Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus de Natal

Lista de exercícios: Inversão de matrizes e determinantes

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal

Novembro de 2022

Sumário

1 Determinantes por expansão em cofatores

> **ADVERTÊNCIA** A técnica de setas só funciona com determinantes de matrizes 2×2 e 3×3.

direita e subtraindo os produtos das entradas nas setas para a esquerda. Esse procedimento executa as seguintes contas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

que estão de acordo com a expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

EXEMPLO 7 Uma técnica para calcular determinantes 2×2 e 3×3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

Revisão de conceitos

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada.
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3.
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Conjunto de exercícios 2.1

Nos Exercícios **1–2**, encontre todos os menores e cofatores da matriz A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{13} e C_{13}. (b) M_{23} e C_{23}.

(c) M_{22} e C_{22}. (d) M_{21} e C_{21}.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{32} e C_{32}. (b) M_{44} e C_{44}.

(c) M_{41} e C_{41}. (d) M_{24} e C_{24}.

▶ Nos Exercícios **5–8**, calcule o determinante da matriz. Se a matriz for invertível, use a Equação (2) pra encontrar a inversa. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **9–14**, use a técnica de setas para calcular o determinante da matriz. ◀

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–18**, encontre todos os valores de λ com os quais $(A) = 0$. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$

19. Calcule o determinante da matriz do Exercício 13 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

20. Calcule o determinante da matriz do Exercício 12 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

▶ Nos Exercícios **21–26**, calcule $\det(A)$ com uma expansão em cofatores ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha. ◀

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–32**, obtenha por inspeção o determinante da matriz dada. ◀

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do determinante independe de θ.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e só se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Sem fazer contas, descubra uma relação entre os determinantes

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para qualquer matriz A de tamanho 2×2.

37. O que pode ser dito sobre um determinante de enésima ordem com todas as entradas iguais a 1? Explique seu raciocínio.

38. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 3×3 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

39. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

40. Prove que os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove: a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se A for uma matriz triangular superior e se B_{ij} for a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de tamanho 2×2 é $ad + bc$.

(b) Duas matrizes quadradas A e B podem ter o mesmo determinante se, e só se, forem de mesmo tamanho.

(c) O menor M_{ij} é igual ao cofator C_{ij} se, e só se, $i + j$ for par.

(d) Se A for uma matriz simétrica de tamanho 3×3, então $C_{ij} = C_{ji}$, com quaisquer i e j.

(e) O valor da expansão em cofatores de uma matriz A é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.

(f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.

(g) Dados uma matriz quadrada A e um escalar c quaisquer, temos $\det(cA) = c\det(A)$.

(h) Dadas quaisquer matrizes quadradas A e B, temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(i) Dada qualquer matriz A de tamanho 2×2, temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Nesta seção, mostramos como calcular um determinante por meio da redução da matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos cálculos que a expansão em cofatores e é, portanto, o método preferido para matrizes grandes.

Um teorema básico

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1 *Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então* $\det(A) = 0$.

Prova Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros.

2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Conjunto de exercícios 2.2

Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ **4.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **5–9**, calcule por inspeção o determinante da matriz elementar dada.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **10–17**, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

Nos Exercícios **20–27**, calcule o determinante, sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **21.** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **22.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Mostre que

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Nos Exercícios **30–33**, confirme as identidades sem calcular o determinante diretamente.

30. $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

3 Propriedades dos determinantes; regra de Cramer

Revisão de conceitos

- Teste do determinante para invertibilidade
- Matriz de cofatores
- Adjunta de uma matriz
- Regra de Cramer
- Afirmações equivalentes sobre uma matriz invertível

Aptidões desenvolvidas

- Saber como os determinantes se comportam em relação às operações aritméticas básicas, conforme Equação (1), Teorema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 2.3.4.
- Usar o determinante para testar uma matriz quanto à invertibilidade.
- Conhecer a relação entre $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$.
- Calcular a matriz de cofatores de uma matriz quadrada A.
- Calcular $\operatorname{adj}(A)$ de uma matriz quadrada A.
- Usar a adjunta de uma matriz invertível para encontrar sua inversa.
- Usar a regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.
- Conhecer as caracterizações equivalentes da invertibilidade de uma matriz dadas no Teorema 2.3.8.

Conjunto de exercícios 2.3

▶ Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; $k = -4$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $k = 3$

▶ Nos Exercícios **5–6**, verifique que $\det(AB) = \det(BA)$ e determine se vale a igualdade $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. ◀

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **7–14**, use determinantes para decidir se a matriz é invertível. ◀

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–18**, encontre os valores de k com os quais A é invertível. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **19–23**, decida se a matriz é invertível e, caso for, use o método da adjunta para encontrar a inversa. ◀

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **24–29**, resolva usando a regra de Cramer, quando aplicável. ◀

24. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 4x + 5y \phantom{{}+2z} &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2 \\ 4x_1 \phantom{{}-3x_2} - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

28.
$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

30. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível com qualquer valor de θ; em seguida, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.3.6.

31. Use a regra de Cramer para resolver em y sem resolver nas incógnitas x, z e w.

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

32. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema do Exercício 31.

(a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.

(b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Qual método envolve menos contas?

33. Prove que se $\det(A) = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são inteiros.

34. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas com todos os coeficientes e as constantes números inteiros. Prove que se $\det(A) = 1$, então a solução $\mathbf{x}$ tem entradas inteiras.

35. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det(A) = -7$, obtenha

(a) det(3A) (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^{-1})$

(d) $\det((2A)^{-1})$ (e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

36. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 4×4 com $\det(A) = -2$.

(a) $\det(-A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^T)$ (d) $\det(A^3)$

37. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 7$.

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$

38. Prove que uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, A^TA é invertível.

39. Mostre que se A for uma matriz quadrada, então $\det(A^TA) = \det(AA^T)$.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(l), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 3×3, então $\det(2A) = 2\det(A)$.

(b) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que $\det(A) = \det(B)$, então $\det(A + B) = 2\det(A)$.

(c) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho e A for invertível, então

$$\det(A^{-1}BA) = \det(B)$$

(d) Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) = 0$.

(e) A matriz de cofatores de A é precisamente $[\operatorname{adj}(A)]^T$.

(f) Para cada matriz A de tamanho $n \times n$, temos

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = (\det(A))I_n$$

(g) Se A for uma matriz quadrada, e o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiver soluções múltiplas para $\mathbf{x}$, então $\det(A) = 0$.

(h) Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, e existir uma matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$ tal que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tem soluções, então a forma escalonada reduzida de A não pode ser I_n.

(i) Se E for uma matriz elementar, então $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(j) Dada uma matriz invertível A, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem somente a solução trivial se, e só se, o sistema linear $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(k) Se A for invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ também será invertível.

(l) Se A tem uma linha de zeros, então $\operatorname{adj}(A)$ também tem.

Capítulo 2 Exercícios suplementares

▶ Nos Exercícios **1–8**, calcule o determinante da matriz usando (a) a expansão em cofatores e (b) as operações elementares com as linhas para introduzir zeros na matriz. ◀

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Calcule os determinantes nos Exercícios 3–6 usando a técnica das setas (ver Exemplo 7 da Seção 2.1).

10. (a) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando expansão em cofatores, mas difícil de calcular usando operações elementares com linhas.

(b) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando operações elementares com linhas, mas difícil de calcular usando expansão em cofatores.

11. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 1–4 são invertíveis.

12. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 5–8 são invertíveis.

▶ Nos Exercícios **13–15**, encontre o determinante da matriz usando qualquer método. ◀

13. $\begin{vmatrix} 5 & b-3 \\ b-2 & -3 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ a^2 & 1 & 2 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. Resolva para x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **17–24**, use o método da adjunta (Teorema 2.3.6) para encontrar a inversa da matriz dada, se existir. ◀

17. A matriz do Exercício 1. **18.** A matriz do Exercício 2.

19. A matriz do Exercício 3. **20.** A matriz do Exercício 4.

21. A matriz do Exercício 5. **22.** A matriz do Exercício 6.

23. A matriz do Exercício 7. **24.** A matriz do Exercício 8.

25. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y' \\ y &= \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y' \end{aligned}$$

26. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

27. Examinando o determinante da matriz de coeficientes, mostre que o sistema dado tem uma solução não trivial se, e só se, $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + \quad y + \alpha z &= 0 \\ x + \quad y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \quad z &= 0 \end{aligned}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 com todas as entradas iguais a 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para $\det(A)$?

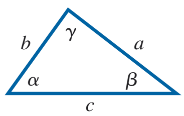
29. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c \end{aligned}$$

e, então, aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas análogas para β e γ.



◀ **Figura Ex-29**

30. Use determinantes para mostrar que, com qualquer valor de λ, a única solução de

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - \quad y &= \lambda y \end{aligned}$$

é $x = 0$, $y = 0$.

31. Prove: se A for invertível, então adj(A) é invertível e

$$[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \text{adj}(A^{-1})$$

32. Prove: se A for uma matriz $n \times n$, então

$$\det[\text{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

33. Prove: se a soma das entradas em cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ for sempre zero, então o determinante de A é zero. [*Sugestão*: considere o produto matricial AX, em que X é a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a 1.]

34. (a) Na figura dada, a área do triângulo ABC pode ser expressa como

$$\text{área } ABC = \text{área } ADEC + \text{área } CEFB - \text{área } ADFB$$

Use isso e o fato de que a área de um trapézio é igual à metade da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[*Observação*: na dedução dessa fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3), o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices (3, 3), (4, 0), (−2, −1).

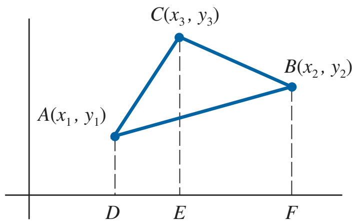


Figura Ex-34

35. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19, mostre, sem calcular diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

é divisível por 19.

36. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \text{sen } \alpha & \cos \alpha & \text{sen}(\alpha + \delta) \\ \text{sen } \beta & \cos \beta & \text{sen}(\beta + \delta) \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & \text{sen}(\gamma + \delta) \end{vmatrix} = 0$$