Retas e Planos

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de retas e planos

- Equações da reta
- Equações do plano
- Ângulos e distâncias
- Posições relativas de retas e planos

Equação Vetorial da Reta

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 1, próx. slide), isto é,

$$\vec{AP} = t\vec{v} \tag{1}$$

para algum real t. De (1), vem

$$P - A = t\vec{v} \Rightarrow P = A + t\vec{v} \tag{2}$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c). \tag{3}$$

Equação vetorial da reta

Qualquer uma das e quações (1), (2) e (3) é denominada **equação vetorial de** r. O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta r e t é denominado **parâmetro**.

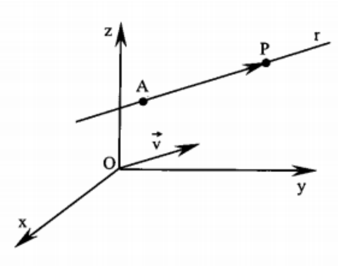

Figura 1: Reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

Exemplo

Example

Determine a equação vetorial da reta r que passa por $A(1, -1, 4)$ e tem direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$.

a) Vimos que para cada real t corresponde um ponto $P \in r$. recíproca também é verdadeira, isto é, a cada $P \in r$ corresponde um número real t.

b) Existem infinitas equações vetorial de uma mesma reta r, pois basta tomar outro ponto de r ou qualquer vetor não-nulo que seja múltiplo de $\vec{v}$.

Equações paramétricas da reta

Da equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \tag{4}$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_1 + at.y_1 + bt, z_1 + ct), \tag{5}$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct. \end{cases} \tag{6}$$

As equações (6) são chamadas **equações paramétricas** da reta.

Exemplos

Example

Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$.

Example

Dado o ponto $A(2, 3, -4)$ e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.

d) Verificar se os pontos $D(4, -1, 2)$ e $E(5, -4, 3)$ pertencem a r.

e) Determinar para que valores de m e n o ponto $F(m, 5, n)$ pertence a r.

f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \vec{AB}$.

Example

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por $A(3, -1, -2)$ e $B(1, 2, 4)$.

Consideremos uma reta r e nela o segmento AB (origem A e extremidade B) (Figura 2).
As equações paramétricas do segmento AB são as mesmas da reta r, porém, com $0 \leq t \leq 1$.

Figura 2: Equação de um segmento de reta.

Equações simétricas da reta

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \quad y = y_1 + bt \quad z = z_1 + ct \tag{7}$$

supondo $abc \neq 0$, vem

$$t = \frac{x - x_1}{a} \quad t = \frac{y - y_1}{b} \quad t = \frac{z - z_1}{c} \tag{8}$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t, obtemos as igualdades

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{9}$$

As equações (9) são denominadas **equações simétricas** da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

Equações reduzidas da reta

Em vez de realizar um tratamento genérico, tomaremos um caso particular. Seja a reta r definida pelo ponto $A(2, -4, -3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e expressa pelas equações simétricas

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}. \tag{10}$$

A partir destas equações pode-se expressar duas variáveis em função da terceira. Isolando, primeiramente, as variáveis y e z e expressando-as em função de x, obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} & \frac{x-2}{1} &= \frac{z+3}{-3} \\ &1(y+4) = 2(x-2) & 1(z+3) &= -3(x-2) \\ &y+4 = 2x-4 & z+3 &= -3x+6 \\ &y = 2x-8 & z &= -3x+3 \end{aligned} \tag{11}$$

Estas duas últimas equações são equações reduzidas da reta r, na variável x.

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Neste caso, uma das componentes do vetor é nula.
A Figura 3 mostra a reta r ($r /\!/ xOy$) que passa pelo ponto $A(-1, 2, 4)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 3, 0)$ (a 3^a componente é nula porque $\vec{v} /\!/ xOy$).

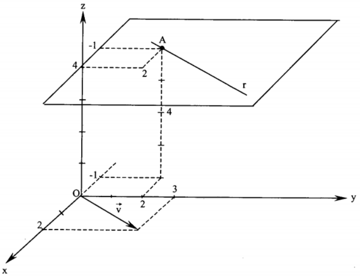

Figura 3: Reta r paralela ao plano xOy.

Retas paralelas aos eixos coordenados

Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i} = (1,0,0)$ ou a $\vec{j} = (0,1,0)$ ou $\kappa = (0,0,1)$. Neste caso, **duas das componentes do vetor são nulas**.

Example

Seja a reta r que passa por $A(2,3,4)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (0,0,3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo Oz (Figura 4).

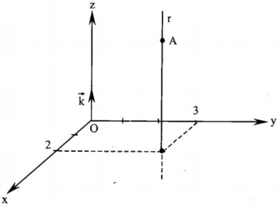

Figura 4: Reta paralela ao eixo Oz.

Observações

Para o caso particular da reta ser paralela a um eixo coordenado, costuma-se fazer uma simplificação, expressando as equações só pelas constantes. Para o caso particular acima, diz-se que as equações de r são

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \tag{12}$$

subentendendo-se z variável livre que assume todos os valores reais. Na verdade, todos os pontos de r são do tipo $(2, 3, z)$ e as coordenadas constantes identificam perfeitamente a reta.

Ângulo de duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente (Figura 5).

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 . \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

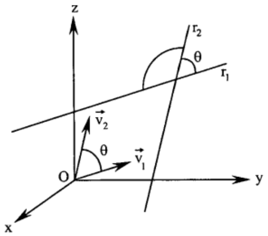

Figura 5: Ângulo de duas retas.

Exemplo

Example

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1 : \{x = 3 + t$$

y=t
z=-1-2t $\quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} (14)$

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Então,

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0 \qquad (15)$$

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 6, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Neste caso, diz-se que são **perpendiculares**.

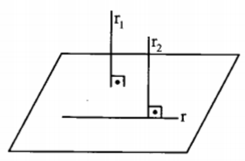

Figura 6: Retas r_1 e r_2 orgotonais a r.

Exemplo

Example

Verifique que as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

$$r_1 : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \tag{16}$$

Reta ortogonal a duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não-paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Toda reta r ao mesmo tempo ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v}.\vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}.\vec{v}_2 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Em vez de tomarmos um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ como uma solução particular do sistema poderíamos utilizar o produto vetorial, isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{18}$$

Definido um vetor diretor, a reta r estará determinada quando for conhecido um de seus pontos.

Exemplo

Example

Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3,4,-1)$ e é ortogonal às retas

$$r_1 : (x,y,z) = (0,0,1) + t(2,3,-4) \ \text{ e } \ r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \tag{19}$$

Interseção de duas retas

Example

Verificar se as retas r_1 e r_2 são concorrentes e, em caso afirmativo, determinar o ponto de interseção:

1) $r_1 : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

2) $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

3) $r_1 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 2x - 5 \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{4}$