

Aula 6

Geometria Euclidiana O Axioma das Paralelas

12 de junho de 2018

Igor Oliveira

`igoroliveira@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Axioma *V*

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma *V*
Soma dos Ângulos de
um Triângulo
Distância de Retas
Paralelas
Paralelogramos
Resultados Finais
Exercícios
Bibliografia

Axioma V

Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m .

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Proposição 6.1

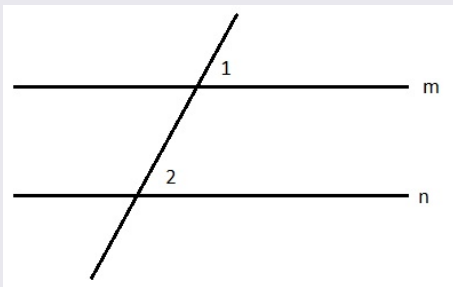
Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 , então, n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.

Proposição 6.2

Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta também a outra.

Proposição 6.3

Sejam m , n , $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como na figura abaixo. Se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.



4 Axioma V

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

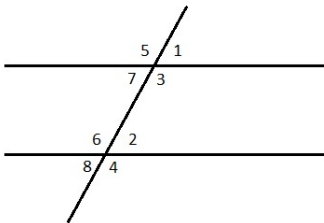
Exercícios

Bibliografia

Ângulos Correspondentes

Quando uma reta intercepta outras duas como na figura abaixo, formam-se oito ângulos. Dizemos que quatro deles são **correspondentes** a outros quatro. A saber:

$$\begin{array}{cc} \hat{1} \longleftrightarrow \hat{2} & \hat{3} \longleftrightarrow \hat{4} \\ \hat{5} \longleftrightarrow \hat{6} & \hat{7} \longleftrightarrow \hat{8} \end{array}$$



5 Axioma V

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

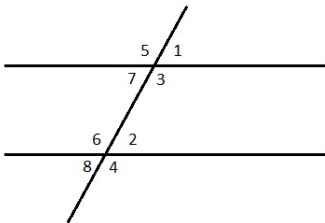
Exercícios

Bibliografia

Ângulos Correspondentes

Quando uma reta intercepta outras duas como na figura abaixo, formam-se oito ângulos. Dizemos que quatro deles são **correspondentes** a outros quatro. A saber:

$$\begin{array}{cc} \hat{1} \longleftrightarrow \hat{2} & \hat{3} \longleftrightarrow \hat{4} \\ \hat{5} \longleftrightarrow \hat{6} & \hat{7} \longleftrightarrow \hat{8} \end{array}$$



Observe que $\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{2} = \hat{8}$, $\hat{3} = \hat{5}$ e $\hat{4} = \hat{6}$. Além disso, se $\hat{1} = \hat{2}$, então todos os outros pares de ângulos correspondentes serão congruentes e $\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$. Inversamente, se $\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$, então $\hat{1} = \hat{2}$.

Ângulos Correspondentes



IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Proposição 6.3.A

Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos $\widehat{2} + \widehat{3} = 180^\circ$, então, as retas são paralelas.

Proposição 6.3.B

Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes forem congruentes, então, as retas são paralelas.

6 Axioma V

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Ângulos Correspondentes



IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Proposição 6.3.A

Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos $\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$, então, as retas são paralelas.

Proposição 6.3.B

Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes forem congruentes, então, as retas são paralelas.

Em decorrência do Axioma V, temos a recíproca da Proposição 6.3.B.

Proposição 6.4

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então, os ângulos correspondentes são congruentes.

6 Axioma V

Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Soma dos Ângulos de um Triângulo



Teorema 6.5

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

7 Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Soma dos Ângulos de um Triângulo



IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

7 Soma dos Ângulos de um Triângulo

Distância de Retas Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Teorema 6.5

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Corolário 6.6

- a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° ;
- b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° ;
- c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes;
- d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

Distância de Retas Paralelas



IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

8 Distância de Retas
Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Teorema 6.7

Se m e n são retas paralelas, então, todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n .

A recíproca desse Teorema também é válida.

Definição 6.8

Um **paralelogramo** é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Paralelogramos



Proposição 6.9

Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

10 Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Paralelogramos



Proposição 6.9

Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.

Proposição 6.10

As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

10 Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Paralelogramos



Proposição 6.9

Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.

Proposição 6.10

As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

Proposição 6.11

Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então, o quadrilátero é um paralelogramo.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

10 Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Paralelogramos



Proposição 6.9

Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.

Proposição 6.10

As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

Proposição 6.11

Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então, o quadrilátero é um paralelogramo.

Proposição 6.12

Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então, o quadrilátero é um paralelogramo.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

10 Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

Paralelogramos

11 Resultados Finais

Exercícios

Bibliografia

Teorema 6.13

O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

Proposição 6.14

Suponha que três retas paralelas, a , b e c , cortam as retas m e n nos pontos A , B e C e nos pontos A' , B' e C' , respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C , então, o ponto B' também encontra-se entre A' e C' . Se $AB = BC$, então, também tem-se $A'B' = B'C'$.

Corolário 6.15

Suponha que k retas paralelas, a_1, a_2, \dots, a_k cortam duas retas m e n nos pontos A_1, A_2, \dots, A_k e nos pontos A'_1, A'_2, \dots, A'_k , respectivamente. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{k-1}A_k$, então, $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \dots = A'_{k-1}A'_k$.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

Paralelogramos

13 Resultados Finais

Exercícios

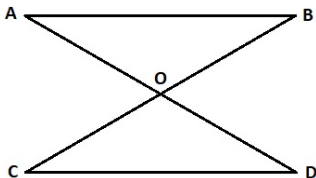
Bibliografia

Teorema 6.16

Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então, ela os divide na mesma razão.

Exercícios

1. Na figura abaixo, O é o ponto médio de AD e $\widehat{B} = \widehat{C}$. Se B , O e C são colineares, conclua que os triângulos ABO e DOC são congruentes.



2. Demonstre os resultados apresentados no Corolário 6.6.
3. Demonstre a Proposição 6.9.
4. Demonstre a Proposição 6.10.
5. Demonstre a Proposição 6.11.
6. Demonstre a Proposição 6.12.

Exercícios



7. Um **retângulo** é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos. Mostre que todo retângulo é um paralelogramo.
8. Um **losango** é um paralelogramo que tem todos os lados congruentes. Mostre que as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.
9. Um **quadrado** é um retângulo que também é um losango. Mostre que, se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é o ponto médio de ambas, então, o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares uma a outra, então, o quadrilátero é um quadrado.
10. Um **trapézio** é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados **bases** e os outros dois são denominados de **laterais**. Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes. Seja $ABCD$ um trapézio em que AB é uma base. Se ele é isósceles, mostre que $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

15 Exercícios

Bibliografia

- [1] BARBOSA, João L M.
Geometria Euclidiana Plana.
11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IMD1003
Geometria Euclidiana
Igor Oliveira

Axioma V

Soma dos Ângulos de
um Triângulo

Distância de Retas
Paralelas

Paralelogramos

Resultados Finais

Exercícios

16 Bibliografia