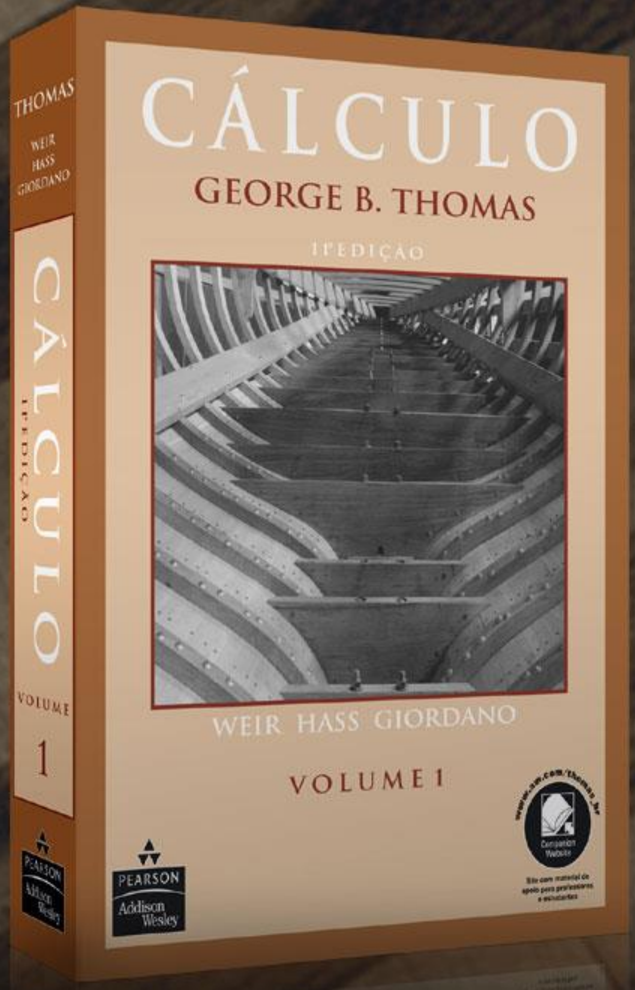
Capítulo 5

Integração



Seção 5.1 – Estimando Com Somas Finitas

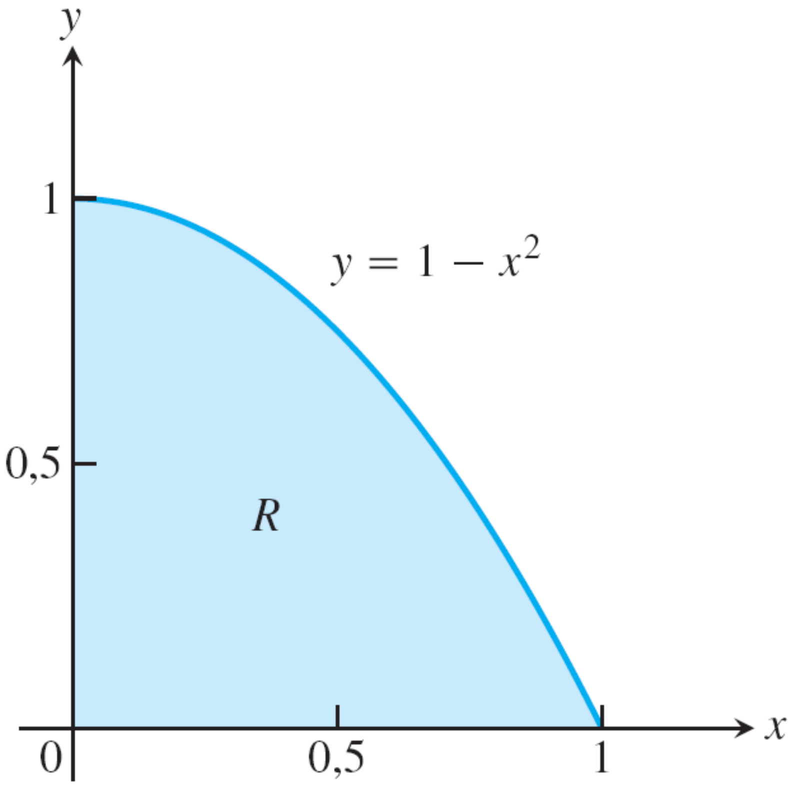


FIGURA 5.1 A área da região R não pode ser encontrada com uma fórmula simples (Exemplo 1).

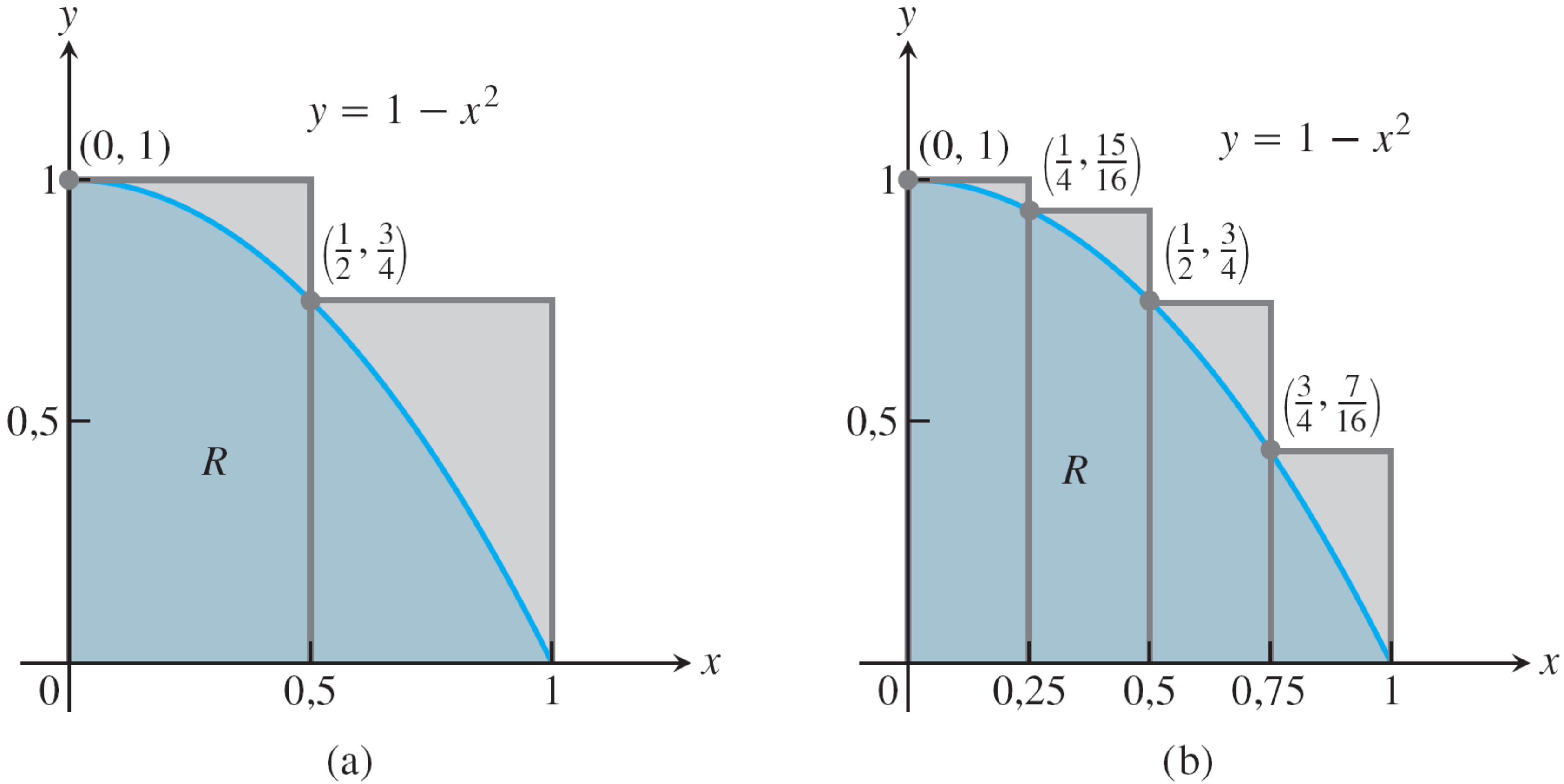


FIGURA 5.2 (a) Usando dois retângulos que contêm *R*, obtemos uma estimativa superior da área de *R*. (b) Quatro retângulos fornecem uma estimativa superior melhor. Ambas as alternativas ultrapassam o valor real da área.

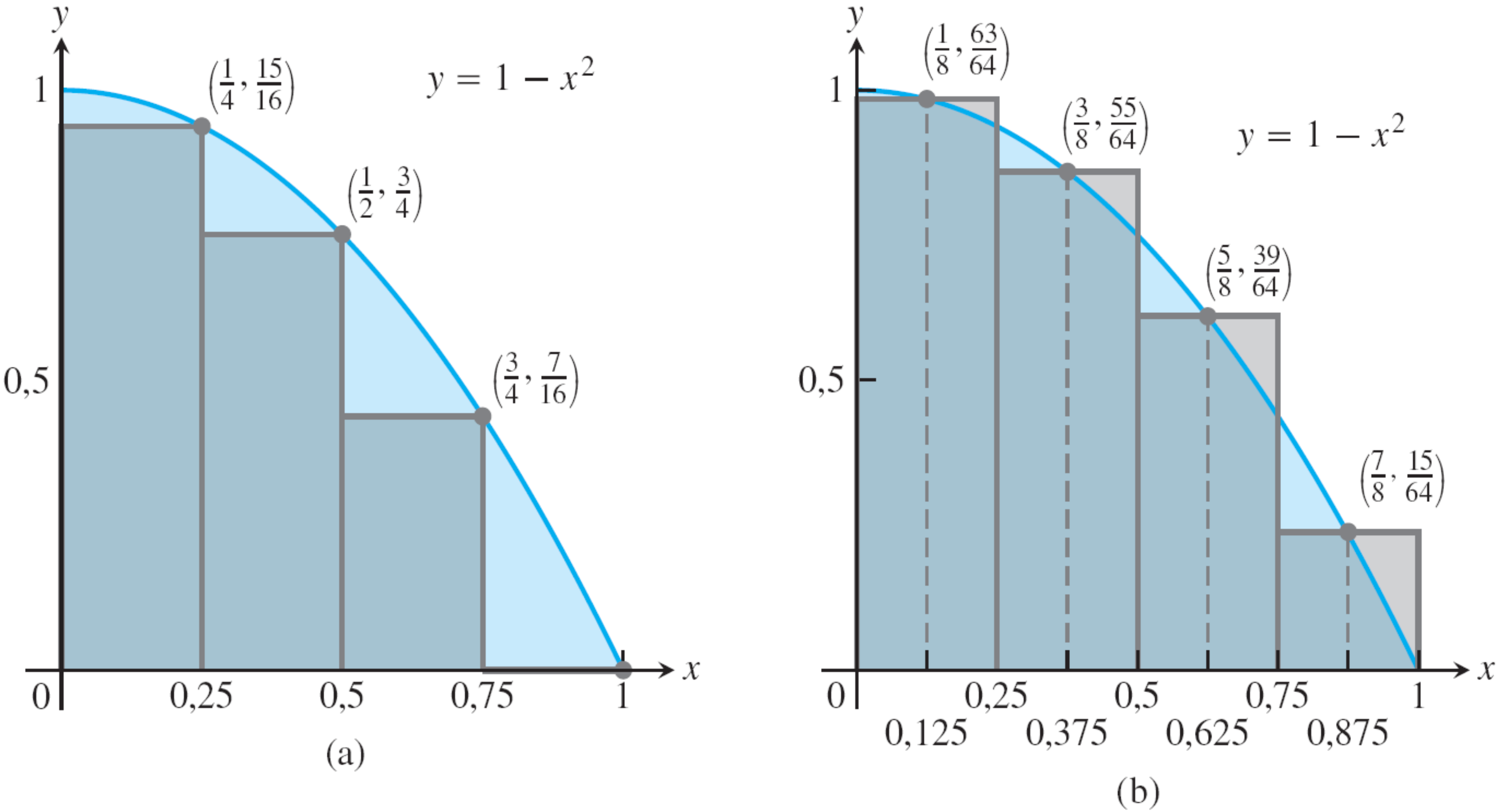


FIGURA 5.3 (a) Os retângulos contidos em *R* dão uma estimativa da área que subestima o valor real. (b) A regra do ponto médio usa retângulos cuja altura é o valor de $y = f(x)$ no ponto médio de suas bases.

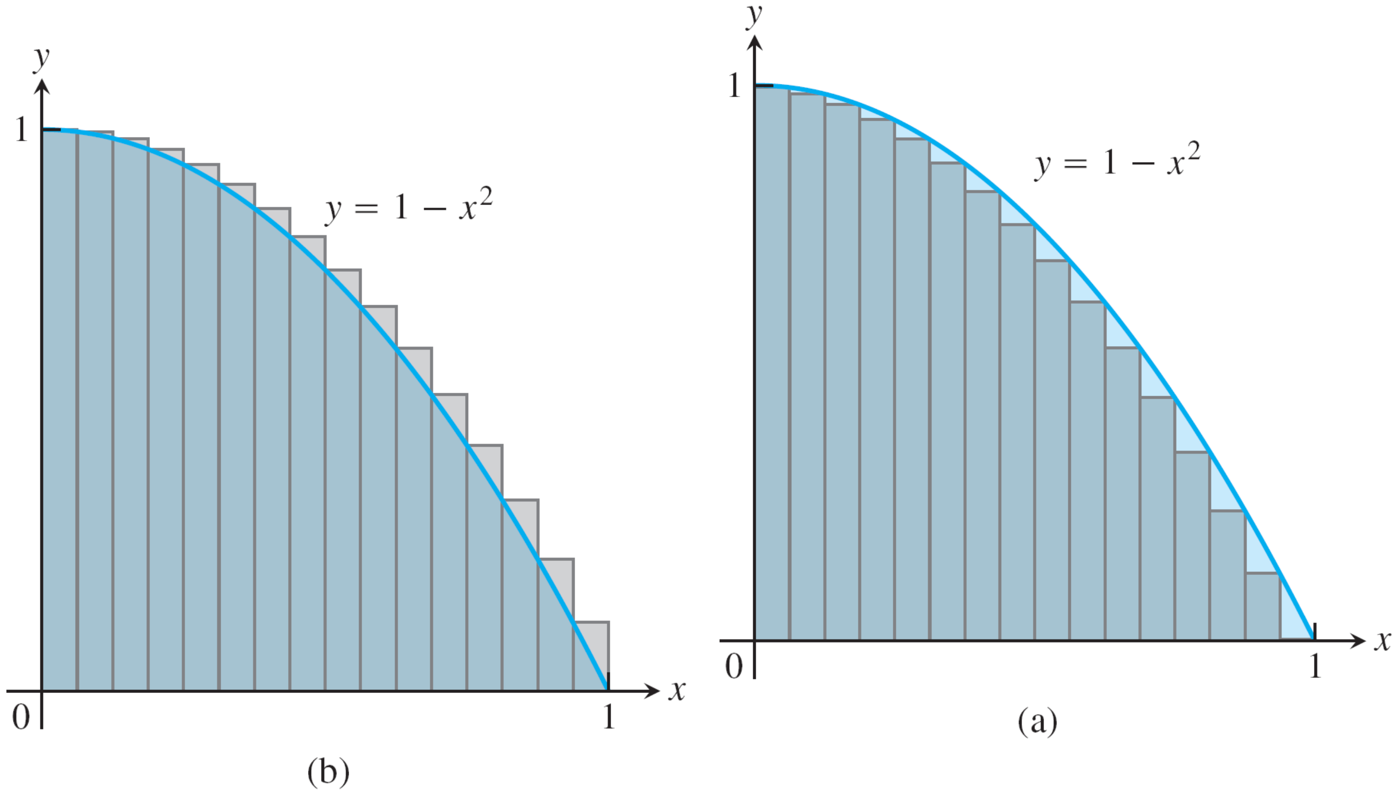


FIGURA 5.4 (a) Soma inferior usando 16 retângulos de igual largura $\Delta x = 1/16$. (b) Soma superior usando 16 retângulos.

TABELA 5.1 Aproximações finitas da área de *R*

Número de subintervalos	Soma inferior	Regra do ponto médio	Soma superior
2	,375	,6875	,875
4	,53125	,671875	,78125
16	,634765625	,6669921875	,697265625
50	,6566	,6667	,6766
100	,66165	,666675	,67165
1.000	,6661665	,66666675	,6671665

Seção 5.2 – Notação Sigma e Limites de Somas Finitas

O índice k termina em $k = n$.

O símbolo de somatório (letra grega sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k é a fórmula para o k-ésimo termo.

O índice k começa em $k = 1$.

- Exemplo 1

A soma em notação sigma	A soma escrita, um termo para cada valor de *k*	O valor da soma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Regras algébricas para somas finitas

1. *Regra da soma:* $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. *Regra da diferença:* $$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. *Regra da multiplicação por constante:* $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$ (Qualquer número c)

4. *Regra do valor constante:* $$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$ (c é qualquer valor constante)

Usando as regras algébricas

- Exemplo 3: Calcule

a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2)$;

b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k)$;

c) $\sum_{k=1}^{3}(k + 4)$;

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$.

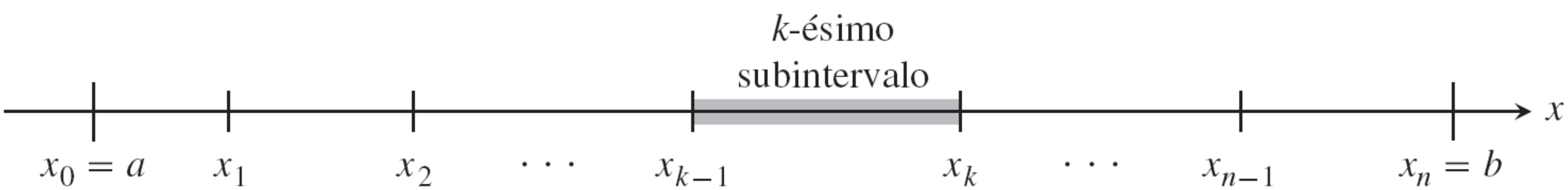
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Primeiros n quadrados: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

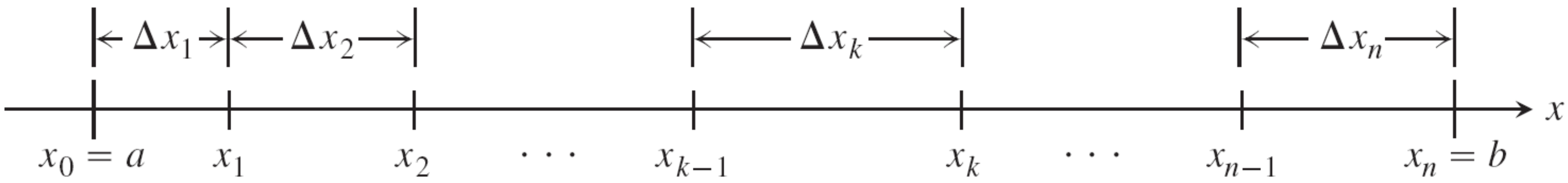
Primeiros n cubos: $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- Somas de Riemann - Partições

O primeiro desses subintervalos é $[x_0, x_1]$, o segundo, $[x_1, x_2]$, e o ***k*-ésimo subintervalo** de P é $[x_{k-1}, x_k]$, sendo k um inteiro entre 1 e n.



A largura do primeiro subintervalo $[x_0, x_1]$ é denotada por Δx_1, a largura do segundo, $[x_1, x_2]$, por Δx_2, e a largura do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se todos os n subintervalos tiverem a mesma largura, então a largura comum Δx será igual a $(b - a)/n$.



Em cada subintervalo selecionamos um ponto. Chamamos o ponto escolhido no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de c_k. Depois, em cada subintervalo, construímos um retângulo que tem base no eixo x e toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo, dependendo de $f(c_k)$ ser positiva ou negativa, ou ainda sobre ele se $f(c_k) = 0$ (Figura 5.9).

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do sinal de $f(c_k)$. Quando $f(c_k) > 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é a área de um retângulo com altura $f(c_k)$ e largura Δx_k. Quando $f(c_k) < 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é um número negativo, o oposto da área de um retângulo com largura Δx_k que começa no eixo x e estende-se para baixo, até o número negativo $f(c_k)$.

Por fim, somamos todos esses produtos e obtemos:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

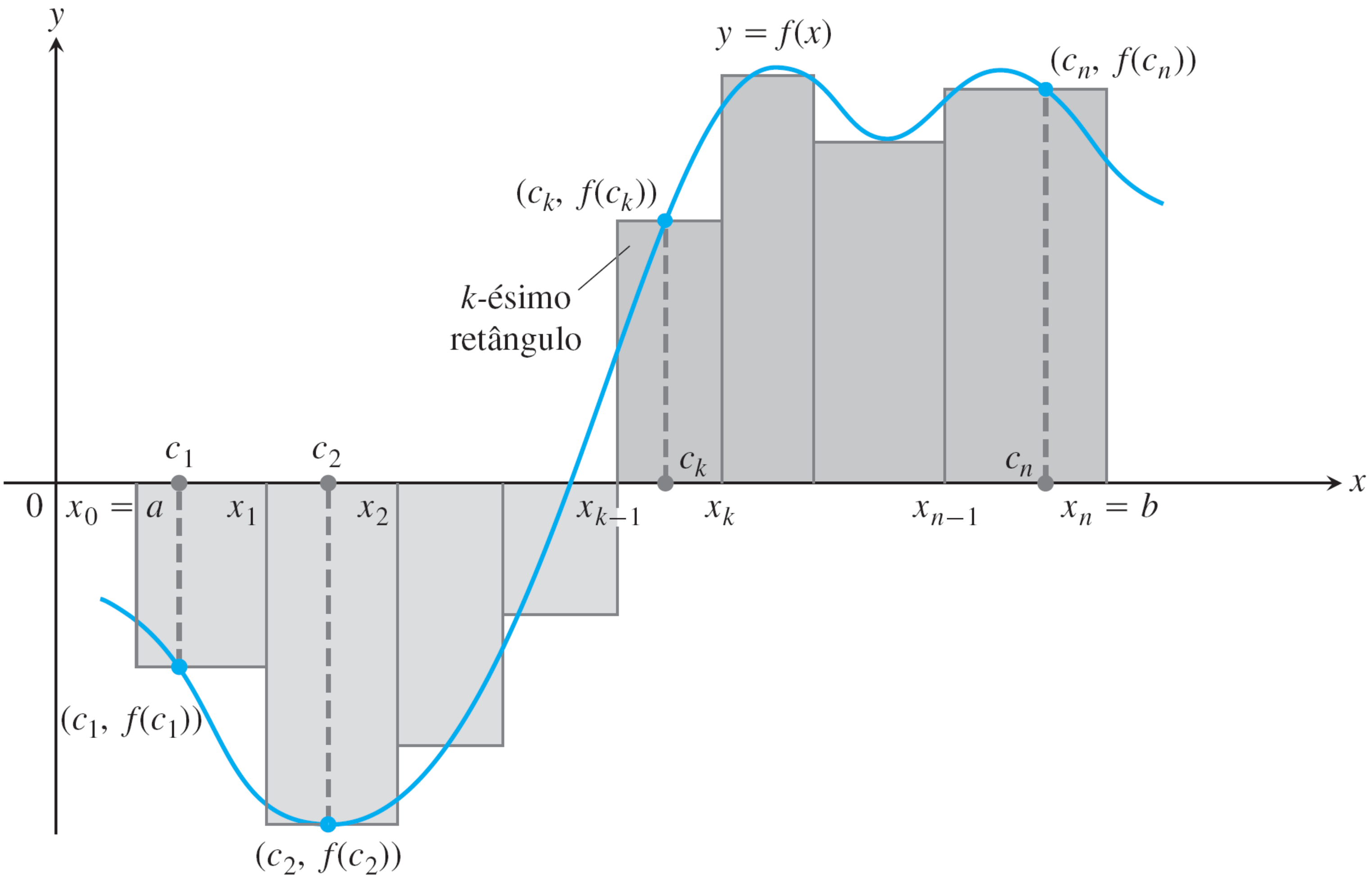


FIGURA 5.9 Os retângulos aproximam a região que fica entre a curva da função $y = f(x)$ e o eixo x.

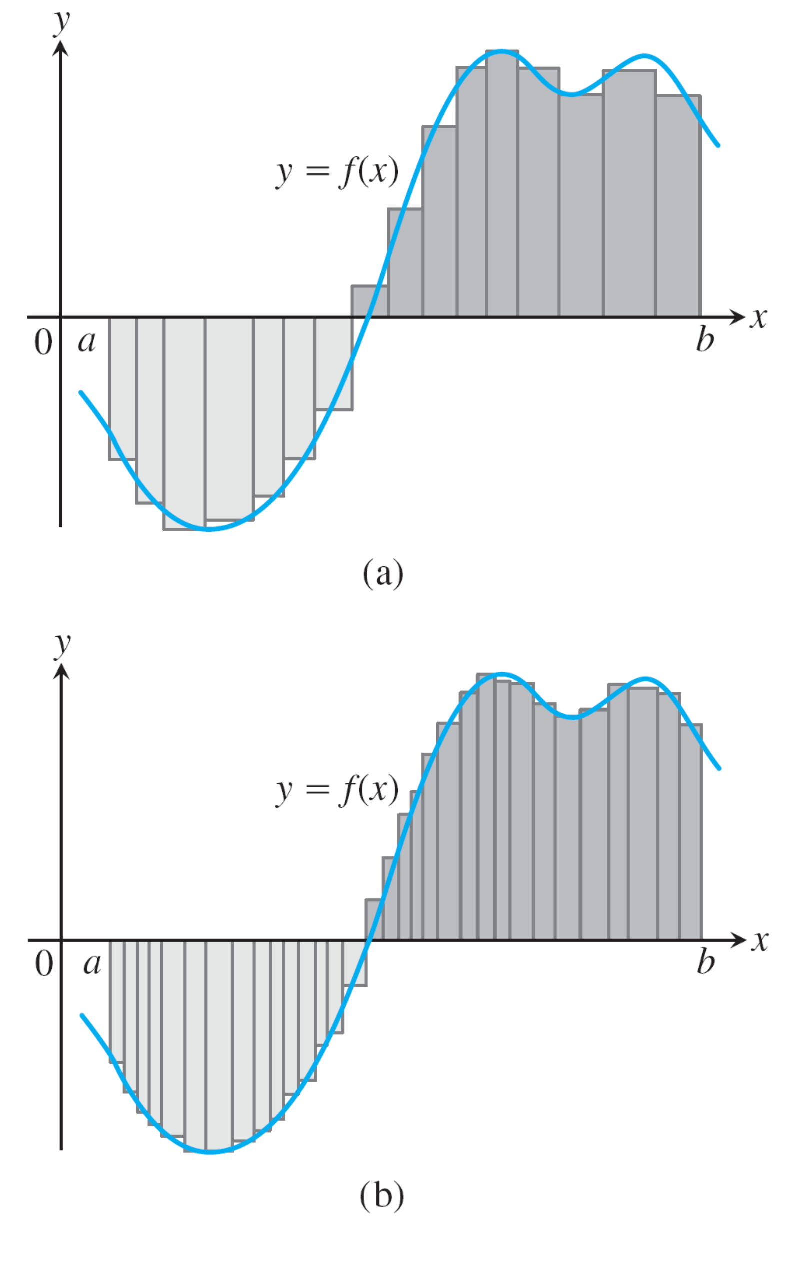


FIGURA 5.10 A curva da Figura 5.9 com retângulos obtidos de partições mais finas de $[a, b]$. Partições mais finas criam conjuntos de retângulos com bases menores que aproximam a região entre a curva de f e o eixo x com precisão cada vez maior.

Norma de uma partição

- Definição: Seja P uma partição de um intervalo fechado I. Definimos *norma de P* como sendo a maior de todas as larguras dos subintervalos de P. Denotaremos tal número por $\|P\|$.

Seção 5.3 – A Integral Definida

Definição A integral definida como limite de somas de Riemann

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que um número I é a **integral definida de f em $[a, b]$** e que I é o limite das somas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ se a seguinte condição é satisfeita:

Dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de c_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

A função é o integrando

Limite superior de integração

x é a variável de integração

Sinal de integral

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral de } f \text{ de } a \text{ a } b}$$

Limite inferior de integração

Quando você acha o valor da integral, calculou a integral.

Teorema 1 **A existência de integrais definidas**

Uma função contínua é integrável. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.

Uma função não integrável

- Exemplo 1: A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

não apresenta integral de Riemann no intervalo $[0, 1]$.

Teorema 2

Quando f e g são integráveis no intervalo $[a, b]$, a integral definida satisfaz as regras 1 a 7 da Tabela 5.3.

TABELA 5.3 Propriedades satisfeitas pelas integrais definidas

1.	*Ordem de integração:*	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	Uma definição.
2.	*Intervalo de largura zero:*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	Também uma definição.
3.	*Multiplicação por constante:*	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	Qualquer número k.
		$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k = -1$
4.	*Soma e subtração:*	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	

TABELA 5.3 Propriedades satisfeitas pelas integrais definidas

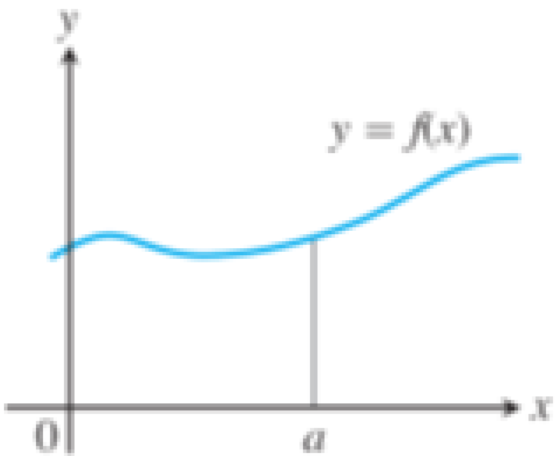
5. *Aditividade:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. *Desigualdade max-min:* Se f tem o valor máximo max f e o valor mínimo min f em $[a, b]$, então

$$\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a)$$

7. *Dominação:* $f(x) \ge g(x)$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

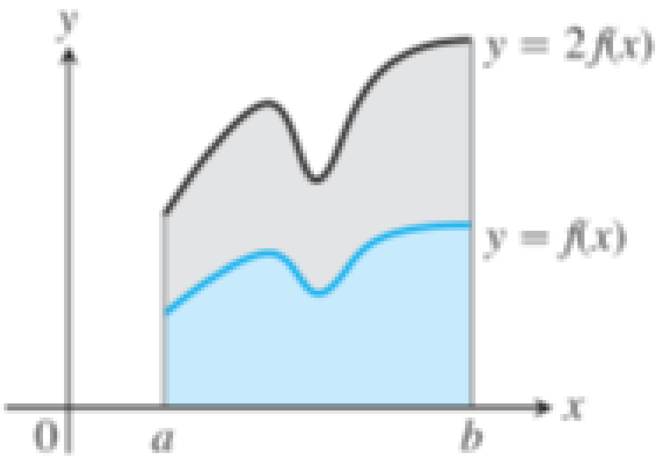
$f(x) \ge 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Caso especial)



(a) *Intervalo de largura zero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(A área sob um ponto é 0)

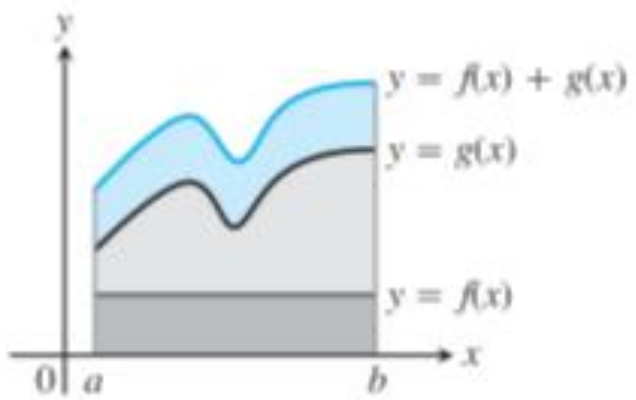


(b) *Multiplicação por constante:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

(Mostrado para $k = 2$)

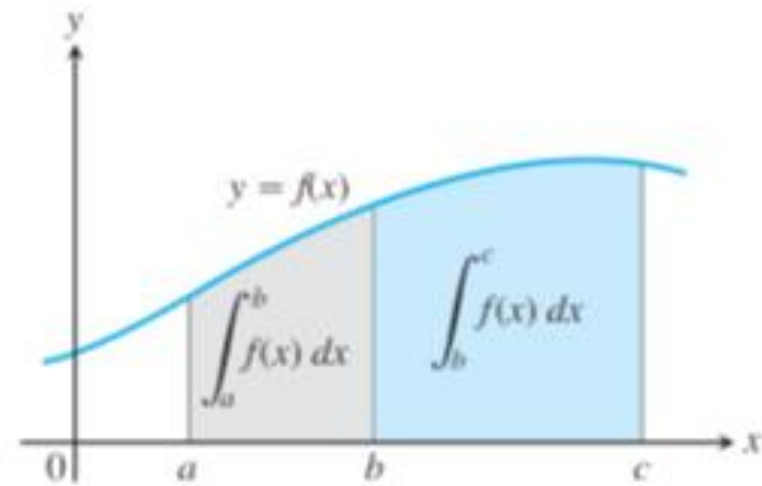
FIGURA 5.11



(c) *Soma:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

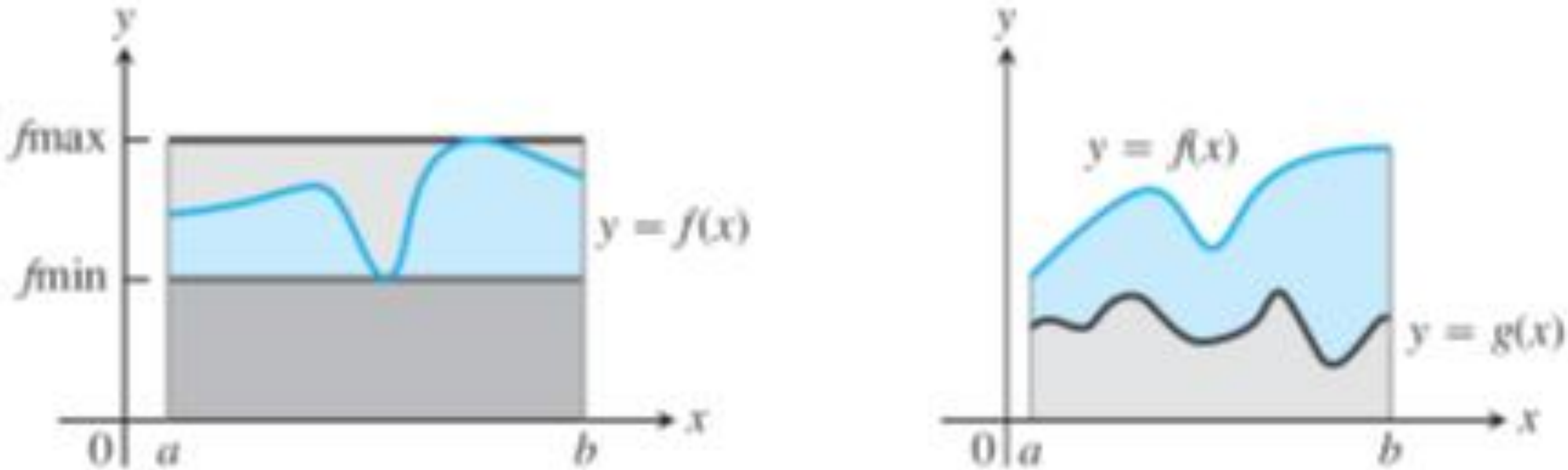
(Soma das áreas)



(d) *Aditividade para integrais definidas:*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

FIGURA 5.11



(e) *Desigualdade max-min:*

$$f\text{min} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f\text{max} \cdot (b - a)$$

(f) *Dominação:*

$$f(x) \geq g(x) \text{ em } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURA 5.11

Usando as propriedades

- Exemplo 2: Supondo que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5$, $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$, e $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$, calcule:

a) $\int_{4}^{1} f(x)dx;$

b) $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]dx;$

c) $\int_{-1}^{4} f(x)dx.$

Determinando limitantes

- Exemplo 3: Mostre que o valor de $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ é menor que $3/2$.

Definição Área sob uma curva (como uma integral definida)

Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a, b]$, então a **área sob a curva $y = f(x)$ em $[a, b]$** será a integral de f de a até b:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

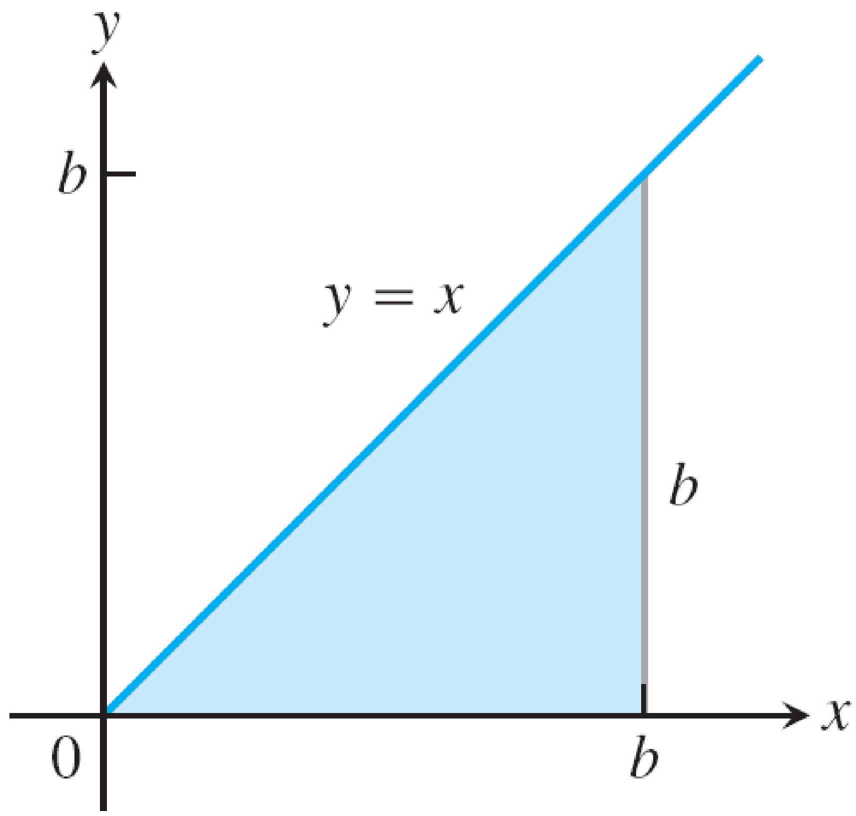


FIGURA 5.12 A região do Exemplo 4 é um triângulo.

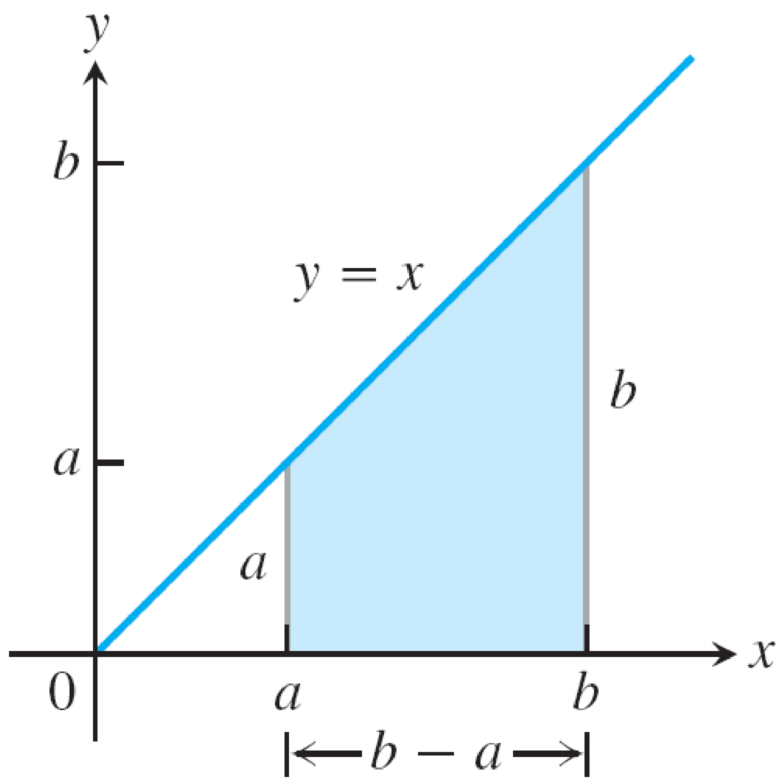


FIGURA 5.13 A área dessa região trapezoidal é $A = (b^2 - a^2)/2$.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \tag{1}$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad \text{sendo } c \text{ qualquer constante} \tag{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{3}$$

Definição Média ou valor médio de uma função

Se f for integrável em $[a, b]$, então seu **valor médio** em $[a, b]$, também chamado sua **média**, será:

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Determinando um valor médio

- Exemplo 5: Determine o valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$.

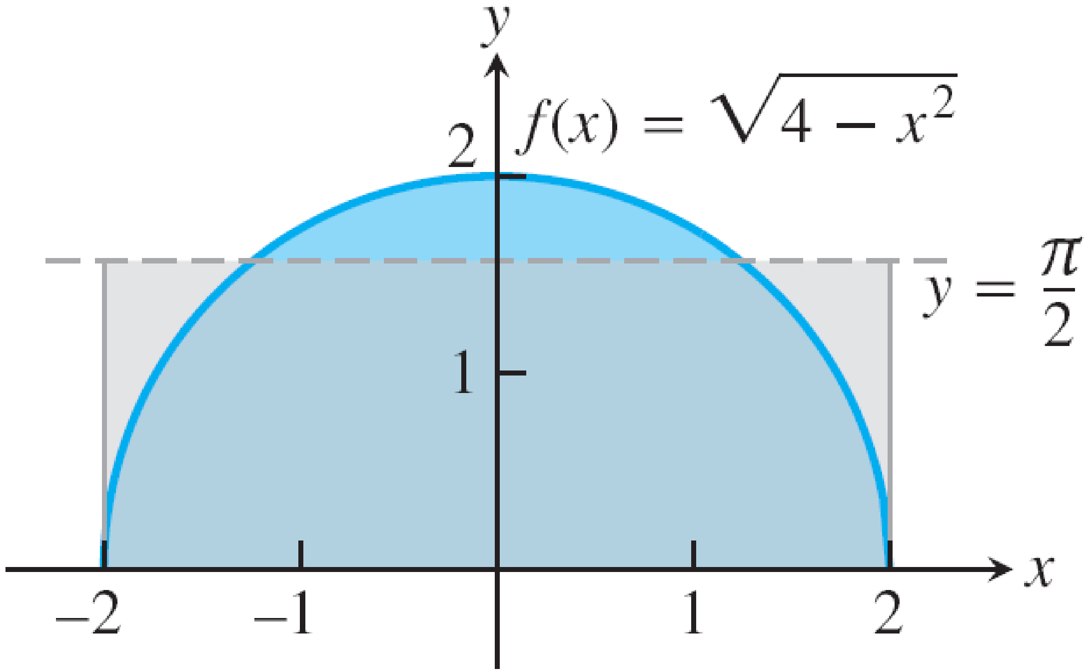


FIGURA 5.15 O valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$ é $\pi/2$ (Exemplo 5).

Seção 5.4 – O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 3 **O teorema do valor médio para integrais definidas**

Se f for contínua em $[a, b]$, então em algum ponto c em $[a, b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

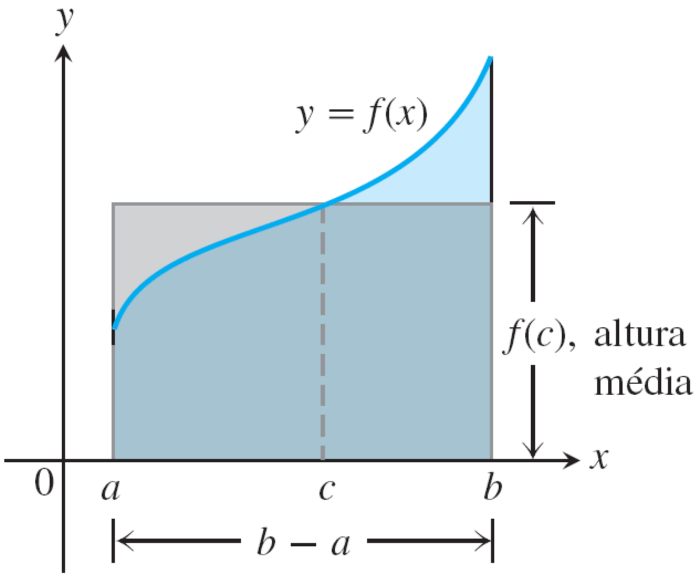


FIGURA 5.16 O valor $f(c)$ no teorema do valor médio é, de certo modo, a altura média de f em $[a, b]$. Quando $f \geq 0$, a área do retângulo sombreado é a área sob a curva de f de a até b,

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

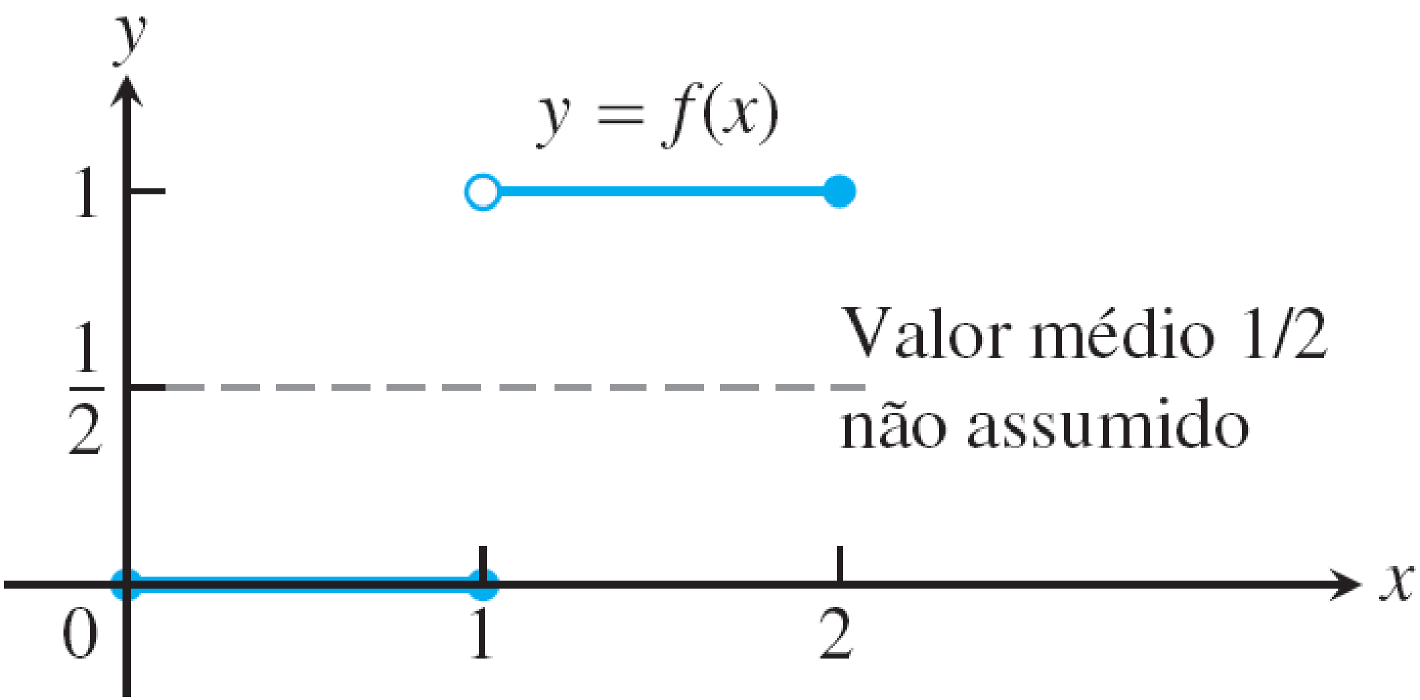


FIGURA 5.17 Uma função descontínua não precisa assumir o valor médio.

- Exemplo 2: Mostre que, se f é contínua em $[a, b]$, sendo $a \neq b$, e se $\int_a^b f(x)dx = 0$, então $f(x) = 0$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

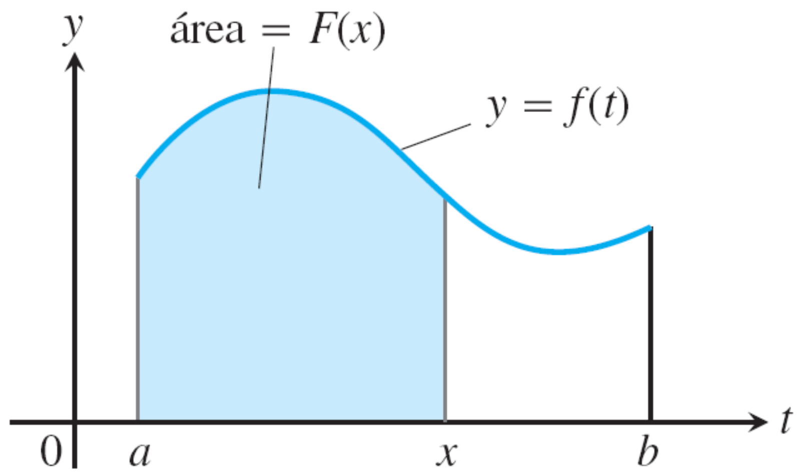


FIGURA 5.19 A função $F(x)$ definida pela Equação (1) fornece a área sob a curva de f de a até x quando f é não negativa e $x > a$.

Teorema 4 **O teorema fundamental do cálculo, parte 1**

Se f é contínua em $[a, b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e sua derivada é $f(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{2}$$

Aplicando o Teorema Fundamental

- Exemplo 3 (exercício de leitura): Calcule $\frac{dy}{dx}$ onde:

$a)\ y = \int_a^x \cos t\, dt;$

$b)\ y = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$c)\ y = \int_x^5 3t \operatorname{sen} t\, dt;$

$d)\ y = \int_1^{x^2} \cos t\, dt;$

$e)\ y = \int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}\, dt.$

Solução do exemplo 3

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$ — Equação 2 com $f(t) = \cos t$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$ — Equação 2 com $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(c) A Regra 1 das integrais (Tabela 5.3, Seção 5.3) reorganiza essas funções para podermos usar o teorema fundamental.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\right) && \text{Regra 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\\ &= -3x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

(d) O limite superior de integração não é x, mas x^2. Isso torna y um misto de duas funções:

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \qquad \text{e} \qquad u = x^2$$

Portanto, devemos aplicar a regra da cadeia quando encontrarmos dy/dx.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos u\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \cos(x^2)\cdot 2x\\ &= 2x\cos x^2\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}\,dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+e^t}\,dt\right) && \text{Regra 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+e^t}\,dt\\ &= -\frac{1}{2+e^{(1+3x^2)}}\frac{d}{dx}(1+3x^2) && \text{Equação (2) e regra da cadeia.}\\ &= -\frac{6x}{2+e^{(1+3x^2)}}\end{aligned}$$

Teorema 4 (continuação) **O teorema fundamental do cálculo, parte 2**

Se f é contínua em qualquer ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Calculando integrais

- Exemplo 5:

a) $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$;

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right) dx$. (Exercício)

Determinando áreas com primitivas

- Exemplo 6: Calcule a área delimitada pelo eixo x e pela parábola $y = 6 - x - x^2$.

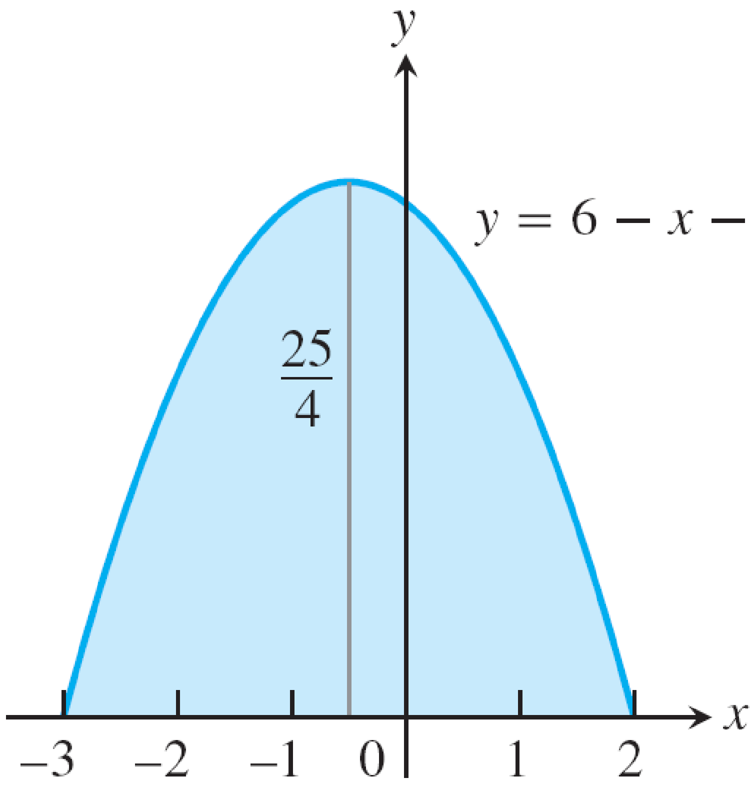


FIGURA 5.21 A área deste arco parabólico é calculada com uma integral definida (Exemplo 6).

Cancelando áreas

- Exemplo 7: A Figura 5.22 mostra o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$ entre $x = 0$ e $x = 2\pi$. Calcule:

a) A integral definida de $f(x)$ em $[0, 2\pi]$;

b) A área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x em $[0, 2\pi]$.

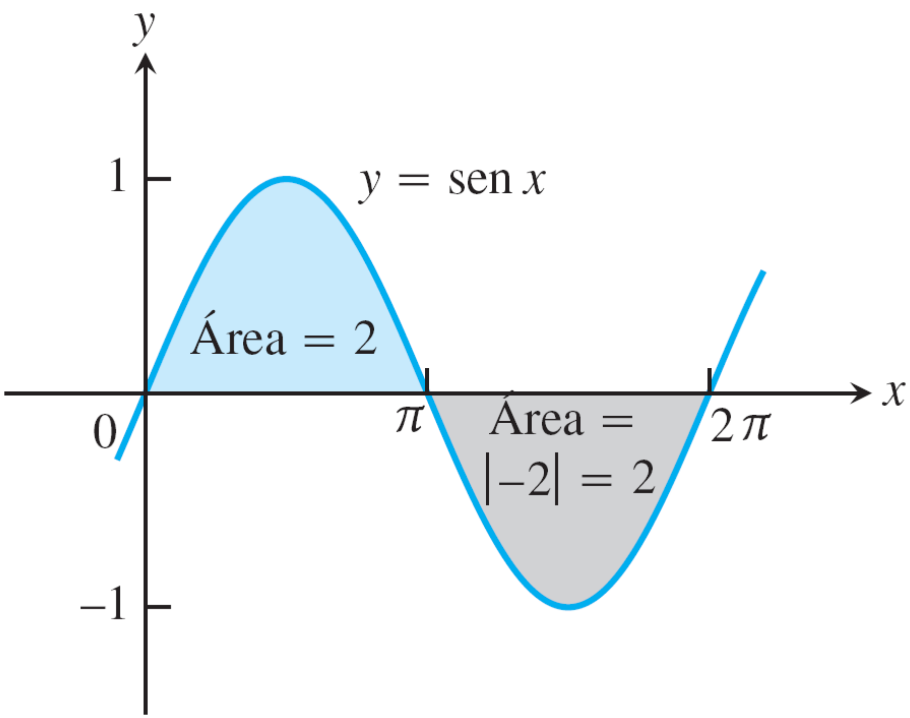


FIGURA 5.22 A área total entre $y = \text{sen}\, x$ e o eixo x para $0 \leq x \leq 2\pi$ é a soma dos valores absolutos de duas integrais (Exemplo 7).

Resumo

Para determinar a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$, faça o seguinte.

1. Subdivida $[a, b]$ nas raízes de f.
2. Integre f em cada subintervalo.
3. Some os valores absolutos das integrais.

Determinando áreas com primitivas

- Exemplo 8: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, sendo $-1 \leq x \leq 2$.

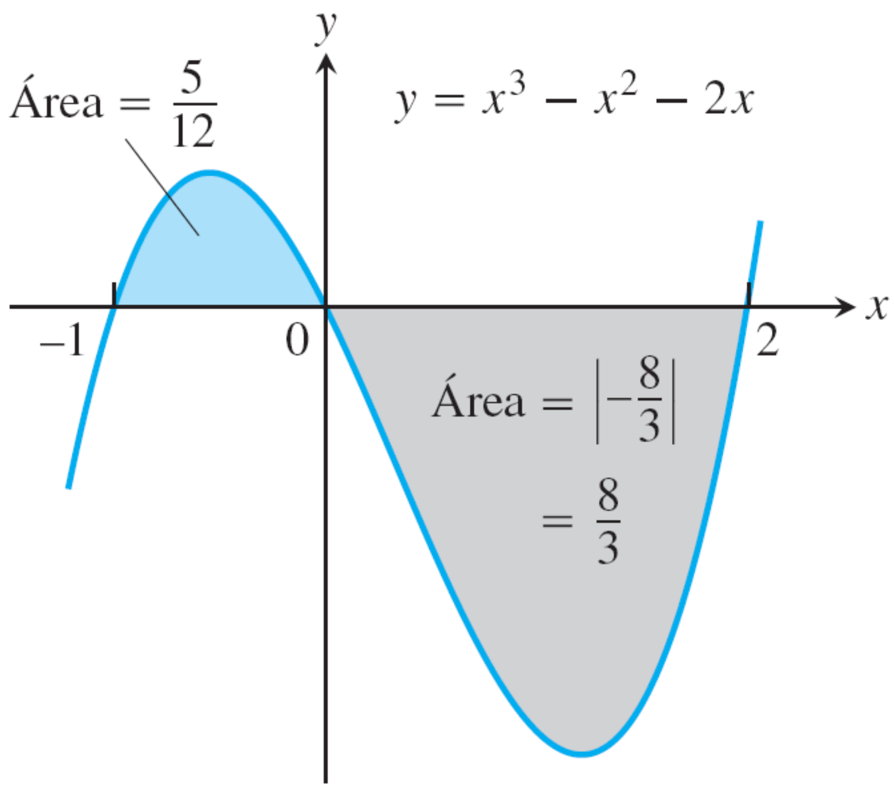


FIGURA 5.23 A região entre a curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ e o eixo x (Exemplo 8).

Seção 5.5 - Integrais Indefinidas e a Regra da Substituição

Se u é uma função derivável qualquer, então

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1,\ n \text{ qualquer número}). \tag{1}$$

Teorema 5 **A regra da substituição**

Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Usando a regra da potenciação

- Exemplo 1: Calcule $\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y dy$.
- Exemplo 2: Calcule $\int \sqrt{4t-1} dt$.

Usando a substituição

- Exemplo 3: Calcule $\int \cos(7\theta + 5)d\theta$. (Exercício)
- Exemplo 4: Calcule $\int x^2 e^{x^3}\, dx$. (Exercício)
- Exemplo 5: Calcule $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.
- Exemplo 6: Calcule $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$.
- Exemplo 7: Calcule $\int \frac{1}{\cos^2(2x)} dx$.
- Exemplo 8: Calcule $\int \frac{2z dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$.

Integrais de $\text{sen}^2 x$ e de $\cos^2 x$

- Exemplo 9: Calcule:

$a)\ \int \text{sen}^2 x\, dx;$

$b)\ \int \cos^2 x\, dx.$ (Exercício)

Área sob curva

- Exemplo 10: A Figura 5.24 mostra o gráfico de $g(x) = \text{sen}^2 x$ ao longo do intervalo $[0, 2\pi]$. Determine:

a) A integral definida de $g(x)$ em $[0, 2\pi]$;

b) A área entre o gráfico da função e o eixo x em $[0, 2\pi]$.

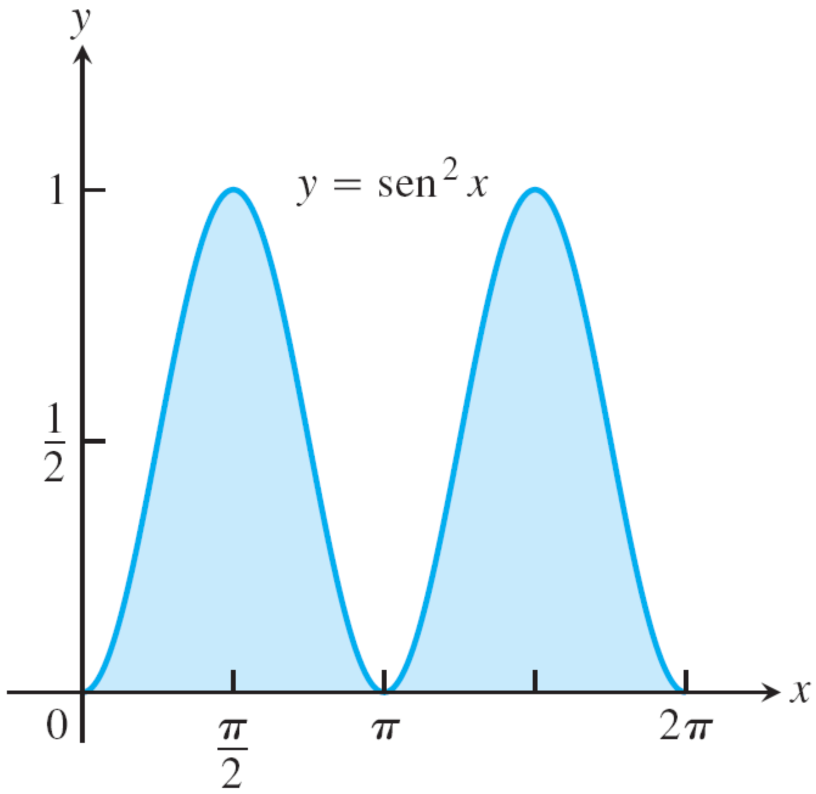


FIGURA 5.24 A área sob a curva $y = \text{sen}^2 x$ ao longo de $[0, 2\pi]$ é igual a π unidades quadradas (Exemplo 10).

Seção 5.6 – Substituição e Área Entre Curvas

Teorema 6 **Substituição em integrais definidas**

Se g' é contínua no intervalo $[a, b]$ e f é contínua na imagem de g, então

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

Substituindo pelos dois métodos

- Exemplo 1: Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.
- Exemplo 2: Calcule

$a)\ \int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$; (Exercício)

$b)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$.

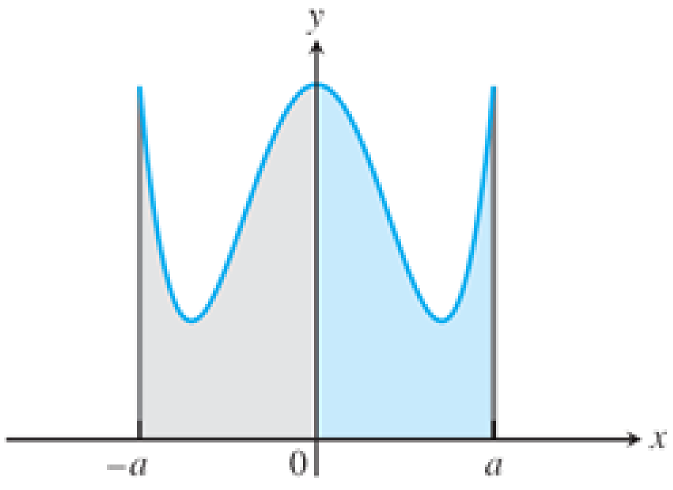
Teorema 7

Seja f contínua no intervalo simétrico $[-a, a]$.

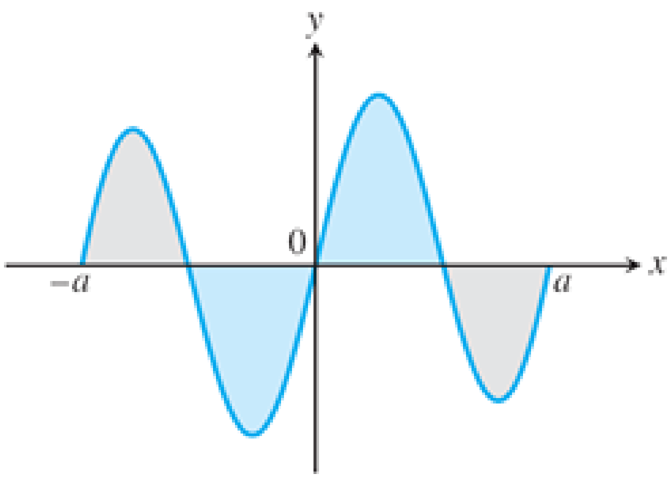
(a) Se f é par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(b) Se f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

1



(a)



(b)

FIGURA 5.26 (a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Integral de uma função par

- Exemplo 3: Calcule $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$.

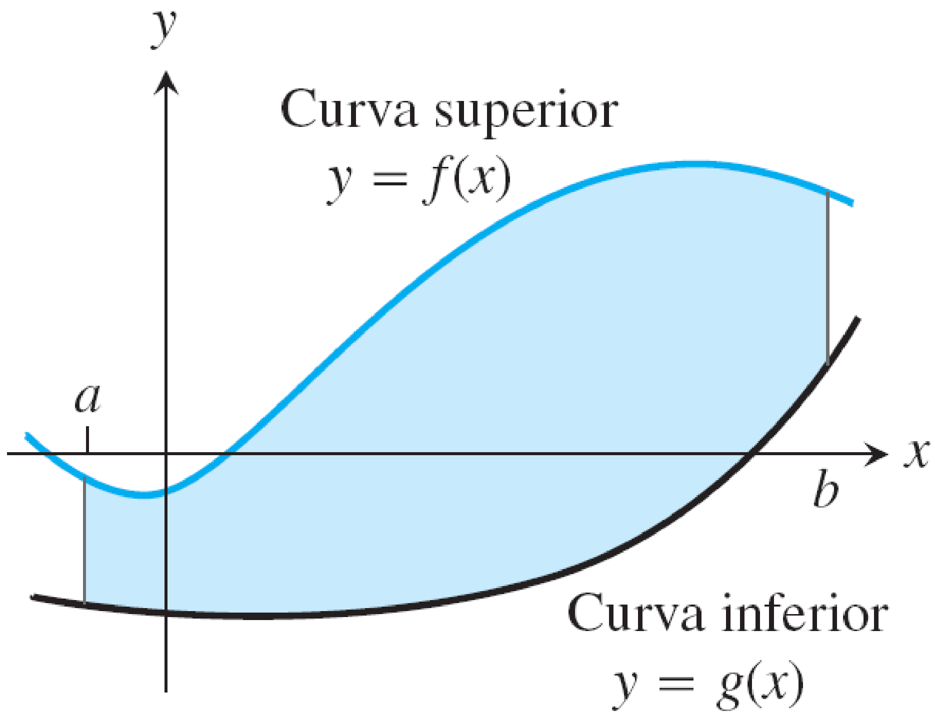


FIGURA 5.27 A região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$.

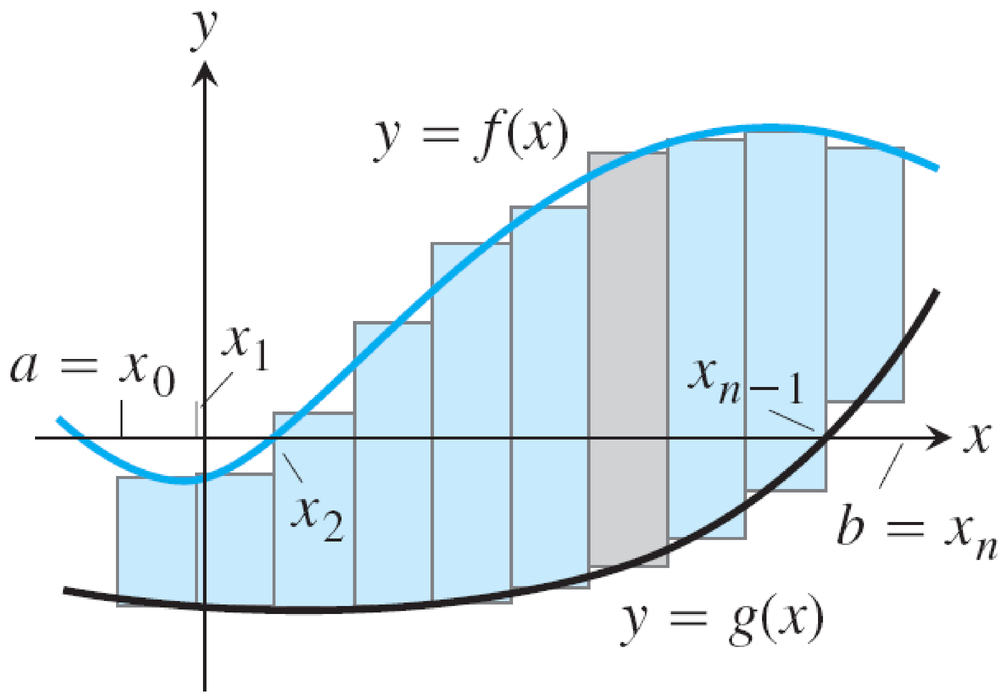


FIGURA 5.28 Fazemos uma aproximação dividindo a região com retângulos perpendiculares ao eixo x.

Definição **Área entre curvas**

Se f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a **área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b** é a integral de $(f - g)$ desde a até b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

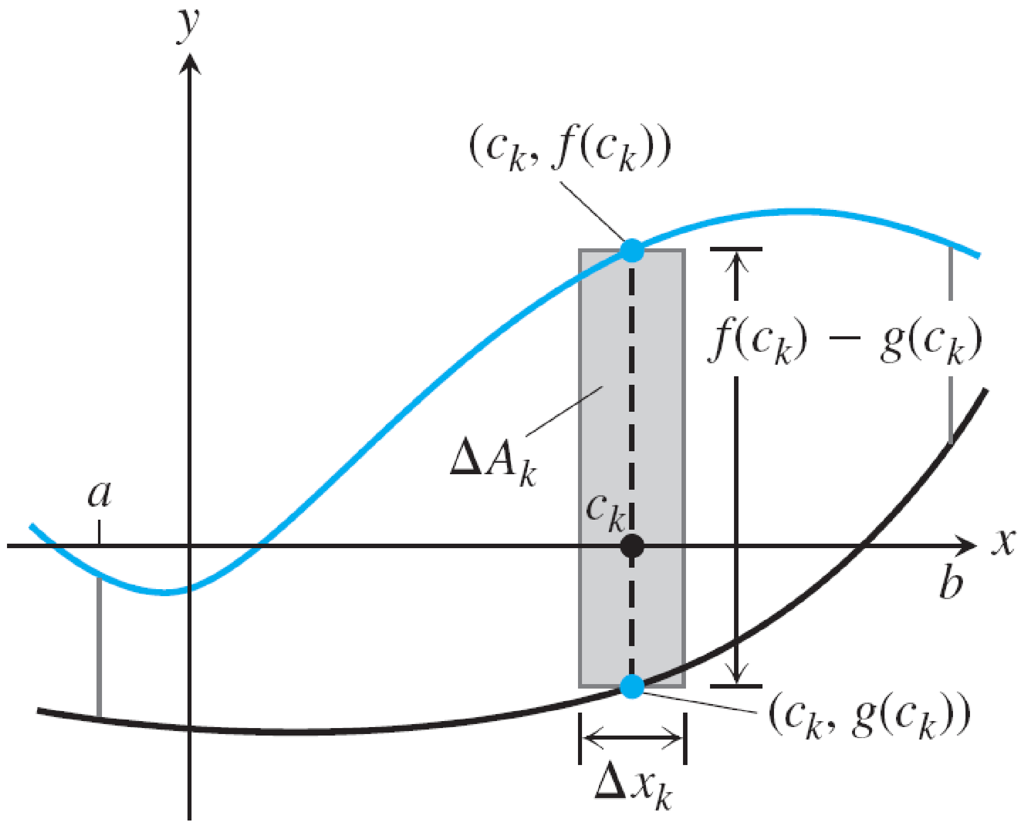


FIGURA 5.29 A área ΔA_k do k-ésimo retângulo é o produto entre sua altura, $f(c_k) - g(c_k)$, e sua largura, Δx_k.

Área entre curvas que se cruzam

- Exemplo 4: Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$.

CAPÍTULO 5
INTEGRAÇÃO

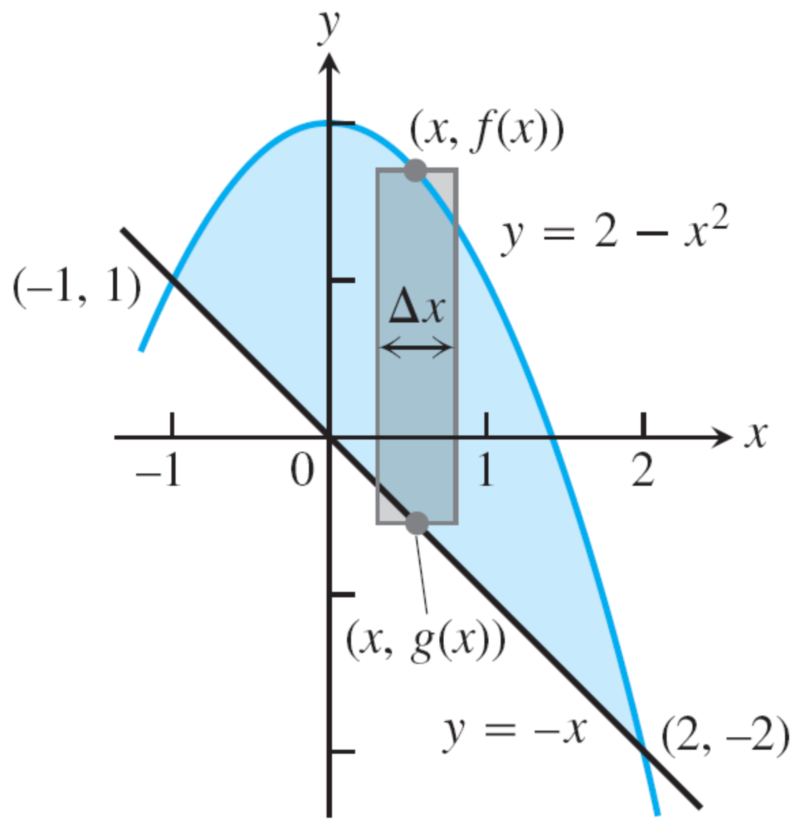


FIGURA 5.30 A região do Exemplo 4 com um retângulo de aproximação típico.

Mudando a integral para combinar com uma mudança de fronteira

- Exemplo 5: Determine a área do primeiro quadrante que é limitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo pelo eixo x e pela reta $y = x - 2$ (ver Figura 5.31).

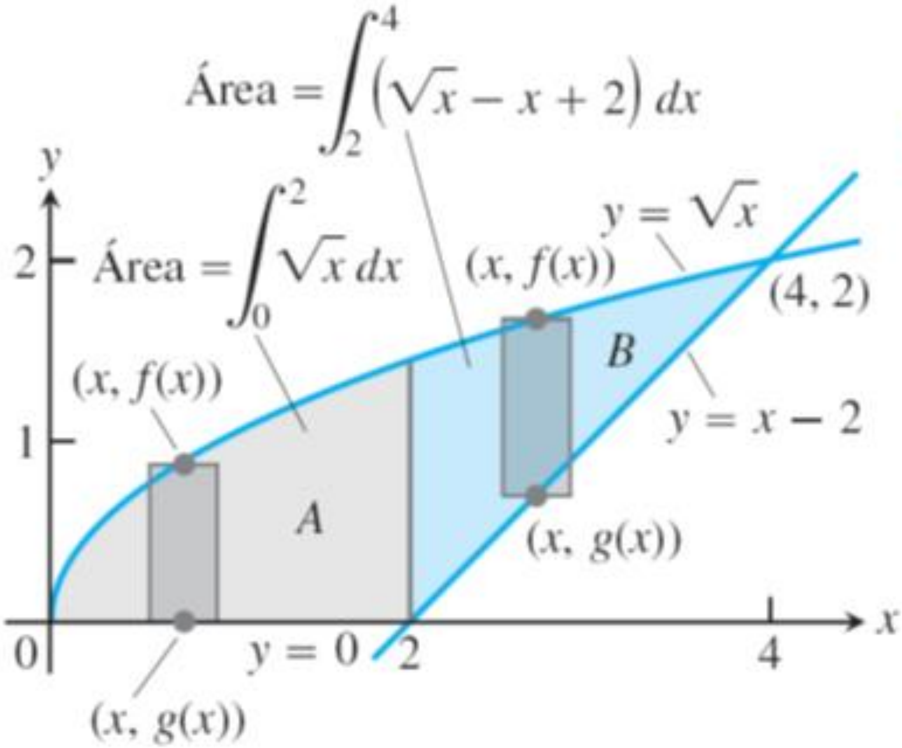
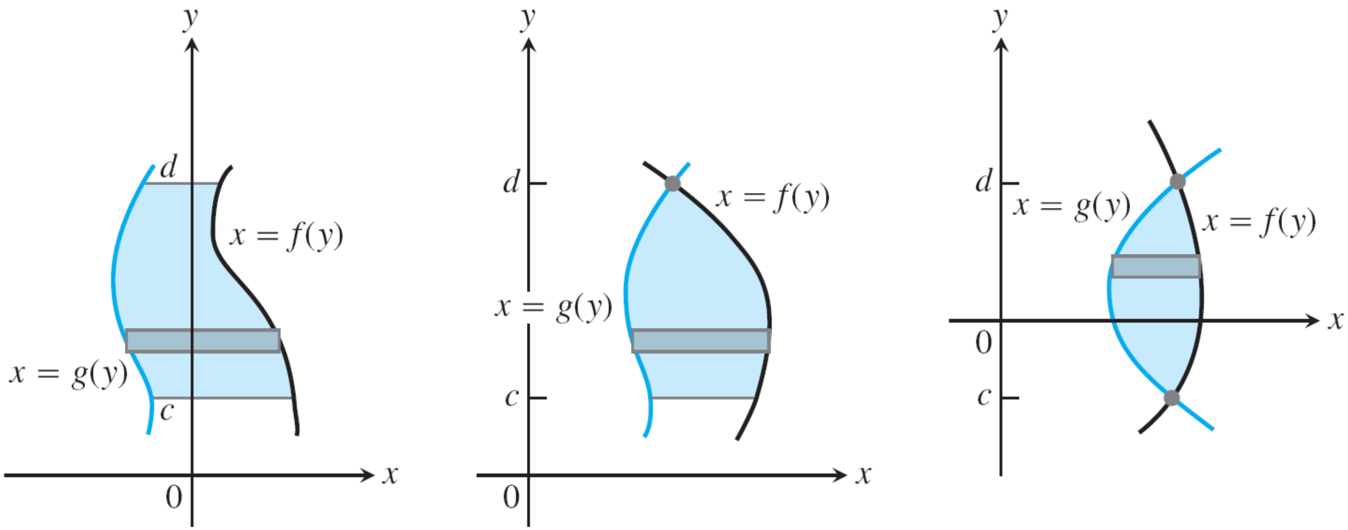


FIGURA 5.31 Quando a fórmula para uma curva fronteira muda, a integral que dá a área também muda, tornando-se a soma das integrais correspondentes, uma integral para cada uma das regiões sombreadas mostradas aqui (Exemplo 5).

Integração em relação a *y*

Se as curvas que formam as fronteiras de uma região são descritas por funções de *y*, os retângulos de aproximação são horizontais, e não verticais, e a fórmula básica tem *y* no lugar de *x*.

Para regiões como estas



use a fórmula

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Nessa equação, *f* sempre denota a curva à direita e *g* a curva à esquerda, logo $f(y) - g(y)$ é não negativa.

Integrando em relação a *y*

- Exemplo 6: Determine a área da região do Exemplo 5 em relação a y.

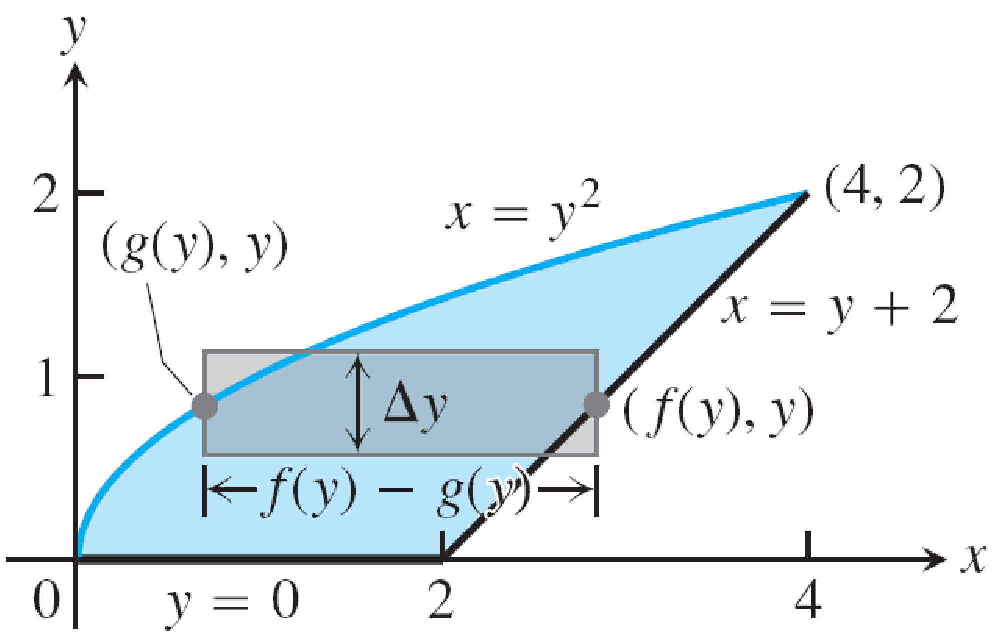


FIGURA 5.32 Se integrarmos em relação a x, serão necessárias duas integrações para achar a área dessa região. Se integrarmos em relação a y, será necessária apenas uma (Exemplo 6).

Algumas figuras da seção dos exercícios

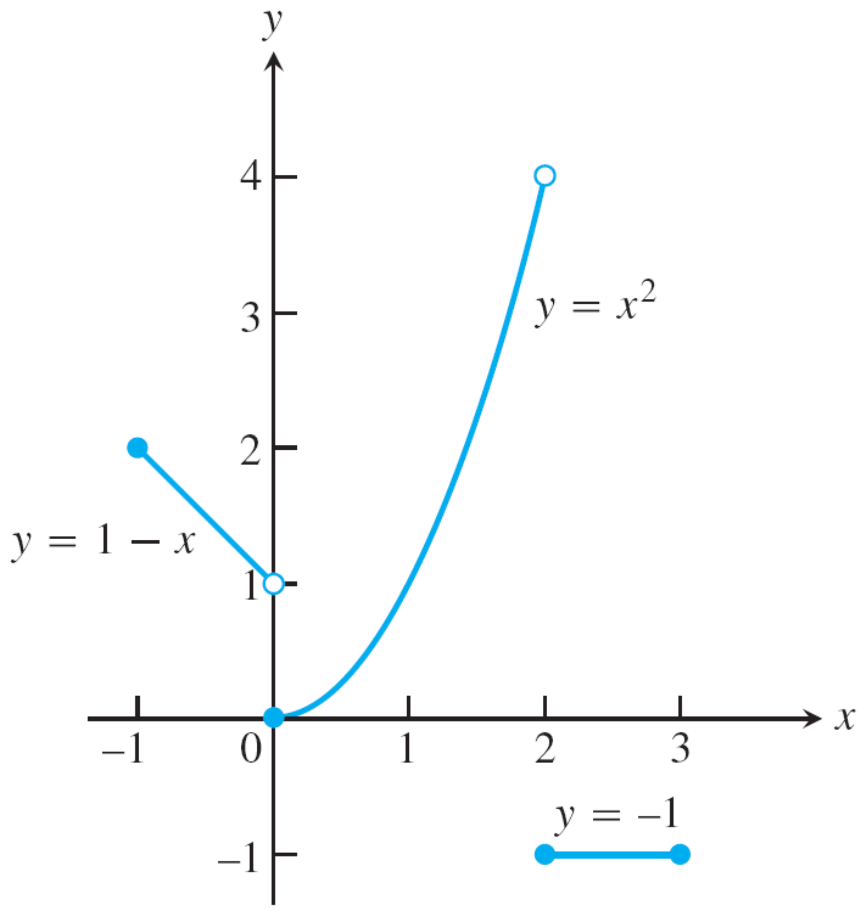


FIGURA 5.34 Funções contínuas por partes como esta são integradas parte por parte.

Regra de Leibniz

Se f for contínua em $[a, b]$ e se $u(x)$ e $v(x)$ forem funções deriváveis de x cujos valores situam-se em $[a, b]$, então

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

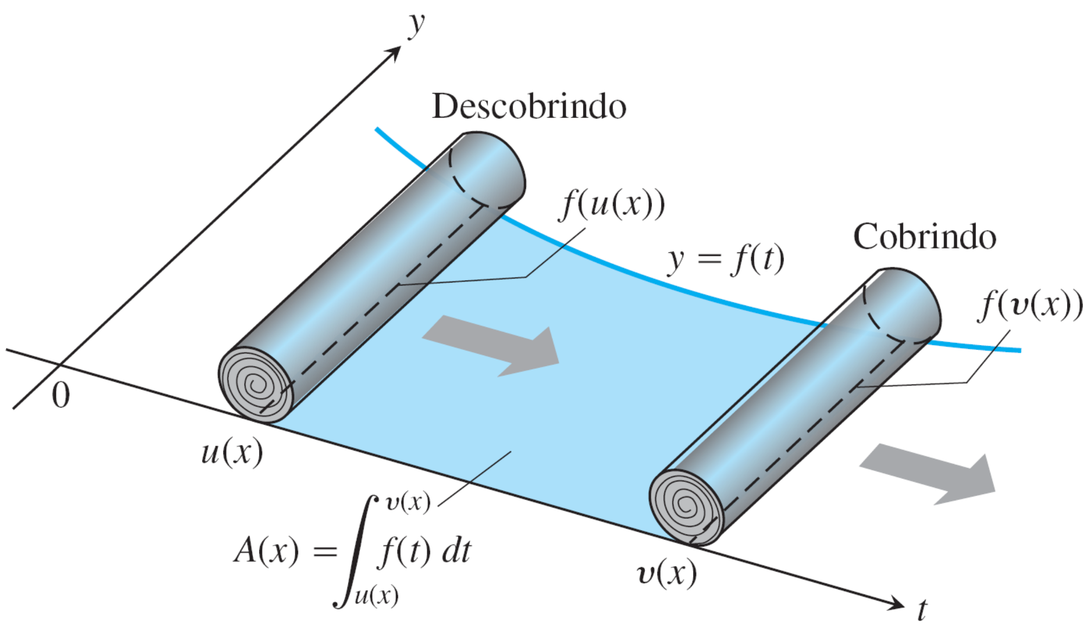


FIGURA 5.35 Enrolando e desenrolando um tapete: uma interpretação geométrica para a regra de Leibniz:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$