

Geometria Euclidiana Plana

João Lucas Marques Barbosa

Pertence-me;
Graffiti do Bfo + Sfo
Foz de Iguazú, 21 de janeiro de 2001

A
Aida Marques Barbosa,
que me criou incentivando
o ideal pelo magistério.

Capa: Rodolfo Capeto

Reimpressão: Agosto 1997

Impressão: Segrac (411-7077)

ISBN = 85-85818-02-6

PREFÁCIO

Esta é uma edição revista do livro de mesmo título que escrevi há cerca de vinte anos e que foi publicado, em sucessivas impressões, na coleção Fundamentos de Matemática Elementar da Sociedade Brasileira de Matemática.

A revisão consistiu essencialmente na alteração do enunciado de alguns dos exercícios e problemas propostos, a correção de alguns erros de datilografia e a possível inclusão de alguns novos...

Agradeço a todos aqueles que me indicaram erros e enganos no texto original e fizeram sugestões para modificações do mesmo. Foram mais de uma centena de cartas, algumas apresentando a contribuição de turmas inteiras de cursos de geometria em que ele foi adotado. Por ser impossível aqui registrar todos os seus nomes, quero representá-los na pessoa do mais ilustre destes leitores, o Professor Manfredo Perdigão do Carmo, que me enviou em 1986 uma cópia do livro com suas observações e sugestões, a qual utilizei como repositório de todas as que me foram enviadas posteriormente, o que simplificou sobremaneira a preparação desta nova edição.

João Lucas Marques Barbosa
Fortaleza, julho de 1994

Prefácio da 4^a Edição

Até a publicação deste livro do Professor João Lucas Barbosa, não existia em português um texto que pudesse ser indicado para um estudante iniciar o seu aprendizado da Geometria axiomática. O método da geometria axiomática fornece uma demonstração tão convincente da força do pensamento puro que os livros de Euclides foram usados, através dos séculos, para treinar inteligências em formação, e serviram de modelos de rigor para trabalhos tais como a Ética de Spinoza e os Princípios de Newton. A Geometria elementar é o domínio por excelência no qual o método axiomático pode ser aplicado em situações que embora simples, dão resultados altamente não-triviais. Tais métodos devem, portanto, fazer parte da formação básica de um cidadão. Os livros de Euclides são, entretanto, difíceis para principiantes (além de ser incompleta a axiomática de Euclides) e, em outros países, várias tentativas foram feitas para tornar mais acessível (e mais completo) o método axiomático no ensino da Geometria.

No Brasil, há anos atrás, houve um relativo abandono do ensino da Geometria à maneira de Euclides. Na prática, o que se passava era que o assunto era relegado para o fim do curso, e quase sempre não era ensinado. Isto devia-se em parte às dificuldades próprias do assunto e em parte a uma certa influência da então chamada “matemática moderna” que, embora utilizando a axiomática em outros tópicos, propugnava a eliminação da Geometria de Euclides no ensino básico.

Foi neste quadro que apareceu o livro do Professor Lucas Barbosa. Utilizando uma modificação da axiomática de Euclides, devida ao matemático russo A.V. Pogorelov, o Professor Lucas produziu um texto em português apresentando os elementos fundamentais da Geometria Plana de modo acessível, eficiente e cor-

CONTEÚDO

reto. Que o livro foi bem recebido é comprovado pelo fato que ele foi reimpresso diversas vezes e que continua a demanda por novas edições.

O livro, como diz o conhecido chavão, preencheu uma lacuna. Ele é uma boa referência em português para textos elementares que queiram ir mais adiante no estudo da Geometria. Por exemplo, o excelente “Medida e Forma em Geometria” do Professor Elon Linné cita o livro do professor Lucas como referência para Geometria Plana. Em verdade, O livro do Professor Elon e um curso de Geometria Hiperbólica dado no XX Colóquio Brasileiro de Matemática pelo Professor Lucas constituem uma ótima continuação para os estudos aqui iniciados.

Com isto, começo a me afastar do meu tema inicial e creio conveniente concluir aqui este Prefácio. Antes, porém, quero parabenizar o Professor Lucas pelo ótimo trabalho realizado.

Manfredo Perdigão do Carmo

19 de abril de 1999.

INTRODUÇÃO	i
Capítulo 1 – OS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM	1
Exercícios	7
Problemas	9
Comentário	10
Capítulo 2 – AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS	12
Exercícios	18
Problemas	20
Comentário	21
Capítulo 3 – AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO ÂNGULOS	22
Exercícios	29
Problemas	32
Comentário	33
Capítulo 4 – CONGRUÊNCIA	34
Exercícios	41
Problemas	44
Comentário	47
Capítulo 5 – O TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO E SUAS CONSEQÜÊNCIAS	49
Exercícios	62
Problemas	65
Comentário	68

Capítulo 6 – O AXIOMA DAS PARALELAS	72
Exercícios	84
Problemas	86
Comentário	88
Capítulo 7 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	92
Exercícios	100
Problemas	102
Comentário	103
Capítulo 8 – O CÍRCULO	105
Exercícios	119
Problemas	125
Comentário	129
Capítulo 9 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	133
Exercícios	142
Comentário	143
Capítulo 10 – ÁREA	144
Exercícios	154
Problemas	156
Comentário	159

INTRODUÇÃO

Este livro foi escrito para servir de texto a uma disciplina de Geometria para alunos de cursos de licenciatura em Matemática. Ele contém o material padrão de um curso de Geometria Euclidiana Plana, excetuando-se os tópicos relativos a movimentos e a construção de figuras com régua e compasso. Este material será incluído numa versão futura deste texto.

Os axiomas adotados são aqueles selecionados por A.V. Pogorélov no seu livro “Geometria Elemental”. Estes axiomas têm a vantagem de levarem o aluno rapidamente aos teoremas mais importantes da Geometria Plana. Em alguns casos eles estão enunciados de forma mais ampla do que seria necessário. Por exemplo, um deles afirma que, dada uma reta existem pontos sobre ela e pontos fora dela. De fato seria suficiente postular apenas a existência de dois pontos sobre a reta e um ponto fora dela. Os axiomas sobre medição de segmentos e medição de ângulos são extremamente vantajosos do ponto de vista metodológico. Primeiramente eles evitam o trabalho de estabelecer os conceitos de medida de segmentos e de medida de ângulos. É sabido que a introdução destes conceitos, quando se faz uso de uma axiomática clássica, constitui-se num problema nada simples e que requer a utilização de meios inacessíveis ao aluno, por sua profundidade. Segundo, através dos axiomas de medição, incorpora-se a aritmética e a álgebra elementar ao arsenal de meios utilizáveis para as demonstrações dos teoremas da Geometria.

A introdução do quinto postulado, característico da Geometria Euclidiana, é retardada até o capítulo 6. Assim, os teoremas obtidos até o capítulo 5 são válidos em uma geometria não Euclidiana em que sejam verdadeiros os quatro primeiros axiomas.

Neste aspecto este livro poderia ser considerado como um texto preliminar a um curso de Geometria não Euclidiana ou servir como fonte de referência para alunos daqueles cursos.

O livro está organizado em 10 capítulos. Cada um deles contém, além da parte de conteúdo, uma relação de exercícios, uma de problemas e um texto denominado “Comentário”. A separação das questões propostas aos alunos, em problemas e exercícios, foi feita, em princípio, considerando-se que os problemas complementam a teoria e têm um caráter mais conceitual, enquanto que os exercícios destinam-se mais à fixação do conteúdo apresentado. Os comentários constituem-se numa seleção de pequenos tópicos, que não fazem parte do conteúdo do livro, mas que têm sido de muita utilidade na formação dos alunos dos cursos de Geometria que tenho lecionado. Incentivado por eles fui levado a incluir alguns destes pequenos tópicos neste livro.

Ao finalizar esta introdução gostaria de agradecer ao professor José Euny Moreira, que leu criticamente a versão manuscrita deste texto, e a minha esposa Cira que me incentivou a escrevê-lo.

João Lucas Marques Barbosa
Fortaleza, maio de 1985

CAPÍTULO 1

OS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM

As figuras geométrica elementares, no plano, são os pontos e as retas. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano. Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas que serão apresentados ao longo deste e dos próximos capítulos.

O primeiro grupo de axiomas é constituído pelos *axiomas de incidência*.

Axioma I₁. Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

Axioma I₂. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.

Quando duas retas têm um ponto em comum diz-se que elas se *interceptam* ou que elas se cortam naquele ponto.

1.1 Proposição. Duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam em um único ponto.

Prova. Sejam m e n duas retas distintas. A interseção destas duas retas não pode conter dois (ou mais) pontos, do contrário, pelo axioma I₂, elas coincidiriam. Logo a interseção de m e n é vazia ou contém apenas um ponto.

Imaginamos um plano como a superfície de uma folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções. Nela um ponto é representado por uma pequena marca produzida pela ponta de um lápis, quando pressionada sobre o papel. O desenho da parte de uma reta é feito com o auxílio de uma régua.

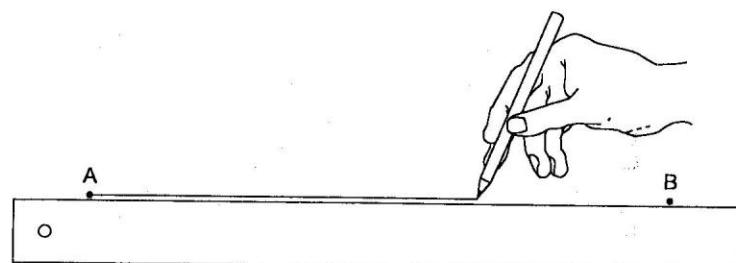


Figura 1.1

As estudarmos geometria é comum fazer-se uso de desenhos. Nós mesmos faremos uso extensivo de desenhos ao longo destas notas. O leitor, no entanto, deve ser advertido, desde logo, que os desenhos devem ser considerados apenas como um instrumento de ajuda à nossa intuição e linguagem.

Utilizaremos letras maiúsculas A, B, C, \dots para designar pontos, e letras minúsculas a, b, c, \dots para designar retas.

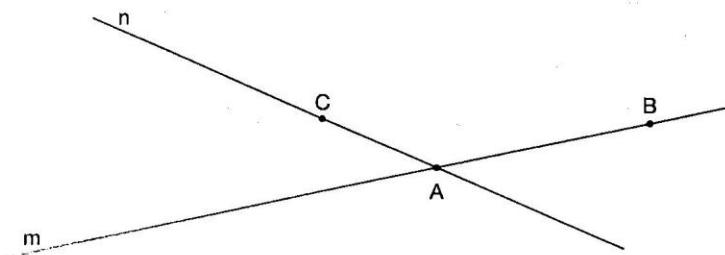


Figura 1.2

Por exemplo, na figura acima estão representados três pontos: A, B e C , e duas retas: m e n . O ponto A é o ponto de interseção das duas retas. A figura seguinte apresenta uma reta e três pontos A, B e C desta reta. O ponto C localiza-se entre A e B ou, equivalentemente, os pontos A e B estão separados pelo ponto C .



Figura 1.3

A noção de que um ponto localiza-se entre dois outros é uma relação, entre pontos de uma mesma reta, que satisfaz aos axiomas II_1 , II_2 e II_3 apresentados a seguir. Estes são referidos como *axiomas de ordem*.

Axioma II_1 . Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

1.2 Definição. O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado *segmento AB* . Os pontos A e B são denominados *extremos* ou *extremidades* do segmento.

Muitas figuras planas são construídas usando-se segmentos. A mais simples delas é o *triângulo* que é formado por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados *vértices* do triângulo e os segmentos, *lados* do triângulos.

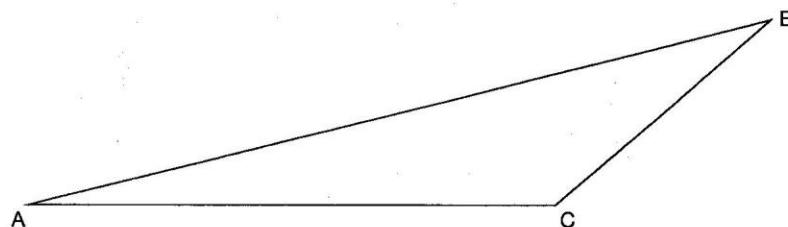


Figura 1.4

1.3 Definição. Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de *semi-retas* de origem A contendo o ponto B , e é representado por S_{AB} . O ponto A é então denominado *origem* da semi-reta S_{AB} .



Figura 1.5

Observe que dois pontos A e B determinam duas semi-retas S_{AB} e S_{BA} as quais contêm o segmento AB .



Figura 1.6

1.4 Proposição.

- a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta determinada por A e B ,
- b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Prova. (a) Seja m a reta determinada por A e B . Como S_{AB} e S_{BA} são constituídas de pontos da reta m , então $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$. Por outro lado, se C é um ponto da reta m então, de acordo com o axioma II₁, uma das três possibilidades exclusivas ocorre:

- 1) C está entre A e B ,
- 2) A está entre B e C ,
- 3) B está entre A e C .

No caso (1), C pertence ao segmento AB ; no caso (2), C pertence a S_{BA} ; e no caso (3), C pertence a S_{AB} . Portanto, em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$.

A prova de (b) é deixada como exercício para o leitor.

Axioma II₂. Dados dois pontos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D .

Uma consequência imediata deste axioma é que, entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos. Também é uma consequência dele que uma semi-reta S_{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento AB .

Considere uma reta m e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Diremos que A e B estão em um mesmo lado da reta m se o segmento AB não a intercepta.

1.5 Definição. Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a m . O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m é chamado de *semi-plano* determinado por m contendo A , e será representado por P_{mA} .

Axioma II₃. Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m .

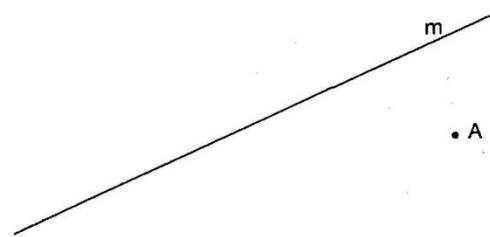


Figura 1.7

EXERCÍCIOS

1. Sobre uma reta marque quatro pontos A, B, C e D , em ordem, da esquerda para a direita. Determine:

a) $AB \cup BC$	e) $S_{AB} \cap S_{BC}$
b) $AB \cap BC$	f) $S_{AB} \cap S_{AD}$
c) $AC \cap BD$	g) $S_{CB} \cap S_{BC}$
d) $AB \cap CD$	h) $S_{AB} \cup S_{BC}$
2. Quantos pontos comuns a pelo menos duas retas pode ter um conjunto de 3 retas do plano? E um conjunto de 4 retas do plano?
3. Prove o item (b) da proposição (1.4).
4. Prove a afirmação feita, no texto, de que existem infinitos pontos em um segmento.
5. Sejam $P = \{a, b, c\}$, $m_1 = \{a, b\}$, $m_2 = \{a, c\}$ e $m_3 = \{b, c\}$. Chame P de plano e m_1, m_2 e m_3 de retas. Verifique que nesta “geometria” vale o axioma I₂.

Definição: Um subconjunto do plano é *convexo* se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente contido nele.

6. Os exemplos mais simples de conjuntos convexos são o próprio plano e qualquer semi-plano. Mostre que a interseção de dois semi-planos é um convexo.
7. Mostre que a interseção de n semi-planos é ainda um convexo.
8. Mostre, exibindo um contra-exemplo, que a união de convexos pode não ser um convexo.

9. Três pontos não colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos sendo que quaisquer três deles são não colineares?
10. Repita o exercício anterior para o caso de 6 pontos.

PROBLEMAS

1. Discuta a seguinte questão utilizando apenas os conhecimentos geométricos estabelecidos, até agora, nestas notas: “Existem retas que não se interceptam?”
2. Prove que, se uma reta intercepta um lado de um triângulo e não passa por nenhum de seus vértices, então ela intercepta também um dos outros dois lados.
3. Repita o exercício 2 para o caso de 5 e 6 retas. Faça uma conjectura de qual será a resposta no caso de n retas.
4. Mostre que não existe um exemplo de uma “geometria” com 6 pontos, em que sejam válidos os axiomas I₁ e I₂ e em que todas as retas tenham exatamente 3 pontos.
5. Se C pertence a S_{AB} e $C \neq A$, mostre que: $S_{AB} = S_{AC}$, que $BC \subset S_{AB}$ e que $A \notin BC$.
6. Demonstre que a interseção de convexos é ainda um凸形 (convexo).
7. Mostre que um triângulo separa o plano em duas regiões, uma das quais é convexa.
8. Generalize os exercícios 11 e 12 para o caso de n pontos.
9. Podem existir dois segmentos distintos tendo dois pontos em comum? E tendo exatamente dois pontos em comum?

COMENTÁRIO

Para se aprender a jogar algum jogo, tal como damas, firo, xadrez, etc., temos que, inicialmente, aprender as suas regras. Um pai tentando ensinar seu filho a jogar damas dirá algo como: “Este é o tabuleiro de damas e estas são as pedras com que se joga”, “São 12 para cada jogador”, “As pedras são arrumadas no tabuleiro assim.”, e arrumará as pedras para o filho. Aí já terá recebido uma enxurrada de perguntas do tipo: “Por que as pedras só ficam nas casas pretas?”, “Por que só são doze pedras?”, “Eu acho mais bonitas as pedras brancas nas casas pretas e as pretas nas casas brancas, por que não é assim?”, etc.

Todas estas perguntas têm uma única resposta: Porque esta é uma das regras do jogo. Se alguma delas for alterada, o jogo resultante, embora possa ser também muito interessante, não será mais um jogo de damas.

Observe que, ao ensinar um tal jogo, você dificilmente deter-se-ia em descrever o que são as pedras. O importante são as regras do jogo, isto é, a maneira de arrumar as pedras no tabuleiro, a forma de movê-las, a forma de “comer” uma pedra do adversário, etc. Qualquer criança, após dominar o jogo, improvisará tabuleiros com riscos no chão e utilizará tampinhas de garrafa, botões, cartões, etc., como pedras.

Ao criar-se um determinado jogo é importante que suas regras sejam suficientes e consistentes. Por *suficiente* queremos dizer que as regras devem estabelecer o que é permitido fazer em qualquer situação que possa vir a ocorrer no desenrolar de uma partida do jogo. Por *consistente* queremos dizer que as regras não devem contradizer-se, ou sua aplicação levar a situações contraditórias.

Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.

De fato, existem várias geometrias distintas dependendo do conjunto de axiomas fixado. A geometria que iremos estudar nestas notas é chamada de Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides que a descreveu no seu livro, denominado “Elementos”.

CAPÍTULO 2

AXIOMAS SOBRE MEDAÇÃO DE SEGMENTOS

O instrumento utilizado para medir comprimento de segmentos é a régua graduada. Na figura abaixo o segmento AB mede 3cm, o segmento AC mede 8cm, e o segmento BC mede 5cm.

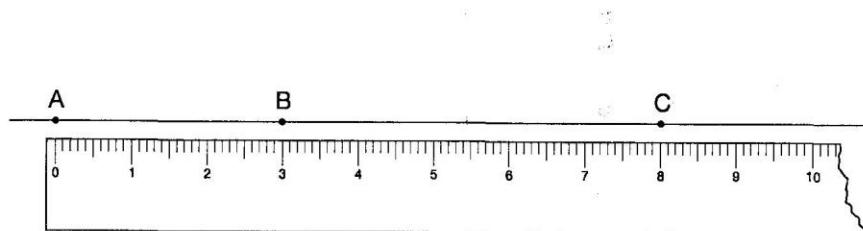


Figura 2.1

Observe que ao ponto B , corresponde (na régua) o número 3 e ao ponto C , o número 8. A medida do segmento BC é obtida pela diferença $8 - 3 = 5$. É claro que a régua poderia ter sido colocada em muitas outras posições e números diferentes corresponderiam aos pontos B e C . No entanto, em cada caso, a diferença entre eles seria sempre 5 que é a medida do segmento BC .

Estes fatos são introduzidos em nossa geometria através de axiomas.

Axioma III₁. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

O número a que se refere este axioma é chamado de *distância* entre os pontos ou é referido como o *comprimento* do segmento determinado pelos dois pontos. Está implícito no enunciado do axioma, a escolha de uma unidade de medida que será fixada de agora em diante ao longo destas notas.

Axioma III₂. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Este axioma bem poderia receber o apelido de axioma da “régua infinita” pois, ao estabelecer a correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta, a própria reta torna-se como que uma régua infinita que pode ser usada para medir o comprimento de segmentos nela contidos.

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado *coordenada* daquele ponto.

De acordo com o axioma III₁ o comprimento de um segmento AB é sempre maior do que zero. Assim, se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor destes números. Isto é equivalente a tomar-se a diferença entre a e b em qualquer ordem e, em seguida, considerar o seu valor absoluto. Nós indicaremos o comprimento do segmento AB pelo símbolo \overline{AB} . Portanto

$$\overline{AB} = |b - a|.$$

Axioma III₃. Se o ponto C encontra-se entre A e B então

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

Com a introdução dos axiomas III₁, III₂ e III₃, podemos relacionar a ordenação dos pontos de uma reta, introduzida através dos axiomas II₁ e II₂, com a ordem dos números reais. Os números reais são ordenados pela relação “menor do que” (ou pela relação “maior do que”), e faz sentido dizer-se que um número c está entre dois outros a e b , quando ocorre $a < c < b$ ou $b < c < a$.

2.1 Proposição. *Se, em uma semi-reta S_{AB} , considerarmos um segmento AC com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então o ponto C estará entre A e B .*

Prova. Certamente o ponto A não pode estar entre B e C , já que B e C estão na mesma semi-reta de origem A . Se o ponto B estivesse entre A e C então, pelo axioma III₃, teríamos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e, como consequência, $\overline{AB} < \overline{AC}$. Mas esta desigualdade é contrária à hipótese $\overline{AC} < \overline{AB}$. Portanto, é o ponto C que está entre A e B .

Teorema. *Sejam A , B e C pontos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a , b e c . O ponto C está entre A e B se e só se o número c está entre a e b .*

Prova. Se C está entre A e B então, pelo axioma III₃, tem-se que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, ou seja

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Vamos supor inicialmente que $a < b$. Neste caso, da igualdade acima, obtém-se

$$|c - a| < b - a \quad \text{e} \quad |b - c| < b - a.$$

Como consequência, $c - a < b - a$ e $b - c < b - a$. Portanto, $c < b$ e $a < c$. Assim, resulta que c está entre a e b .

O caso em que $b < a$ pode ser analisado de maneira análoga e é deixado a cargo do leitor.

Reciprocamente, se o número c está entre os números a e b então

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Segue-se daí que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Em particular

$$\overline{AC} < \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{CB} < \overline{AB}.$$

Consideremos as semi-retas determinadas pelo ponto A . Se C e B pertencem à mesma semi-reta, então é uma consequência da proposição anterior que C está entre A e B . Afirmo que C e B não podem pertencer a semi-retas distintas, isto é, não podem ser separados pelo ponto A . Se este fosse o caso, seria o ponto A que estaria entre B e C e teríamos $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$. Mas daí resulta que $\overline{BA} < \overline{BC}$ o que está em contradição com a desigualdade já obtida acima. Isto prova a afirmação e conclui a demonstração do teorema.

2.3 Definição. Chamamos de *ponto médio* do segmento AB a um ponto C deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

2.4 Teorema. *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

Prova. (Existência) Sejam a e b as coordenadas das extremidades do segmento. Considere o número $c = (a + b)/2$. De acordo com o axioma III₂ existe um ponto C da reta que tem c por coordenada. Como

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= |a - c| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right| \\ \overline{CB} &= |c - b| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|\end{aligned}$$

concluímos que $\overline{AC} = \overline{CB}$. Como o número $(a + b)/2$ está entre os números a e b , segue-se da proposição anterior que C está entre A e B . Logo C é o ponto médio de AB .

(Unicidade) Seja C como obtido na prova da existência e seja C' um outro ponto do segmento AB tal que $\overline{AC'} = \overline{BC'}$. Sejam a, b e c' as coordenadas dos pontos A, B e C' respectivamente. Então teremos,

$$\begin{aligned} \text{(i) no caso em que } & a < c' < b, \\ & c' - a = b - c', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) no caso em que } & b < c' < a, \\ & a - c' = c' - b. \end{aligned}$$

Em ambos os casos a conclusão é que

$$c' = \frac{a + b}{2}.$$

Assim, em qualquer circunstância, $c' = c$ e, portanto, pelo axioma III₂, $C = C'$. Fica assim provada a unicidade do ponto médio.

2.5 Observação. A noção de *distância* é uma das noções mais básicas da geometria. Pelo que já vimos ela satisfaz às seguintes propriedades:

1) Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $\overline{AB} \geq 0$. Além disso, $\overline{AB} = 0$ se e somente se $A = B$.

2) Para quaisquer dois pontos A e B tem-se que $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Uma outra importante propriedade da distância é a *desigualdade triangular*:

3) Para quaisquer três pontos do plano A, B e C , tem-se $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. Igualdade ocorre se e somente se C pertence ao intervalo AB .

Esta desigualdade será demonstrada no capítulo 5 (veja o teorema (5.10)) como consequência dos 4 primeiros grupos de axiomas.

2.6 Definição. Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O *círculo* de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.

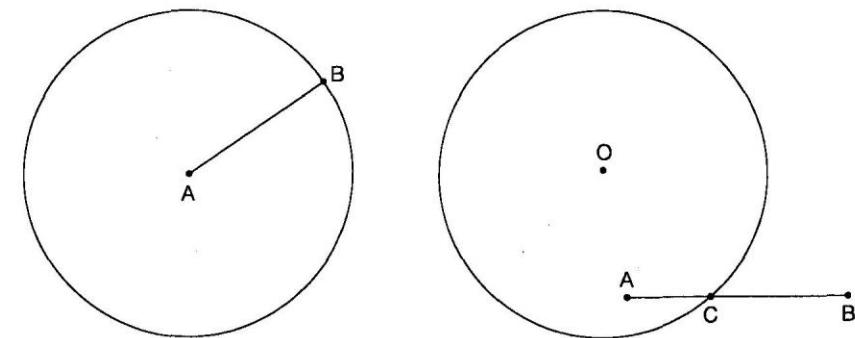


Figura 2.2

É uma consequência do axioma III₂ que podemos traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Todo ponto C que satisfaz a desigualdade $\overline{AC} < r$ é dito estar dentro do círculo. Se, ao invés, $\overline{AC} > r$, então C é dito estar fora do círculo. O conjunto dos pontos que estão dentro do círculo é chamado de *disco* de raio r e centro A .

É também uma consequência do axioma III₂ que o segmento de reta ligando um ponto de dentro do círculo com um ponto fora do mesmo tem um ponto em comum com o círculo.

EXERCÍCIOS

1. Sejam A, B e C pontos de uma reta. Faça um desenho representando-os, sabendo que $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{BC} = 5$.
2. Repita o exercício anterior, sabendo que C está entre A e B e que $\overline{AB} = 7$ e $\overline{AC} = 5$.
3. Desenhe uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B . Suponha que a coordenada do ponto A seja zero e a do ponto B seja um. Marque agora pontos cujas coordenadas são $3, 5, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2, -1, -2, -5, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}$.
4. Sejam A_1 e A_2 pontos de coordenadas 1 e 2. Dê a coordenada do ponto médio A_3 do segmento A_1A_2 . Dê a coordenada do ponto médio A_4 do segmento A_2A_3 . Dê a coordenada A_5 do ponto médio do segmento A_3A_4 .
5. Prove que, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então
 - a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ e $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
 - b) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ e $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
 - c) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ e $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
6. Se P é ponto de interseção de círculos de raio r e centros em A e B , mostre que $\overline{PA} = \overline{PB}$.
7. Usando régua e compasso, descreva um método para construção de um triângulo com dois lados de mesmo comprimento. (Um tal triângulo é chamado de *triângulo isósceles*).
8. Descreva um método para construção de um triângulo com os três lados de mesmo comprimento. (Um tal triângulo é chamado de *triângulo equilátero*).

9. Mostre que, se $a < b$ então $a < (a+b)/2$ e $b > (a+b)/2$.
10. É possível desenhar-se um triângulo com lados medindo 3, 8 e 5?
11. O círculo de raio r_1 centrado em A intercepta o círculo de raio r_2 centrado em B em exatamente dois pontos. O que se pode afirmar sobre \overline{AB} ?
12. Considere um círculo de raio r e centro A . Sejam B e C pontos deste círculo. O que se pode afirmar sobre o triângulo ABC ?
13. Considere um círculo de raio r e centro O . Seja A um ponto deste círculo e seja B um ponto tal que o triângulo OAB é equilátero. Qual é a posição do ponto B relativamente ao círculo?
14. Dois círculos de mesmo raio e centros A e B se interceptam em dois pontos C e D . O que pode ser afirmado sobre os triângulos ABC e ACD ? e sobre o quadrilátero $ACBD$?

PROBLEMAS

- Dado um segmento \overline{AB} mostre que existe, e é único, um ponto C entre A e B tal que $(\overline{AC}/\overline{BC}) = a$, onde a é qualquer número real positivo.
- Descreva um método para obter uma boa aproximação do comprimento de um círculo.
- Prove a seguinte afirmação feita no texto: o segmento de reta ligando um ponto fora de um círculo com um ponto dentro do mesmo, tem um ponto em comum com o círculo.
- Dados dois pontos A e B e um número real r maior do que \overline{AB} , o conjunto dos pontos C satisfazendo a $\overline{CA} + \overline{CB} = r$ é chamado de *elipse*. Estabeleça os conceitos de região interior e de região exterior a uma elipse.
- Um conjunto M de pontos do plano é *limitado* se existe um círculo C tal que todos os pontos de M estão dentro de C . Prove que qualquer conjunto finito de pontos é limitado. Prove também que segmentos são limitados. Conclua o mesmo resultado para triângulos.
- Prove que a união de uma quantidade finita de conjuntos limitados é ainda um conjunto limitado.
- Mostre que dado um ponto P e um conjunto limitado M , então existe um disco com centro em P que contém M . (Observação: estamos admitindo a validade da desigualdade triangular)
- Prove que as retas são conjuntos ilimitados. (Sugestão: use o problema 7.)

COMENTÁRIO

As primeiras noções geométricas surgiram quando o homem viu-se compelido a efetuar medidas, isto é, a comparar distâncias e a determinar as dimensões dos corpos que o rodeavam. Egípcios, Assírios e Babilônios já conheciam as principais figuras geométricas e a noções de ângulo que usavam nas medidas de área e na Astronomia.

A maior parte do desenvolvimento da Geometria resultou dos esforços feitos, através de muitos séculos, para construir-se um corpo de doutrina lógica que correlacionasse os dados geométricos obtidos da observação e medida. Pelo tempo de Euclides (cerca de 300 a.C.) a ciência da Geometria tinha alcançado um estágio bem avançado. Do material acumulado Euclides compilou os seus "Elementos", um dos mais notáveis livros já escritos.

A Geometria, como apresentada por Euclides, foi o primeiro sistema de idéias desenvolvido pelo homem, no qual umas poucas afirmações simples são admitidas sem demonstração e então utilizadas para provar outras mais complexas. Um tal sistema é chamado dedutivo. A beleza da Geometria, como um sistema dedutivo, inspirou homens, das mais diversas áreas, a organizarem suas idéias da mesma forma. São exemplos disto o "Principia" de Sir Isaac Newton, no qual ele tenta apresentar a Física como um sistema dedutivo, e a "Ética" do filósofo Spinoza.

CAPÍTULO 3

AXIOMAS SOBRE MEDAÇÃO DE ÂNGULOS

3.1 Definição. Chamamos de *ângulo* a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.

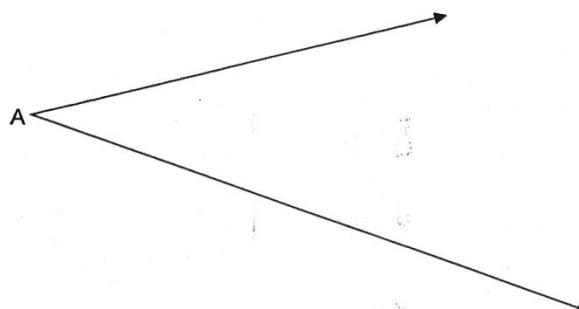


Figura 3.1

As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum, de *vértice* do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso*.

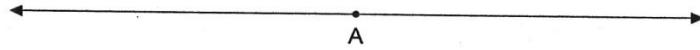


Figura 3.2

Existem várias maneiras distintas de representar um ângulo. Por exemplo, o ângulo da figura (3.3) pode ser designado por $B\hat{A}C$ ou por $C\hat{A}B$. Ao utilizarmos esta notação, a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas, as quais representam pontos das semi-retas que formam o ângulo.

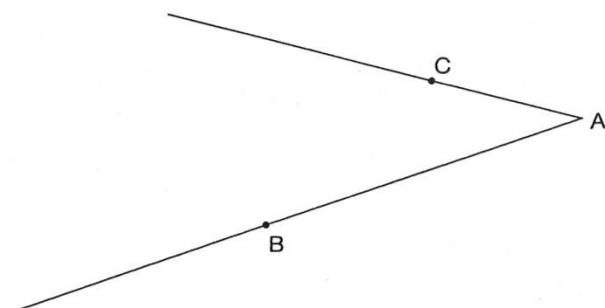


Figura 3.3

Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, pode-se usar apenas a letra designativa do vértice para representar o ângulo. Por exemplo, o ângulo da figura (3.3) poderia ser representado simplesmente por \hat{A} . Em qualquer dos dois casos considerados a letra designativa do vértice levará sempre um acento circunflexo. Também é comum a utilização de letras gregas para representação de ângulos. Neste caso é conveniente escrever a letra designativa do ângulo próximo do seu vértice, como indicado na figura abaixo.



Figura 3.4

Os ângulos são medidos em graus com o auxílio de um transferidor. Na figura seguinte, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 20° (vinte graus). Observe que, de maneira análoga ao que ocorre no caso da medição de segmentos, o transferidor pode ser colocado de várias maneiras diferentes, no entanto, o valor da medida do ângulo $B\hat{A}C$ será sempre 20° .

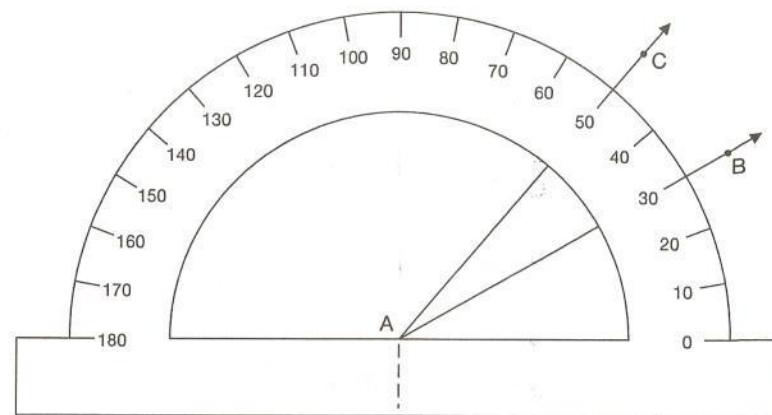


Figura 3.5

A maneira de introduzir a medição de ângulos na geometria é através dos axiomas apresentados a seguir. Observe que eles têm enunciados semelhantes aos dos axiomas sobre medição de segmentos.

Axioma III₄. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.

Para facilitar o enunciado do próximo axioma, vamos dar a seguinte definição:

3.2 Definição. Diremos que uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Axioma III₅. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

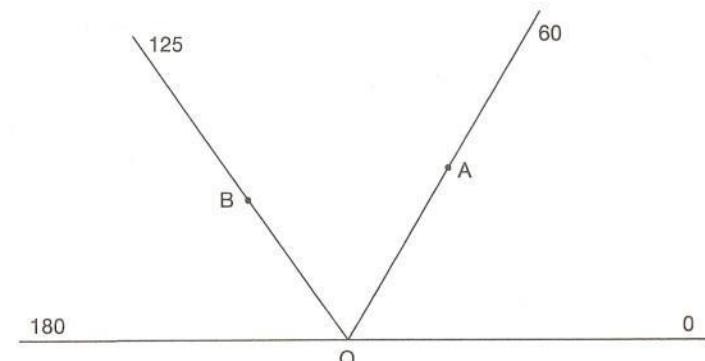


Figura 3.6

Ao fazermos tal correspondência chamamos o número que corresponde a uma dada semi-reta de *coordenada* da semi-reta. Na figura (3.6) acima, a semi-reta S_{OA} tem coordenada 60, a semi-reta S_{OB} tem coordenada 125. De acordo com o axioma III₅ a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é $125-60=65$. Este é um fato geral. Se a e b forem coordenadas dos lados do ângulo $A\hat{O}B$, então $|a - b|$ é a medida deste ângulo. Indicaremos um ângulo e a sua medida pelo mesmo símbolo. Assim escreveremos de uma maneira geral

$$A\hat{O}B = |a - b|$$

para significar que $|a - b|$ é a medida do ângulo $A\hat{O}B$. Observe que as semi-retas que formam um ângulo raso serão sempre numeradas por 0 e 180 sendo a medida de tais ângulos sempre 180° .

3.3 Definição. Sejam S_{OA} , S_{OB} e S_{OC} semi-retas de mesma origem. Se o segmento AB interceptar S_{OC} diremos que S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma III₆. Se uma semi-reta SOC divide um ângulo $A\hat{O}B$, então

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B.$$

3.4 Definição. Dois ângulos são ditos *suplementares* se a soma de suas medidas é 180° . O *suplemento* de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

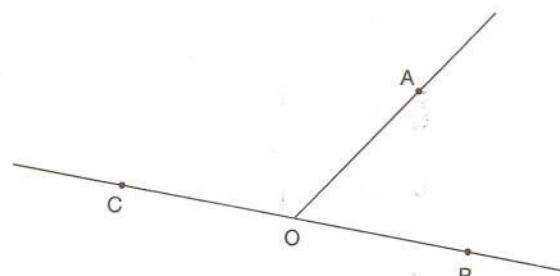


Figura 3.7

É claro que um ângulo e seu suplemento são ângulos suplementares. É também evidente que, se dois ângulos têm a mesma medida, então o mesmo ocorre com seus suplementos.

Quando duas retas distintas se interceptam, formam-se quatro ângulos, como indicado na figura abaixo. Os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são *opostos pelo vértice*. Do mesmo modo o são os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$.

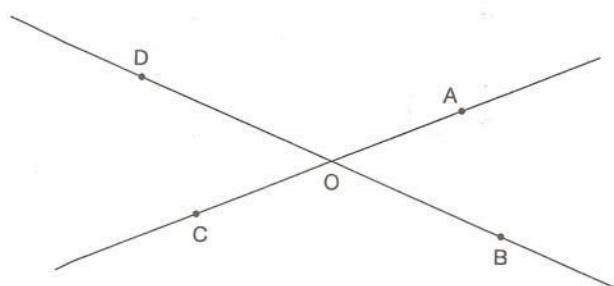


Figura 3.8

3.5 Proposição. Ângulo opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Prova. De fato, se $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são ângulos opostos pelo vértice, então eles têm o mesmo suplemento: $A\hat{O}D$. Logo

$$A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180^\circ$$

$$D\hat{O}C + A\hat{O}D = 180^\circ$$

Portanto $A\hat{O}B = 180^\circ - A\hat{O}D = D\hat{O}C$.

3.6 Definição. Um ângulo cuja medida é 90° é chamado *ângulo reto*.

É claro que o suplemento de um ângulo reto é também um ângulo reto. Quando duas retas se interceptam, se um dos quatro ângulos formados por elas for reto, então todos os outros também o serão. Neste caso diremos que as retas são *perpendiculares*.

3.7 Teorema. Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

Prova. (Existência). Dada uma reta m e um ponto A sobre ela, as duas semi-retas determinadas por A formam um ângulo raso. Considere um dos semi-planos determinados pela reta m . De acordo com o axioma III₅, entre todas as semi-retas com origem A , que dividem o semi-plano fixado, existe uma cuja coordenada será o número 90 . Esta semi-reta forma, com as duas semi-retas determinadas pelo ponto A sobre a reta m , ângulos de 90° . Portanto ela é perpendicular a reta m .

(Unicidade). Suponha que existissem duas retas n e n' passando pelo ponto A e perpendiculares a m . Fixe um dos semi-planos determinados por m . As interseções das retas n e n' com este semi-plano são semi-retas que formam um ângulo α e, como na figura abaixo, formam outros dois ângulos β e γ com as semi-retas determinadas pelo ponto A na reta m .

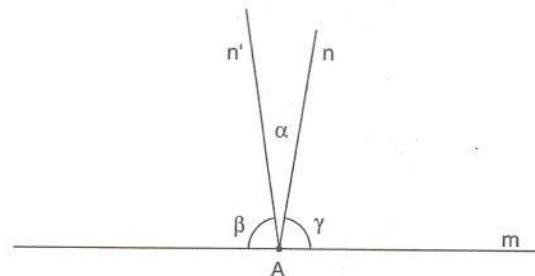
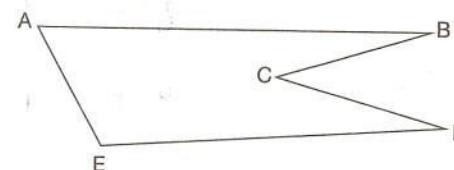
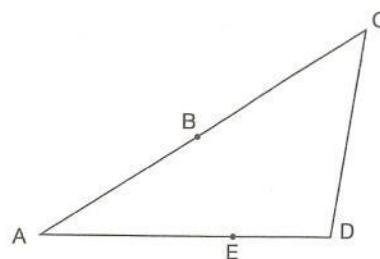
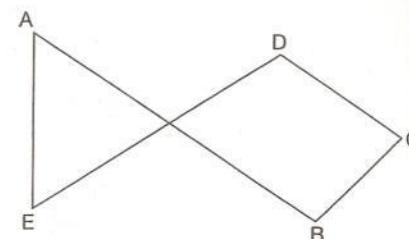
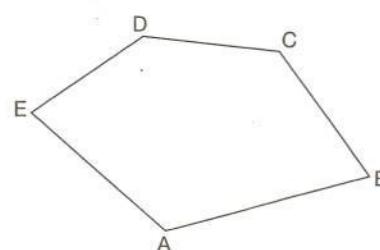


Figura 3.9

Como n e n' são perpendiculares a m então $\beta = \gamma = 90^\circ$. Por outro lado, devemos ter $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Logo $\alpha = 0^\circ$ e as retas n e n' coincidem.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que se um ângulo e seu suplemento têm a mesma medida então o ângulo é reto.
2. Um ângulo é chamado *agudo* se mede menos de 90° , e é chamado *obtuso* se mede mais de 90° . Mostre que o suplemento de um ângulo agudo é sempre obtuso.
3. Use um transferidor e desenhe ângulos de $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 142^\circ, 15^\circ, 5^\circ$ e 33° .
4. Dois ângulos são ditos *complementares* se sua soma é um ângulo reto. Dois ângulos são complementares e o suplemento de um deles mede tanto quanto o suplemento do segundo mais 30° . Quanto medem os dois ângulos?
5. Uma *poligonal* é uma figura formada por uma seqüência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são os seus *lados*. Desenhe a poligonal $ABCD$ sabendo que: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\text{cm}$, $\hat{A}BC = 120^\circ$ e $\hat{B}CD = 100^\circ$.
6. Um *polígono* é uma poligonal em que as seguintes 3 condições são satisfeitas: a) $A_n = A_1$, b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades e c) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta. Das 4 figuras, seguintes, apenas duas são polígonos. Determine quais são elas.

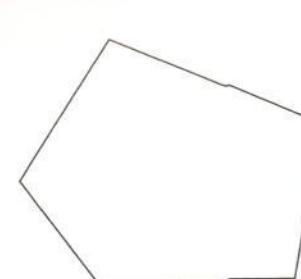


Um polígono de vértices $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} = A_1$, será representado por $A_1A_2A_3, \dots, A_n$. Ele tem n lados, n vértices e n ângulos.

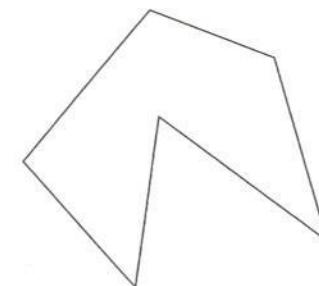
7. Desenhe um polígono de 4 lados $ABCD$ tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2\text{cm}$, com $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 100^\circ$ e com $B\hat{C}D = B\hat{A}D = 80^\circ$.

8. O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma *diagonal* do polígono. Faça o desenho de um polígono de seis lados. Em seguida desenhe todas as suas diagonais. Quantas diagonais terá um polígono de 20 lados? E de n lados?

9. Um polígono é *convexo* se está sempre contido em um dos semi-planos determinados pelas retas que contêm os seus lados. Na figura seguinte o polígono (a) é convexo e o (b) é não convexo.



(a)



(b)

Polígonos convexos recebem designações especiais. São as seguintes as designações dadas a estes polígonos de acordo com seu número de lados, até 10 lados.

nº de lados	nome do polígono convexo
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octágono
9	nonágono
10	decágono

10. Descreva um método, em que se faça uso apenas de um compasso e de uma régua não numerada, de construção de um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento. Estenda seu método para o caso de 5 lados.

PROBLEMAS

1. Dado um ângulo $A\hat{O}B$ mostre que existe uma única semi-reta S_{OC} tal que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$. A semi-reta S_{OC} é chamada de *bissetriz* do ângulo $A\hat{O}B$.
2. Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.
3. Dado um ângulo $A\hat{O}B$ e um número real positivo a , $0 < a < 1$, mostre que existe uma única semi-reta S_{OC} tal que $C\hat{O}B = a \cdot A\hat{O}B$.
4. De quantos graus move-se o ponteiro dos minutos enquanto o ponteiro das horas percorre um ângulo raso?
5. Descreva um processo pelo qual um desenhista, sem usar um transferidor, possa “copiar” um ângulo, isto é, dado um ângulo desenhado em uma folha de papel, desejamos estabelecer um procedimento pelo qual possamos desenhar um outro ângulo que seja congruente ao primeiro, isto sem fazer uso de um transferidor.
6. Uma alternativa para definir um ângulo é o de considerar a interseção de semiplanos. Formalize esta ideia. Relacione com nossa definição.

COMENTÁRIO

No segundo e primeiro milênios antes de Cristo, floresceram na Mesopotâmica (a região entre os rios Eufrates e Tigre, o que hoje é aproximadamente o Iraque) várias civilizações conhecidas, de um modo geral, como civilização babilônica. Entre elas, a civilização Suméria, que teve seu ápice no segundo milênio a.C., e a civilização que se desenvolveu em torno da cidade chamada Babilônia no primeiro milênio a.C. Os babilônios absorveram grande parte da cultura matemática egípcia e a ela acrescentaram suas próprias conquistas. Entre estas, figura o total desenvolvimento da álgebra elementar e a invenção de um sistema de numeração em que os algarismos têm um valor de posição na grafia dos números. Este método de escrever os números, infelizmente não foi absorvido pelas civilizações que se seguiram à civilização babilônica. Em passado mais recente ele foi redescoberto pelos hindus de quem o importamos, através dos árabes.

Enquanto a base de numeração indu era decimal, exatamente como utilizamos hoje, a base de numeração babilônica era sexagesimal. Isto significa que eles utilizavam 60 símbolos (algarismos) distintos para escrever todos os números. Infelizmente o zero era representado por uma lacuna o que tornava, a leitura de alguns números, confusa. Talvez esta tenha sido a dificuldade essencial, que levou este sistema a não ser absorvido pelas civilizações que sucederam a civilização babilônica.

Para este povo, que utilizava um sistema de numeração de base 60, foi muito natural dividir o círculo em 360 partes (grau), e cada uma destas partes em 60 partes (minuto) e repetir o processo para estas subpartes. Assim o “grau” é uma invenção dos babilônios, que entraram para a história da ciência matemática, com uma contribuição importante que utilizamos até hoje.

CAPÍTULO 4

CONGRUÊNCIA

4.1 Definição. Diremos que dois segmentos AB e CD são *congruentes* quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são *congruentes* se eles têm a mesma medida.

Observe que, com esta definição, as propriedades da igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo valendo para ângulos.

Para simplificar ao máximo a nossa notação, iremos utilizar o símbolo “=” para significar *congruente*. Assim, $AB = CD$ deve ser lido como AB é congruente a CD e $\hat{A} = \hat{B}$ deve ser lido como ângulo A é congruente ao ângulo B . Em geral não haverá perigo de confusão com a igualdade de números ou de conjuntos. Quando houver, reforçaremos com palavras o significado do símbolo.

4.2 Definição. Dois triângulos são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

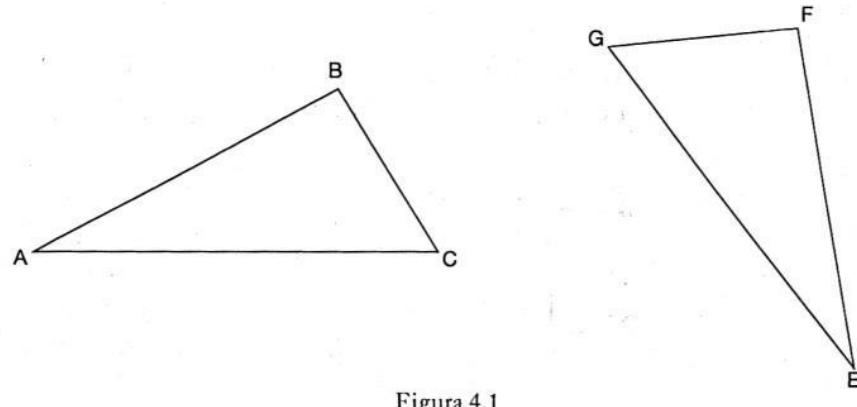


Figura 4.1

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$\begin{array}{l} A \longleftrightarrow E \\ B \longleftrightarrow F \\ C \longleftrightarrow G \end{array}$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$\begin{array}{lll} AB = EF & BC = FG & AC = EG \\ \hat{A} = \hat{E} & \hat{B} = \hat{F} & \hat{C} = \hat{G} \end{array}$$

Se, nos triângulos abaixo, considerarmos a correspondência $C \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow D$ e $A \leftrightarrow E$, verificaremos que $\hat{C} = \hat{F}$, $\hat{B} = \hat{D}$, $\hat{A} = \hat{E}$, $CB = FD$, $BA = DE$ e $AC = EF$. Portanto os triângulos CBA e FDE são congruentes.

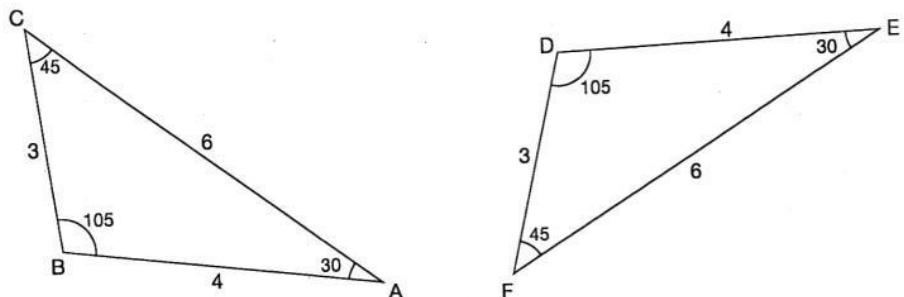


Figura 4.2

Escreveremos $ABC = EFG$ para significar que os triângulos ABC e EFG são congruentes e que a *congruência* leva A em E , B em F e C em G .

Axioma IV. Dados dois triângulos ABC e EFG , se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então $ABC = EFG$.

Observe que, de acordo com a definição (4.2), para verificarmos se dois triângulos são congruentes temos que verificar seis

relações: congruência dos três pares de lados e congruência dos três pares de ângulos correspondentes. O axioma acima afirma que é suficiente verificar apenas três delas, ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} AB = EF \\ AC = EG \\ \hat{A} = \hat{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = EF, \quad AC = EG, \quad BC = FG \\ \hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{G}, \quad \hat{B} = \hat{F} \end{array} \right.$$

Este axioma é conhecido como *primeiro caso de congruência de triângulos*. Outros dois casos serão apresentados a seguir.

4.3 Teorema (2º caso de congruência de triângulos). *Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então ABC = EFG.*

Prova. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que AB = EF, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto da semi-reta SAC tal que AD = EG.

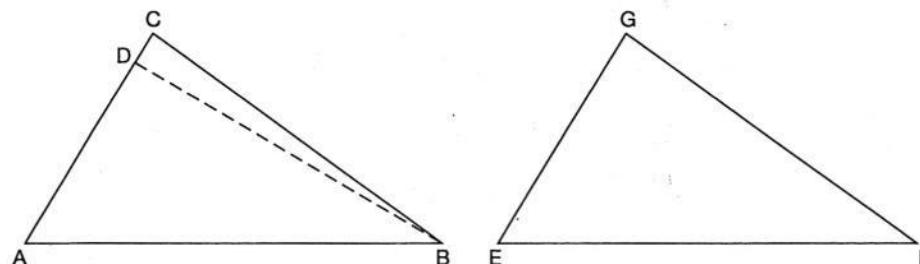


Figura 4.3

Considere o triângulo ABD e o compare com o triângulo EFG. Como $AD = EG$, $AB = EF$ e $\hat{A} = \hat{E}$, concluímos, pelo axioma IV, que $ABD = EFG$. Como consequência, tem-se que $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}\hat{C}$. Logo $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

Consequentemente as semi-retas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como já provamos que $ABD = EFG$, então $ABC = EFG$.

4.4 Definição. Um triângulo é dito *isósceles* se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de *laterais*, e o terceiro lado é chamado de *base*.

4.5 Proposição. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Prova. Seja ABC um triângulo em que $AB = AC$. Pretende-se provar que $\hat{B} = \hat{C}$. Para isto compare o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow C \quad \text{e} \quad C \leftrightarrow B.$$

Por hipótese, $AB = AC$ e $AC = AB$. Como $\hat{A} = \hat{A}$, segue-se (pelo axioma IV) que esta correspondência define uma congruência. Como consequência tem-se $\hat{B} = \hat{C}$.

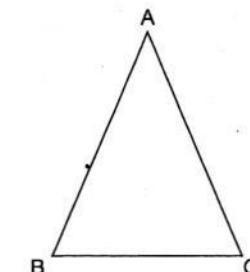


Figura 4.4

Caso o leitor tenha alguma dificuldade em seguir o raciocínio acima, deve desenhar duas cópias do triângulo ABC e repetir o raciocínio para estes dois triângulos.

4.6 Proposição. Se, em um triângulo ABC , tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.

Prova. Seja ABC um triângulo em que $\hat{B} = \hat{C}$. Vamos mostrar que $AB = AC$. Novamente comparemos o triângulo ABC com ele próprio, fazendo corresponder os vértices como na prova da proposição anterior, isto é: $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Como $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ por hipótese, e $BC = CB$, segue-se (pelo teorema (4.3)) que esta correspondência define uma congruência. Como consequência $AB = BC$.

4.7 Definição. Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C . O segmento AD chama-se *mediana* do triângulo relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se *bissetriz* do ângulo \hat{A} se a semi-reta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos iguais, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$. O segmento AD chama-se *altura* do triângulo relativamente ao lado BC , se AD for perpendicular a reta que contém B e C .

Na figura (4.5), em (a) AD é mediana, em (b) AD é bissetriz, e em (c) AD é altura.

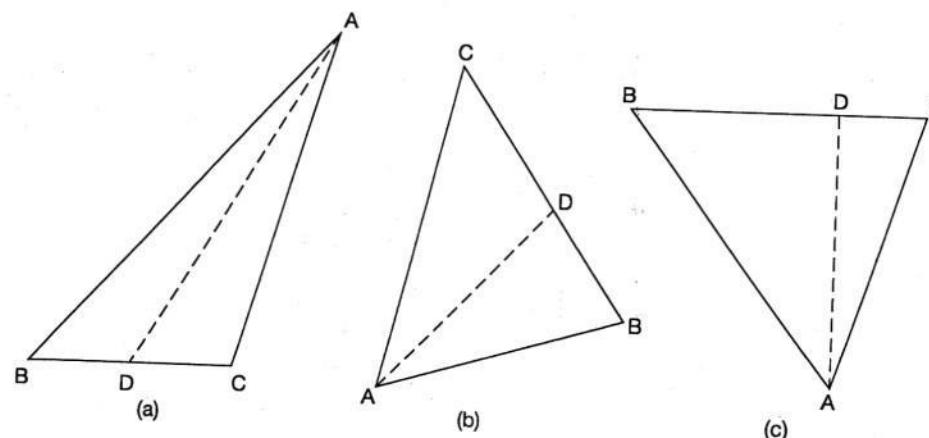


Figura 4.5

4.8 Proposição. Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também bissetriz e altura.

Prova. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB . Seja CD sua mediana relativamente à base. Deve-se provar que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e que $A\hat{D}C$ é um ângulo reto. Para isto considere os triângulos ADC e BDC . Como $AD = BD$ (já que CD é mediana), $AC = BC$ (já que o triângulo é isósceles com base AB) e $\hat{A} = \hat{B}$ (de acordo com a proposição anterior), então $ADC = BCD$. Segue-se daí que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A = B\hat{D}C$. A primeira igualdade nos diz que CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Como $A\hat{D}B$ é um ângulo raso e $C\hat{D}A + B\hat{D}C = A\hat{D}B$ então $C\hat{D}A + B\hat{D}C = 180^\circ$. Como já sabemos que $C\hat{D}A = B\hat{D}C$ então concluímos que $C\hat{D}A = B\hat{D}C = 90^\circ$. Portanto CD é perpendicular a AB . Isto conclui a prova da proposição.

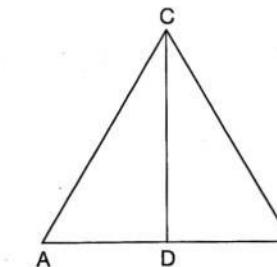


Figura 4.6

4.9 Teorema (3º caso de congruência de triângulos). Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Prova. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $AB = EF$, $BC = FG$ e $AC = EG$. Vamos provar que $ABC = EFG$.

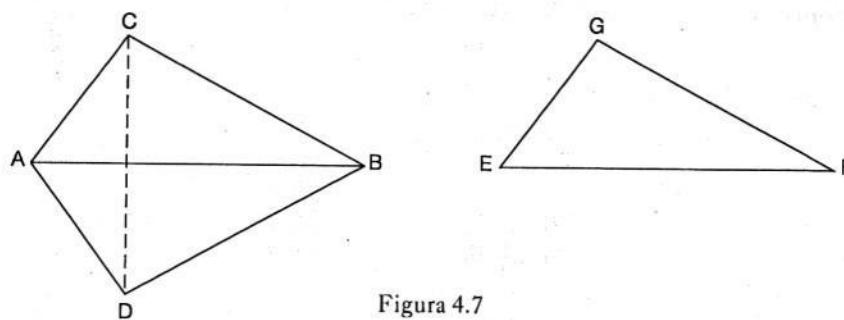
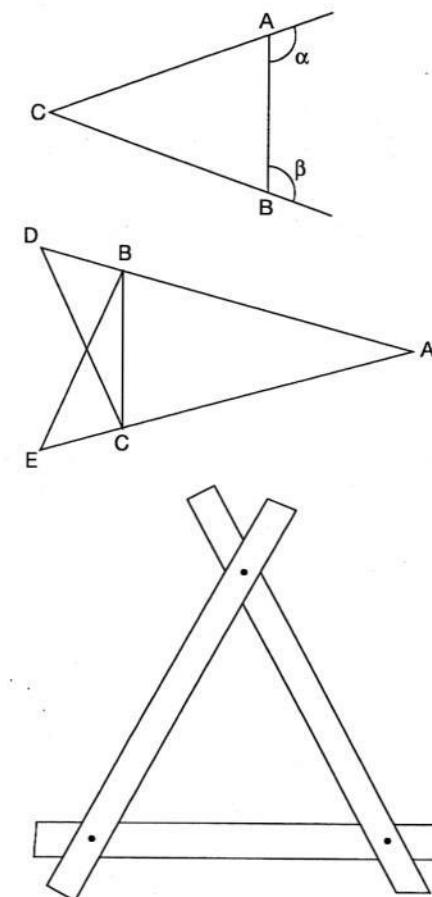


Figura 4.7

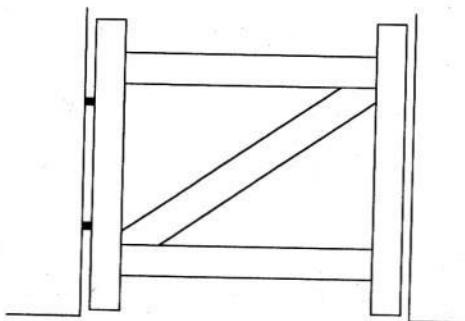
Para isto, construa, a partir da semi-reta S_{AB} e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo igual ao ângulo \hat{E} . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D tal que $AD = EG$ e ligue D a B . Como $AB = EF$ (por hipótese), $AD = EG$ (por construção) e $D\hat{A}B = \hat{E}$ (por construção), então $ABD = EFG$. Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto trace CD . Como $AD = EG = AC$ e $DB = FG = BC$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$ e logo que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD = ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD = EFG$, concluímos que $ABC = EFG$.

EXERCÍCIOS

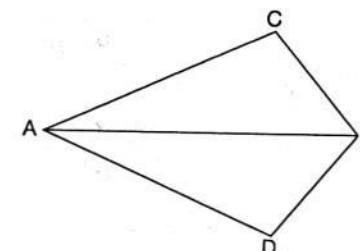
- Desenhe um triângulo. Construa agora um outro triângulo congruente ao que você desenhou. Descreva o procedimento.
- Construa um triângulo ABC sabendo que $\overline{AB} = 7,5\text{cm}$, $\overline{BC} = 8,2\text{cm}$ e $A\hat{B}C = 80^\circ$. Meça o comprimento de AC e os outros ângulos do triângulo.
- Na figura ao lado os ângulos α e β são iguais. Mostre que $AC = BC$.
- Na figura ao lado tem-se $AB = AC$ e $BD = CE$. Mostre que:
 - $ACD = ABE$
 - $BCD = CBE$
- Três sarrafos de madeira são pregados, dois a dois, de modo a formar um triângulo, com somente um prego em cada vértice, como indicado na figura seguinte. A figura assim obtida é rígida. Por que? Para comparação construa um quadrilátero com quatro sarrafos e um prego em cada vértice. É esta figura rígida?



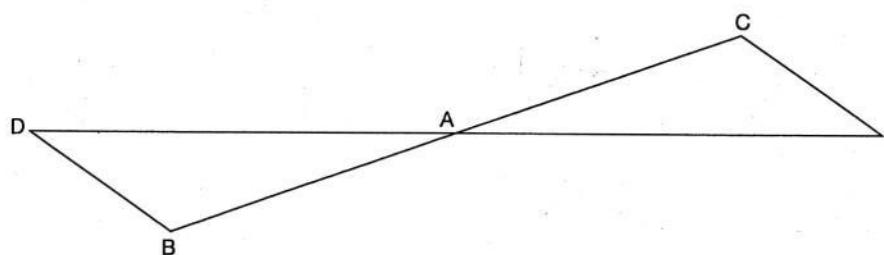
6. Explique porque é usual reforçar-se um portão com uma trave na diagonal como indicado esquematicamente na figura seguinte.



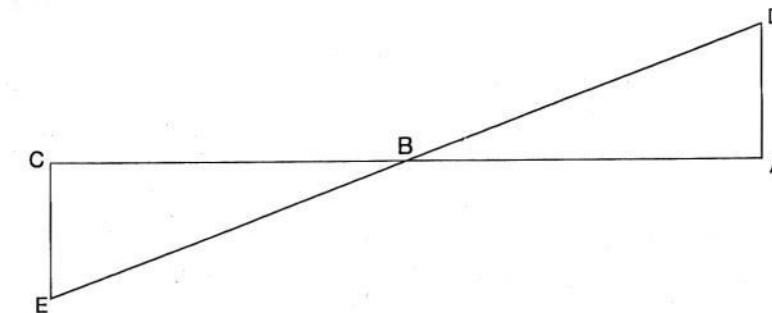
7. Na figura ao lado, $AC = AD$ e AB é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$. Prove que os triângulos ACB e ADB são congruentes.



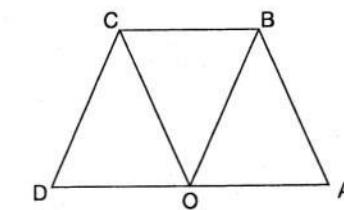
8. Na figura abaixo o ponto A é ponto médio dos segmentos CB e DE . Prove que os triângulos ABD e ACE são congruentes.



9. Na figura abaixo os ângulos \hat{A} e \hat{C} são retos e o segmento DE corta CA no ponto médio B de CA . Mostre que $DA = CE$.



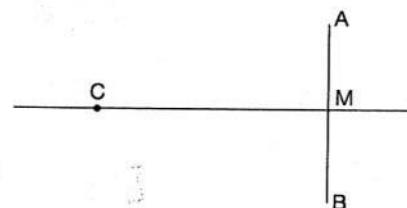
10. Da figura ao lado sabe-se que $OC = OB$, $OD = OA$ e $B\hat{O}D = C\hat{O}A$. Mostre que $CD = BA$.



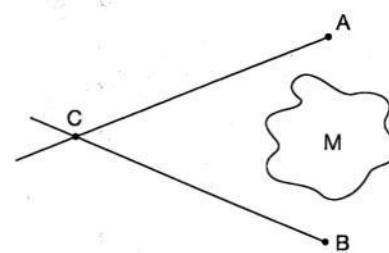
11. Faça uma demonstração diferente da Proposição (4.5) fazendo uso da solução do exercício 4.

PROBLEMAS

1. Na figura ao lado $C\hat{M}A$ é um ângulo reto e M é ponto médio de AB . Mostre que $CA = CB$.

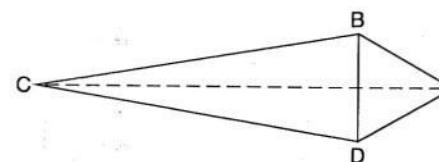


2. A região marcada com um M representa um lago. Descreva um processo pelo qual será possível medir a distância entre os pontos A e B . (Qualquer medição fora do lago é possível).



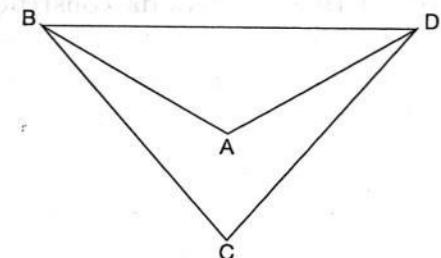
3. Mostre que, se um triângulo tem os três lados congruentes, então tem também os três ângulos congruentes.

4. Na figura ao lado ABD e BCD são triângulos isósceles com base DB . Prove que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes.

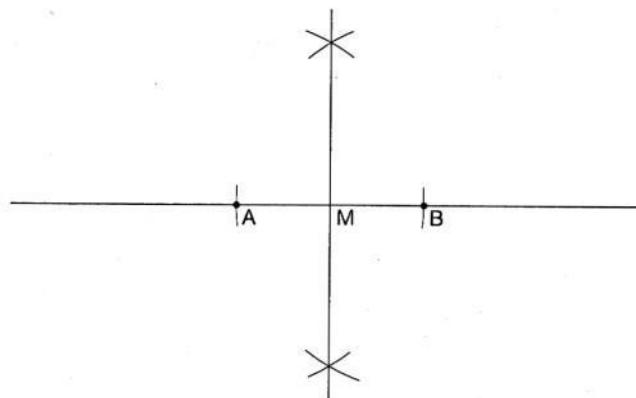


5. Usando a mesma figura, mostre que também a reta AC é bissecriz de $B\hat{A}D$ e é perpendicular a DB .

6. Na figura ao lado, ABD e BCD são triângulos isósceles com base BD . Prove que $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ e que AC é bissecriz do ângulo $B\hat{C}D$.



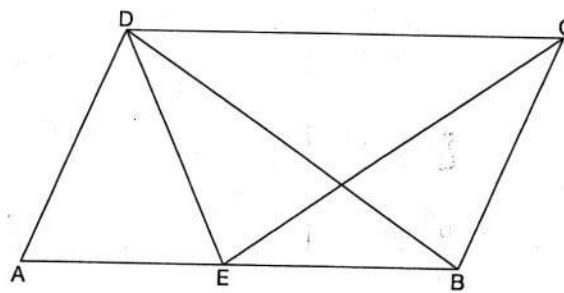
7. Justifique o seguinte procedimento para determinação do ponto médio de um segmento. "Seja AB um segmento. Com um compasso centrado em A , desenhe um círculo de raio \overline{AB} . Descreva outro círculo de mesmo raio e centro em B . Estes dois círculos se interceptam em dois pontos. Trace a reta ligando estes dois pontos. A interseção desta reta com o segmento AB será o ponto médio de AB ."



8. Na construção acima é realmente necessário que os dois círculos tenham raio \overline{AB} ?

9. Mostre que, na construção descrita no problema 8, acima, a reta que determina o ponto médio de AB é perpendicular a AB .

10. Utilize a idéia da construção descrita no problema 8 e proponha um método de construção de uma perpendicular a uma reta dada passando por um ponto desta reta.
11. Na figura abaixo tem-se $AD = DE$, $\hat{A} = \hat{DEC}$ e $A\hat{D}E = B\hat{D}C$. Mostre que os triângulos ADB e EDC são congruentes.



12. Num triângulo isósceles ABC , com base BC , a bissetriz do ângulo A é perpendicular à base e é mediana.

COMENTÁRIO

Foi na Grécia que surgiu, pela primeira vez na história, a figura do cientista profissional. Aquele homem devotado à busca de conhecimento e recebendo um salário para fazer isto. Alguns dos nomes mais representativos desta classe, durante a civilização grega, viveram em Alexandria, onde Ptolomeu I fez erigir um grande centro de pesquisas denominado "Museo", com sua famosa biblioteca. Ali, a tradição grega em Ciência e Literatura foi preservada e desenvolvida. O sucesso desse empreendimento foi considerável.

Entre os primeiros pesquisadores associados com o Museo de Alexandria está Euclides, um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos. Euclides aparentemente recebeu sua educação matemática em Atenas, dos discípulos de Platão, e sua principal obra intitula-se: "Elementos", (composto de 13 volumes). Este trabalho deve ter-se tornado um clássico logo após sua publicação. Certamente, desde os tempos de Arquimedes, ele era constantemente referido e utilizado como texto básico. Ao lado da bíblia é sem dúvida o livro mais reproduzido e estudado de todos os que já foram escritos na história do mundo ocidental. Mais de 1.000 edições dele já foram produzidas desde a invenção da imprensa e, antes disto, cópias manuscritas dominavam todo o ensino da matemática. A geometria ensinada na escola secundária é, freqüentemente, cópia quase literal de 8 ou 9 dos 13 volumes que o constituem. O próprio texto que o leitor tem em mãos contém muitas demonstrações que são, exceto pela linguagem, parte dos "Elementos".

Certamente Euclides não criou toda a geometria contida nos seus "Elementos".

Seu trabalho foi muito mais aquele de um compilador, desejoso de colocar em um único texto, três das grandes descobertas gregas:

- a teoria de Eudoxio das proporções (livro V).
- a teoria de Teteto dos irracionais (livro X) e
- a teoria dos cinco corpos regulares que ocupava lugar de destaque na cosmologia de Platão.

Foi, no entanto, a aplicação sistemática do método dedutivo para desenvolver a geometria à partir de alguns fatos básicos tomados como axiomas, que, sem dúvida, teve o maior impacto e influência sobre o ensino e sobre a maneira de fazer ciência a partir de então.

CAPÍTULO 5

O TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO E SUAS CONSEQÜÊNCIAS

5.1 Definição. Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de *ângulos internos* ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de *ângulos externos* do triângulo

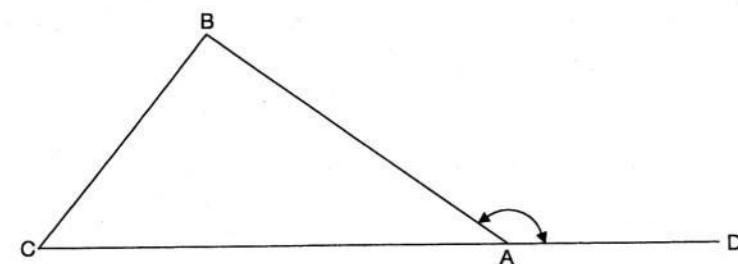


Figura 5.1

Na figura acima o ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno $C\hat{A}B$.

5.2 Teorema (ângulo externo). Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Prova. Seja ABC um triângulo. Na semi-reta S_{CA} marque um ponto D tal que A esteja entre C e D , como indicado na figura 5.2.

Devemos provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos inicialmente provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto considere o ponto médio E do segmento AB .

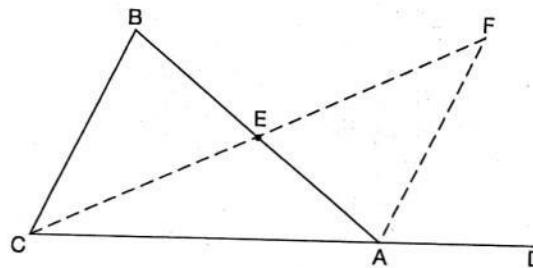


Figura 5.2

Na semi-reta SCE , marque um ponto F tal que $CE = EF$. Trace AF . Compare os triângulos CEB e FAE . Como $BE = AE$ (já que E é o ponto médio de AB), $CE = EF$ (por construção) e $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ (por serem opostos pelo vértice), segue-se que $BEC = AEF$. Consequentemente $\hat{B} = E\hat{A}F$. Como a semi-reta $S AF$ divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$. Portanto $\hat{B} < B\hat{A}D$. Deixamos a cargo do leitor a prova de que $B\hat{A}D > \hat{C}$.

5.3 Proposição. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° .*

Prova. Seja ABC um triângulo. Vamos mostrar que $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$. Seja θ o ângulo externo deste triângulo com vértice em C . Pela proposição anterior temos que

$$\theta > \hat{B}$$

Como θ e \hat{C} são suplementares, então $\theta + \hat{C} = 180^\circ$. Portanto,

$$\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} = 180^\circ.$$

5.4 Corolário. *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

Prova. De fato, se um triângulo possuísse dois ângulos não agudos, sua soma seria maior ou igual a 180° , o que não pode ocorrer de acordo com a proposição anterior.

5.5 Corolário. *Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira, então m e n não se interceptam.*

Prova. Se m e n se interceptassem formar-se-ia um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo pelo corolário anterior.

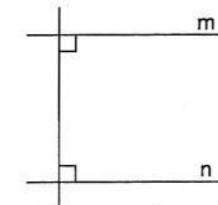


Figura 5.3

5.6 Definição. Duas retas que não se interceptam são ditas paralelas.

A proposição seguinte fornece um método de construção de retas perpendiculares. Como consequência da proposição acima, este método pode ser utilizado para construção de retas paralelas.

5.7 Proposição. *Por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a reta dada.*

Prova. (Existência). Seja m uma reta e A um ponto fora desta reta. Tome sobre m dois pontos B e C distintos. Trace AB . Se AB já é perpendicular a m , terminamos a construção. Caso contrário, considere, no semi-plano que não contém A , uma semi-reta com vértice B formando com SBC um ângulo congruente a $A\hat{B}C$. Nesta semi-reta tome um ponto A' tal que $BA' = BA$. O

segmento AA' é perpendicular a m . De fato, como $BA = BA'$, o triângulo ABA' é isósceles. Como $A\hat{B}C = C\hat{B}A'$, então BC é bisetriz do ângulo $A\hat{B}A'$. Segue-se, então, que BC é perpendicular a AA' .

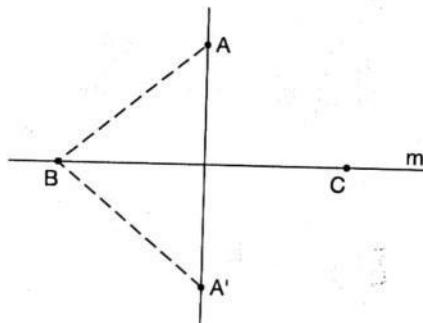


Figura 5.4

(*Unicidade*) Se existissem duas retas distintas passando pelo ponto A e sendo ambas perpendiculares a reta m , formar-se-ia um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo de acordo com o corolário (5.4).

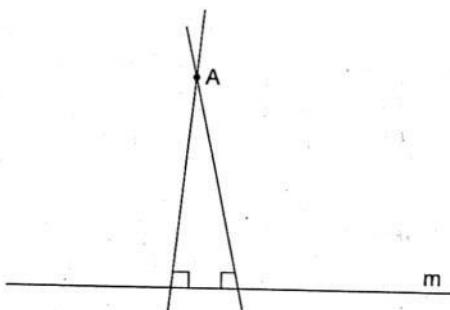


Figura 5.5

O ponto A' obtido a partir de A e m na construção acima (vide figura (5.4)), é chamado de reflexo do ponto A relativamente à reta m . O reflexo é caracterizado pelas seguintes condições:

- a) AA' é perpendicular a m , e
- b) m corta AA' no seu ponto médio.

A função F_m que associa a cada ponto do plano, o seu reflexo relativamente a uma reta m fixada, é chamada *reflexão* e tem as seguintes propriedades:

- i) $F_m(F_m(A)) = A$ para todo ponto A ,
- ii) $\overline{F_m(A)} = A$ se e somente se A é ponto da reta m ,
- iii) $\overline{F_m(A)F_m(B)} = \overline{AB}$, ou seja, F_m preserva a distância entre pontos do plano, e
- iv) se $A \in m$, $B \notin m$ e $B' = F_m(B)$ então m é a bisetriz do ângulo $B\hat{A}B'$.

Fica a cargo do leitor a demonstração da validade destas propriedades.

Dado um ponto A e uma reta m , a perpendicular a m passando por A intercepta m em um ponto P chamado: *pé da perpendicular baixada do ponto A a reta m*. Se Q é qualquer outro ponto de m , o segmento AQ é dito ser *oblíquo* relativamente a m .

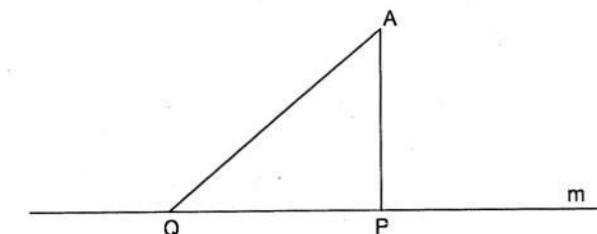


Figura 5.6

Na figura o segmento QP é chamado de *projeção do segmento QA sobre a reta m*. É uma consequência da proposição seguinte que $\overline{QA} > \overline{QP}$ e que $\overline{QA} > \overline{AP}$. O número \overline{AP} é chamado de *distância do ponto A a reta m*.

Dado um triângulo ABC diremos que o lado BC *opõe-se ao ângulo \hat{A}* ou, de maneira equivalente, que o ângulo \hat{A} é *oposto ao lado BC*.

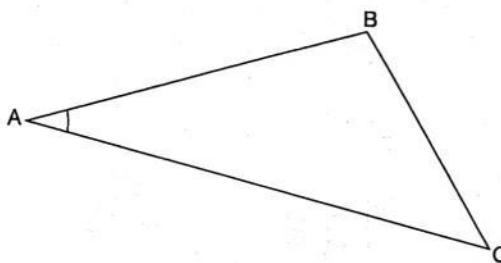


Figura 5.7

5.8 Proposição. Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são iguais e o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Prova. A primeira parte da proposição é uma consequência imediata das proposições (4.5) e (4.6). Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $\overline{BC} < \overline{AC}$ e vamos mostrar que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$.

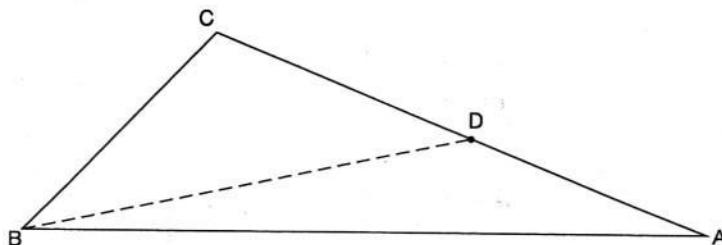


Figura 5.8

Para isto, marque, sobre a semi-reta S_{CA} , um ponto D tal que $CD = BC$. Como $BC < AC$ então este ponto D pertence ao

segmento AC e, como consequência, a semi-reta S_{BD} divide o ângulo $C\hat{B}A$. Portanto tem-se

$$C\hat{B}A > C\hat{B}D.$$

Agora observe que

$$C\hat{B}D = C\hat{D}B > C\hat{A}B$$

A igualdade acima é consequência de CBD ser um triângulo isósceles, e a desigualdade ocorre porque $C\hat{D}B$ é ângulo externo do triângulo BDA . Portanto

$$C\hat{B}A > C\hat{A}B$$

como queríamos demonstrar.

5.9 Proposição. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Prova. Novamente aqui, a primeira parte da proposição é uma consequência imediata das proposições (4.5) e (4.6). Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$ e vamos mostrar que $\overline{BC} < \overline{AC}$. Observe que, existem três possibilidades: $\overline{BC} < \overline{AC}$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ e $\overline{BC} = \overline{AC}$.

Se $\overline{BC} > \overline{AC}$ então, pela proposição anterior, deveríamos ter $C\hat{A}B > C\hat{B}A$, o que é contrário a nossa hipótese. Do mesmo modo, se ocorresse $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo seria isósceles e $C\hat{A}B = C\hat{B}A$, o que está também em desacordo com nossa hipótese.

Logo deve ocorrer $\overline{BC} < \overline{AC}$, como queríamos demonstrar.

5.10 Teorema. Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

Prova. Dado um triângulo ABC mostraremos que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. Para isto, marque um ponto D na semi-reta S_{AB} , de modo

que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Segue-se que $BD = CB$ e, portanto, o triângulo BCD é isósceles com base CD . Logo, teremos $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Como B está entre A e D , então $B\hat{C}D < A\hat{C}D$. Segue-se que no triângulo ACD tem-se $B\hat{D}C < A\hat{C}D$. Logo, pela proposição anterior, $\overline{AC} < \overline{AD}$. Mas então $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.

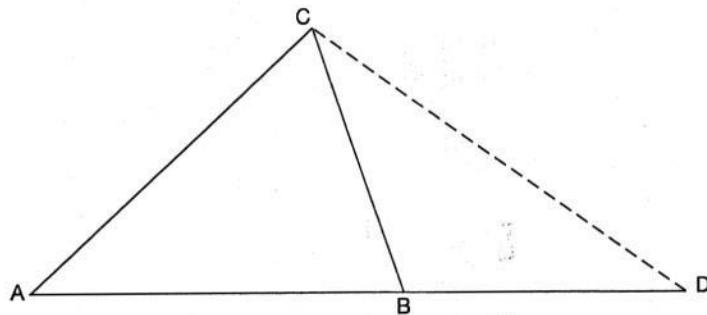


Figura 5.9

5.11 Teorema (Desigualdade Triangular). *Dados três pontos do plano, A, B e C , tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. Igualdade ocorre se e somente se B pertence ao intervalo AC .*

Prova. Se A, B e C não estão sobre uma mesma reta, então eles determinam um triângulo e a desigualdade é consequência do teorema anterior. Se estão sobre uma mesma reta, sejam a, b e c , respectivamente, as suas coordenadas. Neste caso é simples verificar que

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

e que igualdade ocorre se e somente se b está entre a e c . O resultado é agora uma consequência do teorema (2.2).

A desigualdade triangular é a única restrição para que se possa construir um triângulo com comprimento dos lados pré-determinados. Por exemplo, de acordo com esta desigualdade é impossível construir-se um triângulo cujos lados sejam 5, 3 e 9.

5.12 Proposição. *Sejam $a, b \leq c$ três números positivos. Se $c < a + b$ então podemos construir um triângulo cujos lados medem a, b e c .*

Prova. Trace uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B tais que $\overline{AB} = c$. Com um compasso descreva um círculo de centro A e raio b , e um círculo de centro B e raio a .

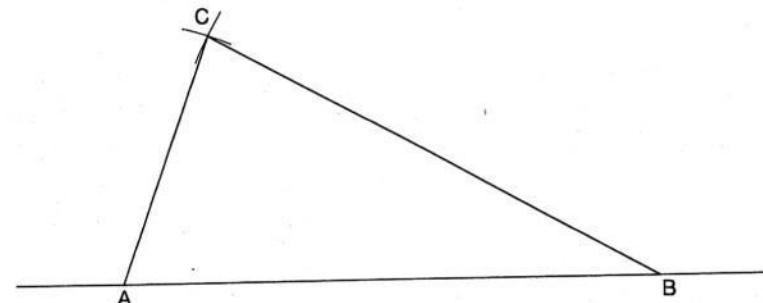


Figura 5.10

Como $c < a + b$, os dois círculos se interceptam. Chame quaisquer dos pontos da interseção de C . O triângulo ABC tem lados medindo a, b e c como desejado.

Vamos agora aplicar a desigualdade triangular para resolver o seguinte problema: *São dados dois pontos A e B fora de uma reta m . Determinar um ponto P sobre a reta m tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja o menor possível.*

Inicialmente vamos supor que A e B estejam em semi-planos distintos relativamente a reta m . Neste caso o segmento AB intercepta a reta m num ponto P . Afirmo que este ponto é a solução do nosso problema. De fato, se P' é qualquer ponto de m , então, pela desigualdade triangular, teremos: $\overline{AP'} + \overline{P'B} \geq \overline{AB}$, ocorrendo igualdade se e somente se $P = P'$.

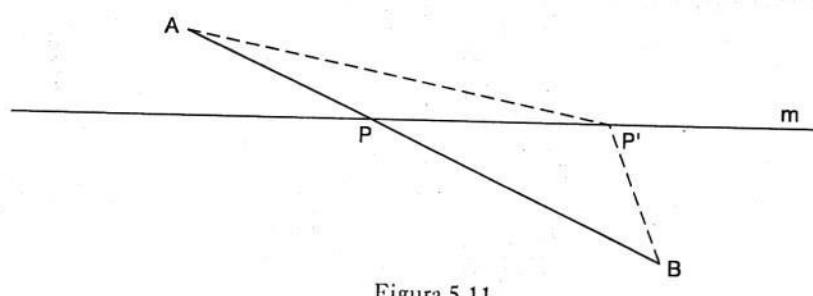


Figura 5.11

No caso em que A e B estão em um mesmo semi-plano, seja B' o reflexo do ponto B relativamente a reta m . Se P' é qualquer ponto de m , então $\overline{P'B} = \overline{P'B'}$. Consequentemente, teremos que

$$\overline{AP'} + \overline{P'B} = \overline{AP'} + \overline{P'B'}.$$

Assim, o problema reduz-se ao caso anterior e a solução é o ponto P obtido pela interseção de m com o segmento AB'

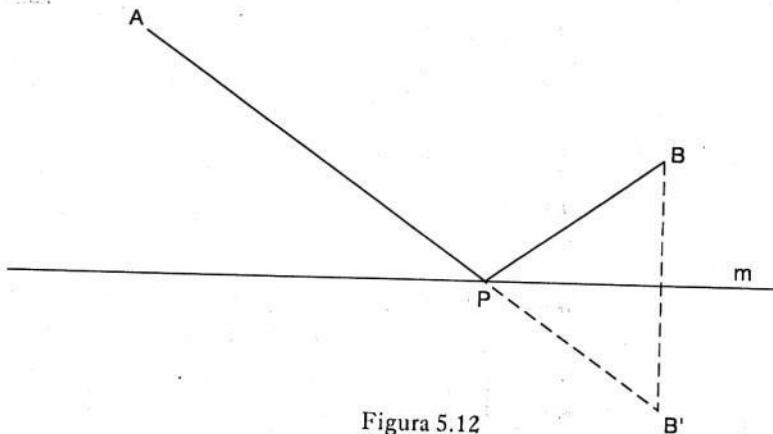


Figura 5.12

É interessante observar que este problema surge em Física, quando se tenta determinar um ponto P , sobre um espelho, onde deve ocorrer a reflexão de um raio de luz que vai do ponto A ao

ponto B , refletindo-se no espelho. Ou quando tenta-se determinar um ponto onde uma bola de bilhar deve chocar-se com a lateral da mesa, para ir do ponto A , tocar na lateral e atingir uma bola que se encontra no ponto B .

Vamos agora aplicar os resultados já obtidos para estudar uma classe especial de triângulos.

5.13 Definição. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado *triângulo retângulo*. O lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa*, e os outros dois lados são denominados *catetos*.

De acordo com (5.4) os ângulos opostos aos catetos são agudos. É uma consequência de (5.9) que a hipotenusa é maior do que qualquer dos catetos. Por outro lado, pela desigualdade triangular, o comprimento da hipotenusa é menor do que a soma dos comprimentos dos catetos. Se dois triângulos retângulos são congruentes, então, necessariamente, os ângulos retos devem-se corresponder.

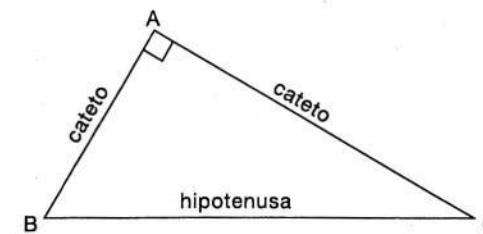


Figura 5.13

Por causa disto, além dos três casos de congruência que já conhecemos, existem outros três específicos para triângulos retângulos. Estes são apresentados no teorema seguinte.

5.14 Teorema (Congruência de triângulos retângulos). Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \hat{C} e \hat{C}' . Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:

- 1) $BC = B'C'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$,
- 2) $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, e
- 3) $AB = A'B'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$.

Os casos acima podem ser identificados como igualdade entre

- 1) ($c \cdot a$) cateto e ângulo oposto,
- 2) ($h \cdot c$) hipotenusa e cateto, e
- 3) ($h \cdot a$) hipotenusa e ângulo agudo.

Prova. (Caso 1) Nossas hipóteses são, neste caso, as seguintes:

$$\hat{C} = \hat{C}' \text{ (reto)}, \quad BC = B'C' \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{A}'.$$

Observe que, apesar de termos informações sobre dois ângulos e um lado, não podemos aplicar o “2º caso de congruência”. Para provar que ABC e $A'B'C'$ são congruentes marque um ponto D sobre a semi-reta S_{CA} de sorte que $CD = C'A'$. Os triângulos CDB e $C'A'B'$ são então congruentes, pelo primeiro caso de congruência.

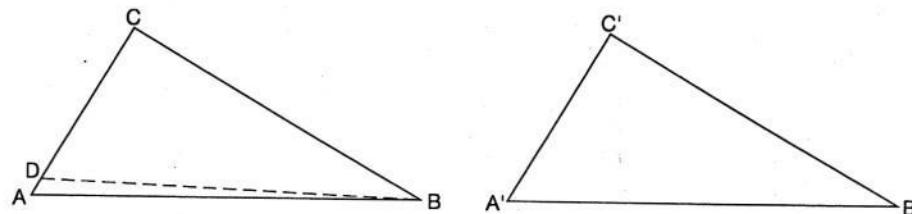


Figura 5.14

Como consequência, tem-se que $C\hat{D}B = \hat{A}'$. Desde que $C\hat{A}B = \hat{A}'$ (por hipótese), concluímos que

$$C\hat{D}B = C\hat{A}B.$$

Afirmo que os pontos A e D coincidem. De fato, se tal não ocorrer A , D e B formam um triângulo em que os ângulos $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são ângulo externo e interno não adjacente. Portanto a igualdade acima não pode ocorrer de acordo com o teorema do ângulo externo. Então A e D coincidem e logo $CAB = CDB$. Como $CDB = C'A'B'$ conclui-se que $CAB = C'A'B'$, como queríamos demonstrar.

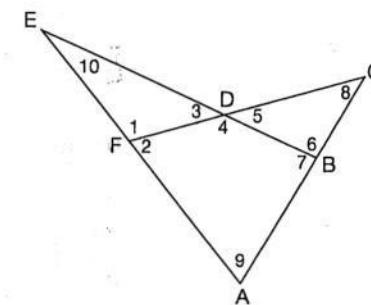
As demonstrações dos outros dois casos são deixadas a cargo do leitor.

EXERCÍCIOS

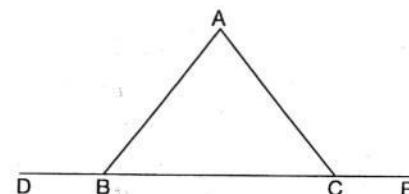
1. Prove que, se um triângulo tem dois ângulos externos iguais, então ele é isósceles.

2. A figura ao lado é formada pelos segmentos AC , AE , CF e EB . Determine os ângulos que são:

- a) menores do que o ângulo $\hat{7}$.
- b) maiores do que o ângulo $\hat{5}$, e
- c) menores do que o ângulo $\hat{4}$.

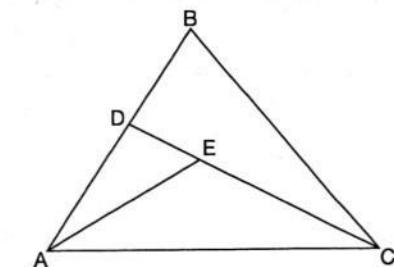


3. Na figura ao lado os ângulos externos $A\hat{C}E$ e $A\hat{B}D$ satisfazem a desigualdade: $A\hat{C}E < A\hat{B}D$. Mostre que $A\hat{B}D > A\hat{B}C$.



4. Prove que um triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

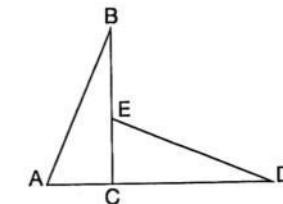
5. Na figura ao lado, B , D e A são colineares. Do mesmo modo D , E e C são colineares. Mostre que $A\hat{E}C > D\hat{B}C$.



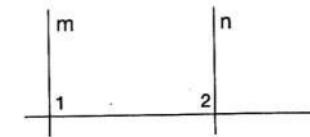
6. Em um cartório de registro de imóveis um escrivão recusou-se a transcrever o registro de um terreno triangular cujos lados, segundo o seu proprietário, mediam 100m, 60m e 20m. Você pode dar um argumento que justifique a atitude do escrivão?

7. Prove as propriedades da função “reflexão”, constantes do texto.

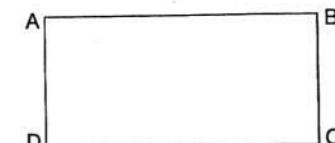
8. Na figura ao lado os triângulos ABC e EDC são congruentes e os pontos A , C e D são colineares. Mostre que $\overline{AD} > \overline{AB}$.



9. Na figura ao lado tem-se $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$. Conclua que as retas m e n são paralelas.



10. Na figura ao lado \hat{B} e \hat{D} são ângulos retos e $AB = DC$. Mostre que $AD = BC$.



11. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos em que $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Decida se ABC e $A'B'C'$ são congruentes ou não. (Prove que eles são congruentes ou dê um exemplo para mostrar que as hipóteses podem ocorrer sem que os dois triângulos sejam congruentes).

12. No final da demonstração do teorema (5.2), é feita a seguinte afirmação: "... a semi-reta S_{AF} divide o ângulo $B\hat{A}D$,...". Justifique com detalhes porque esta afirmação é verdadeira.

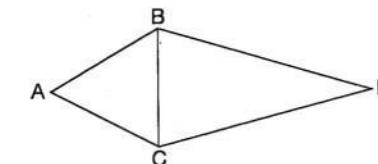
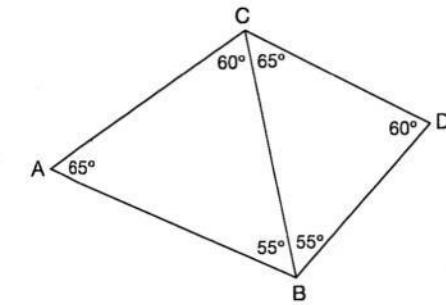
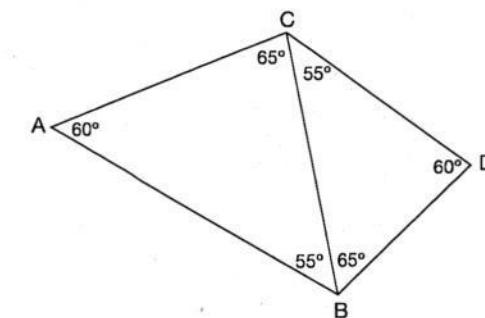
PROBLEMAS

1. A figura ao lado foi copiada de um livro por uma criança. As medidas dos ângulos indicadas são as medidas corretas do desenho original. Com base nesta informação, responda às seguintes questões relativas ao desenho original.

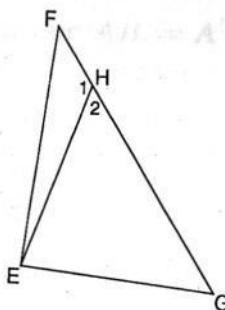
- Os triângulos ABC e DCB são congruentes?
- Qual o lado do triângulo ABC que é mais longo?
- Qual o lado do triângulo DCB que é mais curto?

2. Se, no problema anterior, os ângulos tivessem sido indicados como na figura ao lado, quais seriam as respostas às perguntas *a*, *b* e *c* acima?

3. Na figura ao lado tem-se $\overline{BD} > \overline{BC}$ e $\hat{A} > \hat{A}\hat{B}C$. Prove que $\overline{BD} > \overline{AC}$.

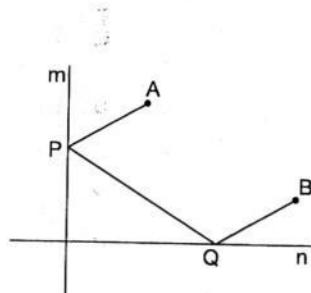


4. Na figura ao lado H foi escolhido no segmento FG de sorte que $EH = EG$. Mostre que $\hat{1} > \hat{2}$.

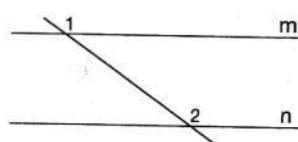


5. Se um triângulo ABC é equilátero e D é um ponto do segmento BC mostre que $\overline{AD} > \overline{DB}$.

6. Na figura ao lado m e n são duas retas perpendiculares. Qual o caminho mais curto para se ir do ponto A ao ponto B tocando-se nas duas retas?

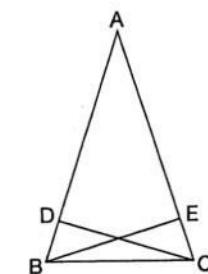


7. Na figura ao lado $\hat{1} = \hat{2}$. Mostre que as retas m e n são paralelas.

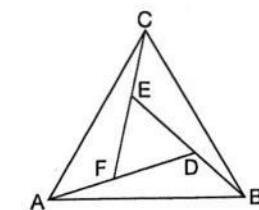


8. Determine o segmento mais curto ligando um ponto A a um ponto de uma reta m .

9. No triângulo ABC da figura ao lado tem-se CD perpendicular a AB , BE perpendicular a AC e $CD = BE$. Mostre que ABC é um triângulo isósceles.

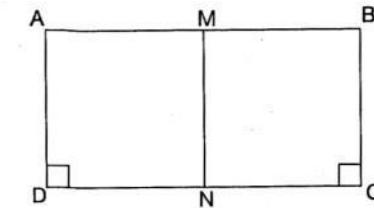


10. Na figura ao lado ABC é um triângulo equilátero e $AD = BE = CF$. Se, além disso, $D\hat{A}B = E\hat{B}C$, mostre que EFD é também equilátero.



11. Usando a mesma figura e supondo apenas que ABC é equilátero e que $AD = BE = CF$, mostre que EFD é também equilátero.

12. Na figura ao lado $AD = BC$, $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são ângulos retos, e M e N são pontos médios dos segmentos AB e DC respectivamente. Mostre que MN é perpendicular a AB e a CD .



13. Demonstre os casos (2) e (3) da Proposição (5.13).

14. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não retângulos com $\hat{C} = \hat{C}'$, $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$. Dê um exemplo para mostrar que estas hipóteses não acarretam que os triângulos devam ser congruentes.

COMENTÁRIO

Quando se deseja demonstrar uma proposição, resolver um exercício ou simplesmente entender o enunciado de um teorema, é muito importante que sejamos capazes de separar as hipóteses do que se deseja provar (tese ou conclusão). Esquematicamente o enunciado de uma proposição (ou teorema, ou corolário, ou problema, ou exercício etc.) pode ser sempre representado por

$$P \rightarrow Q \quad (\text{leia: } P \text{ implica } Q)$$

onde P e Q representam aqui duas afirmações. A afirmação P é a hipótese e a afirmação Q é a tese. Em muitos casos, a hipótese vem precedida de um “se” ou de um “quando”, e a tese de um “então”. Um exemplo disto é a seguinte proposição:

“Se duas retas distintas possuem uma perpendicular comum, então elas não se interceptam.”

Neste enunciado temos

Hipótese: Duas retas distintas possuem uma perpendicular comum.

Tese: As duas reta não se interceptam.

Evidentemente, nem todos os enunciados de proposições estão apresentados no formato “se..., então...”. Por exemplo, a mesma proposição poderia ter sido enunciada da seguinte maneira:

“Retas perpendiculares a uma terceira não se encontram”.

Agora, a hipótese está disfarçada no pedaço de frase “Retas perpendiculares a uma terceira...”, e a tese, no restante. Pelo menos

quatro proposições constantes deste capítulo nos dão exemplos de enunciados deste tipo. Quando encontramos dificuldade em reconhecer a hipótese e a tese de um dado enunciado, é sempre uma boa política tentar reescrevê-lo no formato “se..., então...”. Por exemplo, a proposição (4.8) tem o seguinte enunciado:

“Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também bissetriz e altura.”

Uma maneira de reescrevê-la no formato “se..., então...” é o seguinte:

“Se ABC é um triângulo isósceles com base BC e D é o ponto médio de BC , então AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e é perpendicular ao lado BC .”

Embora estes dois enunciados sejam extremamente diferentes, eles nos dizem exatamente a mesma coisa. O primeiro é sem dúvida mais elegante, mas o segundo é o enunciado com que realmente trabalhamos quando demonstramos esta proposição.

Consideremos agora as duas proposições seguintes:

- a) “Se um triângulo é isósceles, então ele possui dois ângulos iguais”.
- b) “Se dois ângulos de um triângulo são iguais, então o triângulo é isósceles”.

Observe que a hipótese da primeira é a tese da segunda e que a tese da primeira é a hipótese da segunda. Em termos esquemáticos, se

$$P \rightarrow Q$$

representa a proposição (a), então

$$Q \rightarrow P$$

representa a proposição (b). A segunda proposição é dita ser a *inversa* da primeira. Cada proposição tem sempre uma inversa a qual pode ser verdadeira ou não. Exemplos:

- 1.i) Se duas retas possuem uma perpendicular comum então elas são retas paralelas.
- 1.ii) Se duas retas são paralelas, então elas possuem uma perpendicular comum.
- 2.i) Se um triângulo é retângulo, então ele possui dois ângulos agudos.
- 2.ii) Se um triângulo possui dois ângulos agudos, então ele é um triângulo retângulo.

A proposição (1.i) foi demonstrada neste capítulo. Sua inversa, a proposição (1.ii), é verdadeira, mas sua demonstração neste nível do curso seria muito complicada. A proposição (2.i) também foi demonstrada neste capítulo. Sua inversa, a proposição (2.ii), é obviamente falsa.

Quando ocorre que as proposições $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ são simultaneamente verdadeiras, dizemos que P e Q são afirmações equivalentes, e representamos esquematicamente isto por

$$P \longleftrightarrow Q \quad (P \text{ é equivalente a } Q)$$

No enunciado de teoremas estabelecendo que as duas afirmações são equivalentes é comum que se use o formato "...se e somente se...". Por exemplo:

"Dois lados de um triângulo são congruentes se e somente se dois de seus ângulos são congruentes".

Outros formatos comuns são "...se e só se...", "...é condição necessária e suficiente para..." e "...é equivalente a...".

Considere agora as duas seguintes proposições:

- I) Se dois lados de um triângulo são congruentes então seus ângulos opostos são também congruentes.
- II) Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a estes ângulos também não são congruentes.

As proposições acima são relacionadas da seguinte maneira. Se representarmos por P a negação da afirmação P , então esquematicamente as proposições acima podem ser representadas por

- I) $P \rightarrow Q$
- II) $Q \rightarrow P$

Chamamos a segunda proposição de *negativa* da primeira. Um fato simples de lógica, e extremamente útil, é que uma proposição e sua negativa são sempre simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. Por isso é equivalente demonstrar-se qualquer uma das duas. Deve-se, no entanto, observar que, o trabalho para demonstração de uma delas pode ser menos complicado do que o trabalho para se demonstrar diretamente a outra. O leitor deve observar que a proposição I acima é exatamente a proposição (4.5) e que II é a primeira parte da proposição (5.8).

O AXIOMA DAS PARALELAS

A existência de retas paralelas é uma consequência dos postulados já apresentados. O Corolário (5.5), além de garantir tal existência, fornece um método de, efetivamente, desenhar-se retas paralelas. O axioma que apresentamos a seguir diz, essencialmente, que duas retas paralelas a uma terceira e com um ponto em comum são coincidentes.

Axioma V. *Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m .*

Deve-se observar que este axioma prescreve a *unicidade*, já que a existência de reta paralela a m , passando por um ponto dado, já era garantida por (5.5). Como consequência imediata deste axioma tem-se:

6.1 Proposição. *Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 , então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.*

Prova. Suponha que n_1 e n_2 não coincidem e são paralelas a reta m . Se n_1 e n_2 não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de interseção, digamos, P . Mas então n_1 e n_2 seriam distintas paralelas à reta m passando por P . Isto contradiz o axioma V. Logo n_1 e n_2 são paralelas.

6.2 Corolário. *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Prova. Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Se uma reta m cortasse n_1 e não cortasse n_2 , então m e n_2 seriam paralelas. Assim n_2 seria paralela a m e a n_1 . Como m e n_1 não são paralelas entre si nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição anterior. Logo m corta também n_2 .

A nossa definição de retas paralelas não é tão simples de usar como aparenta. Desde que retas são infinitas em comprimento, como poderemos provar que duas retas não se interceptam? Por exemplo, as retas m e n da figura abaixo parecem ser paralelas. Como decidir se elas não se encontram em algum ponto do plano muito distante de A e B ?

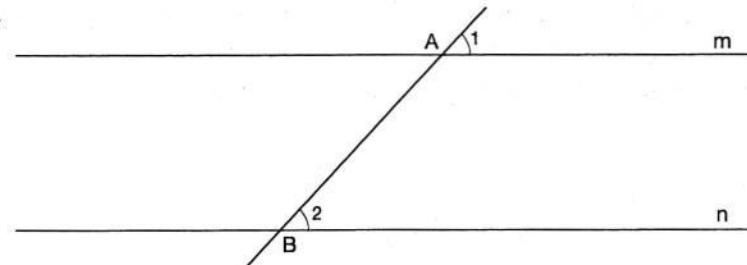


Figura 6.1

Uma maneira muito simples de responder a esta pergunta é através da comparação dos ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$, indicados na figura, formados pelas duas paralelas com a reta que passa por A e B .

6.3 Proposição. *Sejam m , n , $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como na figura (6.1) Se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.*

Prova. De fato, se m interceptasse n em algum ponto P , como indicado na página seguinte, formar-se-ia um triângulo ABP . Neste

triângulo $\hat{1}$ é ângulo externo e $\hat{2}$ é um ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{1}$, ou vice-versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo teríamos $\hat{1} \neq \hat{2}$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto m e n não se interceptam.

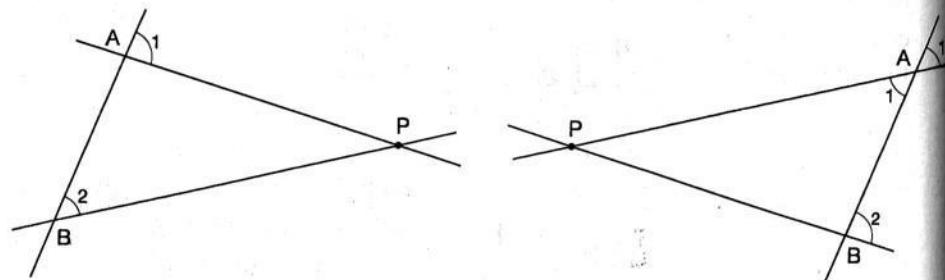


Figura 6.2

Quando duas retas são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulos como indicado na figura abaixo. Quatro deles são correspondentes aos outros quatro, a saber

$$\begin{array}{ccc} \hat{1} & \longleftrightarrow & \hat{2} \\ \hat{3} & \longleftrightarrow & \hat{4} \\ \hat{5} & \longleftrightarrow & \hat{6} \\ \hat{7} & \longleftrightarrow & \hat{8} \end{array}$$

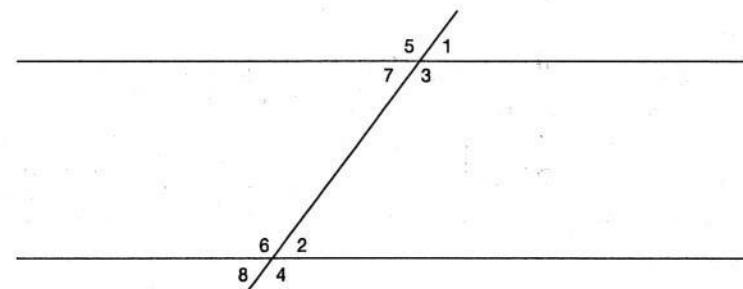


Figura 6.3

Observe que $\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{2} = \hat{8}$, $\hat{3} = \hat{5}$ e $\hat{4} = \hat{6}$ por serem opostos pelo vértice. Como consequência, se $\hat{1} = \hat{2}$ então todos os outros pares de ângulos correspondentes serão iguais. Além disso, teremos que $\hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$. Inversamente, se $\hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$ então $\hat{1} = \hat{2}$. Estas observações permitem reescrever a proposição (6.3) de duas maneiras distintas.

6.3.A Proposição. Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos $\hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$ então as retas são paralelas.

6.3.B Proposição. Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes são iguais, então as retas são paralelas.

O axioma V permite-nos mostrar que a inversa desta proposição é também verdadeira.

6.4 Proposição. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais.

Prova. Sejam m e m' duas retas paralelas e seja n uma reta que corta m e m' nos pontos A e B , respectivamente. Considere uma reta m'' passando pelo ponto A e formando com a transversal quatro ângulos iguais aos ângulos correspondentes formados pela reta m' com a mesma transversal. De acordo com a proposição anterior m' e m'' são paralelas. De acordo com a proposição (6.1) m e m'' são coincidentes. Portanto m forma ângulos com a reta n iguais aos correspondentes formados por m' com a reta n .

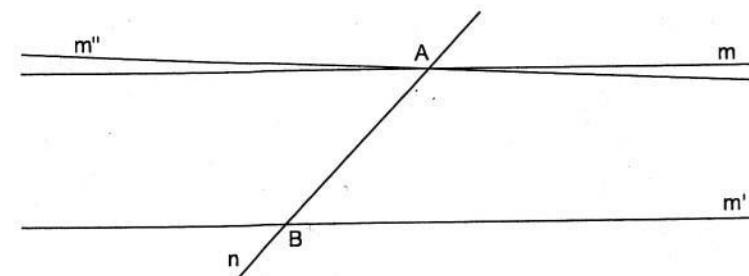


Figura 6.4

Vamos agora apresentar duas consequências importantes do axioma V.

6.5 Teorema. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Prova. Seja BC um triângulo. Pelo vértice C trace uma reta paralela ao lado AB . Numere os ângulos formados com vértice C , como indicado na figura seguinte.

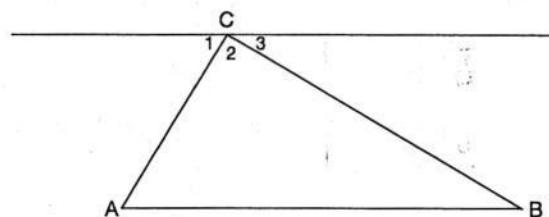


Figura 6.5

Tem-se $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$. Como AC é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição anterior que $\hat{1} = \hat{A}$. Como BC é também transversal às duas paralelas, então $\hat{3} = \hat{B}$. Portanto

$$\hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = \hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180^\circ.$$

A proposição seguinte relaciona uma série de corolários imediatos deste teorema.

6.6 Corolário.

- A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° .*
- Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° .*
- A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

d) *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .*

A prova deste corolário é deixada a cargo do leitor. O teorema seguinte nos diz que retas paralelas são eqüidistantes.

6.7 Teorema. *Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n .*

Prova. Sejam m e n retas paralelas. Sobre m tome dois pontos A e A' , e deles baixe perpendiculares à reta n . Sejam B e B' respectivamente os pés destas perpendiculares. Devemos provar que $AB = A'B'$. Para isto trace $A'B$ como indicado na figura seguinte.

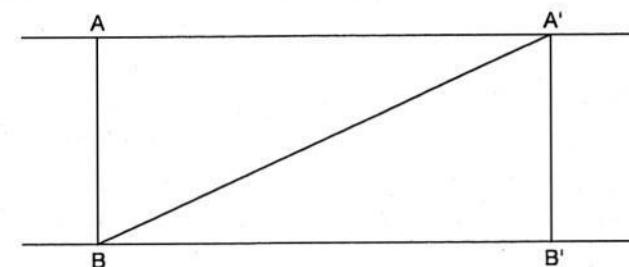


Figura 6.6

Observe que $A\hat{A}'B = A'\hat{B}B'$ e que $A'\hat{A}B = 90^\circ$. Isto é uma decorrência de que m e n são paralelas e da aplicação da proposição (6.4) ao considerar-se $A'B$ e AB como transversais. Portanto os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa (comum) iguais. Segue-se do teorema (5.14) que eles são congruentes. A congruência é a que leva A em B' , A' em B' e B em A' . Logo $AB = A'B'$, como queríamos demonstrar.

A inversa deste teorema é também verdadeira e sua demonstração é proposta como exercício 6 deste capítulo.

6.8 Definição. Um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

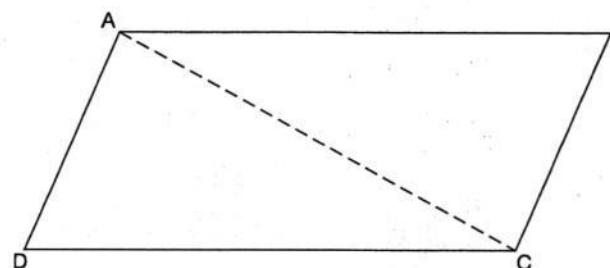


Figura 6.7

6.9 Proposição. Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.

Prova. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Trace a diagonal AC . Como AB e DC são paralelos, então $B\hat{A}C = A\hat{C}D$. Como AD e BC são paralelos, então $C\hat{A}D = A\hat{C}B$. Como, além disso, AC é comum aos triângulos ABC e CDA , então estes triângulos são congruentes. Logo $\hat{B} = \hat{D}$, $AB = CD$ e $BC = DA$. É agora fácil ver que $\hat{A} = \hat{C}$.

6.10 Proposição. As diagonais de um paralelogramo se interceptam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.

A prova desta proposição é simples e é deixada a cargo do leitor. As duas proposições seguintes dão condições suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

6.11 Proposição. Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero em que $AB = CD$ e $BC = AD$. Trace a diagonal BD do quadrilátero. Os triângulos ABD e CDB são congruentes de acordo com o terceiro caso de congruência de triângulos. Logo $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ e $C\hat{D}B = D\hat{B}A$. A

primeira igualdade garante que BC e AD são paralelos, a segunda garante que CD e BA também são paralelos. Logo $ABCD$ é um paralelogramo.

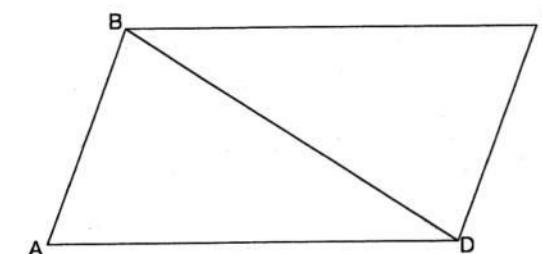


Figura 6.8

6.12 Proposição. Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

A prova desta proposição é deixada a cargo do leitor. Outras proposições sobre paralelogramos são propostas como exercícios ou problemas.

6.13 Teorema. O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

Prova. Seja ABC um triângulo. Designe por D o ponto médio de AB e por E o ponto médio de AC . Devemos provar que DE é paralelo a BC e que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Para isto, marque na semi-reta SED um ponto F tal que $FD = DE$. Como $AD = DB$ (já que D é ponto médio de AB) $A\hat{D}E = F\hat{D}B$ por serem opostos pelo vértice, então os triângulos ADE e FDB são congruentes. Como consequência tem-se que $D\hat{F}B = A\hat{E}D$ e $FB = AE$. Logo FB e EC são paralelos e têm o mesmo comprimento. Segue-se então da proposição (6.12) que o quadrilátero $FBCE$ é um paralelogramo. Portanto FE é paralelo a BC e têm o mesmo

comprimento. Como D é ponto médio de FE então $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, como queríamos demonstrar.

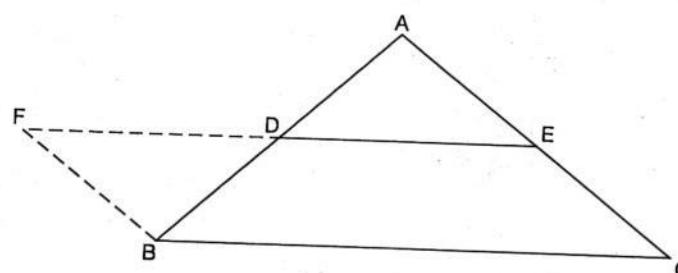


Figura 6.9

6.14 Proposição. Suponha que três retas paralelas, a , b e c , cortam as retas m e n nos pontos A , B e C e nos pontos A' , B' e C' , respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C , então o ponto B' também encontra-se entre A' e C' . Se $AB = BC$, então também tem-se $A'B' = B'C'$.

Prova. Sejam a , b e c retas paralelas e m e n retas que interceptam estas paralelas nos pontos A , B e C e A' , B' e C' como indicado na figura ao lado. Se B está entre A e C , então A e C estão em semi-planos distintos relativamente a reta b . Observe que A e A' estão em um mesmo semi-plano determinado por b , já que a e b são retas paralelas e A e A' pertencem a reta a . Do mesmo modo C e C'

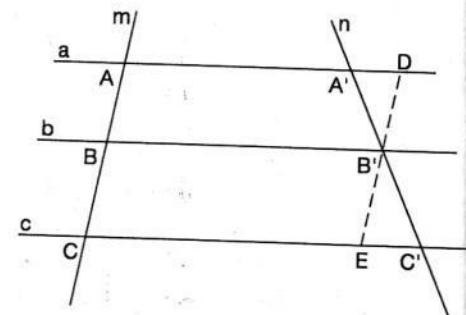


Figura 6.10

estão em um mesmo semi-plano determinado por b . Podemos portanto concluir que A' e C' estão em semi-planos distintos relativamente a reta b . Logo b intercepta o segmento $A'C'$ em um único ponto. Como B' é o ponto de interseção da reta n com a reta b , e A' e C' pertencem a n concluímos que o ponto de interseção de $A'C'$ com b é exatamente o ponto B' . Logo B' pertence ao segmento $A'C'$ e logo B' está entre A' e C' . Isto demonstra a primeira parte da proposição.

Para demonstrar a segunda parte, trace pelo ponto B' uma reta paralela à reta m . Esta corta as retas a e c em pontos D e E , respectivamente. Afirmo que os triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ são congruentes. De fato, como $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos, então $DB' = AB$ e $B'E = BC$. Como $AB = BC$ por hipótese, então concluímos que $DB' = B'E$. Observe que os ângulos $D\hat{B}'A'$ e $E\hat{B}'C'$ são iguais por serem opostos pelo vértice e $B'\hat{D}A'$ e $B'\hat{E}C'$ são também iguais por serem ângulos correspondentes determinados por uma transversal cortada pelas paralelas a e c . Isto prova a nossa afirmação. Da congruência dos triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ decorre imediatamente que $A'B' = B'C'$.

Esta proposição pode ser generalizada de maneira quase imediata para o caso em que as duas transversais cortam um número qualquer (maior ou igual a três) de retas paralelas.

6.15 Corolário. Suponha que k retas paralelas a_1, a_2, \dots, a_k cortam duas retas m e n nos pontos A_1, A_2, \dots, A_k e nos pontos A'_1, A'_2, \dots, A'_k , respectivamente. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{k-1}A_k$ então $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \dots = A'_{k-1}A'_k$.

A prova deste corolário é deixada a cargo do leitor. O teorema que iremos enunciar a seguir constitui-se numa etapa essencial para o estabelecimento da teoria das figuras semelhantes que será desenvolvida no próximo capítulo. Na sua demonstração iremos utilizar, de maneira essencial, o fato de que o corpo dos números reais é completo.

de Tales

6.16 Teorema. Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Prova. Seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC , respectivamente, nos pontos D e E , como representado na figura (6.11). Deveremos provar que:

$$(\overline{AD}/\overline{AB}) = (\overline{AE}/\overline{AC}).$$

Para isto, tome um pequeno segmento $\overline{AP_1}$ na semi-reta S_{AB} de modo que as razões $\overline{AB}/\overline{AP_1}$ e $\overline{AD}/\overline{AP_1}$ não sejam números inteiros. Consideraremos na semi-reta S_{AB} os pontos $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$ tais que

$$k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP}_k,$$

para todo $k \geq 2$. Existem então dois números inteiros m e n tais que:

D está entre P_m e P_{m+1} e
 B está entre P_n e P_{n+1}

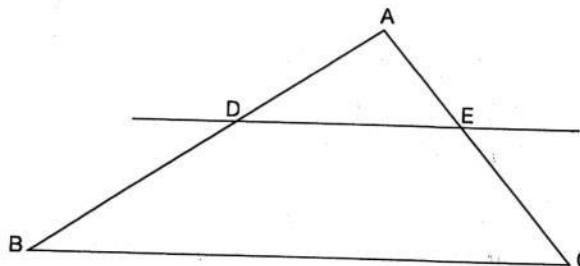


Figura 6.11

Tem-se portanto:

$$\begin{aligned} m \cdot \overline{AP_1} &< \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1} \quad e \\ n \cdot \overline{AP_1} &< \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1}. \end{aligned}$$

É então simples concluir destas desigualdades que

$$(a) \quad \frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}.$$

Tracemos pelos pontos P_1, P_2, \dots, P_{n+1} retas paralelas a BC . Estas retas, segundo (6.15), cortam a semi-reta S_{AC} em pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} , os quais também satisfazem a

$$k \cdot \overline{AQ}_l = \overline{AQ}_k,$$

para todo $k, 2 \leq k \leq n+1$. Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1} . O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui obtendo-se como resultado a desigualdade:

$$(b) \quad \frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}.$$

As desigualdades (a) e (b) permitem-nos concluir que

$$(c) \quad \left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}$$

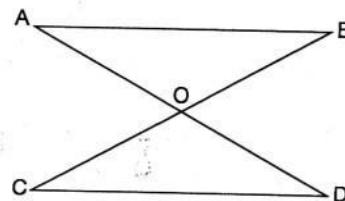
Observe que, como $m \leq n$, então

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n}$$

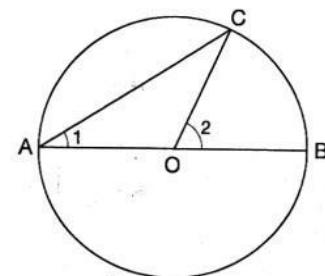
ou seja, as razões $\overline{AD}/\overline{AB}$ e $\overline{AE}/\overline{AC}$ diferem por não mais do que $2/n$. Quanto menor for o segmento $\overline{AP_1}$ tanto maior será o número n e tanto menor será o quociente $2/n$. Como o lado esquerdo da desigualdade (c) não depende de n , só podemos concluir que os quocientes $\overline{AD}/\overline{AB}$ e $\overline{AE}/\overline{AC}$ são iguais, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS

1. Na figura ao lado O é o ponto médio de AD e $\hat{B} = \hat{C}$. Se B , O e C são colineares, conclua que os triângulos ABO e DOC são congruentes.



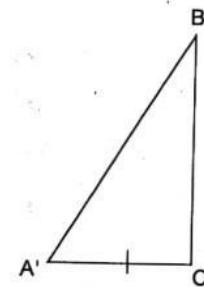
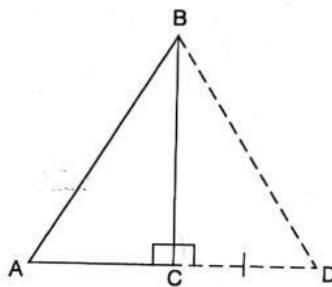
2. Prove que a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° .
3. Prove que cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° .
4. Prove que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.
5. Um segmento ligando dois pontos de um círculo e passando por seu centro chama-se *diâmetro*. Na figura ao lado O é o centro do círculo, AB é um diâmetro e C é outro ponto do círculo. Mostre que $\hat{2} = 2 \cdot \hat{1}$.



6. Prove que se m e n são retas eqüidistantes (isto é, retas tais que todos os pontos de m estão à mesma distância de n) então m e n são paralelas ou coincidentes.
7. Seja ABC um triângulo isósceles com base AB . Sejam M e N os pontos médios dos lados CA e CB , respectivamente. Mostre que, o reflexo do ponto C relativamente à reta que passa por M e N é exatamente o ponto médio do segmento AB .
8. Demonstre a proposição (6.10).
9. Demonstre a proposição (6.12).
10. Um *retângulo* é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos, retos. Mostre que, todo retângulo é um paralelogramo.
11. Mostre que, as diagonais de um retângulo são congruentes.
12. Um *losango* (também denominado, rombo) é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes. Mostre que, as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.
13. Um *quadrado* é um retângulo que também é um losango. Mostre que, se a diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares uma a outra, então o quadrilátero é um quadrado.
14. Um *trapézio* é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados *bases* e os outros dois são denominados de *laterais*. Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes. Seja $ABCD$ um trapézio em que AB é uma base. Se ele é isósceles, mostre que $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.
15. Mostre que, as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

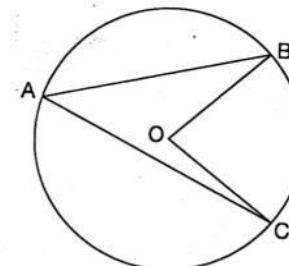
PROBLEMAS

- Mostre que, os casos (1) e (3) do teorema (5.14) são consequências imediatas do segundo caso de congruência de triângulos.
- Demonstre o caso (2) do teorema (5.14) utilizando a construção sugerida pela figura abaixo.

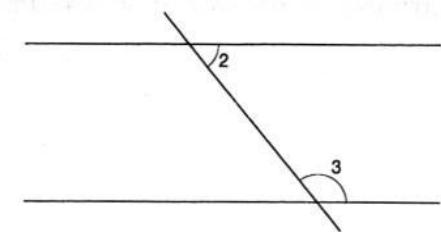


- Mostre que, se dois ângulos e o lado oposto a um deles, em um triângulo, são iguais às correspondentes partes de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

- Na figura ao lado A , B e C são pontos de um círculo de centro O . Mostre que $\hat{B}OC = 2 \cdot \hat{BAC}$.



- Mostre que, se m e n são duas retas que formam, com uma transversal, ângulos $\hat{2}$ e $\hat{3}$ (como na figura ao lado) tais que $\hat{2} + \hat{3} \neq 180^\circ$, então m e n se interceptam.



- Mostre que, se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.
- Mostre que, as diagonais de um quadrilátero se interceptam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um paralelogramo.
- Mostre que, as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.
- Mostre que, um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares é um losango.
- Prove que o segmento ligando os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.
- Mostre que, os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.
- Use a proposição (6.15) para estabelecer um método de divisão de um segmento qualquer em k partes iguais.
- Adote como axioma V' , em substituição ao axioma V , a validade da proposição contida no problema 5 acima. Prove agora o axioma V . Explique por que o problema 5 e este mostram que os axiomas V e V' são equivalentes. O axioma V' é exatamente o quinto axioma de Euclides (vide comentário a seguir).

COMENTÁRIO

Euclides baseou a construção da sua geometria em 10 axiomas separados em dois grupos: cinco foram classificados como “noções comuns” e os outros como “postulados”. A distinção entre eles não é de todo clara. As “noções comuns” parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou a todas as pessoas inteligentes, enquanto que os postulados eram considerados como hipóteses características da geometria. As cinco noções comuns eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Os postulados eram:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Embora Euclides não tenha dito especificamente, fica claro, através da forma como ele o utilizou, que o primeiro postulado refere-se a uma única reta ligando os dois pontos. Também, do contexto, fica claro que, para Euclides, “reta” significava o que hoje chamamos de “segmento”. Daí ele falar em “continuar infinitamente uma reta”. Ele assumiu tacitamente que tal prolongamento pode ser feito de uma única maneira em cada extremidade de uma “reta”, de modo que duas retas distintas não podem ter um segmento comum. De fato Euclides utilizou-se de muitas hipóteses que não constavam, sob nenhuma forma, nem das “noções comuns”, nem dos “postulados”. Esta omissão é considerada pelos geômetras como um dos mais graves defeitos dos “Elementos”

Mesmo um exame apressado do livro I dos “Elementos” revela que ele compõe-se de três partes distintas (embora Euclides não as tenha separado formalmente). A primeira parte, constituída pelas primeiras 26 proposições, trata quase exclusivamente da teoria elementar dos triângulos. Ela abrange todo o material que apresentamos até o final do capítulo 5 destas notas. A segunda parte trata da teoria das paralelas. Inicia-se com a proposição 27 e prossegue até a proposição 34. Ali são apresentadas as proposições que abrangem o material apresentado no capítulo 6 destas notas. A partir da proposição 34, até o final (proposição 48), o livro I dos “Elementos” trata das relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados e culmina com o famoso teorema de Pitágoras (Proposição 47) e de seu inverso (Proposição 48). É fato importante a ser observado que o quinto postulado não foi utilizado por Euclides na prova de qualquer das 26 primeiras proposições do livro I, as quais ainda são válidas caso o quinto postulado seja excluído ou trocado por um outro outro compatível com os restantes postulados e noções comuns.

Há evidência de que os postulados, particularmente o quinto, foram formulados por Euclides mesmo. Sabe-se que o quinto postulado tornou-se, de imediato, alvo de críticas pelos matemáticos da época. Este fato não é de estranhar, quando considera-

mos que, primeiramente, ele é bastante diferente, inclusive em tamanho dos outros postulados, parecendo mais uma proposição do que um axioma; depois, tecnicamente, ele é a inversa de uma das proposições demonstradas nos "Elementos" com base apenas nos quatro primeiros postulados, a saber, a proposição 27; por último, ele não possui, em nenhum sentido, aquela característica de "auto-evidência" que caracterizou inicialmente a escolha dos outros axiomas. Além disso, a sua tardia utilização, após tantas proposições serem provadas sem seu auxílio, levantou suspeitas de que ele seria simplesmente uma proposição demonstrável a partir dos outros axiomas a qual Euclides não conseguira demonstrar. Como consequência desta suspeita, inúmeráveis tentativas foram feitas para prová-lo ou eliminá-lo através de uma redefinição do conceito de retas paralelas. Entre os nomes famosos dos que tentaram demonstrar o quinto postulado podemos listar Proclus (485-410 a.C.), Nasiradin (1201-1274), John Wellis (1616-1703), Geronimo Sacheri (1667- 1733), John H. Lambert (1728-1777), Adrien M. Legendre (1752-1833), Louis Bertrand (1731-1812) e Carl F. Gauss (1777-1855). Estes deixaram nas suas obras referências relevantes sobre o assunto. É, no entanto, certo que todos aqueles interessados seriamente em matemática até o século dezessete tentaram eventualmente demonstrar o quinto postulado.

Foi somente na primeira metade do século dezenove que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas geometrias não-Euclidianas em que o quinto postulado de Euclides é substituído por uma outra afirmação que lhe é contraditória. Esta descoberta está associada com o nome de dois matemáticos que a obtiveram independentemente: Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai I. Lobachewsky (1793- 1856). Os trabalhos destes dois matemáticos foi elevado às suas devidas proporções por Friedrich B. Riemann (1826-1866) que deu início a um segundo período no desenvolvimento das geometrias Euclidiana e não- Euclidianas, um período caracterizado pelas investigações do ponto de vista da geometria diferencial, em

contraste com os métodos sintéticos previamente utilizados. Associados a este segundo período estão os nomes de Lie, Beltrami, Cayley, Klein, Clifford e Hilbert.

Lie foi responsável pela introdução dos grupos de transformação no estudo da geometria. Beltrami tem o crédito de ter produzido a primeira prova da consistência das geometrias não-Euclidianas. Embora Bolyai e Lobachewsky não tenham encontrado nenhuma contradição em sua geometria ao longo de todas as suas investigações, ainda permanecia a possibilidade de que alguma inconsistência pudesse aparecer no desenvolvimento de novos trabalhos de pesquisa. Beltrami mostrou como a geometria de Bolyai e Lobachewsky podia ser representada sobre uma superfície no espaço Euclidiano a três dimensões, de forma que os seus postulados fossem obtidos a partir dos axiomas da geometria Euclidiana. Como consequência, qualquer inconsistência que pudesse existir nas geometrias não-Euclidianas seria também uma inconsistência da geometria Euclidiana.

Os trabalhos de Cayley, Klein e Clifford produziram uma linda classificação destas geometrias do ponto de vista projetivo-métrico. Daí em diante, a preocupação com a fundamentação da geometria em bases sólidas dominou a pesquisa matemática sobre o assunto culminando com a reconstrução da geometria Euclidiana por Hilbert o que, finalmente, e definitivamente, encerrou a longa batalha com o quinto postulado de Euclides.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Diremos que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.



Figura 7.1

Com isto queremos dizer que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow E$, $B \rightarrow F$ e $C \rightarrow G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$$\hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{B} = \hat{F}, \quad \hat{C} = \hat{G} \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

O teorema seguinte será referido como “segundo caso de semelhança de triângulos” a fim de que os casos de semelhança e os casos de congruência se correspondam de uma forma natural.

7.1 Teorema. *Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$ então os triângulos são semelhantes.*

Prova. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° , então a igualdade dos ângulos \hat{A} e \hat{E} e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} acarreta na igualdade dos ângulos \hat{C} e \hat{G} . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto tome na semi-reta SEF o ponto H de modo que $EH = AB$. Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG .

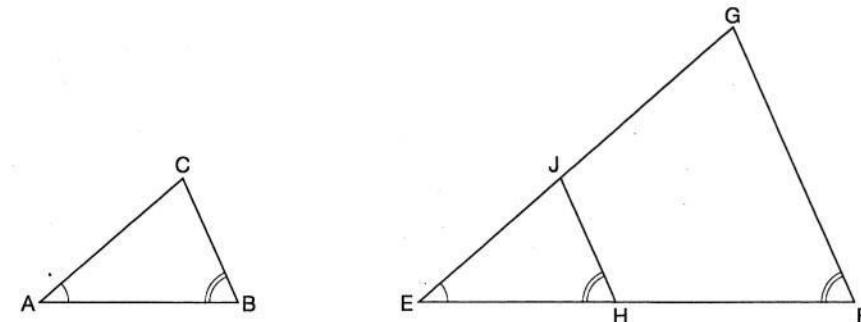


Figura 7.2

Esta corta a semi-reta SEG num ponto J , formando um triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC (já que $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EH$ e $\hat{B} = \hat{F} = E\hat{H}J$). Esta última igualdade deve-se ao paralelismo de JH e GF). Segue-se agora do teorema (6.16) que $(\overline{EH}/\overline{EF}) = (\overline{EJ}/\overline{EG})$. Como $EH = AB$ e $EJ = AC$ então, da

igualdade acima obtém-se:

$$(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG}).$$

De maneira análoga demonstra-se que $(\overline{AC}/\overline{EG}) = (\overline{CB}/\overline{GF})$. Fica assim demonstrado o teorema.

O teorema (7.1) permite construir, com facilidade, exemplos de triângulos semelhantes fazendo-se uso de régua e transferidor. Por exemplo, para desenhar um triângulo semelhante ao triângulo ABC da figura (7.3), inicia-se traçando um segmento EF qualquer;

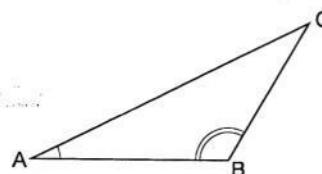
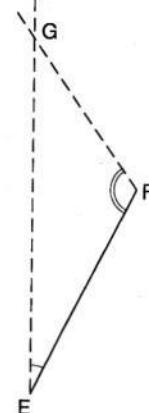


Figura 7.3



a partir de suas extremidades constroem-se ângulos \hat{E} e \hat{F} iguais aos ângulos \hat{A} e \hat{B} , respectivamente (em um mesmo semiplano determinado pela reta EF); prolongando-se os lados destes ângulos determina-se um ponto G . De acordo com a proposição anterior os triângulos ABC e EFG são semelhantes.

O seguinte teorema será referido como *primeiro caso de semelhança de triângulos*.

7.2 Teorema. Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$, então os triângulos são semelhantes.

Prova. Construa um triângulo HIJ que tenha $HI = EF$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.

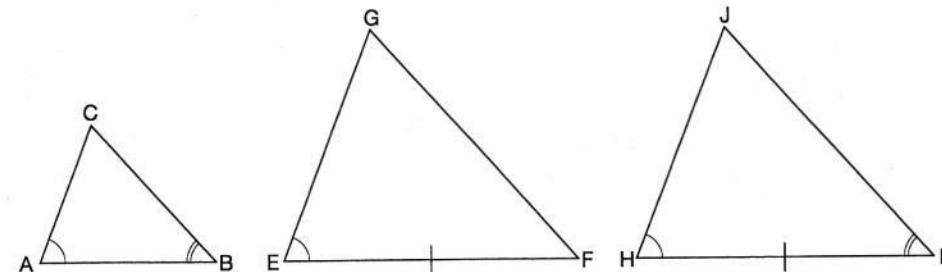


Figura 7.4

De acordo com o teorema (7.1), os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.

Por conseguinte:

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{AC}/\overline{HJ}).$$

Como $HI = EF$, a hipótese $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$ e a igualdade acima implicam que:

$$HJ = EG.$$

Como, por construção, $HI = EF$ e $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já sabíamos que ABC e HIJ eram semelhantes, podemos concluir facilmente que ABC e EFG são semelhantes.

O terceiro caso de semelhança de triângulos é o seguinte.

7.3 Teorema. Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

Prova. Construa um triângulo HIJ que tenha $\hat{H} = \hat{A}$, $HI = EF$ e $HJ = EG$. Segue-se então da hipótese que

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{AC}/\overline{HJ}).$$

Portanto, de acordo com o teorema (7.2), os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.

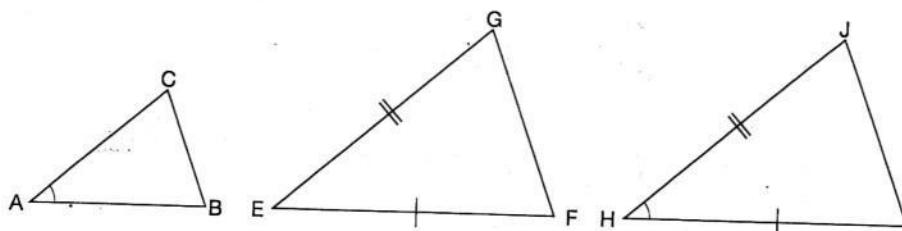


Figura 7.5

Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{BC}/\overline{IJ}).$$

Segue-se (daí e da hipótese do teorema) que $IJ = FG$. Como já tínhamos que $HI = EF$ e $HJ = EG$ (por construção) então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, HIJ e EFG são congruentes. Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema.

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A . Trace a altura AD do vértice A ao lado BC . No que se segue vamos fazer uso da seguinte notação $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$.

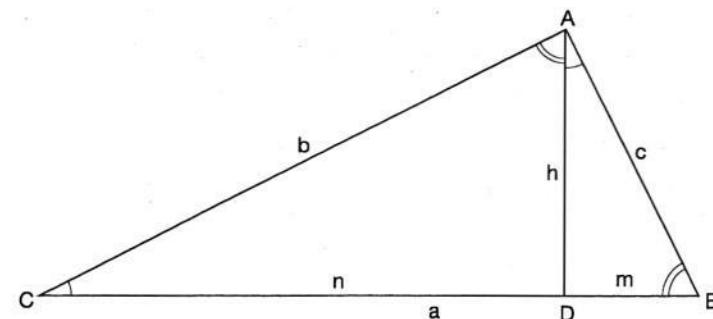


Figura 7.6

Como AD é perpendicular a BC , então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ e $\hat{B} + \hat{BAD} = 90^\circ$ então

$$\hat{BAD} = \hat{C}.$$

Como também $D\hat{A}C + \hat{C} = 90^\circ$ então

$$D\hat{A}C = \hat{B}.$$

Os triângulos ADB e CDA são portanto ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças podemos deduzir várias relações entre as medidas a , b , c , h , m e n acima mencionadas. Por exemplo, a semelhança entre ADB e CDA é a que leva A em C , B em A e D em D . Como consequência desta semelhança tem-se

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Da última igualdade deduz-se que

$$h^2 = mn$$

Assim provamos a seguinte proposição;

7.4 Proposição. *Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

O seguinte é um dos mais importantes e mais úteis teoremas da geometria Euclidiana plana. É conhecido como “teorema de Pitágoras” em homenagem a um grande geômetra da Grécia antiga.

7.5 Teorema (Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Em termos da notação estabelecida acima o teorema de Pitágoras afirma que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Prova. A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência da semelhança dos triângulos ADB , CDA e ABC . Da semelhança de ADB e ABC ($A \rightarrow C$, $B \rightarrow B$ e $D \rightarrow A$) conclui-se que

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC conclui-se que

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

Logo $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto $a(m+n) = c^2 + b^2$. Como $m+n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

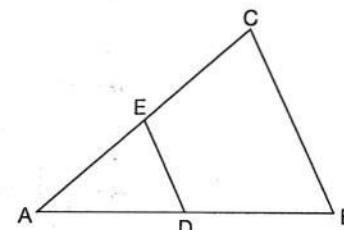
A seguinte proposição é a inversa do teorema de Pitágoras.

7.6 Proposição. *Um triângulo possui lados medindo a , b e c . Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a .*

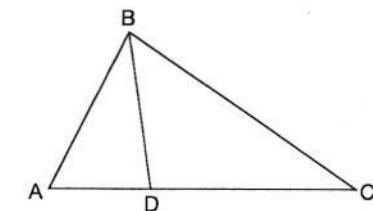
Prova. Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c . Neste novo triângulo, de acordo com o teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$. Portanto este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a , b e c . Pelo terceiro caso de congruência, ele é portanto congruente ao triângulo original. Logo o triângulo original é retângulo e sua hipotenusa mede a .

EXERCÍCIOS

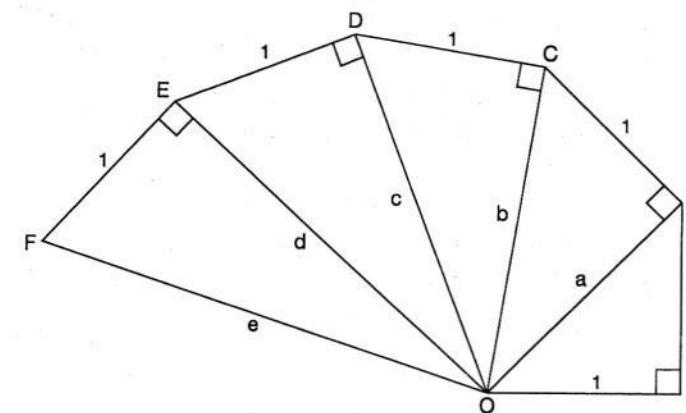
- Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos medem um centímetro cada?
- Quanto mede a altura de um triângulo equilátero cujos lados medem um centímetro cada?
- No triângulo ABC , $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ e $\overline{CA} = 13$. Qual a medida do ângulo \hat{B} ?
- No triângulo DEF , $\overline{DE} = \overline{EF} = 6$ e $\overline{FD} = 6\sqrt{2}$. Quanto medem os ângulos do triângulo?
- Uma caixa mede 12 centímetros de comprimento, 4 centímetros de largura e 3 centímetros de altura. Quanto medem as diagonais de cada uma das faces da caixa?
- Mostre que dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.
- Mostre que são semelhantes dois triângulos isósceles que têm iguais os ângulos opostos à base.
- Na figura ao lado D é ponto médio de AB e E é ponto médio de AC . Mostre que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.



9. Na figura ao lado tem-se que BDA e ABC são semelhantes, sendo a semelhança a que leva B em A , D em B e A em C . Conclua que o triângulo BDA é isósceles.



- Mostre que todo triângulo de lados $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.
- Todos os triângulos indicados na figura abaixo são retângulos. Determine a , b , c , d e e .



PROBLEMAS

1. Prove o segundo caso de semelhança de triângulos supondo conhecido o teorema (7.2) e sem fazer uso do teorema (6.16).
2. Prove que a relação “é semelhante a” é transitiva, isto é, prove que, se dois triângulos são semelhantes a um terceiro, então são semelhantes entre si.
3. Prove que alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.
4. Prove que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados. Isto é, se ABC é o triângulo e BD é a bissetriz do ângulo \hat{B} sendo D um ponto de lado AC , então $(\overline{AD}/\overline{DC}) = (\overline{AB}/\overline{BC})$. (Ajuda: trace pelo ponto A uma reta paralela ao lado BD . Esta intercepta a semi-reta S_{CB} num ponto E formando triângulos semelhantes.)
5. Enuncie e prove a afirmação inversa do exercício anterior.
6. Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos de 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa. (Ajuda: Faça uso do que foi obtido no exercício 2).
7. Prove que, se em um triângulo retângulo o menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa, então seus ângulos agudos são de 30° e 60° .
8. Prove que, se dois triângulos têm lados correspondentes paralelos, então eles são semelhantes. Prove também que as retas ligando os vértices correspondentes são concorrentes ou paralelas. (Suponha que os vértices correspondentes são disjuntos).

COMENTÁRIO

Pitágoras, que morreu em 490 a.C., foi conhecido por seus contemporâneos como o fundador de um movimento de cunho religioso que veio a ser conhecido como Pitagorismo. Os pitagóricos interessavam-se pela ciência de um modo geral e particularmente pela Filosofia e pela Matemática. No que concerne à Matemática a maior contribuição dos pitagóricos foi o desenvolvimento da teoria dos números, e a descoberta dos números irracionais. Foram eles que provaram, pela primeira vez, que o número $\sqrt{2}$ é irracional. A prova deste fato apresentada no 10º livro de Euclides é a seguinte:

Suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Então $\sqrt{2}$ pode ser representado na forma $\sqrt{2} = m/n$ onde m e n são dois números inteiros primos entre si. Logo $2n^2 = m^2$. Como consequência m^2 é um número par. Mas então m é par e podemos escrever m como $m = 2p$. Portanto $2n^2 = m^2 = 4p^2$. Mas então $n^2 = 2p^2$. Segue-se que n^2 é um número par e, como consequência, n é um número par. Mas se n é par e m é par então os dois não são primos entre si. Por outro lado, no início, havíamos escolhido m e n primos entre si. Esta contradição provém da hipótese de que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto $\sqrt{2}$ não é racional.

Esta descoberta foi, sem dúvida, a grande contribuição do Pitagorismo à Geometria Grega. Ela influenciou de forma definitiva o desenvolvimento que teve a matemática Grega a partir daí.

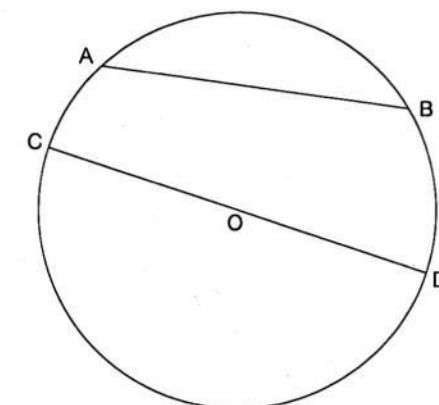
A lenda sobre a origem do teorema de Pitágoras diz que ele foi descoberto por Pitágoras o qual sacrificou 100 bois aos Deuses como prova de sua gratidão por ter conseguido esta descoberta.

No entanto, a verdade histórica é que o teorema de Pitágoras já era conhecido, em casos particulares, no Egito (3.000 a.C.), e em sua total generalidade pelos Sumérios e Babilônios (2000 a 1000 a.C.). E é bem possível que sua demonstração tenha sido obtida na Grécia em época anterior a de Pitágoras.

Há um grande número de demonstrações deste teorema. Neste capítulo apresentamos uma delas, e algumas outras serão apresentadas no capítulo relativo a áreas, sob a forma de exercícios e problemas.

O CÍRCULO

No Capítulo 2 definimos círculo de centro A e raio r como o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância r do ponto A . Também chamaremos de *raio* ao segmento que une o centro do círculo a qualquer de seus pontos. O segmento ligando dois pontos de um círculo será denominado de *corda*. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um *diâmetro*. Também chamaremos de diâmetro a distância $2r$. Não haverá perigo de confusão no uso da mesma palavra para significar duas coisas diferentes. No contexto será sempre claro a que estaremos nos referindo.



AB e CD são cordas
CD é um diâmetro

Figura 8.1

8.1 Proposição. Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.

Prova. Seja O o centro do círculo e OC o raio que é perpendicular a corda AB . Seja M o ponto de interseção da corda com o raio. Com $OA = OB$ (raios) então o triângulo OAB é isósceles com base AB .

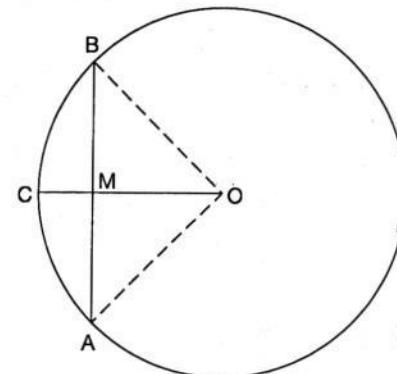


Figura 8.2

Logo $\hat{A} = \hat{B}$. Se a corda é perpendicular ao raio, então os ângulos $O\hat{M}A$ e $O\hat{M}B$ são retos. Como consequência $A\hat{O}M = B\hat{O}M$. Segue-se então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que $AOM = BOM$. Como consequência $AM = MB$. Inversamente, se $AM = MB$, então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos deduz-se que: $AOM = BOM$. Como consequência, $O\hat{M}A = O\hat{M}B$. Mas como a soma destes dois ângulos é um ângulo raso, conclui-se que cada um deles mede 90° . Portanto a corda é perpendicular ao raio passando por M . Isto completa a prova da proposição.

Quando uma reta e um círculo têm apenas um ponto em comum, dizemos que a reta *tangencia* o círculo e chamamos a reta de *tangente* ao círculo. O ponto comum entre uma tangente e um círculo é chamado de *ponto de tangência* ou *ponto de contacto*.

8.2 Proposição. Se uma reta é tangente a um círculo então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangencia.

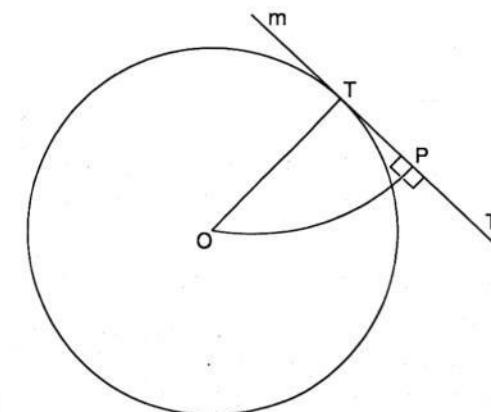


Figura 8.3

Prova. Consideremos um círculo de centro O e uma reta m que lhe seja tangente. Seja T o ponto de tangência. Designemos por P o pé da perpendicular baixada do ponto O à reta m . Gostaríamos de concluir que P e T coincidem. Vamos então supor que P e T são pontos distintos. Então OT é a hipotenusa do triângulo retângulo OPT : Portanto $OP < OT$. Como OT é um raio, então P é um ponto que está dentro do círculo. Tomemos então um ponto T' sobre a reta m , tal que $PT = PT'$, com $T' \neq T$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos concluímos que $OPT = OPT'$. Portanto $OT = OT'$. Mas então T' é outro ponto da reta m que também pertence ao círculo. Logo a reta m não é tangente. Contradição! Assim P e T coincidem e a proposição fica demonstrada.

A extremidade de um raio que não é o centro do círculo é chamada de *extremidade do raio*.

8.3 Proposição. Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.

Prova. Consideremos um círculo de centro O e seja m uma reta perpendicular ao raio OT passando pelo ponto T . Devemos provar

que m é tangente ao círculo, ou seja, que m não tem outro ponto de interseção com o círculo. Seja P qualquer outro ponto de m , então o triângulo OTP é retângulo e portanto $\overline{OT}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{OP}^2$. Segue-se que $OP > OT$ e portanto P está fora do círculo. Logo T é o único ponto comum à reta e ao círculo. Isto conclui a demonstração.

Sejam A e B dois pontos de um círculo. Tracemos a reta que passa por estes dois pontos. Ela separa o plano em dois semiplanos. Cada um destes semiplanos contém uma parte do círculo. Estas partes são denominadas de *arcos* determinados pelos pontos A e B . Quando A e B são extremidades de um diâmetro, estes arcos são denominados de *semicírculos*. Quando a corda AB não é um diâmetro, distinguimos os dois arcos determinados por A e B do seguinte modo: como o centro do círculo encontra-se em um dos semiplanos determinados pela reta que passa por A e B , o arco que fica no mesmo semiplano que o centro do círculo é chamado de *arco maior*; o outro é chamado de *arco menor*. Observe que os raios que ligam o centro do círculo aos pontos do arco menor todos cortam a corda AB . Já os raios que ligam o centro do círculo aos pontos do arco maior não interceptam a corda AB .

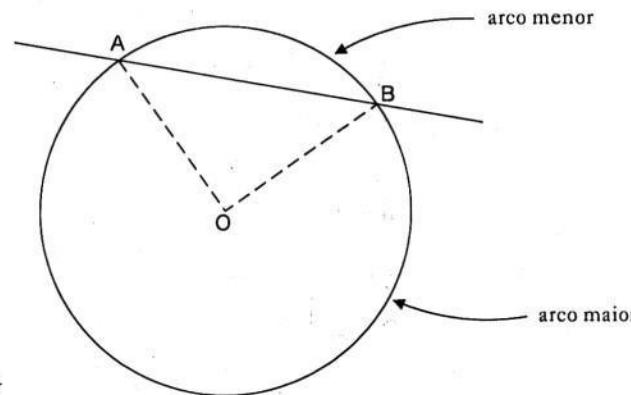


Figura 8.4

Se O é o centro do círculo então $A\hat{O}B$ é chamado de *ângulo central*. A medida em graus do arco menor determinado pelos pontos A

e B é por definição a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. A medida em graus do arco maior é definida como sendo $360^\circ - a^\circ$, onde a° é a medida em graus do arco menor. No caso em que AB é um diâmetro a medida dos dois arcos é 180° .

8.4 Proposição. Em um mesmo círculo, ou em círculos de mesmo raio, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes e reciprocamente.

A prova desta proposição é simples e é deixada a cargo do leitor. Uma consequência dela é que cordas congruentes determinam arcos menores de mesma medida e portanto, também arcos maiores de mesma medida.

O leitor deve observar que, a maneira de somar ângulos que têm o mesmo vértice permite introduzir uma maneira de somar arcos que se justapõem. Esta soma é associativa e comutativa como o é a soma de ângulos.

Um ângulo se denomina *inscrito* em um círculo se seu vértice A é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos B e C distintos do ponto A . Os pontos B e C determinam dois arcos. O arco que não contiver o ponto A é chamado de *arco correspondente* ao ângulo inscrito dado. Diremos também que o ângulo *subtende* o arco.

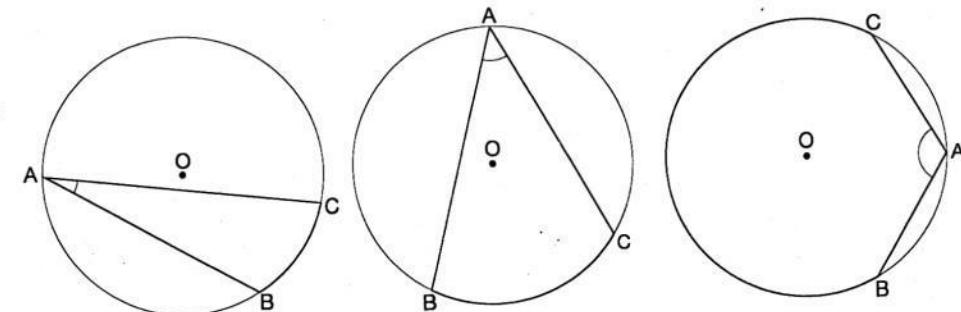


Figura 8.5

8.5 Proposição. Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.

Prova. Consideremos primeiro o caso em que um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Seja A o vértice do ângulo inscrito e B e C os pontos em que seus lados cortam o círculo. Suponha que o centro O do círculo pertença ao lado AC . Neste caso, a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito é a medida do ângulo $\hat{B}OC$. Como $BO = AO$ então o triângulo OAB é isósceles e portanto $\hat{O}AB = \hat{O}BA$. Mas então $\hat{B}OC = \hat{O}AB + \hat{O}BA = 2 \cdot \hat{C}AB$. Portanto, neste caso particular a proposição é verdadeira.

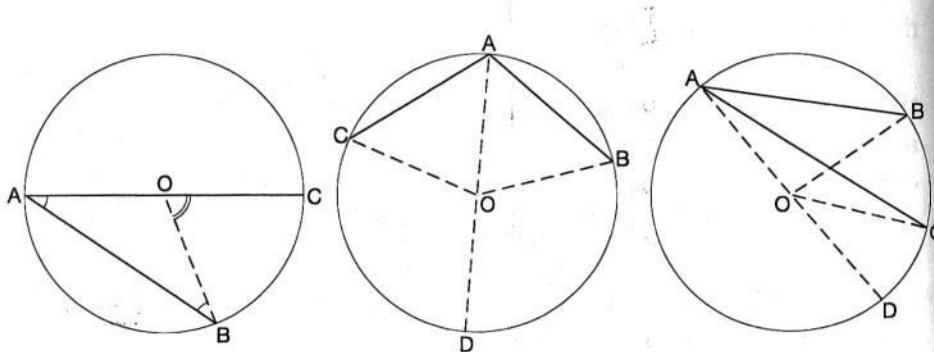


Figura 8.6

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Tracemos então o diâmetro que passa pelo vértice A do ângulo inscrito. Seja D a outra extremidade deste diâmetro. Pelo primeiro caso concluiremos que $\hat{B}OD = 2 \cdot \hat{B}AD$ e que $\hat{D}OC = 2 \cdot \hat{D}AC$.

Neste ponto temos de distinguir dois casos: (a) o diâmetro AD divide o ângulo $\hat{B}AC$. (b) O diâmetro AD não divide o ângulo $\hat{B}AC$. (Veja figura acima). No caso (a), temos que $\hat{B}AD + \hat{D}AC = \hat{B}AC$. A demonstração é então completada somando-se as igualdades já encontradas:

$$\hat{B}OD + \hat{D}OC = 2 \cdot (\hat{B}AD + \hat{D}AC) = 2 \cdot \hat{B}AC.$$

Observe que $\hat{B}OD + \hat{D}OC$ é exatamente a medida do arco correspondente ao ângulo $\hat{B}AC$. No caso (b), podem ainda advir duas situações distintas: (i) AC divide o ângulo $\hat{B}AD$ e (ii) AB divide o ângulo $\hat{C}AD$. A prova nos dois casos é essencialmente a mesma. Faremos o caso (i). Neste caso $\hat{B}AC = \hat{B}AD - \hat{C}AD$. Então, utilizando-se as duas igualdades obtidas inicialmente, tem-se

$$\hat{B}OD - \hat{D}OC = 2 \cdot (\hat{B}AD - \hat{C}AD) = 2 \cdot \hat{B}AC.$$

Agora observe que $\hat{B}OD - \hat{D}OC$ é exatamente a medida do arco correspondente ao ângulo $\hat{B}AC$. Isto completa a demonstração.

8.6 Corolário. Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subtendem um semicírculo são retos.

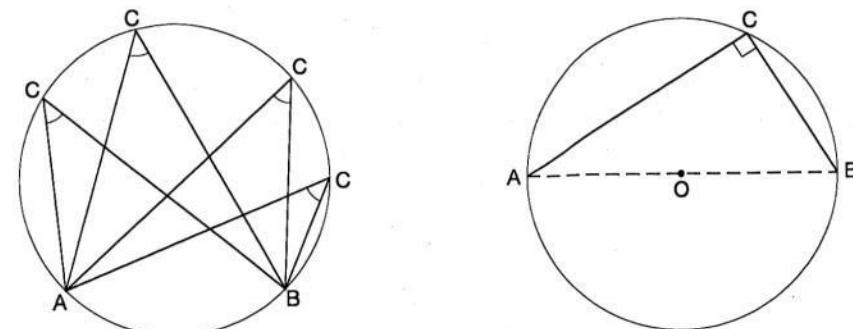


Figura 8.7

A seguinte proposição é também de certo modo um corolário da proposição (8.5).

8.7 Proposição. Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se interceptam num ponto P . Então $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1$.

Prova. Observe que nos triângulos CPB e DAP tem-se; $\hat{C}PB = \hat{A}PB$ (opostos pelo vértice) e $\hat{C}BP = \hat{A}DP$ (por serem ângulos

inscritos que subtendem o mesmo arco). Logo, os dois triângulos são semelhantes e a semelhança é a que leva C em A , P em P e B em D . Logo $\frac{CP}{AP} = \frac{PB}{PD}$. Mas então, $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

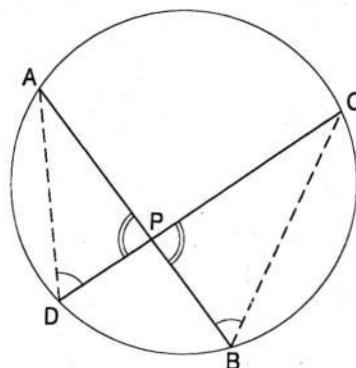


Figura 8.8

8.8 Proposição. Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a um círculo nos pontos A e B , então:

- a medida do ângulo \hat{P} é igual a 180° menos a medida do arco menor determinado por A e B ;
- $PA = PB$.

Prova. Seja O o centro do círculo. No quadrilátero $OAPB$ temos que $A = B = 90^\circ$. Logo $\hat{P} + \hat{O} = 180^\circ$. Como \hat{O} é exatamente a medida do arco menor determinado por A e B , fica provado a parte (a). Para provar a parte (b), trace PO e compare os triângulos PAO e PBO . Como $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ os dois triângulos são retângulos. Como $AO = BO$ (raios) e PO é comum, então os dois triângulos são congruentes (conforme o teorema (5.14)). Logo $PA = PB$. Assim o resultado fica demonstrado.

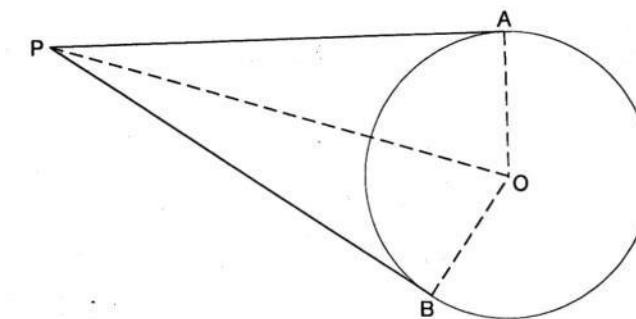


Figura 8.9

Diremos que um polígono está *inscrito* num círculo se seus vértices pertencem ao círculo.

8.9 Proposição. Todo triângulo está inscrito em um círculo.

Prova. Seja ABC um triângulo. Para mostrar que ele está inscrito em um círculo deveremos exibir um ponto que seja eqüidistante de A , B e C . Seja m uma reta perpendicular a AB e passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC e passando pelo seu ponto médio N . Designe por P o ponto de interseção destas duas retas. Observe que todo ponto da reta m é eqüidistante de A e B , é que todo ponto da reta n é eqüidistante de B e C . Logo o ponto P será eqüidistante de A , B e C .

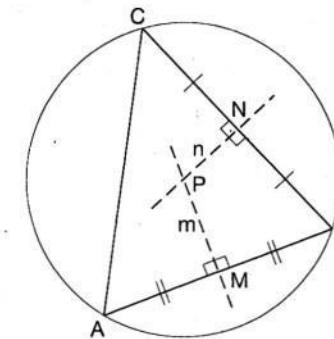


Figura 8.10

Esta proposição pode ser reenunciada da seguinte maneira:

8.10 Proposição. Três pontos não colineares determinam um círculo.

Chamamos de *mediatriz* de um dado segmento à reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio. Com esta definição podemos enunciar o seguinte corolário da proposição (8.9).

8.11 Corolário. As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.

De um modo geral apenas os triângulos possuem a propriedade de serem inscritíveis em círculos. Para outros polígonos a condição de que o mesmo possa ser inscrito em um círculo acarreta fortes restrições sobre as suas medidas. A seguinte proposição é um exemplo disto.

8.12 Proposição. Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.

Prova. Vamos supor inicialmente que o quadrilátero possa ser inscrito em um círculo. Observe que cada um de seus ângulos é um ângulo inscrito no círculo. Seja $ABCD$ o quadrilátero. Considere os ângulos \hat{A} e \hat{C} . Eles subtendem exatamente os dois arcos determinados pelos pontos B e C . Como estes dois arcos somam 360° , então, de acordo com a proposição (8.5), a soma dos ângulos \hat{A} e \hat{C} será 180° . Portanto eles são suplementares.

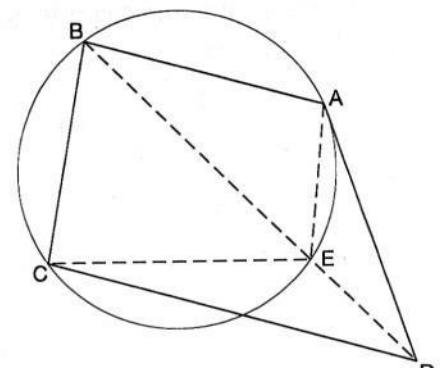
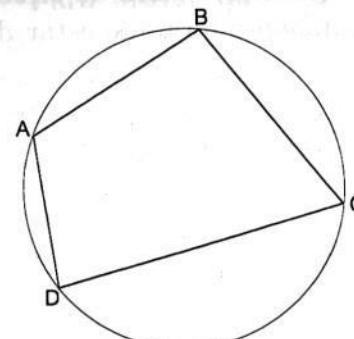


Figura 8.11

Vamos agora supor que um quadrilátero $ABCD$ tem um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360° , então o outro par de ângulos opostos também é suplementar. Trace um círculo pelos pontos A , B e C . Isto sempre pode ser feito (de acordo com (8.10)). Só existem três alternativas para a localização do ponto D : ele pode estar sobre, dentro, ou fora do círculo. Vamos supor que ele esteja fora do círculo. Neste caso trace o segmento BD . Seja E o ponto onde este corta o círculo. O quadrilátero $ABCE$ é um quadrilátero inscrito no círculo e, portanto, pela primeira parte da proposição, seus ângulos opostos são suplementares. Em particular temos

$$\hat{A}BC + \hat{A}EC = 180^\circ$$

Por hipótese também temos

$$\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ.$$

Das duas igualdades concluímos que $\hat{ADC} = \hat{AEC}$. Agora observe que $\hat{AEB} > \hat{ADB}$ e $\hat{BEC} > \hat{BDC}$ (ângulos externos). Logo:

$$\hat{AEC} = \hat{AEB} + \hat{BEC} > \hat{ADB} + \hat{BDC} = \hat{ADC}$$

Esta contradição mostra que D não pode estar fora do círculo. O resto da prova mostrando que D também não pode estar dentro do círculo é deixada como exercício.

Um *círculo* está *inscrito* em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. Quando tal ocorre diz-se que o polígono *circunscreve o círculo*.

8.13 Proposição. Todo triângulo possui um círculo inscrito.

Prova. Seja ABC um triângulo. Trace as bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . Estas se encontram em um ponto P . Deste ponto, baixe perpendiculares aos lados do triângulo. Sejam E , F e G os pés destas perpendiculares nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Vamos provar que $PE = PF = PG$. Assim o ponto P é o centro de um círculo que passa pelos pontos E , F e G ; além disto, como os lados do triângulo ABC são perpendiculares aos raios PE , PF e PG eles são também tangentes ao círculo. Logo o círculo está inscrito no triângulo.

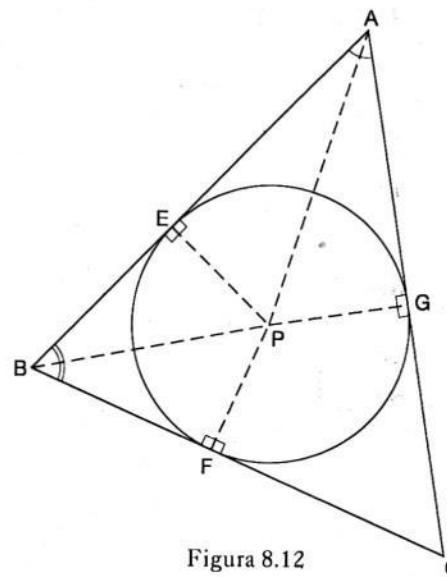


Figura 8.12

Para provar que $PE = PF = PG$ vamos comparar os triângulos PGA e PEA , e os triângulos PEB e PFB . Todos eles são triângulos retângulos. Nos dois primeiros temos $P\hat{A}G = P\hat{A}E$ (PA é bissecriz) e PA comum. Nos dois últimos temos $P\hat{B}E = P\hat{B}F$ (PB é bissecriz) e PB comum. Portanto os dois pares de triângulos são congruentes. Da congruência dos dois primeiros concluímos que $PG = PE$. Da congruência dos dois últimos obtemos $PE = PF$. Isto completa a demonstração.

8.14 Corolário. As bissectrizes de um triângulo encontram-se em um ponto.

Prova. Na demonstração anterior provamos que o ponto de encontro de duas bissectrizes do triângulo ABC é o centro de um círculo inscrito naquele triângulo. Para obter o Corolário é suficiente provar que o segmento unindo o centro deste círculo inscrito com o terceiro vértice, é também uma bissecriz do triângulo ABC . O leitor não terá dificuldade em fazer esta demonstração que é deixada como exercício.

Um *polígono regular* é um polígono que é equilátero e equiangular. Com isto queremos dizer que todos os seus lados são congruentes (equilátero) e também todos os seus ângulos são congruentes (equiangular).

8.15 Proposição. Todo polígono regular está inscrito em um círculo.

Prova. Seja A_1A_2, \dots, A_n um polígono regular. Tracemos o círculo que passa pelos pontos A_1 , A_2 e A_3 . Seja O o centro deste círculo. Como $OA_2 = OA_3$ então o triângulo OA_2A_3 é isósceles e logo $O\hat{A}_2A_3 = O\hat{A}_3A_2$. Como o polígono é regular todos os seus ângulos internos têm a mesma medida. Portanto $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$.

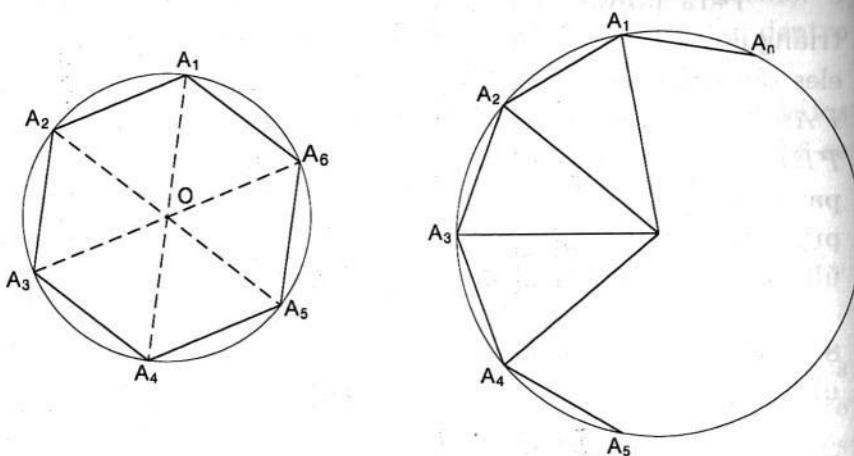


Figura 8.13

Mas então, $\hat{A_1 A_2 O} = \hat{O A_3 A_4}$. Como além disso $A_1 A_2 = A_3 A_4$ (lados de um polígono regular são congruentes) e $O A_2 = O A_3$, então os triângulos $O A_1 A_2$ e $O A_4 A_3$ são congruentes. Daí obtém-se $O A_4 = O A_1$. Portanto A_4 também é um ponto do círculo. O mesmo raciocínio pode agora ser repetido para provar que A_5 também pertence ao círculo, e assim sucessivamente. Como resultado final obtém-se que todos os pontos do polígono pertencem ao círculo.

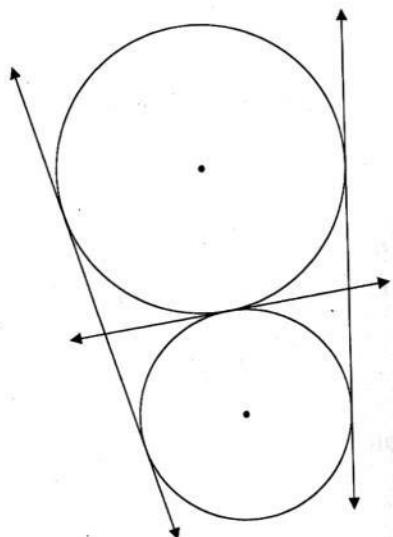
8.16 Corolário. *Todo polígono regular possui um círculo inscrito.*

Prova. Trace o círculo no qual o polígono regular $A_1 A_2 \dots A_n$ está inscrito. Seja O o seu centro. Todo os triângulos isósceles $A_1 O A_2, A_2 O A_3, A_3 O A_4, \dots$ são congruentes. Como consequência suas alturas relativamente às bases são também congruentes. O círculo de centro O e com raio igual ao comprimento destas alturas está inscrito no polígono.

10. Na figura seguinte responda:

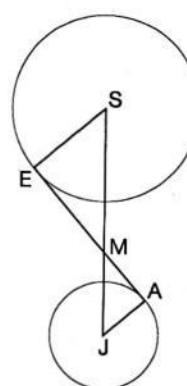
EXERCÍCIOS

1. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas congruentes são eqüidistantes do centro.
2. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas eqüidistantes do centro são congruentes.
3. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, se duas cordas têm comprimentos diferentes, a mais curta é a mais afastada do centro.
4. Mostre que a mediatrix de uma corda passa pelo centro do círculo.
5. Explique porque o reflexo de um círculo relativamente a uma reta que passa pelo seu centro é ainda o mesmo círculo. (vide capítulo 5 para definição de reflexo).
6. Na figura ao lado existem três retas que são tangentes simultaneamente aos dois círculos. Estas retas são denominadas de *tangentes comuns* aos círculos. Desenhe dois círculos que tenham:
 - a) quatro tangentes comuns?
 - b) exatamente duas tangentes comuns?
 - c) somente uma tangente comum?

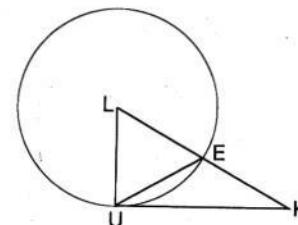
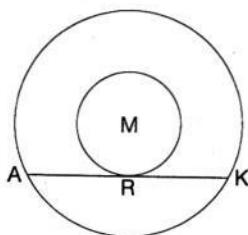


- d) nenhuma tangente comum?
e) mais de quatro tangentes comuns?

7. Na figura ao lado AE é tangente comum e JS liga os centros dos dois círculos. Os pontos E e A são pontos de tangência e M é o ponto de interseção dos segmentos JS e AE . Prove que o ângulo \hat{J} é igual ao ângulo \hat{S} .

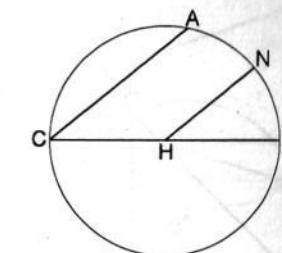
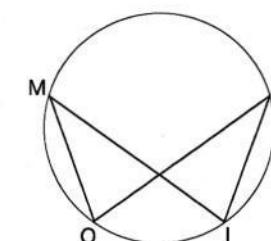


8. Na figura seguinte à esquerda, M é o centro dos dois círculos e AK é tangente ao círculo menor no ponto R . Mostre que $AR = RK$.



9. Na figura acima à direita, UK é tangente ao círculo no ponto U e $UE = LU$. Mostre que $LE = EK$.

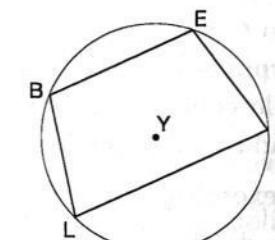
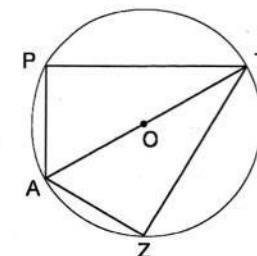
10. Na figura seguinte à esquerda, $MO = IX$. Prove que $MI = OX$.



Dois pontos em um círculo determinam dois arcos. Se os dois pontos são A e B nós iremos representar por \widehat{AB} o arco menor determinado por estes dois pontos. Se P também pertence ao círculo nós usaremos a notação \widehat{APB} para representar o arco determinado por A e B que contém o ponto P .

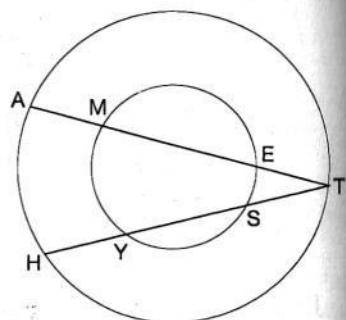
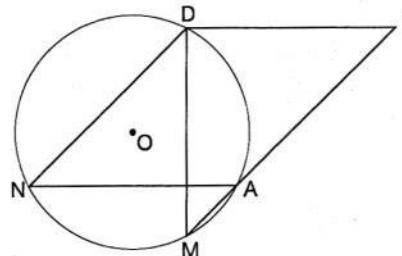
11. Na figura anterior à direita, H é o centro do círculo e CI é um diâmetro. Se CA e HN são paralelos, mostre que $\widehat{AN} = \widehat{IN}$ têm a mesma medida.

12. Na figura abaixo à esquerda, O é o centro do círculo e TA é um diâmetro. Se $PA = AZ$, mostre que os triângulos PAT e ZAT são congruentes.



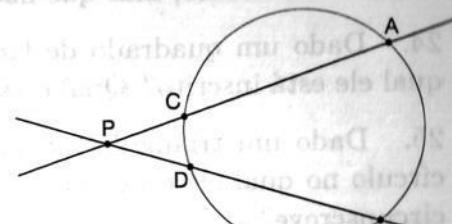
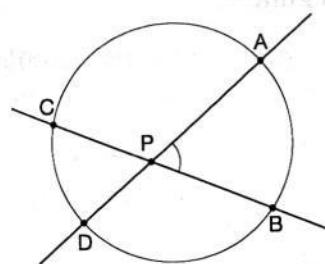
13. Na figura acima à direita, sabe-se que Y é o centro do círculo e que $BL = ER$. Mostre que BE é paralelo a LR .

14. Na figura seguinte à esquerda, o quadrilátero $DIAN$ é um paralelogramo e I, A e M são colineares. Mostre que $DI = DM$.



15. Na figura anterior à direita, qual dos dois arcos, \widehat{AH} ou \widehat{MY} , tem a maior medida em graus? Sabe-se que os dois círculos são concêntricos.

Uma reta intercepta um círculo em no máximo dois pontos (veja problema 1). As que o interceptam em exatamente dois pontos são chamadas de *secantes*. Um *ângulo secante* é um ângulo cujos lados estão contidos em duas secantes do círculo e que cada lado intercepta o círculo em pelo menos um ponto excluído o vértice. Vamos chamar de *região angular* associada a um ângulo $A\hat{B}C$ a interseção dos seguintes dois semiplanos: o que contém o ponto C e é determinado por AB , e o que contém o ponto A e é determinado por BC . Dados um ângulo e um círculo, a parte do círculo contida na região angular associada ao ângulo dado é designada *arco* (ou arcos) *determinado* (determinados) *pelo ângulo*. Nos exercícios seguintes indicaremos por “ $\text{med}\widehat{AB}$ ” a medida em graus do arco \widehat{AB} .



16. Mostre que um ângulo secante cujo vértice está dentro do círculo tem medida igual a metade da soma do arco que determina com o arco que é determinado pelo ângulo que se lhe opõe pelo vértice. (Na figura anterior à esquerda: $A\hat{P}B = \frac{1}{2}(\text{med } \widehat{AB} + \text{med } \widehat{CD})$).

17. Na figura anterior à direita $A\hat{P}B$ é um ângulo secante cujo vértice está fora do círculo mostre que $A\hat{P}B = \frac{1}{2}(\text{med } \widehat{AB} - \text{med } \widehat{CD})$.

18. Sucessivos arcos são marcados em um círculo de modo que cada arco tenha uma corda de mesmo comprimento que o raio. Prove que o sexto arco termina no ponto onde o primeiro arco começa.

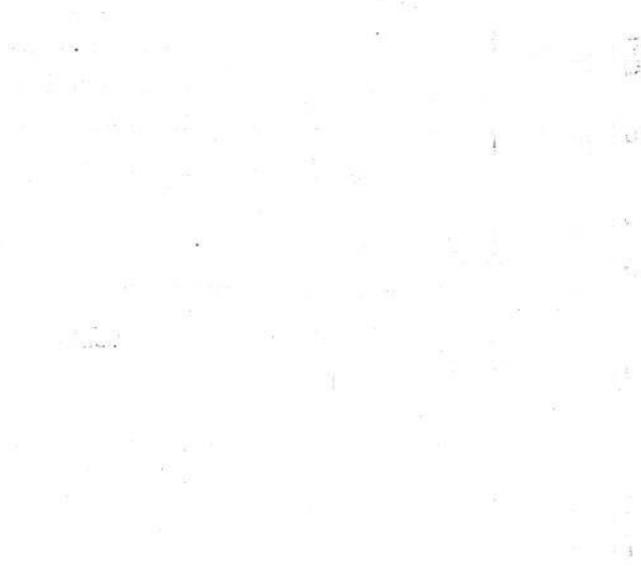
19. Prove que todo paralelogramo inscrito em um círculo é retângulo.

20. Prove que todo trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

21. Prove que o segmento ligando um vértice de um polígono regular ao centro do círculo em que ele está inscrito é bissetriz do ângulo daquele vértice.

22. Desenhe dois exemplos de polígonos equiangulares inscritos em um círculo, mas que não são regulares.

23. Desenhe dois exemplos de polígonos eqüiláteros que circunscrevem um círculo, mas que não são regulares.
24. Dado um quadrado de lado 5cm, qual o raio do círculo ao qual ele está inscrito? Qual o raio do círculo que ele circunscreve?
25. Dado um triângulo eqüilátero de lado 4cm, qual o raio do círculo no qual ele está inscrito? E qual o raio do círculo que ele circunscreve?

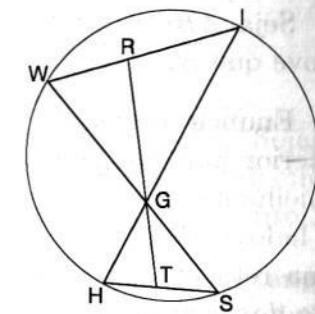
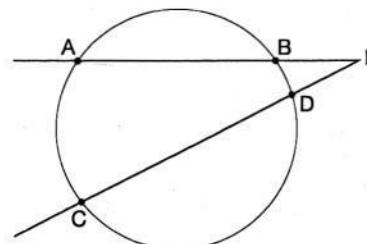


Na figura seguinte os raios são tangentes comuns aos dois círculos. Qual é a razão entre o comprimento da corda menor e o maior?

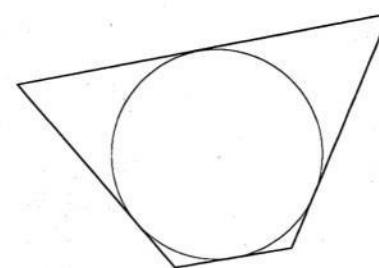
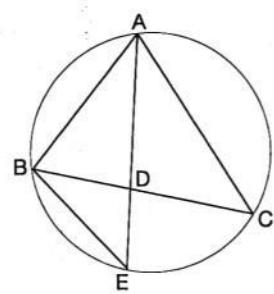


PROBLEMAS

- Prove que uma reta pode cortar um círculo em no máximo dois pontos.
- Na figura abaixo à esquerda $A\hat{P}C$ é um ângulo secante cujo vértice encontra-se fora do círculo e que o intercepta em quatro pontos como indicado. Prove que $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. Compare este resultado com a Proposição (8.7).



- Na figura acima à direita WS e HI são cordas que se interceptam no ponto G , e RT é bissetriz do ângulo $W\hat{G}I$. Prove que $\overline{WR} \cdot \overline{TS} = \overline{HT} \cdot \overline{RI}$.
- Seja ABC um triângulo e D um ponto de BC tal que AD é bissetriz do ângulo \hat{A} . Prove que $(\overline{AD})^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BD} \cdot \overline{DC}$. (Ajuda: considere o círculo no qual o triângulo está inscrito, prolongue AD até o ponto E do círculo, como indicado na figura seguinte à esquerda. Mostre que os triângulos ABE e ADC são semelhantes e use (8.7).)



5. Na figura anterior à direita o círculo está inscrito no quadrilátero. Prove que a soma dos comprimentos de um par de lados opostos é igual a soma dos comprimentos do outro par.

6. Seja $ABCDEF$ um hexágono que circunscreve um círculo. Prove que $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$.

7. Enuncie e prove uma proposição semelhante a do exercício anterior para um polígono de 8 lados. Será que uma proposição semelhante vale para um polígono de 10 lados? E para um de 11 lados? Enuncie suas conclusões na forma mais geral possível. Uma reta que contém os centros de dois círculos é chamada de *reta dos centros* dos dois círculos.

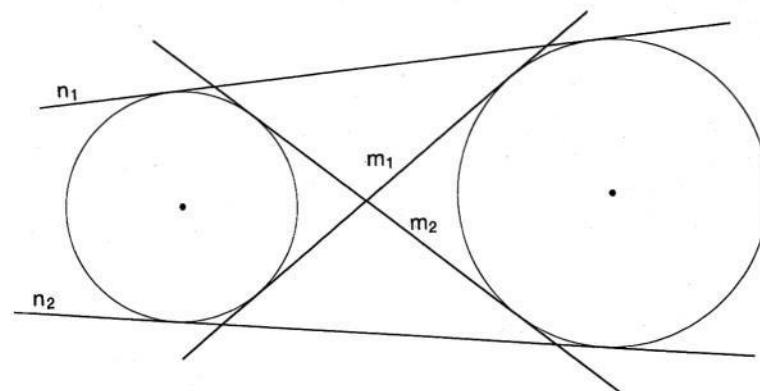
8. Prove que se dois círculos têm dois pontos em comum, a reta dos centros é mediatriz do segmento ligando estes dois pontos.

9. Prove que dois círculos distintos não podem ter mais do que dois pontos em comum.

Se dois círculos são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto então eles são chamados de *círculos tangentes*, e o ponto de *ponto de contacto*.

10. Prove que se dois círculos são tangentes, a reta dos centros passa pelo ponto de contacto.

11. Na figura seguinte as retas são tangentes comuns aos dois círculos. Prove que m_1 e m_2 se interceptam na linha dos centros. Prove que se os raios dos dois círculos são diferentes, as retas n_1 e n_2 também se interceptam na reta dos centros.



12. Sejam A e B pontos de interseção de dois círculos. Sejam C e D as extremidades dos diâmetros dos dois círculos que se iniciam no ponto A . Prove que a reta que liga C a D contém ponto B .

13. Prove que a medida de um ângulo formado por uma tangente e uma corda de um círculo é igual a metade da medida do arco que ele determina.

14. Prove que a medida de um ângulo formado por uma tangente e uma secante é igual a metade da diferença entre as medidas dos arcos que ele determina.

15. Seria possível reunir em uma única proposição as informações parciais fornecidas pelos exercícios 16 e 17 e pelos problemas 13 e 14?

16. Prove que um polígono equilátero inscrito em um círculo é um polígono regular.

17. Prove que um polígono eqüiangular que circunscreve um círculo é um polígono regular.
18. Prove que, se um círculo for dividido em um número qualquer de arcos iguais, então as cordas destes arcos formam um polígono regular inscrito no círculo, e as tangentes traçadas pelos pontos de separação dos arcos forma um polígono regular que circunscreve o círculo.
19. Descreva um método de traçar um círculo de raio dado que seja tangente aos lados de um ângulo.
20. Descreva um método para traçar um círculo de raio dado que seja tangente a dois círculos fixados. Quantas soluções pode ter este problema?
21. Determine o lugar geométrico descrito pelos (determine o conjunto de todos os pontos que têm a propriedade de serem) pés das perpendiculares baixadas de um ponto A às retas que passam por um ponto B .
22. Determine o lugar geométrico descrito pelos vértices dos triângulos de base AB e com $\hat{C} = 30^\circ$. A medida fixada do ângulo \hat{C} faz alguma diferença na sua resposta?
23. Dois círculos se cortam nos pontos A e B . Pelo ponto B traçamos uma reta que corta o primeiro círculo num ponto X e o segundo círculo num ponto Y . Mostre que a medida do ângulo $X\hat{A}Y$ não depende da reta traçada.
24. Mostre que um círculo é o lugar geométrico descrito pelos pontos C para os quais a razão de suas distâncias ao ponto A é constante e diferente de um. (Sugestão: no triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos interno e externo de vértice C são perpendiculares e cortam a reta que passa por A e B sempre nos mesmos pontos!).

COMENTÁRIO

Ao longo destas notas postulamos a maneira de medir o comprimento de segmentos.

A partir daí pudemos definir o comprimento de uma poligonal como a soma dos comprimentos dos seus lados. No entanto não fizemos referência a questão de como medir o comprimento de curvas. De fato, a única curva que consideramos até o momento foi o círculo. Intuitivamente o comprimento de um círculo deve ser o comprimento do segmento que obteríamos se pudéssemos, cortando o círculo, desencurvá-lo, como faríamos a um pedaço de arame circular. No entanto esta noção de “desencurvamento” não existe na geometria que construímos. Podemos partir de uma idéia bem mais simples que é a de aproximar o círculo por uma poligonal. Tomemos para isto um polígono regular inscrito no círculo, com n lados, cada um deles medindo s_n . Se o número de lados for suficientemente grande, a nossa intuição nos diz que o perímetro deste polígono, $n \cdot s_n$, será muito próximo do comprimento do círculo.

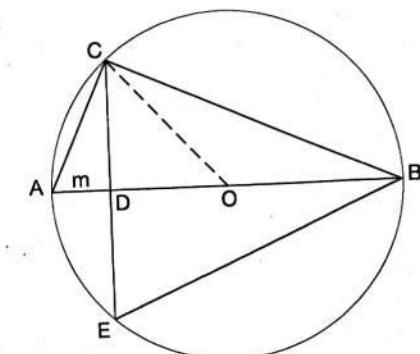
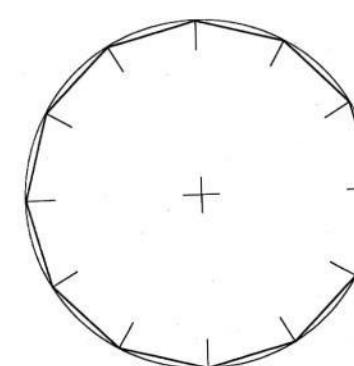


Figura 8.14

Vamos determinar s_{2n} em termos de s_n e do raio do círculo. Na figura acima à direita, temos um círculo de centro O e raio R , e neste, uma corda CE perpendicular a um diâmetro AB . O triângulo ABC é retângulo e CD é a altura do vértice A . Logo $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$. Também OCD é retângulo e portanto $\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CD}^2$. Se $CE = s_n$, então $\overline{AC} = s_{2n}$ e, das fórmulas acima, obtem-se

- 1) $(s_{2n})^2 = 2R \cdot m$
- 2) $(R - m)^2 = R^2 - (\frac{s_n}{2})^2$

onde $m = \overline{AD}$. Eliminando-se m destas equações resulta:

$$s_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - s_n^2}}$$

É fácil verificar que o lado s_4 de um quadrado inscrito no círculo é $R\sqrt{2}$ e que seu perímetro é $4R\sqrt{2}$. Utilizando-se agora sucessivamente a fórmula acima podemos encontrar os perímetros p_n dos polígonos regulares inscritos no círculo com 8, 16, 32, 64, ... lados. O leitor não terá dificuldade em verificar que

$$s_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$s_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$s_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

E poderá facilmente estabelecer uma expressão geral para s_{2n} , ($n \geq 8$). Com base nas fórmulas acima, calculamos, em termos aproximados, corretos até a quarta casa decimal, os valores da seguinte tabela.

n	s_n	p_n
4	$1,41421 \cdot R$	$5,6568 \cdot R$
8	$0,76537 \cdot R$	$6,1229 \cdot R$
16	$0,39018 \cdot R$	$6,2428 \cdot R$
32	$0,19603 \cdot R$	$6,2730 \cdot R$
64	$0,09814 \cdot R$	$6,2806 \cdot R$
128	$0,04908 \cdot R$	$6,2825 \cdot R$
256	$0,02454 \cdot R$	$6,2830 \cdot R$
512	$0,01227 \cdot R$	$6,2831 \cdot R$

Assim, segundo nossa intuição, o comprimento de um círculo de raio R deve ser aproximadamente $6,2831 \cdot R$. Infelizmente não dispomos ainda de uma definição de comprimento do círculo que nos permita verificar a validade desta afirmação.

Antes de tentar estabelecer a definição de comprimento de um círculo vamos fazer algumas observações. Seja P um polígono convexo inscrito num círculo, e sejam A e B dois de seus vértices consecutivos. Tomemos um ponto C do arco \widehat{AB} e indiquemos por P_1 o polígono cujos vértices são os vértices do polígono P , mais o ponto C . A passagem do polígono P para o polígono P_1 constitui-se na substituição ao lado AB pelos lados AC e CB . Desde que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, concluímos que o perímetro de P_1 é maior do que o perímetro de P . Assim, adicionando-se a um polígono convexo inscrito no círculo novos vértices, aumentamos o seu perímetro. Sem dúvida este procedimento não resulta em um crescimento ilimitado. De fato, se tomarmos um polígono circunscrito ao círculo, seu perímetro será maior do que o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito.

Chama-se de comprimento do círculo ao menor dos números maiores do que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito.

É uma consequência imediata desta definição que, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, pode-se sempre inscrever um polígono convexo no círculo tal que a diferença do seu perímetro para o comprimento do círculo (em valor absoluto) seja menor do que ε . O comprimento da circunferência é tradicionalmente representado na forma $2\pi R$ onde π é o comprimento de uma semicircunferência de raio 1. O valor aproximado de π , correto até a 5^a casa decimal é:

$$\pi = 3.141593$$

o que nos dá um perímetro de aproximadamente $6,283186 \cdot R$.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Considere um círculo de centro O e nele um diâmetro AB . Fixemos nossa atenção em um dos semicírculos determinados por AB . Tome um ponto qualquer C deste semicírculo e indique por α o ângulo $C\hat{O}B$. Trace, a partir de C , uma perpendicular à reta AB . Seja D o pé desta perpendicular.

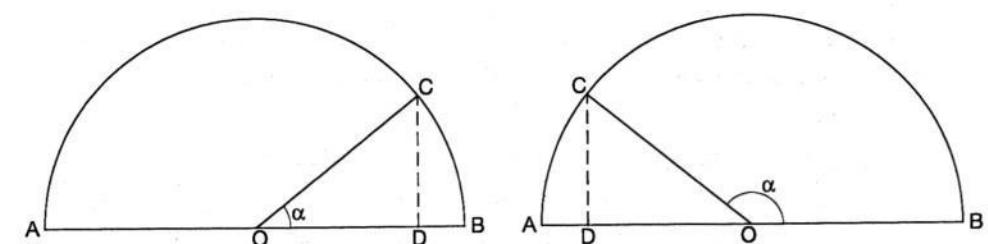


Figura 9.1

Chama-se de *seno do ângulo α* ao quociente $\overline{CD}/\overline{OC}$. O seno do ângulo α é representado por: $\sin \alpha$. Observe que, de acordo com esta definição tem-se que:

$$(9.1) \quad \sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \text{e} \quad \sin 180^\circ = 0$$

Define-se o *cosseno do ângulo α* como o quociente $\overline{OD}/\overline{OC}$ quando o ângulo α é agudo. Se o ângulo α é obtuso, o cosseno

é definido como valor negativo deste quociente, isto é $-\overline{OD}/\overline{OC}$. Representa-se o cosseno do ângulo α por: $\cos \alpha$. Com esta definição tem-se que:

$$(9.2) \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \text{e} \quad \cos 180^\circ = -1.$$

Chama-se de *tangente do ângulo α* ao quociente

$$(9.3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

não sendo esta função definida se $\alpha = 90^\circ$.

9.4 Proposição. Os valores do seno e do cosseno de um ângulo independem do semicírculo utilizado para defini-los.

Prova. Consideremos um outro círculo de centro O' e neste um diâmetro $A'B'$. Consideremos um ponto C' sobre o círculo de modo que o ângulo $C'\hat{O}'B'$ seja igual ao ângulo α e portanto igual a $C\hat{O}B$. Considere os triângulos COD e $C'O'D'$ onde D e D' são os pés das perpendiculares baixadas às retas AB e $A'B'$, respectivamente, a partir dos pontos C e C' . Como $C\hat{D}O$ e $C'\hat{D}'O'$ são ângulos retos e já sabemos que $C\hat{O}B = C'\hat{O}'B'$, então concluímos que os triângulos considerados são semelhantes. Portanto teremos

$$\frac{\overline{C'O'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{OD}}$$

Como consequência

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O'}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{C'D'}}$$

Isto prova a nossa afirmação.

9.5 Teorema. Qualquer que seja o ângulo α tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Prova. Para α igual a 0° , 90° ou 180° , a afirmação acima é comprovada pela substituição direta dos valores do seno e do cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere o triângulo $O\hat{C}B$ da figura (9.1). Tem-se então

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \right)^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} \right)^2 = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1$$

onde fez-se uso do teorema de Pitágoras na penúltima igualdade.

9.6 Teorema (Fórmulas de redução). Se α é um ângulo agudo então

- a) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$
- c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1/\operatorname{tg} \alpha$

Prova. (Veja figura 9.2) Sejam C e C' pontos de um semicírculo de extremidades A e B , tais que $C\hat{O}B = \alpha$ e $C'\hat{O}B = 90^\circ - \alpha$.

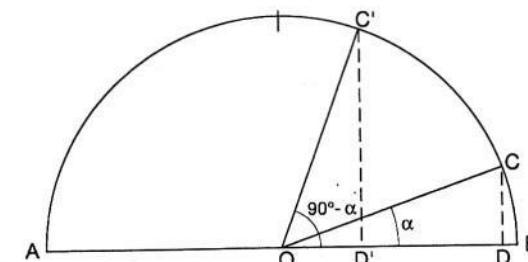


Figura 9.2

Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas à reta AB a partir de C e C' , respectivamente. Observe que, como $C'OB = 90^\circ - \alpha$, então $OC'D' = \alpha$. Logo os triângulos COD e $OD'C'$ são congruentes ($OC = OC'$, $CDO = C'D'O = 90^\circ$ e $COD = OC'D' = \alpha$) e portanto

$$\frac{C'D'}{OD} = \frac{OD'}{CD} = \frac{OC'}{OC}$$

Segue-se que

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{C'D'}{OC'} = \frac{OD}{OC} = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{OD'}{OC'} = \frac{CD}{OC} = \sin \alpha$$

A prova de (c) é deixada a cargo do leitor.

9.7 Teorema. Qualquer que seja α tem-se:

- a) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- b) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

Prova. Quando α é igual a 0° , 90° ou 180° , a afirmação acima é comprovada por substituição direta dos valores do seno e cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere pontos C e C' no semicírculo de sorte que $C\hat{O}B = \alpha$ e $C'\hat{O}B = 180^\circ - \alpha$. Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas dos pontos C e C' à reta AB .

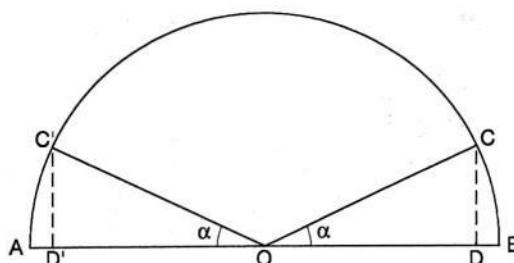


Figura 9.3

A congruência dos triângulos OCD e $OC'D'$ nos fornece

$$CD = C'D' \quad \text{e} \quad DO = D'O$$

Como consequência imediata temos que

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{C'D'}{C'O} = \frac{CD}{CO} = \sin \alpha$$

$$\text{e} \quad |\cos(180^\circ - \alpha)| = \frac{D'O}{C'D'} = \frac{DO}{CO} = |\cos \alpha|$$

Como $\alpha \neq 90^\circ$ então α ou $180^\circ - \alpha$ é obtuso e o outro é agudo. Por isto, $\cos \alpha$ e $\cos(180^\circ - \alpha)$ têm sinais opostos. Logo

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

As definições de seno, cosseno e tangente dadas no início do capítulo permitem concluir imediatamente as seguintes fórmulas relacionando os lados de um triângulo retângulo e os seus ângulos agudos.

9.8 Proposição. Em um triângulo retângulo ABC , de ângulo reto \hat{C} , tem-se

$$\overline{BC} = \overline{AB} \sin \hat{A}, \quad \overline{AC} = \overline{AB} \cos \hat{A} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{AC} \operatorname{tg} \hat{A}$$

Uma consequência desta proposição é que, se conhecermos um ângulo e um lado de um triângulo retângulo é possível calcularmos as medidas de seus outros dois lados, supondo-se que conheçamos como calcular as funções seno, cosseno, e tangente de um ângulo. Atualmente, uma máquina de calcular razoavelmente simples, possui circuitos que calculam estas funções com aproximação correta até a quarta ou quinta casa decimal, o que é mais do que suficiente para a grande maioria dos cálculos. Pode-se, no entanto, fazer uso de uma tabela de funções trigonométricas obtida facilmente em qualquer compêndio sobre trigonometria.

- 9.9 Proposição.** a) $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ e $\tan 45^\circ = 1$
 b) $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$

Prova. (a) Construa um triângulo retângulo ABC tendo ângulo reto \hat{C} , e tendo $AC = BC$. Tem-se então que $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ e, utilizando-se o teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}/\sqrt{2}$. Logo

$$\sin 45^\circ = \frac{\overline{AB}/\sqrt{2}}{\overline{AB}} = 1/\sqrt{2}$$

Da mesma forma obtém-se o valor de $\cos 45^\circ$. O valor da tangente é obtido pela simples divisão dos valores do seno e cosseno.

(b) Construa um triângulo equilátero ABC . Todos os seus ângulos medem 60° e todos os seus lados têm o mesmo comprimento a .

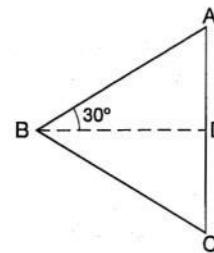


Figura 9.4

Considere a altura baixada do vértice B ao lado AC e seja D o pé desta altura. Os dois triângulos formados são congruentes e $\overline{DA} = \overline{DC} = a/2$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD concluímos que $\overline{BD} = a\sqrt{3}/2$. Observe que o ângulo $A\hat{B}D$ mede 30° . Logo

$$\sin 30^\circ = \frac{a/2}{a} = 1/2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \sqrt{3}/2$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}$$

Com esta proposição e os resultados (9.6) e (9.7) podemos agora facilmente determinar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 60° , 120° , 135° e 150° .

9.10 Teorema (Lei dos cossenos). Em um triângulo ABC tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{C}$$

Prova. Se o ângulo \hat{C} for reto então a afirmação acima é exatamente o teorema de Pitágoras. Podemos portanto supor que \hat{C} não é um ângulo reto. Tracemos a altura do vértice A . Como \hat{C} não é um ângulo reto então o pé desta altura, que designaremos por D , não coincide com o ponto C . Se D coincidir com o ponto B então o triângulo ABC é retângulo tendo \hat{B} como ângulo reto. Neste caso, $\overline{AC} \cdot \cos \hat{C} = \overline{BC}$ e o resultado acima é uma decorrência imediata do teorema de Pitágoras. Assim podemos supor que B , C e D são pontos distintos. Como ADB e ADC são triângulos retângulos tem-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

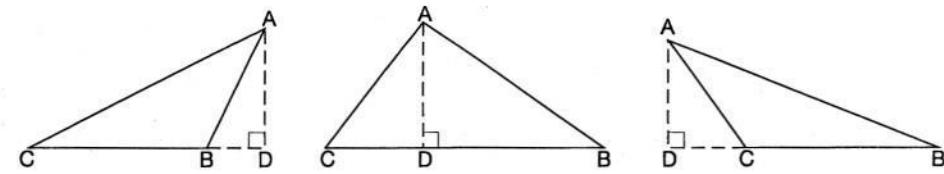


Figura 9.5

Logo, subtraindo-se estas duas equações obtém-se

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2$$

Agora iremos substituir o termo \overline{BD}^2 desta equação. Para isto, teremos de considerar três possibilidades. (Veja figura 9.5)

a) C está entre B e D

Neste caso tem-se $\overline{DC} + \overline{BC} = \overline{BD}$. Substituindo-se \overline{BD} por $\overline{DC} + \overline{BC}$, desenvolvendo-se o quadrado e simplificando-se os termos, a equação acima torna-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC}.$$

Observe que $\overline{DC} = \overline{AC} \cdot \cos(A\hat{C}D)$ e que $\cos(A\hat{C}D) = -\cos(180^\circ - A\hat{C}D) = -\cos(A\hat{C}B)$. Como $A\hat{C}B$ é exatamente o ângulo \hat{C} do triângulo ABC , o resultado fica demonstrado neste caso.

b) D está entre C e B

Neste caso tem-se $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ e, portanto, $\overline{BD} = \overline{DC} - \overline{BC}$. Substituindo-se como no caso anterior este valor de \overline{BD} , obtém-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC}$$

Observando-se que $\overline{DC} = \overline{AC} \cdot \cos \hat{C}$ obtém-se o resultado.

c) B está entre C e D

Este caso é tratado de forma semelhante e é deixado a cargo do leitor completar a demonstração.

9.11 Teorema (Lei dos senos). Qualquer que seja o triângulo ABC , tem-se:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \hat{C}}{\overline{AB}}$$

Prova. Considere o círculo que circunscreve o triângulo ABC . Seja O o seu centro e R o seu raio. Considere o diâmetro que tem

B como extremidade.

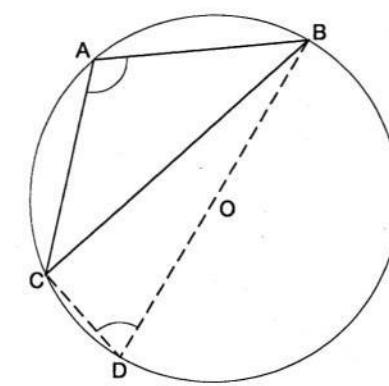
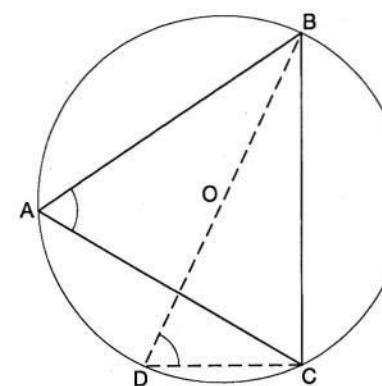


Figura 9.6

Seja D sua outra extremidade. Se os pontos A e D estiverem de um mesmo lado da reta BC , então os ângulos $B\hat{D}C$ e $B\hat{A}C$ são iguais por serem ângulos inscritos correspondentes a um mesmo arco. Se os pontos A e D estiverem em lados distintos da reta BC então os ângulos $B\hat{D}C$ e $B\hat{A}C$ são suplementares já que correspondem a arcos que se complementam para formar o círculo. Em ambos os casos tem-se que

$$\sin \hat{D} = \sin \hat{A}.$$

Conseqüentemente

$$\overline{BC} = 2R \sin \hat{A}.$$

(Observe que aqui utilizamos o fato de que o triângulo BCD é retângulo). De forma análoga demonstra-se que

$$\overline{AB} = 2R \cdot \sin \hat{C} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 2R \cdot \sin \hat{B}.$$

Comparando-se as três fórmulas obtidas conclui-se que

$$\frac{\sin \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \hat{C}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2R}.$$

Fica assim demonstrado este teorema.

EXERCÍCIOS

1. Quando o sol está 20° acima do horizonte, qual o comprimento da sombra projetada por um edifício de 50 metros?
2. Uma árvore de 10 metros de altura projeta uma sombra de 12 metros. Qual é a altura angular do sol?
3. Os lados de um triângulo ABC são os seguintes: $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 8$ e $\overline{BC} = 5$. Determine o seno do ângulo \hat{A} .
4. Do topo de um farol, 40 metros acima do nível do mar, o faroleiro vê um navio segundo um ângulo (de depressão) de 15° . Qual a distância do navio ao farol?
5. Um carro percorreu 500 metros de uma estrada inclinada 20° em acente. Quantos metros o ponto de chegada está acima do ponto de partida?
6. Mostre que o perímetro de um polígono regular inscrito em um círculo de raio R é $p_n = 2Rn \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.
7. Num triângulo ABC tem-se $\overline{AC} = 23$, $\hat{A} = 20^\circ$ e $\hat{C} = 140^\circ$. Determine a altura do vértice B .
8. As funções secante, cossecante e cotangente de um ângulo \hat{A} são definidas por $\sec \hat{A} = 1/\cos \hat{A}$, $\operatorname{cossec} \hat{A} = 1/\operatorname{sen} \hat{A}$ e $\operatorname{cotg} \hat{A} = 1/\operatorname{tg} \hat{A}$, desde que $\cos \hat{A}$, $\operatorname{sen} \hat{A}$ e $\operatorname{tg} \hat{A}$ sejam definidas e diferentes de zero. Prove que:
 - a) $1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A} = \sec^2 \hat{A}$
 - b) $1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A} = \operatorname{cossec}^2 \hat{A}$

COMENTÁRIO

O estudo das funções trigonométricas e de suas aplicações é denominado trigonometria. A trigonometria iniciou-se como o estudo das aplicações, a problemas práticos, das relações entre os lados de um triângulo. Na Grécia, associava-se a um dado ângulo a corda correspondente ao arco que ele determinava em um círculo centrado no seu vértice. Posteriormente, na matemática hindu, começou-se a associar metade desta corda. A correspondência era estabelecida através de tabelas.

Uma grande dificuldade que existia tanto no tempo dos gregos como no tempo dos hindus para elaboração e utilização destas tabelas era a não existência de um sistema adequado de numeração (introduzido na aritmética somente no 16º século). O primeiro trabalho sobre trigonometria de que se tem real conhecimento está contido no “Almagest”. (Um trabalho sobre astronomia em 13 volumes, escrito por Ptolomeu de Alexandria por volta da metade do segundo século.) Num de seus capítulos é apresentada uma tabela de cordas. Esta tabela refere-se a uma seqüência de ângulos, distanciados de meio grau um do outro, e seus valores estão corretos até pelo menos cinco casas decimais. Ali também é explicado o método de calcular a tabela. Um outro capítulo é dedicado a solução de triângulos. Vários teoremas relativos a cordas são demonstrados. Estes teoremas contêm implicitamente o conhecimento das fórmulas mais importantes da trigonometria.

No entanto, os escritores gregos do quarto século chamam a Hiparco, que viveu no segundo século a.C., de originador da ciência da trigonometria. Ele teve a reputação de ter calculado uma tabela de cordas que constituiu um livro com doze volumes.

CAPÍTULO 10

ÁREA

Uma *região triangular* (figura (a) abaixo) é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de *fronteira* da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira é chamado de *interior* da região triangular.



Figura 10.1

Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum (figura (b) acima).

Um *ponto* é *interior* a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O *interior* da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A *fronteira* da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

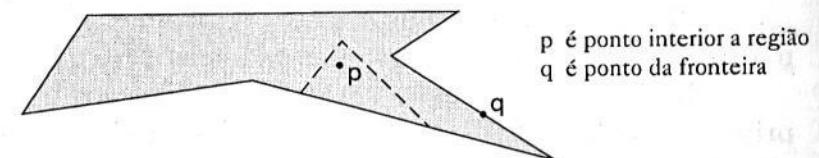


Figura 10.2

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma VI.1. *A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.*

O número a que se refere este axioma é chamado de *área* da região.

Axioma VI.2. *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Axioma VI.3. *Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.*

É claro que todo polígono convexo determina uma região poligonal. Nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo “a área de um quadrado” quando queremos dizer realmente “a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado”. Em geral falaremos de “área de um dado polígono”, quando queremos de fato nos referir a área da região cuja fronteira é aquele polígono. Assim, o axioma VI.3 acima poderia ter sido enunciado como: “triângulos congruentes possuem áreas iguais”.

Axioma VI.4. Se $ABCD$ é um retângulo então sua área é dada pelo produto: $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

A partir destes axiomas vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples. Vamos iniciar pelo paralelogramo.

Dado um paralelogramo $ABCD$ designemos por b o comprimento do lado AB e por h o comprimento de um segmento ligando AB a CD que seja perpendicular a ambos. Um tal segmento é chamado de *altura* do paralelogramo relativamente ao lado AB .

10.1 Proposição. A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Prova. Em termos da notação fixada acima devemos provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b \cdot h$. Para isto trace, a partir dos pontos A e B , dois segmentos, AE e BF , perpendiculares à reta CD . O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$ a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b \cdot h$. Para concluir a demonstração observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes e que

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE) = \\ &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(CBF) = \\ &= \text{Área}(ABFE) = b \cdot h\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

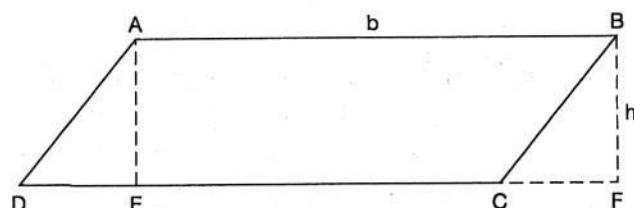


Figura 10.3

Como corolário desta proposição determina-se a área de um triângulo qualquer.

10.2 Proposição. A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Prova. Dado um triângulo ABC , trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB , e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC . Estas duas retas se interceptam em um ponto D . O polígono $ACDB$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes. Como $\text{Área}(ABDC) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CDB)$ e $\text{Área}(ABC) = \text{Área}(CDB)$, então: $\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(ABDC)$. Para completar a demonstração observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB .

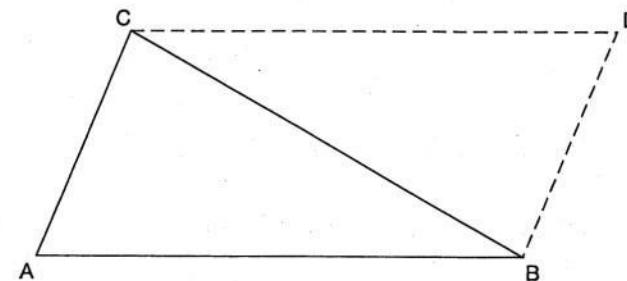


Figura 10.4

10.3 Proposição. A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.

Prova. Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases são os lados AB e CD . Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos.

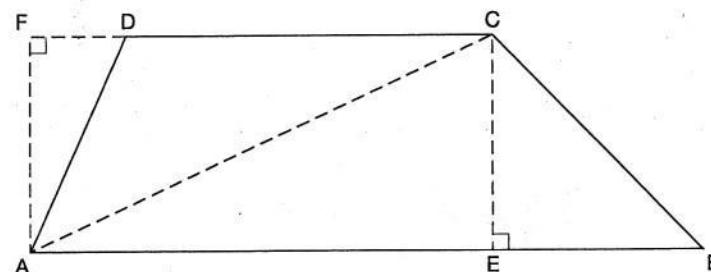


Figura 10.5

Trace as alturas CE , do triângulo ACB , e AF , do triângulo ACD . Então teremos que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Como consequência

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ACD) = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AF} = \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CE}\end{aligned}$$

Fica assim demonstrada a proposição.

10.4 Proposição. A área de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R é $\frac{1}{2}R^2n \cdot \text{sen}(360^\circ/n)$.

Prova. Seja O o centro do círculo. Ligando-se cada um dos vértices do polígono ao ponto O forma-se n triângulos isósceles cujas bases são os lados do polígono, cujos lados iguais têm comprimento R e cujo ângulo do topo mede $360^\circ/n$. Seja OAB um tal triângulo. Trace a altura do vértice A . Esta altura mede $R \text{sen}(360^\circ/n)$ e o lado OB mede R . Logo a área deste triângulo é $\frac{1}{2}R^2 \text{sen}(360^\circ/n)$ e a área total do polígono é $\frac{1}{2}nR^2 \text{sen}(360^\circ/n)$.

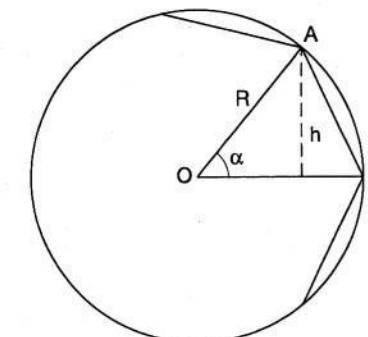


Figura 10.6

No comentário feito ao final do Capítulo 8 nós vimos como proceder para estabelecer a noção de comprimento de um círculo. Podemos proceder de maneira análoga com relação à área da região limitada por um círculo. Consideramos polígonos inscritos e observamos que, ao aumentarmos um vértice em um de tais polígonos, aumentamos a sua área. Assim, não existe um polígono inscrito no círculo com área maximal. Por outro lado, a área de qualquer polígono inscrito é menor do que a área de qualquer polígono circunscrito. É então natural definir: *a área do círculo é o menor número maior do que a área de qualquer polígono nele inscrito*.

Valores aproximados para a área de um círculo podem então ser obtidos a partir da fórmula determinada na proposição (10.4) para a área de um polígono regular inscrito. Na tabela abaixo n é o número de lados do polígono e A_n é a sua área.

n	A_n
16	3,06147
32	3,12145
64	3,13655
128	3,14033
256	3,14128
512	3,14151
1024	3,14157
2048	3,14158
4096	3,14159
1048546	3,14159

O leitor não terá dificuldade em reformular a prova da proposição (10.4) (considerando a altura do vértice O do triângulo OAB) de modo a obter a seguinte expressão para a área do polígono regular inscrito de n lados.

$$A_n = nR^2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

e a seguinte fórmula para o perímetro do mesmo polígono

$$p_n = 2nR \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Segue-se daí que

$$\frac{2A_n}{Rp_n} = \cos(180^\circ/n)$$

Se considerarmos um polígono regular inscrito com um grande número de lados, o valor de $\cos(180^\circ/n)$ será extremamente próximo do valor de $\cos 0^\circ$, enquanto que o valor de A_n

estará muito próximo do valor da área da região limitada pelo círculo e o valor de p_n será aproximadamente o valor do comprimento do círculo. É portanto razoável esperar que, para o círculo, duas vezes sua área seja igual a R vezes seu perímetro. A proposição abaixo tem exatamente este enunciado.

10.5 Teorema. *A área da região limitada por um círculo é igual a metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.*

Prova. Representemos por p o comprimento do círculo e por A a área da região por ele limitada. Se P é um polígono inscrito no círculo, representemos por $p(P)$ o seu perímetro, por $A(P)$ a sua área e por $L(P)$ o comprimento do maior de seus lados.

Tomemos um número positivo a qualquer, e seja P um polígono inscrito tal que

- a) $L(P) < a$
- b) $A - A(P) < a \cdot R$
- c) $p - p(P) < a$

Para fazer a escolha deste polígono podemos inicialmente escolher três polígonos: P_1 , onde se verifica (a), P_2 onde se verifica (b) e P_3 , onde se verifica (c). A maneira como se definiu área e perímetro do círculo permite afirmar que as escolhas de P_2 e P_3 são possíveis. Agora, forme um novo polígono que tenha como vértices os vértices dos três polígonos. Este novo polígono satisfaz as três condições acima. A ele chamaremos de polígono P . A área deste polígono pode ser calculada somando-se as áreas de todos os triângulos com vértice no centro do círculo e tendo como lado um dos lados do polígono P . Seja OAB um destes triângulos. Sua área será

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OC}$$

onde OC é a altura do vértice O deste triângulo.

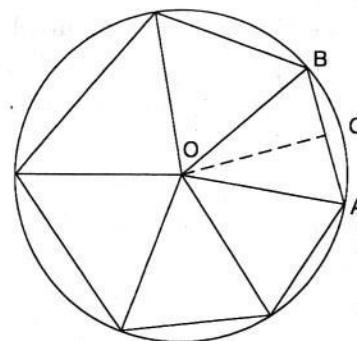


Figura 10.7

Como $\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC}$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot (\overline{OA} - \overline{AC}) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OA}$$

Observando que $\overline{OA} = R$ e $\overline{AC} < L(P) < a$, concluímos que

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot (R - a) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot R$$

Desde que uma desigualdade como esta vale em cada um dos triângulos em que subdividimos o polígono P , podemos somar todas elas para obter

$$\frac{1}{2}P(P) \cdot (R - a) < A(P) < \frac{1}{2}p(P) \cdot R$$

Como o polígono P satisfaz a condição (c), temos que $p-a < p(P)$. Por outro lado sabemos, da definição de perímetro do círculo, que $p(P) < p$. Utilizando estas duas informações na desigualdade acima obtém-se

$$\frac{1}{2}(p-a)(R-a) < A(P) < \frac{1}{2}p \cdot R$$

ou seja

$$\frac{1}{2}p \cdot R - \frac{1}{2}(aR + ap - a^2) < A(P) < \frac{1}{2}p \cdot R$$

Desta desigualdade decorre que a área do polígono $A(P)$ difere de $p \cdot R/2$ em menos que $(aR + ap - a^2)/2$. Já que, pela escolha do polígono P , $A - A(P) < a \cdot R$, então concluímos que

$$\left| A(P) - \frac{1}{2}p \cdot R \right| < a \cdot R + \frac{1}{2}(aR + ap - a^2)$$

Como o valor de a é arbitrário, podendo ser tomado tão pequeno quanto se queira, e o lado esquerdo desta desigualdade não depende da escolha de a , só podemos concluir que a diferença $A(P) - \frac{1}{2}p \cdot R$ é zero.

Fica assim demonstrado o teorema.

EXERCÍCIOS

1. Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .
2. Que relação satisfazem as áreas de dois triângulos retângulos semelhantes?
3. O raio do círculo inscrito em um polígono regular é chamado de *apótema* do polígono regular. Prove que a área de um polígono regular é igual a metade do produto do seu perímetro pela seu apótema.
4. Determine a área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio R .
5. Prove que a razão entre os comprimentos de dois círculos é igual a razão entre seus raios.
6. Prove que a razão entre as áreas de dois círculos é igual a razão entre os quadrados dos seus raios.
7. Se os diâmetros de dois círculos são 3 e 6, qual a relação entre as suas áreas?
8. Qual a área de um quadrado inscrito em um círculo cujo raio mede 5 cm?
9. Dois hexágonos regulares têm lados medindo 2 cm e 3 cm. Qual é a relação entre as suas áreas?
10. O comprimento de um círculo vale duas vezes o comprimento de outro círculo. Que relação satisfazem suas áreas?
11. A área de um círculo vale cinco vezes a área de outro círculo. Que relação satisfazem seus raios?

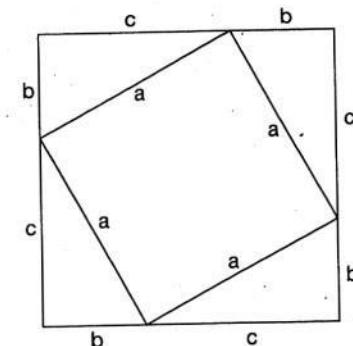
12. Quanto seria necessário de papel para cobrir toda a face externa de uma lata cilíndrica cuja altura é 15 cm e cujo raio da base é 5 cm?

Seja a o lado de um triângulo retângulo com hipotenusa c . Seja b o lado oposto ao ângulo reto. Seja a' o lado oposto ao ângulo agudo.

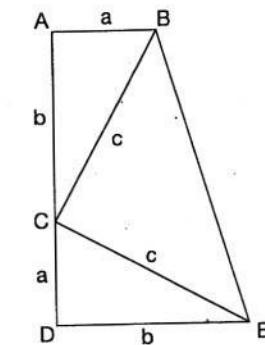
PROBLEMAS

- Mostre que se dois triângulos são semelhantes então a razão entre suas áreas é igual a razão entre os quadrados de quaisquer dois de seus pares de lados correspondentes.
- Mostre que a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual a razão entre os quadrados de quaisquer dois de seus lados correspondentes.
- Três polígonos semelhantes são construídos tendo cada um deles, como lado, um dos lados de um dado triângulo retângulo. Prove que a área do maior deles é igual a soma das áreas dos dois menores.
- A região limitada por dois raios e um arco de um círculo é chamada de *setor* do círculo. Mostre que a área de um setor é $\frac{1}{2}RS$ onde R é o raio do círculo e S é comprimento do arco.
- Prove que, em dois círculos de raios R e kR , cordas de comprimento c e kc , respectivamente, subtendem arcos de comprimentos S e kS .
- Determine a área da região limitada por uma corda e pelo arco de círculo que ela subtende.
- Determine a área da parte da região limitada por um círculo que fica entre duas de suas cordas.

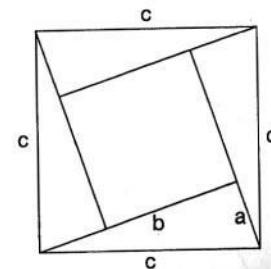
8. A figura ao lado sugere uma outra maneira de demonstrar o teorema de Pitágoras. Para fazer a demonstração expresse a área do quadrado maior de duas maneiras diferentes: como produto dos lados e como soma das áreas dos 4 triângulos e do quadrado menor. Complete a demonstração.



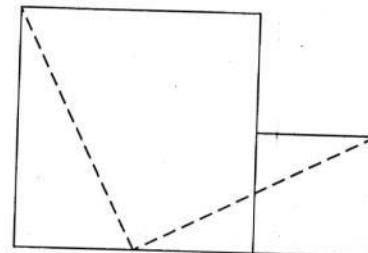
9. Uma outra prova do teorema de Pitágoras é sugerida pela figura ao lado. Determine a área do trapézio de duas maneiras diferentes, de forma análoga ao que foi feito na questão anterior. Complete a prova. Esta prova foi inventada por Garfield em 1876.



10. Bhaskara, um matemático hindu do século doze, criou uma prova do teorema de Pitágoras baseada na figura ao lado. Faça esta demonstração.



11. Quaisquer dois quadrados podem ser cortados em 5 pedaços de tal forma que estes cinco pedaços podem ser rearrumados para formar um novo quadrado. A maneira de fazer os cortes é indicada na figura seguinte, no caso particular em que os quadrados considerados têm lados um o duplo do outro. Depois que você verificar como construir o quadrado com os 5 pedaços, tente determinar como fazer os cortes no caso em que os quadrados têm lados 12 e 8.



Não é necessário demonstrar que

o resultado da soma

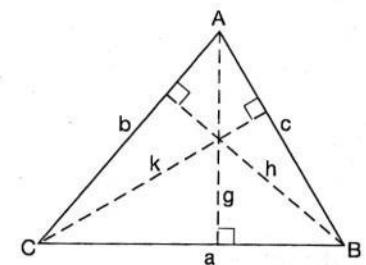
de duas áreas é a área

COMENTÁRIO

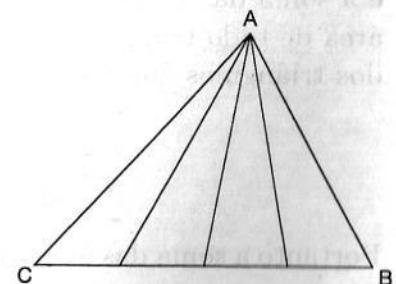
É possível evitar a introdução dos Axiomas VI.1 a VI.4. O conceito de área teria então de ser trabalhado a partir dos axiomas e teoremas demonstrados nos capítulos anteriores e o conteúdo dos axiomas VI.1 a VI.4 apareceria como um teorema da nossa geometria. Vamos dar um idéia de como isto poderia ser feito.

Começamos observando que, em todo triângulo, o valor do produto do comprimento de um lado pela altura que lhe é correspondente, não depende da escolha do lado. Se usarmos a notação indicada na figura abaixo, o que estamos dizendo é que $ag = bh = ck$. Definimos, então a área de um triângulo como este produto, vezes uma constante universal L . Isto é, dado um triângulo ABC , definimos sua área como

$$\text{Área}(ABC) = L \cdot \overline{AB} \cdot h \quad (1)$$



onde h é o comprimento da altura do vértice C relativamente ao lado AB . Em seguida temos de mostrar que, se subdividirmos o triângulo ABC em um número finito de triângulos, e utilizarmos para cada um dos triângulos da subdivisão a fórmula acima, a soma de suas áreas será igual a área do triângulo original ABC . Esta demonstração não será apresentada aqui. O leitor interessado



poderá encontrá-la no livro "Geometria Elemental" de A.V. Pogorélov, Editora Mir. Mas se quiser tentar por si mesmo, deve iniciar com o caso mais simples em que a subdivisão foi feita como na figura anterior. Observe que, neste caso, há uma altura que é comum a todos os triângulos! Para o caso geral, se PQR for um triângulo da subdivisão, tente determinar uma fórmula para sua área em termos das áreas dos triângulos APQ , AQR e ARP .

O valor L que figura na fórmula (1) é ali colocado para permitir a adaptação daquela fórmula às diversas unidades de área.

Dada uma região poligonal, a coisa mais natural a fazer é definir sua área como a soma das áreas dos triângulos que a compõem. Observemos que uma mesma região poligonal pode ser subdividida em regiões triangulares de muitas maneiras diferentes. Assim, temos uma questão de consistência a ser resolvida. Para que possamos usar esta definição devemos verificar se o valor final da área de uma região poligonal é independente da particular subdivisão da mesma em triângulos. Suponhamos que uma região poligonal P tenha sido subdividida em triângulos T_1, T_2, \dots, T_n e depois em triângulos T'_1, T'_2, \dots, T'_m . Precisamos demonstrar que a soma das áreas dos triângulos, em ambos os casos, é a mesma. Os triângulos das duas subdivisões, considerados em conjunto, realizam uma subdivisão da região poligonal P em polígonos convexos, a saber: em triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Subdividimos, cada um deles, em triângulos. Teremos agora uma subdivisão $T''_1, T''_2, \dots, T''_p$ da região poligonal P com a propriedade de que qualquer triângulo, da primeira subdivisão ou da segunda subdivisão, é composto de triângulos da nova subdivisão. Como já vimos, a área de todo triângulo da primeira subdivisão de P é a soma das áreas dos triângulos que o compõem. Igualmente a área de todo triângulo da segunda subdivisão é a soma das áreas dos triângulos que o compõem. Por isto

$$\sum \text{Área}(T_i) = \sum \text{Área}(T''_j)$$

$$\sum \text{Área}(T'_k) = \sum \text{Área}(T''_j)$$

Portanto a soma das áreas dos triângulos de qualquer das partições

é a mesma. Isto conclui o nosso argumento.

Agora é fácil obter que a área de um retângulo $ABCD$ é igual a $2L \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD}$. Para isto basta subdividir o retângulo em dois triângulos retângulos através da diagonal AC .

É extremamente conveniente escolher o valor de L de modo que, a área de um quadrado de lado um, seja exatamente um. De acordo com a fórmula acima, basta tomar $L = 1/2$. Esta escolha transforma a equação (1) na fórmula usual da área de um triângulo!

podem encontrar-las rotacionando-as em torno de um eixo de simetria. A figura que resulta é chamada de figura obtida por rotação. A figura obtida por rotação é sempre congruente à figura original.

Coleção do PROFESSOR DE MATEMÁTICA
Sociedade Brasileira de Matemática

1. **Logarítmos** : Elon Lages Lima
2. **Análise Combinatória e Probabilidade** : Augusto C. Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez
3. **Medida e Forma em Geometria** : Elon Lages Lima
4. **Meu Professor de Matemática e outras Histórias** : Elon Lages Lima
5. **Coordenadas no Plano** : Elon Lages Lima
6. **Trigonometria, Números Complexos** : Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner (Notas Históricas de João Bosco Pitombeira)
7. **Coordenadas no Espaço** : Elon Lages Lima
8. **Progressões e Matemática Financeira** : Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner e Sheila C. Zani
9. **Construções Geométricas** : Eduardo Wagner (colaboração de José P. Q. Carneiro)
10. **Introdução à Geometria Espacial** : Paulo Cezar Pinto Carvalho
11. **Geometria Euclidiana Plana** : João Lucas Marques Barbosa
12. **Isometrias** : Elon Lages Lima
13. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 1**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado
14. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 2**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado
15. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado

Este livro foi escrito para servir de texto a uma disciplina de Geometria para alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Ele faz uma apresentação da Geometria Euclidiana Plana de um ponto de vista mais avançado que o que se deve utilizar no ensino de 1º e 2º graus. O objetivo é dar ao futuro professor uma visão mais ampla daquilo que ele vai ensinar. Em particular, o livro faz uma apresentação axiomática da Geometria, porém – é conveniente deixar bem claro – sem querer com isto sugerir que o futuro professor de 1º e 2º graus adote o mesmo tipo de apresentação quando estiver ensinando.

Uma apresentação axiomática da Geometria, além de ser longa e exigir tempo, só pode ser feita com proveito quando os alunos já tiverem adquirido bastante familiaridade com os fatos geométricos, condição indispensável para bem prepará-los a entender e apreciar o porquê da axiomatização.

ISBN 85-85818-02-6



9 788585 818029



Geometria Euclidiana Plana

João Lucas Marques Barbosa

