Integral Definida

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de Integral Indefinida

Nestes slides introduziremos o conceito de integral de Riemann e estudaremos algumas de suas propriedades. A integral tem muitas aplicações tanto na geometria (cálculo de áreas, comprimento de arco, etc.) como na física (cálculo de trabalho, de massa etc), como veremos.

Uma partição P de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Uma partição P de $[a, b]$ divide $[a, b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

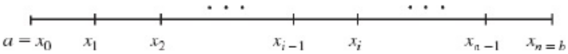

Figura 1: Partição P do intervalo $[a, b]$.

A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Assim:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \text{etc.} \tag{1}$$

Os números $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se amplitude da partição P e indica-se por *máx* Δx_i.

Soma de Riemann

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e
$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente.

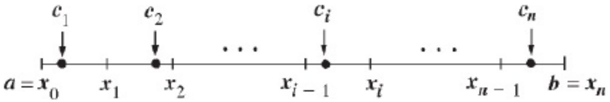

Figura 2: Partição P do intervalo $[a, b]$.

Pois bem, o número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 \ldots f(c_n)\Delta x_n \tag{2}$$

denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Observe que, se $f(c_i) > 0$, $f(c_i)\Delta x_i$ será então a área do retângulo R_i determinado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$; se $f(c_i) < 0$, a área de tal retângulo será $-f(c_i)\Delta x_i$.

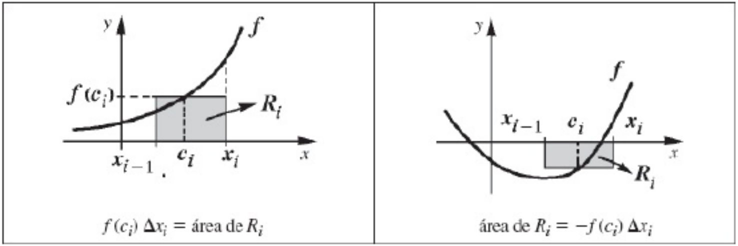

Figura 3: Interpretação geométrica da soma de Riemann.

Diferença entre áreas

Geometricamente, podemos então interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{3}$$

como a diferença entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x.

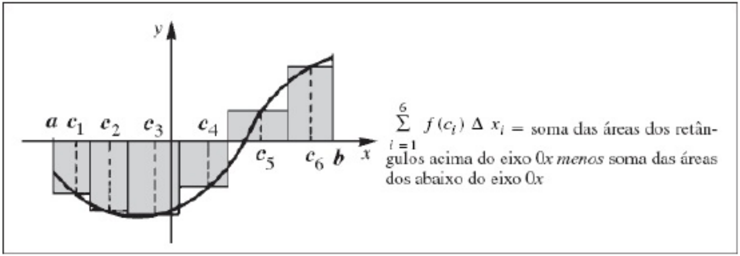

Figura 4: Interpretação geométrica da soma de Riemann.

Diferença $F(b) - F(a)$

Seja F uma função definida em $[a, b]$ e seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. O acréscimo $F(b) - F(a)$ que a F sofre quando se passa de $x = a$ para $x = b$ é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ para i variando de 1 a 4:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] \\ + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Isto é:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]\,. \tag{5}$$

Exemplo

Example

Sejam F e f definidas em $[a, b]$ e tais que $F' = f$ em $[a, b]$; assim F é uma primitiva de f em $[a, b]$. Seja a partição
$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$. Prove que escolhendo convenientemente $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tem-se

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i. \tag{6}$$

Suponhamos, no exemplo anterior, que f seja contínua em $[a, b]$ e que os Δx_i sejam suficientemente pequenos; assim, para qualquer escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, $f(c_i)$ deve diferir muito pouco de $f(\bar{c}_i)$. É razoável, então, que nestas condições $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ seja uma boa avaliação para o acréscimo $F(b) - F(a)$, isto é:

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{7}$$

É razoável, ainda, esperar que a aproximação acima será tanto melhor quanto menores forem os Δx_i. Veremos mais adiante que, no caso de f ser contínua em $[a, b]$,

$$F(b) - F(a) = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{8}$$

em que *máx* Δx_i indica o maior número do conjunto $\{\Delta x_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Interpretação cinemática

Observe que *máx* $\Delta x_i \to 0$ implica que todos os Δx_i tendem também a zero.
Vejamos uma versão cinemática do que dissemos anteriormente.
Consideremos uma partícula deslocando-se sobre o eixo $0x$ com função de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Observe que $x = x(t)$ é uma primitiva de $v = v(t)$. Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e suponhamos *máx* Δt_i suficientemente pequeno (o que implica que todos os Δt_i são suficientemente pequenos). Sendo c_i um instante qualquer entre t_{i-1} e t_i, a velocidade $v(c_i)$ é um valor aproximado para a velocidade média entre os instantes t_{i-1} e t_i:

$$v(c_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \text{ ou } \Delta x_i \approx v(c_i)\Delta t_i \tag{9}$$

(observe que, pelo TVM, existe um instante $\bar{c}_i$ entre t_{i-1} e t_i) tal que $\Delta x_i = v(\bar{c}_i)\Delta t_i$, onde Δx_i é o deslocamento da partícula entre os instantes t_{i-1} e t_i. Como a soma dos deslocamentos Δx_i, para i variando de 1 a n, é igual ao deslocamento $x(b) - x(b)$, resulta

$$x(b) - x(a) \approx \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i. \tag{10}$$

É razoável esperar que, à medida que as amplitudes Δt_i tendam a zero, a soma $\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ tende a $x(b) - x(a)$:

$$x(b) - x(a) = \lim_{máx\ \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i. \tag{11}$$

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando *máx* $\Delta x_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L \tag{12}$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L\right| < \epsilon \tag{13}$$

para toda partição P de $[a, b]$, com *máx* $\Delta x_i < \delta$.

Integral de Riemann

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{14}$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$. É comum referirmo-nos a $\int_a^b f(x)dx$ como integral definida de f em $[a, b]$.

Propriedades da integral

Theorem

Sejam f, g *integráveis em* $[a, b]$ *e* κ *uma constante. Então*

a) $f + g$ *é integrável em* $[a, b]$ *e* $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

b) κf *é integrável em* $[a, b]$ *e* $\int_a^b \kappa f(x)dx = \kappa \int_a^b f(x)dx.$

c) *Se* $f(x) \geq 0$ *em* $[a, b]$*, então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

d) *Se* $c \in]a, b[$ *e* f *é integrável em* $[a, c]$ *e em* $[c, b]$ *então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{15}$$

1^o Teorema fundamental do cálculo

De acordo com a definição de integral, se f for integrável em $[a, b]$, o valor do limite

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{16}$$

será sempre o mesmo, independentemente da escolha dos c_i, e igual a $\int_a^b f(x)dx$. Assim, se, para uma particular escolha dos c_i, tivermos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L \tag{17}$$

então teremos $L = \int_a^b f(x)dx$.

Suponhamos, agora, que f seja integrável em $[a, b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Já vimos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]. \tag{18}$$

Segue, então do TVM, que, para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i)\Delta x_i \tag{19}$$

ou

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i. \tag{20}$$

1^o teorema fundamental do cálculo

Se, para cada partição P de $[a, b]$, os $\bar{c}_i$ forem escolhidos como em (20), teremos

$$\lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i = F(b) - F(a) \tag{21}$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{22}$$

Fica provado assim o

Theorem

1^o teorema fundamental do cálculo Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{23}$$

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^2 x^2 dx$.

Example

Calcule $\int_{-1}^3 4dx$.

Example

Calcule $\int_0^2 \left(x^3 + 3x - 1\right) dx$.

Exemplos

Example

Calcule $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Example

Calcule $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

Example

Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx$.

Example

Calcule $\int_0^1 e^{-x}\,dx$.