Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de Cálculo 1: Integral Indefinida

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Novembro de 2022

Sumário

1 Relação entre funções com derivadas iguais

satisfaz as condições dadas. (A condição $x > \frac{1}{2}$ é para garantir que 1 pertença ao domínio de *f*.) ■

Exercícios 10.1

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável e tal que para todo x, $f'(x) = \alpha f(x)$, α constante não nula. Prove que existe uma constante k, tal que, para todo x, $f(x) = k e^{\alpha x}$.

2. Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$f'(x) = 2 f(x) \text{ e } f(0) = 1.$$

   (*Sugestão*: Utilize o Exercício 1.)

3. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$, de modo que em cada instante t a velocidade é o dobro da posição $x = x(t)$. Sabe-se que $x(0) = 1$. Determine a posição da partícula no instante t.

4. A função $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) = -2 f(x)$ para todo x. Esboce o gráfico de f.

5. Seja $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) + f(x) = 0$. Seja g dada por $g(x) = f'(x) \operatorname{sen} x - f(x) \cos x$. Prove que g é constante.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) + f(x) = 0$. Prove que existe uma constante A tal que

$$\left[\frac{f(x) - A \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]' = 0$$

   para todo x em $]0, \pi[$. Conclua que exista outra constante B tal que, para todo x em $]0, \pi[$, $f(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

   (*Sugestão*: Utilize o Exercício 6.)

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) - f(x) = 0$.

   a) Prove que $g(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$, $x \in \mathbb{R}$, é constante.

b) Prove que existe uma constante A tal que, para todo x, $\left[\dfrac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' = 0.$

c) Conclua de (*b*) que existe uma outra constante B tal que $f(x) = A\,e^{-x} + B\,e^x$, para todo x.

8. Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que para todo x

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x).$$

a) Mostre que, para todo x,

$$(f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

b) Conclua de (*a*) que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

9. Utilizando o Exercício 1, determine a única função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça as condições dadas.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$ e $y(0) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -y$ e $y(0) = -1$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}y$ e $y(0) = 2$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}\,y$ e $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

10. Determine a função cujo gráfico passe pelo ponto (0, 1) e tal que a reta tangente no ponto de abscissa x intercepte o eixo $0x$ no ponto de abscissa $x + 1$.

11. Determine uma função $y = f(x)$, definida num intervalo aberto, satisfazendo as condições dadas

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^3}$, $y(0) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x$, $y(0) = 1$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo x,

$$f''(x) = -f(x).$$

a) Mostre que, para todo x,

$$\frac{d}{dx}\left[(f'(x))^2 + (f(x))^2 \right] = 0$$

b) Conclua que existe uma constante E tal que, para todo x,

$$[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = E.$$

13. Sejam $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e tais que, para todo t,

$$\begin{cases} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = -f(t) - h(t) \\ h'(t) = g(t). \end{cases}$$

Suponha que $f(0) = g(0) = h(0) = 1$. Prove que, para todo t,

$$[f(t)]^2 + [g(t)]^2 + [h(t)]^2 = 3$$

14. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e tais que, para todo t,

$$\begin{cases} f'(t) = 2g(t) \\ g'(t) = -f(t). \end{cases}$$

Suponha, ainda, que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Prove que, para todo t, o ponto $(f(t), g(t))$ pertence à elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

10.2. PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função definida num intervalo I. Uma *primitiva* de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$f'(x) = f(x)$$

para todo x em I.

2 Primitiva de uma função

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 15. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x e sabe-se que no instante t, $t \geq 0$, a velocidade é $v(t) = 2t + 1$. Sabe-se, ainda, que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 1$. Determine a posição $x = x(t)$ da partícula no instante t.

Solução

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad \text{e} \quad x(0) = 1.$$

Temos:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \Rightarrow x = \int (2t + 1)\, dt = t^2 + t + k.$$

Para $k = 1$, teremos $x = 1$ para $t = 0$. Assim,

$$x(t) = t^2 + t + 1. \qquad \blacksquare$$

Exercícios 10.2

1. Calcule.

a) $\int x \, dx$

b) $\int 3 \, dx$

c) $\int (3x + 1) \, dx$

d) $\int (x^2 + x + 1) \, dx$

e) $\int x^3 \, dx$

f) $\int (x^3 + 2x + 3) \, dx$

g) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

h) $\int \left(x + \frac{1}{x^3} \right) dx$

i) $\int \sqrt{x} \, dx$

j) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

l) $\int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$

m) $\int (2 + \sqrt[4]{x}) \, dx$

n) $\int (ax + b) \, dx$, a e b constantes

o) $\int \left(3x^2 + x + \frac{1}{x^3} \right) dx$

p) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

q) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx$

r) $\int (3\sqrt[5]{x^2} + 3) \, dx$

s) $\int \left(2x^3 - \frac{1}{x^4} \right) dx$

t) $\int \frac{x^2 + 1}{x} \, dx$

2. Seja $\alpha \neq 0$ um real fixo. Verifique que

a) $\int \operatorname{sen} \alpha x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + k$

b) $\int \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + k$

3. Calcule.

$a)\ \int e^{2x}\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int e^{-x}\,dx$

$c)\ \int (x + 3e^{x})\,dx$ $\qquad$ $d)\ \int \cos 3x\,dx$

$e)\ \int \operatorname{sen} 5x\ dx$ $\qquad$ $f)\ \int (e^{2x} + e^{-2x})\,dx$

$g)\ \int (x^2 + \operatorname{sen}\ x)\,dx$ $\qquad$ $h)\ \int (3 + \cos\ x)\,dx$

$i)\ \int \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,dx$ $\qquad$ $j)\ \int \dfrac{1}{e^{3x}}\,dx$

$l)\ \int (\operatorname{sen}\ 3x + \cos 5x)\,dx$ $\qquad$ $m)\ \int \left(\dfrac{1}{x} + e^{x}\right)dx,\ x > 0$

$n)\ \int \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\ dx$ $\qquad$ $o)\ \int \cos \dfrac{x}{3}\ dx$

$p)\ \int (\sqrt[3]{x} + \cos\ 3x)\,dx$ $\qquad$ $q)\ \int (x + e^{3x})\,dx$

$r)\ \int (3 + e^{-x})\,dx$ $\qquad$ $s)\ \int 5e^{7x}\,dx$

$t)\ \int (1 - \cos\ 4x)\,dx$ $\qquad$ $u)\ \int \left(2 + \operatorname{sen} \dfrac{x}{3}\right) dx$

4. Verifique que

$$a)\ \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx \ = \text{arc sen}\, x + k,\ -1 < x < 1$$

$$b)\ \int \frac{1}{1 + x^2}\ dx = \text{arc tg}\, x + k$$

5. Determine a função $y = y\ (x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$ e $y(0) = 2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$ e $y(1) = 1$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ e $y(0) = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 3x$ e $y(0) = 1$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x + 3$ e $y(-1) = 0$

f) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}$ e $y(0) = 1$

6. Determine a função $y = y(x)$, $x > 0$, tal que

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$ e $y(1) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 3 + \dfrac{1}{x}$ e $y(1) = 2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $y(1) = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ e $y(1) = 1$

7. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = t + 3$, $t \geq 0$. Sabe-se que, no instante $t = 0$, a partícula encontra-se na posição $x = 2$.

a) Qual a posição da partícula no instante t?

b) Determine a posição da partícula no instante $t = 2$.

c) Determine a aceleração.

8. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$. Sabe-se que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 5$. Determine o instante em que a partícula estará mais próxima da origem.

9. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = at + v_0$, $t \geq 0$ (a e v_0 constantes). Sabe-se que, no instante $t = 0$, a partícula encontra-se na posição $x = x_0$. Determine a posição $x = x(t)$ da partícula no instante t.

10. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, $t \geq 0$. Determine $x = x(t)$, sabendo que

a) $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 3$ e $x(0) = 2$

b) $v(t) = t^2 - 1$ e $x(0) = -1$

c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3$, $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

d) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$, $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$

e) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos 2t$, $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

f) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \operatorname{sen} 3t$, $v(0) = 0$ e $x(0) = 0$

g) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1 + t^2}$ e $x(0) = 0$

11. Esboce o gráfico da função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sabendo que

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$ e $y(0) = 0$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e $y(0) = 0$

---

3 Respostas dos exercícios

$f(3) = -\frac{87}{4}$ valor mín.

2. $f(-2) = -27$ valor mín.

$f(1) = 0$ valor máx.

3. $f(-3)$ valor mín.; $f(-2)$ valor máx

4. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ valor máx.; $f(0)$ valor mín.

5. $f(-1)$ valor mín.; $f(0) = f(2)$ valor máx.

6. $f\left(\frac{4}{3}\right)$ valor máx.

Não possui valor mínimo.

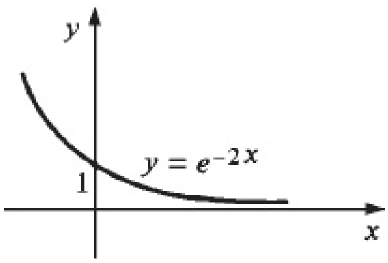
CAPÍTULO 10

10.1

2. $y = e^{2x}$

3. $x(t) = e^{2t}$

4.



9. ***a***) $y = e^{2x}$

b) $y = -e^{-x}$

c) $y = 2\, e^{\frac{1}{2}x}$

d) $y = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x}$

10. $y = e^{-x}$

11. ***a)*** $y = \sqrt[4]{2x^2 + 1}$

b) $y = e^{(1 - \cos x)}$

10.2

1. *a)* $\dfrac{x^2}{2} + k$ *b)* $3x + k$ *c)* $\dfrac{3x^2}{2} + x + k$ *d)* $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + k$

e) $\dfrac{x^4}{4} + k$ *f)* $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + 3x + k$ *g)* $-\dfrac{1}{x} + k$ *h)* $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$

i) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$ *j)* $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$ *l)* $\dfrac{x^2}{2} + \ln x + k$ *m)* $2x + \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}$

n) $\dfrac{a}{2}x^2 + bx + k$ *o)* $x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2} + k$ *p)* $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - \dfrac{1}{x} + k$

q) $2 \ln x - \dfrac{3}{x} + k$ *r)* $\dfrac{15}{7}\sqrt[5]{x^7} + 3x + k$

s) $\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{3x^3} + k$ *t)* $\dfrac{x^2}{2} + \ln x + k$

3. *a)* $\dfrac{1}{2}e^{2x} + k$ *b)* $-e^{-x} + k$ *c)* $\dfrac{x^2}{2} + 3e^x + k$ *d)* $\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + k$

e) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + k$ *f)* $\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x} + k$ *g)* $\dfrac{x^3}{3} - \cos x + k$

h) $3x + \operatorname{sen} x + k$ *i)* $\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + k$ *j)* $-\dfrac{1}{3}e^{-3x} + k$

l) $-\dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + k$ *m)* $\ln x + e^x + k$ *n)* $-2\cos\dfrac{x}{2} + k$

o) $3\operatorname{sen}\dfrac{x}{3} + k$ *p)* $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + k$ *q)* $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{3}e^{3x} + k$

r) $3x - e^{-x} + k$ *s)* $\dfrac{5}{7}e^{7x} + k$

t) $x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + k$ *u)* $2x - 3\cos\dfrac{x}{3} + k$

5. *a)* $y = \dfrac{3x^2}{2} - x + 2$ *b)* $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{4}$ *c)* $y = \operatorname{sen} x$

d) $y = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{4}{3}$ *e)* $y = \dfrac{x^2}{4} + 3x + \dfrac{11}{4}$ *f)* $y = -e^{-x} + 2$

6. *a)* $y = -\dfrac{1}{x} + 2$ *b)* $y = 3x + \ln x - 1$

c) $y = \dfrac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} - \dfrac{5}{2}$ *d)* $y = \ln x - \dfrac{1}{x} + 2$

7. *a)* $x = \dfrac{t^2}{2} + 3t + 2$

b) $x\,(2) = 10$

c) $a\,(t) = 1$

8. $t = \dfrac{3}{2}$

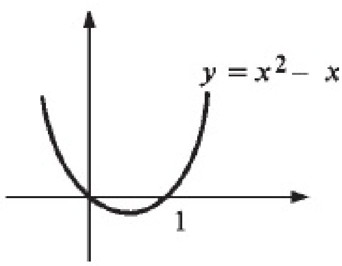
9. $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2}t^2$

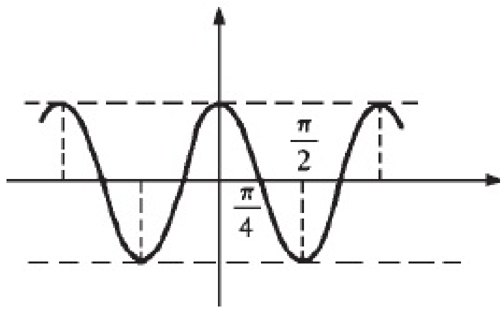
10. *a)* $x = t^2 + 3t + 2$ *b)* $x = \dfrac{t^3}{3} - t - 1$ *c)* $x = \dfrac{3}{2}t^2 + t + 1$

d) $x = e^{-t} + t$ *e)* $x = -\dfrac{1}{4}\cos 2t + t + \dfrac{1}{4}$ *f)* $x = -\dfrac{1}{9}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{1}{3}t$

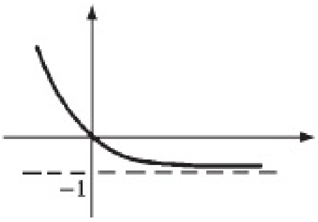
g) $x = \operatorname{arc\,tg} t$

11. *a)* *b)* $y = \cos 2x$

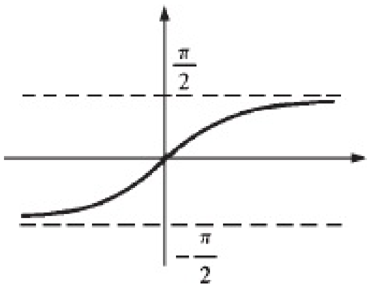




c) $y = e^{-x} - 1$



***d*)** $y = \text{arc tg } x$



CAPÍTULO 11

11.5

1. 7/2

2. 2

3. 2

4. 0

5. 2

6. 12

7. 4/9

8. 10

9. 8/3

10. 3/4

11. 0

12. −4

13. −1