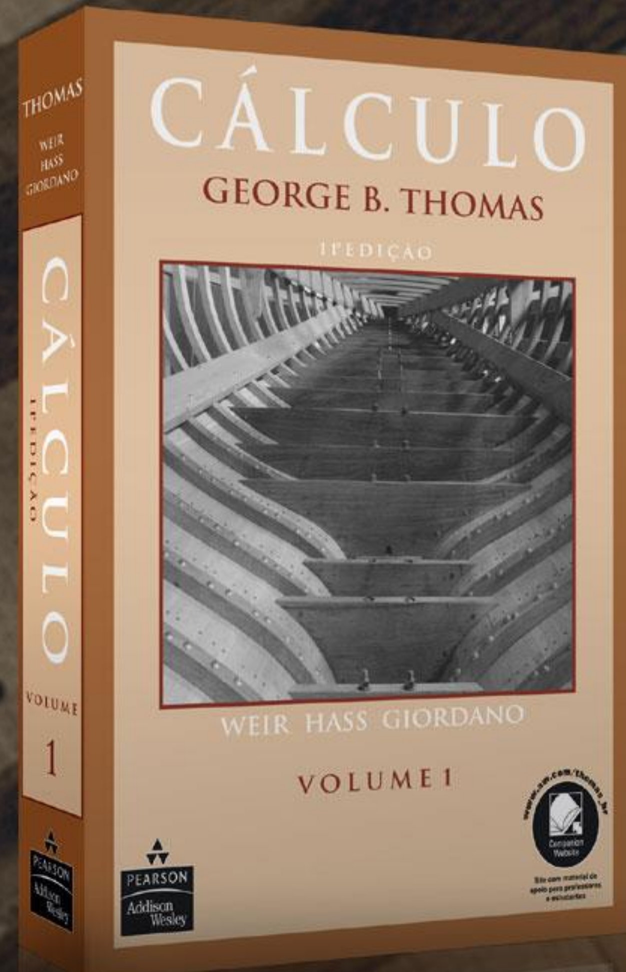
Capítulo 4

Aplicação das Derivadas



Seção 4.1 – Extremos de Funções

Definição Máximo absoluto, mínimo absoluto

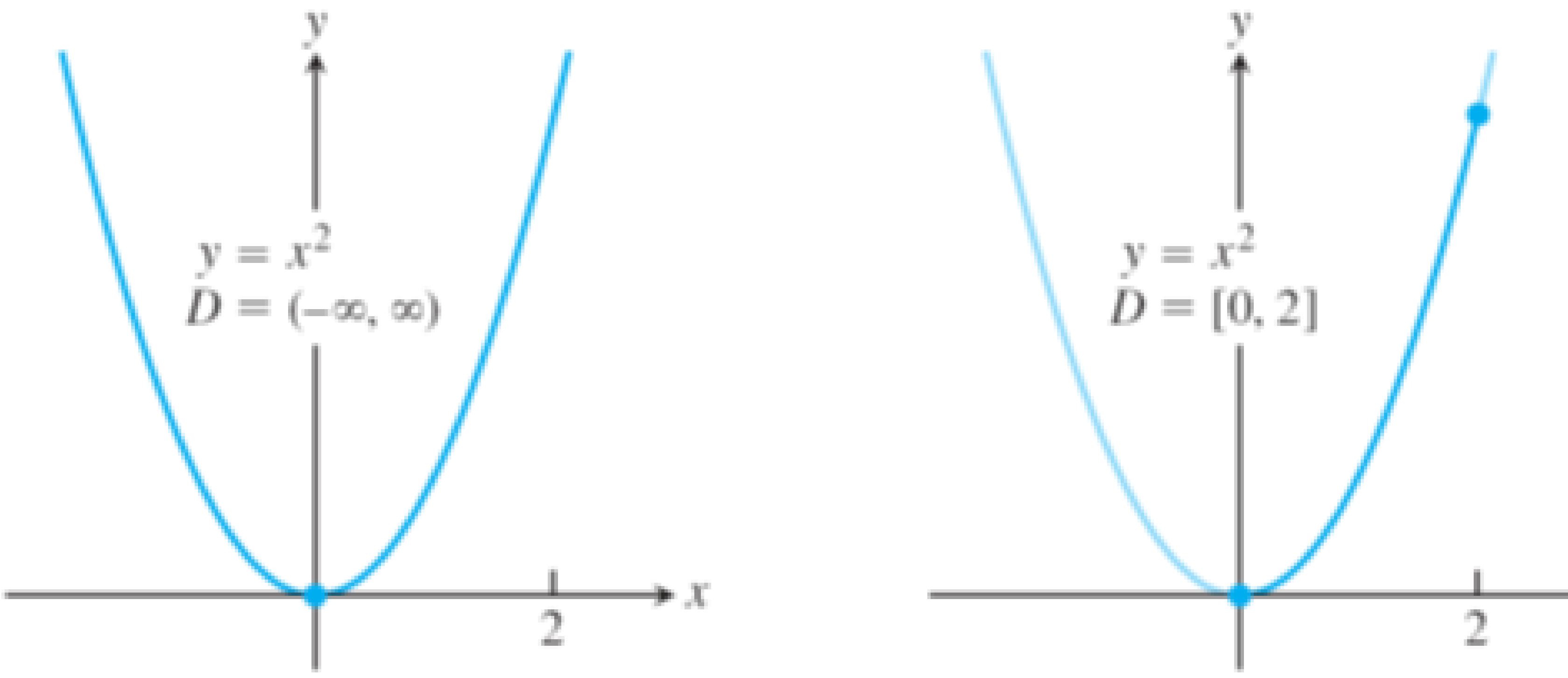
Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em } D.$$

e um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c se

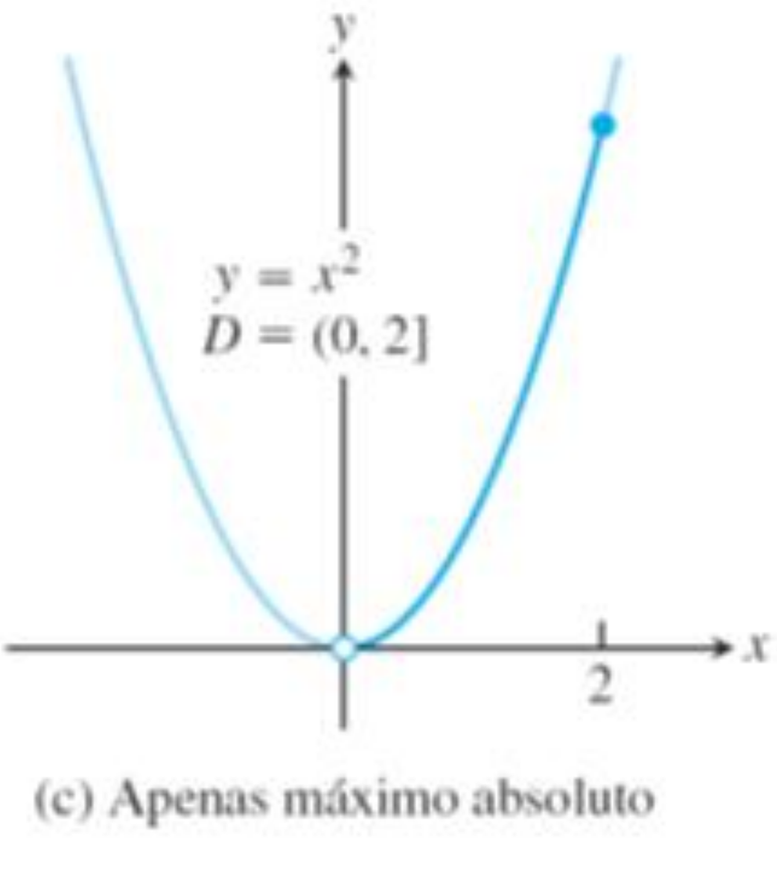
$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em } D.$$

- Exemplo 1: Explorando extremos absolutos



(a) Apenas mínimo absoluto

(b) Mínimo e máximo absolutos



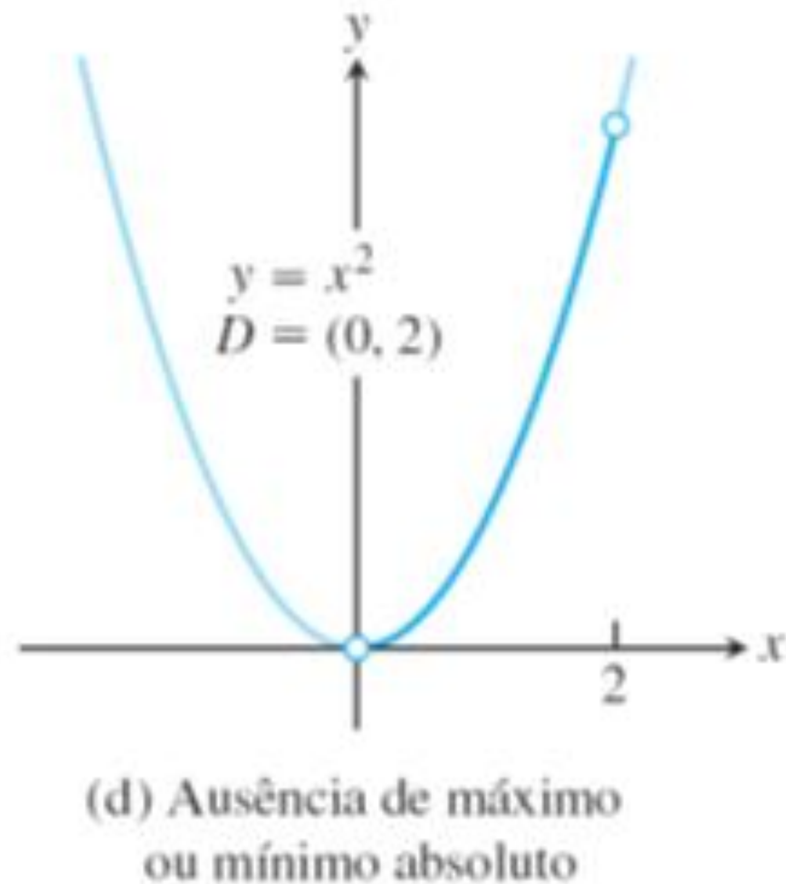


FIGURA 4.2 Os gráficos do Exemplo 1.

Função	Domínio D	Extremos absolutos em D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Ausência de máximo absoluto. Mínimo absoluto 0 quando $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0,2]$	Máximo absoluto 4 quando $x = 2$. Mínimo absoluto 0 quando $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0,2]$	Máximo absoluto 4 quando $x = 2$. Ausência de mínimo absoluto.
(d) $y = x^2$	$(0,2)$	Ausência de extremos absolutos.

Teorema 1 **O teorema do valor extremo**

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a, b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outro valor de x em $[a, b]$ (Figura 4.3).

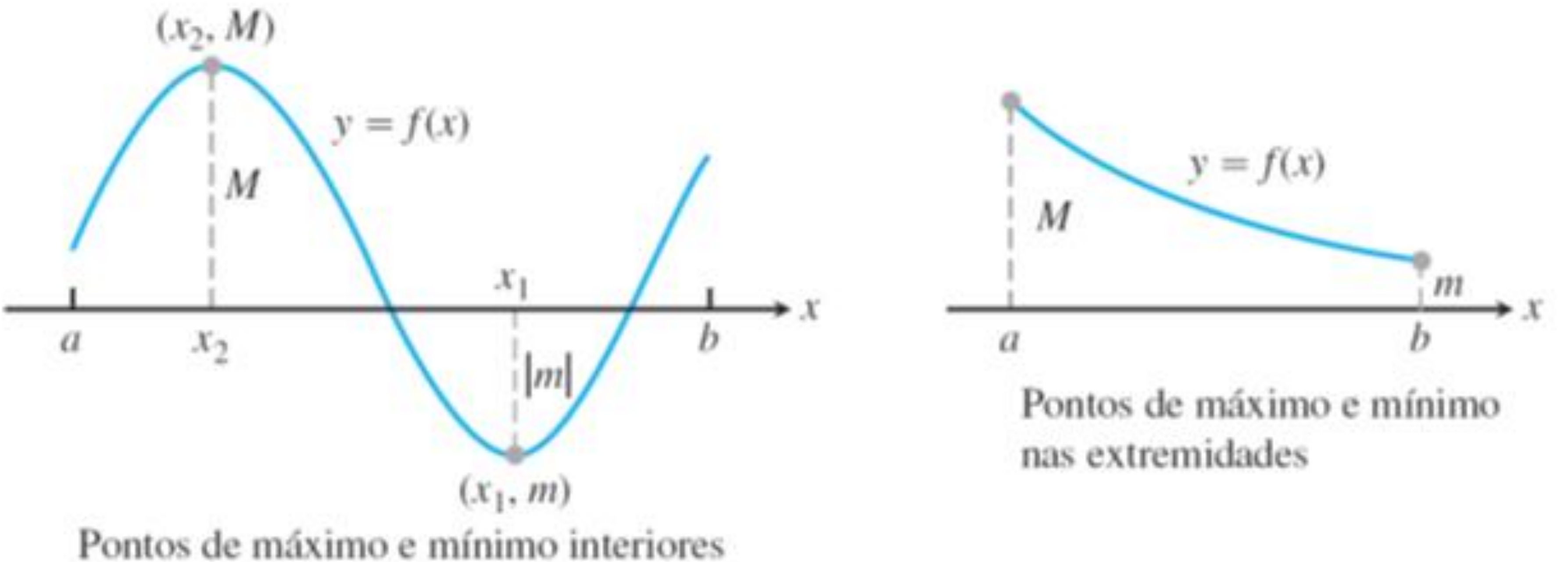
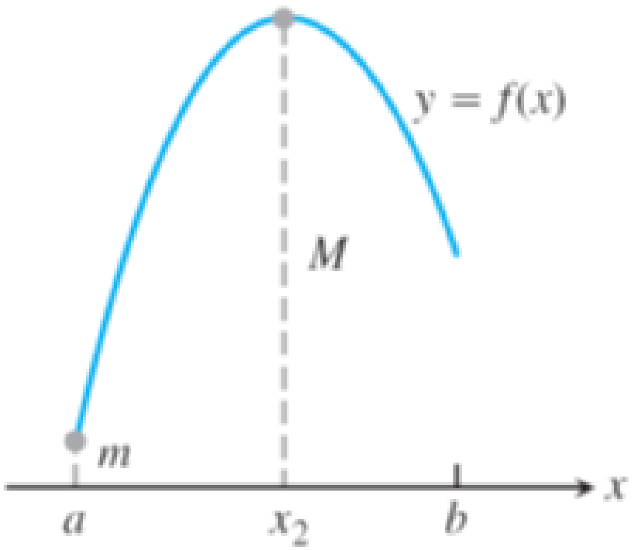
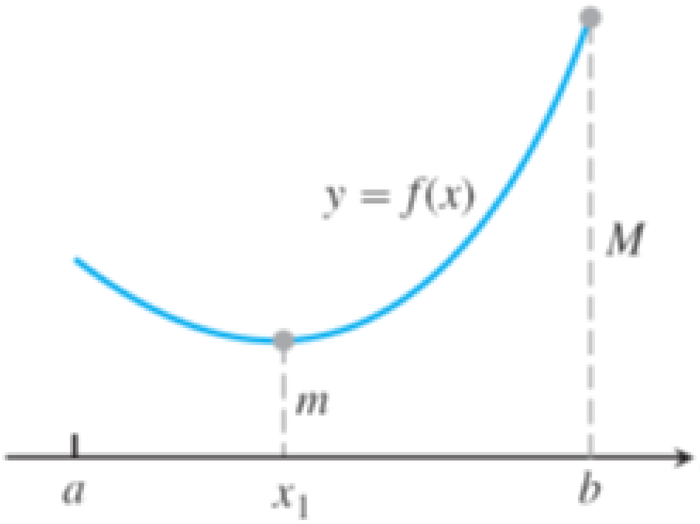


FIGURA 4.3 Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.



Pontos de máximo interior e ponto de mínimo em uma extremidade



Ponto de máximo em uma extremidade e ponto de mínimo interior

FIGURA 4.3 Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

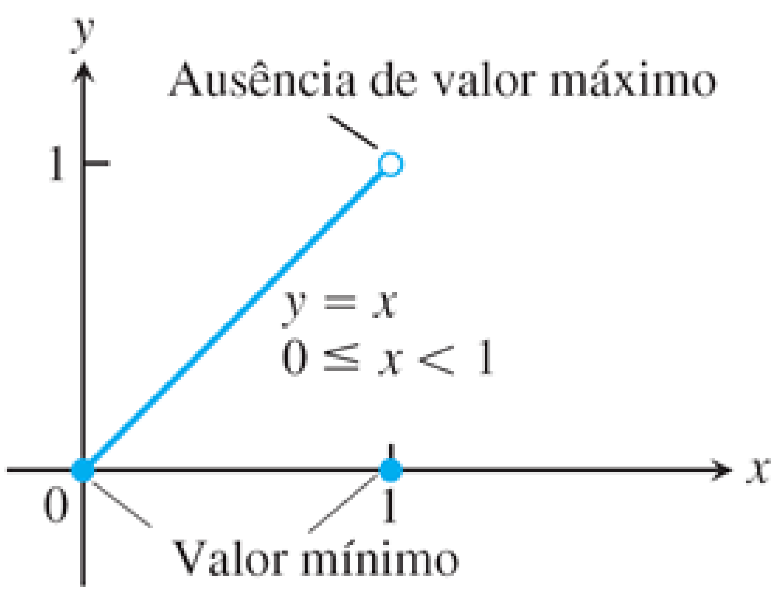


FIGURA 4.4 Até mesmo um único ponto de descontinuidade pode impedir que uma função tenha um valor máximo ou mínimo em dado intervalo. A função

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto do intervalo $[0, 1]$, exceto em $x = 1$, e seu gráfico no intervalo fechado $[0, 1]$ não tem um ponto mais alto.

Definição Máximo local, mínimo local

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em um intervalo aberto que contenha } c.$$

Uma função f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para qualquer } x \text{ em um intervalo aberto que contenha } c.$$

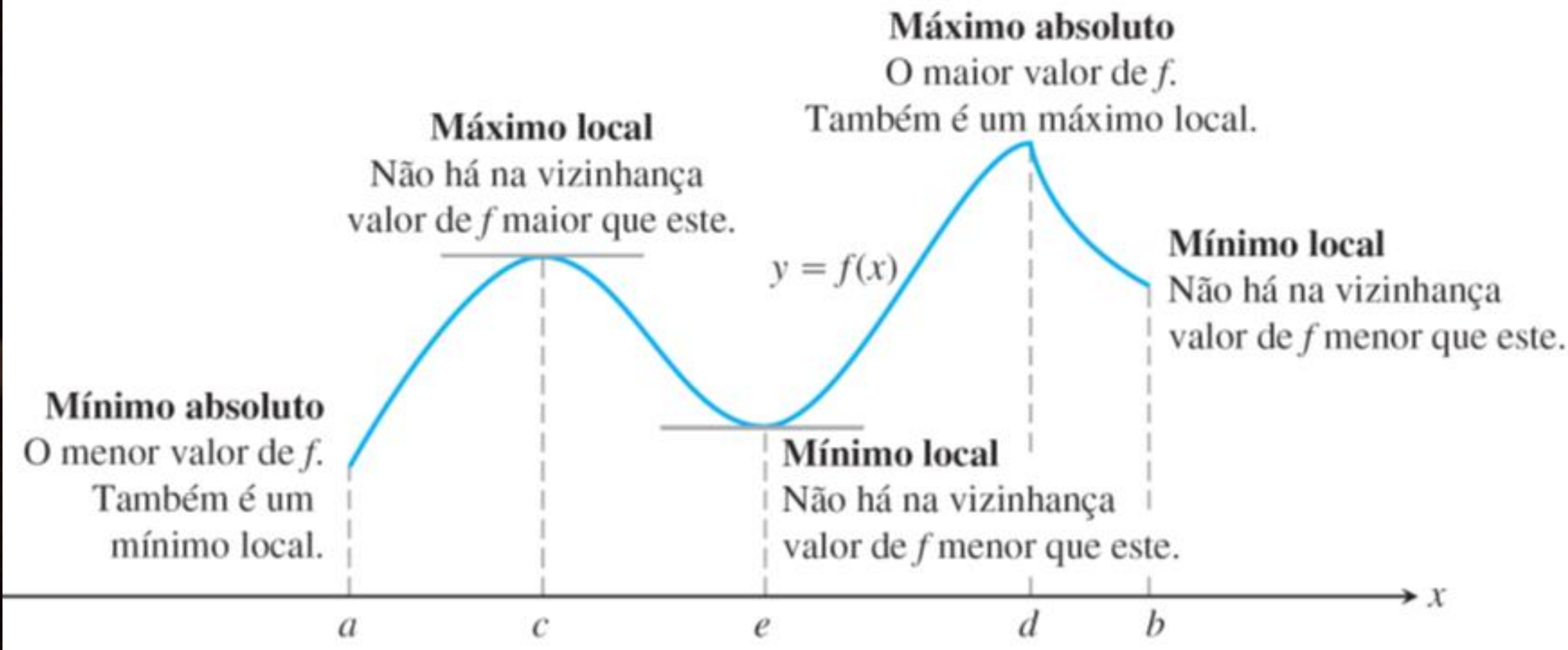


FIGURA 4.5 Como classificar os máximos e mínimos

Teorema 2 **Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais**

Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então

$$f'(c) = 0$$

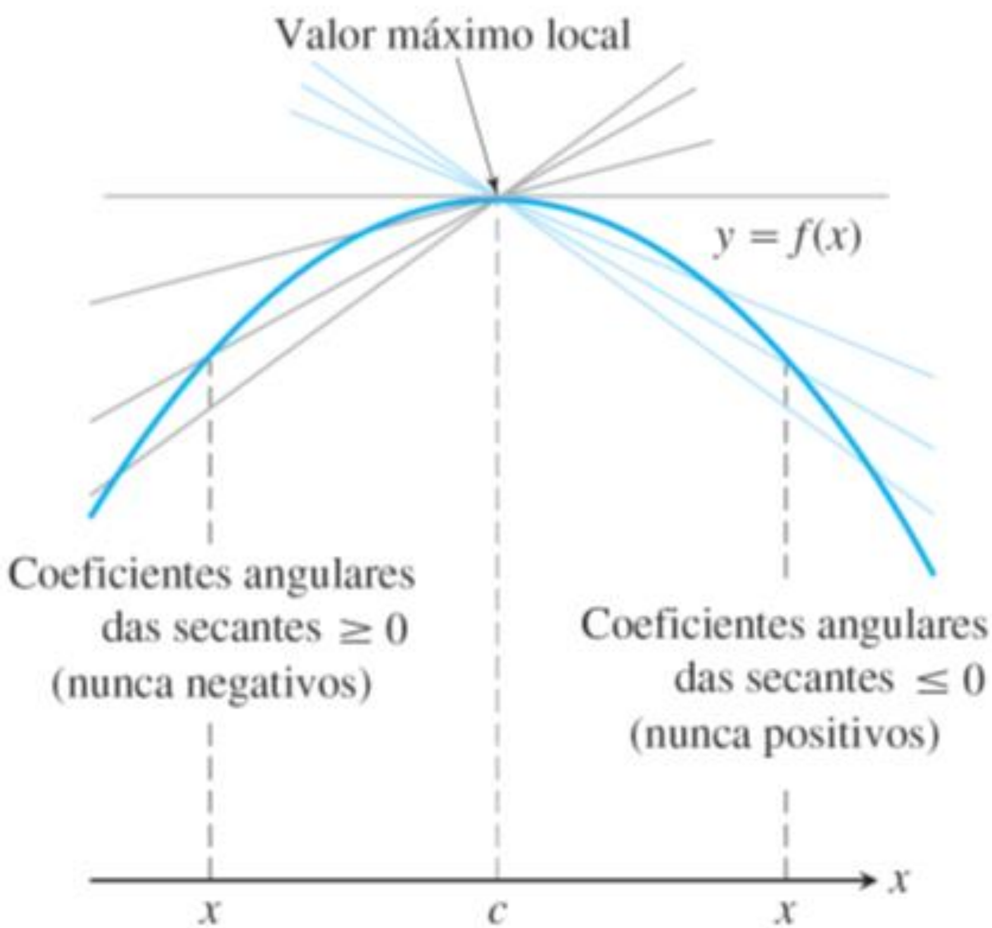


FIGURA 4.6 Uma curva com um máximo local. O coeficiente angular em c é simultaneamente o limite de números não positivos e não negativos e, portanto, é zero.

Definição Ponto crítico

Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um **ponto crítico** de f.

Como determinar os extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado e finito

1. Calcule f em todos os pontos críticos e extremidades.
2. Tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

Encontrando extremos absolutos

- Exemplo 2: Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2; 1]$.
- Exemplo 3: Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = 10x(2 - \ln x)$ no intervalo $[1; e^2]$ (veja Figura 4.7).

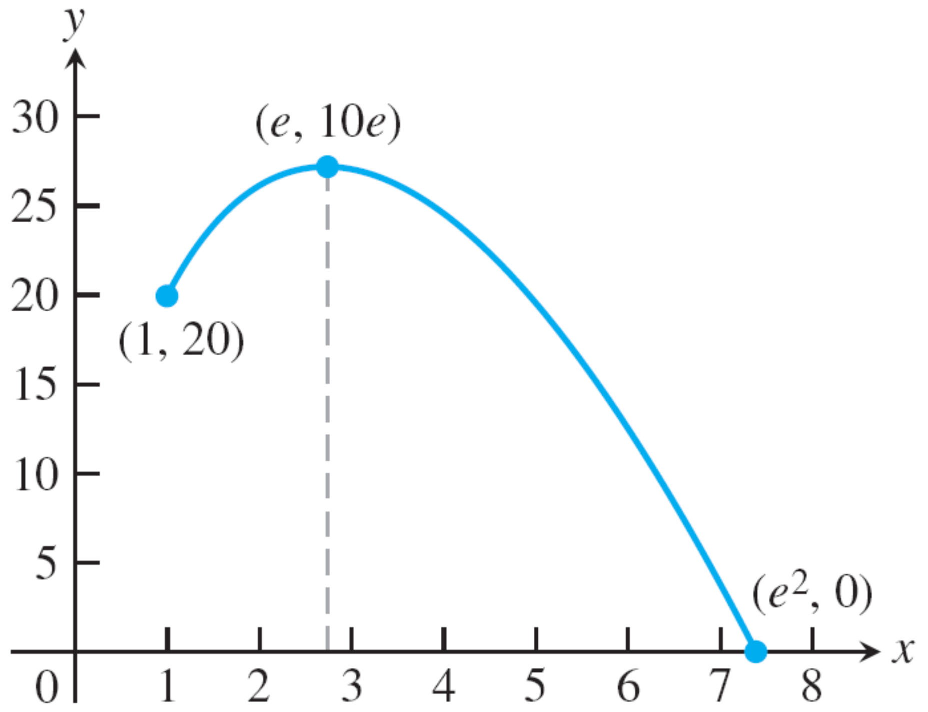


FIGURA 4.7 Os valores extremos de $f(x) = 10x\,(2 - \ln x)$ em $[1, e^2]$ ocorrem quando $x = e$ e $x = e^2$ (Exemplo 3).

Encontrando extremos absolutos

- Exemplo 4 (Exercício): Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ no intervalo $[-2; 3]$ (veja Figura 4.8 e lembre de incluir o ponto onde não existe a derivada na lista de pontos críticos).

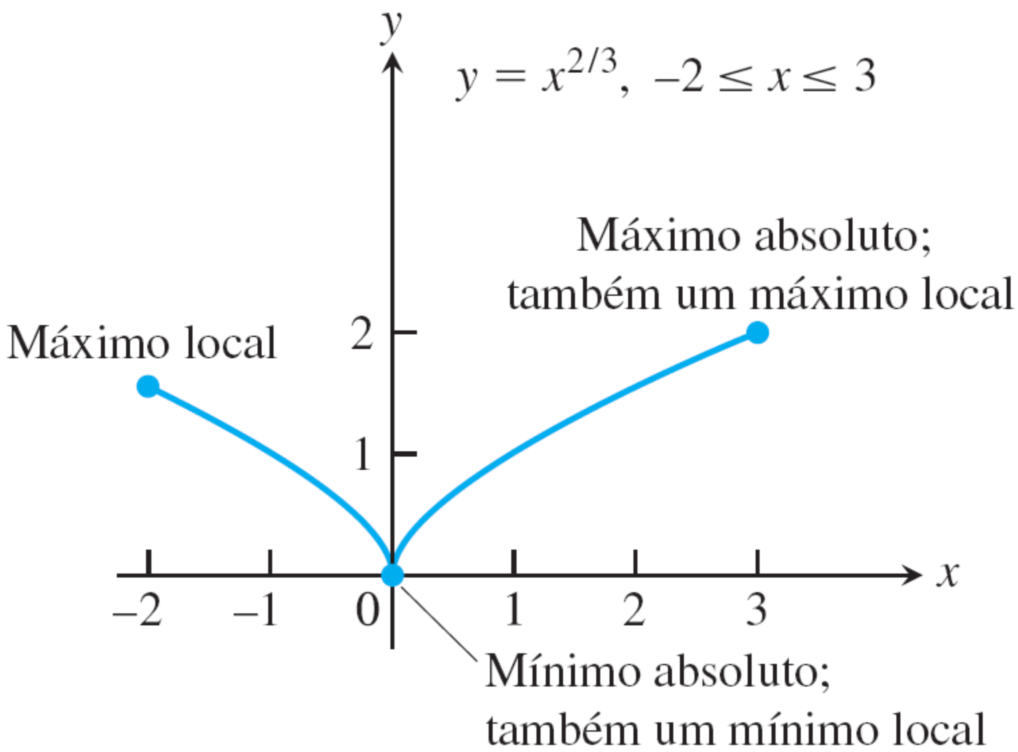


FIGURA 4.8 Os valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ no intervalo $[-2, 3]$ ocorrem quando $x = 0$ e $x = 3$ (Exemplo 4).

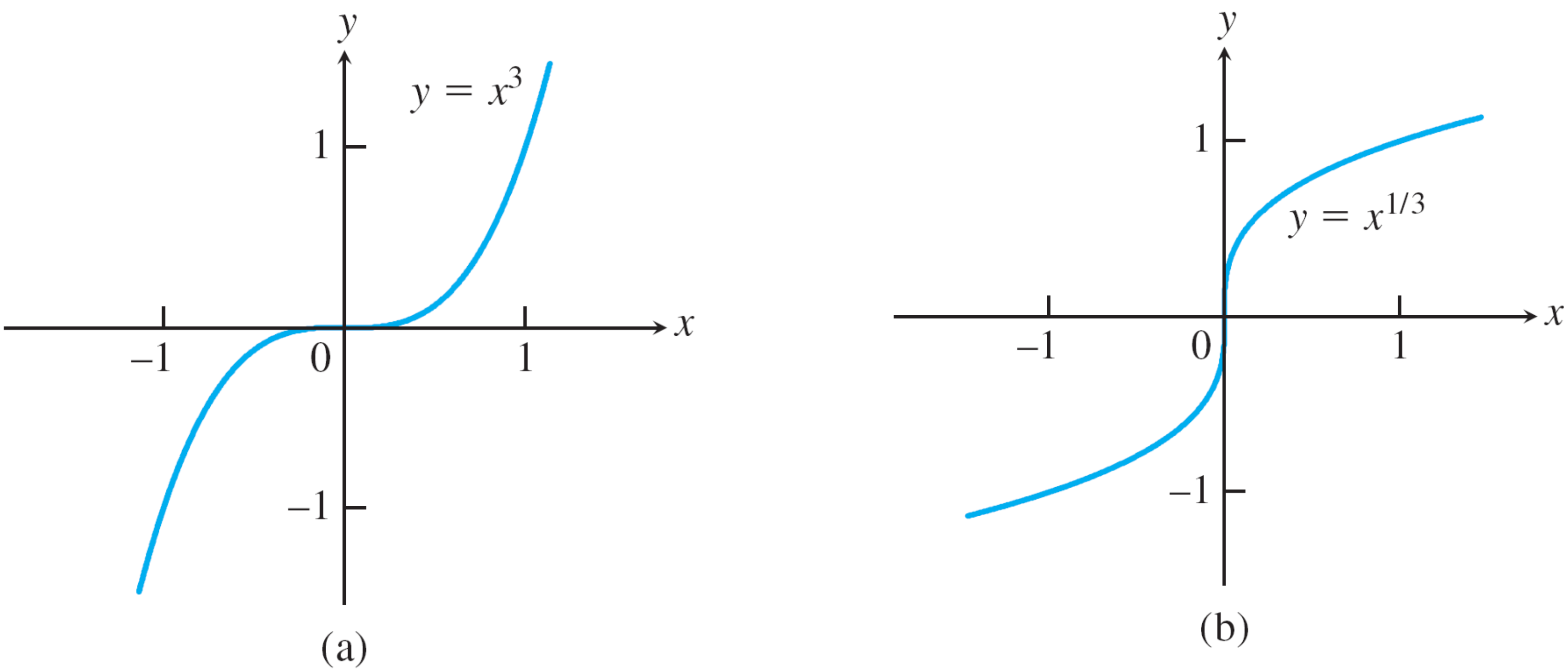


FIGURA 4.9 Pontos críticos sem valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ é 0 quando $x = 0$, mas $y = x^3$ não possui extremo nesse ponto. (b) $y' = (1/3)\ x^{-2/3}$ não é definida quando $x = 0$, mas $y = x^{1/3}$ não possui extremo nesse ponto.

Seção – 4.2 – Teorema do Valor Médio

Teorema 3 **O teorema de Rolle**

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior (a, b). Se

$$f(a) = f(b)$$

então há pelo menos um número c em (a, b) no qual

$$f'(c) = 0$$

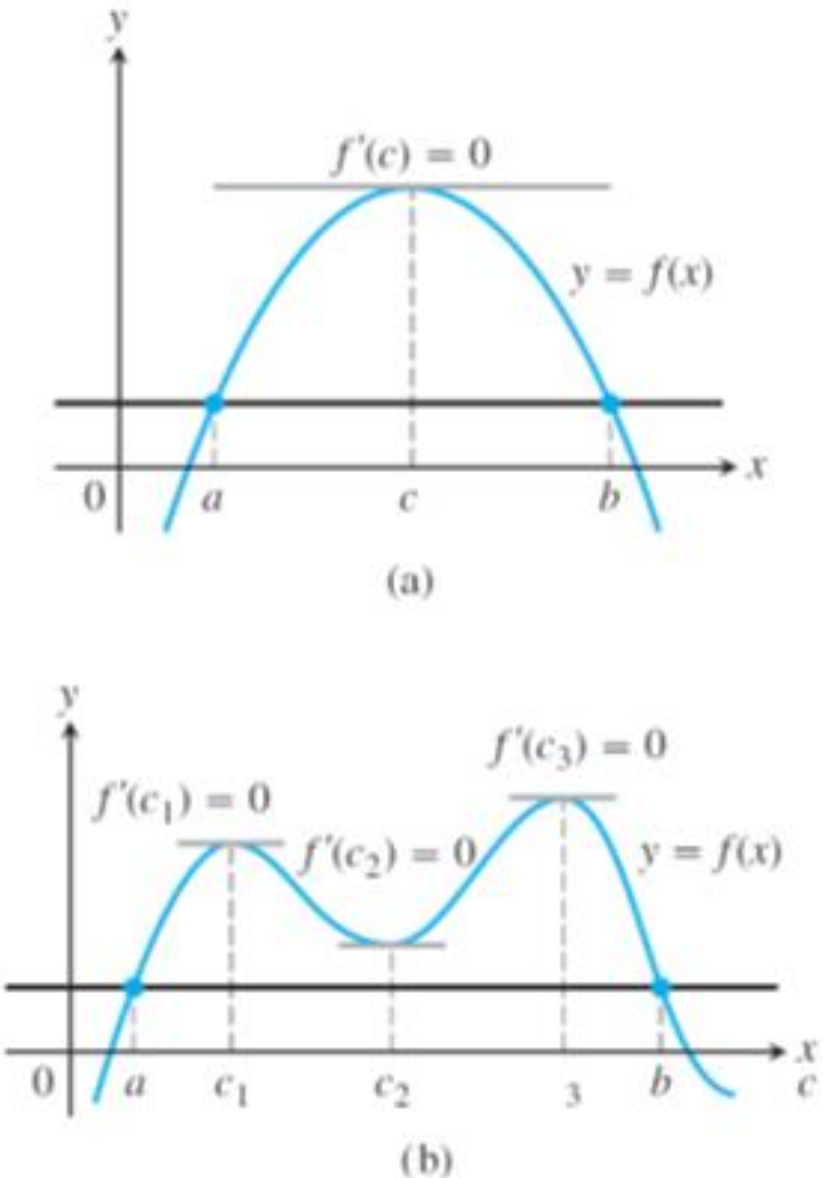


FIGURA 4.10 O teorema de Rolle diz que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza uma reta horizontal. Ela pode ter apenas uma tangente (a) ou mais de uma (b).

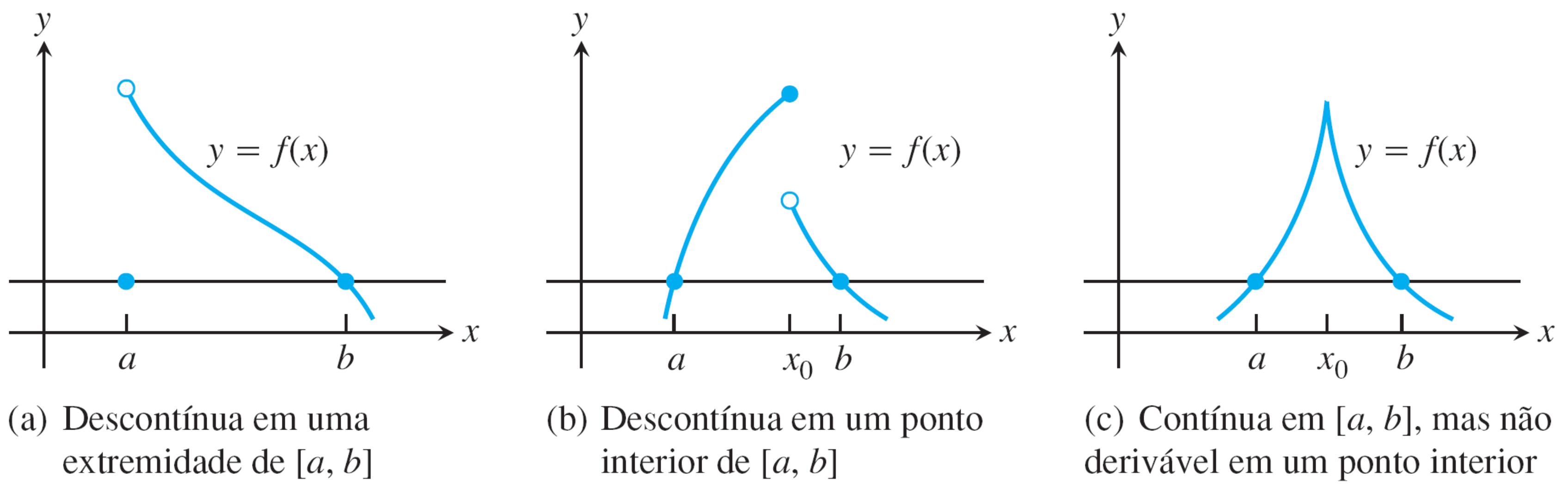


FIGURA 4.11 Se as hipóteses do teorema de Rolle não se cumprem, pode acontecer de não haver tangente horizontal.

Solução de uma equação $f(x) = 0$

- Exemplo 2: Mostre que a equação

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tem exatamente uma única solução real.

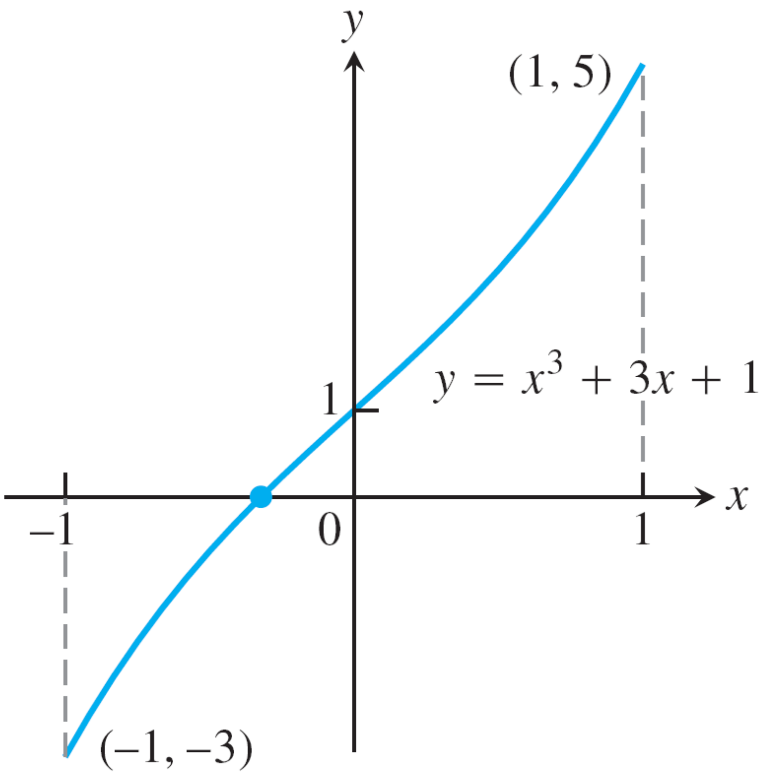


FIGURA 4.13 O único zero real do polinômio $y = x^3 + 3x + 1$ é aquele mostrado aqui, no ponto em que a curva cruza o eixo x entre –1 e 0 (Exemplo 2).

Teorema 4 **O teorema do valor médio**
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então há pelo menos um ponto c em (a, b) em que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (1)$$

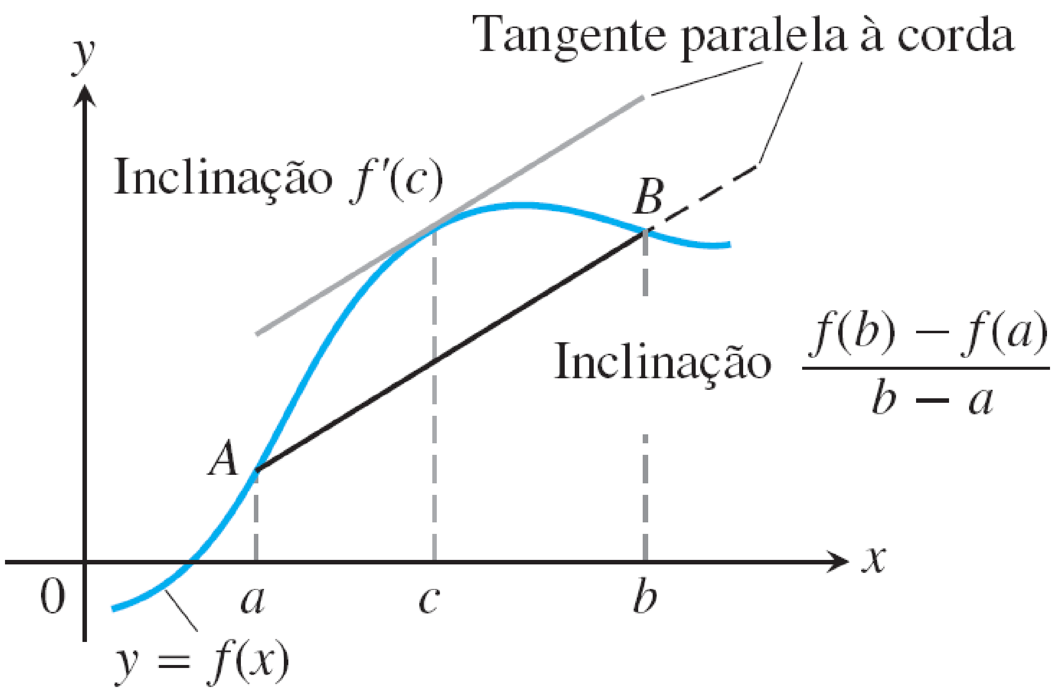


FIGURA 4.14 Geometricamente, o teorema do valor médio diz que, em algum lugar entre A e B, a curva apresenta pelo menos uma tangente paralela à corda AB.

- Exemplo 3: A função $f(x) = x^2$ (Figura 4.18) é contínua para $0 \leq x \leq 2$. Como $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$, o teorema do valor médio diz que, em algum ponto c no intervalo, a derivada $f'(x) = 2x$ deve ter o valor $\frac{4-0}{2-0} = 2$. Nesse caso (excepcional), podemos identificar c resolvendo a equação $2c = 2$ para obter $c = 1$.

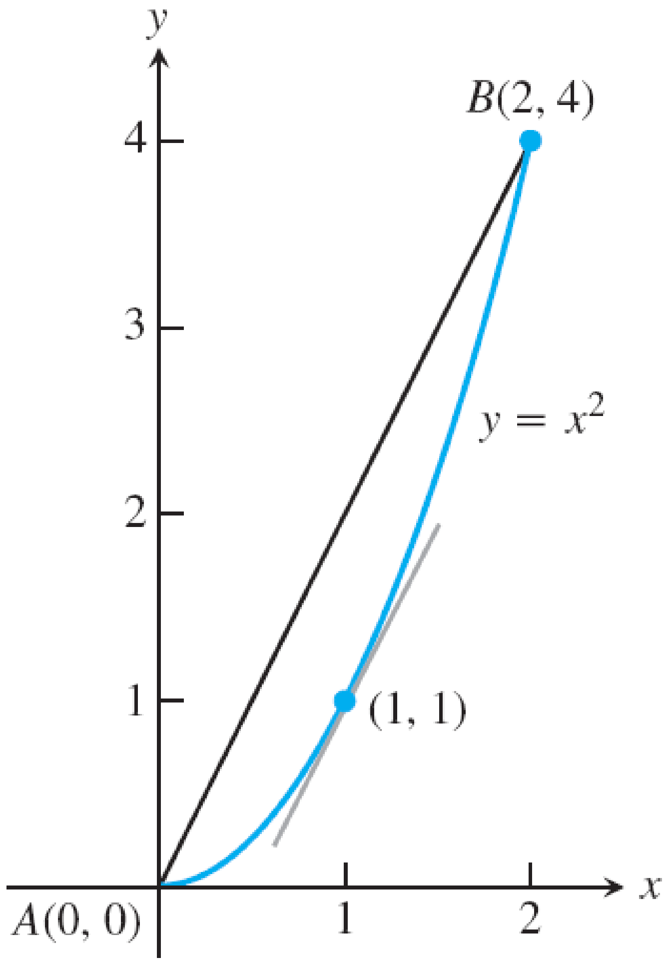


FIGURA 4.18 Como descobrimos no Exemplo 3, é em $c = 1$ que a tangente é paralela à corda.

Corolário 1 **Funções com derivadas nulas são constantes**

Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b), então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$, onde C é uma constante.

Corolário 2 **Funções com a mesma função derivada diferem por uma constante**

Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b), então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b).

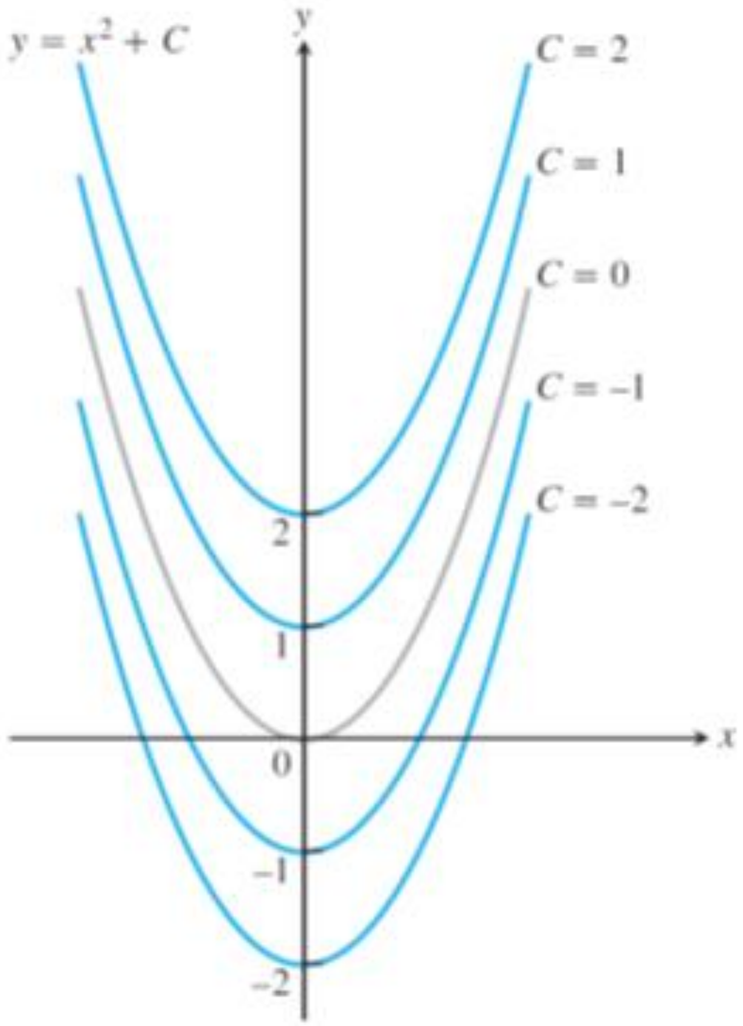


FIGURA 4.20 Do ponto de vista geométrico, o Corolário 2 do teorema do valor médio diz que os gráficos das funções com derivadas idênticas em um intervalo podem diferir apenas por um deslocamento vertical. Os gráficos das funções com derivada $2x$ são as parábolas $y = x^2 + C$, apresentadas aqui para alguns valores escolhidos de C.

Aplicando o Corolário 2

- Exemplo 5: Determine a função $f(x)$ cuja derivada é sen x e cujo gráfico passa pelo ponto $(0; 2)$.

Seção 4.3 – Funções Monotônicas e o Teste da Primeira Derivada

Definições **Função crescente, função decrescente**

Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em I.

1. Se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **crescente** em I.
2. Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **decrescente** em I.

Uma função que é crescente ou decrescente em I é chamada **monotônica** em I.

Corolário 3 **Teste da primeira derivada para funções monotônicas**

Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

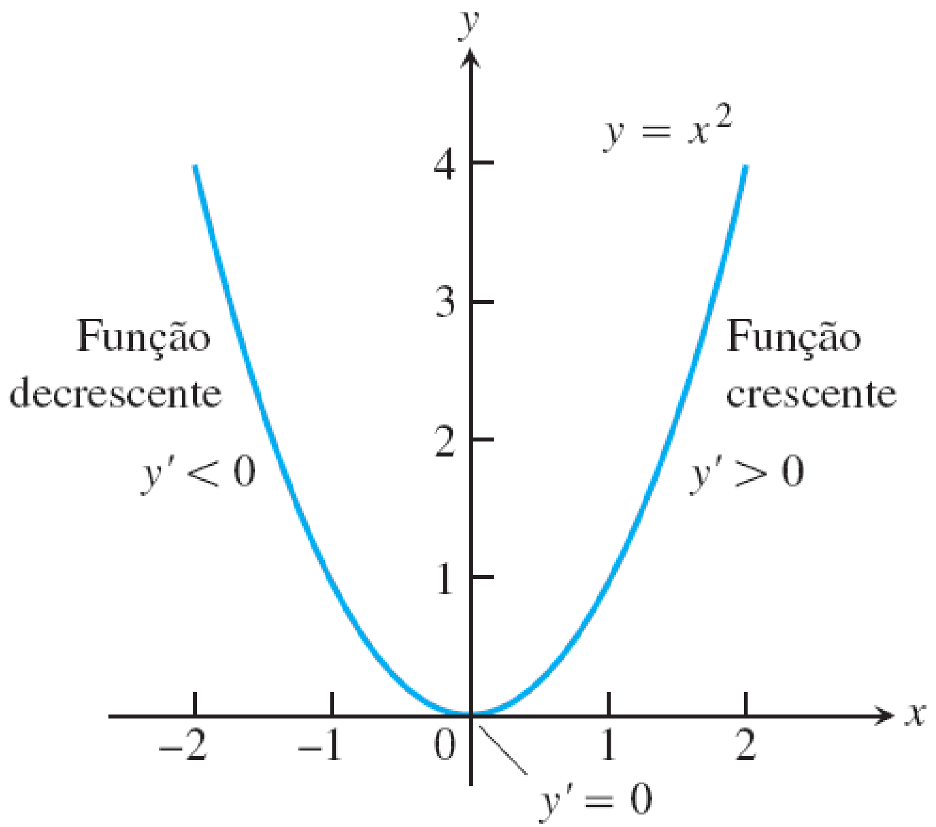


FIGURA 4.21 A função $f(x) = x^2$ é monotônica nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$, mas não em $(-\infty, \infty)$.

Usando o teste da primeira derivada

- Exemplo 1: Determine os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente.

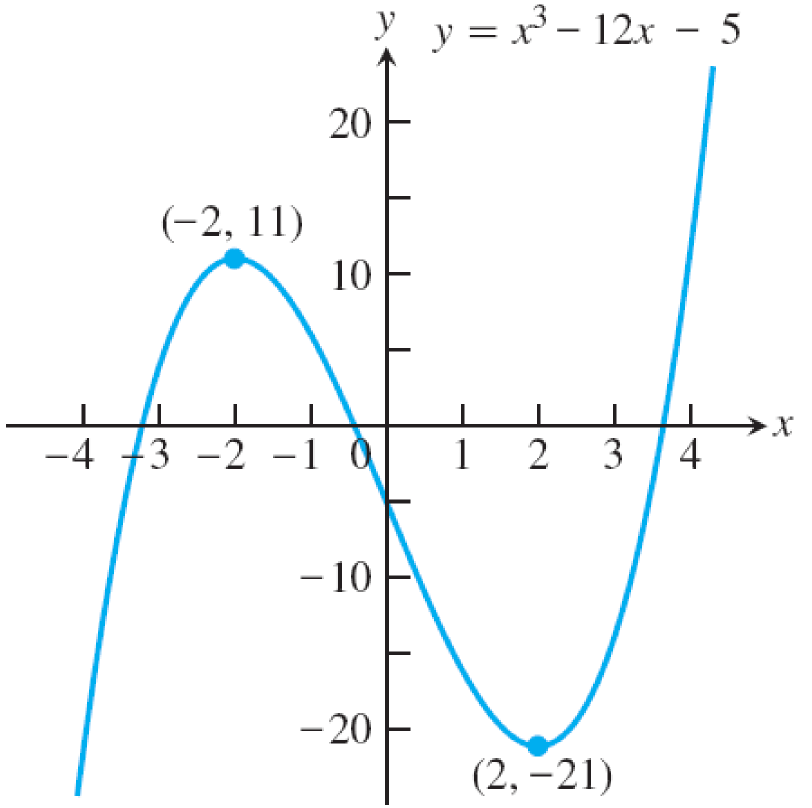


FIGURA 4.22 A função $f(x) = x^3 - 12x - 5$ é monotônica em três intervalos diferentes (Exemplo 1).

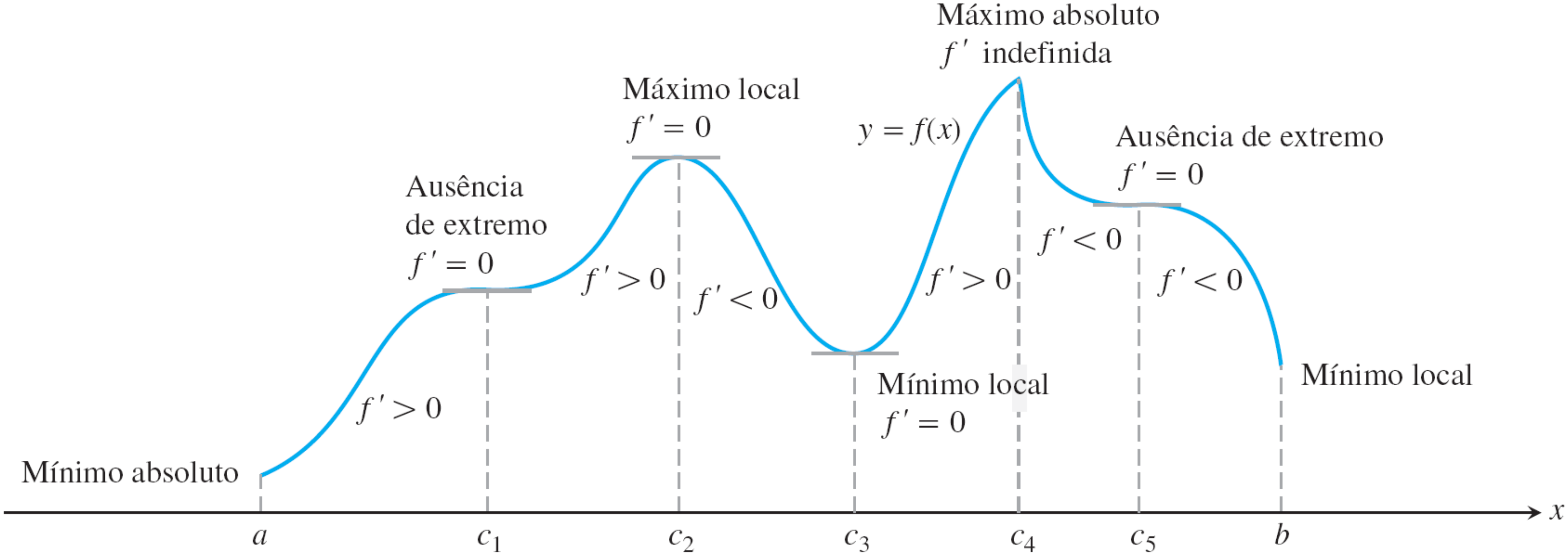


FIGURA 4.23 A primeira derivada de uma função nos diz como a curva sobe ou desce.

O teste da primeira derivada para extremos locais

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua f, e que f seja derivável em qualquer ponto de certo intervalo que contenha c, exceto possivelmente no próprio ponto c. Movendo-se ao longo de c, da esquerda para a direita,

1. se f' muda de negativa para positiva em c, então f possui um mínimo local em c;
2. se f' muda de positiva para negativa em c, então f possui um máximo local em c;
3. se f' não muda de sinal em c (ou seja, f' é positiva ou negativa em ambos os lados de c), então c não é um extremo local de f.

Determinando extremos locais

- Exemplo 2: Determine os pontos críticos de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$. Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos da função.

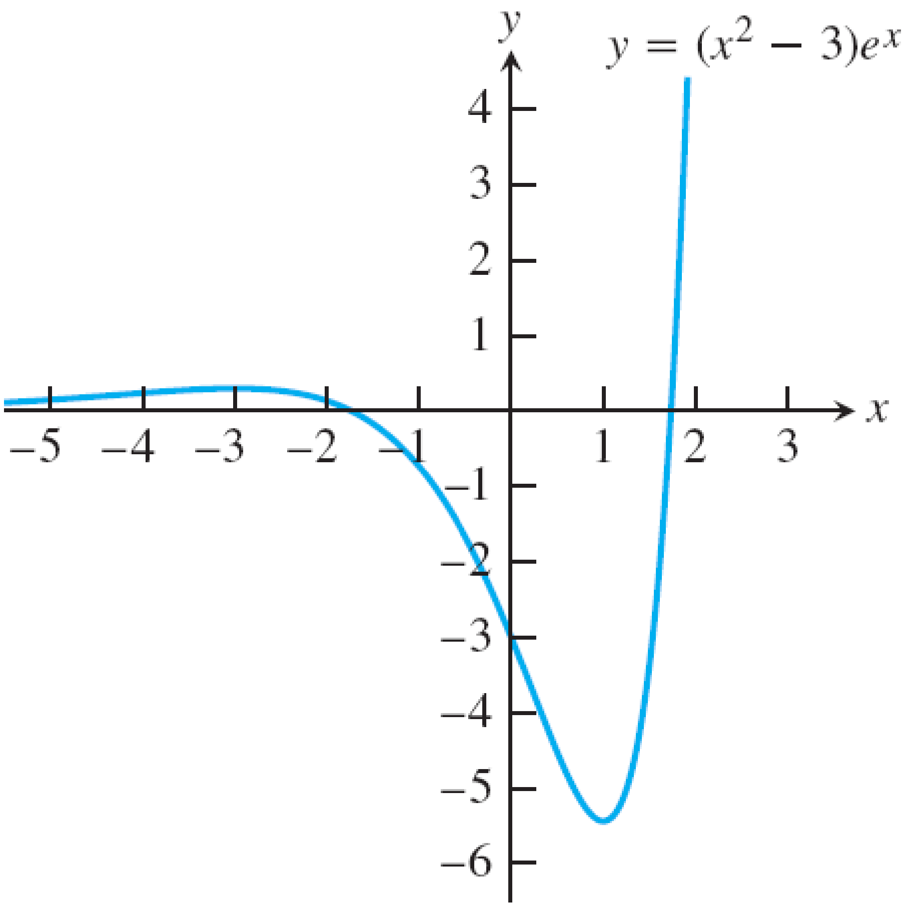


FIGURA 4.24 Gráfico de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ (Exemplo 2).

Seção 4.4 – Concavidade e Esboço de Curvas

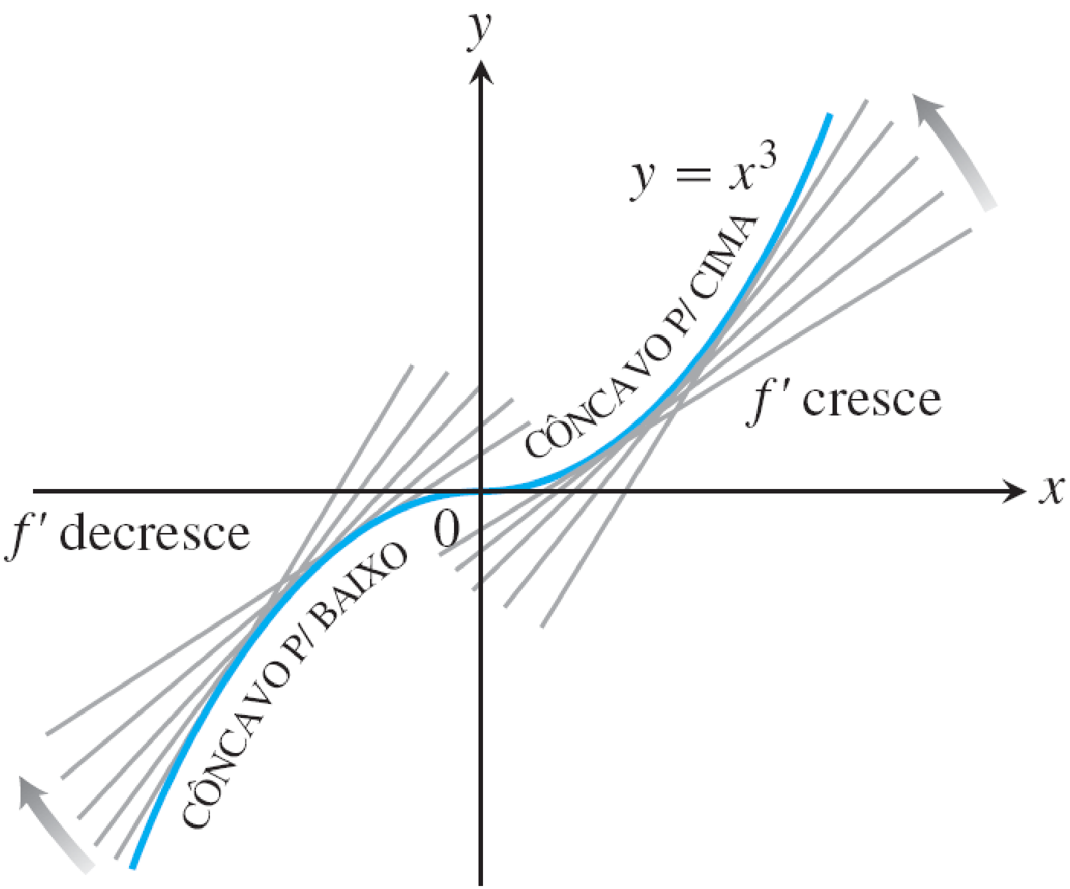


FIGURA 4.26 O gráfico de $f(x) = x^3$ é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$ (Exemplo 1a).

Definição **Côncavo para cima, côncavo para baixo**

O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é

(a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto I, se f' é crescente em I;

(b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto I, se f' é decrescente em I.

O teste da segunda derivada para concavidade

Seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo I.

1. Se $f'' > 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para cima.
2. Se $f'' < 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para baixo.

Aplicando o teste da concavidade

- Exemplo 1:

a) A curva $y = x^3$ (Figura 4.26) é côncava para baixo em $(-\infty; 0]$, onde $y'' = 6x < 0$, e côncava para cima em $[0;\ +\infty)$ onde $y'' = 6x > 0$.

b) A curva $y = x^2$ (Figura 4.27) é côncava para cima em $(-\infty;\ +\infty)$, pois sua segunda derivada $y'' = 2$ é sempre positiva.

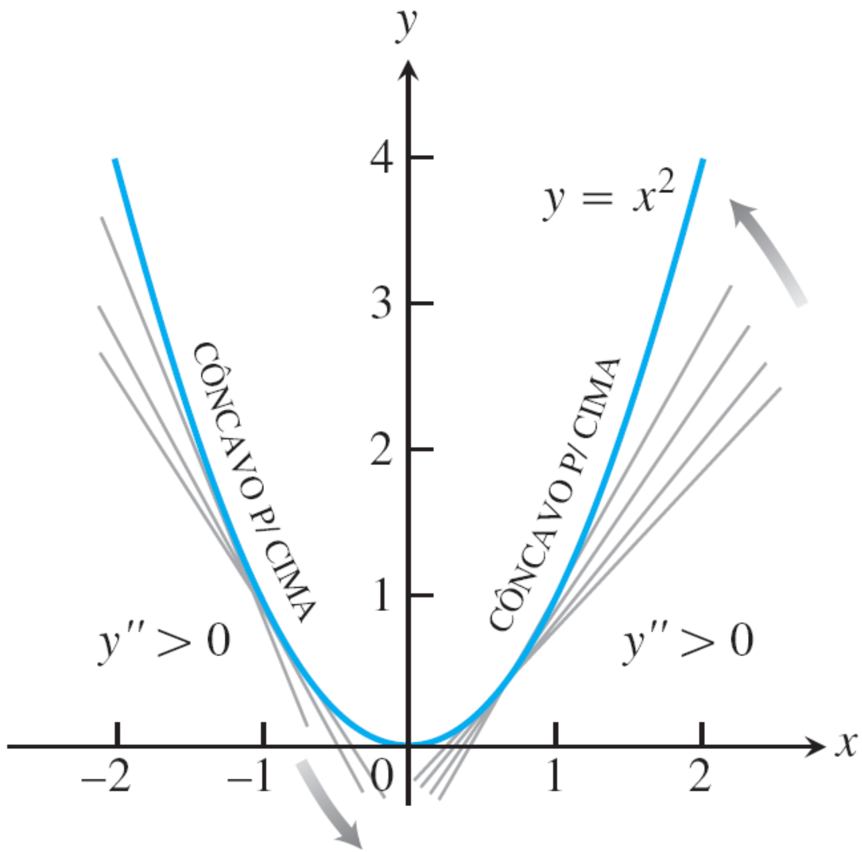


FIGURA 4.27 O gráfico de $f(x) = x^2$ é côncavo para cima em qualquer intervalo (Exemplo 1b).

Determinando a concavidade

- Exemplo 2: Determine a concavidade de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ em $[0; 2\pi]$.

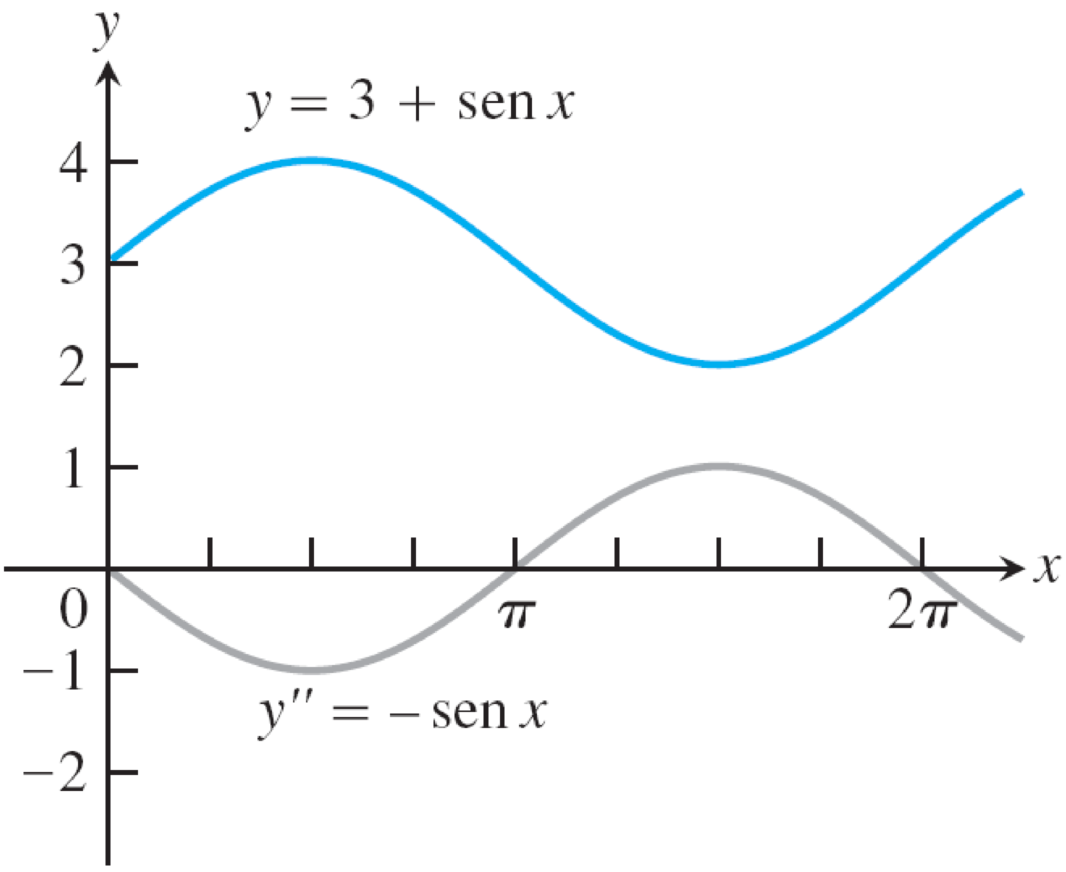


FIGURA 4.28 Usando o gráfico de y'' para determinar a concavidade de y (Exemplo 2).

Definição Ponto de inflexão

Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um **ponto de inflexão**.

Pode não existir ponto de inflexão onde $y'' = 0$

- Exemplo 3: A curva $y = x^4$ não possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 4.29). Embora $y'' = 12x^2$ seja zero nesse ponto, não ocorre mudança de sinal.

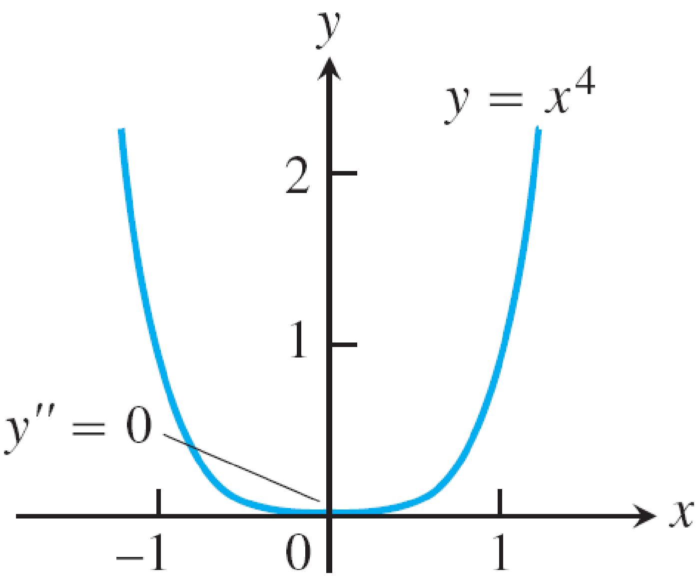


FIGURA 4.29 O gráfico de $y = x^4$ não apresenta ponto de inflexão na origem, embora nesse ponto $y'' = 0$ (Exemplo 3).

Pode existir ponto de inflexão onde y'' não existe

- Exemplo 4: A curva $y = x^{1/3}$ possui ponto de inflexão quando $x = 0$ (Figura 4.30), mas y'' não existe nesse ponto. Calcule a derivada segunda para confirmar tal fato.

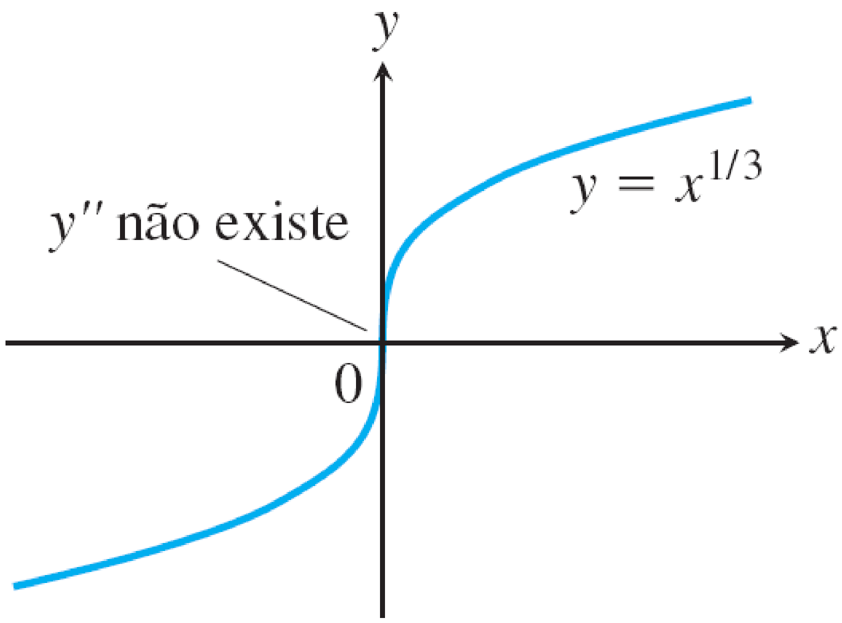


FIGURA 4.30 Um ponto onde não há y'' pode ser um ponto de inflexão (Exemplo 4).

Estudando o deslocamento ao longo de uma reta

- Exemplo 5: Uma partícula se desloca ao longo de uma reta horizontal de acordo com a função posição

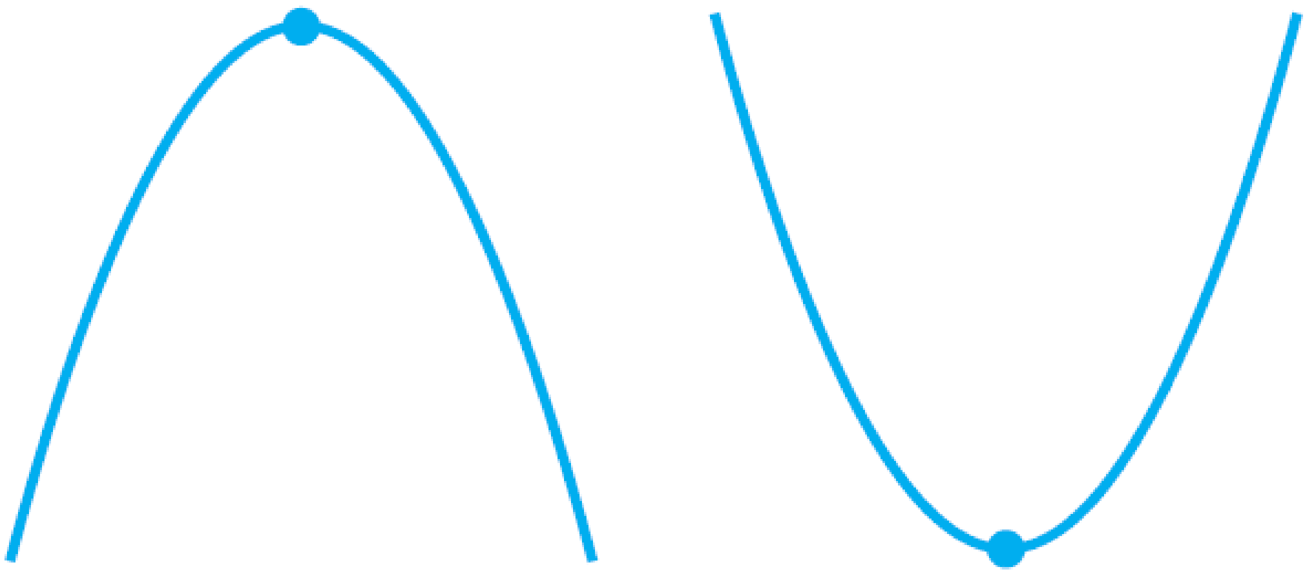
$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0$$

Determine a velocidade e a aceleração e descreva o movimento da partícula.

Teorema 5 **O teste da segunda derivada para extremos locais**

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.



$f' = 0, f'' < 0$
$\Rightarrow$ máximo local

$f' = 0, f'' > 0$
$\Rightarrow$ mínimo local

Utilizando f' e f'' para esboçar o gráfico de f

- Exemplo 6: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

seguindo os passos:

a) Identifique onde os extremos de f ocorrem;

b) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente;

(continua...)

Utilizando f' e f'' para esboçar o gráfico de f

- Exemplo 6: (cont.)

c) Determine onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde f é côncavo para baixo;

d) Esboce a forma geral do gráfico de f;

e) Trace alguns pontos específicos, tais como o máximo e o mínimo locais, os pontos de inflexão e as coordenadas das interseções com os eixos x e y. Em seguida, esboce a curva.

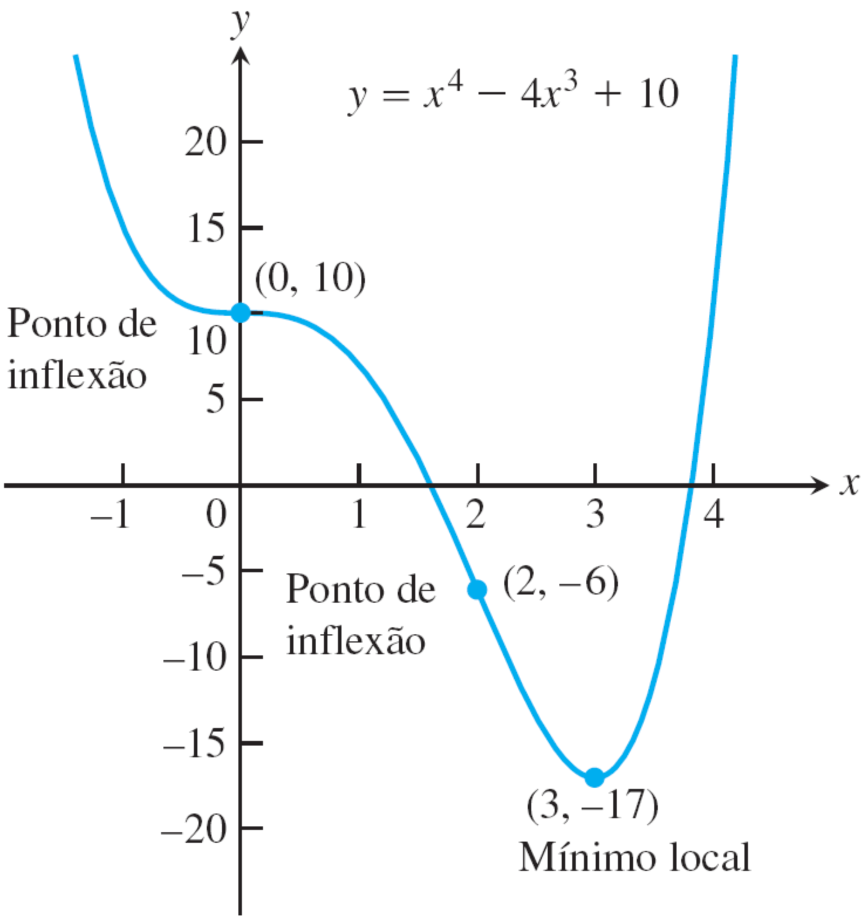


FIGURA 4.31 O gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (Exemplo 6).

Estratégia para construir o gráfico de $y = f(x)$

1. Identifique o domínio de f e quaisquer simetrias que a curva possa ter.
2. Determine y' e y''.
3. Determine os pontos críticos de f e identifique o comportamento da função em cada um deles.
4. Determine a subida e a descida da curva.
5. Determine os pontos de inflexão, caso haja algum, e a concavidade da curva.
6. Identifique todas as assíntotas.
7. Trace os pontos mais importantes, tais como os pontos de interseção com os eixos e aqueles encontrados nos passos 3 a 5; em seguida, esboce a curva.

Usando a estratégia de construção de gráficos

- Exemplo 7: Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

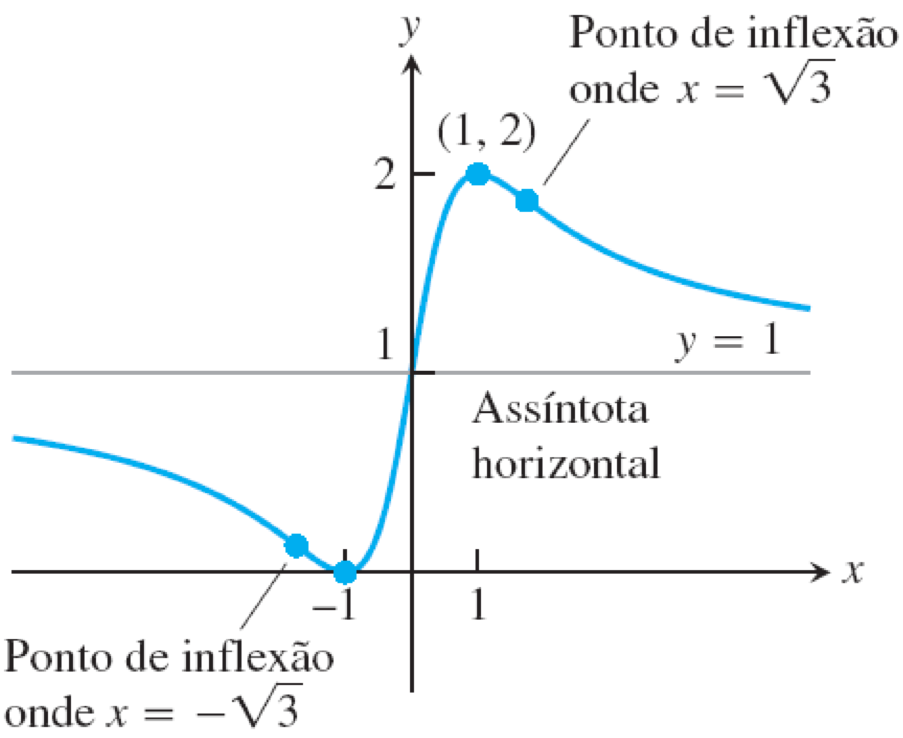


FIGURA 4.32 O gráfico de

$$y = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$ (Exemplo 7).

Esboçando um gráfico

- Exemplo 8: Esboce o gráfico de $f(x) = e^{2/x}$.

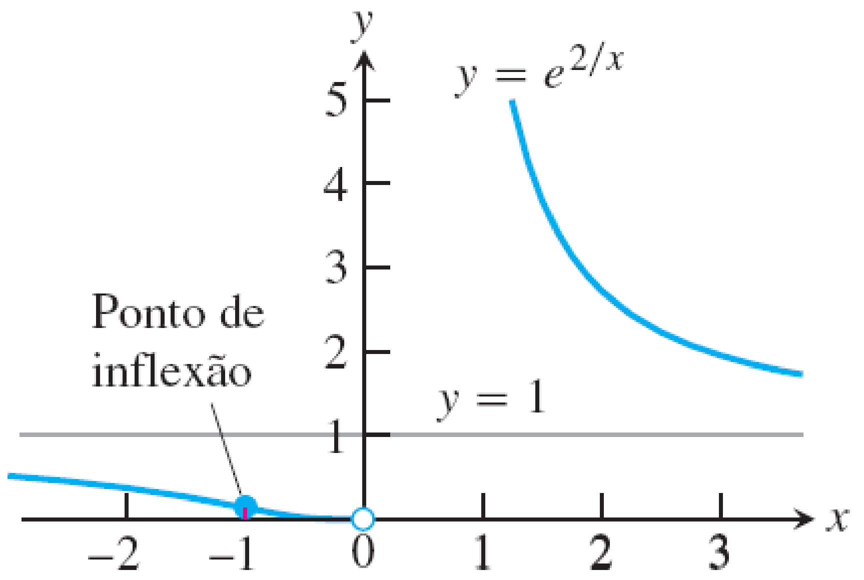
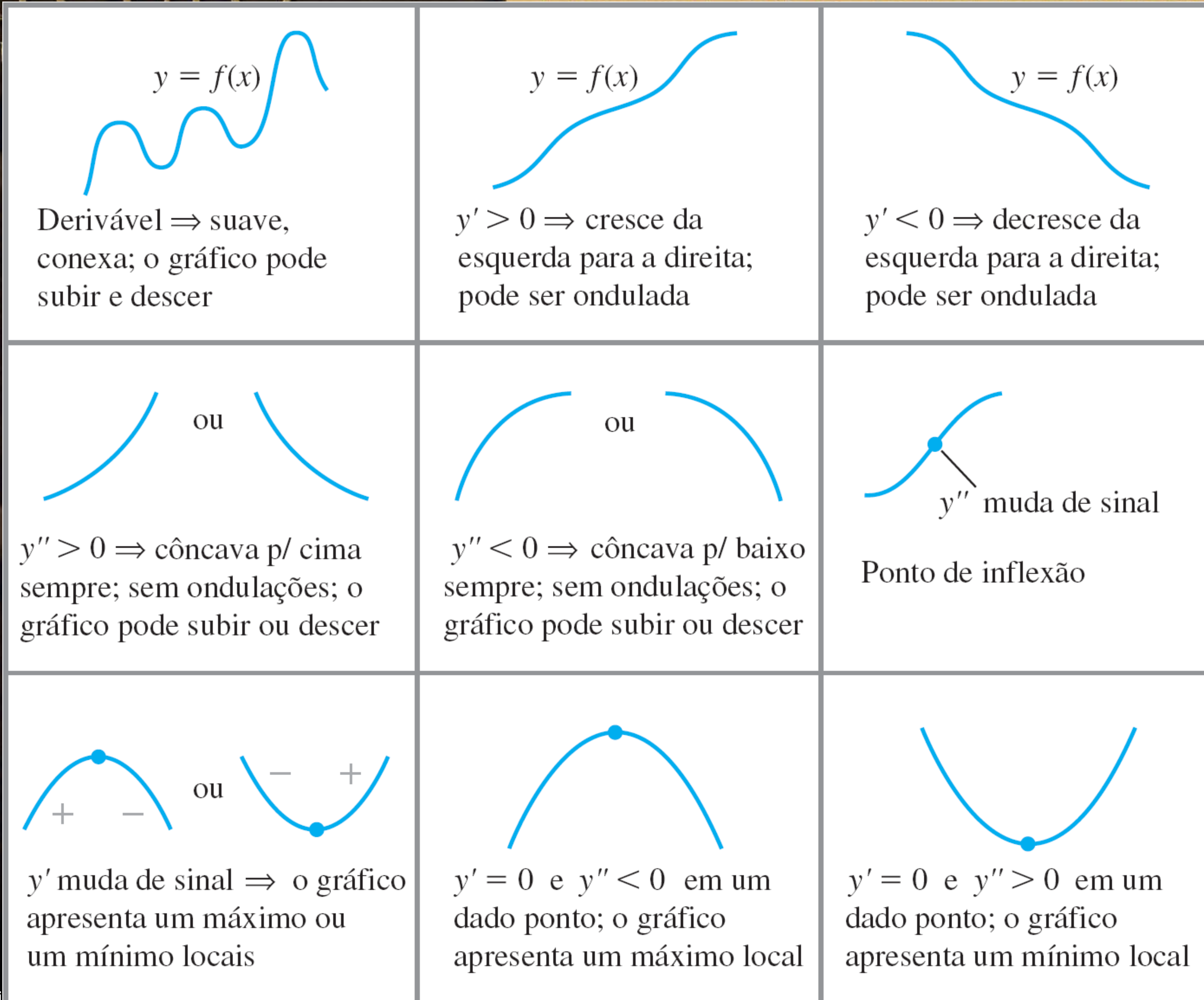


FIGURA 4.33 O gráfico de $y = e^{2/x}$ apresenta um ponto de inflexão em $(-1, e^{-2})$. A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal e $x = 0$ é uma assíntota vertical (Exemplo 8).


$y = f(x)$
Derivável ⇒ suave, conexa; o gráfico pode subir e descer
$y = f(x)$
$y' > 0$ ⇒ cresce da esquerda para a direita; pode ser ondulada
$y = f(x)$
$y' < 0$ ⇒ decresce da esquerda para a direita; pode ser ondulada
ou
$y'' > 0$ ⇒ côncava p/ cima sempre; sem ondulações; o gráfico pode subir ou descer
ou
$y'' < 0$ ⇒ côncava p/ baixo sempre; sem ondulações; o gráfico pode subir ou descer
y'' muda de sinal
Ponto de inflexão
+
−
ou
−
+
y' muda de sinal ⇒ o gráfico apresenta um máximo ou um mínimo locais
$y' = 0$ e $y'' < 0$ em um dado ponto; o gráfico apresenta um máximo local
$y' = 0$ e $y'' > 0$ em um dado ponto; o gráfico apresenta um mínimo local

Seção 4.5 – Problemas de Otimização Aplicada

Confeccionado uma caixa

- Exemplo 1: Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 x 12 pol e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima?

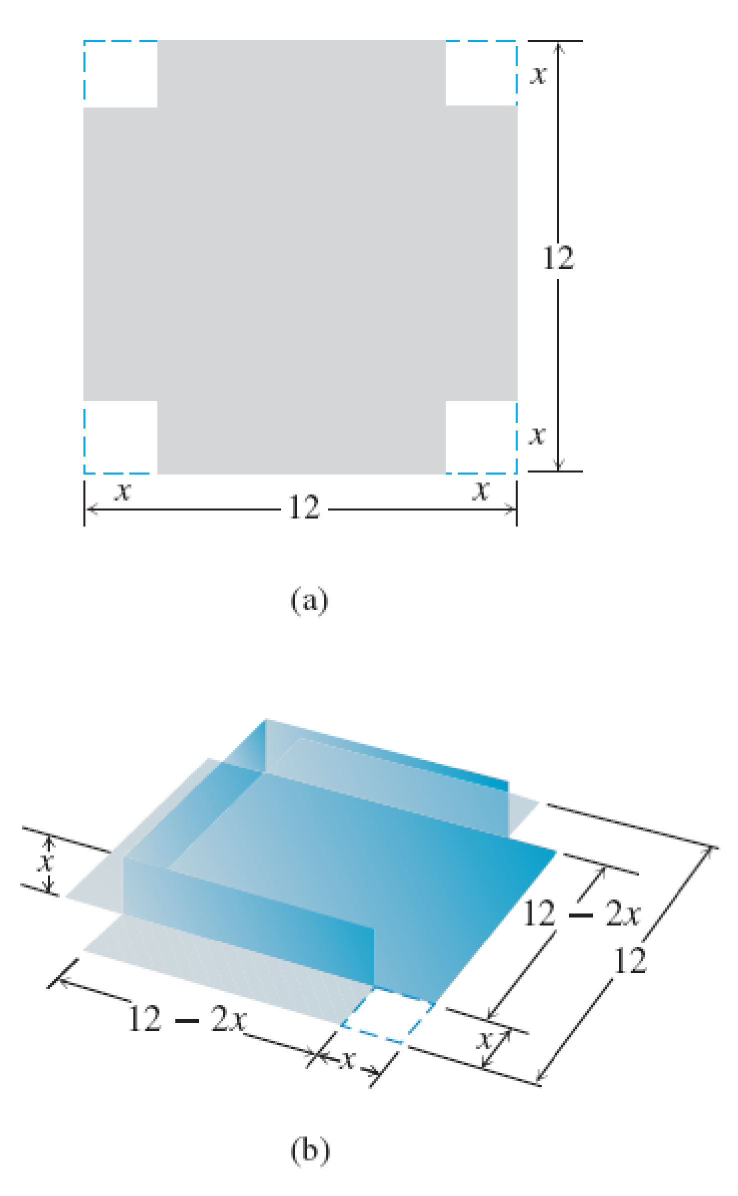


FIGURA 4.34 Uma caixa sem tampa feita recortando-se os cantos de uma chapa quadrada de estanho. Que tamanho dos quadrados das bordas maximiza o volume da caixa (Exemplo 1)?

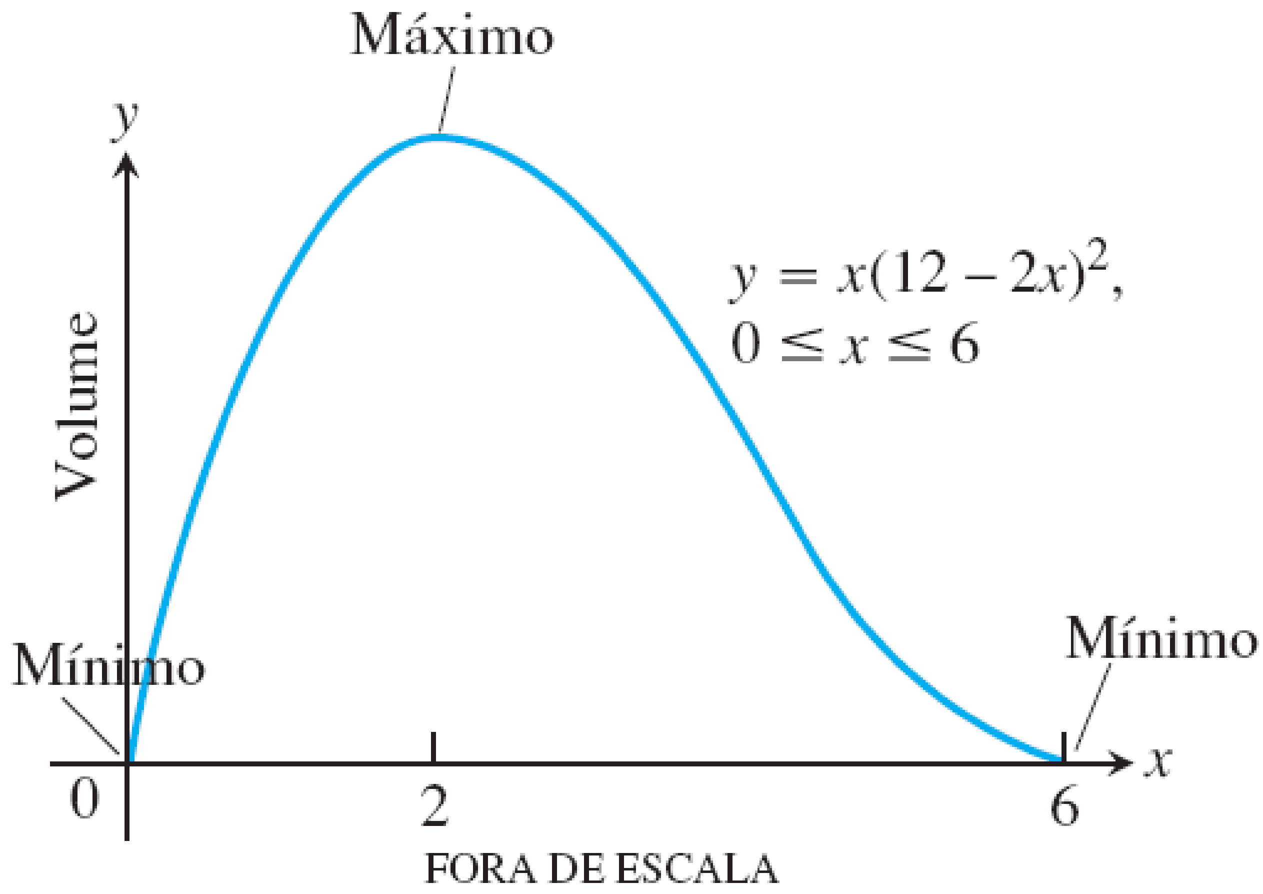


FIGURA 4.35 O volume da caixa da Figura 4.34 traçado em função de x.

Projetando uma lata cilíndrica

- Exemplo 2: Pediram a você que projetasse uma lata de um litro com a forma de um cilindro reto (Figura 4.36). Que dimensões exigirão menos material?

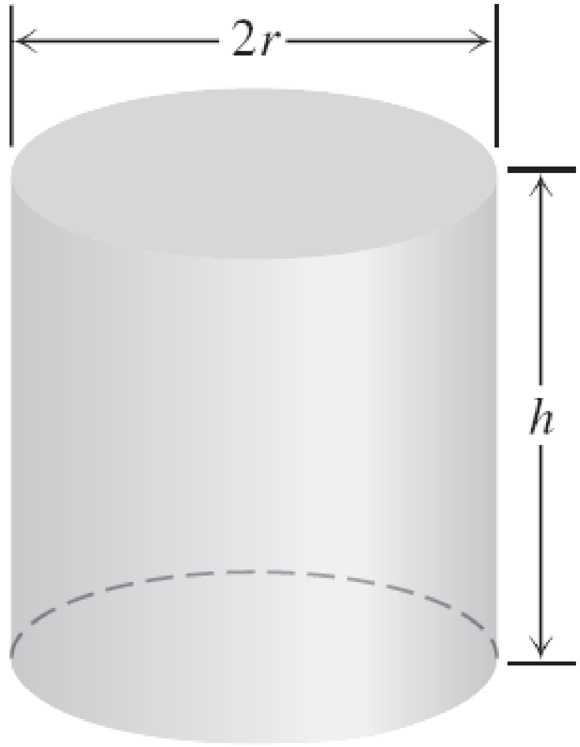


FIGURA 4.36 Esta lata de 1 l pode utilizar menos material para ser produzida quando $h = 2r$ (Exemplo 2).

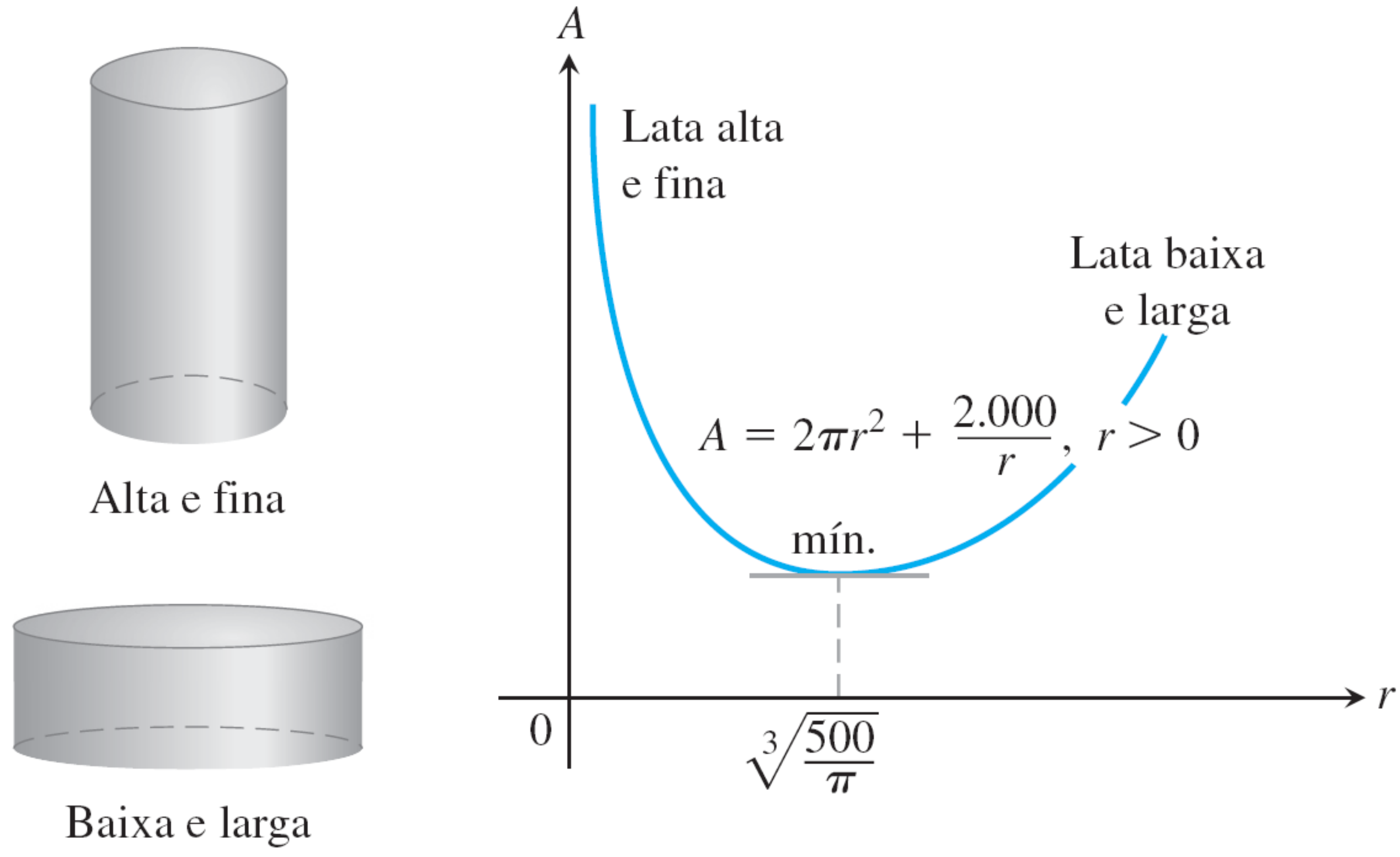


FIGURA 4.37 O gráfico de $A = 2\pi r^2 + 2.000/r$ é côncavo para cima.

Resolvendo problemas de otimização aplicada

1. *Leia o problema.* Leia o problema até compreendê-lo. Quais informações são fornecidas? Qual é a quantidade desconhecida a ser otimizada?
2. *Faça um desenho.* Indique todas as partes que possam ser importantes para o problema.
3. *Introduza variáveis.* Represente todas as relações no desenho e no problema como uma equação ou expressão algébrica; identifique a variável desconhecida.
4. *Escreva uma equação para a quantidade desconhecida.* Se possível, expresse a quantidade desconhecida em função de uma única variável, ou em duas equações em duas desconhecidas. Isso pode exigir certa manipulação.
5. *Teste os pontos críticos e as extremidades no domínio da quantidade desconhecida.* Utilize o que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função. Use a primeira e a segunda derivadas para identificar e classificar pontos críticos da função.

Inscrevendo retângulos

- Exemplo 3: Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais são suas dimensões?

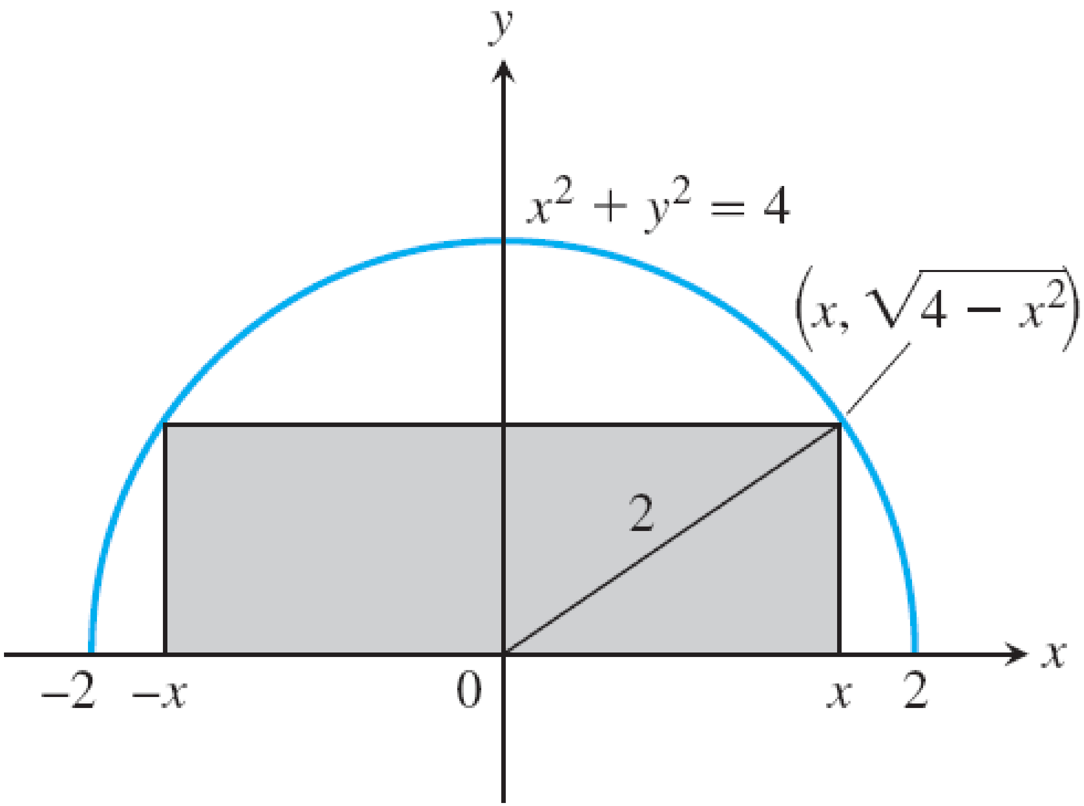


FIGURA 4.38 O retângulo do Exemplo 3 inscrito na semicircunferência.

Seção 4.6 – Formas Indeterminadas e a Regra de L'Hôpital

Teorema 7 **Regra de L'Hôpital (forma mais forte)**

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

- Exemplo 2: Calcule:

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2};$$

$$b)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}.$$

Usando a regra de L'Hôpital

Para determinar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

pela regra de L'Hôpital, continuamos derivando f e g até obter a forma 0/0 em $x = a$. Mas, assim que uma ou outra dessas derivadas for diferente de zero em $x = 0$, paramos de derivar. A regra de L'Hôpital não se aplica quando o numerador ou o denominador apresentam um limite finito diferente de zero.

Aplicando a Regra incorretamente

- Exemplo 3: Aplique a Regra 2 vezes e veja que o cálculo do limite abaixo fica incorreto.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$$

Usando a regra para limites laterais

- Exemplo 4: Calcule $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x^2}$;

Trabalhando com a forma indeterminada $+\infty/+\infty$

- Exemplo 5: Encontre:

$$a)\ \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x};$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}};$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Os itens b) e c) ficam como exercício.

Trabalhando com a forma indeterminada $+\infty \cdot 0$

- Exemplo 6: Encontre:

$$a)\ \lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right);$$

$$b)\ \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \ln x).$$

Trabalhando com a forma indeterminada $+\infty - \infty$

- Exemplo 7: Encontre

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$$

Se $\lim_{x \to a} \ln f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)} = e^{L}$$

Aqui a pode ser finito ou infinito.

Trabalhando com as formas indeterminadas 1^∞ e $+\infty^0$

- Exemplo 8: Mostre que $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$.
- Exemplo 9: Determine $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$.