

Aplicações da Derivada

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br



Informações sobre os conteúdos de limite e continuidade

- 1 O teorema do valor médio
- 2 Concavidade e pontos de inflexão

O Teorema do valor médio

Theorem (Teorema do valor médio (TVM))

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (1)$$

Interpretação geométrica do TVM

Geometricamente, este teorema conta-nos que se s é uma reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, talque a reta tangente ao gráfico de f , neste ponto, é paralela à reta s . Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

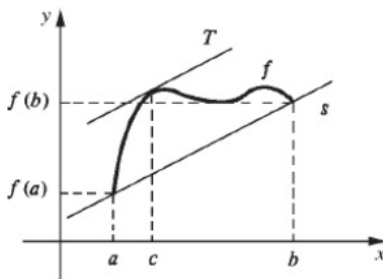


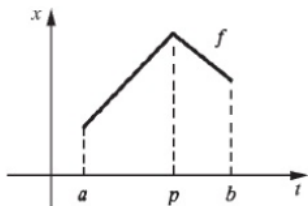
Figura 1: TVM.

Interpretação cinemática do TVM

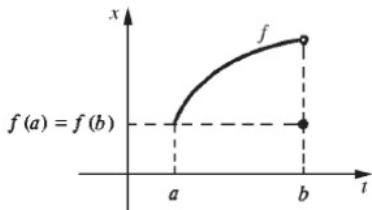
Vejamos, agora, uma interpretação cinemática para o TVM. Suponhamos que $x = f(t)$ seja a função de posição do movimento de uma partícula sobre o eixo Ox . Assim, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Pois bem, o TVM conta-nos que se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então tal velocidade média será igual à velocidade (instantânea) da partícula em algum instante c entre a e b .

Importância das hipóteses no TVM

As situações que apresentamos a seguir mostram-nos que as hipóteses " f contínua em $[a, b]$ e f derivável em $]a, b[$ " são indispensáveis.



f não é derivável em p ; não
existe c verificando ①.



f não é contínua em $[a, b]$; não
existe c verificando ①.

Figura 2: Casos particulares.

Função crescente e decrescente

Vamos relembrar as seguintes definições. Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f . Dizemos que f é estritamente crescente (estritamente decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A ,

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t) \quad (f(s) > f(t)). \quad (2)$$

Por outro lado, dizemos que f é crescente (decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A ,

$$s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t) \quad (f(s) \geq f(t)). \quad (3)$$

Intervalos de crescimento e de decrescimento

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

Theorem (Intervalos de crescimento e de decrescimento)

Seja f contínua no intervalo I .

- a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente crescente em I .*
- b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente decrescente em I .*

Exemplos

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboce o gráfico.

Example

Seja $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$. Estude f com relação a crescimento e decrescimento. Esboce o gráfico.

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Esboce o gráfico.

Exemplos

Example

Suponha $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ e que existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Example

Prove que $g(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$ admite uma única raiz real a , com $-3 < a < -2$.

Example

- a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.
- b) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.
- c) Conclua de (b) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Observação

Vamos mostrar, a seguir, que para $x \rightarrow +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x .

Seja $\alpha > 0$ um real dado. Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha \frac{x}{\alpha}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{\alpha u} = +\infty. \quad (4)$$

Temos, agora,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} \right]^\alpha = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha = +\infty. \quad (5)$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha > 0) \quad (6)$$

Para $x \rightarrow +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x .

Example

Suponha g derivável no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I , e tal que $\lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0$. Nestas condições, prove que, para todo $x \in I$, tem-se $g(x) > 0$.

Example

Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) = 0. \quad (7)$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo $x \in I$, $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que, para todo $x \in I$, tem-se, também,

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta. \quad (8)$$

Example

Sejam f e g deriváveis no intervalo aberto $I =]m, p[$, com $g'(x) > 0$ em I , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = +\infty. \quad (9)$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo x em I , $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que existem constantes M , N e s , com $s \in]m, p[$, tais que, para todo $x \in]s, p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}. \quad (10)$$

Concavidade e pontos de inflexão

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I . A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \text{ ou } y = f(p) + f'(p)(x - p). \quad (11)$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p). \quad (12)$$

Concavidade para cima

Definition

Dizemos que f tem a concavidade para cima no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x) \quad (13)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

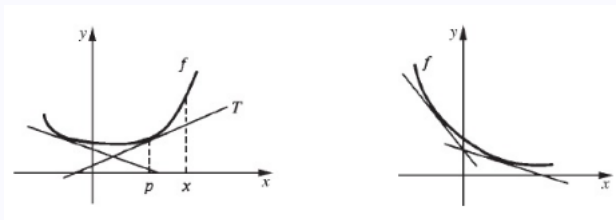


Figura 3: Concavidade voltada para cima.

Definition

Dizemos que f tem concavidade para baixo no intervalo aberto I se

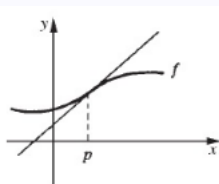
$$f(x) < T(x) \tag{14}$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

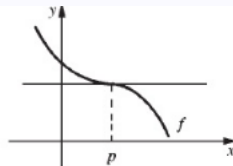
Ponto de inflexão

Definition

Sejam f uma função e $P \in D_f$, com f contínua em p . Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existir números reais a e b , com $p \in]a, b[\in D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão oblíquo)



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão horizontal)

Figura 4: Ponto de inflexão.

Theorem

Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I .

- a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .*
- b) Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .*

Example

Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Estude f com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.

Example

Esboce o gráfico de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Example

Seja f derivável até a 3ª ordem no intervalo aberto I e seja $P \in I$. Suponha que $f''(p) = 0$, $f'''(p) \neq 0$ e que f''' seja contínua em p . Prove que p é ponto de inflexão.

Example

Seja f derivável até a 2ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$.
Suponha f'' contínua em p . Prove que $f''(p) = 0$ é condição necessária (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f .

Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital, que vamos enunciar a seguir, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1ª regra de L'Hospital

Definition (1ª regra de L'Hospital)

Sejam f e g deriváveis em $]p - r, p[$ e em $]p, p + r[$ ($r > 0$), com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0 \quad (15)$$

e se $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (16)$$

Observamos que a 1ª regra de L'Hospital continua válida se substituirmos " $x \rightarrow p$ " por " $x \rightarrow p^+$ " ou por " $x \rightarrow p^-$ " ou por " $x \rightarrow \pm\infty$ ".

2ª regra de L'Hospital

Definition (2ª regra de L'Hospital)

Sejam f e g deriváveis em $]m, p[$, com $g'(x) \neq 0$ em $]m, p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = +\infty \quad (17)$$

e se $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (18)$$

Observamos que a 2ª regra de L'Hospital continua válida se substituirmos " $x \rightarrow p^-$ " por " $x \rightarrow p^+$ " ou por " $x \rightarrow p$ " ou por " $x \rightarrow \pm\infty$ ". A regra permanece válida se substituirmos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.

Exemplos

Example

Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$

Example

Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Exemplo

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]$.

Example

Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^x$

Example

Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^{x+1}$.

Example

Suponha f derivável no intervalo $]p - r, p + r[$, $r > 0$, e que a derivada de 2ª ordem de f exista em p . Mostre que se

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - \left[f(p) + f'(p)(x - p) + a(x - p)^2 \right]^2}{(x - p)^2} = 0 \quad (19)$$

então $a = \frac{f''(p)}{2}$.