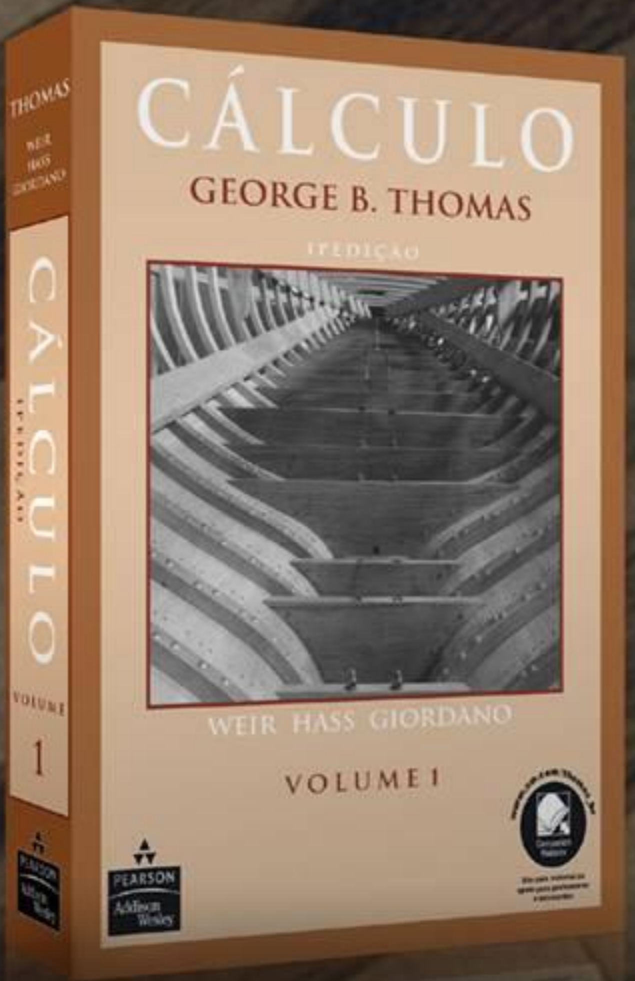
Capítulo 2

Limites e Continuidade



Seção 2.1 – Taxas de Variação e Limites

Determinando a velocidade média

- Exemplo 1: Uma pedra se desprende do topo de um penhasco. Qual é sua velocidade média durante

a) Os primeiros 2*s* de queda?

b) O intervalo de 1s entre o segundo 1 e o segundo 2?

Determinando a velocidade instantânea

- Exemplo 2: Calcule a velocidade da pedra em queda nos instantes $t = 1s$ e $t = 2s$.

TABELA 2.1 Velocidades médias em pequenos intervalos de tempo

Velocidade média: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{4{,}9(t_0 + h)^2 - 4{,}9t_0^{\ 2}}{h}$

Duração do intervalo de tempo h	Velocidade média de duração h começando em $t_0 = 1$	Velocidade média no intervalo de duração h começando em $t_0 = 2$
1	14,7	24,5
0,1	10,29	20,09
0,01	9,849	19,649
0,001	9,8049	19,6049
0,0001	9,80049	19,60049

Definição Taxa média de variação num intervalo

A **taxa média de variação** de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$

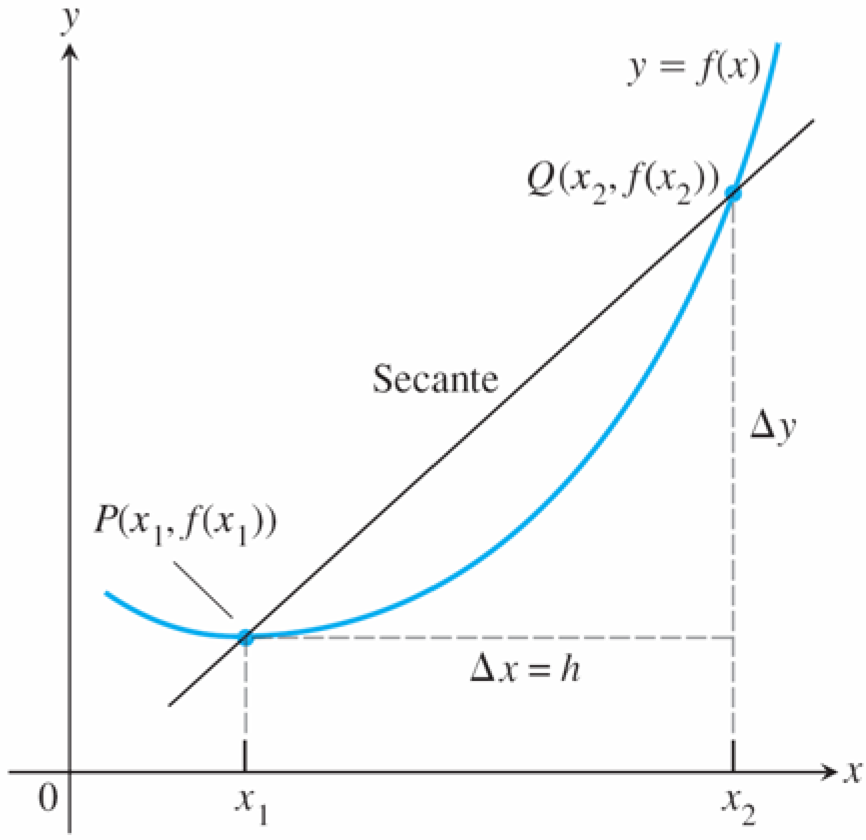


FIGURA 2.1 Uma reta secante ao gráfico de $y = f(x)$. Seu coeficiente angular é $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, a taxa média de variação de f no intervalo $[x_1 ; x_2]$.

Taxa média de crescimento de uma população laboratorial

- Exemplo 3: A Figura 2.2 mostra como uma população de moscas-das-frutas (*Drosophila*) cresceu num experimento de 50 dias. O número de moscas foi contado a intervalos regulares, os valores averiguados foram colocados num gráfico em relação ao tempo, e os pontos foram unidos por uma curva cheia (em azul na Figura 2.2). Calcule a taxa média de crescimento do dia 23 ao 45.

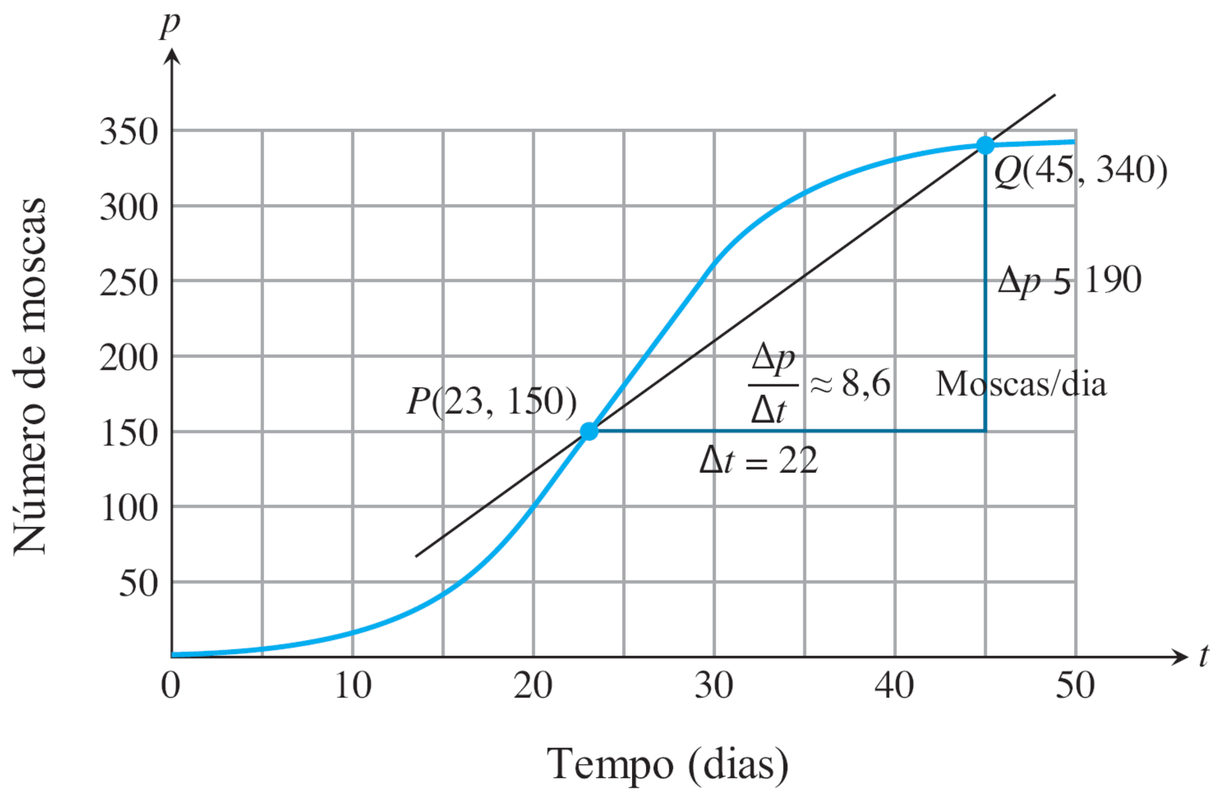


FIGURA 2.2 Crescimento de uma população de moscas-das-frutas num experimento controlado. A taxa média de variação ao longo de 22 dias é o coeficiente angular $\Delta p/\Delta t$ da secante

A taxa de crescimento no dia 23

- Exemplo 4: A qual velocidade o número de moscas na população do Exemplo 3 estava crescendo no dia 23?

Q	**Coeficiente angular de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/dia)**
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8{,}6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10{,}6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13{,}3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16{,}4$

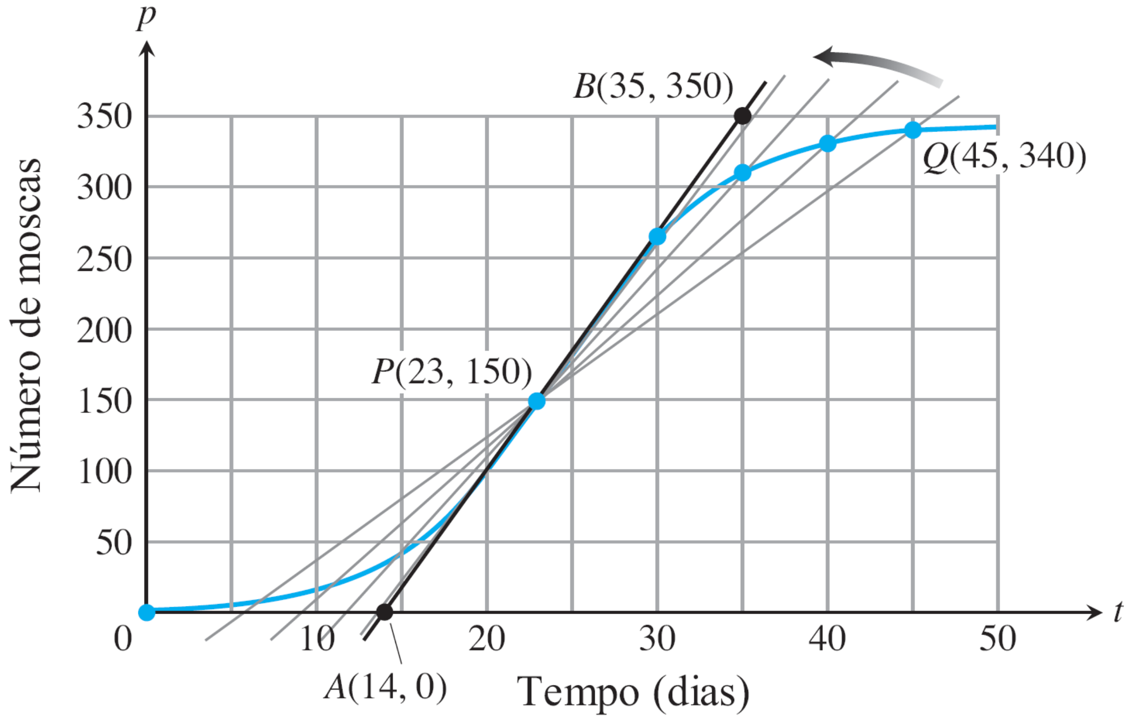


FIGURA 2.3 Posições e coeficientes angulares das quatro secantes que passam pelo ponto P na curva das moscas (Exemplo 4).

Limites dos valores das funções

- Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0, dizemos que f tem ***limite*** L quando x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Comportamento de uma função perto de um ponto

- Exemplo 5: Como a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ se comporta próximo de $x = 1$?

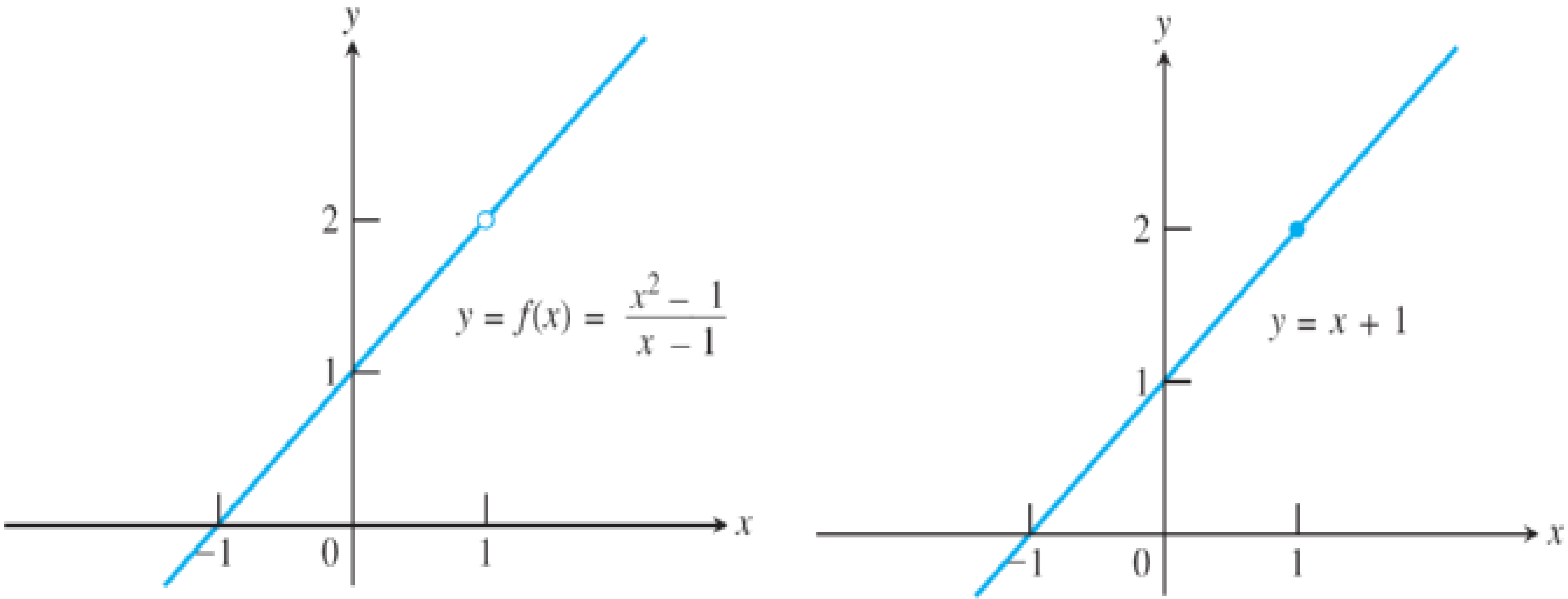
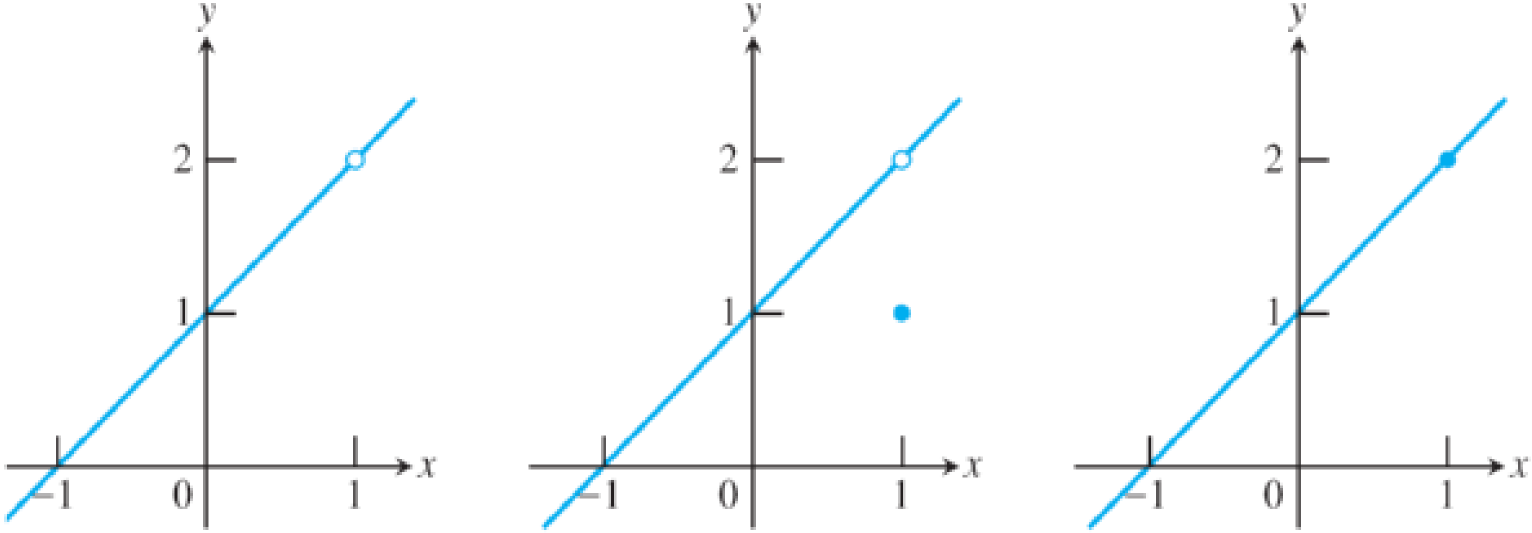


FIGURA 2.4 O gráfico de f é idêntico ao da reta $y = x + 1$, exceto em $x = 1$, onde f não é definida (Exemplo 5).

TABELA 2.2 Quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ parece estar de 2

Valores de x acima e abaixo de 1	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0,9	1,9
1,1	2,1
0,99	1,99
1,01	2,01
0,999	1,999
1,001	2,001
0,999999	1,999999
1,000001	2,000001

- Exemplo 6: O valor do limite não depende do modo como a função é definida em x_0.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

FIGURA 2.5 Os limites de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são iguais a 2 quando x se aproxima de 1. No entanto, somente $h(x)$ tem o mesmo valor de função que seu limite em $x = 1$ (Exemplo 6).

Como determinar os limites calculando $f(x_0)$

- Exemplo 7: Calcule os limites abaixo

$a)\ \lim_{x\to 2}(4)\ ;$

$b)\ \lim_{x\to -13}(4);$

$c)\ \lim_{x\to 3} x;$

$d)\ \lim_{x\to 2}(5x-3);$

$e)\ \lim_{x\to -2}\frac{3x+4}{x+5}.$

As funções constante e identidade têm limites em todos os pontos

- Exemplo 8: Seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Se f é a função identidade $f(x) = x$, então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

b) Se f é a função constante $f(x) = k$ (função com valor constante k), então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

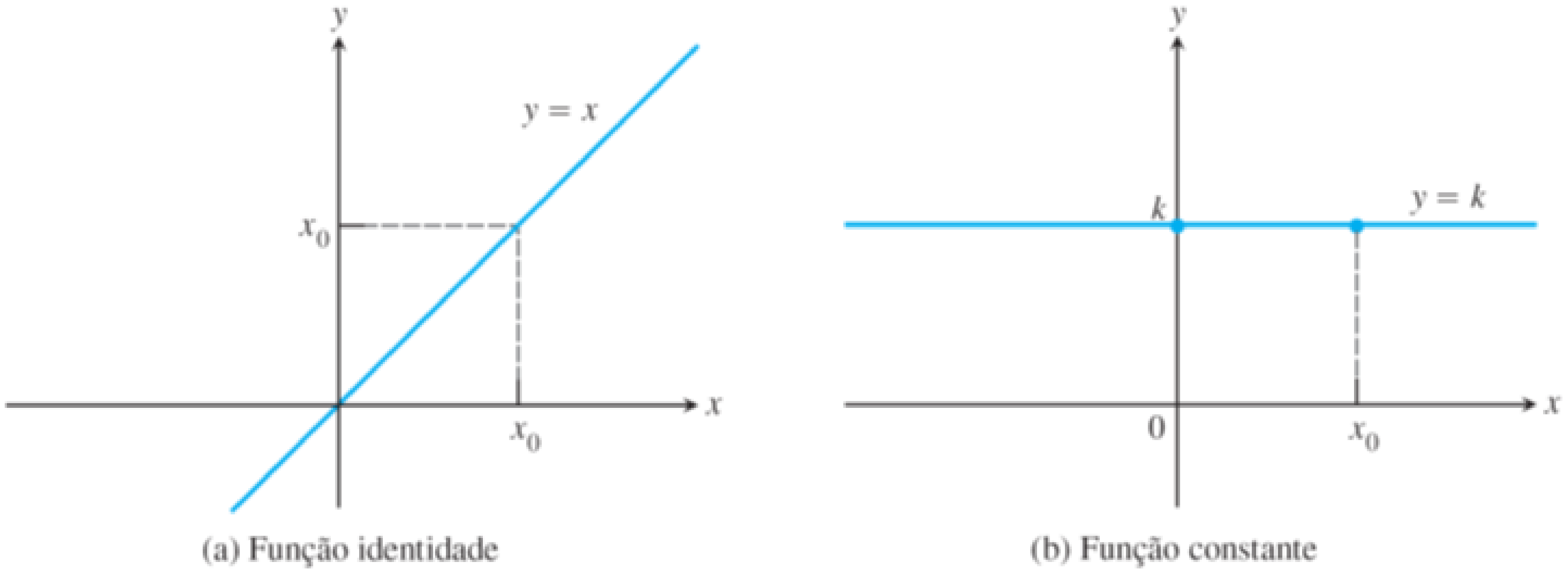


FIGURA 2.6 Funções do Exemplo 8.

Uma função pode não ter limite em dado ponto de seu domínio

- Exemplo 9: Discuta o comportamento das seguintes funções quando $x \to 0$.

$$a)\ U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ \ \mathrm{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \ \mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

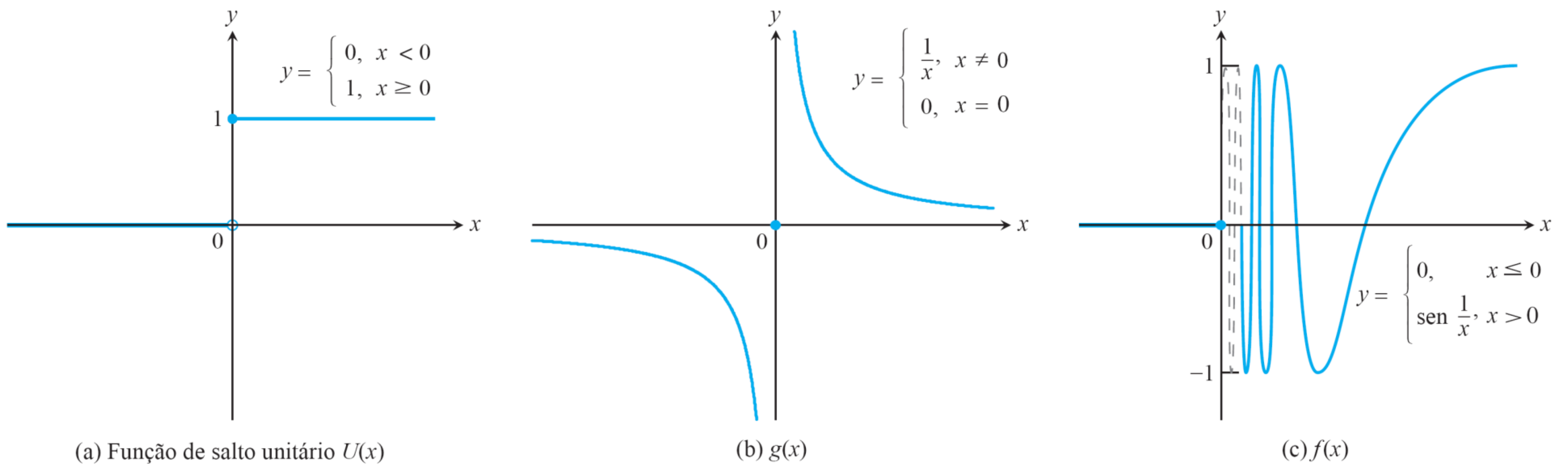


FIGURA 2.7 Nenhuma dessas funções tem um limite à medida que x se aproxima de 0 (Exemplo 9).

Estimando um limite

- Exemplo 10: Estime o limite de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

TABELA 2.3 Valores de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ próximo de $x=0$ fornecidos pelo computador

x	$f(x)$	
± 1	0,049876	aproxima-se de 0,05?
$\pm 0{,}5$	0,049969	
$\pm 0{,}1$	0,049999	
$\pm 0{,}01$	0,050000	
$\pm 0{,}0005$	0,080000	aproxima-se de 0?
$\pm 0{,}0001$	0,000000	
$\pm 0{,}00001$	0,000000	
$\pm 0{,}000001$	0,000000	

Seção 2.2 – Como Calcular Limites Usando as Leis do Limite

Teorema 1 **Leis do limite**

Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$, então

1. *Regra da soma:* $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

   O limite da soma de duas funções é a soma de seus limites.

2. *Regra da diferença:* $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

   O limite da diferença de duas funções é a diferença de seus limites.

3. *Regra do produto:* $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

   O limite do produto de duas funções é o produto de seus limites.

Teorema 1 **Leis do limite**

Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, então

4. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

O limite de uma constante multiplicada pela função é a constante multiplicada pelo limite da função.

5. *Regra do quociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

O limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador não seja zero.

6. *Regra da potenciação:* se r e s são inteiros e não têm um fator comum, e $s \neq 0$, então $\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, desde que $L^{r/s}$ seja um número real. (Se s é par, pressupomos que $L > 0$.)

O limite de uma potência racional de uma função é a potência do limite da função, desde que esse último seja um número real.

Usando as leis de limite

- Exemplo 1: Calcule:

$$a)\ \lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)$$

$$b)\ \lim_{x\to c}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5}$$

$$c)\ \lim_{x\to c}\sqrt{4x^2-3}$$

Teorema 2 **Os limites de funções polinomiais podem ser obtidos por substituição**

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, então

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Teorema 3 **Os limites de funções racionais podem ser obtidos por substituição, caso o limite do denominador não seja zero**

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Limite de uma função racional

- Exemplo 2: Calcule $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$.

Identificando fatores comuns

Pode-se demonstrar que, se $Q(x)$ é um polinômio e $Q(c) = 0$, então $(x - c)$ é um fator de $Q(x)$. Logo, se o numerador e o denominador de uma função racional de x forem ambos zero em $x = c$, eles terão $(x - c)$ como fator comum.

Cancelando um fator comum

- Exemplo 3: Resolva $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

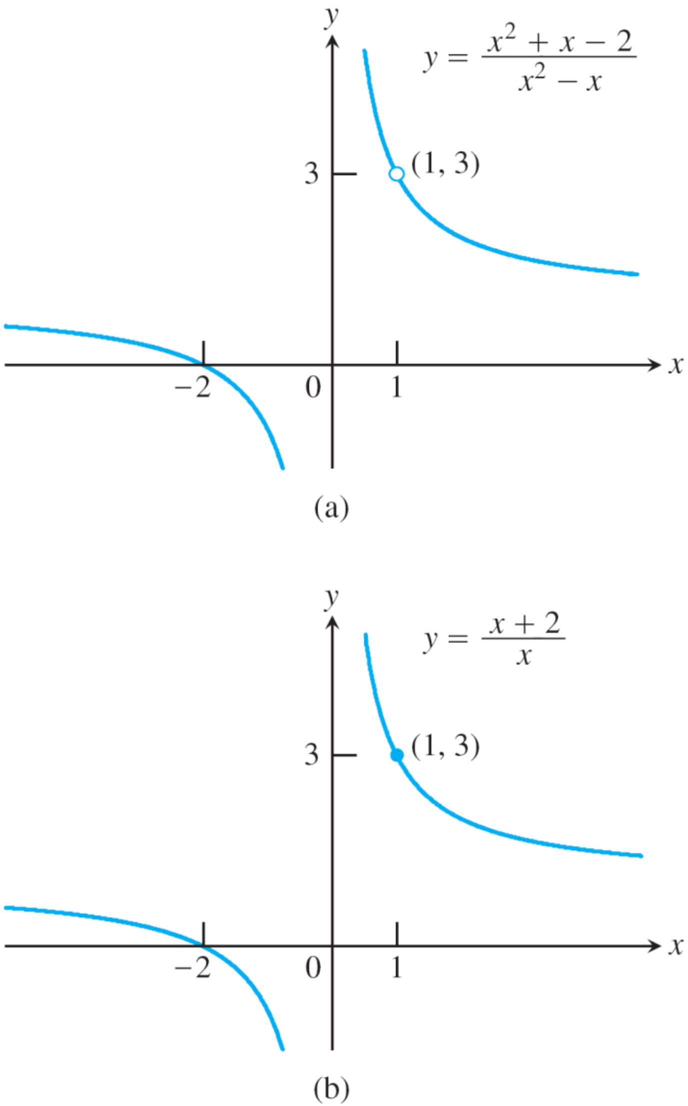


FIGURA 2.8 O gráfico de $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ em (a) é igual ao de $g(x) = (x + 2)/x$ em (b), exceto em $x = 1$, onde f é indefinida. As funções têm o mesmo limite quando $x \to 1$ (Exemplo 3).

Criando e cancelando um fator comum

- Exemplo 4: Resolva $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ que vimos no Exemplo 10 da seção anterior.

Teorema 4 **Teorema do confronto**

Suponha que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, em $x = c$. Suponha também que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Então, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

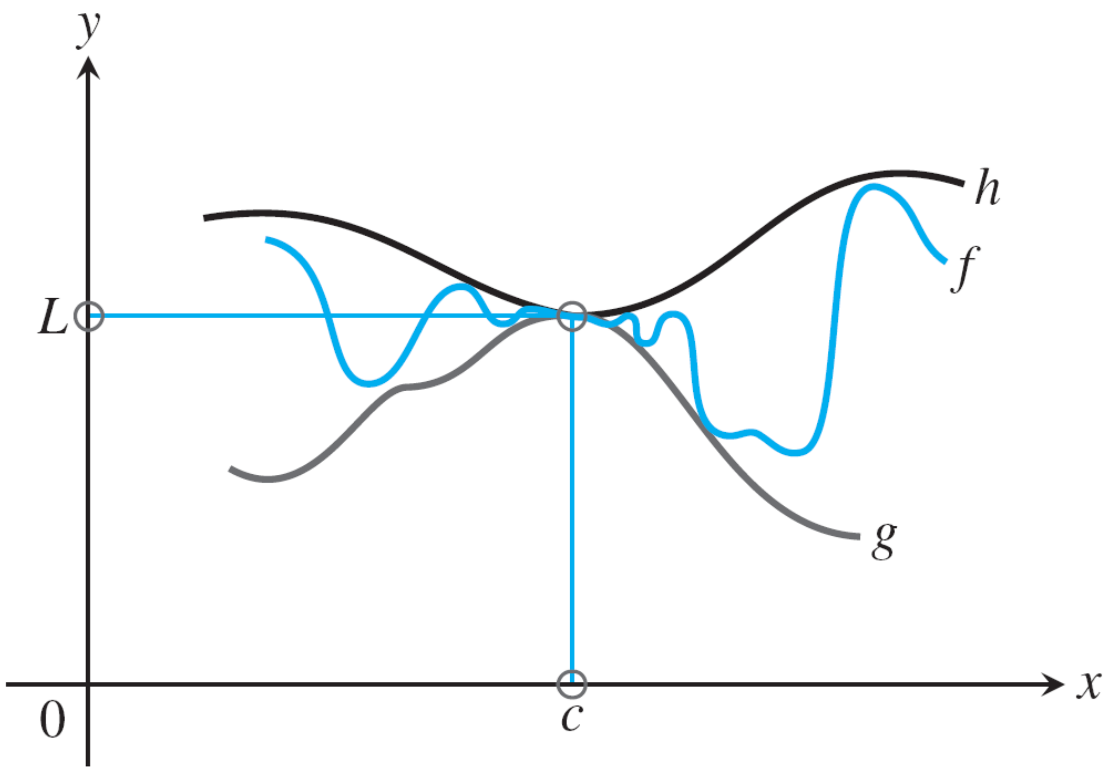


FIGURA 2.9 O gráfico de *f* é limitado entre os de *g* e *h*.

Aplicando o teorema do confronto

- Exemplo 5: Sendo $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$, para qualquer $x \neq 0$, procure $\lim_{x \to 0} u(x)$, por mais complicado que seja $u(x)$.

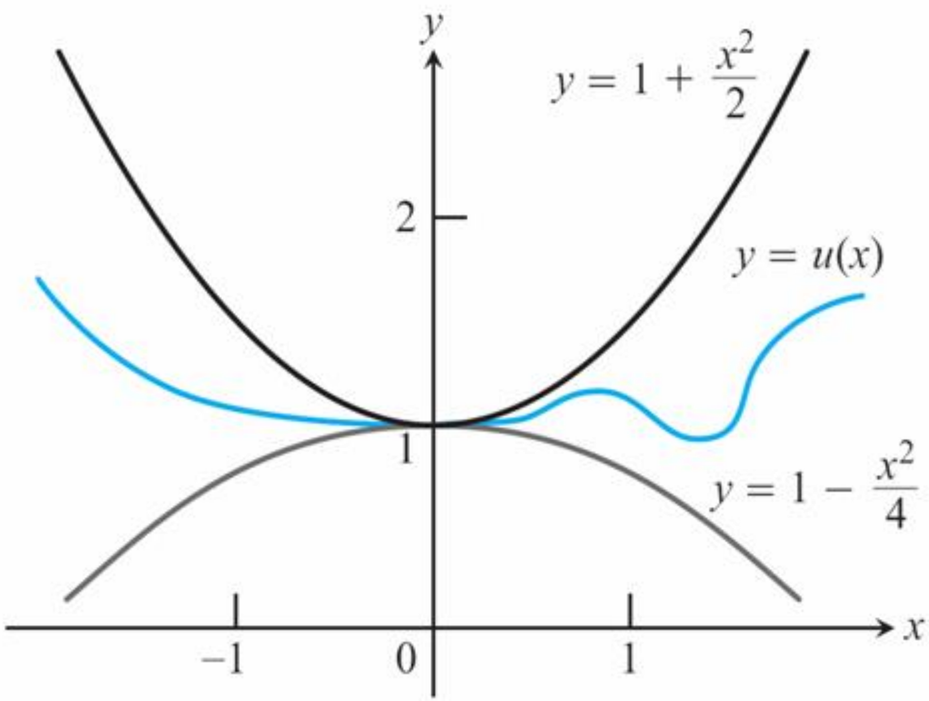


FIGURA 2.10 Qualquer função $u(x)$ cujo gráfico esteja na região entre $y = 1 + (x^2/2)$ e $y = 1 - (x^2/4)$ tem limite 1 quando $x \to 0$ (Exemplo 5).

Outras aplicações do teorema do confronto

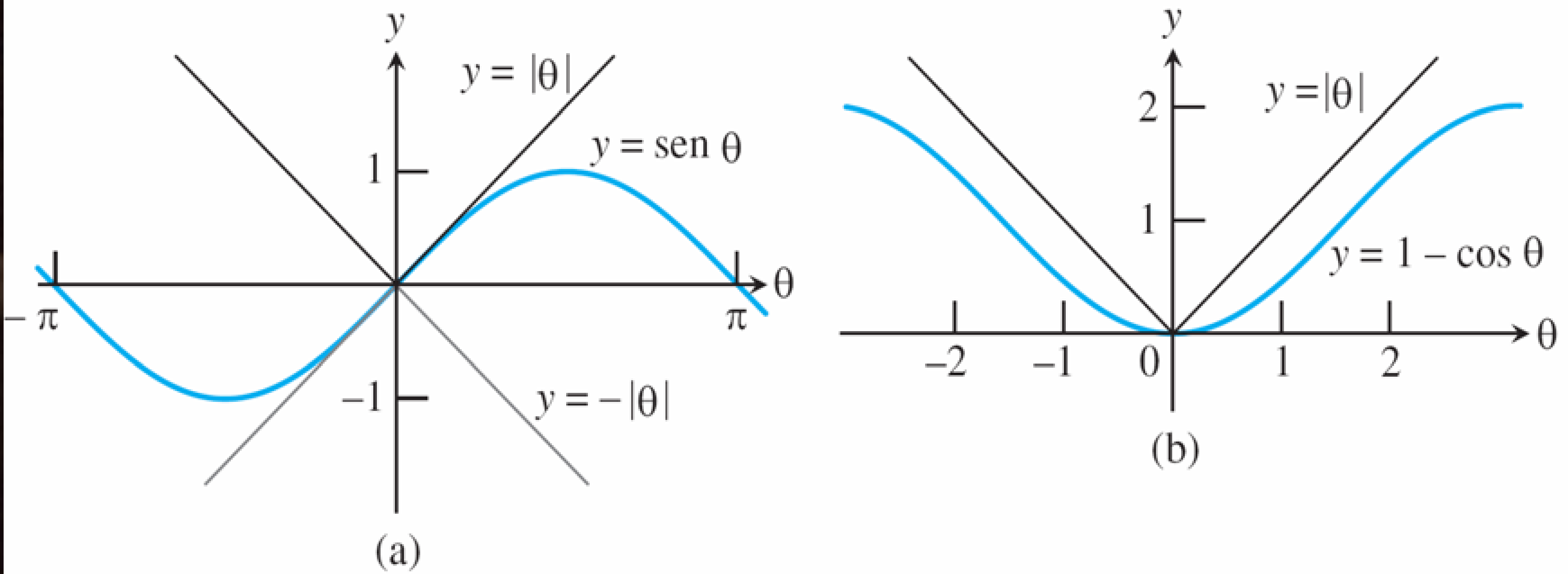


FIGURA 2.11 O teorema do confronto confirma que (a) $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ e (b) $\lim_{\theta \to 0} (1 - \cos \theta) = 0$ (Exemplo 6).

Outras aplicações do teorema do confronto

- Exemplo 6 (c): Para qualquer função $f(x)$, se $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

Teorema 5

Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio $x = c$, e os limites de f e g existem quando x se aproxima de c, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

- OBS.: Temos que, se $f(x) < g(x)$ nas demais condições do Teorema anterior, então $\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$. E não $\lim_{x \to c} f(x) < \lim_{x \to c} g(x)$ como possa se imaginar.

Seção 2.3 – Definição Precisa de Limite

Limite de uma função linear

- Exemplo 1: Considere a função $y = 2x - 1$ próxima de $x_0 = 4$. Intuitivamente, fica claro que y está próximo de 7 quando x está próximo de 4, de maneira que $\lim_{x \to 4} (2x - 1) = 7$. No entanto, quão próximo de $x_0 = 4$ deve estar x para que $y = 2x - 1$ difira de 7 por, digamos, menos de 2 unidades?

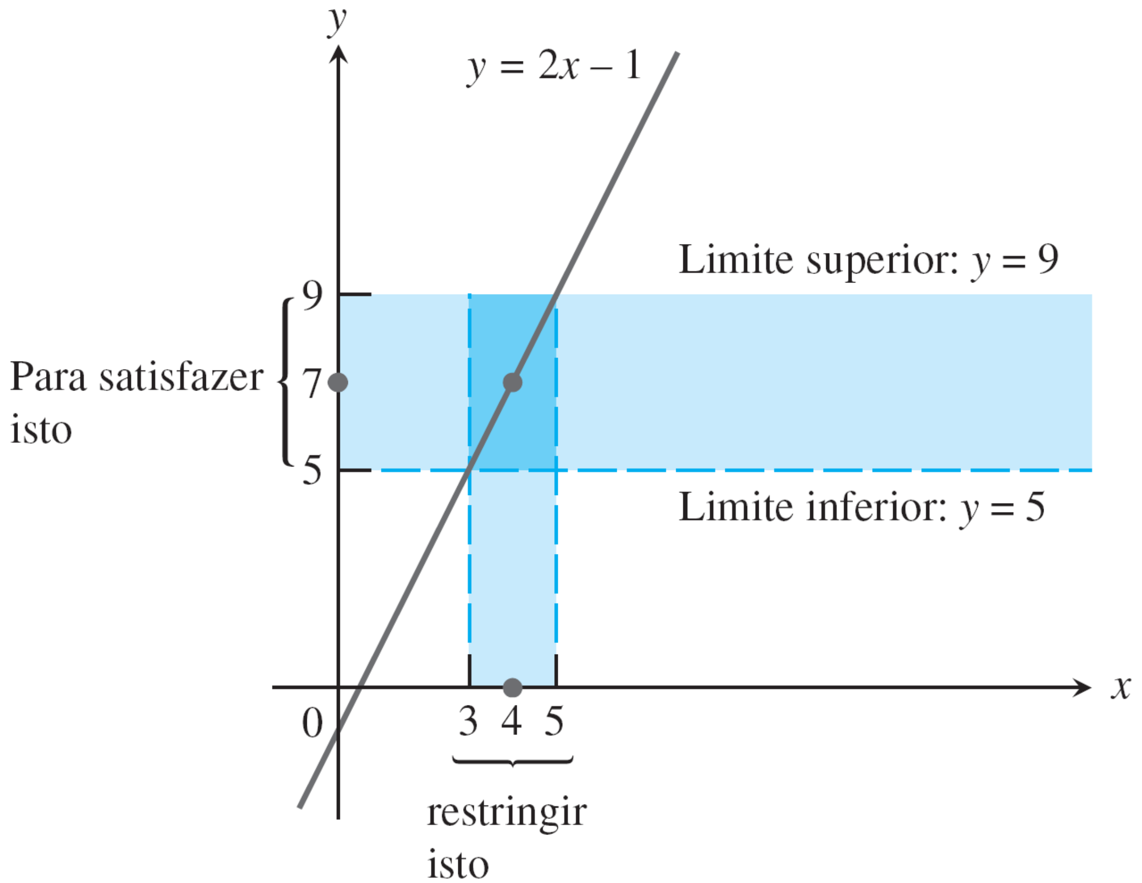


FIGURA 2.12 Ao mantermos x variando 1 unidade em torno de $x_0 = 4$, manteremos y variando 2 unidades em torno de $y_0 = 7$ (Exemplo 1).

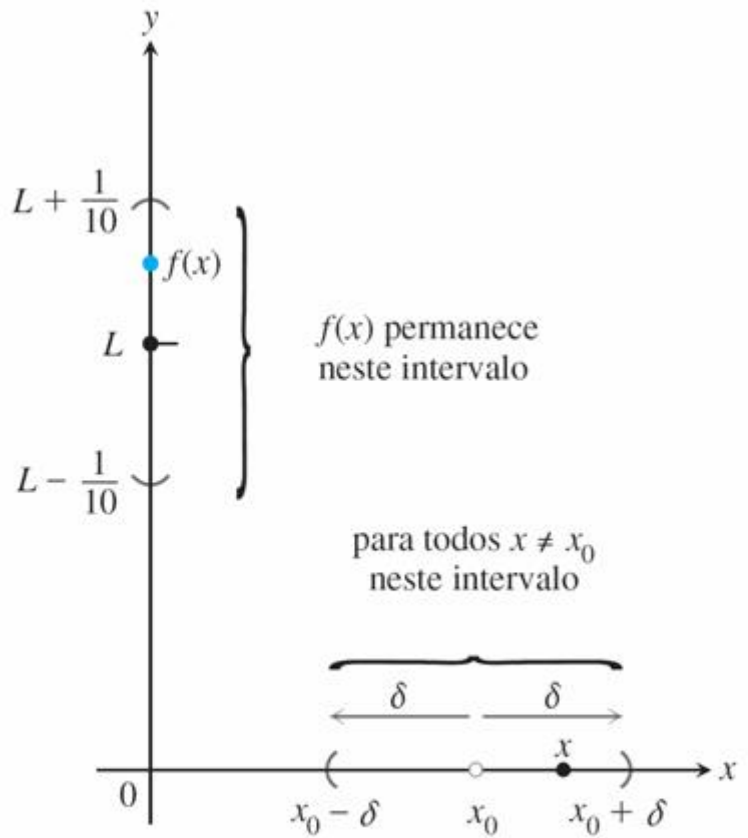


FIGURA 2.13 Como deveríamos definir $\delta > 0$ de modo que, se mantivéssemos x dentro do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x)$ ficaria dentro do intervalo $\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$?

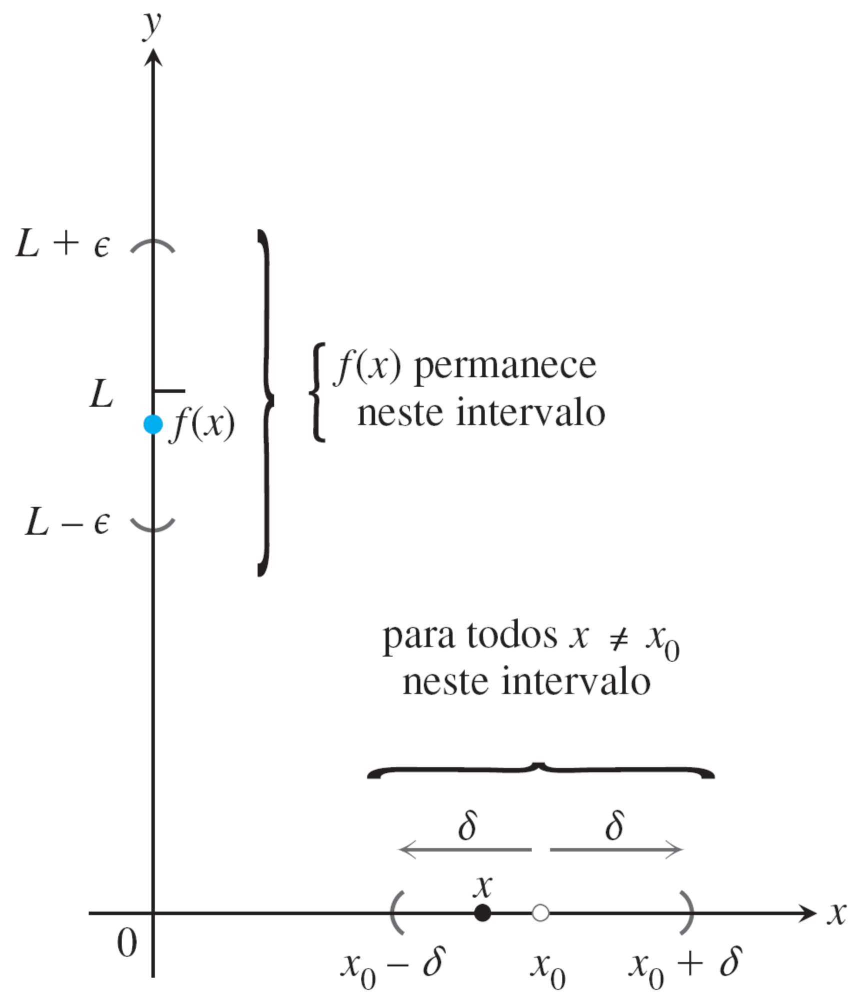


FIGURA 2.14 Relação entre δ e ϵ na definição de limite.

Definição Limite de uma função

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que o **limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0, é o número L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Testando a definição

- Exemplo 2: Mostre que

$$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2.$$

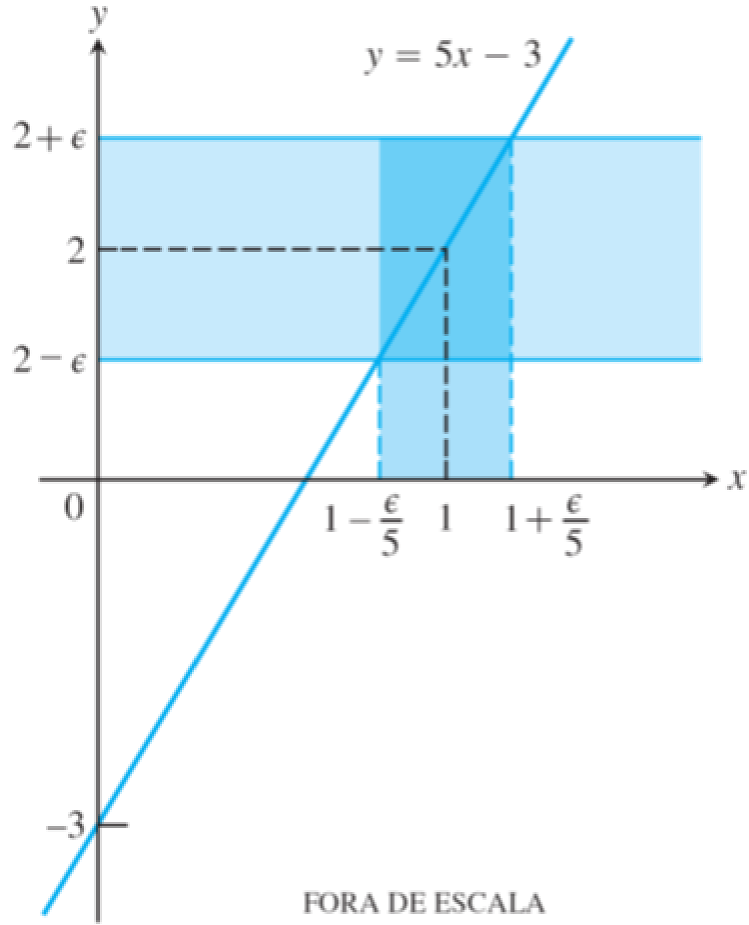


FIGURA 2.15 Se $f(x) = 5x - 3$, então $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ garante que $|f(x) - 2| < \epsilon$ (Exemplo 2).

Limites da identidade e funções constantes

- Exemplo 3: Prove que:

$$a)\ \lim_{x \to x_0} x = x_0;$$

$$b)\ \lim_{x \to x_0} k = k.$$

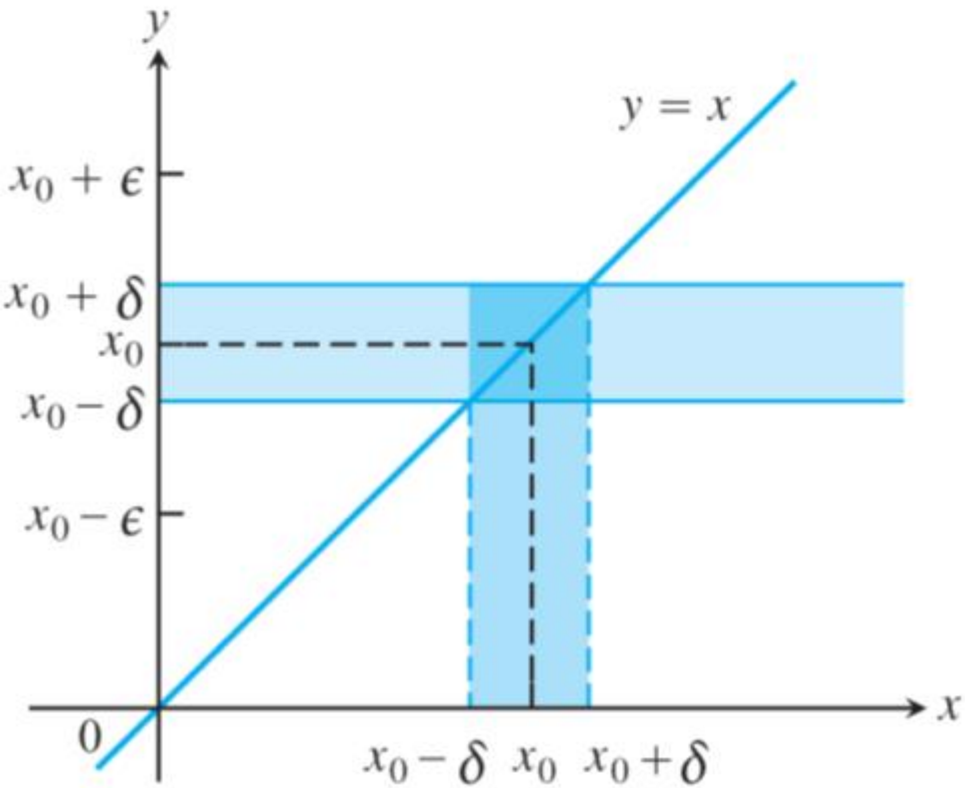


FIGURA 2.16 Para a função $f(x) = x$, determinamos que $0 < |x - x_0| < \delta$ vai garantir $|f(x) - x_0| < \epsilon$ sempre que $\delta \leq \epsilon$ (Exemplo 3a).

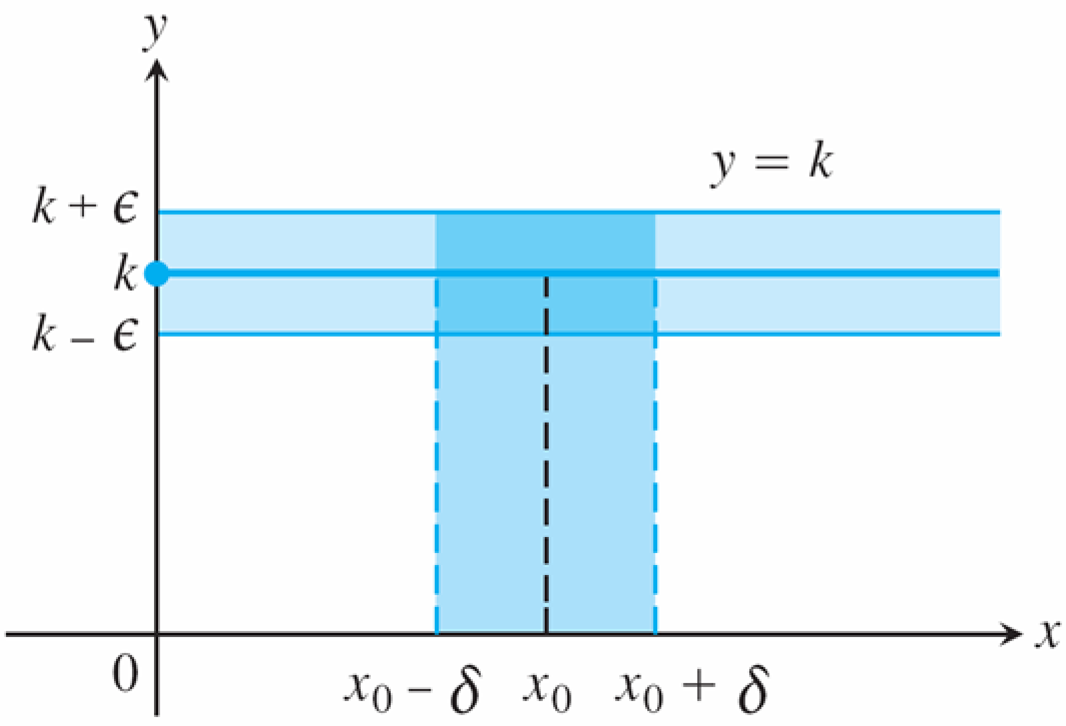


FIGURA 2.17 Para a função $f(x) = k$, determinamos que $|f(x) - k| < \epsilon$ para qualquer δ positivo (Exemplo 3b).

Determinando delta algebricamente

- Exemplo 4: Para o limite $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$, determine um $\delta > 0$ que sirva para $\epsilon = 1$. Ou seja, um $\delta > 0$, tal que, para todo x,

$$0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

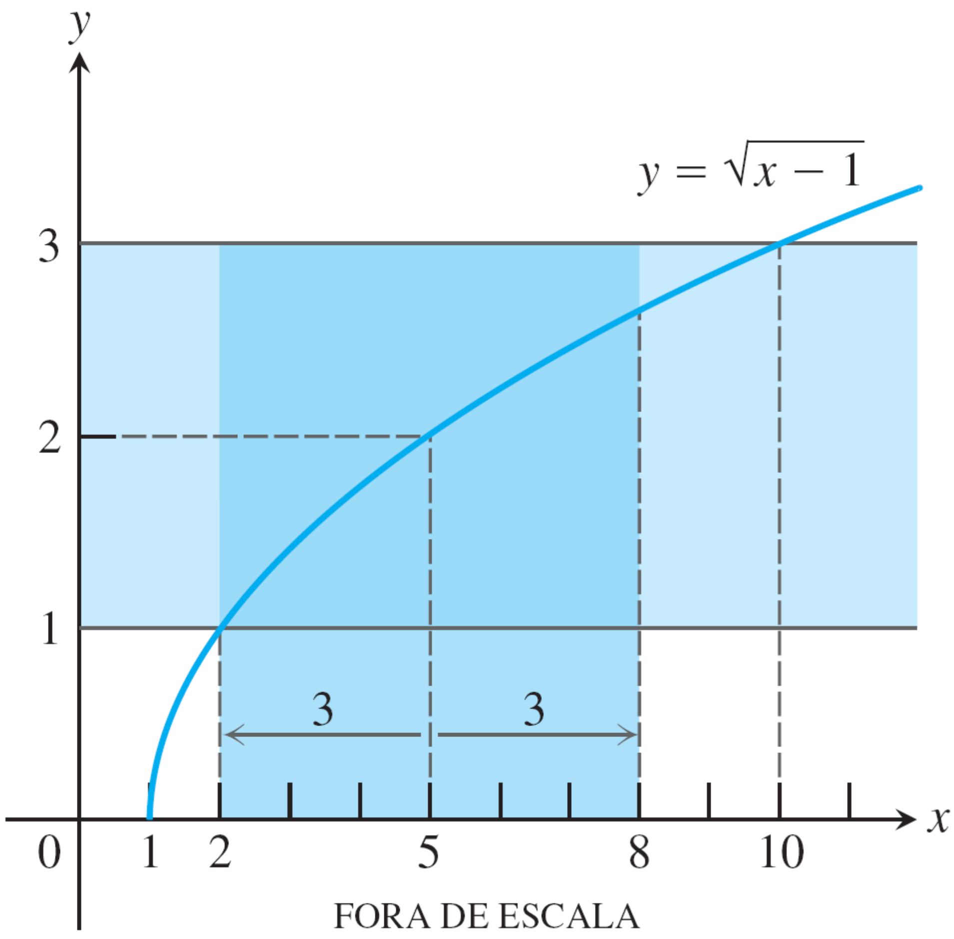


FIGURA 2.19 Função e intervalos no Exemplo 4.

Como determinar algebricamente um δ para dado f, L, x_0 e $\epsilon > 0$

O processo para determinar um $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

pode ser organizado em duas etapas:

1. *Resolva a inequação* $|f(x) - L| < \epsilon$ a fim de determinar um intervalo aberto (a, b) contendo x_0 no qual a inequação valha para todos os $x \neq x_0$.
2. *Determine um valor de* $\delta > 0$ que coloque o intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ centrado em x_0 dentro do intervalo (a, b). A inequação $|f(x) - L| < \epsilon$ terá validade para todos os $x \neq x_0$ nesse intervalo δ.

Determinando delta algebricamente

- Exemplo 5: Prove que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ se

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}.$$

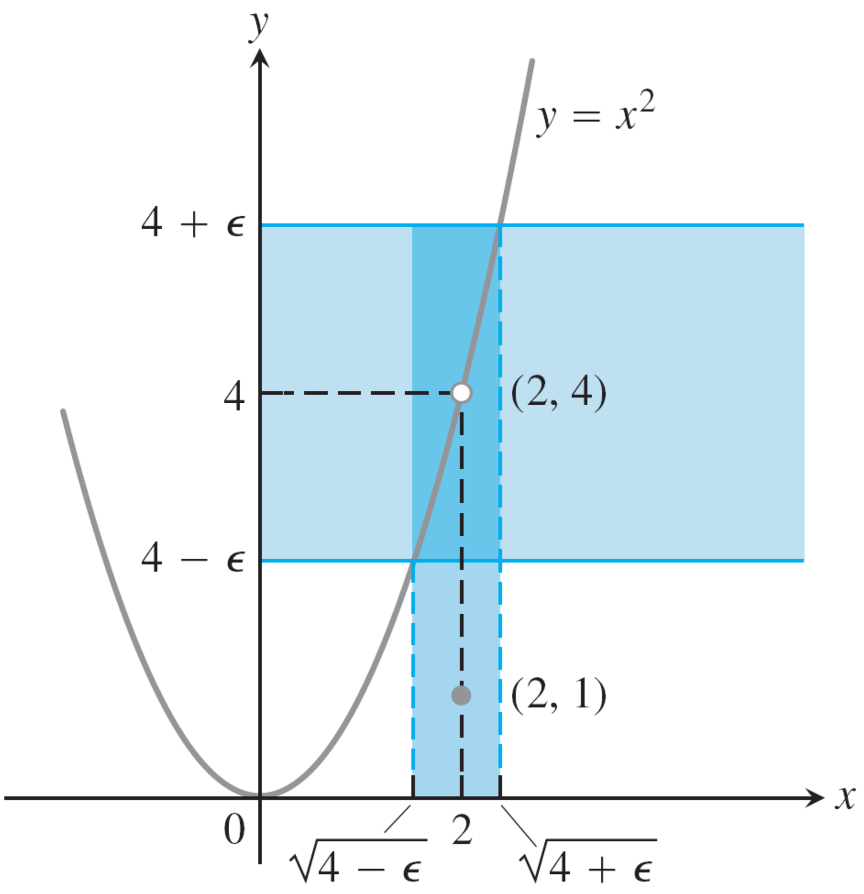


FIGURA 2.20 Um intervalo contendo $x = 2$ de modo que a função do Exemplo 5 satisfaça $|f(x) - 4| < \epsilon$.

Mostrando que limites não existem

- Exemplo: Mostre que o limite da função $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ apresentada no exemplo 9 da seção 2.1 não existe quando $x \to 0$.

Exercícios de leitura

- Exemplo 6: Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, prove que

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M.$$

- Exemplo 7: Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, e que $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x num intervalo aberto contendo c (exceto possivelmente no próprio c, prove que $L \leq M$.

Exemplo 6

SOLUÇÃO Seja $\epsilon > 0$ dado. Queremos determinar um número positivo δ, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Reagrupando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Desigualdade triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Uma vez que $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

De modo similar, uma vez que $\lim_{x \to c} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, o menor entre δ_1 e δ_2. Se $0 < |x - c| < \delta$, então $|x - c| < \delta_1$, logo $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e $|x - c| < \delta_2$, logo $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Portanto

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Exemplo 7

SOLUÇÃO Usaremos o método de provar por contradição. Suponha, em vez disso, que $L > M$. Assim, pela propriedade do limite da diferença, vista no Teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como $L - M > 0$ por hipótese, tomemos $\epsilon = L - M$ em particular e teremos um número $\delta > 0$, tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como $a \leq |a|$ para qualquer número a, temos

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

o que pode ser simplificado para

$$g(x) < f(x) \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Mas isso contradiz $f(x) \leq g(x)$. Logo, a desigualdade $L > M$ só pode ser falsa. Portanto, $L \leq M$.

Seção 2.4 – Limites Laterais e Limites Envolvendo o Infinito

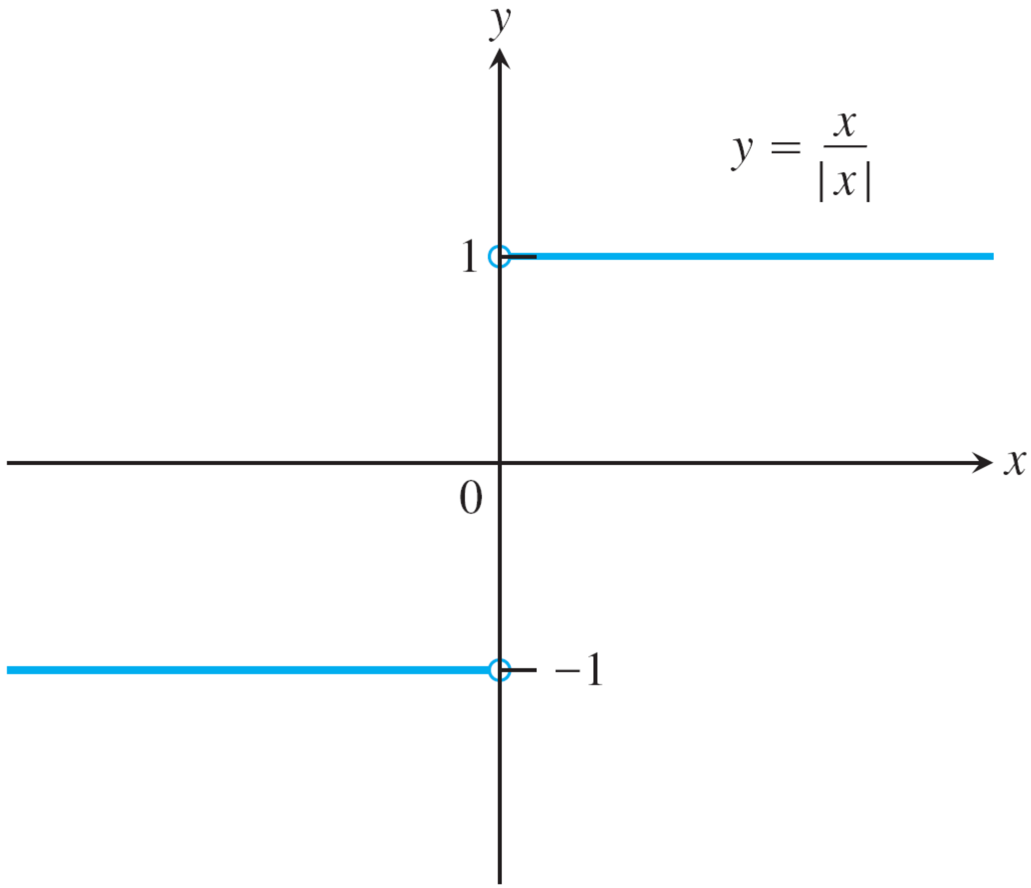


FIGURA 2.21 Limites à direita e à esquerda diferentes na origem.

Notação

- Limite lateral à direita

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

- Limite lateral à esquerda

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

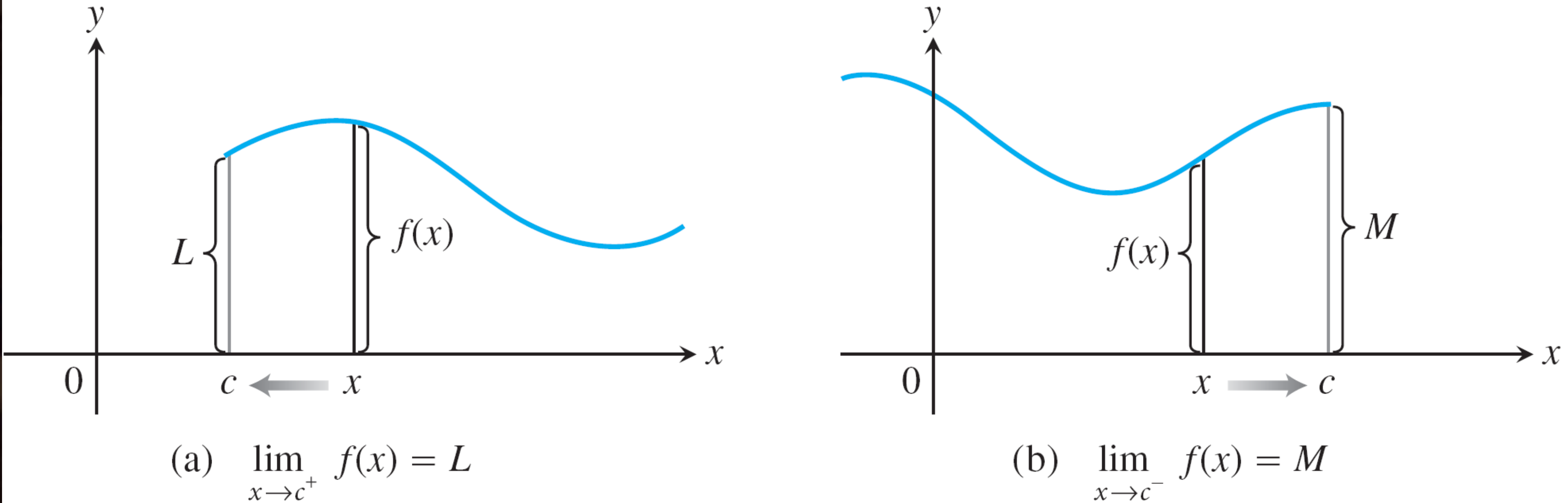


FIGURA 2.22 **(a)** Limite à direita conforme x se aproxima de c. **(b)** Limite à esquerda conforme x se aproxima de c.

Limites laterais para um semi-círculo

- Exemplo 1: Calcule $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, onde $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

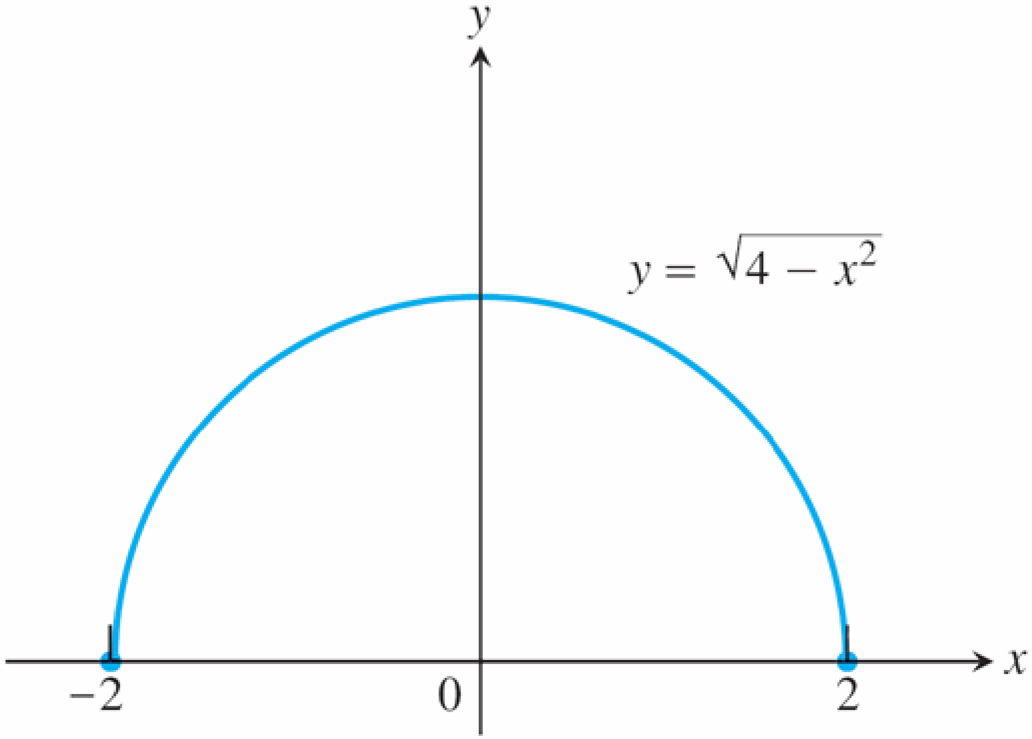


FIGURA 2.23 $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ e $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Exemplo 1).

Teorema 6

Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Limites da função no gráfico da Figura 2.24

- Exemplo 2: Calcule todos os limites bilaterais (a partir dos limites laterais) da função no gráfico da Figura 2.24 em torno de $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$ e $x_0 = 4$.

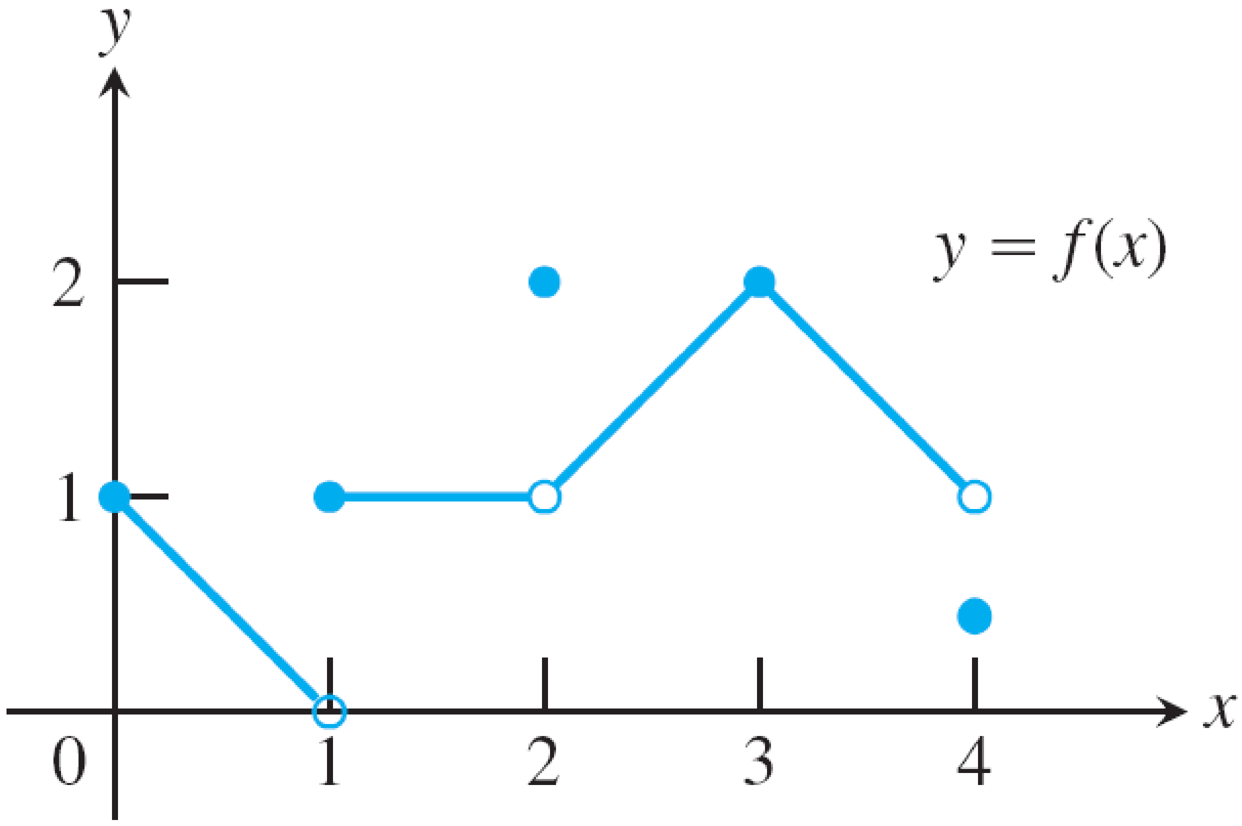


FIGURA 2.24 Gráfico da função do Exemplo 2.

Definições Limites à direita e à esquerda

Dizemos que $f(x)$ tem um **limite à direita L em x_0** e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \qquad \text{(Veja a Figura 2.25.)}$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dizemos que f tem um **limite à esquerda L em x_0** e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \qquad \text{(Veja a Figura 2.26.)}$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x,

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

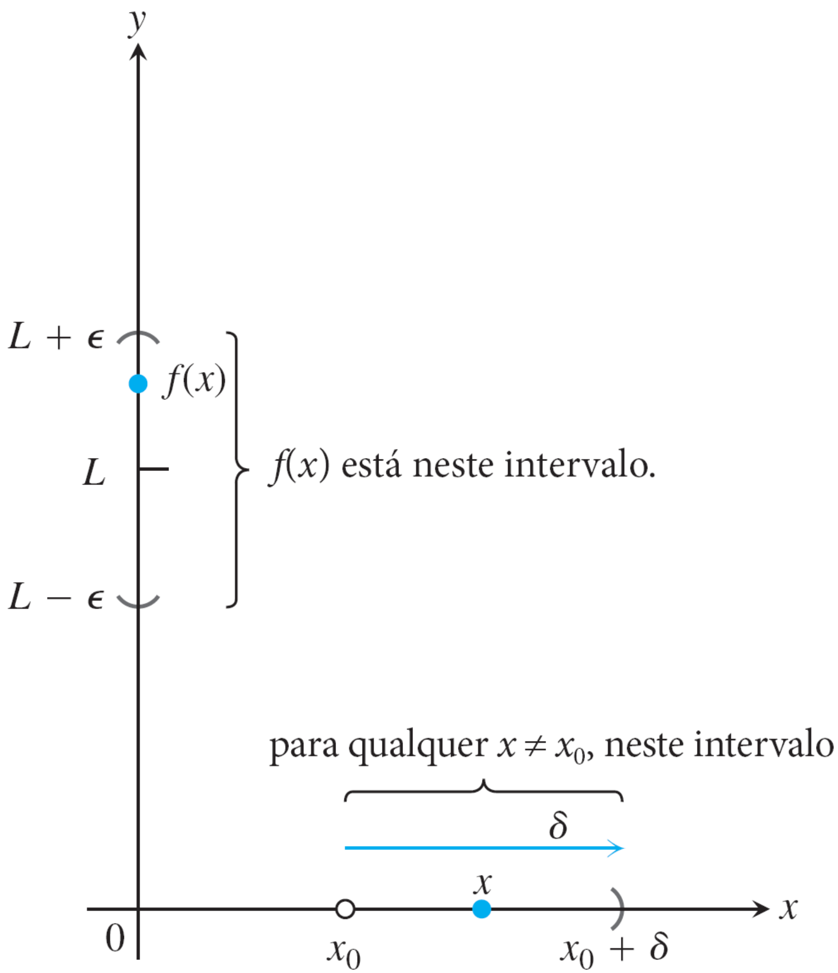


FIGURA 2.25 Intervalos associados com a definição de limite à direita.

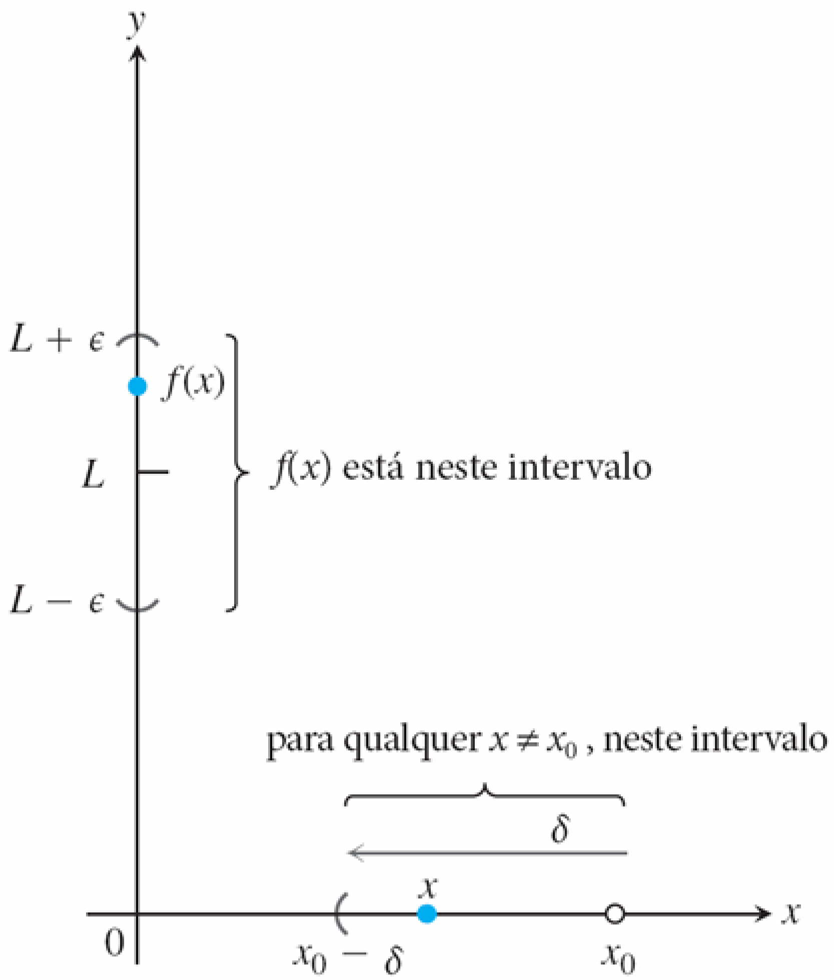


FIGURA 2.26 Intervalos associados com a definição de limite à esquerda.

O primeiro limite fundamental

Teorema 7

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ em radianos}) \qquad \textbf{(1)}$$

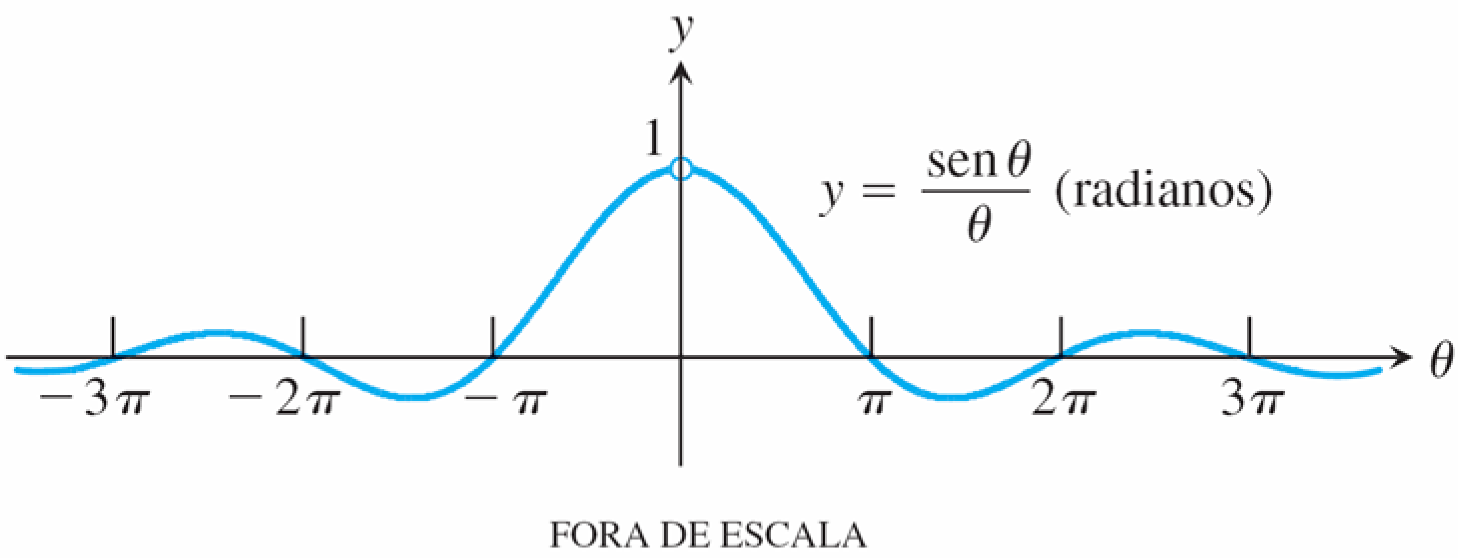


FIGURA 2.29 O gráfico de $f(\theta) = (\operatorname{sen} \theta)/\theta$.

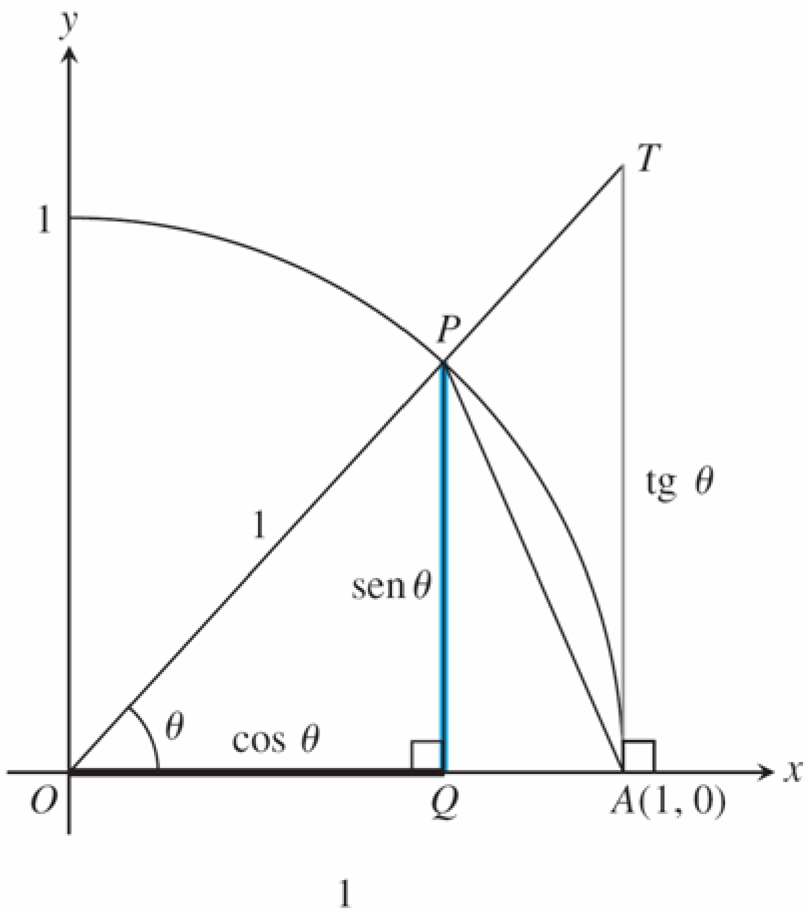


FIGURA 2.30 Figura para a prova do Teorema 7. TA/AO = tg θ, mas AO = 1, então TA = tg θ

Usando o primeiro limite fundamental

- Exemplo 5: Mostre que:

$$a)\ \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h) - 1}{h} = 0;$$

$$b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Limites finitos quando $x \to \pm\infty$

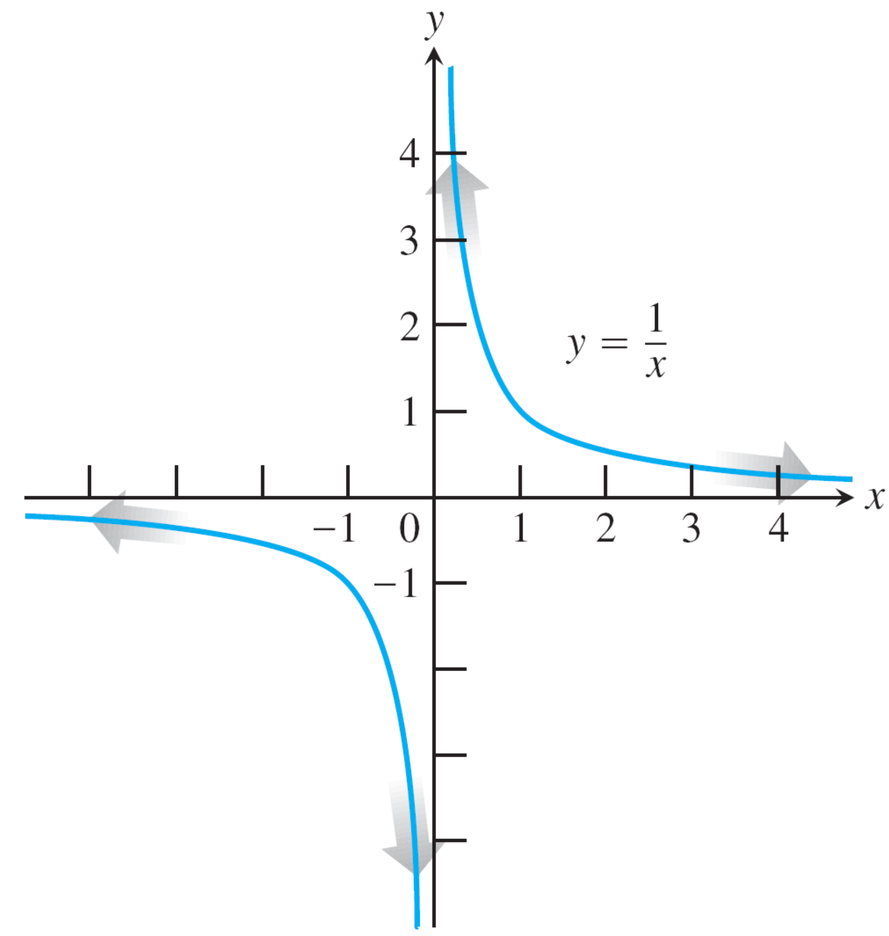


FIGURA 2.31 O gráfico de $y = 1/x$.

Definições **Limites quando x tende a ∞ ou $-\infty$**

1. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L quando x tende ao infinito** e escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se, para cada número $\epsilon > 0$, existe um número M correspondente tal que, para todos os valores de x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

2. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L com x tendendo a menos infinito** e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, para cada número $\epsilon > 0$, existe um número N correspondente tal que, para todos os valores de x

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites no infinito para $f(x) = 1/x$

- Exemplo 6: Verifique visualmente que

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Temos também que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k.$

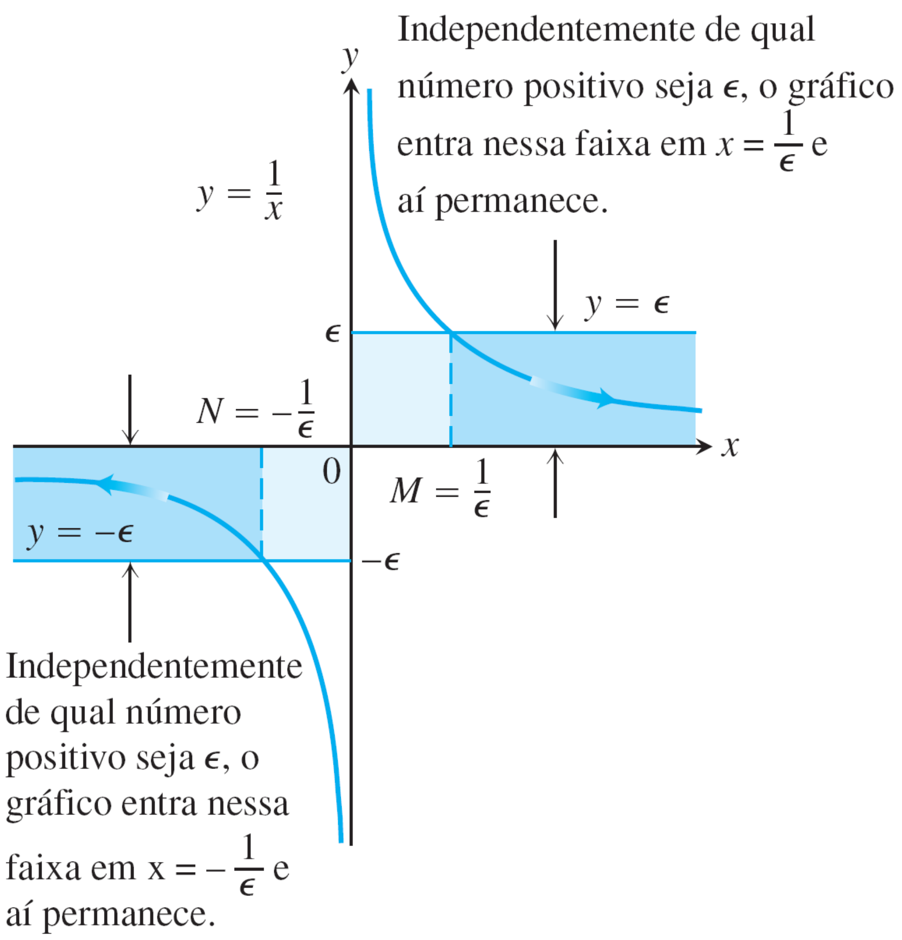


FIGURA 2.32 A geometria por trás do Exemplo 6.

Teorema 8 Leis do limite quando $x \pm\infty$

Se L, M e k são números reais e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \text{ então}$$

1. *Regra da soma:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regra da diferença:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regra do produto:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. *Regra da multiplicação por constante:* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. *Regra do quociente:* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regra da potenciação*: Se r e s são inteiros e não têm fatores comuns, $s \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)^{(r/s)} = L^{r/s}$$

desde que $L^{r/s}$ seja um número real. (Se s for par, pressupomos que $L > 0$.)

Usando o Teorema 8

Exemplo 7: Calcule:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Numerador e denominador de mesmo grau

- Exemplo 8: Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}.$$

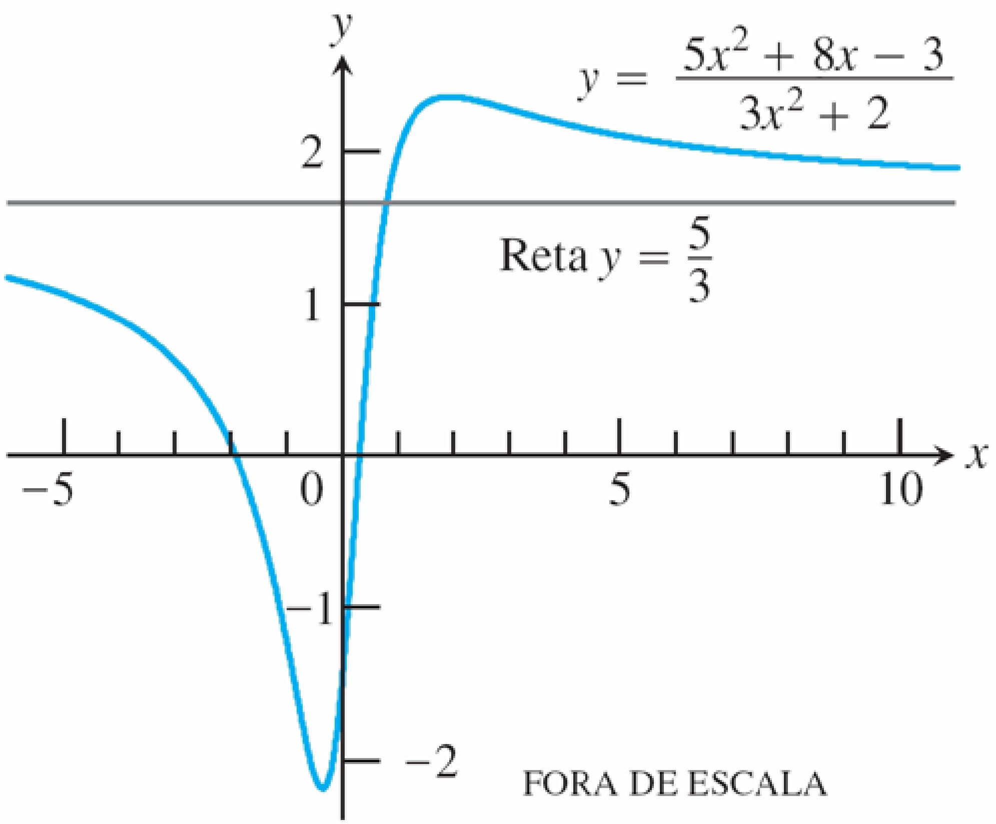


FIGURA 2.33 Gráfico da função do Exemplo 8. A curva se aproxima da reta $y = 5/3$ à medida que $|x|$ aumenta.

Grau do numerador menor que o do denominador

- Exemplo 9: Calcule

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1}$$

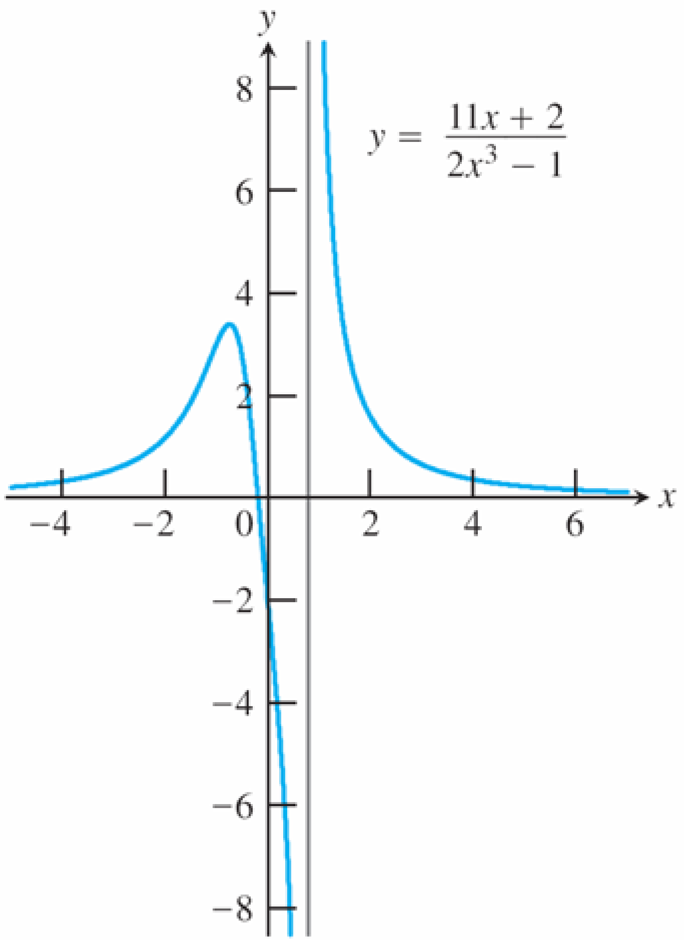


FIGURA 2.34 Gráfico da função do Exemplo 9. A curva se aproxima do eixo x à medida que $|x|$ aumenta.

Definição **Assíntota horizontal**

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Assíntota horizontal de $y = e^x$

- Exemplo 10: Verifique visualmente que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

A demonstração desse resultado está no livro e fica como exercício. Basta tomar $N = \ln e$.

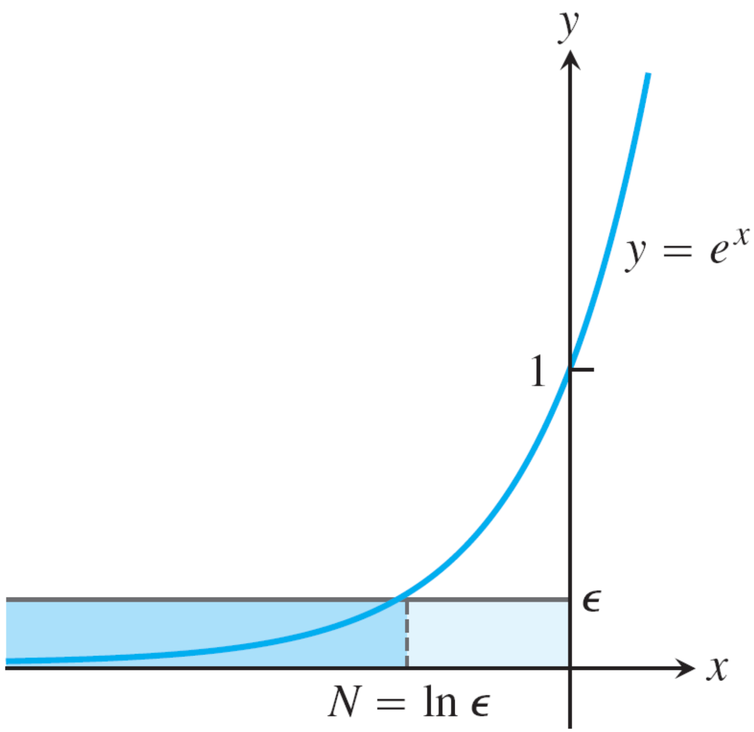


FIGURA 2.35 O gráfico de $y = e^x$ se aproxima do eixo à medida que $x \to -\infty$ (Exemplo 10).

Substituindo por uma nova variável

- Exemplo 11: Encontre

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Usando a substituição

- Exemplo 12: Encontre

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}.$$

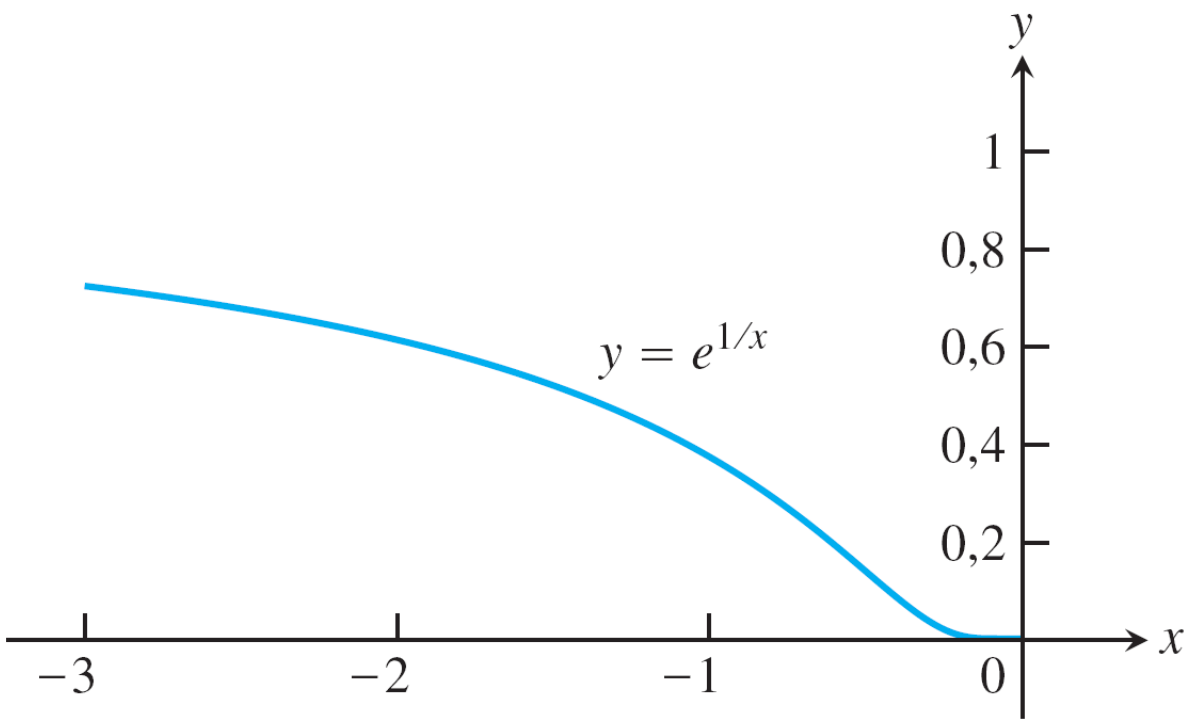


FIGURA 2.36 O gráfico de $y = e^{1/x}$ para $x < 0$ mostra que $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$ (Exemplo 12).

Uma curva pode cruzar sua assíntota horizontal

- Exemplo 13: Usando o teorema do confronto (é permitido usar mesmo quando $x \to \pm\infty$), encontre a assíntota horizontal da curva

$$y = 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

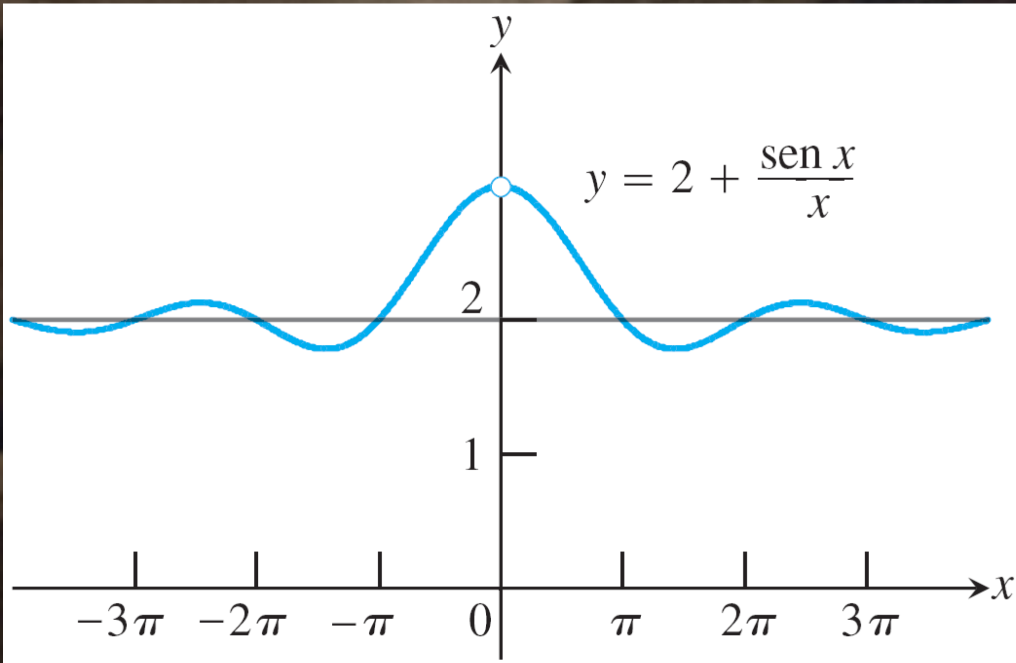


FIGURA 2.37 Uma curva pode cruzar uma de suas assíntotas infinitas vezes (Exemplo 13).

Encontrando uma assíntota

- Exemplo 14: Encontre a assíntota oblíqua para o gráfico de

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

da Figura 2.38.

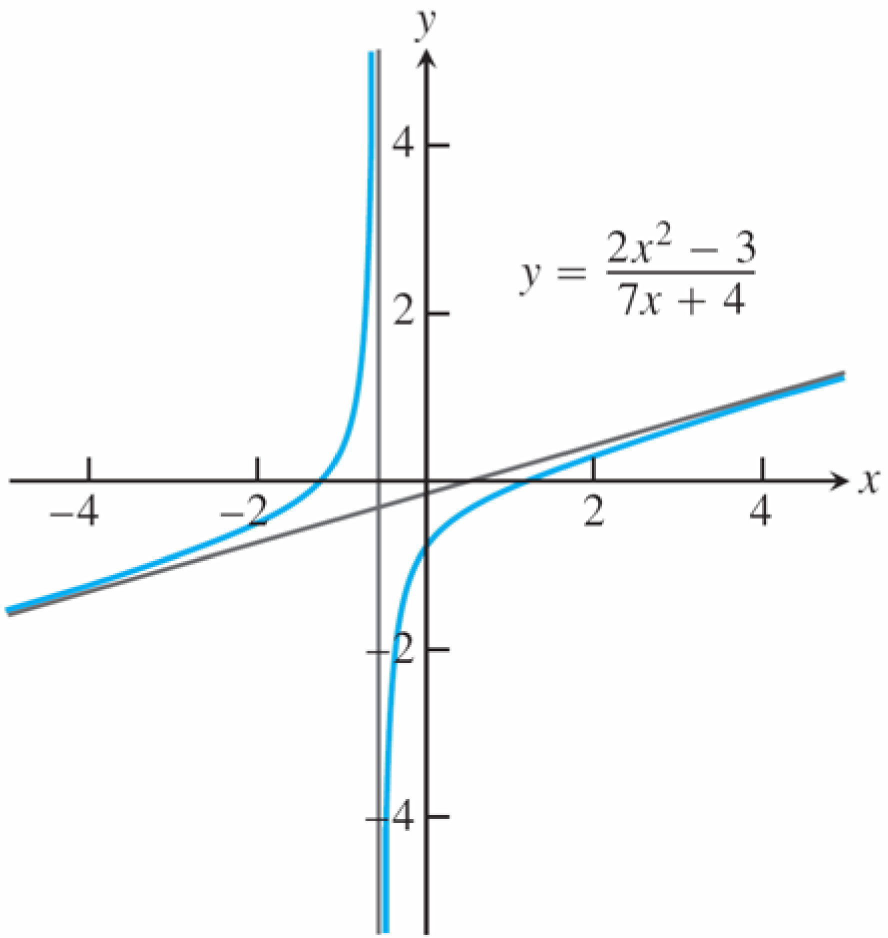


FIGURA 2.38 A função do Exemplo 14 tem uma assíntota oblíqua.

Segundo limite fundamental

- O limite abaixo é calculado na seção 4.6 do livro:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Seção 2.5 - Limites infinitos e assíntotas verticais

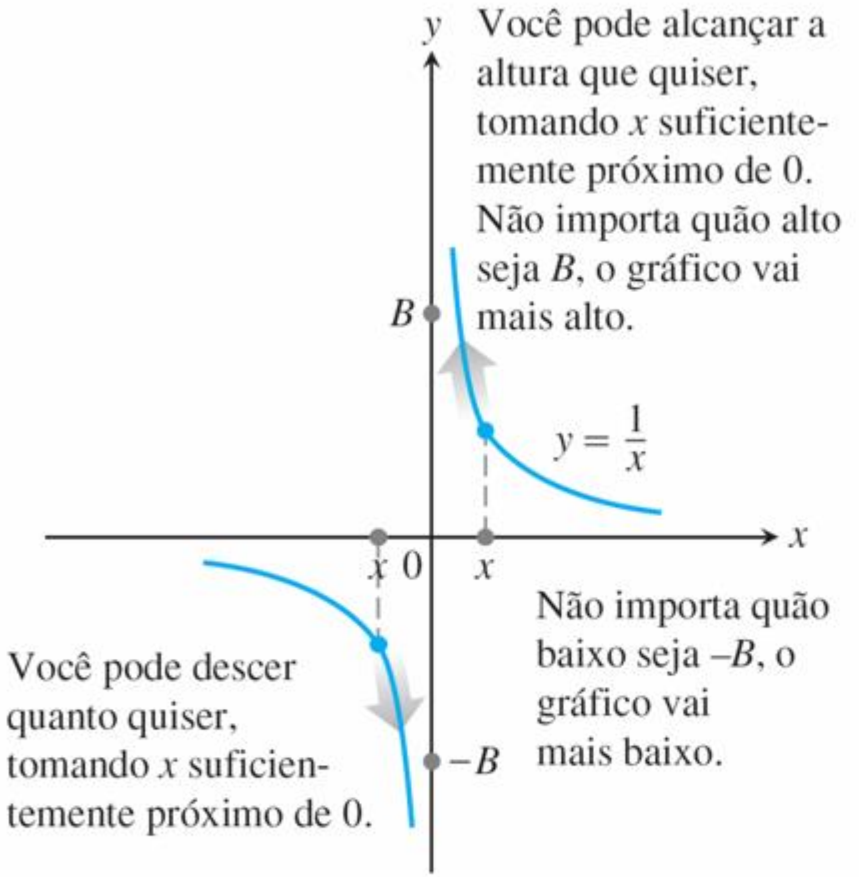


FIGURA 2.39 Limites infinitos laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limites laterais infinitos

- Exemplo 1: Determine

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$$

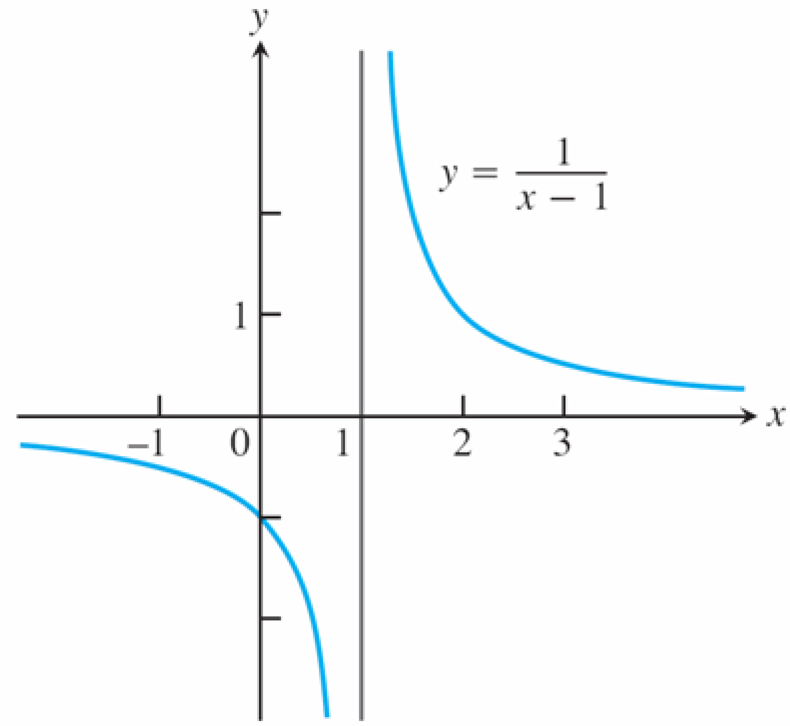


FIGURA 2.40 Próximo de $x = 1$, a função $y = 1/(x - 1)$ comporta-se como a função $y = 1/x$ próximo de $x = 0$. Seu gráfico é o gráfico de $y = 1/x$ deslocado 1 unidade para a direita (Exemplo 1).

Limites infinitos bilaterais

- Exemplo 2: Discuta o comportamento de

$a)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ próximo de $x = 0$.

$b)\ g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ próximo de $x = -3$.

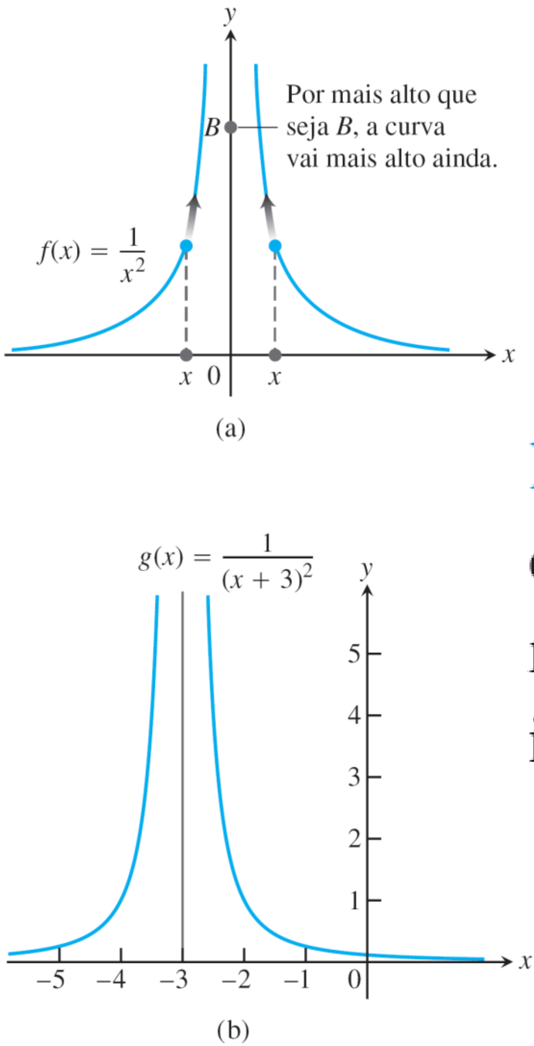


FIGURA 2.41 Gráficos das funções do Exemplo 2. (a) $f(x)$ tende ao infinito quando $x \to 0$. (b) $g(x)$ tende ao infinito quando $x \to -3$.

Comportamento de funções racionais em valores próximos às raízes de seus denominadores

- Exemplo 3:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

$$c)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}$$

Comportamento de funções racionais em valores próximos às raízes de seus denominadores

- Exemplo 3:

d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-4}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}$

Definições Infinito e menos infinito como limites

1. Dizemos que ***f*(*x*) tende ao infinito quando** x **tende a** x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B$$

2. Dizemos que ***f*(*x*) tende ao menos infinito quando *x* tende a** x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se para cada número real negativo $-B$ existe um $\delta > 0$ correspondente tal que, para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < -B$$

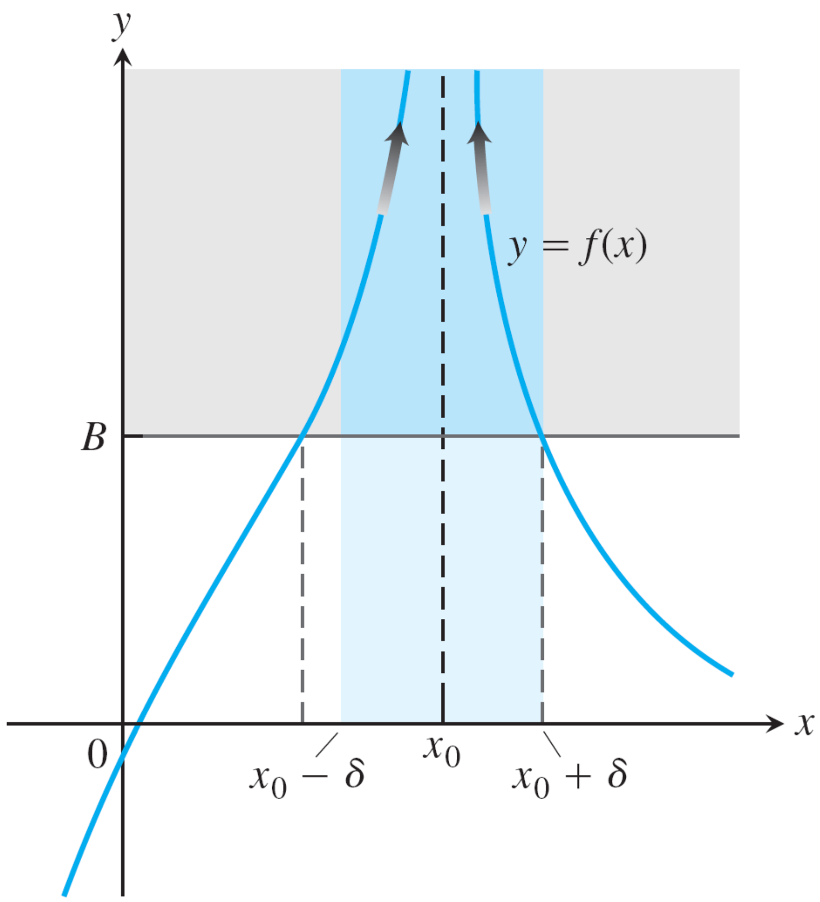


FIGURA 2.42 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, a curva de $f(x)$ fica acima da reta $y = B$.

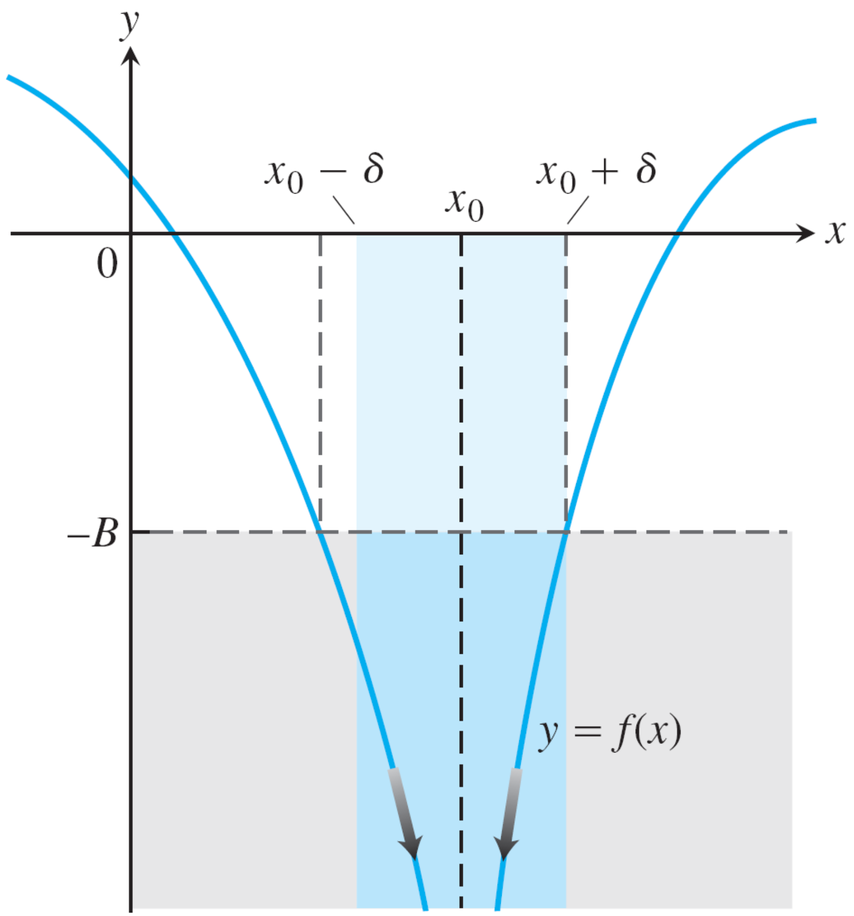


FIGURA 2.43 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, a curva de $f(x)$ fica abaixo da reta $y = -B$.

Definições Assíntota vertical

Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^{-}} f(x) = \pm\infty$$

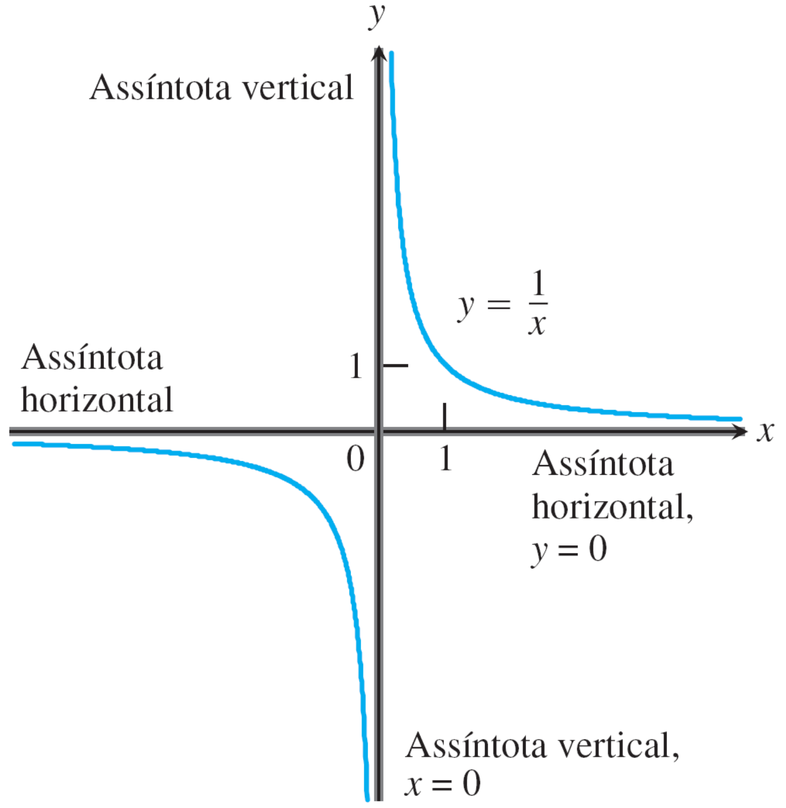


FIGURA 2.44 Os eixos cartesianos são assíntotas de ambos os ramos da hipérbole $y = 1/x$.

Procurando assíntotas

- Exemplo 5: Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

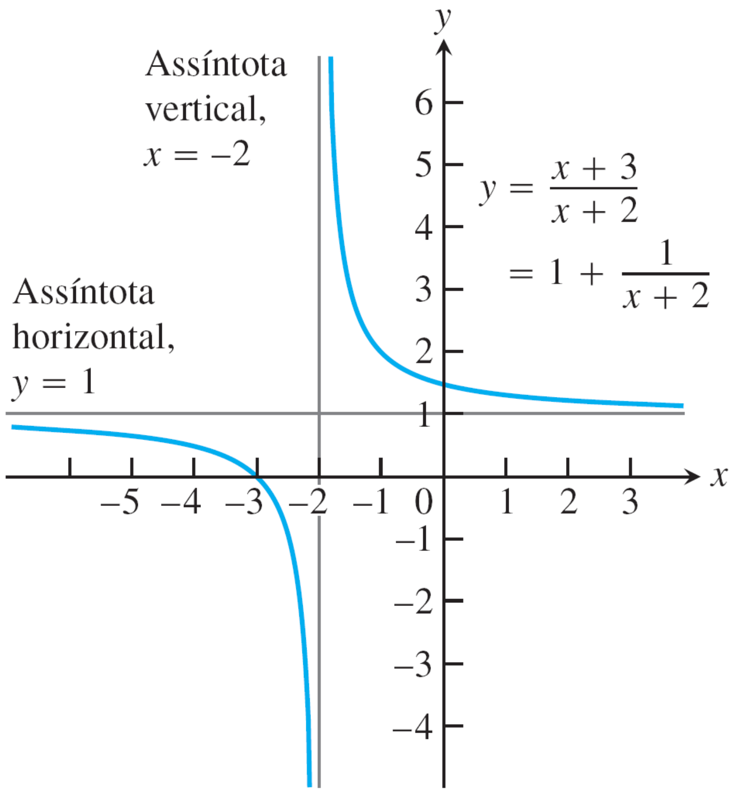


FIGURA 2.45 As retas $y = 1$ e $x = -2$ são as assíntotas da curva $y = (x + 3)/(x + 2)$ (Exemplo 5).

Assíntotas não são necessariamente bilaterais

- Exemplo 6: Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

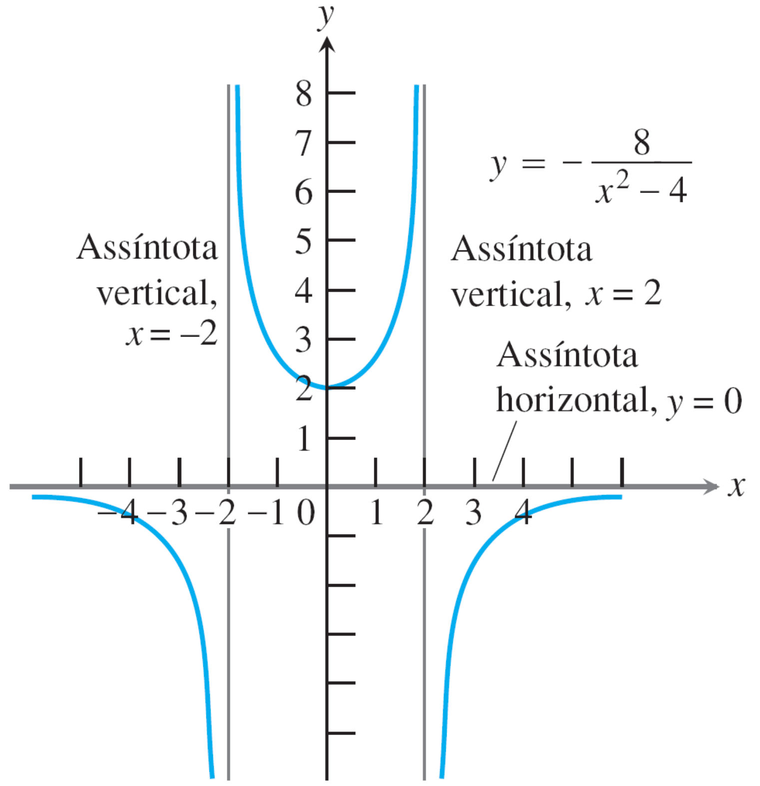


FIGURA 2.46 Gráfico de $y = -8/(x^2 - 4)$. Veja que a curva se aproxima do eixo x apenas por um lado. As assíntotas não precisam ser bilaterais (Exemplo 6).

Assíntotas verticais do logaritmo natural

- Exemplo 7: Verifique graficamente quais as assíntotas verticais da função $f(x) = \ln\, x$.

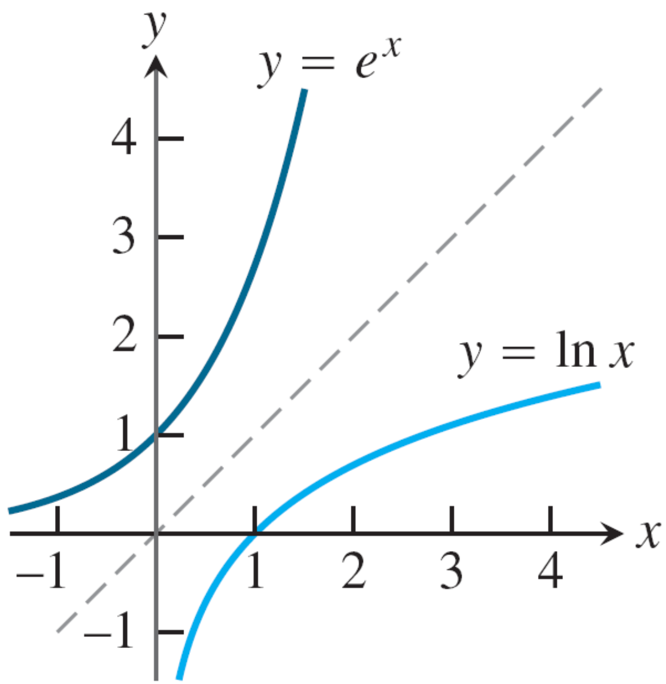


FIGURA 2.47 A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função logaritmo natural (Exemplo 7).

Curvas com infinitas assíntotas

- Exemplo 8: Observe os gráficos das funções nas figuras 2.48 e 2.49.

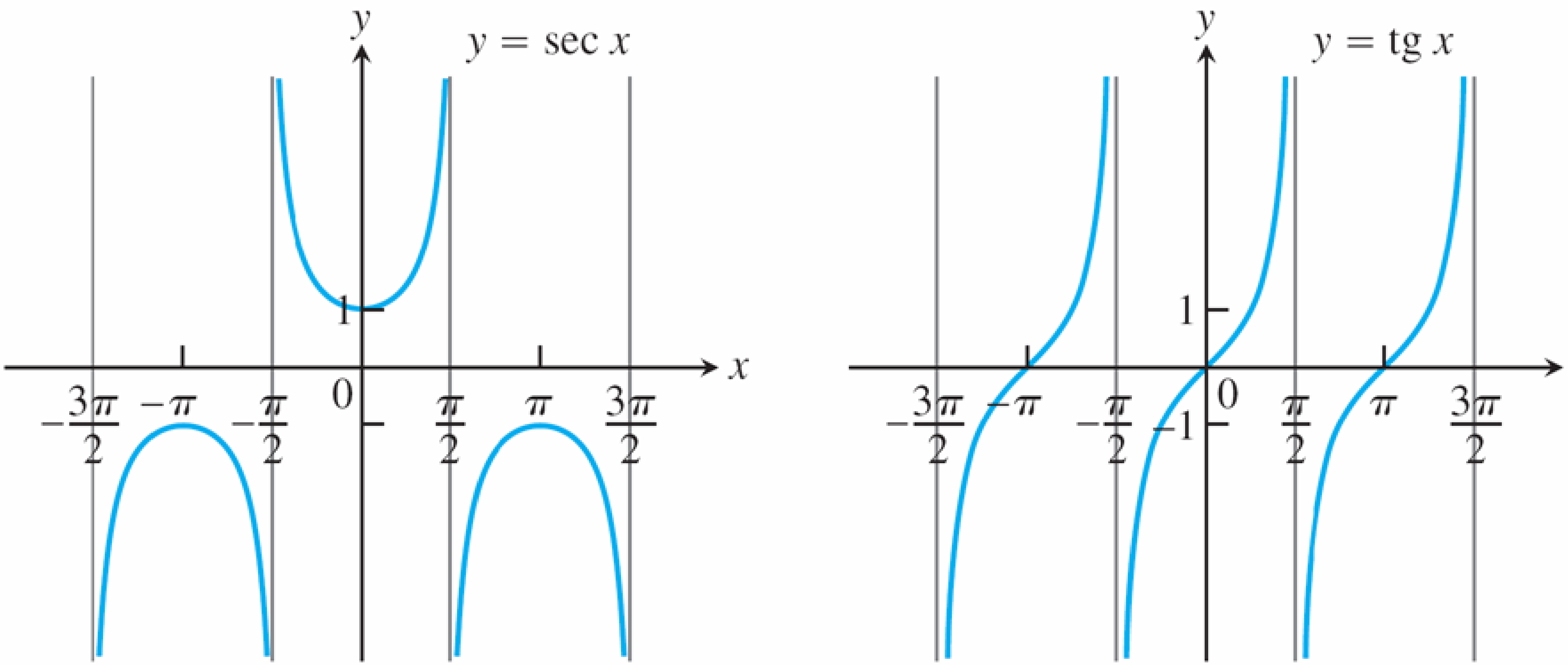


FIGURA 2.48 Os gráficos de sec x e tg x têm um número infinito de assíntotas verticais (Exemplo 8).

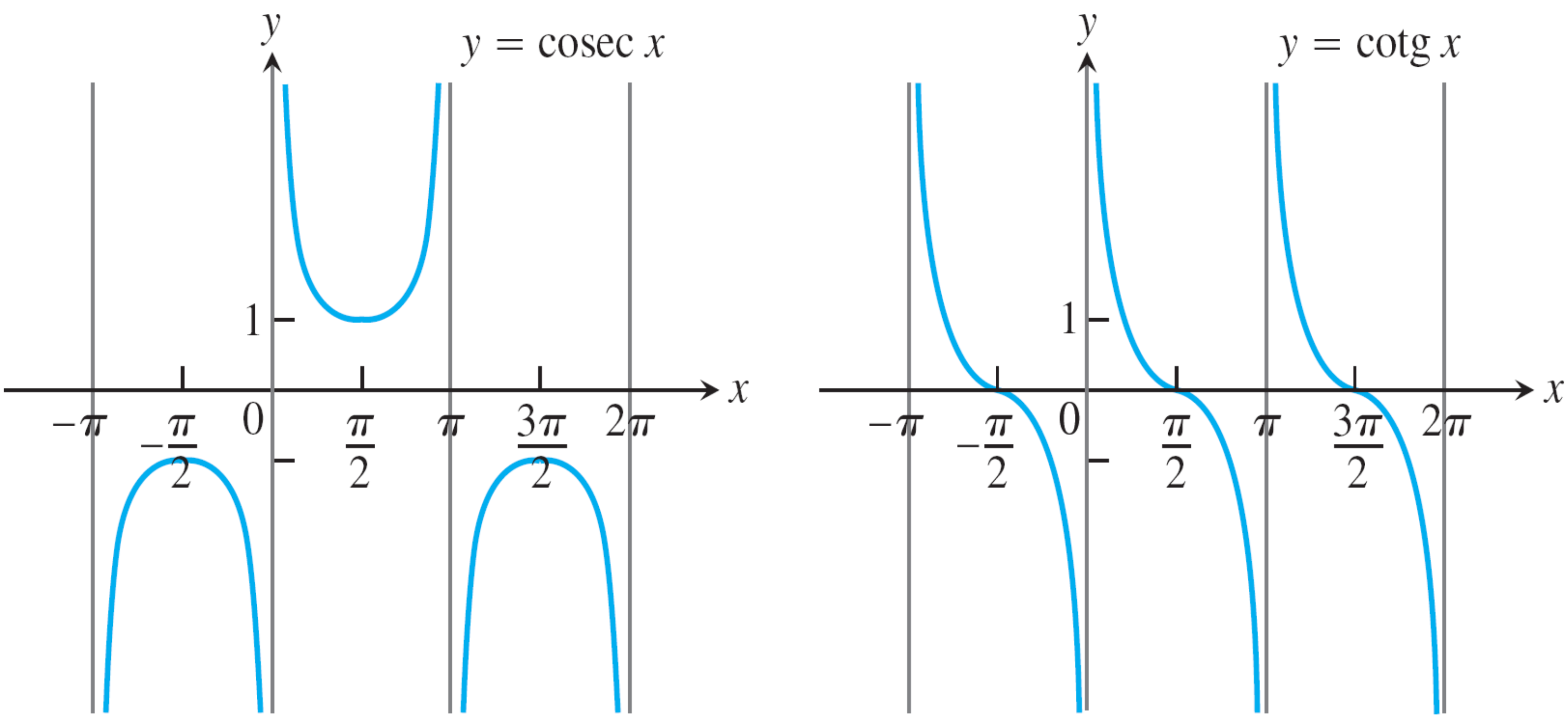


FIGURA 2.49 Os gráficos de cosec x e cotg x (Exemplo 8).

Função racional com grau do numerador maior que o do denominador

- Exemplo 9: Determine as assíntotas do gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

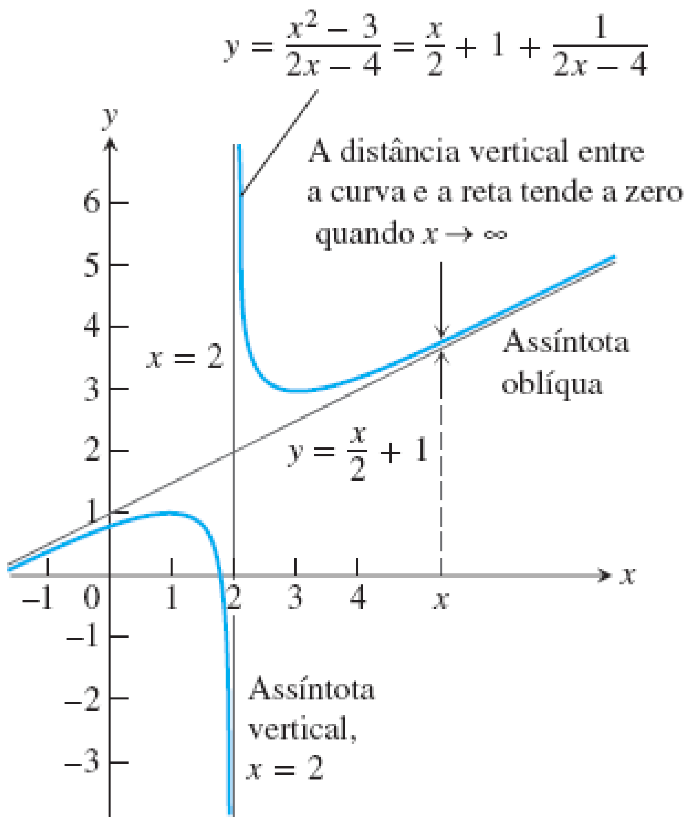


FIGURA 2.50 O gráfico de $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ apresenta uma assíntota vertical e uma assíntota oblíqua (Exemplo 9).

Seção 2.6 - Continuidade

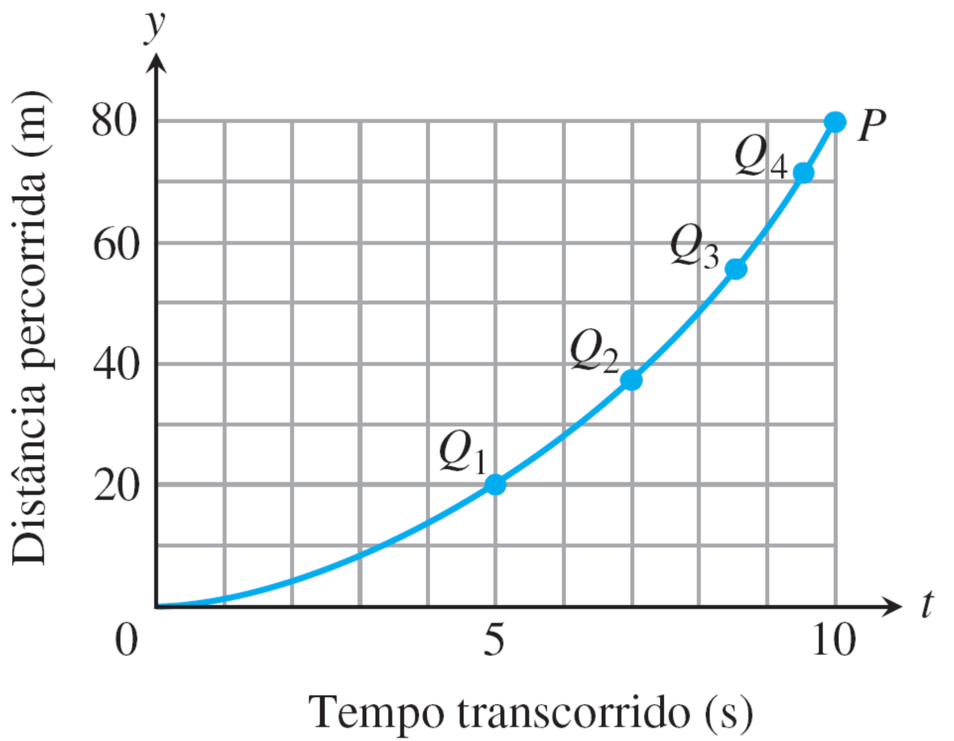


FIGURA 2.53 Unindo os pontos por uma curva não interrompida a partir dos dados experimentais Q_1, Q_2, Q_3, de um objeto em queda.

Investigando a continuidade

- Exemplo 1: Encontre os pontos nos quais a função f na Figura 2.54 é contínua e aqueles em que é descontínua.

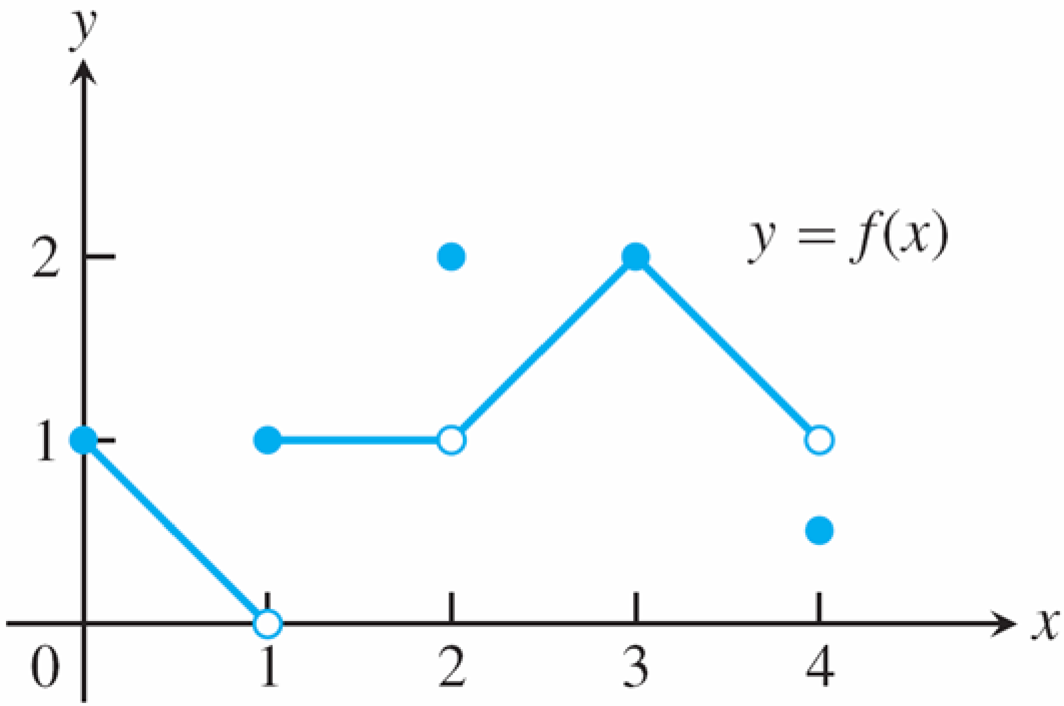


FIGURA 2.54 A função é contínua em $[0, 4]$, exceto em $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$ (Exemplo 1).

Definição **Contínua em um ponto**

Ponto interior: Uma função $y = f(x)$ é **contínua em um ponto interior** ***c*** de seu domínio quando

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Extremidades: Uma função $y = f(x)$ é **contínua na extremidade esquerda *a*** ou é **contínua na extremidade direita *b*** de seu domínio quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \text{ respectivamente.}$$

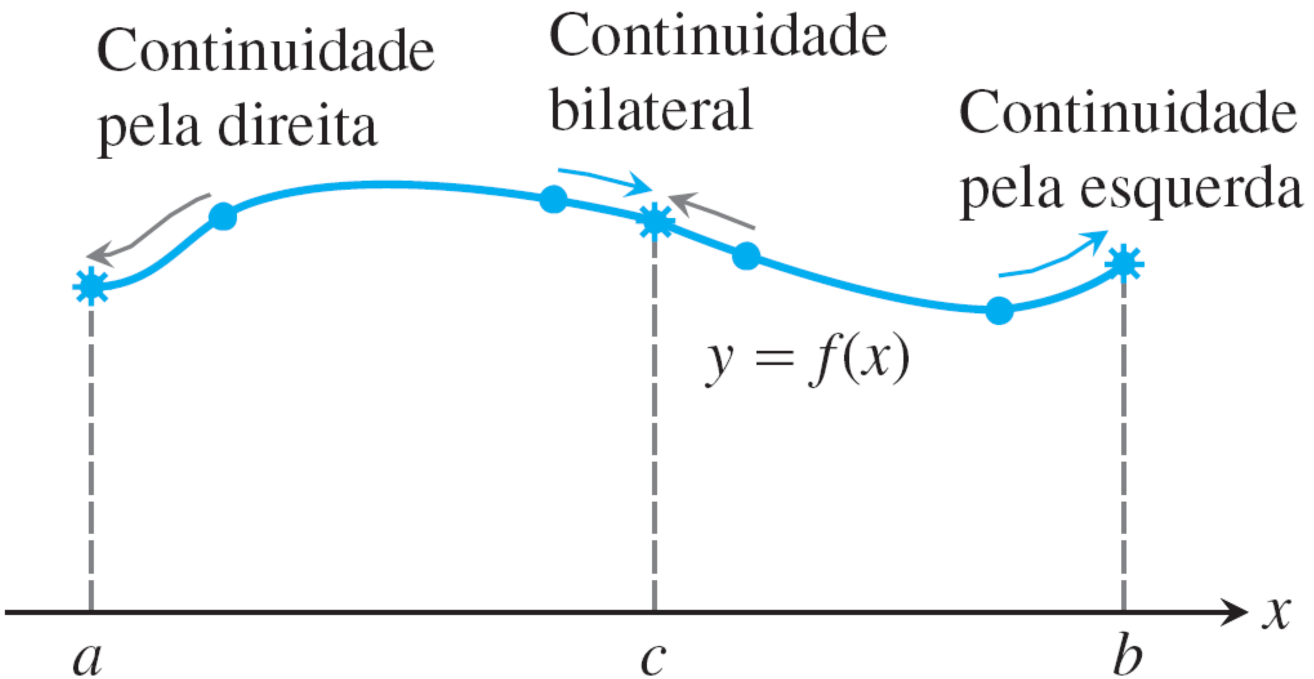


FIGURA 2.55 Continuidade nos pontos a, b e c.

Uma função contínua em seu domínio

- Exemplo 2: A função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio $[-2, 2]$ (Figura 2.56), inclusive em $x = -2$, quando f é contínua à direita, e $x = 2$, quando f é contínua à esquerda.

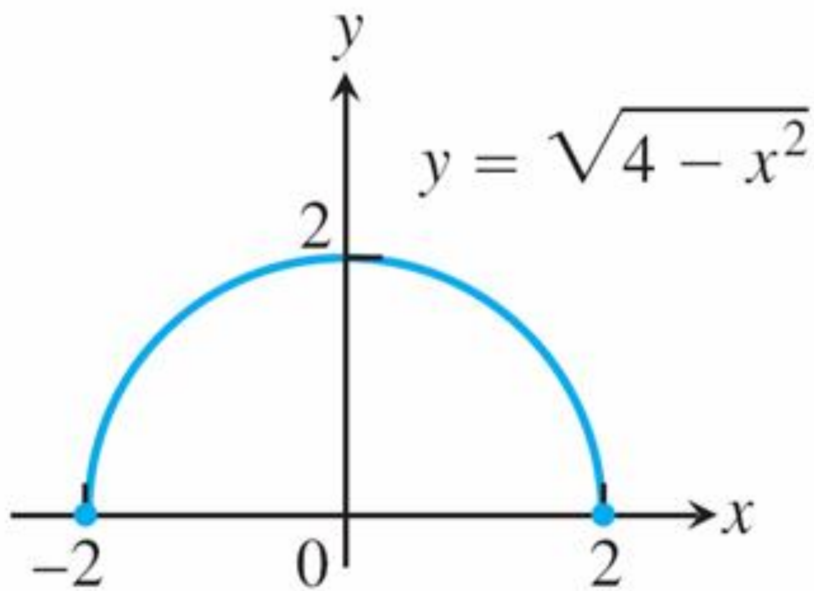


FIGURA 2.56 Uma função que é contínua em todos os pontos de seu domínio (Exemplo 2).

Descontinuidade de salto

- Exemplo 3: A função "salto unitário" $U(x)$, traçada na Figura 2.57, é contínua à direita em $x = 0$, mas não é nem contínua à esquerda nem contínua em $x = 0$. Ela apresenta descontinuidade de salto em $x = 0$.

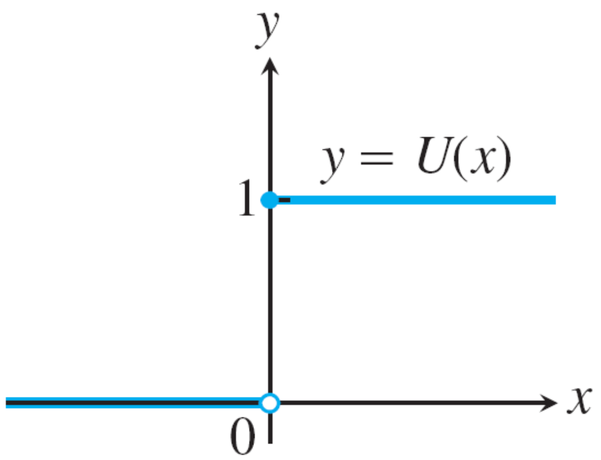


FIGURA 2.57 Uma função que apresenta continuidade à direita da origem, mas não à esquerda. Ela apresenta uma descontinuidade nesse ponto (Exemplo 3).

Teste de continuidade

Uma função $f(x)$ será contínua em $x = c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes:

1. $f(c)$ existe (*c* está no domínio de *f*)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe (*f* tem um limite quando $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (o limite é igual ao valor da função)

Figura 2.59 – Quais funções são contínuas em $x = 0$?

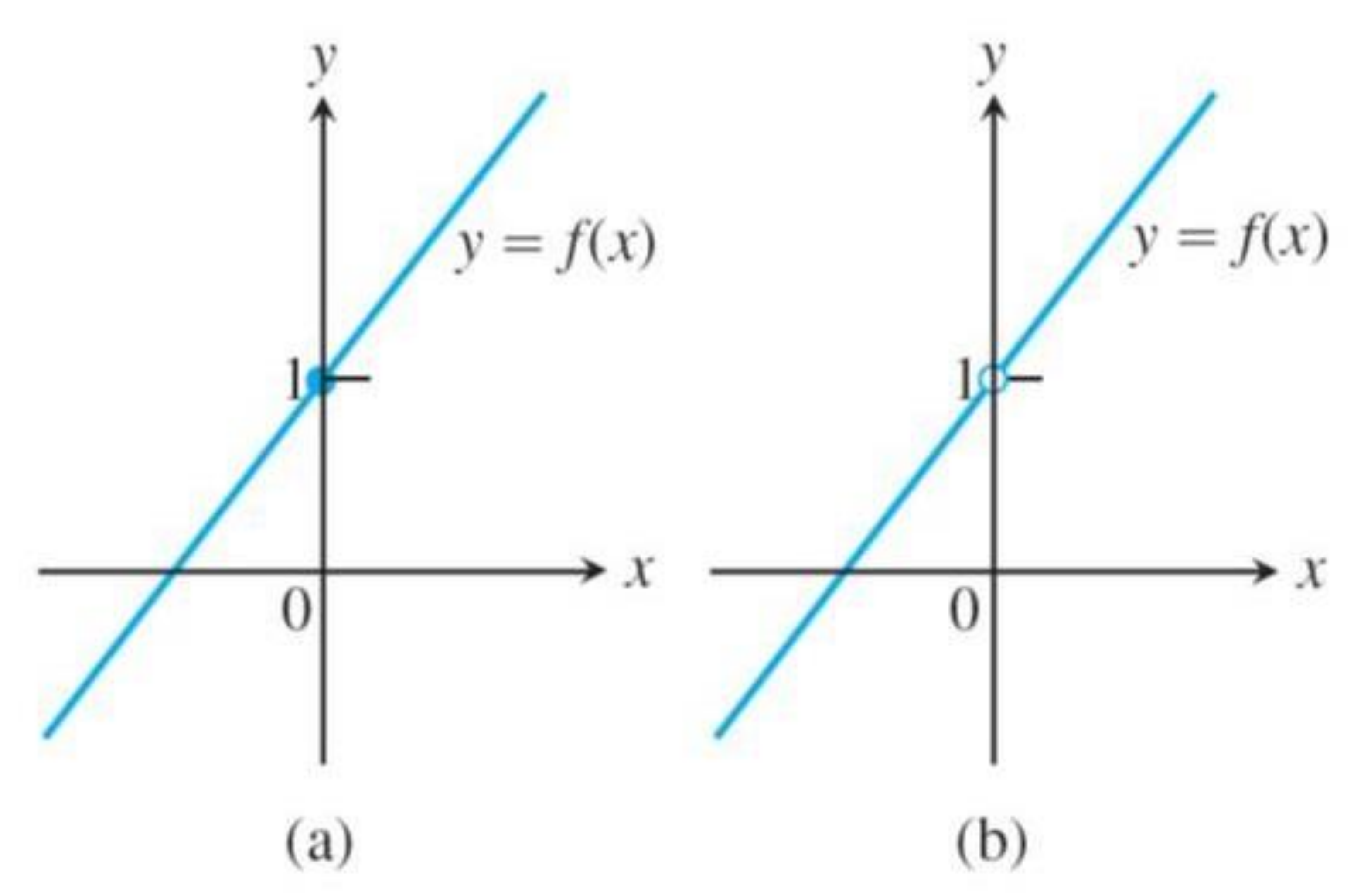


Figura 2.59 – Quais funções são contínuas em $x = 0$?

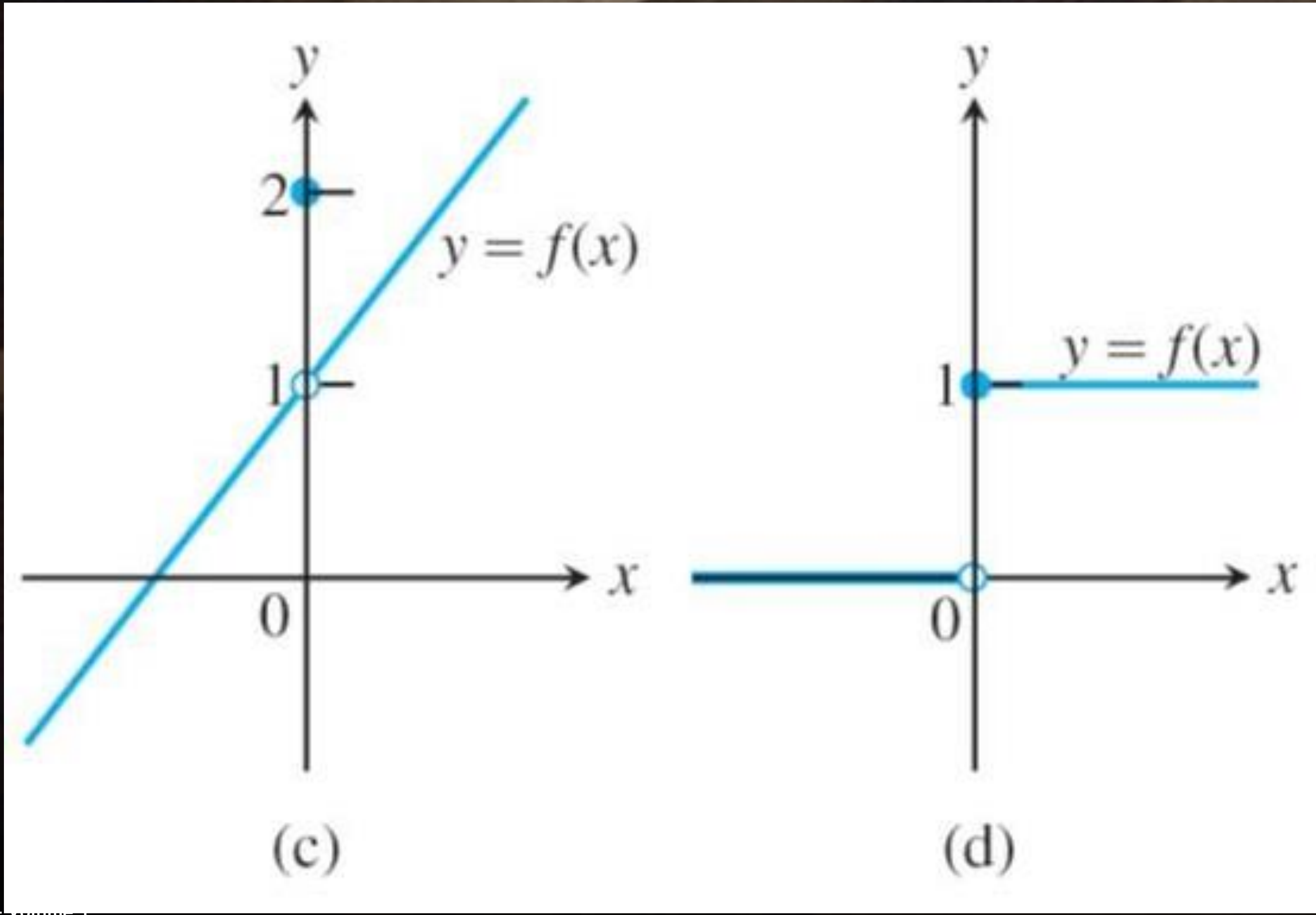
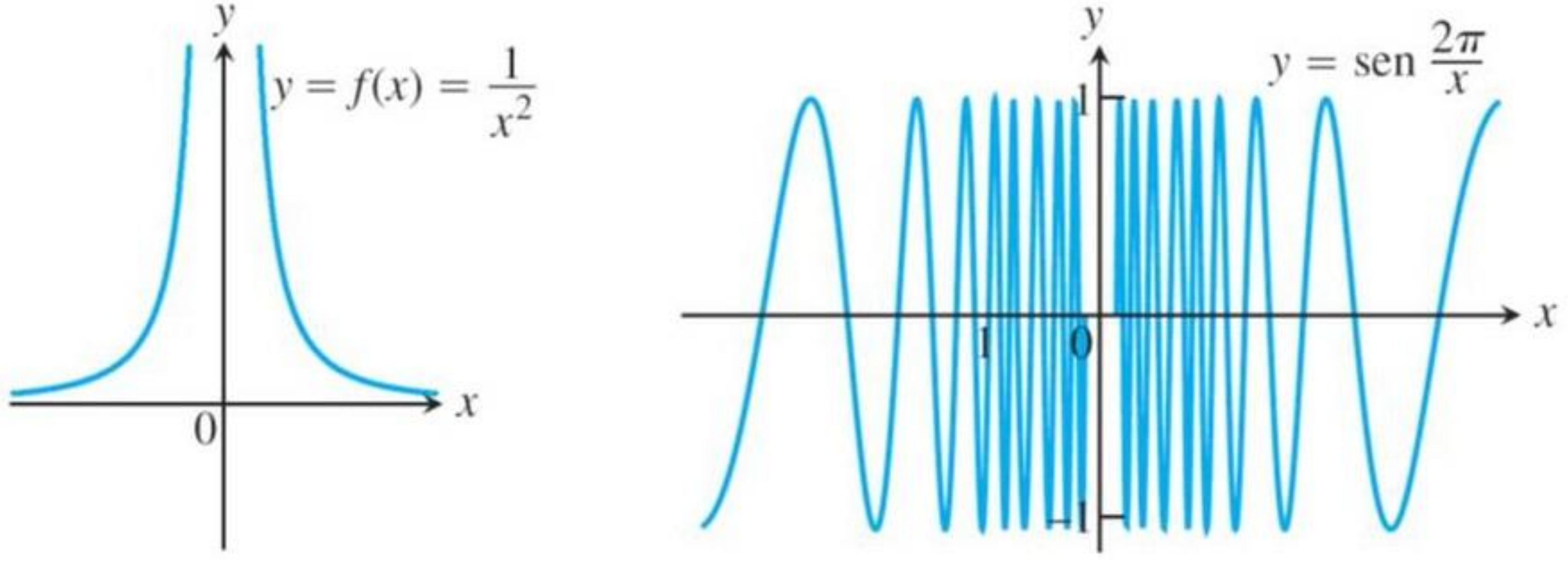


Figura 2.59 – Quais funções são contínuas em $x = 0$?



(e)

(f)

Identificando funções contínuas

Exemplo 5:

a) A função $y = \frac{1}{x}$ é uma função contínua por ser contínua em cada ponto de seu domínio. Entretanto, ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$, porque aí ela não é definida; isto é, ela é descontínua em qualquer intervalo contendo $x = 0$.

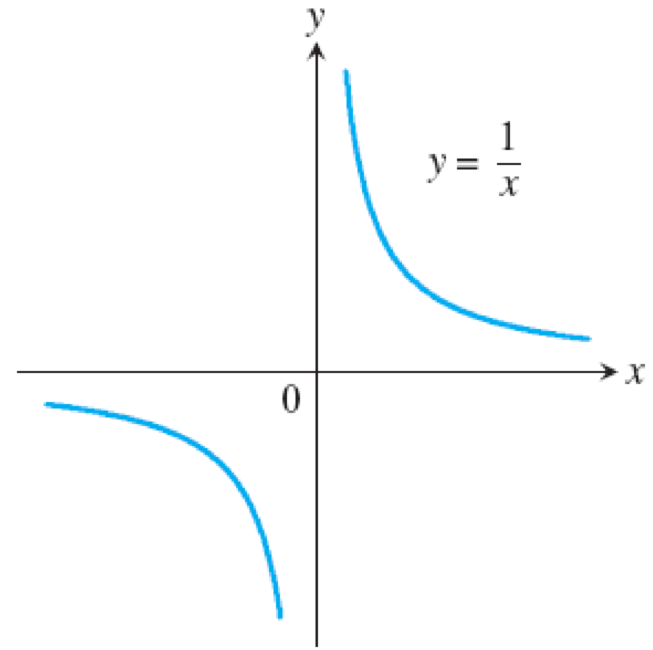


FIGURA 2.60 A função $y = 1/x$ é contínua em cada valor de x, exceto em $x = 0$. Ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$ (Exemplo 5).

Identificando funções contínuas

Exemplo 5:

b) A função identidade $f(x) = x$ é contínua em todos os pontos, de acordo com o Exemplo 3, da Seção 2.3 que diz que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Teorema 9 Propriedades de funções contínuas

Se as funções f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x = c$.

1. *Somas:* $f + g$
2. *Diferenças:* $f - g$
3. *Produtos:* $f \cdot g$
4. *Multiplicação por constantes:* $k \cdot f$, para qualquer número k.
5. *Quocientes:* f/g, uma vez que $g(c) \neq 0$.
6. *Potenciações:* $f^{r/s}$, uma vez que ela é definida num intervalo aberto contendo c, onde r e s são inteiros.

Funções racionais e polinomiais são funções contínuas

- Exemplo 6:

a) Todo polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

é contínuo porque $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$, de acordo com o Teorema 2, Seção 2.2.

Funções racionais e polinomiais são funções contínuas

- Exemplo 6:

b) Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, então a função racional $P(x)/Q(x)$ é contínua em todos os pontos em que é definida ($Q(c) \neq 0$), de acordo com a regra do quociente do Teorema 9.

Continuidade da função valor absoluto

- Exemplo 7: A função $f(x) = |x|$ é contínua em qualquer valor de x. Se $x > 0$, temos $f(x) = x$, um polinômio. Se $x < 0$, temos $f(x) = -x$, outro polinômio. Por fim, na origem, $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0| = f(0)$.

Teorema 10 Composta de funções contínuas

Se f é contínua em c e g é contínua em $f(c)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em c.

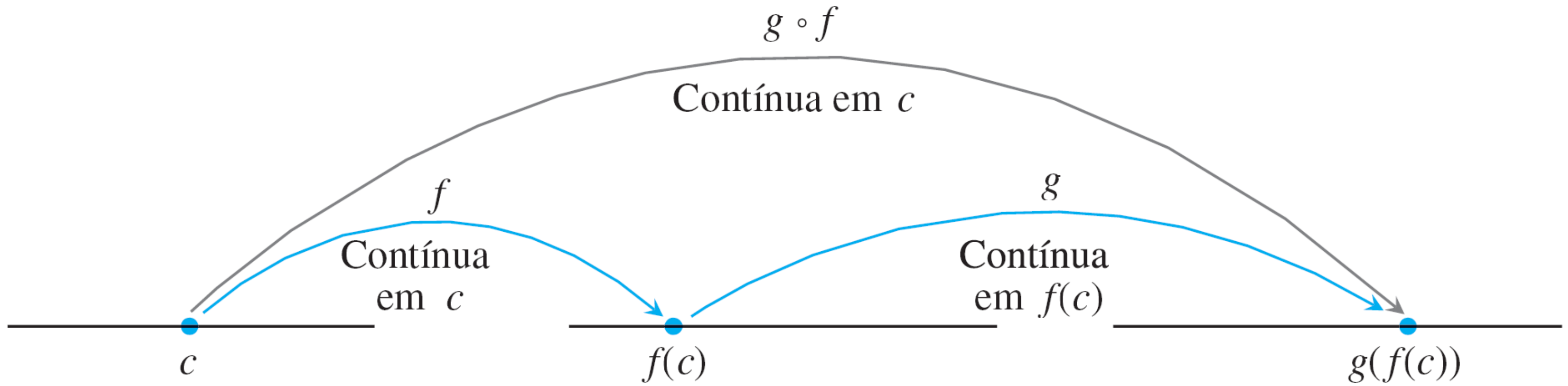


FIGURA 2.61 Compostas de funções contínuas são contínuas.

Aplicando os teoremas 9 e 10

- Exemplo 8: Justifique a continuidade das funções abaixo:

$$a)\ y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$b)\ y = \frac{x^{2/3}}{1+x^4}$$

$$c)\ y = \left|\frac{x-2}{x^2-2}\right|$$

$$d)\ y = \left|\frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2}\right|$$

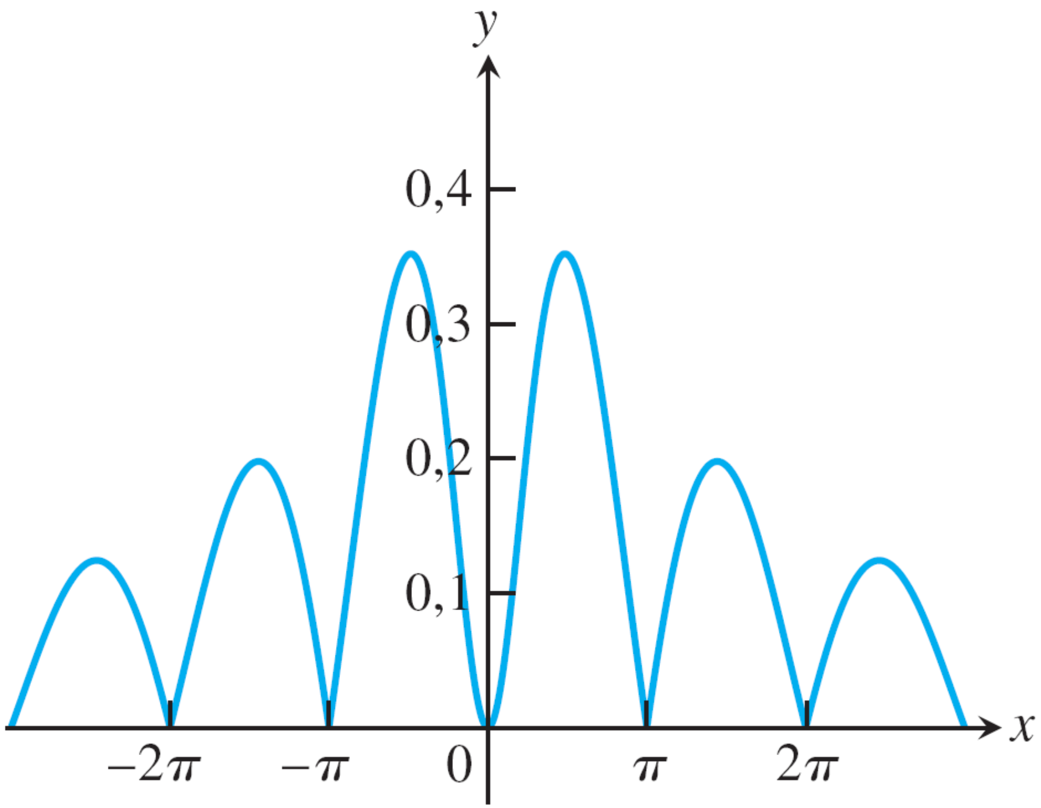


FIGURA 2.62 O gráfico sugere que $y = |(x \operatorname{sen} x)/(x^2 + 2)|$ é função contínua (Exemplo 8d).

Teorema 11

Se g é contínua no ponto b e $\lim_{x\to c} f(x) = b$, então

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to c}(f(x))$$

Aplicando o Teorema 11

- Exemplo 9: Calcule

$a)\ \lim\limits_{x\to 1} \text{arc sen}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}\cdot e^{\operatorname{tg} x}\right)$

Extensão contínua até um ponto

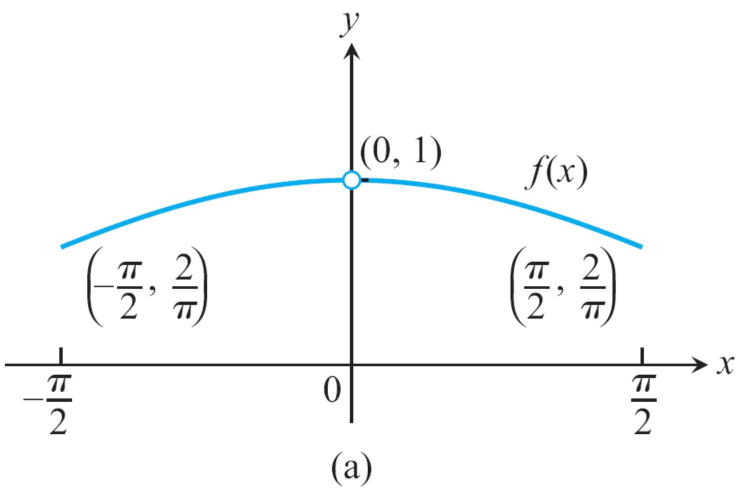


FIGURA 2.63 O gráfico (a) de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ não inclui o ponto (0, 1) porque a função não é definida em $x = 0$. (b) Podemos removeja a descontinuidade do gráfico definindo a nova função $F(x)$ com $F(0) = 1$ e $F(x) = f(x)$ em qualquer outro ponto. Note que $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Uma extensão contínua

- Exemplo 10: Mostre que

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}, x \neq 2$$

tem uma extensão contínua em $x = 2$ e determine essa extensão.

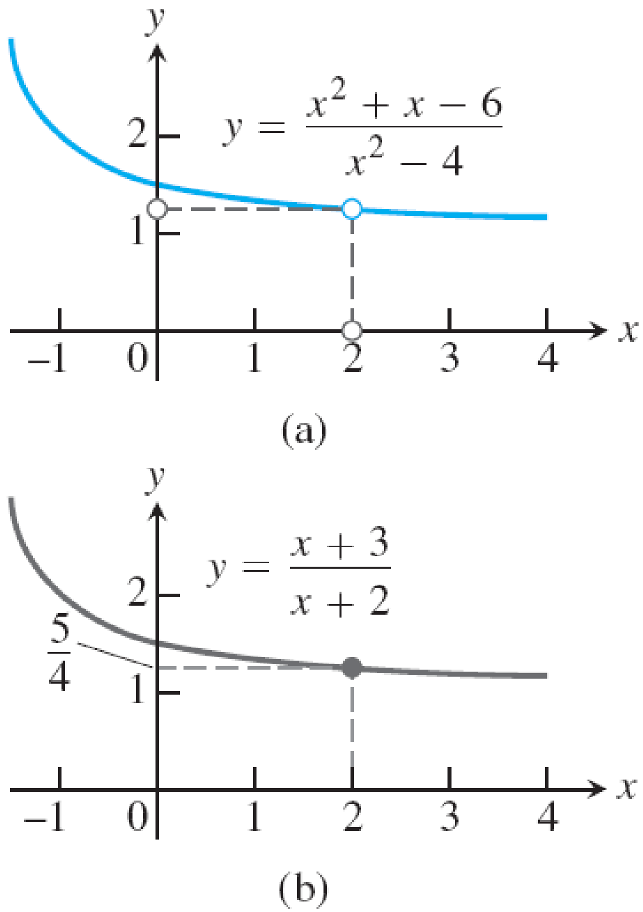
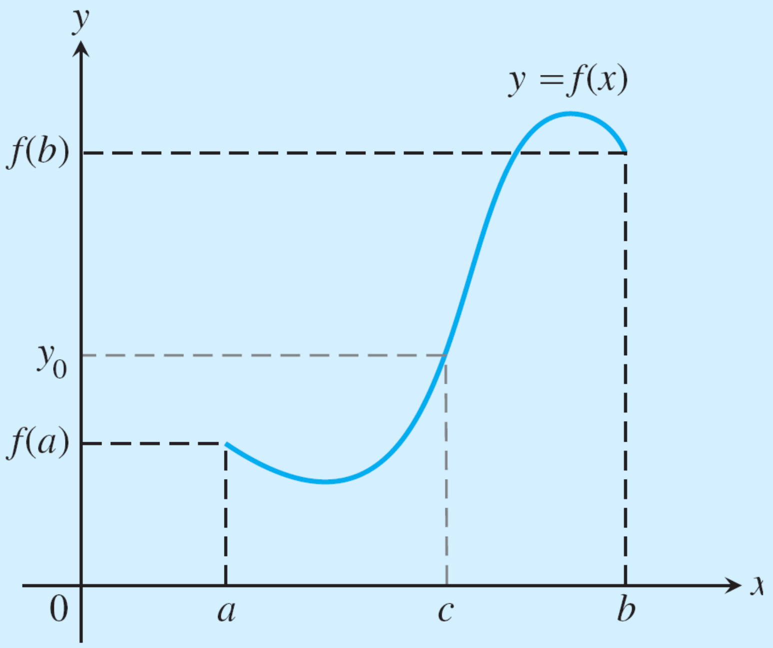


FIGURA 2.64 (a) O gráfico de $f(x)$ e (b) o gráfico de sua extensão contínua $F(x)$ (Exemplo 10).

Teorema 12

O teorema do valor intermediário para funções contínuas

Uma função $y = f(x)$ que é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ assume cada valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, se y_0 for qualquer valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então $y_0 = f(c)$ para algum c em $[a, b]$.



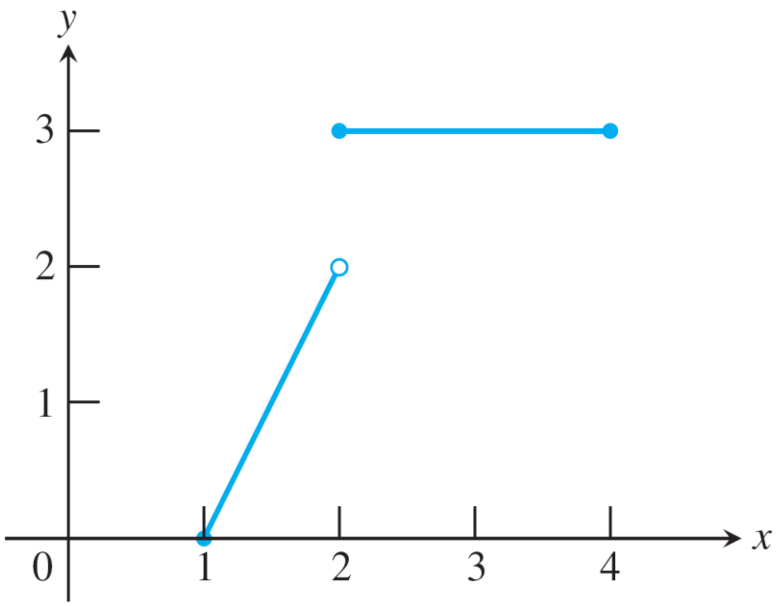


FIGURA 2.65 A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

não assume todos os valores entre $f(1) = 0$ e $f(4) = 3$; ela não assume qualquer valor entre 2 e 3.

Usando o Teorema do Valor Intermediário para a determinação de raízes

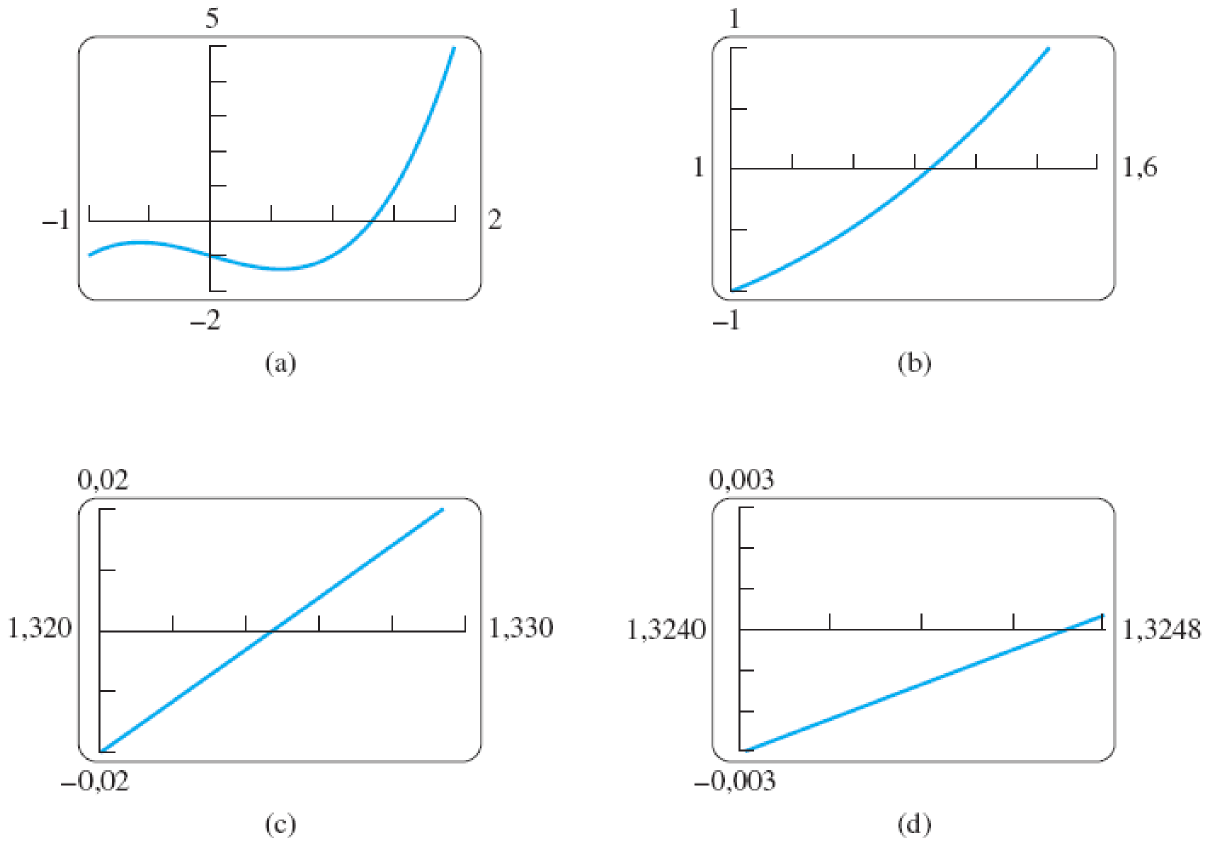


FIGURA 2.66 "Zoom" num zero da função $f(x) = x^3 - x - 1$. O zero está próximo de $x = 1{,}3247$.

Seção 2.7 – Retas Tangentes e Derivadas

O que *é* uma tangente a uma curva?

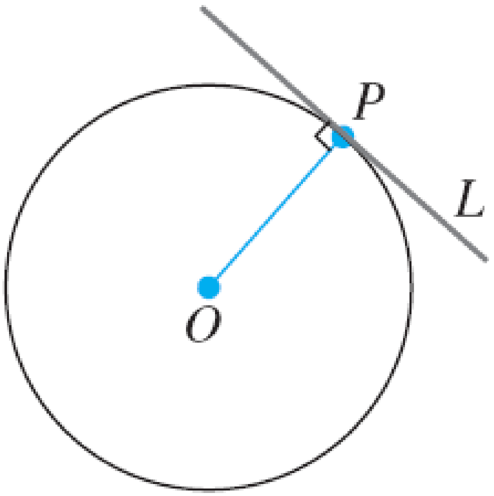
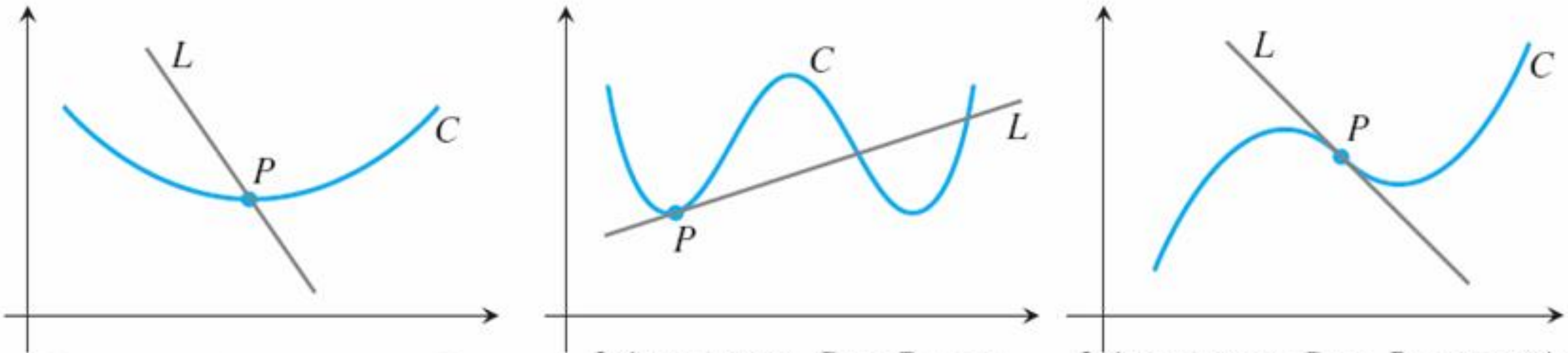


FIGURA 2.67 L será tangente ao círculo em P se passar por P perpendicularmente ao raio OP.



L encontra *C* somente em *P*, mas não é tangente a *C*.

L é tangente a *C* em P, mas encontra *C* em vários pontos.

L é tangente a *C* em *P*, mas está dos dois lados de *C*, cruzando *C* em *P*.

FIGURA 2.68 Derrubando mitos sobre retas tangentes.

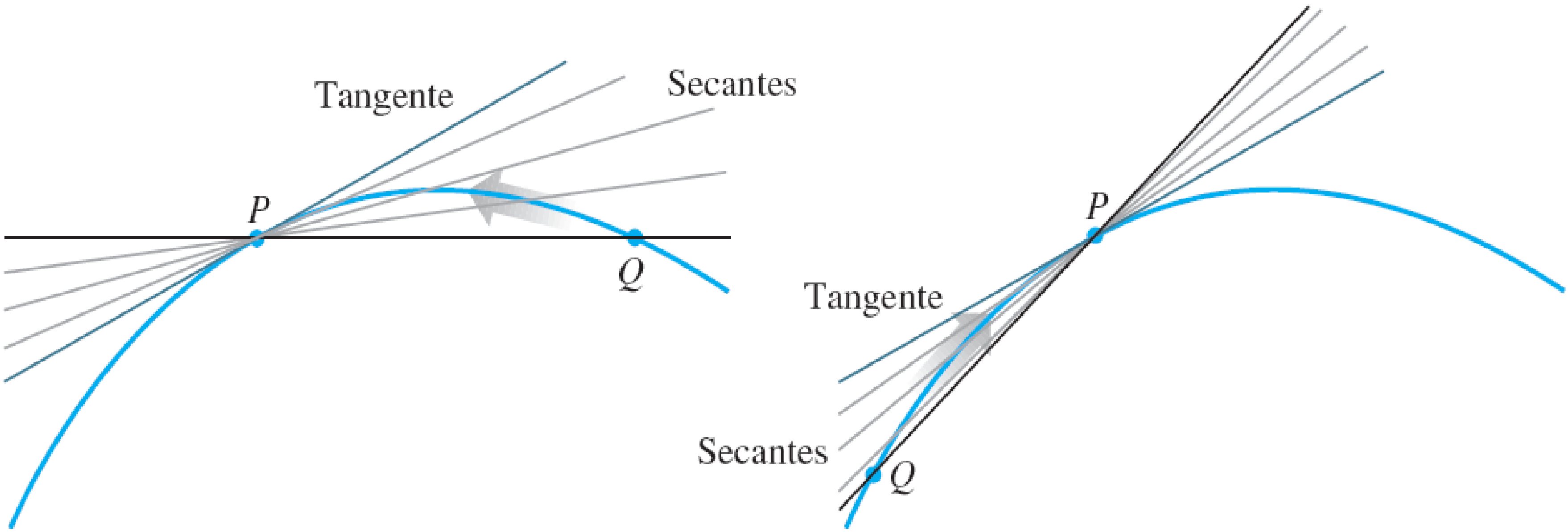


FIGURA 2.69 O método dinâmico para a tangência. A tangente a uma curva em P é a reta através de P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de cada lado.

Reta tangente a uma parábola

- Exemplo 1: Determine o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2; 4)$. Escreva uma equação para a tangente à parábola nesse ponto.

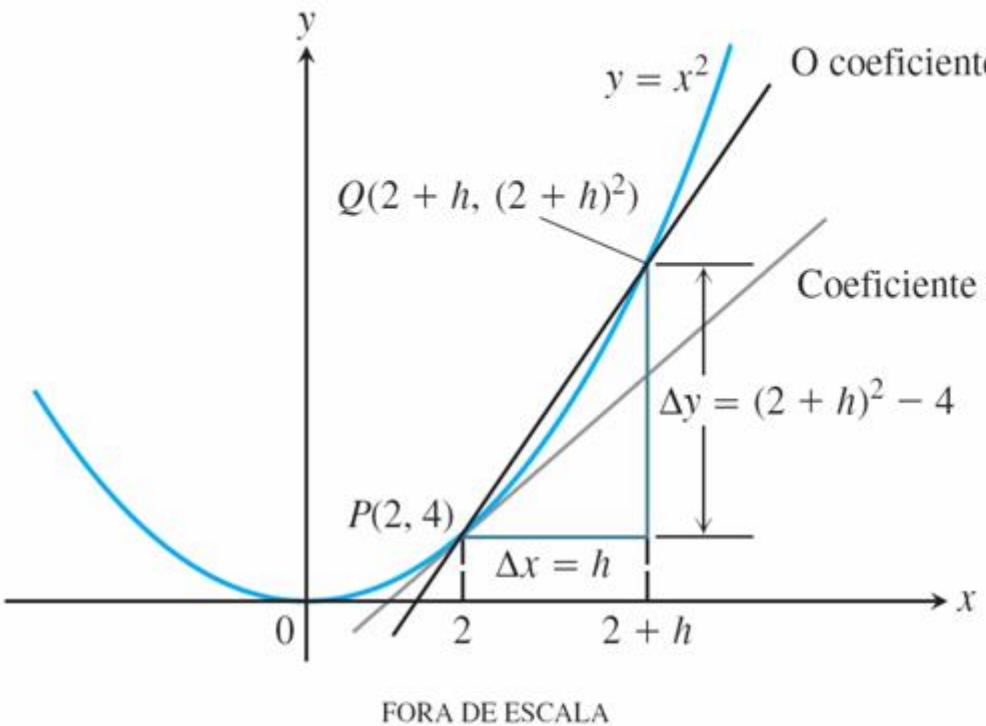


FIGURA 2.70 Diagrama para obter o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$ (Exemplo 1).

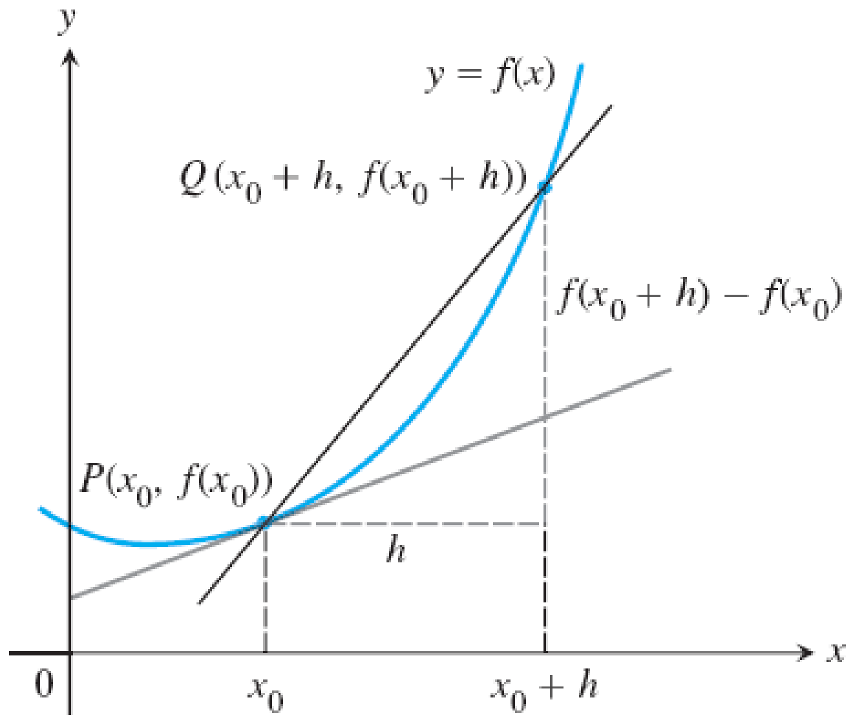


FIGURA 2.71 O coeficiente angular da tangente em P é $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Definições Coeficiente angular e reta tangente

O coeficiente angular da curva $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\text{desde que o limite exista}\right)$$

A **reta tangente** à curva f em P é a reta que passa por P e tem esse coeficiente angular.

Testando a definição

- Exemplo 2: Mostre que a reta $y = mx + b$ é sua própria tangente em qualquer ponto $(x_0; mx_0 + b)$.

Como achar a tangente à curva $y = f(x)$ em (x_0, y_0)

1. Calcule $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$.
2. Calcule o coeficiente angular

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. Se o limite existe, então determine a reta tangente como

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Coeficiente angular e reta tangente a $y = 1/x$.

- Exemplo 3:

a) Determine o coeficiente angular da curva $y = \frac{1}{x}$ em $x = a \neq 0$.

b) Onde o coeficiente angular é $-\frac{1}{4}$?

c) O que acontece com a tangente à curva no ponto $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ quando a varia?

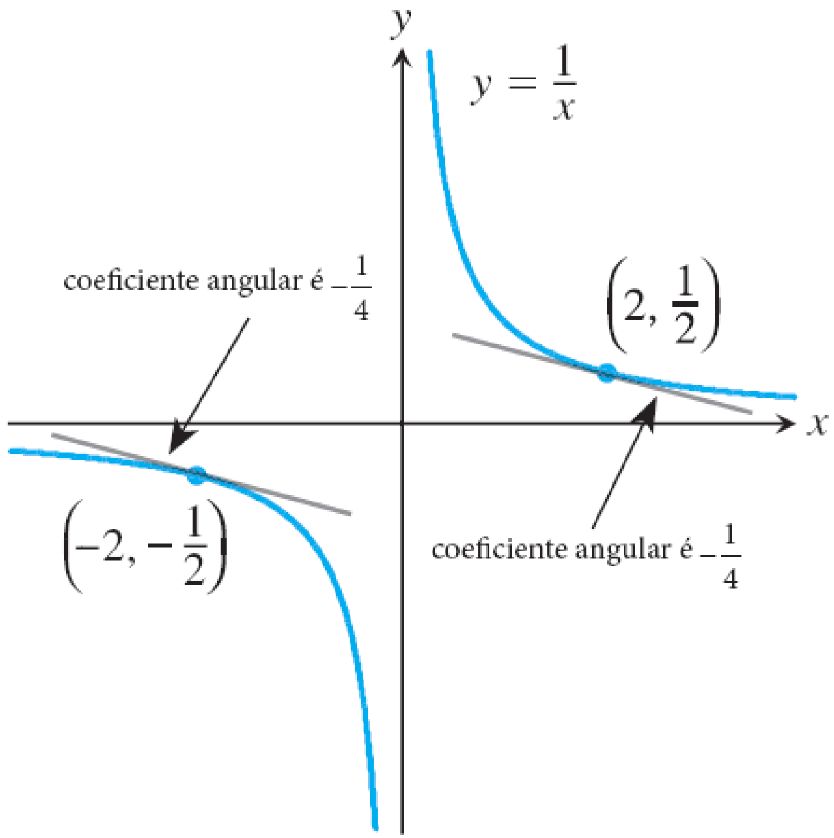


FIGURA 2.72 As duas retas tangentes a $y = 1/x$ tendo coeficiente angular $-1/4$ (Exemplo 3).

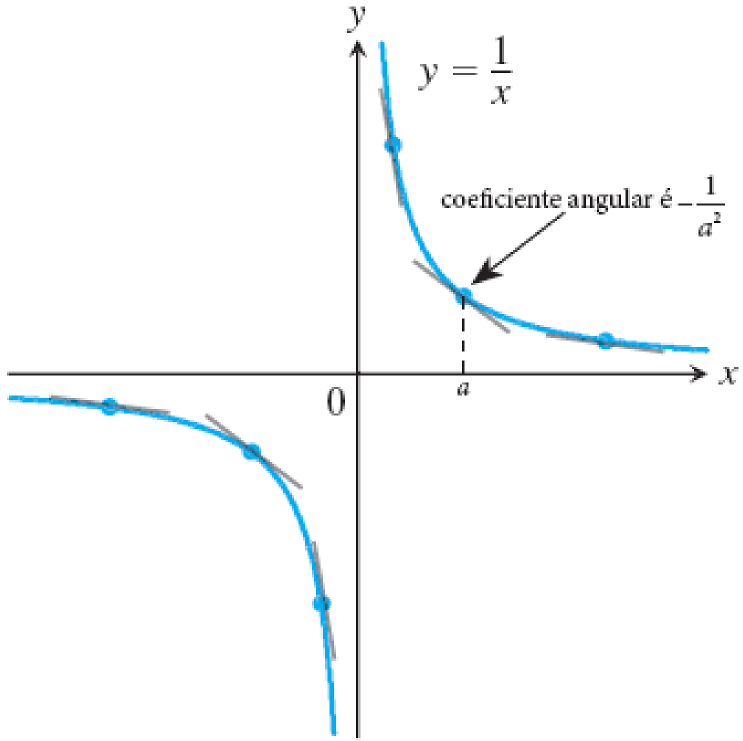


FIGURA 2.73 Os coeficientes angulares das tangentes, inclinadas à origem, vão diminuindo à medida que o ponto de tangência se afasta da origem.

- A expressão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

é chamada de *razão incremental*. Se a razão incremental tem um limite quando h tende a zero, esse limite é denominado *derivada de f* em x_0.

Velocidade instantânea

- Exemplo 4: Nos exemplos 1 e 2 da Seção 2.1, tínhamos uma pedra que caía $y = 4{,}9t^2$ metros durante os primeiros t segundos. Calcule a velocidade instantânea da pedra quando $t = 1$.

1. O coeficiente angular de $y = f(x)$ em $x = x_0$
2. O coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ em $x = x_0$
3. A taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em $x = x_0$
4. A derivada de f em $x = x_0$
5. O limite da razão incremental, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Seção 3.1 – A Derivada Como Função

Definição **Função derivada**

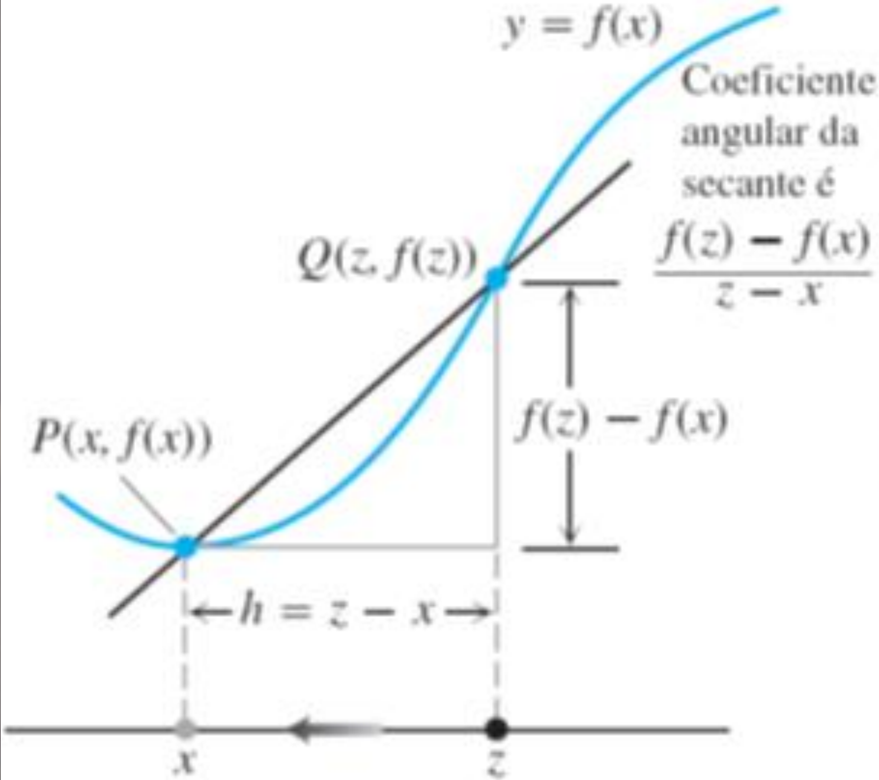
A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Fórmula alternativa para a derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



Derivada de f em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURA 3.1 O modo como escrevemos a razão incremental para a derivada de uma função f depende de como identificamos os pontos envolvidos.

Aplicando a definição

- Exemplo 1: Derive $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Derivada da função raiz quadrada

- Exemplo 2:

a) Encontre a derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

b) Encontre a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$.

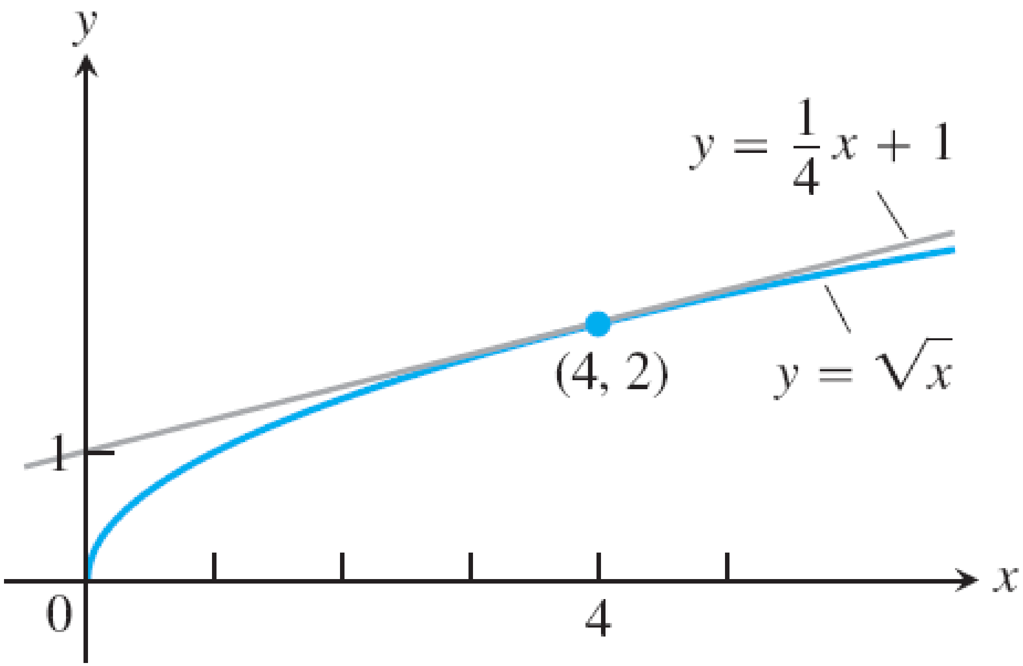


FIGURA 3.2 A curva $y = \sqrt{x}$ e sua tangente em (4, 2). Determinamos o coeficiente angular da tangente calculando a derivada em $x = 4$ (Exemplo 2).

Notações

$$f'(x) = y'$$

Lê-se: "f linha de x" ou "y linha"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$
$$D(f)(x) = D_x f(x)$$

Lê-se: "derivada de y em relação a x" ou, a partir do segundo caso, "derivada de f em relação a x"

Notações

Quando queremos indicar a derivada em um valor específico $x = a$, usamos a notação

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Derivadas laterais

- Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Quando existe

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dizemos que f *é derivável à direita em* a. Analogamente dizemos que f *é derivável à esquerda em* b se existir o limite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

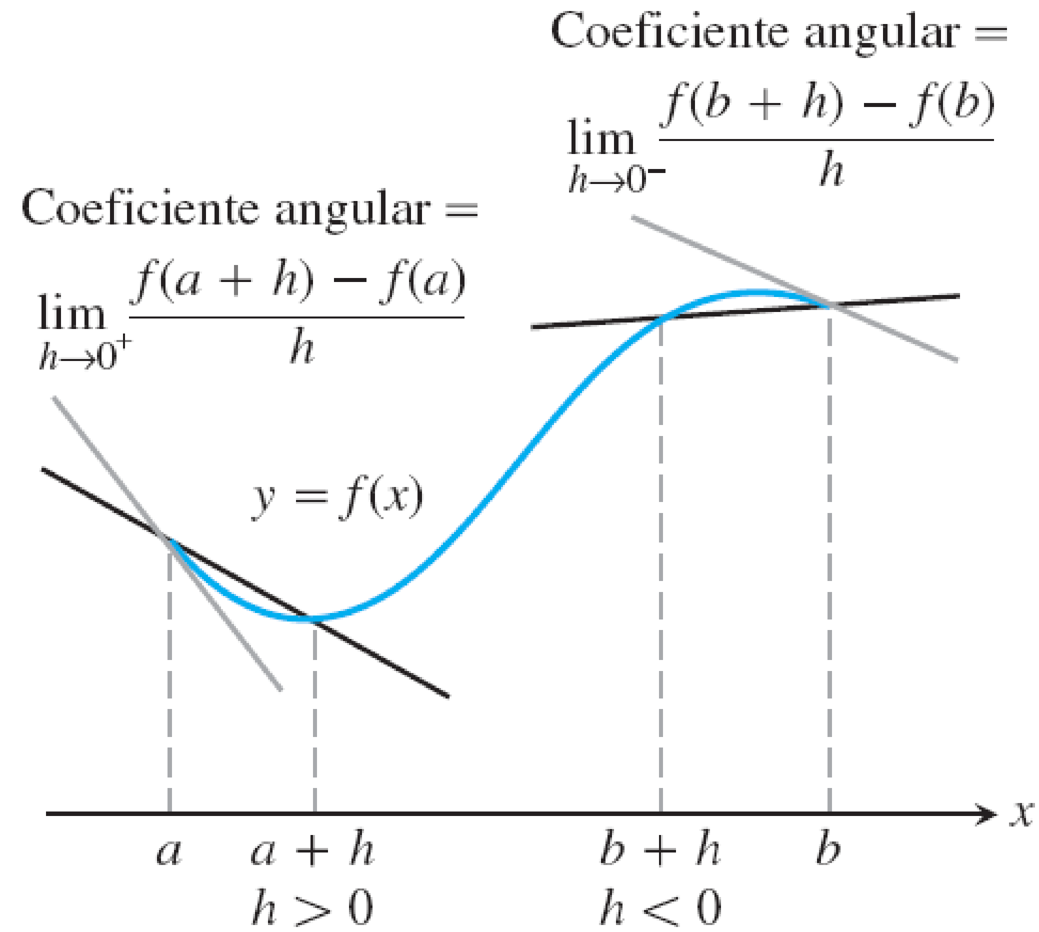


FIGURA 3.5 Derivadas em extremidades são limites laterais.

Funções não deriváveis em $x = 0$.

- Exemplo 5: $y = |x|$ não é derivável na origem.
- Exemplo 6: $y = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$.

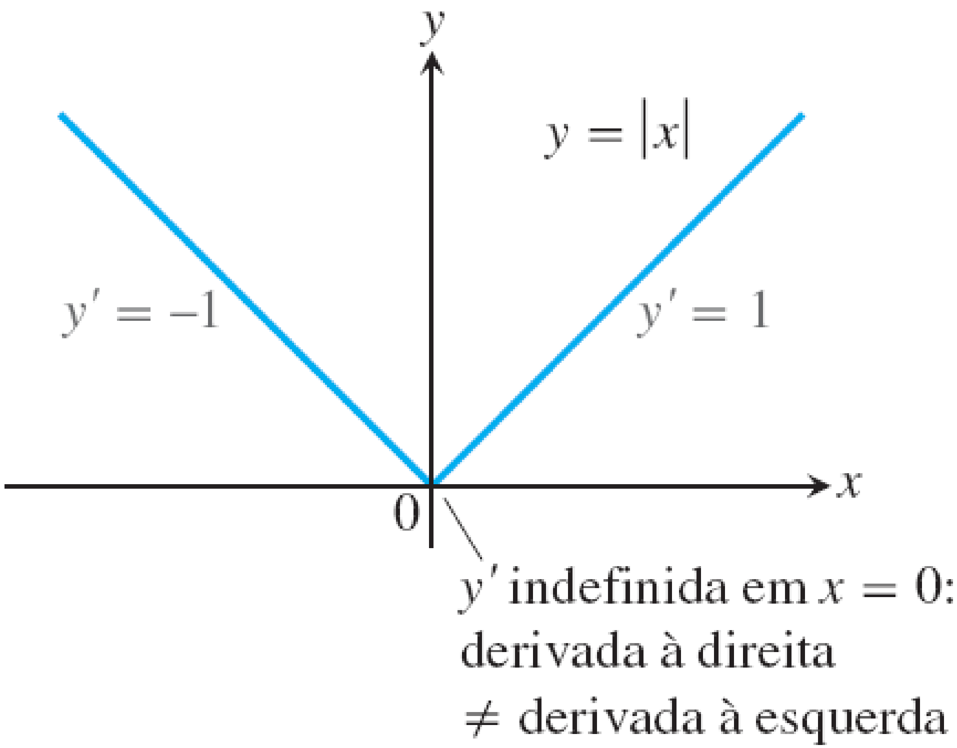
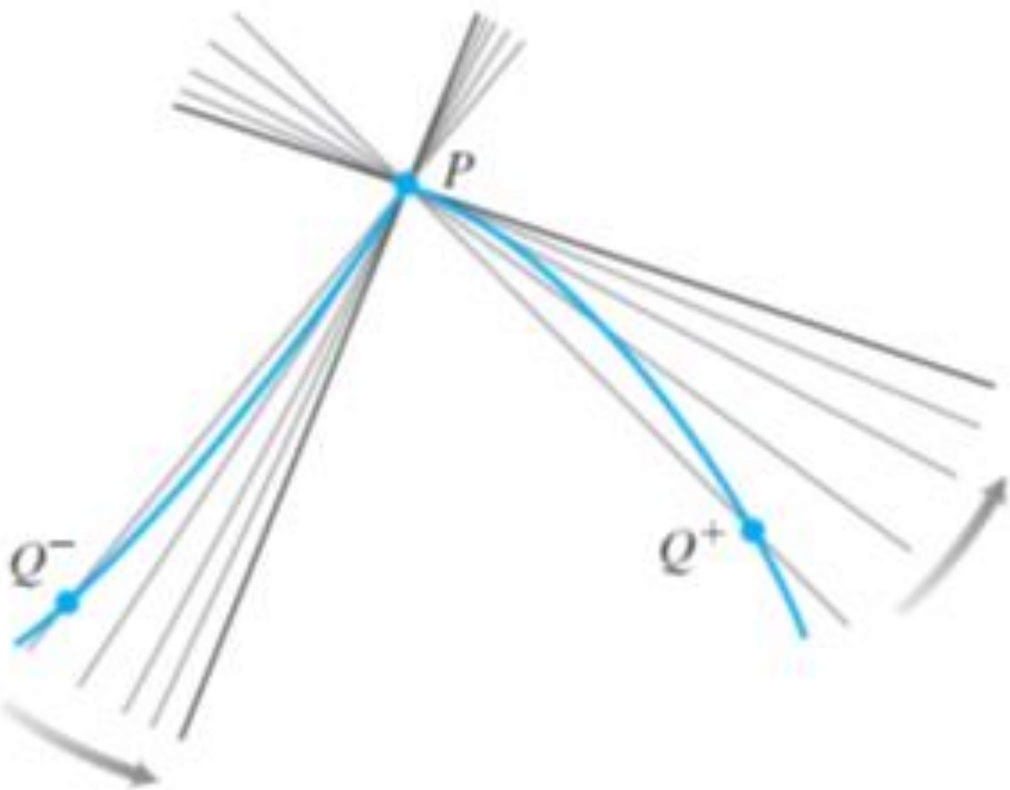


FIGURA 3.6 A função $y = |x|$ não é derivável na origem onde o gráfico tem um “bico”.

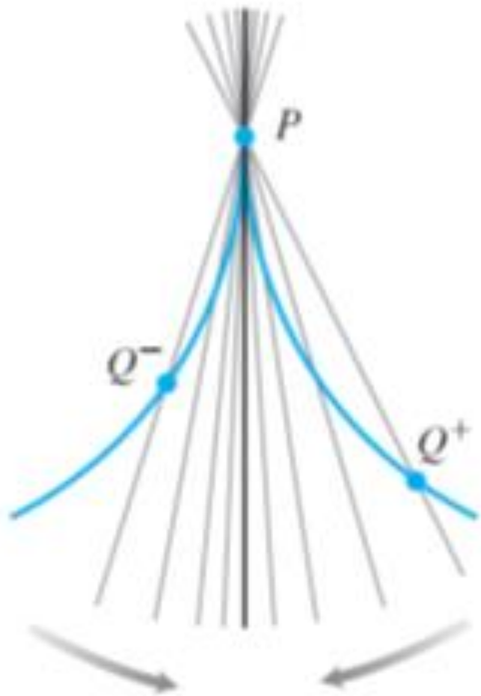
Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

1. um *bico*, onde as derivadas laterais são diferentes.



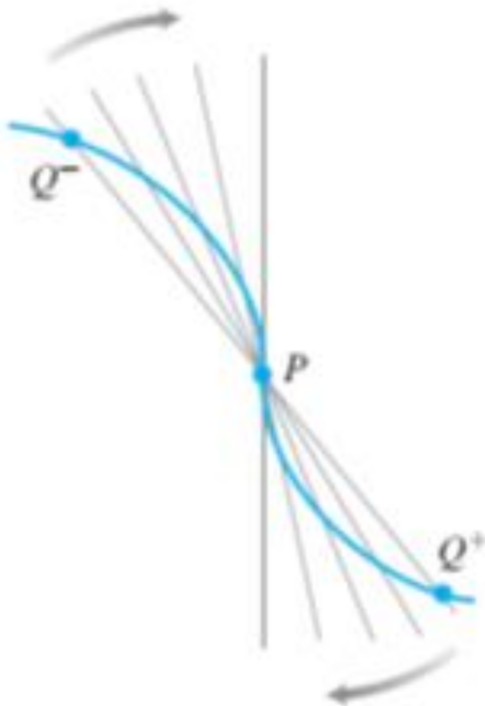
Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

2. um *ponto cuspidal*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞, de um lado, e a $-\infty$, do outro.

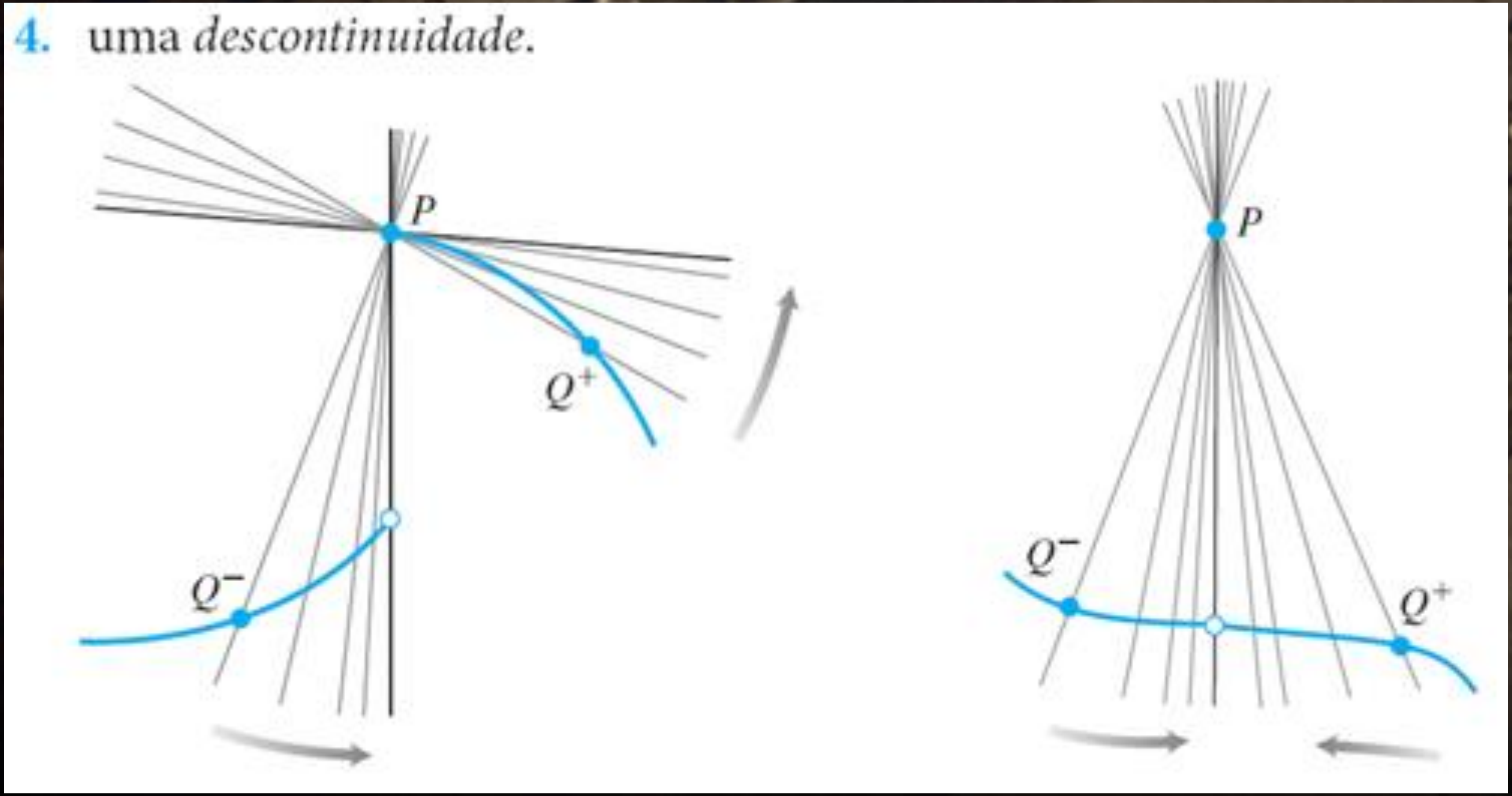


Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

3. uma *tangente vertical*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞ ou a $-\infty$ de ambos os lados (aqui, $-\infty$).



Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?



Teorema 1 **Diferenciabilidade (derivabilidade) implica continuidade**

Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.

Teorema 2 **Teorema de Darboux**

Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

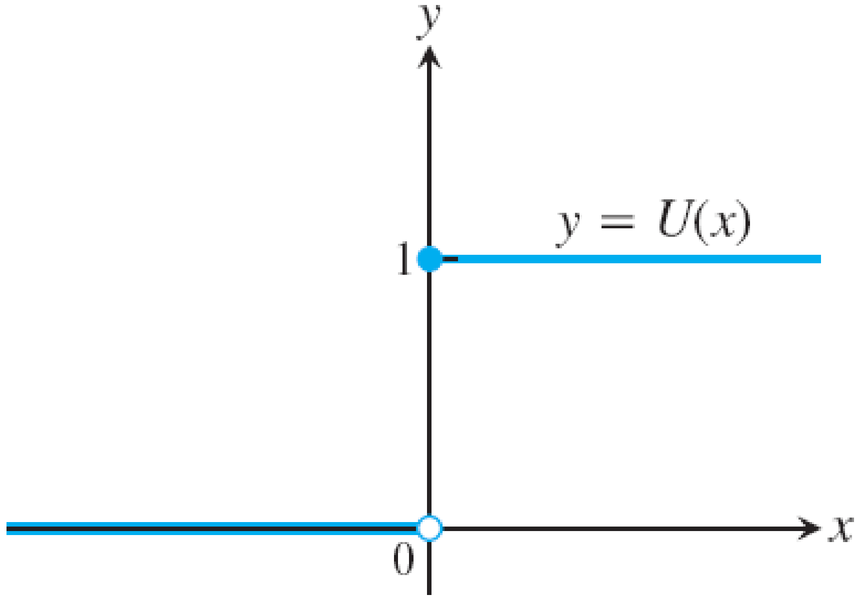


FIGURA 3.7 A função de salto unitário não tem a propriedade do valor intermediário e não pode ser a derivada de uma função da reta real.