Matrizes e sistemas lineares

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Equações lineares

Observe que um sistema linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As equações seguintes são lineares:

$$\begin{cases} x + 3y = y \\ \frac{1}{2}x - y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases} \tag{1}$$

As seguintes não são lineares.

$$\begin{cases} x + 3y^2 = 4 \\ \sin x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - xy = 5 \\ \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Sistema de equações lineares

Um conjunto finito de equações lineares é denominado um sistema de equações lineares ou, simplesmente, um sistema linear. As variáveis são denominadas incógnitas.

Um sistema linear arbitrário de m equações nas n incógnitas x_1, x_2, x_n pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{3}$$

Uma solução de um sistema nas n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma squência de n números $s_1, s_2, ..., s_n$ que fazem com que cada equação do sistema seja uma afirmação verdadeira.

Sistemas lineares em duas incógnitas

Os sistemas lineares em duas incógnitas aparecem relacionados com interseção de retas. Por exemplo, considere o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{4}$$

em que os gráficos das equações são retas no plano xy. Cada solução (x, y) desse sistema corresponde a um ponto de interseção das retas, de modo que há três possibilidades.

Interpretação geométrica da solução de sistemas em duas incógnitas

- As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não há interseção e, consequentemente, não existe solução.
- As retas podem intersectar em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
- As retas podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de pontos de interseção (os pontos da reta comum) e, consequentemente, uma infinidade de soluções.

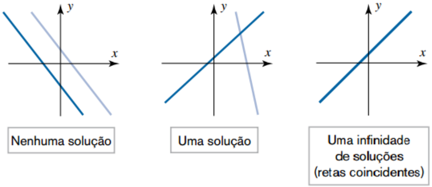

Figura 1: Interpretação geométrica da solução.

O mesmo vale para um sistema linear de três equações em três incónitas em que os gráficos das equações são planos.

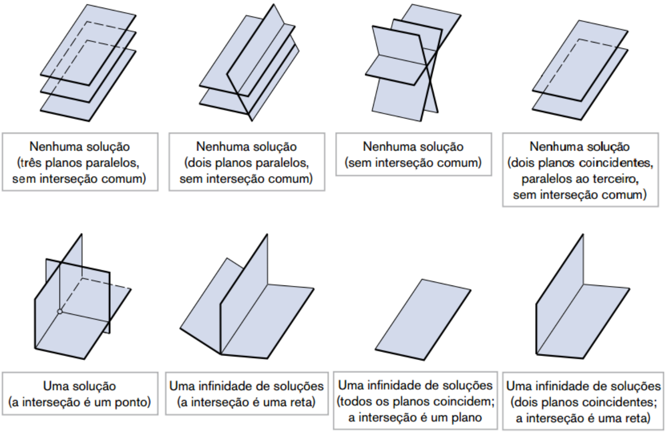

Figura 2: Interpretação geométrica da solução.

Sistemas consistentes e inconsistentes

Em geral, dizemos que um sistema linear é consistente se possuir pelo menos uma solução e inconsistente se não tiver solução. Assim, um sistema linear consistente de duas equações em duas incógnitas tem uma solução ou uma infinidade de soluções, não havendo outra possibilidade.

Definition

Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

Exemplos

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned} \tag{5}$$

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned} \tag{6}$$

Exemplos

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned} \tag{7}$$

Example

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned} \tag{8}$$

Matriz aumentada

À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução. As contas que precisamos fazer podem ficar mais tratáveis simplificando a notação e padronizando os procedimentos. Por exemplo, mantendo na memória a localização das somas, das variáveis e das igualdades no sistema linear

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
\tag{9}
$$

podemos abreviar a escrita do sistema escrevendo apenas a tabela retangular de números

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} & b_2\\
\vdots & & \\
a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
\tag{10}
$$

Operações elementares com linhas

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. As operações típicas são as seguintes.

1. Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas equações entre si.
3. Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Essas operações são denominadas operações elementares com linhas de uma matriz.

Exemplo

Example

Resolva o sistema linear abaixo com o auxílio da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Revisão

- Equação linear
- Equação linear homogênea
- Sistema de equações lineares
- Ênupla ordenada
- Sistema linear consistente
- Sistem linear inconsistente
- Parâmetro
- Equações paramétricas
- Matriz aumentada
- Operações elementares com linhas

Forma escalonada reduzida por linhas

Considere o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

a partir da qual ficou evidente a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Isso é um eemplo de uma matriz que está em forma escalonada reduzida por linhas.

Forma escalonada reduzida por linhas - definição

Para ser dessa forma, uma matriz deve ter as propriedades seguintes;

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um pivô.
- Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.
- Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em forma escalonada por linhas, ou simplesmente, em forma escalonada. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhs necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

Exemplos de formas escalonada reduzida por linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Example

Conclua que o sistema a seguir, dado por sua matriz aumentada, tem solução única

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Example

Resolva o sistema a seguir, dado por meio de sua matriz aumentada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Definição de solução geral

Definition

Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma solução geral do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Métodos de eliminação

Agora, daremos um procedimento de eliminação passo a passo, que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada reduzida. À medida que enunciamos cada passo, ilustramos a ideia reduzindo a matriz seguinte à forma escalonada por linhas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Método de eliminação - Passos 1 e 2

Passo 1. Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda

Passo 2. Permutamos a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

Figura 3: Passos 1 e 2.

Método de eliminação - Passos 3 e 4

Passo 3. Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é a, multiplicamos a primeira linha inteira por $1/a$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Passo 4. Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

Figura 4: Passos 3 e 4.

Método de eliminação - Passo 5

Passo 5. Agora escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que *toda* a matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por $\frac{1}{2}$ para introduzir um pivô.

Figura 5: Passo 5.

Método de eliminação - Passo 5 (Continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← −5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← A linha superior da submatriz foi tratada e retornamos ao Passo 1.

Coluna não nula mais à esquerda da nova submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um pivô.

Agora *toda* a matriz está em forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas, precisamos de mais um passo.

Figura 6: Passo 5 (continuação).

Método de eliminação - Passo 6

Passo 6. Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

$\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

A última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas.

Figura 7: Passo 6.

Método de Gauss-Jordan

O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado eliminação de Gauss-Jordan. Esse algoritmo consiste em duas partes: uma fase para a frente, ou direita, na qual os zeros são introduzidos abaixo dos pivôs; e uma fase para trás, ou inversa, em que os zeros são introduzidos acima dos pivôs. Se usarmos somente a fase direta, então o procedimento, denominado eliminação gaussiana, produz uma forma escalonada por linhas. Por exemplo, nos cálculos precedentes, obtivemos uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas no final do passo 5.

Exemplo

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \tag{18}$$

Sistema homogêneo

Um sistema de equações lineares é dito homogêneo se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Cada sistema de equações lineares homogêneo é consistente, pois todos esses istemas têm $x_1 =, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ como uma solução. Essa solução é denominada solução trivial ou solução nula; quaisquer outras solução, se as houver, são ditas não triviais.

Sistema linear homogêneo

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só há duas possibilidades para suas soluções

- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem.

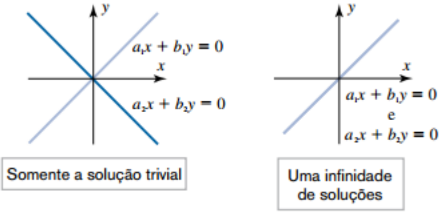

Figura 8: Solução trivial passa pela origem.

Comentários sobre o método de Gauss-Jordan

A eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida por linhas) é um procedimento útil com sistemas lineares pequenos que são resolvidos a mão (como a maioria dos sistemas deste texto). Contudo, com sistemas lineares grandes, que exigem utilização de computadores, em geral é mais eficiente usar a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas), seguida por uma técnica conhecida por substituição inversa, ou retrossubstituição, para complementar o processo de resolução do sistema. O próximo exemplo ilustra essa ideia.

Example

Resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Eliminação de Gauss e Gauss-Jordan

Muitas vezes, há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática, e as eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan são bons exemplos disso. O problema é que os computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de arredondamento; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos instáveis. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondadamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direita, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstituição