Capítulo 5

Matemática Elementar
Funções

23 de abril de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?
Elas são bijetivas?

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?
Elas são bijetivas?
Caso você precise de um conceito mais básico de função, sugiro ver o material de `funções` no Khan Academy.

O que É uma Função?

Definição 1

Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer.
Uma função é uma relação $f : X \to Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$.
Nesse caso:

(i) Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f, respectivamente;

(ii) O conjunto $f(X) = \{y \in Y\ ;\ \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ é chamado imagem de f;

(iii) Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de x.

O que É uma Função?

Dessa forma, uma função é um terno constituído por: domínio, contradomínio e lei de associação (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisamos desses três elementos para que uma função seja bem definida. Poderíamos definir função da seguinte forma:

Para que uma relação $f : X \to Y$ seja uma função, ela deve satisfazer a duas condições fundamentais:

(I) Estar bem definida em todo elemento do domínio (existência);

(II) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

Exemplo 2

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q?

O que É uma Função?

Exemplo 2

Considere as funções

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q?

Exemplo 3

Seja $\mathcal{I}_X : X \to X$ uma função tal que $\mathcal{I}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Chamamos $\mathcal{I}_X$ de função identidade do conjunto X.

Composição de Funções

Definição 4

Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções, com $Y \subset U$. A função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} X & \to & Y \subset U & \to & V \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Exemplo 5

Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Exemplo 5

Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Exemplo 6

Qual função resulta da composição $p \circ q$?

Atividade Online

`Atividade 01 - Encontre Funções Compostas`
`Atividade 02 - Modele com Funções Compostas`

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Função Inversa

Definição 7

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que

(i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$;

(ii) $g \circ f = \mathcal{I}_X$.

Nesse caso, a função g é dita função inversa de f e denotada por $g = f^{-1}$.

Exemplo 8

A função q é inversa de p?

Exemplo 8

A função q é inversa de p?

Esse exemplo ilustra a importância de verificarmos as duas condições para que tenhamos uma função inversa.

Atividade Online

`Atividade 03 - Verifique Funções Inversas`

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Definição 9

Considere uma função $f : X \to Y$.

(i) f é <u>sobrejetiva</u> se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é <u>injetiva</u> se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é <u>bijetiva</u> se é sobrejetiva e injetiva.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Definição 9

Considere uma função $f : X \to Y$.

(i) f é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é injetiva se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Há, ainda, formas alternativas de enunciar as definições acima:

- f é sobrejetiva se, e somente se, $f(X) = Y$;
- f é injetiva se, e somente se, $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;
- f é injetiva se, e somente se, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- f é bijetiva se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Exemplo 10

As funções p e q são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas?

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Teorema 11

Uma função $f : X \to Y$ *é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

Teorema 11

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Exemplo 12

Decorre do Teorema 11 e do Exemplo 10 que as funções p e q não são invertíveis.

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula. Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Essas funções são iguais?

Fórmulas e Funções

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula. Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Essas funções são iguais?
NÃO! Note que p_2 é bijetiva e p_1 não é, mesmo tendo a mesma fórmula.
Além disso, funções podem ser definidas por mais de uma fórmula, como na função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Definição 13

Dois conjuntos X e Y são ditos cardinalmente equivalentes (ou equipotentes) se existe uma bijeção $f : X \to Y$.

Definição 14

Dizemos que um conjunto X é enumerável se X é um conjunto cardinalmente equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ ou a algum dos seus subconjuntos.

Teorema 15

Se existe uma injeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre X e um subconjunto $Y' \subset Y$, isto é, X é cardinalmente equivalente a um subconjunto de Y.

Teorema 15

Se existe uma injeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre X e um subconjunto $Y' \subset Y$, isto é, X é cardinalmente equivalente a um subconjunto de Y.

Teorema 16

Se existe uma sobrejeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre Y e um subconjunto $X' \subset X$, isto é, Y é cardinalmente equivalente a um subconjunto de X.

Exemplo 17

O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Atividade Online

Atividade 04 – Determine se uma Função É Inversível
Atividade 05 – Restrinja os Domínios de Funções para Torná-las Inversíveis
Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Exercícios

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

(a) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;

(b) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;

(c) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;

(d) Que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;

(e) Que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;

(f) Que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;

(g) Que a cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa seu valor no ponto $x_0 = 0$.

2. Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

Mostre que f é bijetiva. O que você pode concluir com esse resultado?

3. Mostre que a função inversa de $f : X \to Y$, caso exista, é única, isto é, se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ satisfazendo a Definição 7, então $g_1 = g_2$.

Dica: Lembre-se que duas funções são iguais se, e só se, possuem mesmos domínios, contradomínios e seus valores são iguais em todos os elementos do domínio. Assim, procure mostrar que $g_1(y) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função e seja A um subconjunto de X. Define-se

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\} \subset Y.$$

Se A e B são subconjuntos de X:

(a) Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(b) Mostre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

(c) É possível afirmar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subset X$? Justifique.

(d) Determine que condições deve satisfazer f para que a afirmação feita no item (c) seja verdadeira.

5. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $y \in Y$, definimos a contraimagem ou imagem inversa de y como sendo o seguinte subconjunto de X:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \; ; \; f(x) = y\} \, .$$

(a) Se f é injetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

(b) Se f é sobrejetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

(c) Se f é bijetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

6. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $A \subset Y$, definimos a contraimagem ou imagem inversa de A como sendo o seguinte subconjunto de X:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \; ; \; f(x) \in A\} \, .$$

Mostre que

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercícios - Desafios

7. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que, se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ tais que $f \circ g_1 = \mathcal{I}_Y$ e $g_2 \circ f = \mathcal{I}_X$, então $g_1 = g_2$ (portanto, neste caso, f será invertível).

8. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, para todo $B \subset Y$;

(b) $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset Y$ se, e somente se, f é sobrejetiva.

9. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f(f^{-1}(A)) \supset A$, para todo $A \subset X$;

(b) $f(f^{-1}(A)) = A$, para todo $A \subset X$ se, e somente se, f é injetiva.

10. Mostre que existe uma injeção $f : X \to Y$ se, e somente se, existe uma sobrejeção $g : Y \to X$.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L.
Números e Funções Reais.
1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] IEZZI, Gelson; et al.
Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 - Conjuntos e Funções.
São Paulo: Editora Atual.