3.3 Método de Newton

O método de Newton é uma das técnicas mais populares para se determinar raízes de equações não lineares. Existem várias maneiras de deduzir o método de Newton, a que apresentaremos aqui é baseada no método de iteração linear. Assim, para descrever tal método, consideremos a equação (3.2), isto é:

$$\psi(x) = x + A(x)f(x) \ , \quad \text{com} \quad f'(x) \neq 0 \ , \tag{3.6}$$

onde a função $A(x)$ deve ser escolhida de tal forma que $A(\bar{x}) \neq 0$.

Vimos pelo Teorema 3.4 que temos garantia de convergência se $max|\psi'(x)| < 1$ para $x \in I$. Assim se escolhermos $A(x)$ tal que $\psi'(\bar{x}) = 0$, teremos que para $x \in I$, (I suficientemente pequeno), $\max|\psi'(x)| < 1$, garantindo então a convergência do método.

Derivando (3.6) em relação a x, obtemos:

$$\psi'(x) \ = \ 1 \ + \ A'(x)f(x) \ + \ A(x)f'(x).$$

Fazendo $x = \bar{x}$, segue que:

$$\psi'(\bar{x}) \ = \ 1 \ + \ A(\bar{x})f'(\bar{x}) \ , \quad \text{pois} \quad f(\bar{x}) = 0 \ ,$$

e colocando:

$$\psi'(\bar{x}) \ = \ 0, \quad \text{teremos} \quad A(\bar{x}) \ = \ - \ \frac{1}{f'(\bar{x})} \neq 0 \quad \text{desde que} \quad f'(\bar{x}) \neq 0 \ .$$

Tomando então: $A(x) \ = \ - \ \dfrac{1}{f'(x)}$, obtemos $\psi(x) \ = \ x \ - \ \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ e o processo iterativo então definido por:

$$x_{k+1} \ = \ x_k \ - \ \frac{f\,(x_k)}{f'\,(x_k)} \tag{3.7}$$

é chamado **Método de Newton**, que converge sempre que $|x_0 - \bar{x}|$ for suficientemente pequeno.

Uma interpretação geométrica do método de Newton é dada na Figura 3.9.

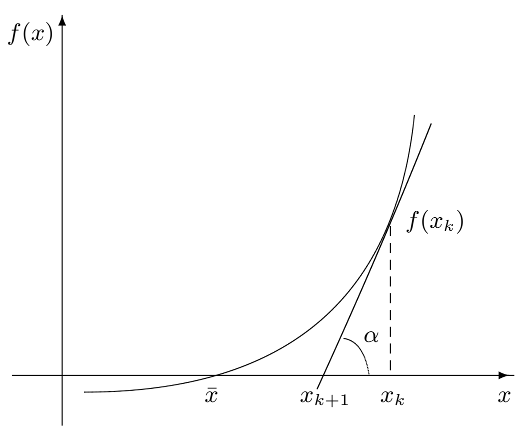

Figura 3.9

Dado x_k, o valor x_{k+1} pode ser obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de interseção da tangente com o eixo dos x determina x_{k+1}.

De fato, pela lei da tangente:

$$f'(x_k) = tg\ \alpha = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

$$\Rightarrow x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} .$$

Devido à sua interpretação geométrica o método de Newton é também chamado de **Método das Tangentes**.

Exemplo 3.9 - *Determinar, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação:*

$$4\ cos\ x - e^x = 0 ,$$

com erro inferior a 10^{-2}.

Solução: O processo mais simples e eficaz para se obter um valor inicial é o método gráfico. Com esse objetivo dividimos a equação inicial $f(x) = 0$ em outras duas equações mais simples, que chamaremos de y_1 e y_2. Note que o rearranjo para obter essas duas equações deve apenas levar em consideração a igualdade $f(x) = 0$.

Tomando: $y_1 = 4\ cos\ x$, $y_2 = e^x$, observe que poderíamos ter tomado $y_1 = cos\ x$ e $y_2 = \frac{e^x}{4}$, e colocando as duas funções no mesmo gráfico, obtemos a Figura 3.10.

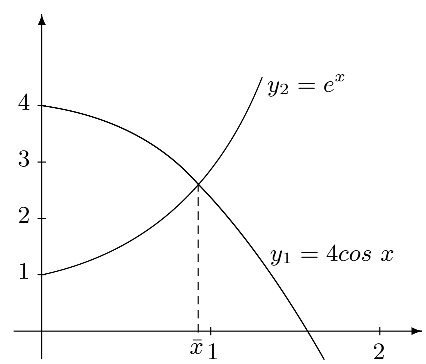

Figura 3.10

Como já dissemos anteriormente, o ponto de interseção das duas curvas é a solução $\bar{x}$ procurada. Analisando a Figura 3.10, vemos que $\bar{x}$ está nas vizinhanças do ponto 1.0 e portanto vamos tomar $x_0 = 1.0$. Por outro lado, da equação original, obtemos:

$$f(x_k) = 4\ cos\ x_k - e^{x_k} ;$$

$$f'(x_k) = -4\ sen\ x_k - e^{x_k} .$$

Para efetuar os cálculos seguintes, observe se sua calculadora está em radianos, pois a função dada envolve operações trigonométricas. Além disso, como queremos o resultado com erro inferior a 10^{-2} basta efetuar os cálculos com três casas decimais. Assim:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(1.0) = 4\ cos\ (1.0) - e^{1.0} \\ &= 4 \times (0.540) - 2.718 = -0.557 ; \\ f'(x_0) &= f'(1.0) = -4\ sen\ (1.0) - e^{1.0} \\ &= -4 \times (0.841) - 2.718 = -6.084 ; \end{aligned}$$

Usando (3.7), obtemos:

$$x_1 \; = \; 1.0 \; - \; \frac{f(1.0)}{f'(1.0)} \Rightarrow \; x_1 \; = \; 1.0 \; - \; \frac{(-0.557)}{(-6.048)} \; \Rightarrow \; x_1 \; = \; 0.908 \; .$$

Calculando o erro relativo, temos:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| \; \simeq \; 0.101 \; .$$

que é maior que 10^{-2}. Devemos fazer uma nova iteração, para tanto calculemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(0.908) \; = \; 4 \; cos \; (0.908) - e^{0.908} \\ &= 4 \; \times \; (0.615) - 2.479 \; = \; -0.019 \; , \\ f'(x_1) &= f'(0.908) \; = \; -4 \; sen \; (0.908) - e^{0.908} \\ &= -4 \; \times \; (0.788) - 2.479 \; = \; -5.631 \; . \end{aligned}$$

Novamente, usando (3.7), obtemos:

$$x_2 \; = \; 0.908 \; - \; \frac{f(0.908)}{f'(0.908)} \; \Rightarrow \; x_2 \; = \; 0.908 \; - \; \frac{(-0.019)}{(-5.631)} \; \Rightarrow \; x_2 \; = \; 0.905 \; .$$

Calculando o erro relativo, segue que:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \; \simeq \; 0.0033 \; ,$$

ou seja a aproximação $x_2 = 0.905$ possui duas casas decimais corretas. De fato, a solução exata é 0.9047882. Logo, a menor raiz positiva da equação $4 \; cos \; x - e^x = 0$, com $\epsilon < 0.01$, é $\bar{x} = 0.905$. Observe, da Figura 3.10, que a raiz encontrada é a única raiz positiva da equação dada.

Ordem de Convergência

Analisemos agora a convergência do método de Newton.

Teorema 3.6 - *Se f, f', f'' são contínuas em I cujo centro $\bar{x}$ é solução de $f(x) = 0$ e se $f'(\bar{x}) \neq 0$ então a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, ou seja, $p = 2$.*

Prova: Subtraindo a equação $\bar{x} = \psi(\bar{x})$ de (3.7), obtemos:

$$x_{k+1} \; - \; \bar{x} \; = \; \psi(x_k) \; - \; \psi(\bar{x}) \text{ onde } \psi(x) \; = \; x \; - \; \frac{f(x)}{f'(x)} \; .$$

Desenvolvendo $\psi(x_k)$ em série de Taylor em torno do ponto $\bar{x}$, obtemos:

$$x_{k+1} \; - \; \bar{x} \; = \; \psi(\bar{x}) \; + \; (x_k - \bar{x}) \; \psi'(\bar{x}) \; + \; \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2!} \psi''(\xi_k) \; - \; \psi(\bar{x}) \; .$$

Agora, no método de Newton, $\psi'(\bar{x}) = 0$, (lembre-se que esta condição foi imposta para a determinação de $A(x)$), e portanto:

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} \; = \; \frac{\psi''(\xi_k)}{2!} \; \leq \; C.$$

Portanto a ordem de convergência é $p = 2$.

Assim a vantagem do método de Newton é que sua convergência é quadrática, isto significa que a quantidade de dígitos significativos corretos duplica à medida que os valores da sequência se aproxima de $\bar{x}$. Note que essa correção não acontece em relação às primeiras iterações realizadas. A desvantagem do método de Newton está no fato de termos que calcular a derivada da função e em cada iteração calcular o seu valor numérico, o que pode ser muito caro computacionalmente. Além disso a função pode ser não diferenciável em alguns pontos do domínio.

Exercícios

3.8 - *Considere a equação dada no exemplo 3.9. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas. Usando (3.5) confirme que a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, isto é, $p = 2$.*

3.9 - *Usando o método de Newton, com erro inferior a 10^{-2}, determinar uma raiz das seguintes equações:*

a) $2\,x = tg\ x$,

b) $5\,x^3 + x^2 - 12\,x + 4 = 0$,

c) $sen\ x - e^x = 0$,

d) $x^4 - 8 = 0$.

3.10 - *Considere a fórmula para determinar a raiz cúbica de Q:*

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left[2x_k + \frac{Q}{x_k^2}\right], \quad k = 0, 1, \ldots .$$

a) *Mostre que a fórmula acima é um caso especial de iteração de Newton.*

b) *Usando a fórmula dada no item a) calcule $\sqrt[3]{4}$ com precisão de 10^{-2}, determinando o valor inicial através de gráfico.*

3.11 - *Usando o método de Newton, determine o valor de π com 3 algarismos significativos corretos. Use como valor inicial $x_0 = 3$.*

3.4 Método das Secantes

Como foi observado anteriormente, uma séria desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$, bem como calcular seu valor numérico, a cada passo. Há várias maneiras de modificar o método de Newton a fim de eliminar essa desvantagem. Uma modificação consiste em substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \tag{3.8}$$

onde x_k, x_{k-1} são duas aproximações quaisquer para a raiz $\bar{x}$. Note que $f'(x_k)$ é o limite da relação (3.8) para $x_{k-1} \rightarrow x_k$.