas. Assim, para verificar o critério das linhas, calculamos:

$$\begin{aligned} |a_{12}^*| + |a_{13}^*| &= |0.2| + |0.1| = 0.3, \\ |a_{21}^*| + |a_{23}^*| &= |0.1| + |0.1| = 0.2, \\ |a_{31}^*| + |a_{32}^*| &= |0.2| + |0.3| = 0.5, \\ \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ij}^*| &= 0.5 < 1, \end{aligned}$$

e portanto o critério das linhas é válido, o que já era de se esperar, (ver observação após definição 5.2).

Para verificar o critério das colunas, calculamos:

$$\begin{aligned} |a_{21}^*| + |a_{31}^*| &= |0.2| + |0.2| = 0.4, \\ |a_{12}^*| + |a_{32}^*| &= |0.2| + |0.3| = 0.5, \\ |a_{13}^*| + |a_{23}^*| &= |0.1| + |0.2| = 0.3, \\ \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 |a_{ij}^*| &= 0.5 < 1, \end{aligned}$$

portanto o critério das colunas também é válido.

Portanto qualquer um dos critérios de convergência assegura a convergência do método de Jacobi-Richardson. Temos que as iterações são definidas por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= -0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 0.7 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 1.6 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} + 0.6 \end{cases}.$$

e a partir de $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$, obtemos para $x^{(1)}$ os seguintes valores:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1(0.6) + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} &= -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2(0.7) - 0.2(0.6) - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} &= -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2(0.6) - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}.$$

Continuando as iterações obtemos a tabela:

k	0	1	2	3	4
x_1	0.7	0.96	0.978	0.9994	0.9979
x_2	-1.6	-1.86	-1.98	-1.9888	-1.9996
x_3	0.6	0.94	0.966	0.9984	0.9968

Agora, desde que:

$$x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0108 \\ 0.0016 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty} = \frac{0.0108}{1.9996} \simeq 0.0054 < 10^{-2},$$

segue que a solução do sistema, com $\epsilon < 10^{-2}$, é:

$$x = \begin{pmatrix} 0.9979 \\ -1.9996 \\ 0.9978 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

5.1 - Usando o método de Jacobi-Richardson, obter a solução do sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}.$$

com 3 casas decimais corretas.

5.2 - Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 30 \end{cases}.$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Jacobi-Richardson.

b) Se possível resolvê-lo pelo método do item a), obtendo o resultado com $\epsilon < 10^{-2}$.

5.2.2 Método de Gauss-Seidel.

Suponhamos, como foi feito para o método de Jacobi-Richardson, que o sistema linear $Ax = b$ seja escrito na forma:

$$(L^* + I + R^*)x = b^*.$$

Transformamos então esse sistema como se segue:

$$\begin{aligned} (L^* + I)x &= -R^*x + b^* \\ x &= -(L^* + I)^{-1}R^*x + (L^* + I)^{-1}b^*. \end{aligned}$$

que está na forma (5.1) com $B = -(L^* + I)^{-1}R^*$ e $g = (L^* + I)^{-1}b^*$.