



Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte
Campus de Natal

Lista de Cálculo 1: Integral Definida

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal
Novembro de 2022

Sumário

| | | |
|---|-----------------------------------|---|
| 1 | 1º Teorema Fundamental do Cálculo | 2 |
| 2 | Cálculo de áreas | 6 |

1 1^o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \, dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 7. Calcule $\int_0^1 e^{-x} \, dx$.

Solução

$$\int_0^1 e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 11.5 =====

Calcule.

1. $\int_0^1 (x + 3) \, dx$

2. $\int_{-1}^1 (2x + 1) \, dx$

3. $\int_0^4 \frac{1}{2} \, dx$

4. $\int_{-2}^1 (x^2 - 1) \, dx$

5. $\int_1^3 dx$

6. $\int_{-1}^2 4 \, dx$

7. $\int_1^3 \frac{1}{x^3} \, dx$

8. $\int_{-1}^1 5 \, dx$

9. $\int_0^2 (x^2 + 3x - 3) \, dx$

10. $\int_0^1 \left(5x^3 - \frac{1}{2} \right) dx$

11. $\int_1^1 (2x + 3) \, dx$

12. $\int_1^0 (2x + 3) \, dx$

$$13. \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx$$

$$14. \int_0^4 \sqrt{x} \, dx$$

$$15. \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$16. \int_0^8 \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$17. \int_{-1}^0 (x^3 - 2x + 3) \, dx$$

$$18. \int_0^1 \sqrt[8]{x} \, dx$$

$$19. \int_1^2 \left(x^3 + x + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$20. \int_0^1 (x + \sqrt[4]{x}) \, dx$$

$$21. \int_1^3 \left(5 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$22. \int_{-3}^3 x^3 \, dx$$

$$23. \int_{-1}^1 (x^7 + x^3 + x) \, dx$$

$$24. \int_{\frac{1}{2}}^1 (x + 3) \, dx$$

$$25. \int_1^4 (5x + \sqrt{x}) \, dx$$

$$26. \int_1^0 (x^7 - x + 3) \, dx$$

$$27. \int_1^2 \frac{1+x}{x^3} \, dx$$

$$28. \int_0^1 (x+1)^2 \, dx$$

$$29. \int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$30. \int_0^1 (x-3)^2 \, dx$$

$$31. \int_0^2 (t^2 + 3t - 1) \, dt$$

$$32. \int_1^2 \frac{1+t^2}{t^4} \, dt$$

$$33. \int_{\frac{1}{2}}^1 (s+2) \, ds$$

$$34. \int_0^3 (u^2 - 2u + 3) \, du$$

$$35. \int_1^2 (s^2 + 3s + 1) \, ds$$

$$36. \int_{-1}^1 \sqrt[3]{t} \, dt$$

$$37. \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$38. \int_1^2 \frac{1+3x^2}{x} \, dx$$

$$39. \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

$$40. \int_{-\pi}^0 \sin 3x \, dx$$

$$41. \int_{-1}^1 e^{2x} \, dx$$

$$42. \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$43. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$$

$$44. \int_{-1}^0 e^{-2x} \, dx$$

$$45. \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 + \cos 3x) \, dx$$

$$46. \int_0^1 \sin 5x \, dx$$

$$47. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$48. \int_0^2 2^x \, dx$$

$$49. \int_0^1 2x e^{x^2} \, dx$$

$$50. \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$51. \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$$

$$52. \int_{-1}^1 x^3 e^{x^4} \, dx$$

$$53. \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \sin 2x) \, dx$$

$$54. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx$$

$$55. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \left(\text{Sugestão: Verifique que } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \right)$$

$$56. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$57. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$$

$$58. \int_0^1 3^x \, dx$$

$$59. \int_0^1 3^x e^x \, dx$$

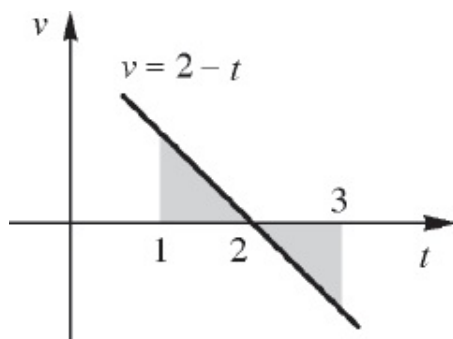
$$60. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

11.6. CÁLCULO DE ÁREAS

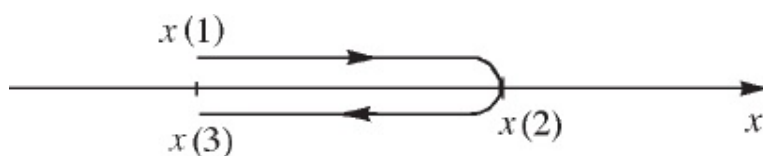
Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Estamos interessados em definir a *área* do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

2 Cálculo de áreas

$$a) x(3) - x(1) = \int_1^3 (2 - t) dt = \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^3 = 0.$$



Em $[1, 2[$, $v(t) > 0$, o que significa que no intervalo de tempo $[1, 2]$ a partícula avança no sentido positivo; em $]2, 3]$, $v(t) < 0$, o que significa que neste intervalo de tempo a partícula recua, de tal modo que no instante $t = 3$ ela volta a ocupar a mesma posição por ela ocupada no instante $t = 1$.



b) O espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$ é

$$\int_1^3 |2 - t| dt = \int_1^2 (2 - t) dt - \int_2^3 (2 - t) dt = 1.$$

Observe que o espaço percorrido entre os instantes 1 e 2 é

$$\int_1^2 (2 - t) dt = \frac{1}{2}$$

e que o espaço percorrido entre os instantes 2 e 3 é

$$\int_2^3 |2 - t| dt = -\int_2^3 (2 - t) dt = \frac{1}{2}.$$

■

Exercícios 11.6

Nos Exercícios de 1 a 22, desenhe o conjunto A dado e calcule a área.

1. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo Ox e pelo gráfico de $y = x^3$.
2. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
3. A é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 - 1 \leq y \leq 0$.
4. A é o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq y \leq 4 - x^2$.
5. A é o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq y \leq |\sin x|$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.
6. A é a região do plano compreendida entre o eixo Ox e o gráfico de $y = x^2 - x$, com $0 \leq x \leq 2$.
7. A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, com $-1 \leq x \leq 2$.
8. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.
9. A é o conjunto do plano limitado pelo eixo Ox , pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $-1 \leq x \leq 1$.
10. A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, com $0 \leq x \leq 2$.
11. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \cos x$.
12. A é o conjunto de todos (x, y) tais que $x \geq 0$ e $x^3 \leq y \leq x$.
13. A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = x$, pelo gráfico de $y = x^3$, com $-1 \leq x \leq 1$.
14. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$.
15. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$.
16. A é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 + 1 \leq y \leq x + 1$.
17. A é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 - 1 \leq y \leq x + 1$.

18. A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$.
19. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x \}$.
20. A é o conjunto do plano limitado pelos gráficos de $y = x^3 - x$, $y = \sin \pi x$, com $-1 \leq x \leq 1$.
21. A é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \geq 0$ e $-x \leq y \leq x \leq x^2$
22. A é o conjunto de todos (x, y) tais que $x > 0$ e $\frac{1}{x^2} \leq y \leq 5 - 4x^2$.
23. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.
- Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.
 - Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?
 - Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$
24. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = \sin 2t$, $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.
25. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
26. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \geq 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

11.7. MUDANÇA DE VARIÁVEL NA INTEGRAL

Veremos, no Vol. 2, que toda *função contínua* num intervalo I admite, neste intervalo, uma primitiva. Por ora, vamos admitir tal resultado e usá-lo na demonstração do próximo teorema.

Teorema. Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I . Seja $g : [c, d] \rightarrow I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du.$$