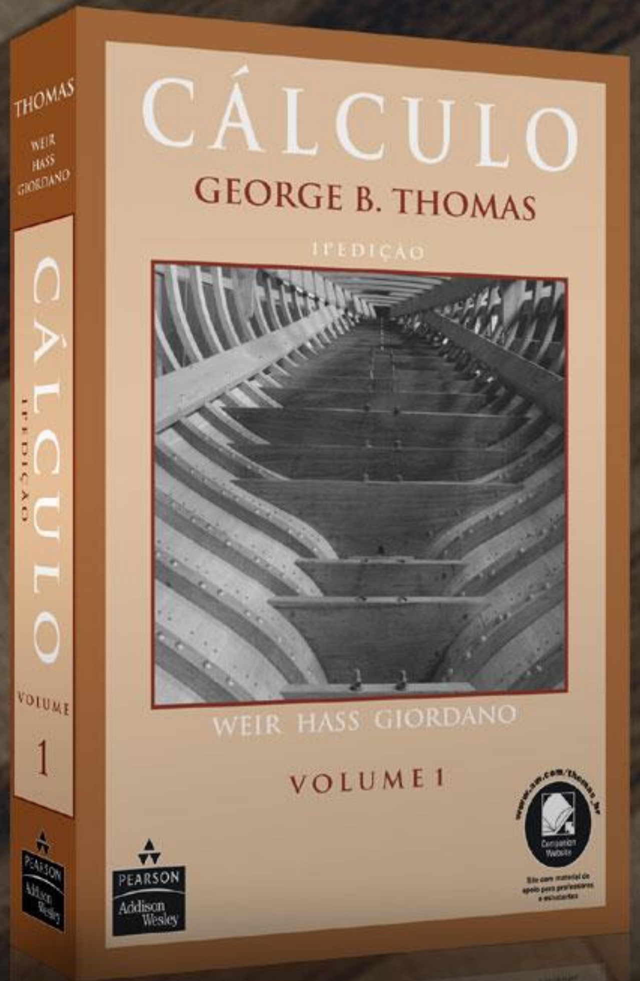
Capítulo 3

Derivação



Seção 3.1 – A Derivada Como Função

Definição **Função derivada**

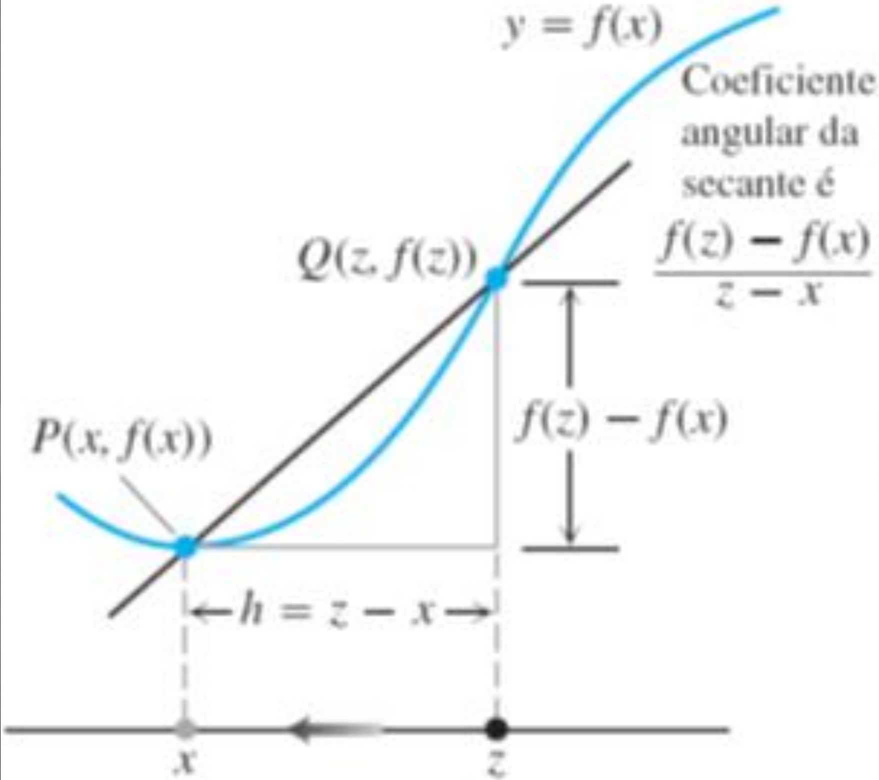
A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Fórmula alternativa para a derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



Derivada de f em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURA 3.1 O modo como escrevemos a razão incremental para a derivada de uma função f depende de como identificamos os pontos envolvidos.

Aplicando a definição

- Exemplo 1: Derive $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Derivada da função raiz quadrada

- Exemplo 2:

a) Encontre a derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

b) Encontre a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$.

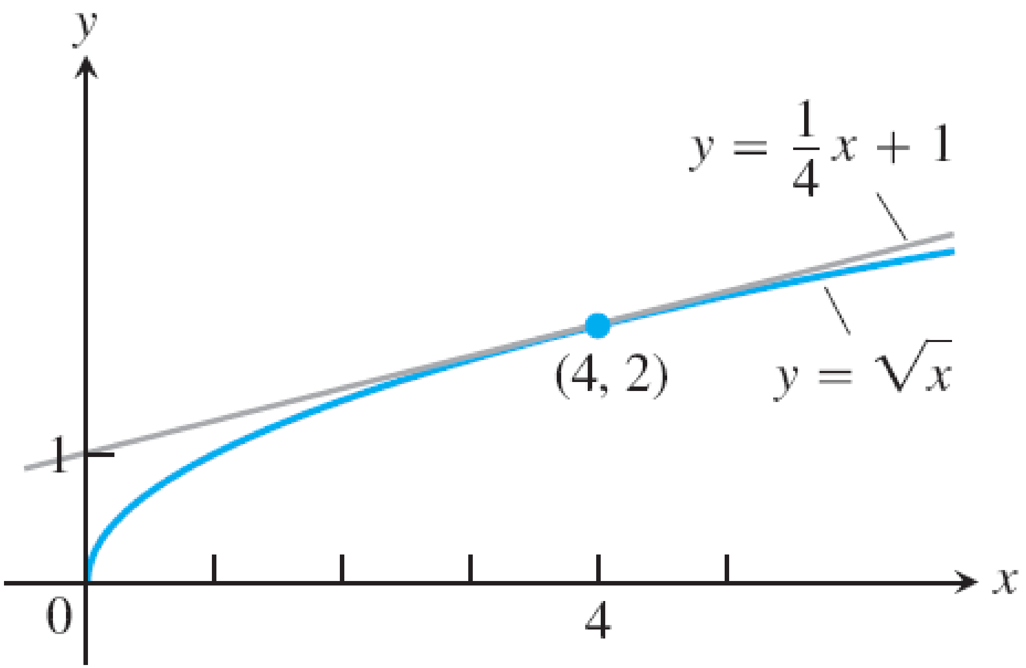


FIGURA 3.2 A curva $y = \sqrt{x}$ e sua tangente em (4, 2). Determinamos o coeficiente angular da tangente calculando a derivada em $x = 4$ (Exemplo 2).

Notações

$$f'(x) = y'$$

Lê-se: "f linha de x" ou "y linha"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$
$$D(f)(x) = D_x f(x)$$

Lê-se: "derivada de y em relação a x" ou, a partir do segundo caso, "derivada de f em relação a x"

Notações

Quando queremos indicar a derivada em um valor específico $x = a$, usamos a notação

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Derivadas laterais

- Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Quando existe

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dizemos que f *é derivável à direita em* a. Analogamente dizemos que f *é derivável à esquerda em* b se existir o limite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

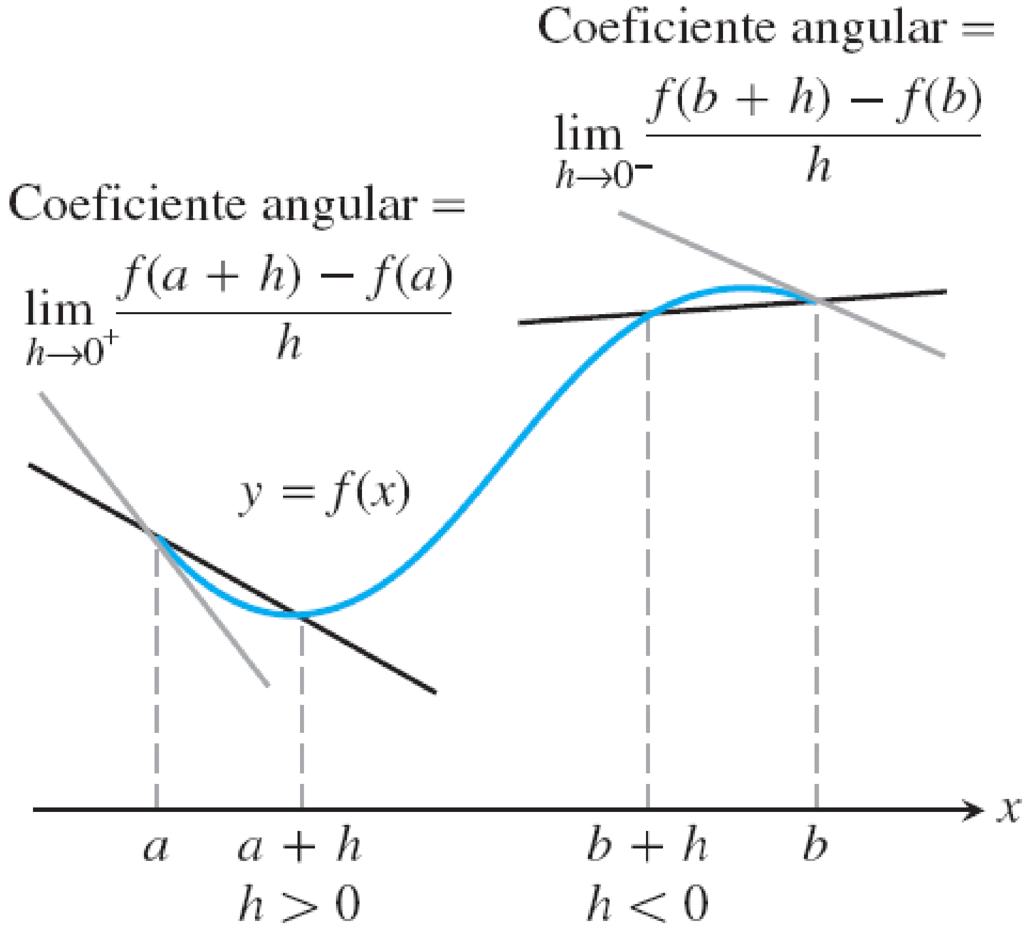


FIGURA 3.5 Derivadas em extremidades são limites laterais.

Funções não deriváveis em $x = 0$.

- Exemplo 5: $y = |x|$ não é derivável na origem.
- Exemplo 6: $y = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$.

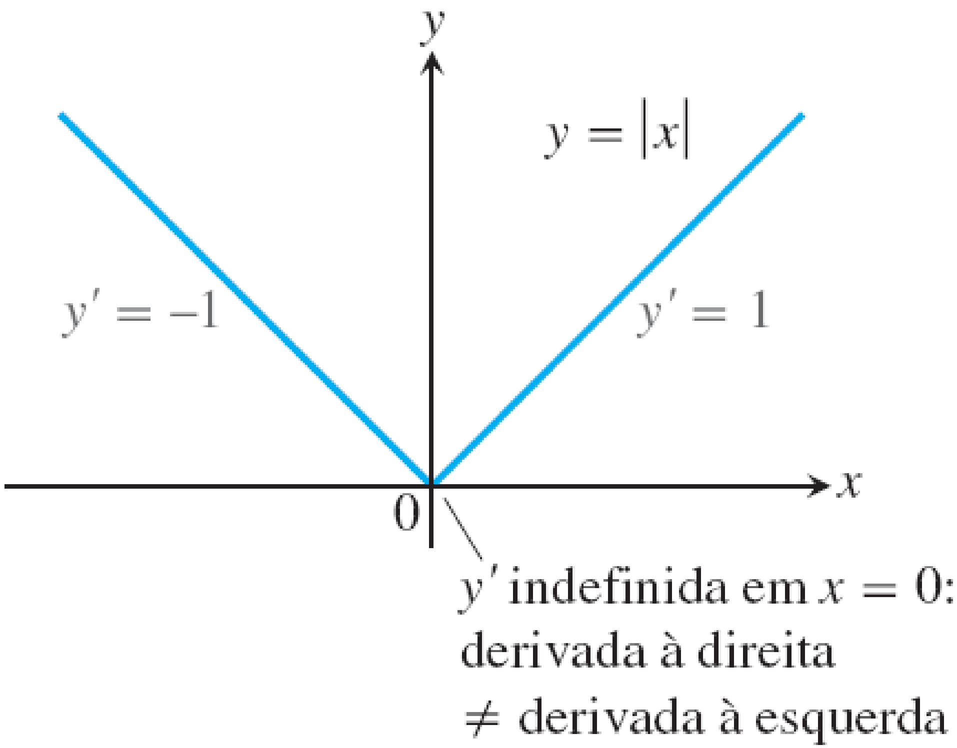
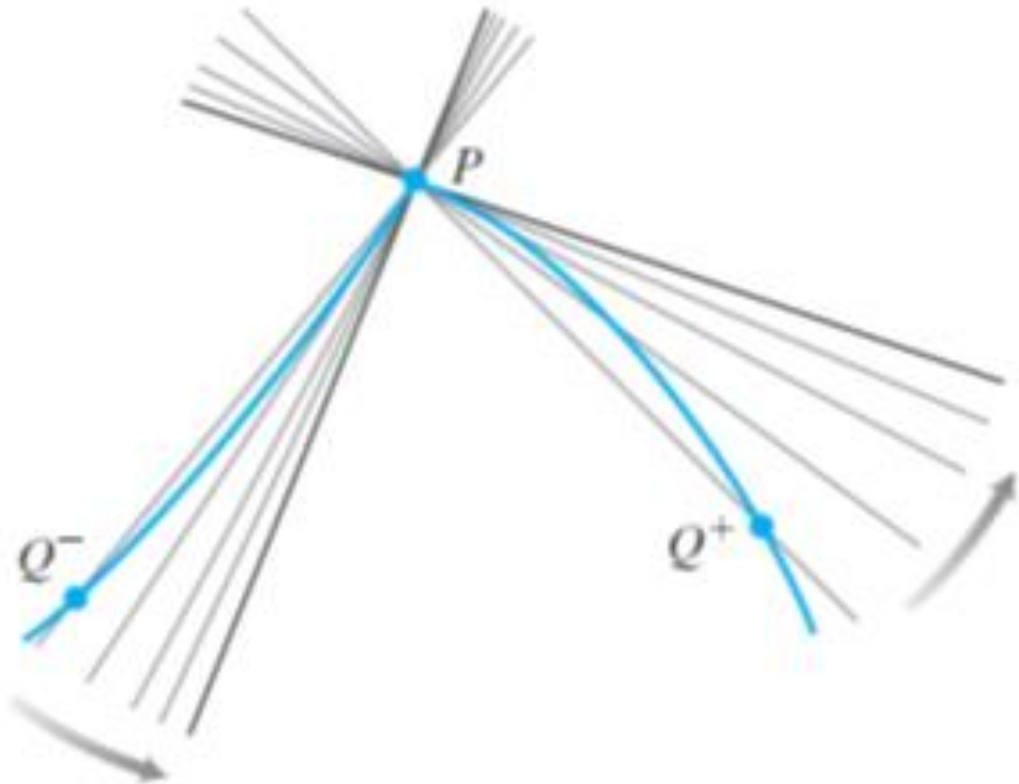


FIGURA 3.6 A função $y = |x|$ não é derivável na origem onde o gráfico tem um "bico".

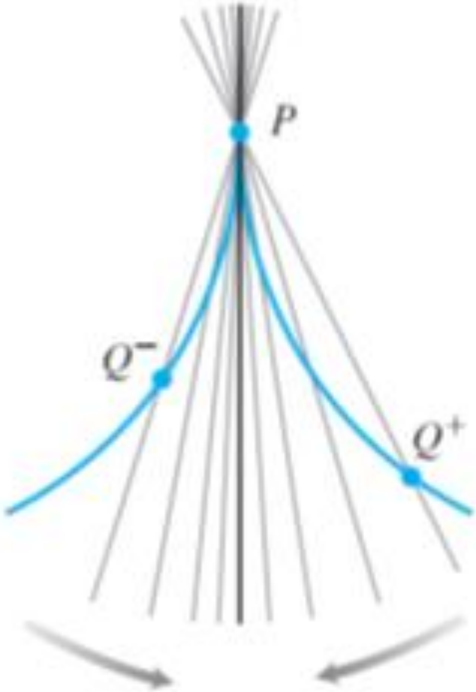
Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

1. um *bico*, onde as derivadas laterais são diferentes.



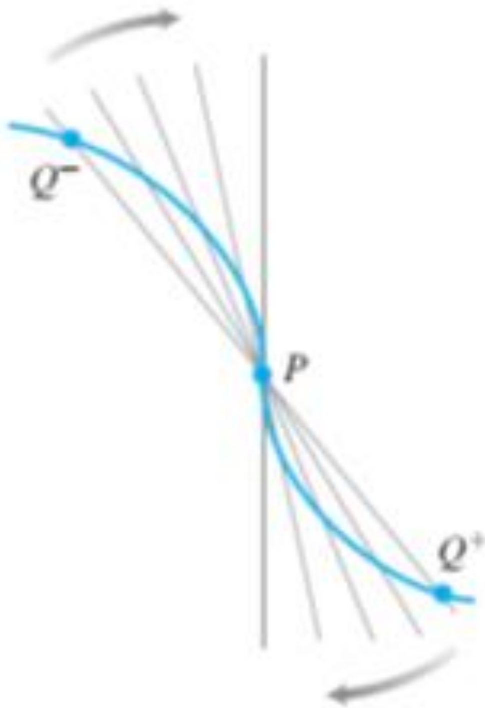
Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

2. um *ponto cuspidal*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞, de um lado, e a $-\infty$, do outro.



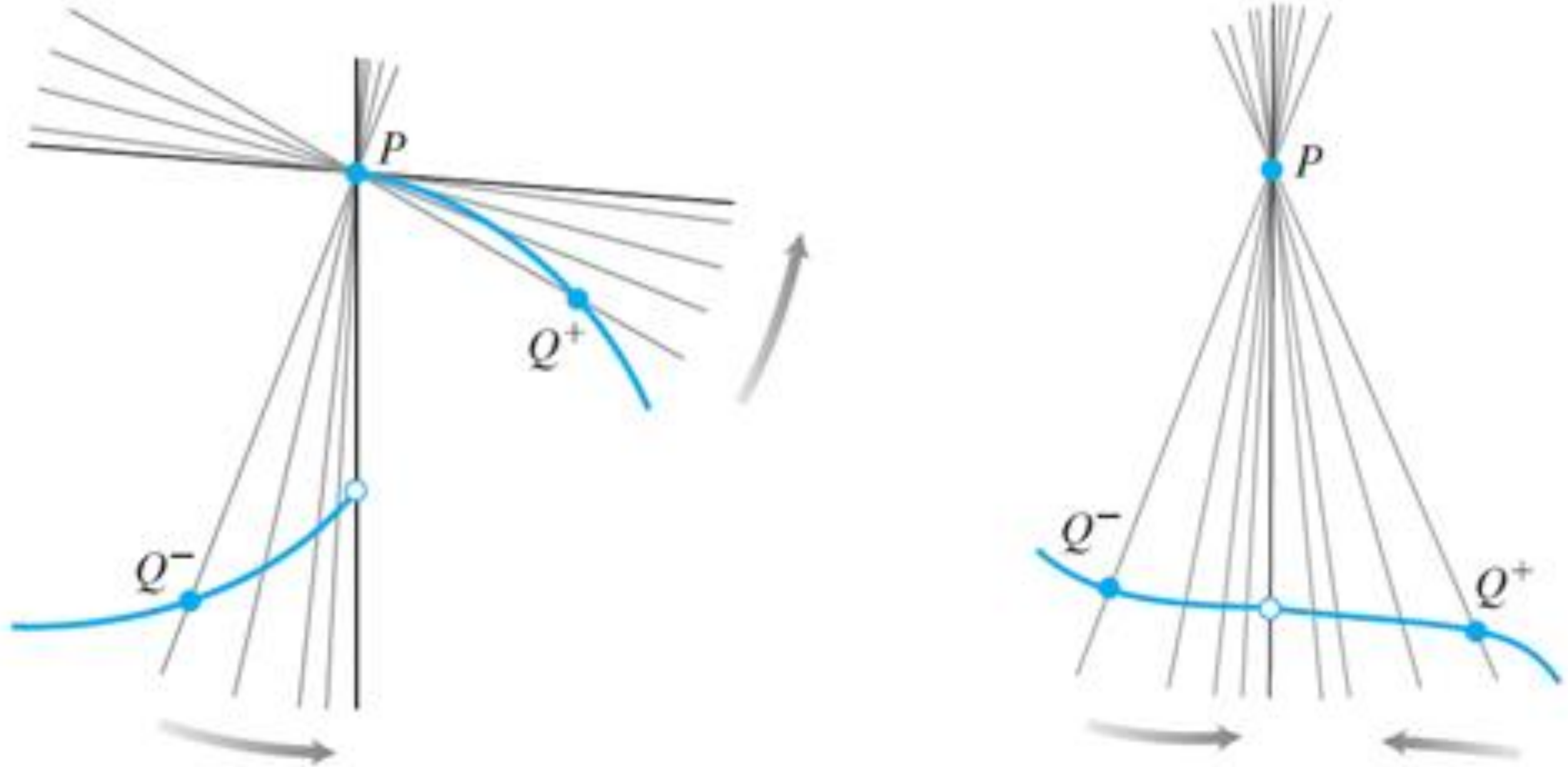
Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

3. uma *tangente vertical*, onde o coeficiente angular de PQ tende a ∞ ou a $-\infty$ de ambos os lados (aqui, $-\infty$).



Quando uma função não apresenta derivada em um ponto?

4. uma *descontinuidade.*



Teorema 1 **Diferenciabilidade (derivabilidade) implica continuidade**

Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.

Teorema 2 **Teorema de Darboux**

Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

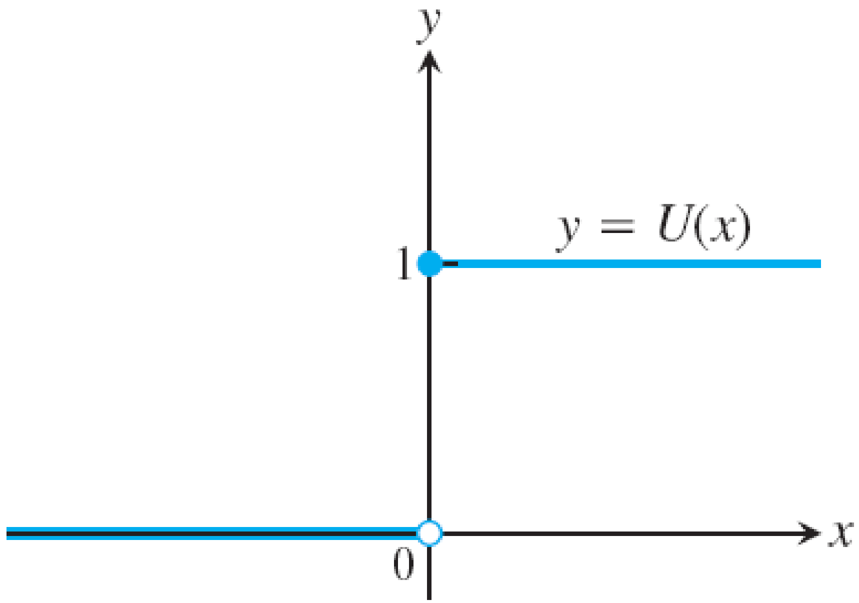


FIGURA 3.7 A função de salto unitário não tem a propriedade do valor intermediário e não pode ser a derivada de uma função da reta real.

Seção 3.2 – Regras de Derivação para Polinômios, Exponenciais, Produtos e Quocientes

Regra 1 **Derivada de uma função constante**

Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

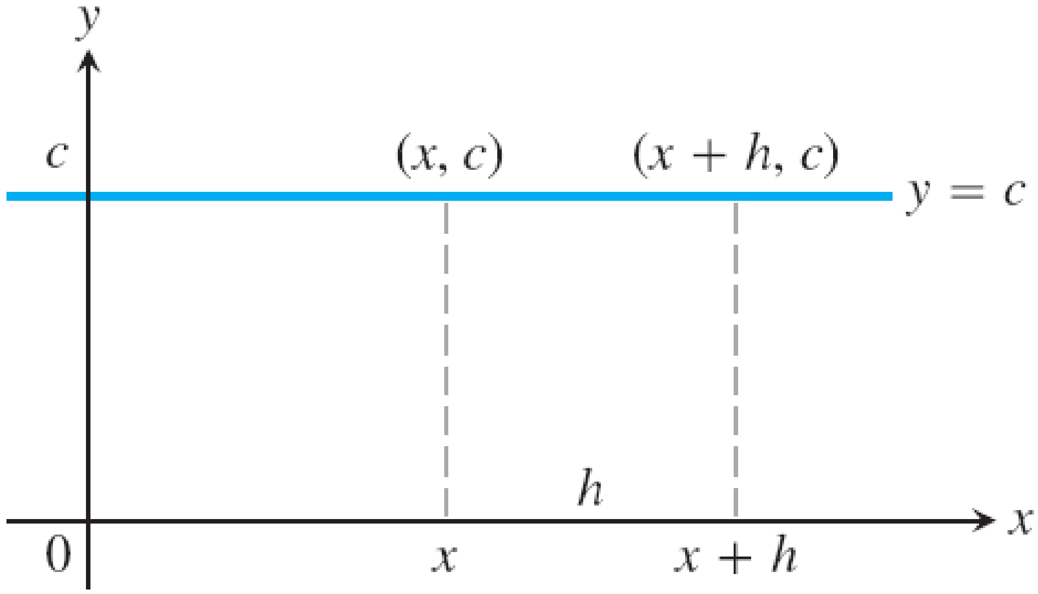


FIGURA 3.8 A regra $(d/dx)(c) = 0$ é outro modo de dizer que os valores de funções constantes nunca mudam e que o coeficiente angular de uma reta horizontal é zero em qualquer ponto.

Derivada da constante

- Exemplo 1: Se f tem valor constante $f(x) = 8$, então $f'(x) = 0$.

Regra 2 **Regra da potenciação para inteiros positivos**

Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Interpretando a regra 2

- Exemplo 2: Calcule a derivada de $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$ e $u(x) = x^4$.

Regra 3 **Regra da multiplicação por constante**

Se u é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Aplicando a regra 3

- Exemplo 3:

a) Derive $y = 3x^2$.

b) Compare $\frac{d}{dx}(-u)$ com $\frac{d}{dx}(u)$, onde u está em função de x.

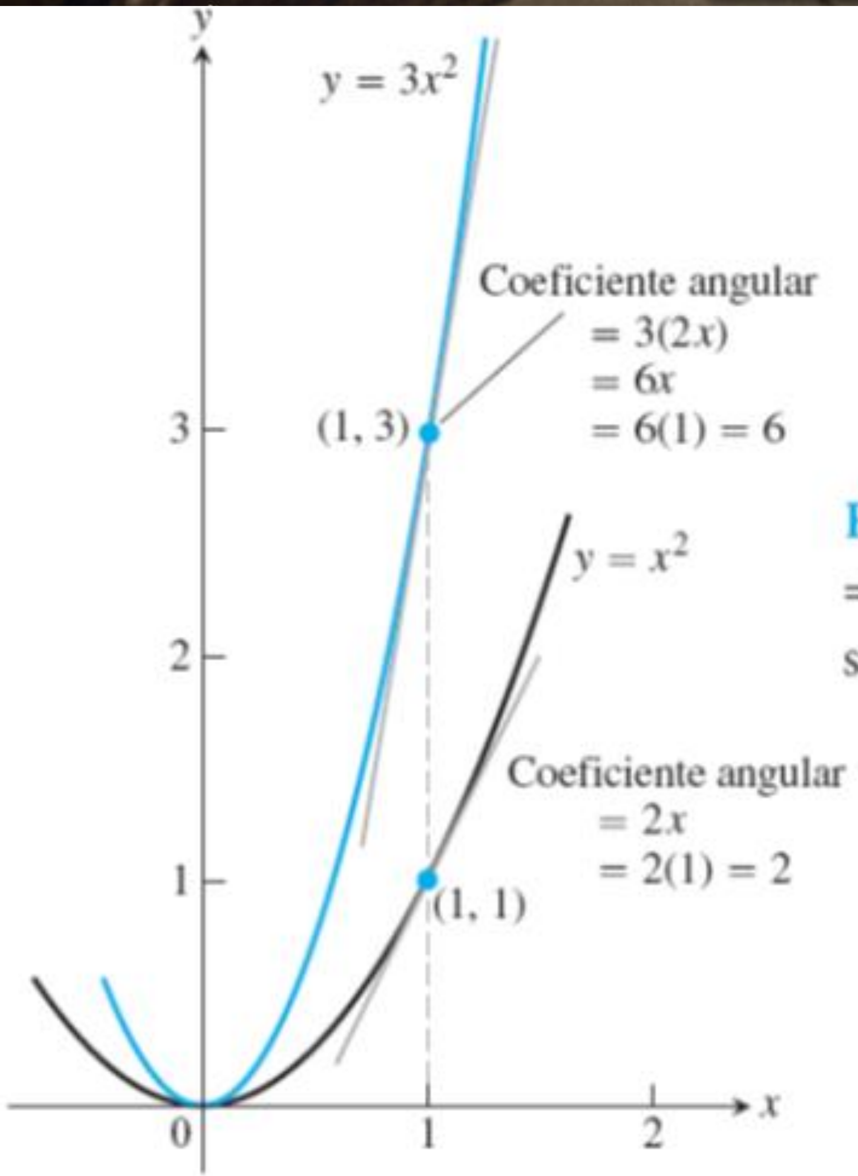


FIGURA 3.9 Os gráficos de $y = x^2$ e $y = 3x^2$. Triplicando a ordenada, triplica-se o coeficiente angular (Exemplo 3).

Regra 4 **Regra da derivada da soma**

Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas, $u + v$, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Derivada da soma

- Exemplo 4 (exercício): Derive $y = x^4 + 12x$.
- Exemplo 5 (exercício): Derive $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$.

Determinando tangentes horizontais

- Exemplo 6: A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tem alguma tangente horizontal? Se tem, ela tangencia que pontos do gráfico da função?

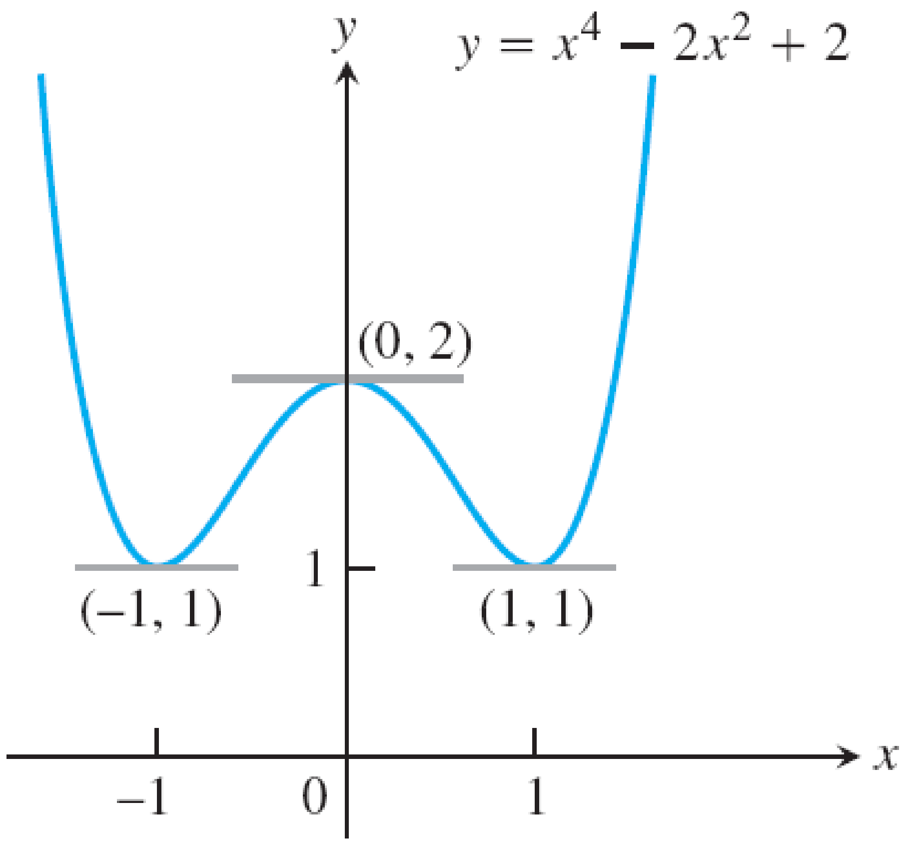


FIGURA 3.10 A curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ e suas tangentes horizontais (Exemplo 6).

Derivada da função exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Determinando uma tangente

- Exemplo 7: Determine uma equação para uma reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ e passe pela origem.

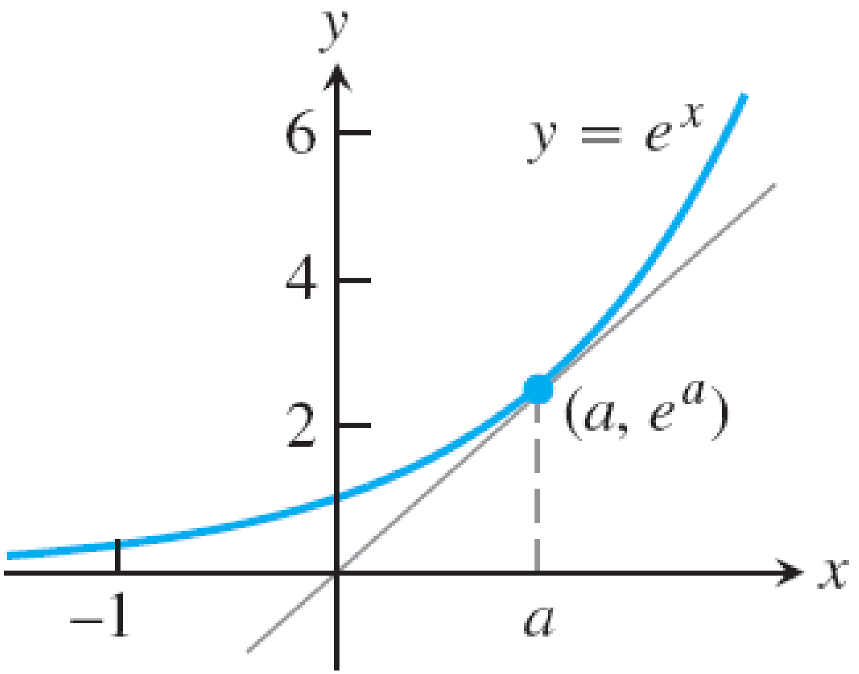


FIGURA 3.12 A reta que passa pela origem é tangente ao gráfico de $y = e^x$ quando $a = 1$ (Exemplo 7).

Regra 5 **Regra da derivada do produto**

Se u e v são deriváveis em x, então o produto uv também é, e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

- Ou também:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Usando a regra do produto

- Exemplo 8: Encontre a derivada de

$$y = \frac{1}{x}(x^2 + e^x).$$

Derivada a partir de valores numéricos

- Exemplo 9: Seja $y = uv$ o produto das funções u e v. Determine $y'(2)$ se $u(2) = 3$, $u'(2) = -4$, $v(2) = 1$ e $v'(2) = 2$.

Derivando um produto de duas maneiras

- Exemplo 10: Determine a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

Regra 6 **Regra da derivada do quociente**

Se u e v são deriváveis em x e se $v(x) \neq 0$, então o quociente u/v é derivável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

- Ou também:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Usando a regra do quociente

- Exemplo 11: Encontre a derivada de:

$a)\ y = \frac{t^2-1}{t^2+1};$

$b)\ y = e^{-x}.$

Regra 7 **Regra da potenciação para inteiros negativos**

Se n é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- Exemplo 12: Calcule:

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^3}\right)$ (Exercício).

Escolhendo a regra a ser usada

- Exemplo 13: Em vez de usar a regra do quociente para encontrar a derivada de $y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$, desenvolva o numerador e divida por x^4.

Derivadas de segunda ordem

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y''$$

Derivadas de ordem maior que dois

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Como ler os símbolos de derivadas

y'	"*y* linha"
y''	"*y* duas linhas"
$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$	"*d* dois *y* *dx* dois"
y'''	"*y* três linhas"
$y^{(n)}$	"*yn*" ou "a derivada enésima de *y*"
$\dfrac{d^n y}{dx^n}$	"*d* *n* *y* *dx* *n*"
D^n	"*D* *n*"

Determinando derivadas superiores

- Exemplo 14: Calcule as quatro primeiras derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Seção 3.3 – A Derivada como Taxa de Variação

Definição **Taxa de variação instantânea**

A **taxa de variação instantânea** de f em relação a x em x_0 é a derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Obs.: Convencionou-se usar o adjetivo *instantâneo* mesmo quando o x não representa o tempo. Entretanto, o adjetivo é frequentemente omitido e dizemos simplesmente *taxa de variação*.

Como a área de um círculo varia com o diâmetro

- Exemplo 1: A área A de um círculo está relacionada com seu diâmetro pela equação

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

A que taxa a área muda em relação ao diâmetro, quando o diâmetro é igual a 10 m?

Definição **Velocidade**

Velocidade (velocidade instantânea) é a derivada da posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Definição **Módulo da velocidade**

Módulo da velocidade é o valor absoluto da velocidade.

$$\text{Módulo da velocidade} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Movimento horizontal

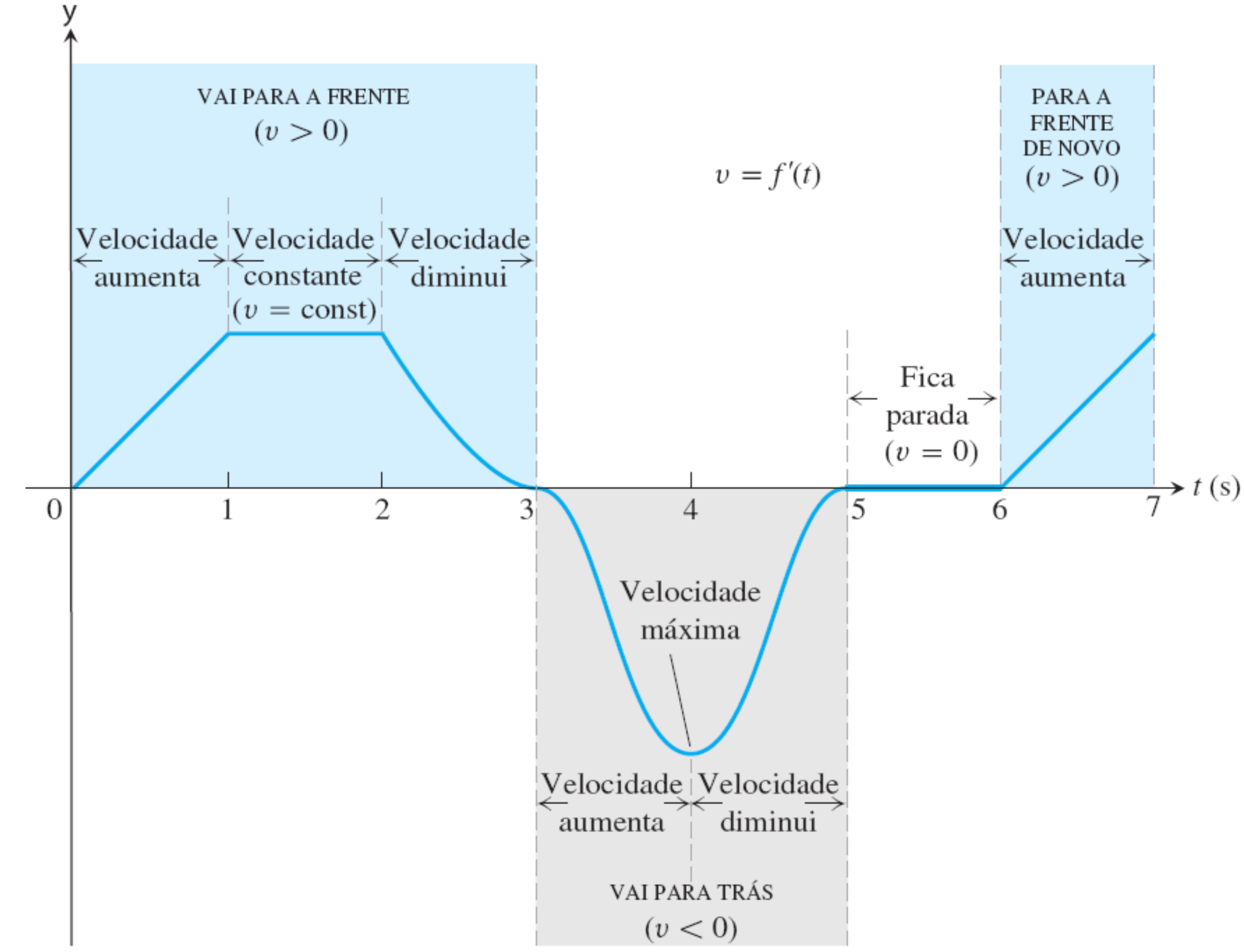


FIGURA 3.16 Gráfico da velocidade para o Exemplo 3.

Definições Aceleração, sobreaceleração

Aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Sobreaceleração é a derivada da aceleração em relação ao tempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Determinando um modelo para queda livre

- Exemplo 4: A Figura 3.17 mostra a queda livre de uma bola pesada partindo do repouso no instante $t = 0\ s$. Sabendo que o deslocamento de um objeto em queda livre é dado por $s = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$, responda:

a) Quantos metros a bola cai nos primeiros $2\ s$?

b) Quais são sua velocidade, o módulo de sua velocidade, sua aceleração e sua sobreaceleração nesse instante?

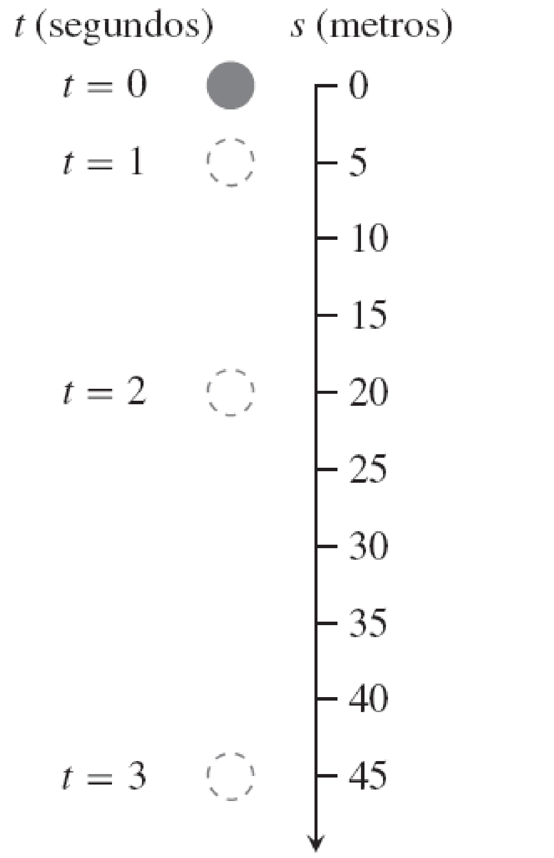


FIGURA 3.17 Uma esfera de aço caindo a partir do repouso (Exemplo 4).

Determinando um modelo para movimento vertical

- Exemplo 5: Uma carga de dinamite lança uma pedra pesada para cima com uma velocidade de lançamento de 160 $pés/s$ (aproximadamente 109 mi/h) (Figura 3.18a). A pedra atinge uma altura de $s = 160t - 16t^2$ $pés$ após t segundos.

a) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

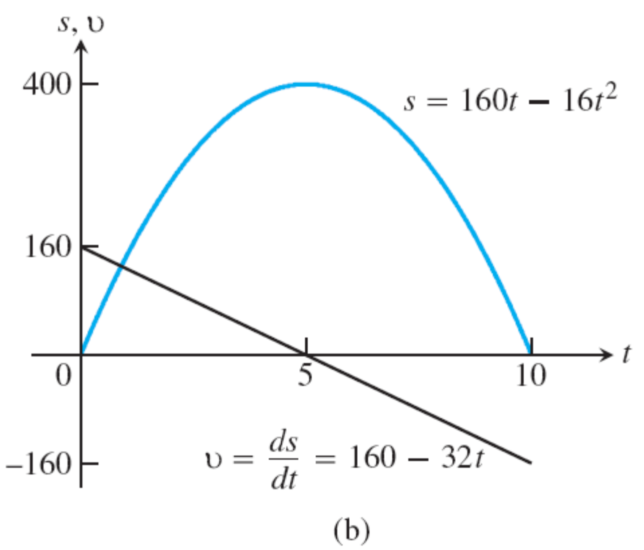
b) Quais são a velocidade e o módulo da velocidade da pedra quando ela está a 256 $pés$ do solo na subida? E na descida?

Determinando um modelo para movimento vertical

- Exemplo 5:

c) Qual é a aceleração da pedra em qualquer instante t durante sua trajetória (depois da explosão)?

d) Quando a pedra atingirá o solo novamente?



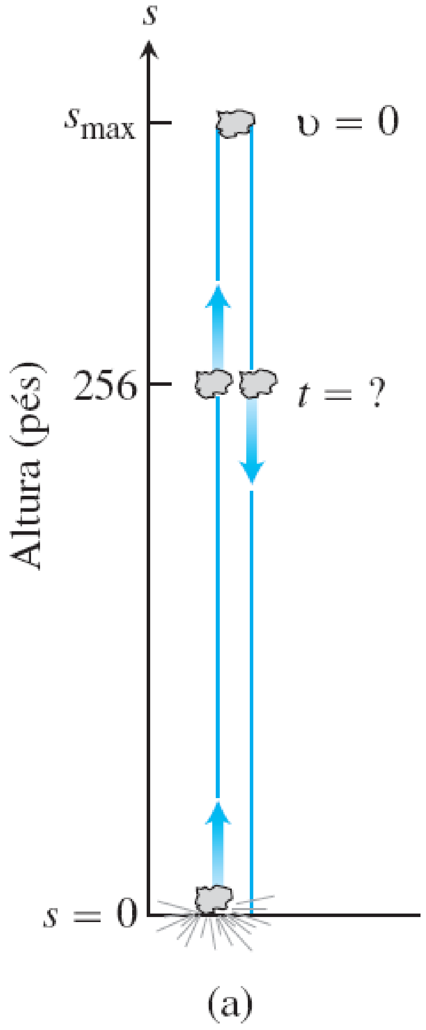


FIGURA 3.18 (a) A pedra do Exemplo 5. (b) Gráficos de s e v em função do tempo; s é máximo quando $v = ds/dt = 0$. O gráfico de s *não* é a trajetória da pedra: é o gráfico da altura pelo tempo. O coeficiente angular do gráfico da velocidade da pedra está representado aqui como uma linha reta.

Seção 3.4 - Derivadas de Funções Trigonométricas

A derivada da função seno é a função cosseno:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Derivadas envolvendo seno

- Exemplo 1: (Exercício)

$a)\ y = x^2 - \operatorname{sen} x\,;$

$b)\ y = e^x \cdot \operatorname{sen} x\,;$

$c)\ y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}.$

A derivada da função cosseno é o oposto da função seno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

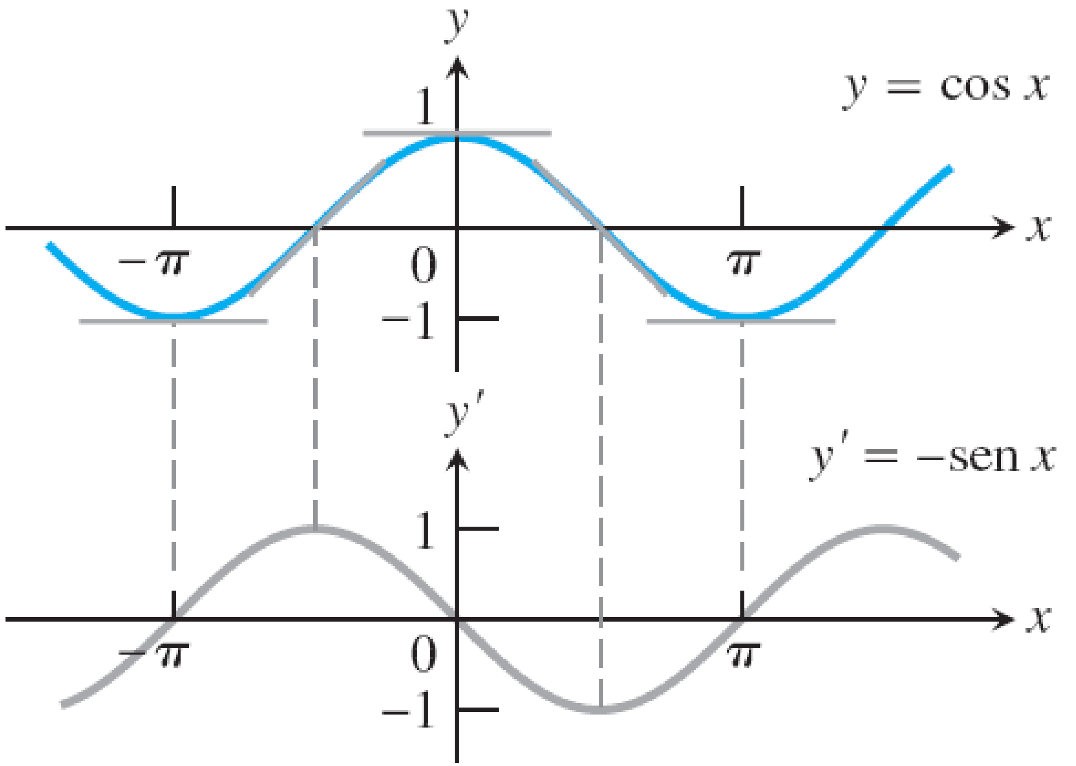


FIGURA 3.23 Curva $y' = -\text{sen}\ x$ e o gráfico dos coeficientes angulares das tangentes à curva $y = \cos x$.

Derivadas envolvendo cosseno

- Exemplo 2:

$a)\ y = 5e^x + \cos x;$

$b)\ y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x;$

$c)\ y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}.$

Derivadas das outras funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

- Exemplo 5: Calcule $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)$. (Exercício) Dica: escreva $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e use a regra da derivada pelo quociente.
- Exemplo 6: Determine y'' se $y = \sec x$.

Seção 3.5 – A Regra da Cadeia e as Equações Paramétricas

Teorema 3 **A regra da cadeia**

Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é derivável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

onde dy/du é calculada em $u = g(x)$.

Aplicando a regra da cadeia

- Exemplo 3: Um objeto se desloca ao longo do eixo x de modo que em qualquer instante $t \geq 0$ sua posição seja dada pela equação $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine a velocidade do objeto em função de t.

Derivando de fora para dentro

- Exemplo 4 (Exercício): Derive $\text{sen}(x^2 + x)$ em relação a x.

Aplicando a regra da cadeia à função exponencial

- Exemplo 5: Derive $y = e^{\cos x}$.

A "cadeia" de três elos

- Exemplo 6: Encontre a derivada de $g(t) = \operatorname{tg}[5 - \operatorname{sen}(2t)]$.

Aplicando a regra da cadeia para potências

- Exemplo 7 (Exercício): Calcule

$a)\ \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7$

$b)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right)$

Determinando coeficientes angulares das tangentes

- Exemplo 8:

a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \operatorname{sen}^5 x$ quando $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Mostre que o coeficiente angular de qualquer reta tangente à curva $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ é positivo.

Definição **Curva parametrizada**

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

ao longo de um intervalo de valores de t, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações é uma **curva parametrizada**. As equações são **equações paramétricas** para a curva.

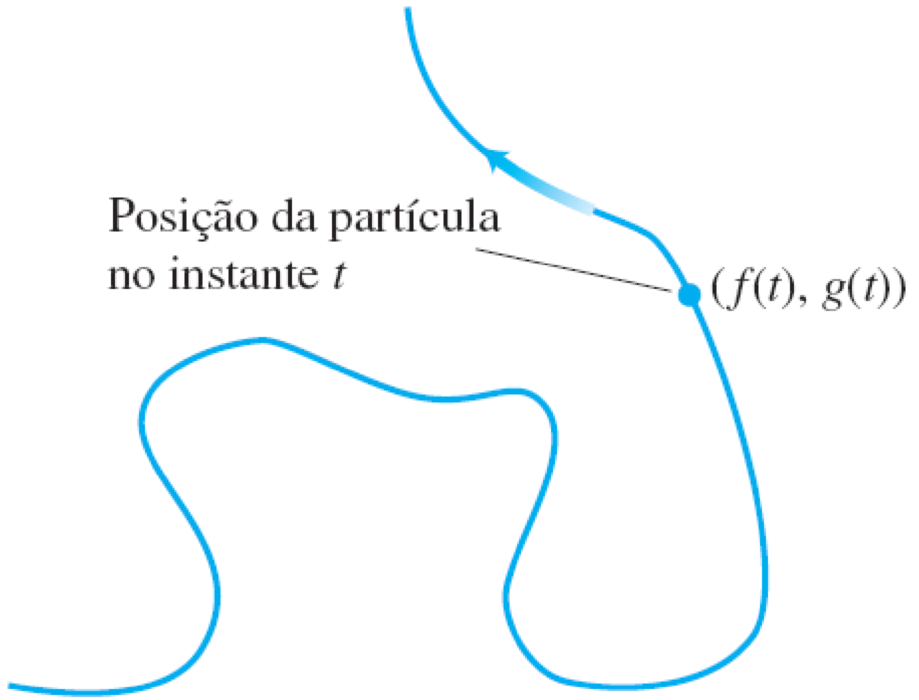


FIGURA 3.29 O caminho percorrido por uma partícula deslocando-se no plano xy nem sempre é o gráfico de uma função de x ou de uma função de y.

Circunferência no sentido anti-horário

- Exemplo 10: As equações paramétricas $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ descreve a circunferência de raio a no sentido anti-horário. Note que a equação dessa circunferência é $x^2 + y^2 = a^2$ e que $(a\cos t)^2 + (a\,\text{sen}\,t)^2 = a^2$ (verifique!).

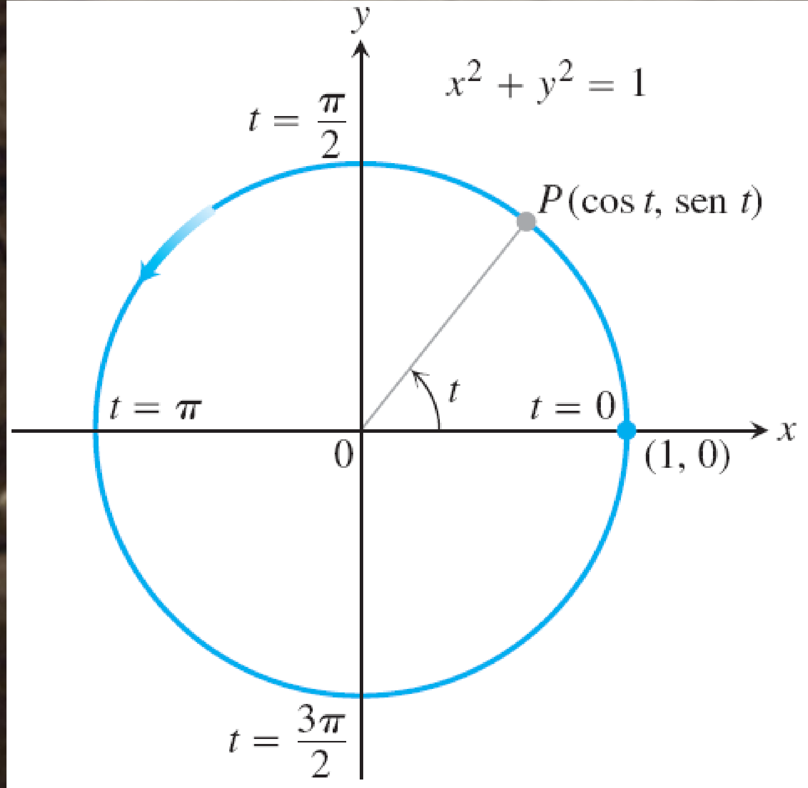


FIGURA 3.30 As equações $x = \cos t$ e $y = \text{sen } t$ descrevem o movimento na circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A seta mostra o sentido de aumento de t (Exemplo 10).

- Exemplo 11: A curva descrita pelas equações paramétricas $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $t \geq 0$ descreve a metade da direita de uma parábola de concavidade voltada para cima (vide figura 3.31).

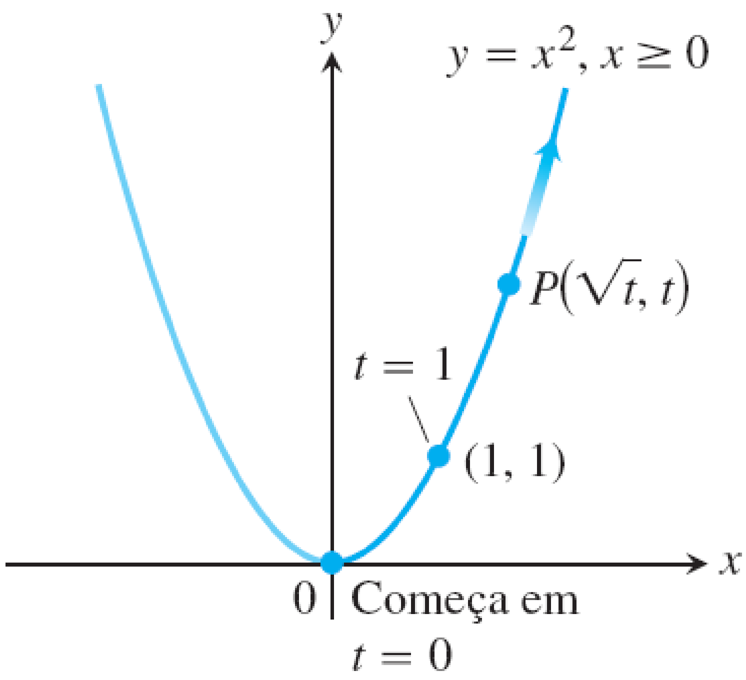


FIGURA 3.31 As equações $x = \sqrt{t}$ e $y = t$ e o intervalo $t \geq 0$ descrevem o movimento de uma partícula que percorre o ramo direito da parábola $y = x^2$ (Exemplo 11).

Fórmula paramétrica para dy/dx

Se as três derivadas existem e $dx/dt \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{2}$$

Deslocamento ao longo da elipse

- Exemplo 13: A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser parametrizada por $x = a\cos t$ e $y = b\,\text{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Encontre a reta tangente ao ponto $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ quando $t = \frac{\pi}{4}$. (Considere a e b reais positivos)

Fórmula paramétrica para d^2y/dx^2

Se as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ definem y como uma função de x derivável duas vezes, então em qualquer ponto onde $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{3}$$

Determinando d^2y/dx^2 para uma curva parametrizada

- Exemplo 14: Determine d^2y/dx^2 em função de t, se $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Parametrizações-padrão e regras de derivadas

CIRCUNFERÊNCIA $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = a \cos t$$
$$y = a \operatorname{sen} t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

ELIPSE $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

FUNÇÃO $y = f(x)$:

$$x = t$$
$$y = f(t)$$

DERIVADAS

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Figuras dos exercícios da seção

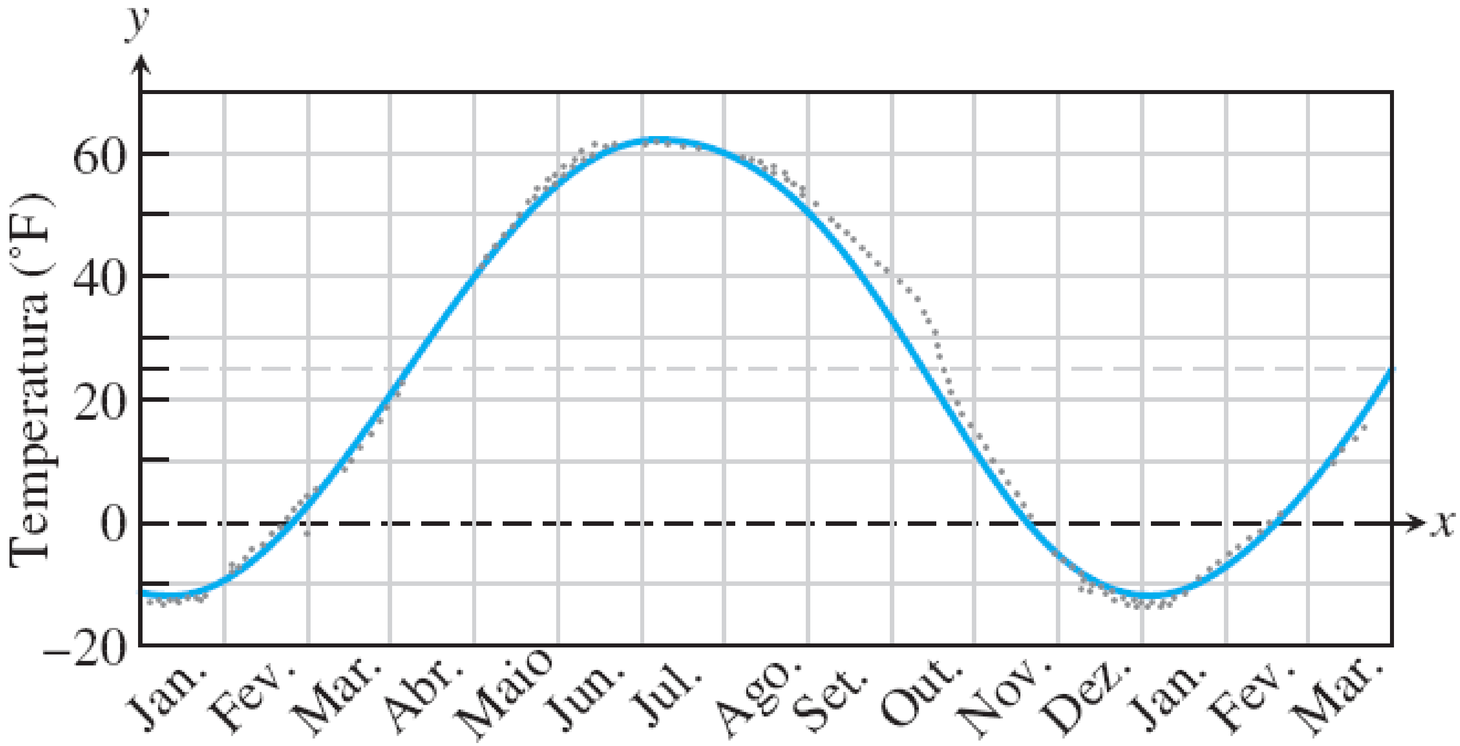


FIGURA 3.33 Temperatura média normal do ar em Fairbanks, Alasca (registro pontilhado) e a função seno aproximadora (Exercício 110).

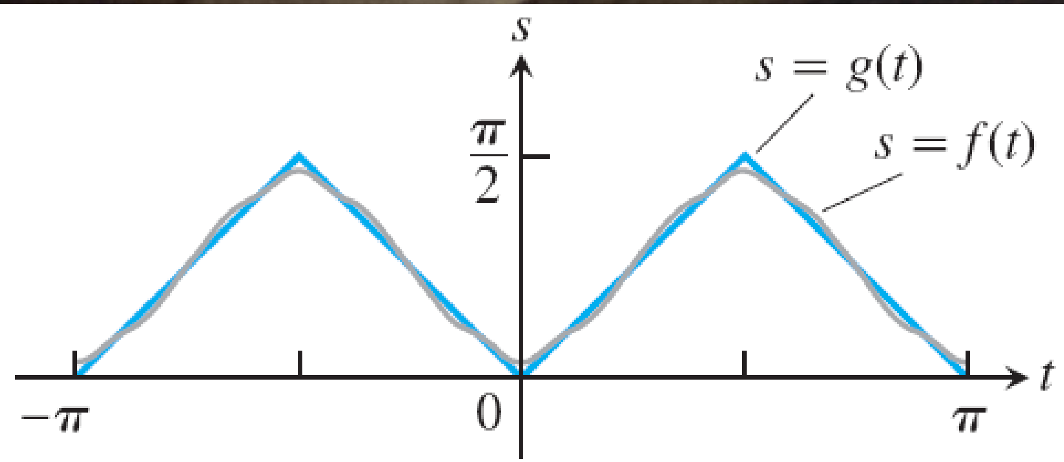


FIGURA 3.34 Estimativa da função dente-de-serra por um "polinômio" trigonométrico (Exercício 125).

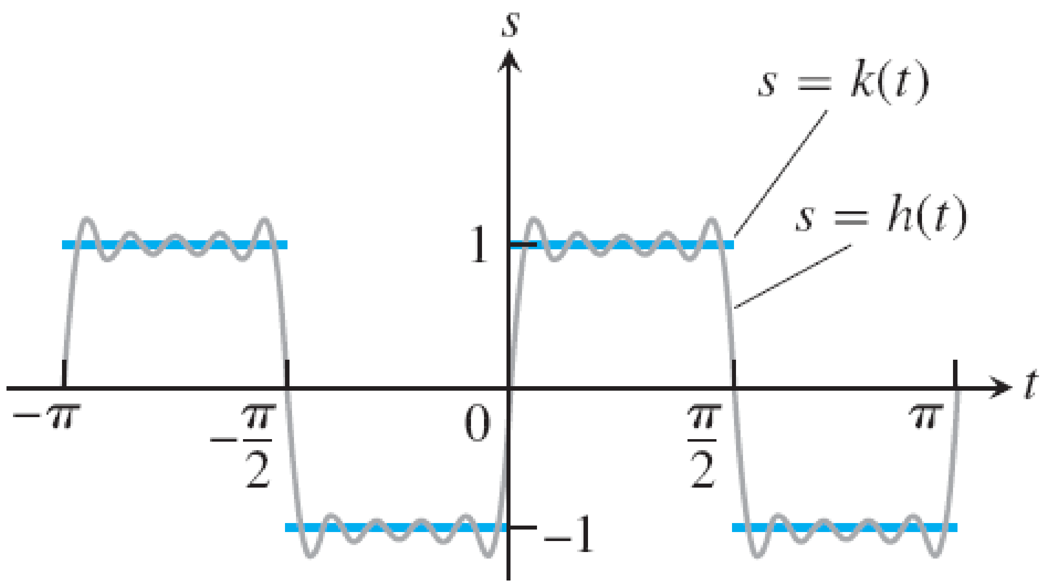


FIGURA 3.35 Aproximação de uma função escada por um "polinômio" trigonométrico (Exercício 126).

Seção 3.6 – Derivação Implícita

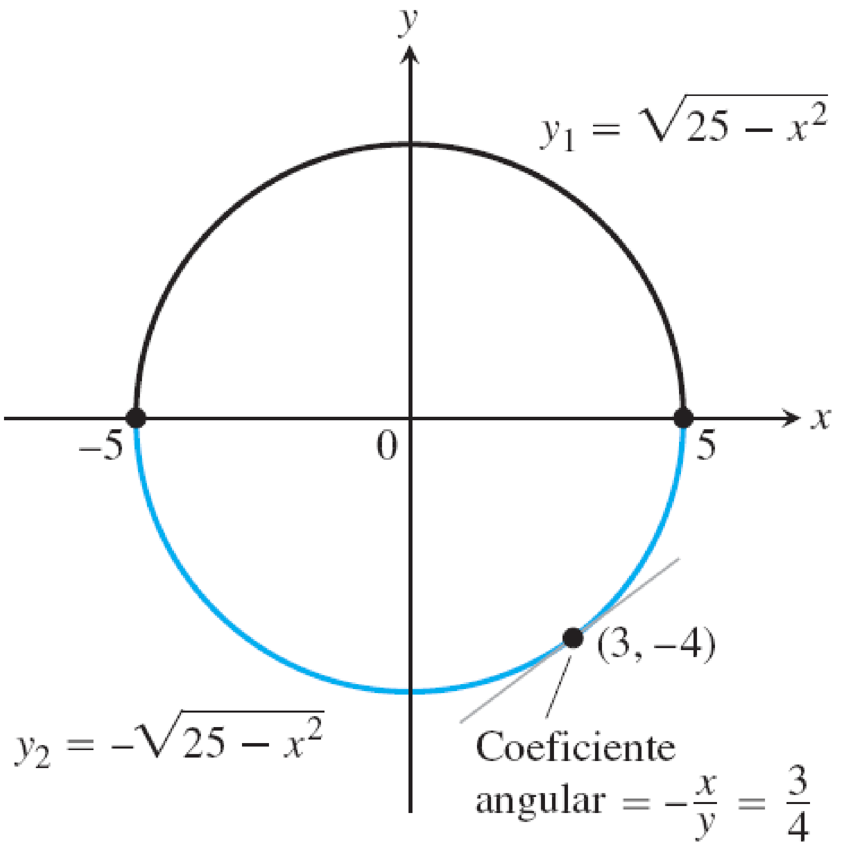


FIGURA 3.36 O círculo combina os gráficos de duas funções. O gráfico de y_2 é o semicírculo inferior e passa por $(3, -4)$.

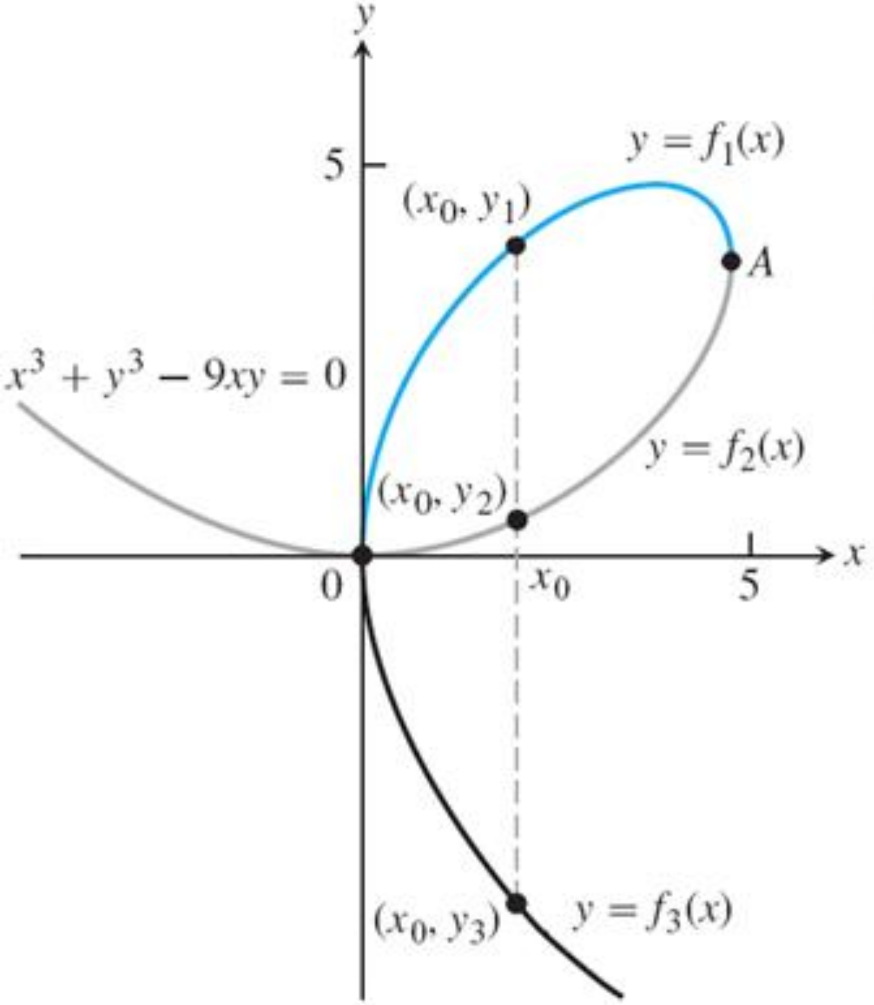


FIGURA 3.38 A curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ não é o gráfico de nenhuma função de x. Entretanto, ela pode ser dividida em arcos separados, que são, *sim*, gráficos de funções de x. Essa curva específica, chamada fólio, remonta a Descartes, em 1638.

Derivando implicitamente

- Exemplo 1: Determine $\frac{dy}{dx}$ se $y^2 = x$.

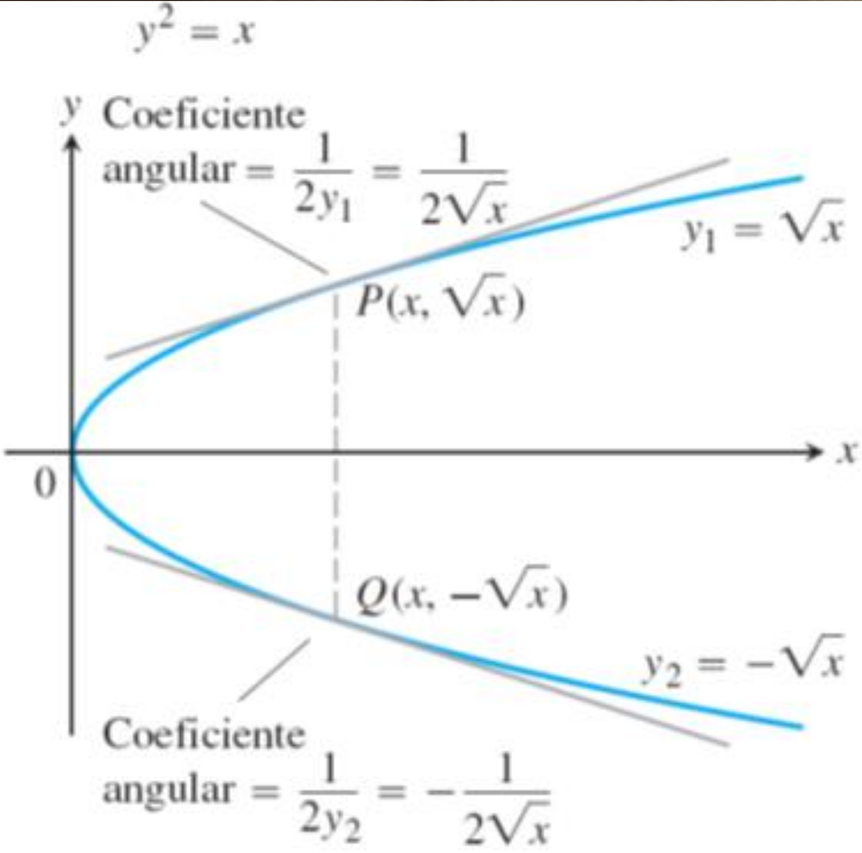


FIGURA 3.37 A equação $y^2 - x = 0$ ou $y^2 = x$, como geralmente é escrita, define duas funções deriváveis de x no intervalo $x \geq 0$. O Exemplo 1 mostra como encontrar as derivadas dessas funções sem resolver y na equação $y^2 = x$.

Coeficiente angular de um círculo em determinado ponto

- Exemplo 2: Determine o coeficiente angular do círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3; -4)$.

Derivando implicitamente

- Exemplo 3: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y^2 = x^2 + \operatorname{sen}(xy).$$

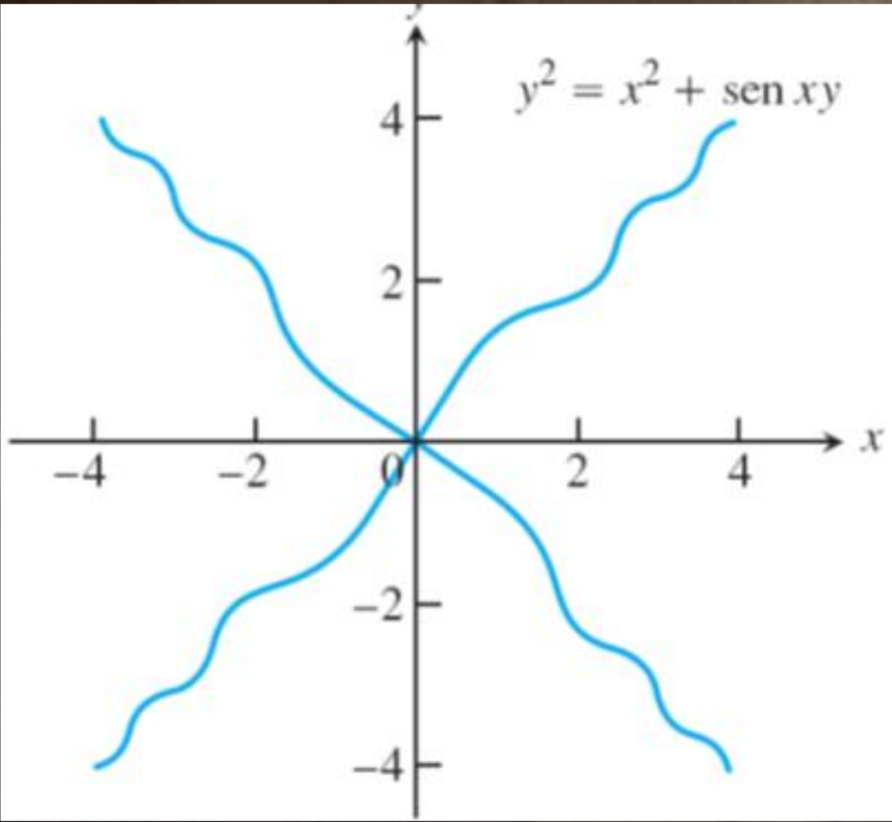


FIGURA 3.39 Gráfico de $y^2 = x^2 +$ sen xy (Exemplo 3). O exemplo mostra como encontrar os coeficientes angulares nessa curva definida implicitamente.

Derivação implícita

1. Derive os dois lados da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável de x.
2. Reúna os termos que contêm dy/dx em um lado da equação.
3. Encontre dy/dx.

Segunda derivada implicitamente

- Exemplo 5: Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Teorema 4 **Regra da potenciação para potências racionais**

Se p/q é um número racional, então $x^{p/q}$ é derivável em qualquer ponto interior do domínio de $x^{(p/q)-1}$ e

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

Usando a Teorema 4

- Exemplo 6: (Exercício)

$a)\ \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right);$

$b)\ \frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right);$

$c)\ \frac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right).$

Usando as regras da potenciação racional e da cadeia

- Exemplo 7: (Exercício) Calcule

$$a)\ \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4};$$

$$b)\ \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5}.$$

Seção 3.7 – Derivadas de Funções Inversas e Logarítmicas

Aplicando o Teorema 5

- Exemplo: Calcule a derivada de $y = \ln x$ usando derivação implícita.

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0 \tag{2}$$

- Exemplo 3: Calcule:

a) $\frac{d}{dx}[\ln(2x)]$;

b) $\frac{d}{dx}[\ln(x^2+3)]$. (Exercício)

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \tag{4}$$

Uma reta tangente que passa pela origem

- Exemplo 4: Uma reta cujo coeficiente angular m passa pela origem é tangente à curva de $y = \ln x$. Qual é o valor de m?

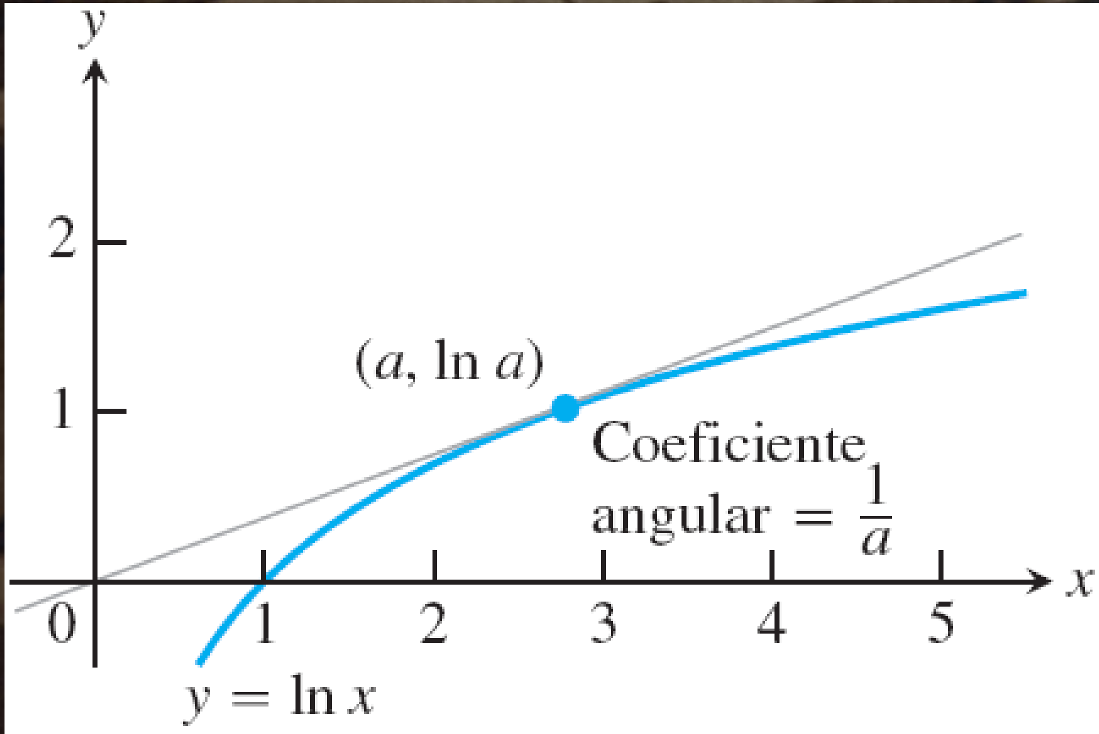


FIGURA 3.46 A reta tangente corta a curva em algum ponto (a, ln a), onde o coeficiente angular da curva é $1/a$ (Exemplo 4).

- Exemplo: Calcule a derivada de $y = a^x$ usando o fato que $a^x = e^{x \ln a}$.

Se $a > 0$ e u é uma função derivável de x, então a^u é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \, \frac{du}{dx} \tag{5}$$

- Exercício: Calcule a derivada de $y = \log_a x$ usando o fato que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx} \qquad (7)$$

O longo caminho com a regra da cadeia

- Exemplo 5: Determine $\frac{dy}{dx}$ se $y = \log_a a^{\operatorname{sen} x}$.

Usando a derivação logarítmica

- Exemplo 6: Determine $\frac{dy}{dx}$ se $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \quad x > 1.$

Regra da potenciação (forma geral)

Se u é uma função positiva derivável de x e n é qualquer número real, então u^n é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{8}$$

Regra da potenciação com potências irracionais

- Exemplo 7: Calcule:

$a)\ \frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}};$

$b)\ \frac{d}{dx}[2+\text{sen}(3x)]^{\pi}$. (Exercício)

- Exemplo 8: Derive x^x, com $x > 0$.

Teorema 6 **O número *e* como um limite**

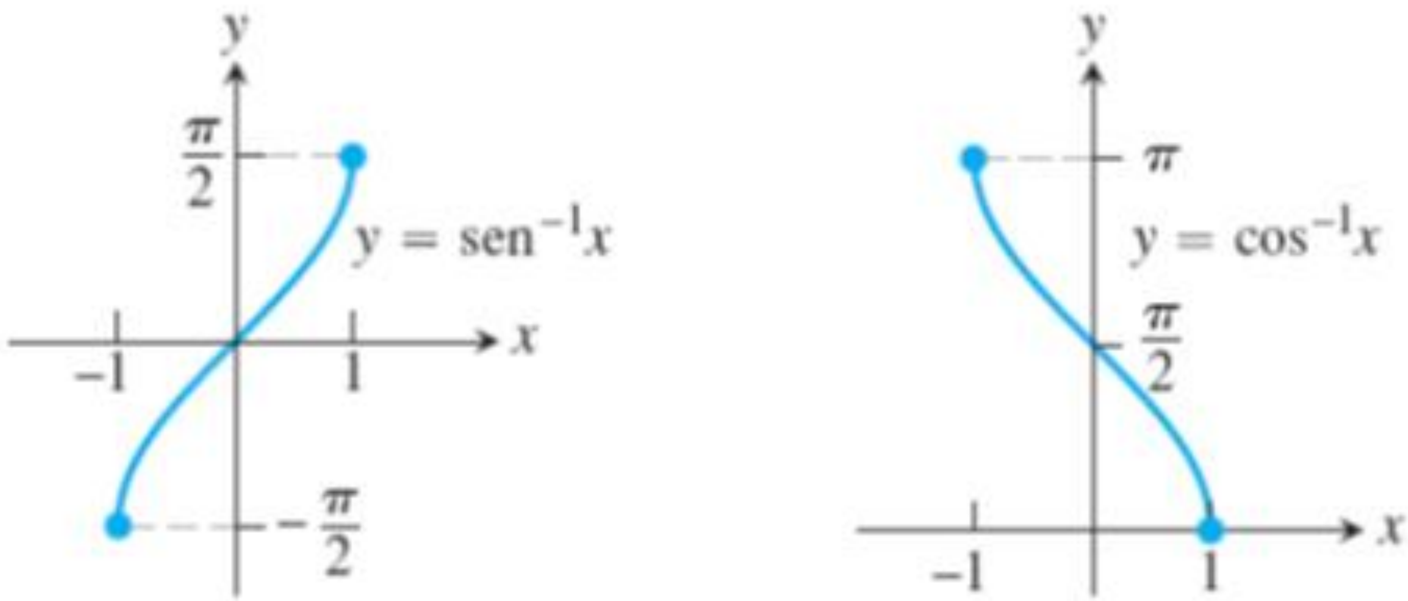
O número e pode ser calculado como o limite

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Seção 3.8 – Funções Trigonométricas Inversas

Domínio: $-1 \leq x \leq 1$
Imagem: $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

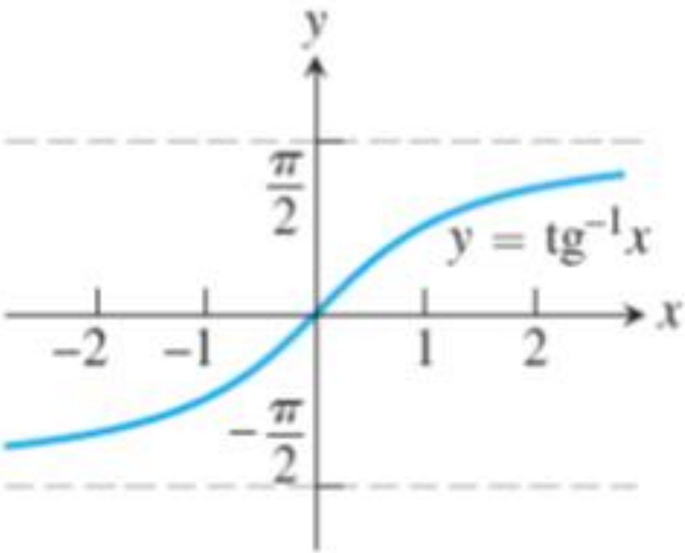
Domínio: $-1 \leq x \leq 1$
Imagem: $0 \leq y \leq \pi$



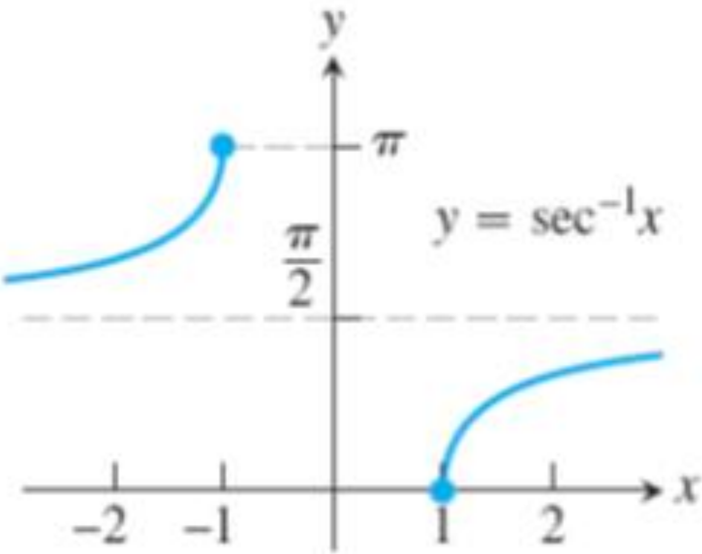
(a) (b)

Domínio: $-\infty < x < \infty$
Imagem: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Domínio: $x \leq -1$ ou $x \geq 1$
Imagem: $0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$



(c)



(d)

Domínio: $x \leq -1$ or $x \geq 1$
Imagem: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$

Domínio: $-\infty < x < \infty$
Imagem: $0 < y < \pi$

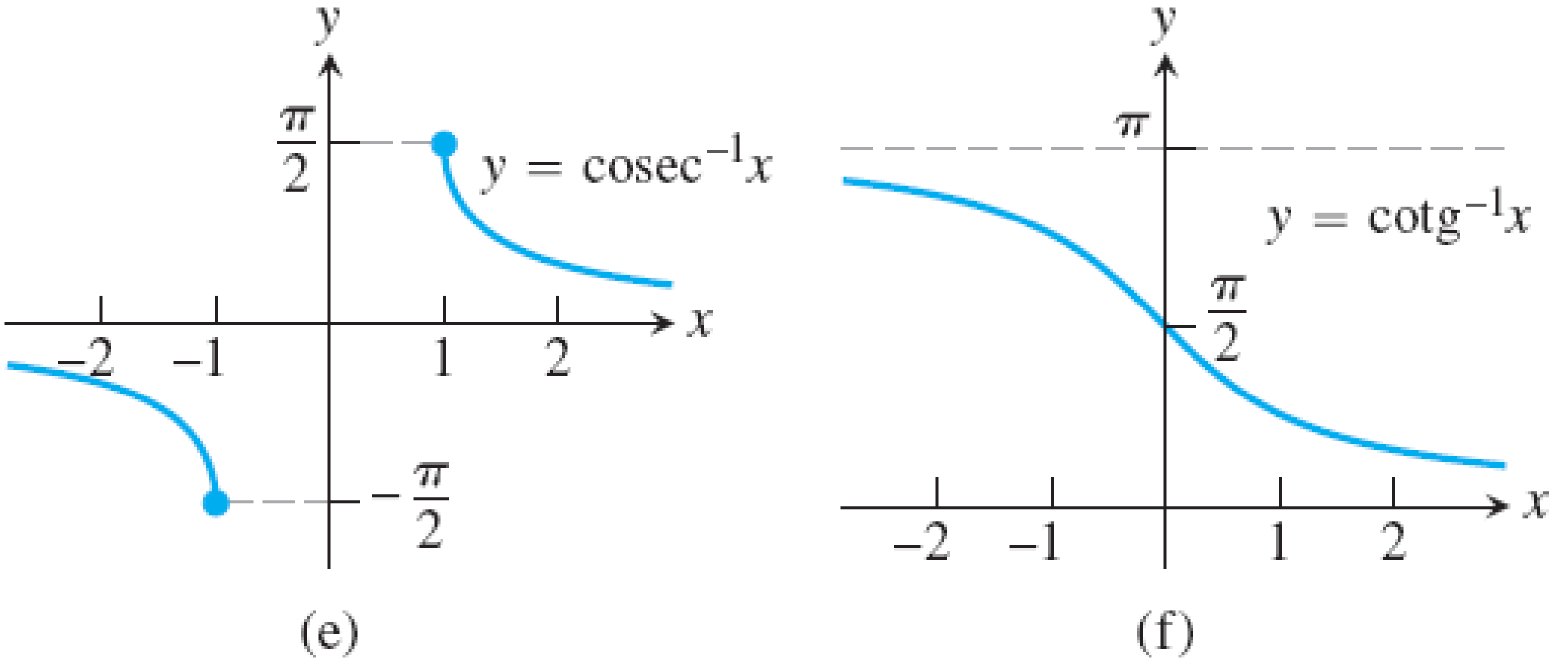


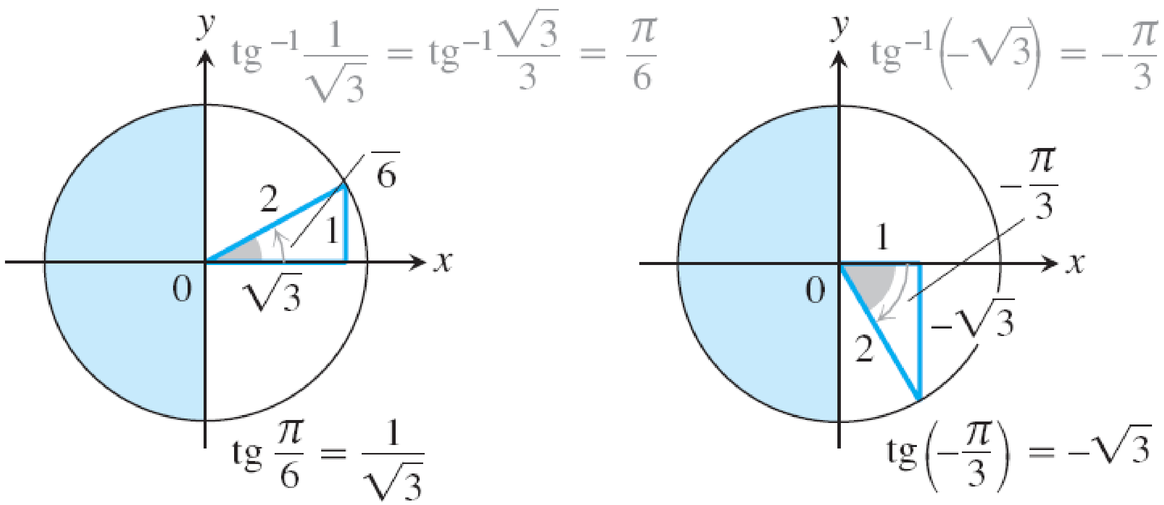
FIGURA 3.47 Gráficos das seis funções trigonométricas inversas básicas.

Definição Funções arco tangente e arco cotangente

$\mathbf{y = tg^{-1}\,x}$ é o número em $(-\pi/2, \pi/2)$ para o qual tg $y = x$.

$\mathbf{y = cotg^{-1}\,x}$ é o número em $(0, \pi)$ para o qual cotg $y = x$.

EXEMPLO 1 Valores comuns de $\operatorname{tg}^{-1} x$



x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

Os ângulos vêm do primeiro e do quarto quadrantes, pois a imagem de $\operatorname{tg}^{-1} x$ é $(-\pi/2, \pi/2)$.

Para uma revisão mais detalhada das funções trigonométricas inversas, consulte a seção 1.6 do livro.

EXEMPLO 3

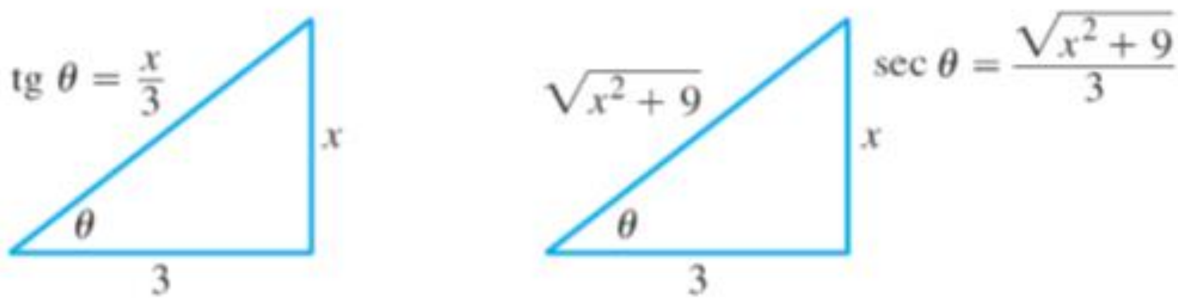
Determine $\sec\left(\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x}{3}\right)$.

SOLUÇÃO Vamos considerar $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(x/3)$ (para dar um nome ao ângulo) e desenhar θ em um triângulo retângulo com

$$\mathrm{tg}\,\theta = \text{cateto oposto}/\text{cateto adjacente} = x/3.$$

O comprimento da hipotenusa do triângulo é

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$



Logo,

$$\sec\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adjacente}}$$

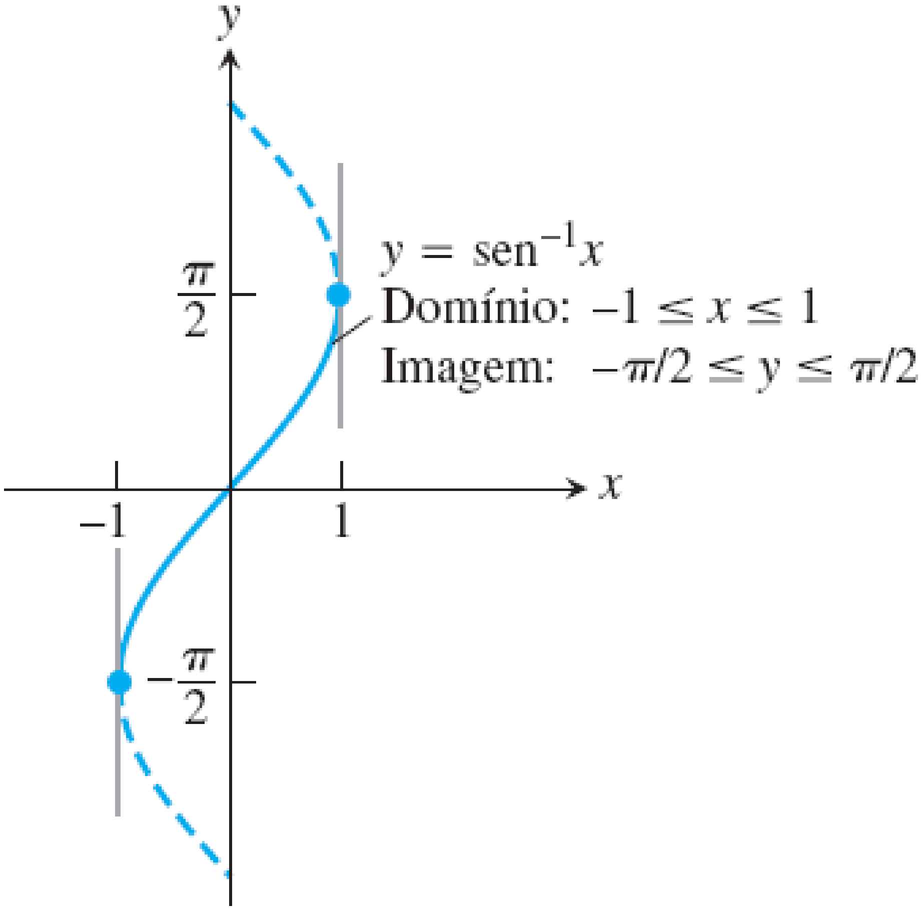


FIGURA 3.50 O gráfico de $y = \text{sen}^{-1} x$ possui tangentes verticais em $x = -1$ e $x = 1$.

Derivadas de funções trigonométricas inversas

- Exemplos: Calcule as derivadas das funções $y = \text{arc sen}\, x$ e $y = \text{arc tg}\, x$.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Aplicando as fórmulas

- Exemplo 4: Calcule $\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\, x^2)$ (Exercício).
- Exemplo 5: Uma partícula se desloca ao longo do eixo x de modo que, em qualquer instante $t \geq 0$, sua posição seja dada por

$$x(t) = \text{arc tg}\,\sqrt{t}.$$

Qual será a velocidade da partícula quando $t = 16$?

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

Usando a fórmula

- Exemplo 6: Determine $\frac{d}{dx}[\text{arc sec}(5x^4)]$.

Identidades da função inversa — co-função inversa

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{sen}^{-1} x$$
$$\operatorname{cotg}^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} x$$
$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

Uma reta tangente à curva arco cotangente

- Exemplo 7: Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \text{arc cotg}\, x$ em $x = -1$.

TABELA 3.1 Derivadas das funções trigonométricas inversas

1. $$\frac{d(\operatorname{sen}^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

2. $$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

3. $$\frac{d(\operatorname{tg}^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{1+u^2}$$

4. $$\frac{d(\operatorname{cotg}^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{1+u^2}$$

5. $$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

6. $$\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

Seção 3.9 – Taxas Relacionadas

Esvaziando um tanque

- Exemplo 1: A que taxa o nível do líquido diminui dentro de um tanque cilíndrico vertical se bombearmos o líquido para fora a uma taxa de 3.000 l/min?

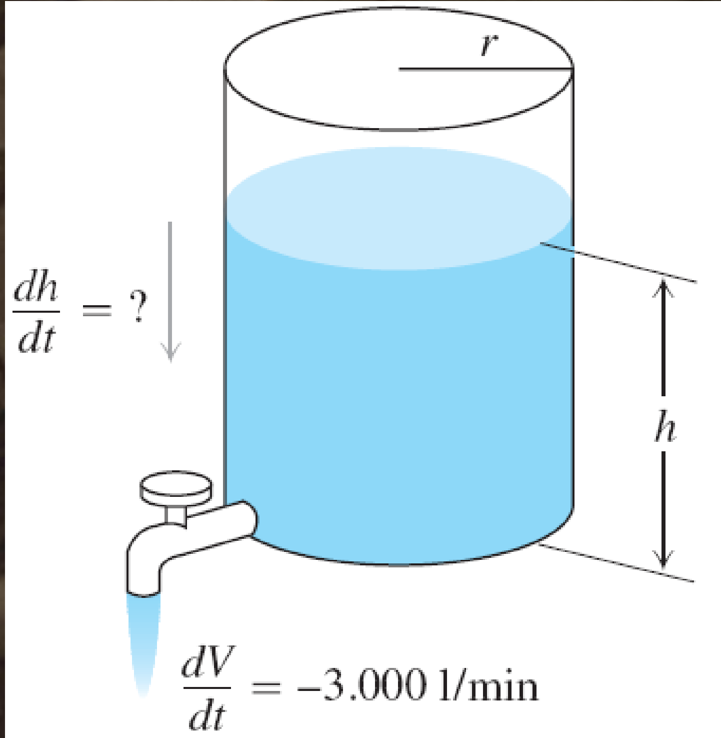


FIGURA 3.52 A taxa de variação no volume do líquido em um tanque cilíndrico está relacionada à taxa de variação no nível de líquido do tanque (Exemplo 1).

Estratégia para a resolução de problemas de taxas relacionadas

1. *Desenhe uma figura e identifique as variáveis e as constantes.* Use t para tempo. Suponha que todas as variáveis são funções deriváveis de t.
2. *Escreva as informações numéricas* (em termos dos símbolos que você escolheu).
3. *Escreva aquilo que você deve encontrar* (geralmente uma taxa, expressa como uma derivada).
4. *Escreva uma equação que relacione as variáveis.* Talvez você possa combinar duas ou mais equações para conseguir uma única, relacionando a variável que você quer com as variáveis que conhece.
5. *Derive em relação a t.* Em seguida, expresse a taxa que você quer em termos das taxas e variáveis cujos valores você conhece.
6. *Calcule.* Use os valores conhecidos para encontrar a taxa desconhecida.

Um balão subindo

- Exemplo 2: Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro colocado a 500 pés de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\frac{\pi}{4}$, o ângulo aumenta a uma taxa de 0,14 rad/min. A que velocidade o balão sobe nesse momento?

Passo 1

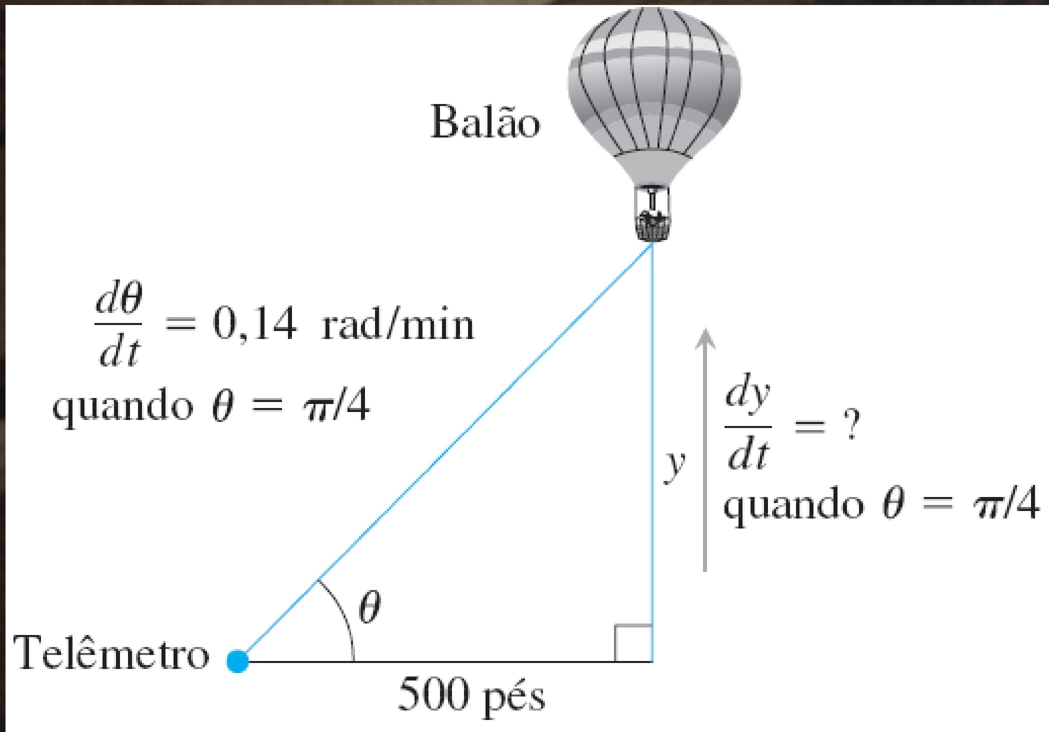


FIGURA 3.53 A taxa de variação da altura do balão está relacionada à taxa de variação do ângulo que o telêmetro forma com o solo (Exemplo 2).

Perseguição na rodovia

- Exemplo 3: Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de uma cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que, no cruzamento, toma a direção leste. Quando a viatura está a 0,6 mi ao norte do cruzamento e o carro fugitivo a 0,8 mi a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 mi/h. Se a viatura está se deslocando a 60 mi/h no instante dessa medida, qual a velocidade do fugitivo?

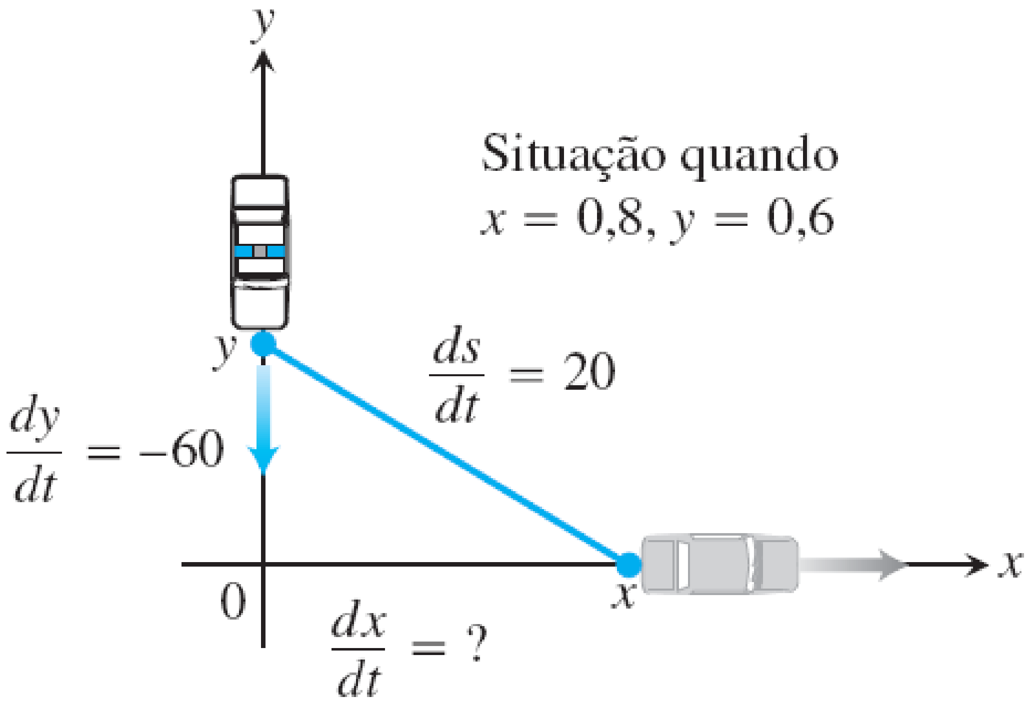


FIGURA 3.54 A velocidade do carro está relacionada à velocidade da viatura policial e à taxa de variação da distância entre eles (Exemplo 3).

Enchendo um tanque cônico

- Exemplo 4: A água entra em um tanque cônico a uma taxa de 9 $pés^3/min$. O tanque tem o vértice voltado para baixo e altura de 10 $pés$ e o raio da base é de 5 $pés$. A que taxa o nível da água estará subindo quando a profundidade for de 6 $pés$?

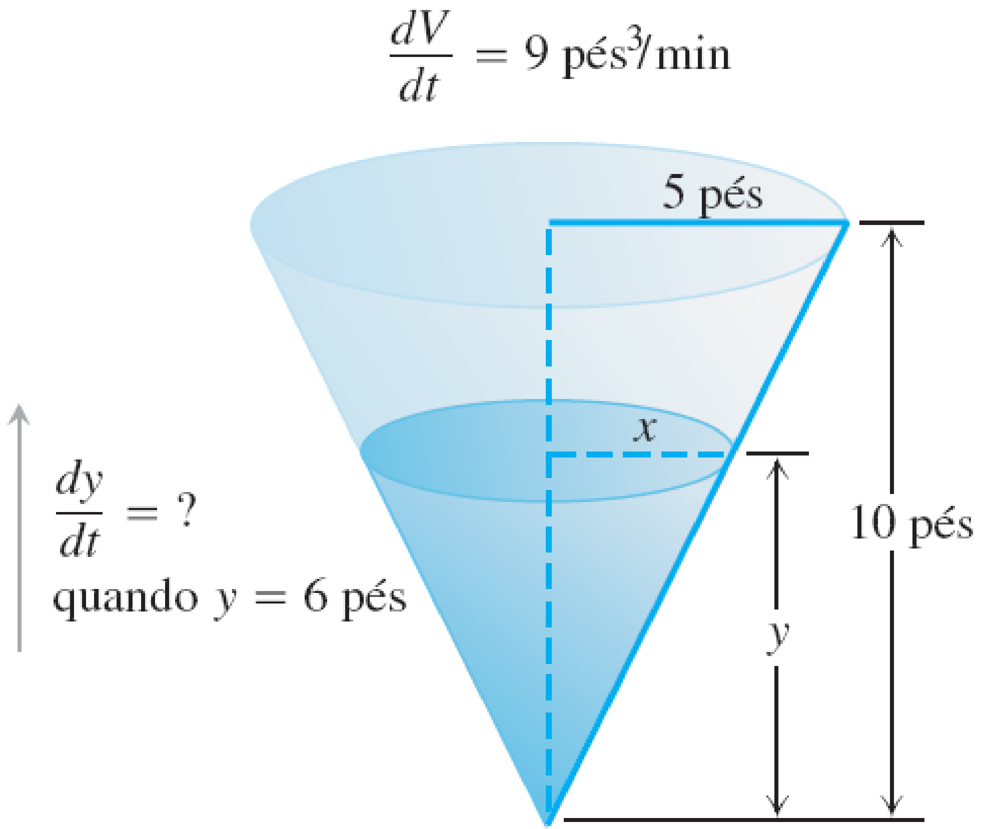


FIGURA 3.55 A geometria do tanque cônico e a taxa à qual a água o preenche determinam a velocidade com que o nível de água aumenta (Exemplo 4).

Seção 3.10 – Linearização e Diferenciais

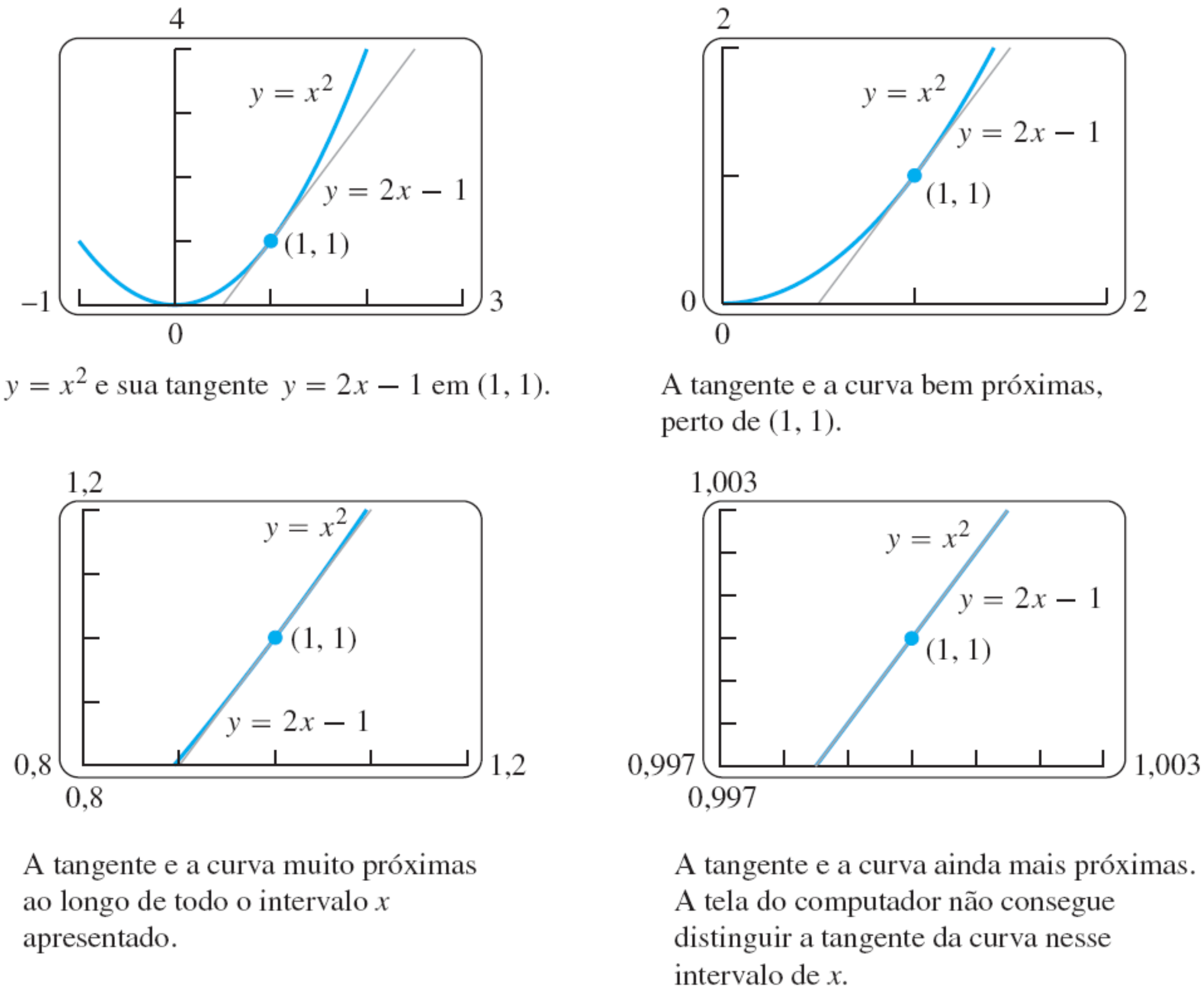


FIGURA 3.56 Quanto mais ampliamos o gráfico de uma função próximo a um ponto onde a função é derivável, mais "reto" o gráfico se torna e mais se assemelha à sua tangente.

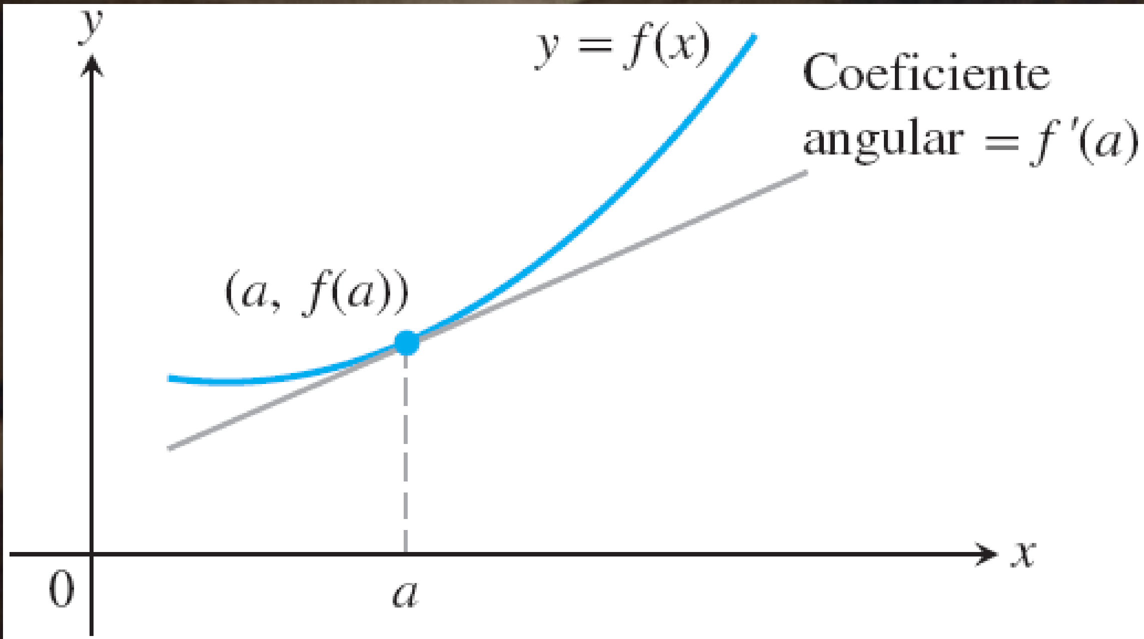


FIGURA 3.57 A tangente à curva $y = f(x)$ em $x = a$ é a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Definições Linearização, aproximação linear padrão

Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a **linearização** de f em a. A aproximação

$$f(x) \approx L(x)$$

de f por L é a **aproximação linear padrão** de f em a. O ponto $x = a$ é o **centro** da aproximação.

Determinando uma linearização

- Exemplo 1: Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 0$.

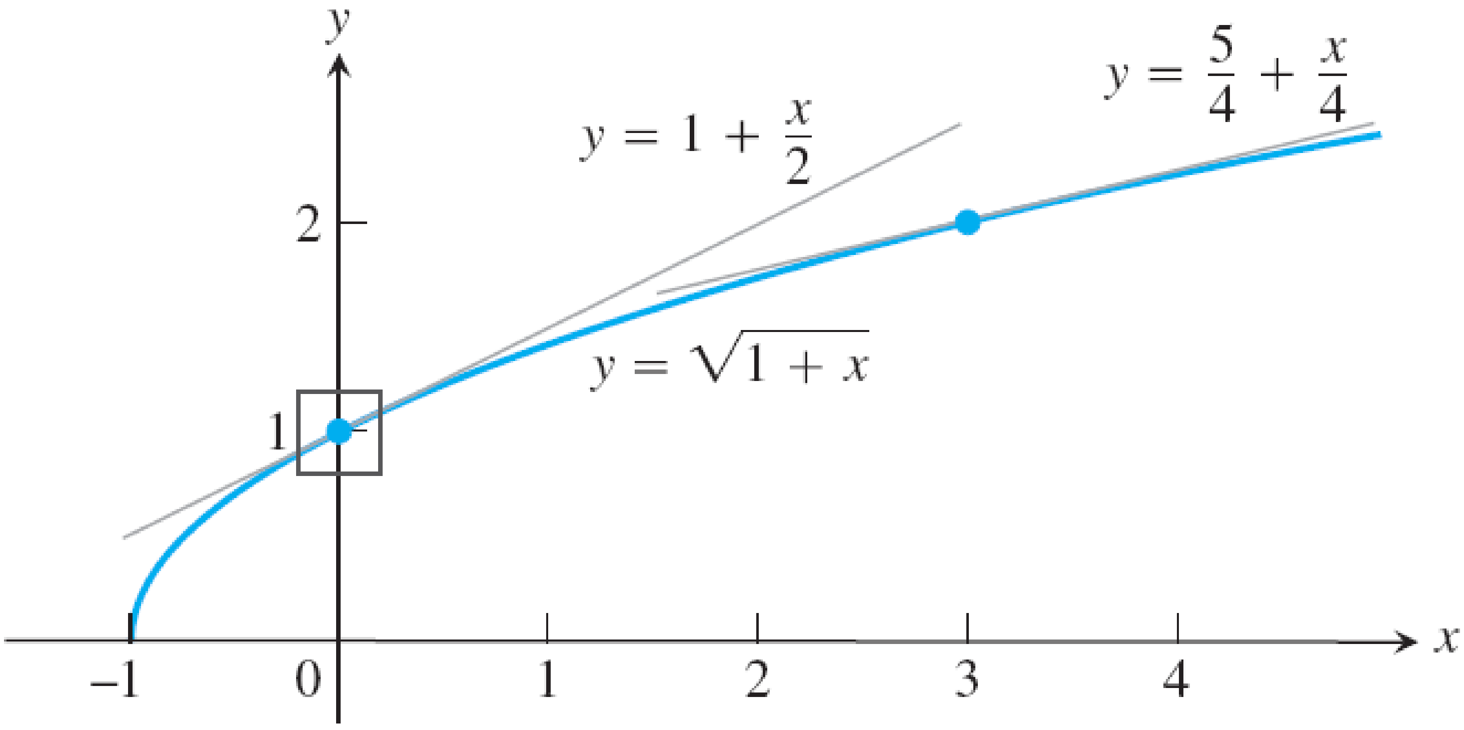


FIGURA 3.58 O gráfico de $y = \sqrt{1+x}$ e sua linearização quando $x = 0$ e $x = 3$. A Figura 3.59 apresenta uma vista ampliada na região destacada ao redor de 1, no eixo y.

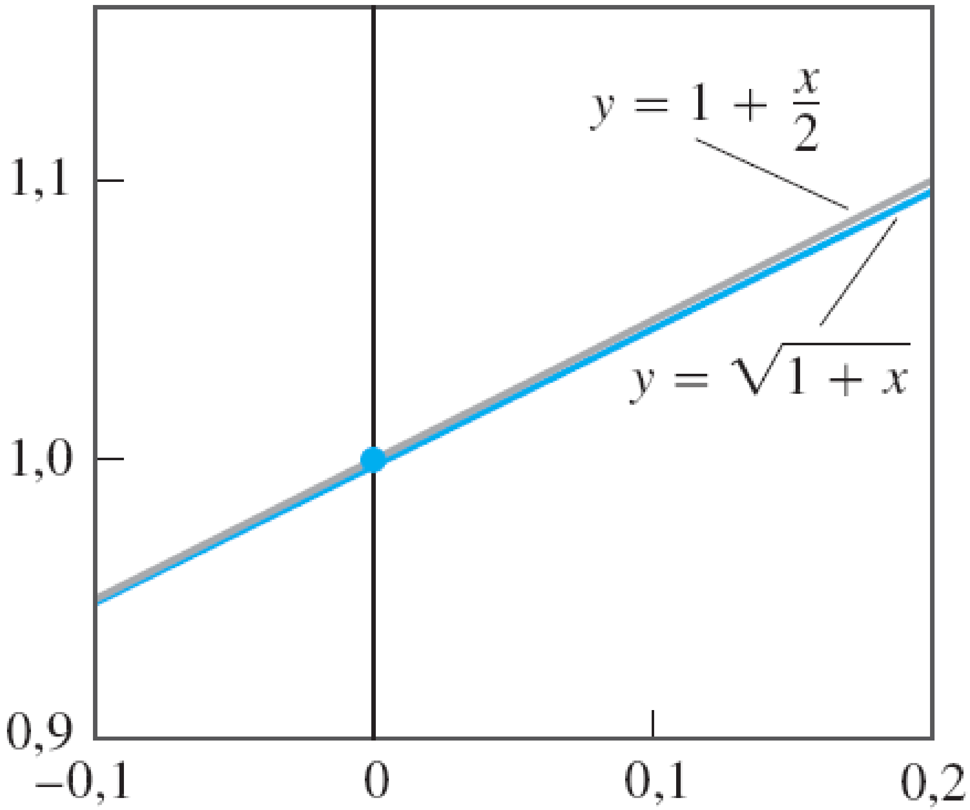


FIGURA 3.59 Vista ampliada da janela da Figura 3.58.

Aproximação	Valor real	Valor real – aproximação
$\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,10$	1,095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1,05} \approx 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$	1,024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{0,005}{2} = 1,00250$	1,002497	$<10^{-5}$

Determinando uma linearização em outro ponto

- Exemplo 2: Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 3$. Com uma calculadora, compare o resultado de $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}04939$ com as aproximações usando a linearização deste Exemplo e do Exemplo 1.

Linearização da função cosseno

- Exemplo 3: Determine a linearização de $f(x) = \cos x$ quando $x = \frac{\pi}{2}$.

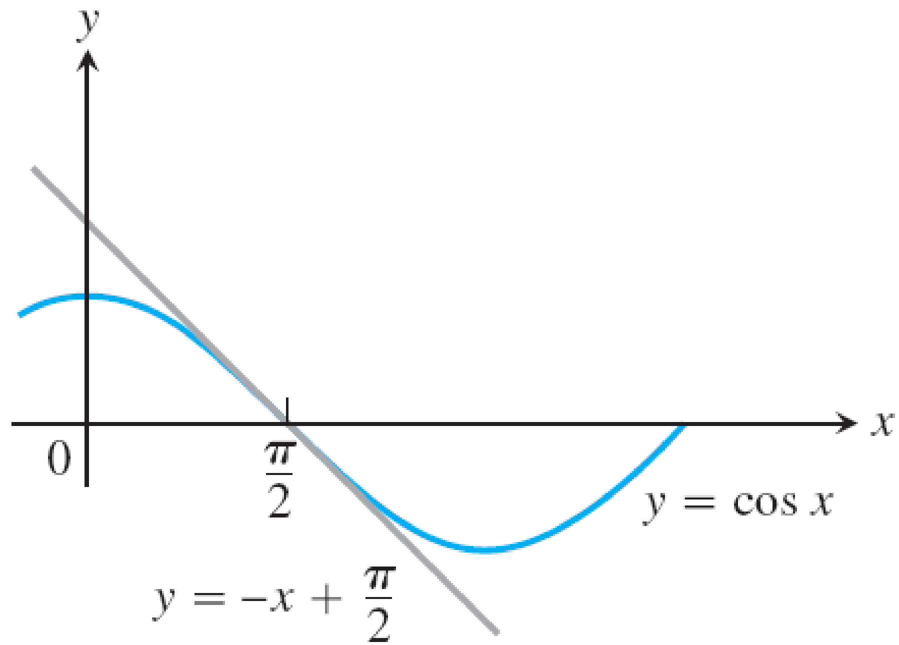


FIGURA 3.60 O gráfico de $f(x) = \cos x$ e sua linearização quando $x = \pi/2$. Próximo a $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Exemplo 3).

Definição **Diferencial**

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A **diferencial** $\boldsymbol{dx}$ é uma variável independente. A **diferencial** $\boldsymbol{dy}$ é

$$dy = f'(x)\,dx$$

Determinando a diferencial dy

- Exemplo 4: Determine:

$a)$ dy se $y = x^5 + 37x$;

b) O valor de dy quando $x = 1$ e $dx = 0{,}2$.

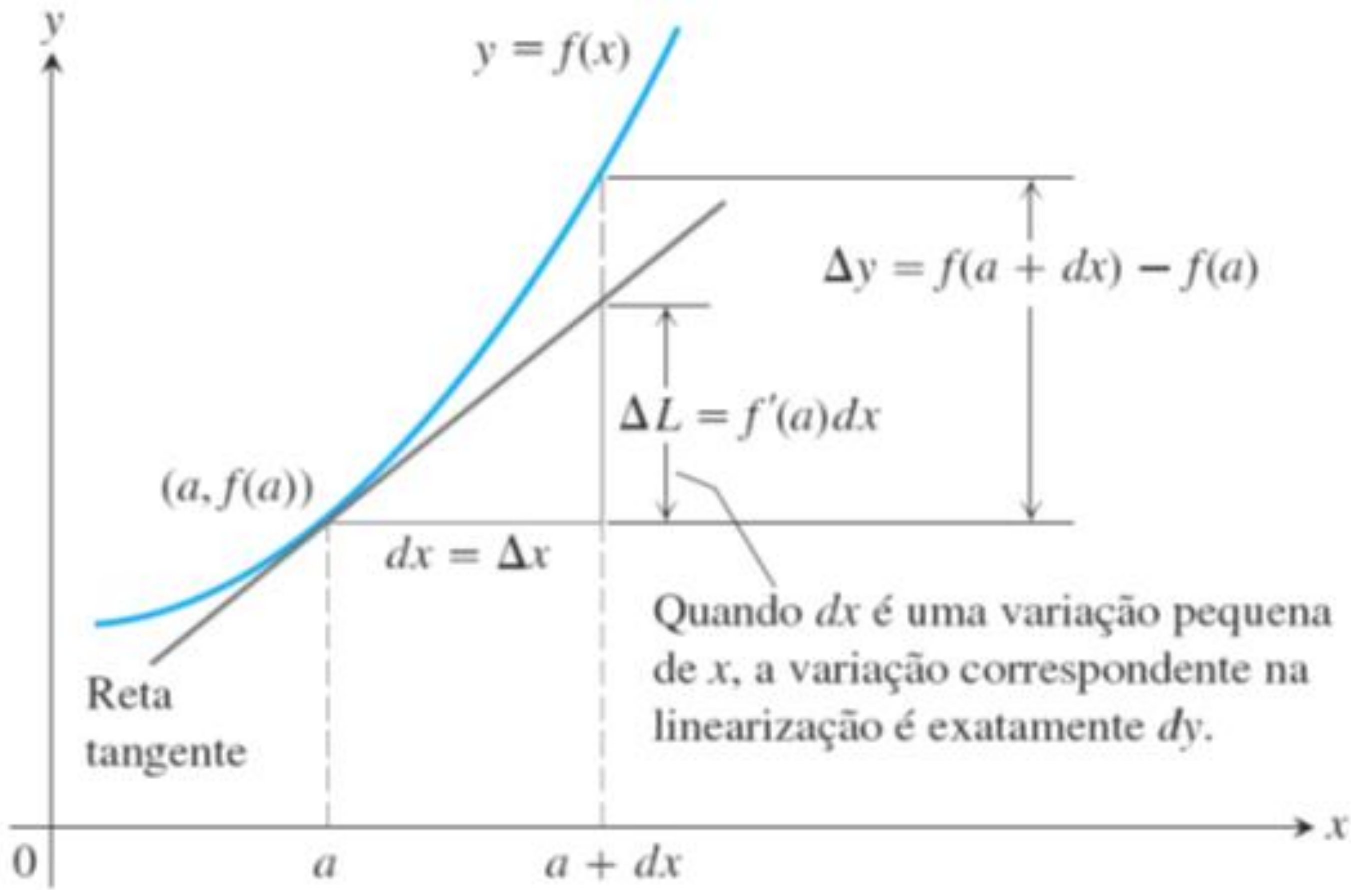


FIGURA 3.61 Geometricamente, a diferencial dy é a variação ΔL na linearização de f quando $x = a$ varia em uma quantidade $dx = \Delta x$.