Integral Definida

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de Integral Indefinida

Nestes slides introduziremos o conceito de integral de Riemann e estudaremos algumas de suas propriedades. A integral tem muitas aplicações tanto na geometria (cálculo de áreas, comprimento de arco, etc.) como na física (cálculo de trabalho, de massa etc), como veremos.

Uma partição P de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Uma partição P de $[a, b]$ divide $[a, b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

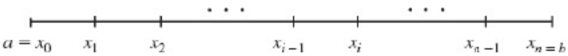


Figura 1: Partição P do intervalo $[a, b]$.

A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Assim:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ \text{etc.} \tag{1}$$

Os números $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se amplitude da partição P e indica-se por *máx* Δx_i.

Soma de Riemann

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e
$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente.

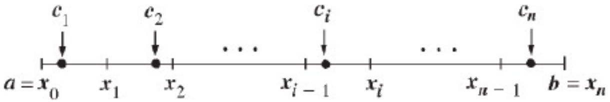


Figura 2: Partição P do intervalo $[a, b]$.

Pois bem, o número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 \ldots f(c_n)\Delta x_n \qquad (2)$$

denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Observe que, se $f(c_i) > 0$, $f(c_i)\Delta x_i$ será então a área do retângulo R_i determinado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$; se $f(c_i) < 0$, a área de tal retângulo será $-f(c_i)\Delta x_i$.

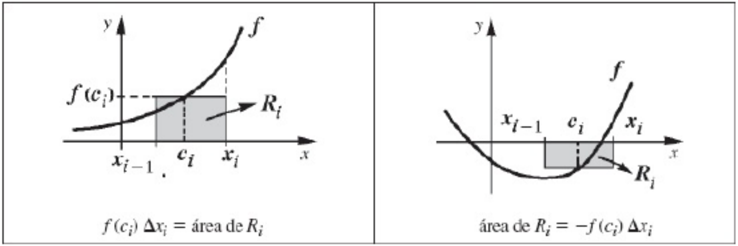


Figura 3: Interpretação geométrica da soma de Riemann.

Diferença entre áreas

Geometricamente, podemos então interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{3}$$

como a diferença entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x.

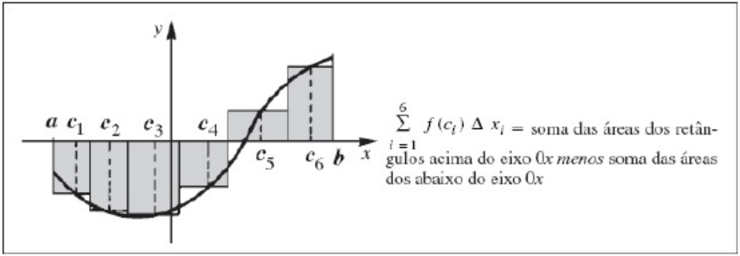


Figura 4: Interpretação geométrica da soma de Riemann.

Diferença $F(b) - F(a)$

Seja F uma função definida em $[a, b]$ e seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. O acréscimo $F(b) - F(a)$ que a F sofre quando se passa de $x = a$ para $x = b$ é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ para i variando de 1 a 4:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] \\ + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)] \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \,. \tag{5}$$

Exemplo

Example

Sejam F e f definidas em $[a, b]$ e tais que $F' = f$ em $[a, b]$; assim F é uma primitiva de f em $[a, b]$. Seja a partição
$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$. Prove que escolhendo convenientemente $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tem-se

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i. \tag{6}$$

Integral definida

Suponhamos, no exemplo anterior, que f seja contínua em $[a, b]$ e que os Δx_i sejam suficientemente pequenos; assim, para qualquer escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, $f(c_i)$ deve diferir muito pouco de $f(\bar{c}_i)$. É razoável, então, que nestas condições $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ seja uma boa avaliação para o acréscimo $F(b) - F(a)$, isto é:

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{7}$$

É razoável, ainda, esperar que a aproximação acima será tanto melhor quanto menores forem os Δx_i. Veremos mais adiante que, no caso de f ser contínua em $[a, b]$,

$$F(b) - F(a) = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{8}$$

em que *máx* Δx_i indica o maior número do conjunto $\{\Delta x_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Observe que *máx* $\Delta x_i \to 0$ implica que todos os Δx_i tendem também a zero.

Vejamos uma versão cinemática do que dissemos anteriormente.

Consideremos uma partícula deslocando-se sobre o eixo $0x$ com função de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Observe que $x = x(t)$ é uma primitiva de $v = v(t)$. Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e suponhamos *máx* Δt_i suficientemente pequeno (o que implica que todos os Δt_i são suficientemente pequenos). Sendo c_i um instante qualquer entre t_{i-1} e t_i, a velocidade $v(c_i)$ é um valor aproximado para a velocidade média entre os instantes t_{i-1} e t_i:

$$v(c_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \text{ ou } \Delta x_i \approx v(c_i)\Delta t_i \tag{9}$$

(observe que, pelo TVM, existe um instante $\bar{c}_i$ entre t_{i-1} e t_i) tal que $\Delta x_i = v(\bar{c}_i)\Delta t_i$, onde Δx_i é o deslocamento da partícula entre os instantes t_{i-1} e t_i. Como a soma dos deslocamentos Δx_i, para i variando de 1 a n, é igual ao deslocamento $x(b) - x(b)$, resulta

$$x(b) - x(a) \approx \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i. \tag{10}$$

É razoável esperar que, à medida que as amplitudes Δt_i tendam a zero, a soma $\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ tende a $x(b) - x(a)$:

$$x(b) - x(a) = \lim_{máx\ \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i. \tag{11}$$

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando $máx\ \Delta x_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L \tag{12}$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L| < \epsilon \tag{13}$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $máx\ \Delta x_i < \delta$.

Integral de Riemann

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{14}$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$. É comum referirmo-nos a $\int_a^b f(x)dx$ como integral definida de f em $[a, b]$.

Propriedades da integral

Theorem

Sejam f, g *integráveis em* $[a,b]$ *e* κ *uma constante. Então*

a) $f+g$ *é integrável em* $[a,b]$ *e* $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

b) κf *é integrável em* $[a,b]$ *e* $\int_a^b \kappa f(x)dx = \kappa \int_a^b f(x)dx.$

c) *Se* $f(x) \geq 0$ *em* $[a,b]$, *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

d) *Se* $c \in]a,b[$ *e* f *é integrável em* $[a,c]$ *e em* $[c,b]$ *então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{15}$$

De acordo com a definição de integral, se f for integrável em $[a, b]$, o valor do limite

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{16}$$

será sempre o mesmo, independentemente da escolha dos c_i, e igual a $\int_a^b f(x)dx$. Assim, se, para uma particular escolha dos c_i, tivermos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L \tag{17}$$

então teremos $L = \int_a^b f(x)dx$.

Suponhamos, agora, que f seja integrável em $[a, b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Já vimos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right]. \tag{18}$$

Segue, então do TVM, que, para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i) \Delta x_i \tag{19}$$

ou

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i) \Delta x_i. \tag{20}$$

Se, para cada partição P de $[a,b]$, os $\bar{c}_i$ forem escolhidos como em (20), teremos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i = F(b) - F(a) \tag{21}$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{22}$$

Fica provado assim o

Theorem

1^o teorema fundamental do cálculo Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{23}$$

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^2 x^2 dx$.

Example

Calcule $\int_{-1}^3 4dx$.

Example

Calcule $\int_0^2 \left(x^3 + 3x - 1\right) dx$.

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Example

Calcule $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

Example

Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx$.

Example

Calcule $\int_0^1 e^{-x} dx$.

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

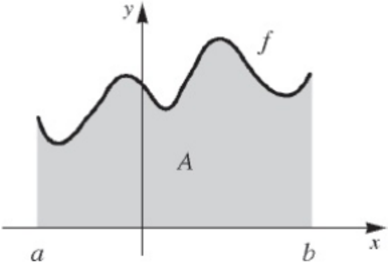


Figura 5: Área abaixo do gráfico de $y = f(x)$.

Seja, então, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Uma boa definição para área de A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i$ seja uma aproximação por falta da área de A e que $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_i)\Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_i)\Delta x_i \tag{24}$$

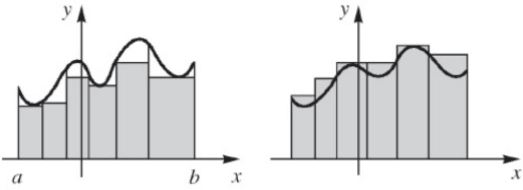


Figura 6: Área abaixo do gráfico de $y = f(x)$.

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$ quando *máx* $\Delta x_i \to 0$, nada mais natural do que definir a área de A por

$$\boxed{\text{área } A = \int_a^b f(x)dx} \tag{25}$$

Da mesma forma define-se área de A no caso em que f é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Exemplos

Example

Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Example

Calcule a área do conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\}$.

Estenção do conceito de área

As situações que apresentamos a seguir sugerem como estender o conceito de área para uma classe mais ampla de subconjuntos do $\mathbb{R}^{\nvDash}$.

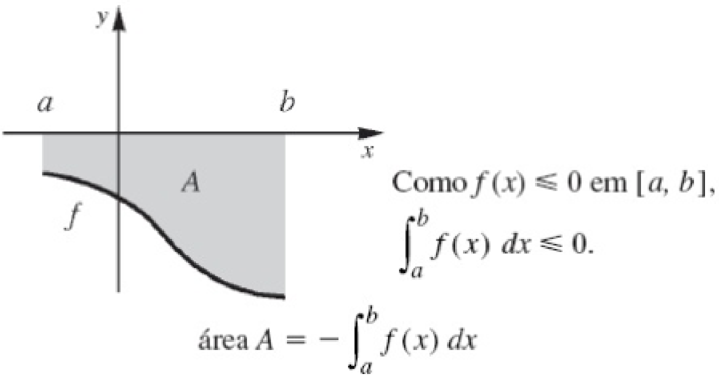
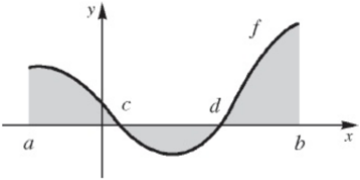


Figura 7: Cálculo da área para quando $f(x) \leq 0$.



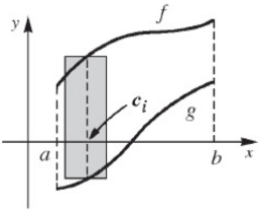
Seja A o conjunto hachurado.

$$\text{Área} = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Observe:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$ = soma das áreas dos conjuntos acima do eixo $0x$ *menos* soma das áreas dos conjuntos abaixo do eixo $0x$.

Figura 8: Cálculo da área para quando $f(x) \leq 0$ e $f(x) \geq 0$.



$[f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x_i$ = área retângulo hachurado.

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x_i = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área } A$$

em que A é o conjunto limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$.

Figura 9: Cálculo da área entre dois gráficos.

Exemplos

Example

Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

Example

Calcule $\int_{-1}^{1} x^3 dx$

Example

Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

Example

Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Example

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

Aplicação na cinemática

Consideremos, agora, uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. A diferença $x(b) = x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes a e b. Como $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$, segue do 1.^{o} teorema fundamental do cálculo que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt. \tag{26}$$

Por outro lado, definimos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes a e b por $\int_a^b |v(t)|dt$.
Se $v(t) \geq 0$ em $[a, b]$, o deslocamento entre os instantes a e b será igual ao espaço percorrido entre estes instantes, que, por sua vez, será numericamente igual à área do conjunto A limitado pelas retas $t = a$, $t = b$, pelo eixot Ot e pelo gráfico de $v = v(t)$.

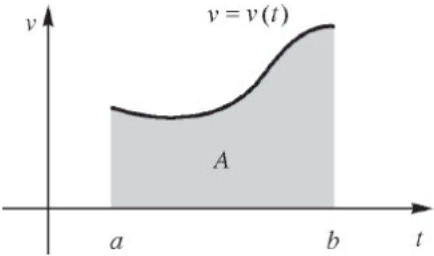


Figura 10: Cálculo do deslocamento.

Suponhamos, agora, por exemplo, que $v(t) \geq 0$ em $[a, c]$ e $v(t) \leq 0$ em $[c, b]$.

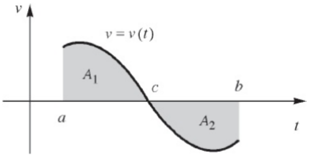


Figura 11: Cálculo do deslocamento.

Neste caso, o deslocamento entre os instantes a e b será

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt = \text{área } A_1 - \text{área } A_2 \tag{27}$$

enquanto o espaço percorrido entre estes instantes será

$$\int_a^b |v(t)|dt = \int_a^c v(t)dt - \int_c^b v(t)dt = \text{área } A_1 + \text{área } A_2. \tag{28}$$

Example

Uma partícula desloca-se sobre o eixto x com velocidade $v(t) = 2 - t$.

a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Discuta o resultado encontrado.

b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3.

Theorem

Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I. Seja $g : [c,d] \to I$, com g' contínua em $[c,d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\left(g(u)\right)g'(u)du. \tag{29}$$

Exemplos

Example

Calcule $\int_0^1 (x-1)^{10}\, dx$

Example

Calcule $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1}\mathrm{dx}$.

Example

Calcule $\int_0^1 e^{3x} dx$.

Example

Calcule $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$.

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$.

Example

Seja f uma função ímpar e contínua em $[-r, r]$, $r > 0$. Mostre que

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0. \tag{30}$$

Example

Calcule $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^4+3}dx$.

Exemplos

Example

Calcule $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{x+1}dx$.

Primitivas imediatas

Sejam $\alpha \neq 0$ e c constantes reais. Ds fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes de primitivação:

a) $\int c dx = cx + \kappa$

b) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \kappa \;\; (\alpha \neq -1)$

c) $\int e^x dx = e^x + \kappa$

d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \kappa \; (x > 0)$

e) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + \kappa \; (x < 0)$

f) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + \kappa$

g) $\int \cos x dx = \sin x + \kappa$

h) $\int \sin x dx = -\cos x + \kappa$

i) $\int \sec^2 x dx = \tan x + \kappa$

j) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + \kappa$

l) $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + \kappa$

m) $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + \kappa$

n) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + \kappa$

o) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + \kappa$

Exemplos

Example

a) $\int x^2 dx$ b) $\int dx$ c) $\int \cos x dx$

Lembramos que o domínio da função que ocorre no integrando de $\int f(x)\, dx$ deve ser sempre um intervalo; quando nada for mencionado a respeito do domínio de f, ficará implícito que se trata de um intervalo.

Example

Calcule.

a) $(\ln|x|)'$

b) $\int \frac{1}{x} dx \ (x > 0)$

c) $\int \frac{1}{x} dx \ (x < 0)$

d) $\int \frac{1}{x} dx$

Exemplos

Example

Seja $\alpha \neq 0$ uma constante. Calcule

$$\int x^{\alpha} dx. \tag{31}$$

Reumo dos exemplos

Assim:

$$\boxed{\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \kappa \text{ se } \alpha \neq -1 \\ \\ \ln|x| + \kappa \text{ se } \alpha = -1 \end{cases}} \tag{32}$$

Exemplos

Example

Calcule.

a) $\int x\sqrt{x}dx$

b) $\int \frac{x^3+1}{x}dx$

c) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Example

Calcule.

Example

Verifique que

$$\int \tan x dx = -\ln|x| + \kappa. \tag{33}$$

Example

Seja $\alpha \neq 0$ uma constante. Verifique que

a) $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + \kappa$

b) $\int \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + \kappa$

Example

Calcule.

a) $\int e^{2x} dx$

b) $\int \cos(3x)\, dx$

c) $\int \sin 5x dx$

d) $\int e^{-x} dx$

Example

Calcule $\int \cos^2 x dx$.

Técnica para calculo de integral indefinida da forma $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$

Sejam f e g tais que $Im_g \subset D_f$ com g derivável. Suponhamos que F seja uma primitiva de f, isto é, $F' = f$. Segue que $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))\, g'(x)$, de fato,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)\,. \tag{34}$$

Deste modo, de

$$\int f(u)du = F(u) + \kappa \tag{35}$$

segue

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + \kappa. \tag{36}$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = ? \\
&u = g(x); \qquad du = g' dx \\
&\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + \kappa = F(g(x)) + \kappa
\end{aligned}
}
\tag{37}
$$

Antes de passarmos aos exemplos, observamos que, tendo em vista

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \; (\alpha \text{ constante}) \tag{38}$$

resulta para $\alpha \neq 0$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{\alpha} \int \alpha f(x)dx \tag{39}$$

o que significa que, multiplicando o integrando por uma constante α e, em seguida, dividindo tudo por α, nada muda.

Exemplos

Example

Calcule $\int x \cos x^2 dx$.

Example

Calcule $\int e^{3x} dx$

Example

Calcule $\int (2x+1)^3 \, dx$

Example

Calcule $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

Exemplos

Example

Calcule $\int \frac{1}{3x+2} dx$

Example

Calcule $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

Example

Calcule $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

Example

Calcule $\int x^3\sqrt{1+x^2} dx$

Exemplos

Example

Calcule $\int \sin^3 x \cos x dx$

Example

Calcule $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Example

Calcule $\int \sin^4 x \cos^3 dx$

Example

Calcule

a) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ b) $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

Example

Calcule

a) $\int \frac{5}{4+x^2} dx$ b) $\int \frac{2}{3+2x^2} dx$

Example

Verifique que

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + \kappa \tag{40}$$

Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I. Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{41}$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x). \tag{42}$$

Supondo, então, que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx} \tag{43}$$

que é a regra de integração por partes.

Integração por partes

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra anterior na seguinte forma usual:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \tag{44}$$

Suponha, agora, que se tenha que calcular $\int \alpha(x)\beta(x)dx$. Se você perceber que, multiplicando a derivada de uma das funções do integrando por uma primitiva da outra, chegase a uma função que possui primitiva imediata, então aplique a regra de integração por partes.

Exemplos

Example

Calcule $\int x \cos x dx$.

Example

Calcule $\int \arctan x dx$

Example

Calcule $\int x^2 \sin x dx$

Example

Calcule $\int e^x \cos x dx$

Exemplos

Example

Calcule $\int \cos^2 x dx$.

Example

Calcule $\int \sec^3 x dx$.

Integral por partes na integral definida

Vejamos, agora, como fica a regra de integração por partes na integral definida (integral de Riemann). Sejam, então, f e g duas funçlões com derivadas contínuas em $[a, b[$; vamos provar que

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}. \tag{45}$$

De fato, de

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x) \text{ em } [a, b] \tag{46}$$

segue

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'\, dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{47}$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{48}$$

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^t x \ln x dx$.

Example

Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.