Capítulo 4

Matemática Elementar
Princípio da Indução Finita

26 de abril de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação da Aula

Imagine uma fila com infinitos dominós, um atrás do outro. Suponha que eles estejam de tal modo distribuídos que, uma vez que um dominó caia, o seu sucessor na fila também cai. O que acontece quando derrubamos o primeiro dominó?

Formulação Matemática

Teorema 1 (Princípio da Indução Finita)

Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

(a) *$p(n_0)$ é verdadeira;*

(b) *Se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.*

Então, $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

A afirmação (a) é chamada de base da indução, e a (b), de passo indutivo. O fato de que $p(n)$ é verdadeira no item (b) é chamado de hipótese de indução.

Demonstrando Identidades

Exemplo 2

Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, é válida a igualdade:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Demonstrando Identidades

Exemplo 2

Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, é válida a igualdade:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Exemplo 3

Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, é válida a igualdade:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Exemplo 4

Mostre que, para todo número $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 3$, vale que

$$2^n < n!.$$

Exemplo 4

Mostre que, para todo número $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 3$, vale que

$$2^n < n!.$$

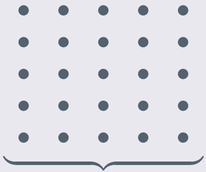
Exemplo 5

Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n\text{ - radicais}} < 2.$$

Exemplo 6

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Mostre que podemos cobrir os n^2 pontos no reticulado a seguir traçando $2n - 2$ segmentos de reta sem tirar o lápis do papel.



$n \times n$ - pontos

A Moeda Falsa

Exemplo 7

Um rei muito rico possui 3^n moedas de ouro, onde $n \in \mathbb{N}^*$. No entanto, uma dessas moedas é falsa, e seu peso é menor que o peso das demais. Com uma balança de 2 pratos e sem nenhum peso, mostre que é possível encontrar a moeda falsa com apenas n pesagens.

Desigualdade das médias aritmética e geométrica

Teorema 8 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)

Para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ *vale*

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \tag{1}$$

Teorema 9 (Princípio Forte da Indução Finita)

Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

(a) *$p(n_0)$ é verdadeira;*

(b) *Se para cada inteiro não negativo k, com $n_0 \leq k \leq n$, temos que $p(k)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira.*

Então, $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

Teorema Fundamental da Aritmética

Teorema 10 (Teorema Fundamental da Aritmética)

Todo número natural N maior que 1 pode ser escrito como um produto

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_m, \tag{2}$$

onde $m \geq 1$ é um número natural e os p_i, $1 \leq i \leq m$, são números primos. Além disso, a fatoração exibida na Equação 2 é única se exigirmos que $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$.

Cuidados ao Usar o Princípio da Indução

Exemplo 11

Critique a seguinte argumentação: Quer-se provar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se n for pequeno, $n + 1$ também o será, pois não se torna grande um número pequeno simplesmente somando-lhe uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno.

Cuidados ao Usar o Princípio da Indução

Exemplo 11

Critique a seguinte argumentação: Quer-se provar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se n for pequeno, $n+1$ também o será, pois não se torna grande um número pequeno simplesmente somando-lhe uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno.

Exemplo 12

Afirmação: *Em um conjunto qualquer de n bolas, todas as bolas possuem a mesma cor.*
Analise a seguinte demonstração por indução para a afirmação anterior e aponte o problema da demonstração, já que a afirmação é claramente falsa.

Cuidados ao Usar o Princípio da Indução

Afirmação: *Em um conjunto qualquer de n bolas, todas as bolas possuem a mesma cor.*

Dem.: Para $n = 1$, nossa proposição é verdadeira pois em qualquer conjunto com uma bola, todas as bolas têm a mesma cor, pois só existe uma bola. Assuma por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para n e provemos que a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Ora, seja $A = \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ o conjunto com $n + 1$ bolas referido. Considere os subconjuntos B e C de A com n elementos, construídos como:

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \text{ e } C = \{b_2, \dots, b_{n+1}\}.$$

De fato ambos os conjuntos têm n elementos. Assim, as bolas $b_1, b_2, \dots, b_n$ têm a mesma cor. Do mesmo modo, as bolas do conjunto C também têm a mesma cor. Em particular, as bolas b_n e b_{n+1} têm a mesma cor (ambas estão em C). Assim, todas as $n + 1$ bolas têm a mesma cor.

1. Demonstre, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ é válida a igualdade:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Demonstre, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ é válida a igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Prove que $3^{n-1} < 2^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Mostre, por indução, que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq 3$.

Dica: Mostre que $\frac{k+2}{k+1} \leq \frac{k+1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Depois, eleve tudo à potência $k+1$.

Exercícios

5. Prove que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Um subconjunto do plano é *convexo* se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido. Os exemplos mais simples de conjuntos convexos são o próprio plano e qualquer semi-plano. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, a interseção n de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo.

7. Diz-se que três ou mais pontos são *colineares* quando eles todos pertencem a uma mesma reta. Do contrário, diz-se que eles são *não colineares*. Além disso, dois pontos determinam uma única reta. Usando o Princípio da Indução Finita mostre que n pontos, $n \geq 3$, tais que quaisquer 3 deles são não colineares, determinam

$$\frac{n!}{2 \cdot (n-2)!}$$

retas distintas.

Bibliografia

[1] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Iniciação à Matemática: um Curso com Problemas e Soluções.
2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[2] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Estágio dos Alunos Bolsistas - OBMEP 2005 - 4. Equações, Inequações e Desigualdades.
Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] LIMA, Elon L.
Números e Funções Reais.
1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.