Capítulo 2

Matemática Elementar

Conjuntos Numéricos e Potenciação

23 de abril de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação
Conjuntos Numéricos
Atividade Online
Operações
Potenciação
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

Apresentação da Aula

Motivação

Os números têm grande importância na matemática; eles podem servir para contar ou medir coisas. Conhecer os conjuntos numéricos e suas operações é indispensável para trabalhar corretamente com os números.

Naturais

Definição 1

Ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números naturais.

- Denotamos $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ por $\mathbb{N}^*$.
- Usamos o conjunto dos números naturais para contar coisas, como casas, animais, etc.

Inteiros

Definição 2

Ao conjunto
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números inteiros.

Notação

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (Inteiros não negativos);
$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ (Inteiros positivos);
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0\}$ (Inteiros não positivos);
$\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$ (Inteiros negativos).

Racionais

Definição 3

Ao conjunto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$ damos o nome de conjunto dos números racionais.

A representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica (infinita).

Exercício

Reescreva os números $0,6$; $1,37$; $0,222\ldots$; $0,313131\ldots$ e $1,123123123\ldots$ em forma de fração irredutível, ou seja, já simplificada.

Irracionais

Definição 4

O conjunto dos números irracionais é constituído por todos os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 5

$\sqrt{2}$, e e π são números irracionais. Provemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Você sabia que existem infinitos “maiores” que outros? Qual conjunto você diria que tem mais elementos: racionais ou irracionais?

Problema

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:
-Sinto muito, mas não há vagas.
Ouvindo isto, o gerente interveio:
-Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.
E ordena:
Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n + 1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado. Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. Como deve proceder a recepcionista para acomodar todos?
Horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Como proceder para acomodá-los?

Atividade Online

Atividade 02 – Classifique números: racionais e irracionais

Atividade 03 – Expressões racionais versus irracionais

Veja o desempenho na Missão Álgebra I - Números Racionais e Irracionais

Definição 6

À reunião de $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais, nomeamos de conjunto dos números reais. Denotamos por $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \; ; \; x \text{ é irracional}\}$;
- Usamos os números reais para medir algo. A cada número real está associado um ponto na reta graduada e vice-versa.
- Entre dois números reais distintos sempre há pelo menos um número racional e um irracional. `Este vídeo` do Khan Academy mostra que entre dois racionais distintos sempre há pelo menos um número irracional.
- A igualdade $0,999\cdots = 1$ é verdadeira?

Definição 7

Chamamos $i = \sqrt{-1}$ de número imaginário, e ao conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ damos o nome de conjunto dos números complexos.

Seja $a + bi \in \mathbb{C}$. Nomeamos o número $a - bi$ de conjugado de $a + bi$.

Temos a seguinte cadeia de inclusões próprias: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Operações

Definimos duas operações básicas com os elementos dos conjuntos numéricos: a adição e a multiplicação. A subtração e a divisão provêm da adição e da multiplicação, respectivamente.

- Adição
  - Subtração: é a soma de números negativos;
- Multiplicação
  - Divisão: é a multiplicação de números da forma $\frac{1}{q}$.

Você está bem treinado nas operações com frações? Dê uma treinada `aqui` no Khan Academy!

Potenciação

Definição 8

A potência $n \in \mathbb{N}^*$ de um número real a é definida como sendo a multiplicação de a por ele mesmo n vezes, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Definição 9

Quando $a \neq 0$, $a^0 = 1$. 0^0 é uma indeterminação;
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, para $n > 0$.

É importante ressaltar que é comum definir $0^0 = 1$ dependendo da abordagem que se quer com as potências. Saiba mais `aqui`.

Proposição 10 (Propriedades)

Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{R}$ a menos que se diga o contrário.

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$;

iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

iv. $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \ldots m}^{n \text{ vezes}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

v. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

vi. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

vii. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \neq 0$.

Observação 1

Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que $\sqrt{a^2} = |a|$. Mais geralmente, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par.
É errado dizer que $\sqrt{4} = \pm 2$. O correto é $\sqrt{4} = 2$, mesmo que escrevas $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2}$.
Tal erro é comum, e o fator de confusão é que responder o conjunto solução da equação $x^2 = 4$ não é equivalente a responder qual a raiz de 4, e sim responder quais números que elevados ao quadrado são iguais a 4.

Atividade Online

Atividade 04 – Propriedades da potenciação (expoentes racionais)
Atividade 05 – Simplifique raízes quadradas (variáveis)
Atividade 06 – Simplifique expressões de raiz quadrada
Veja o desempenho na Missão Álgebra I - Expressões com expoentes fracionários e radicais

Exercícios

1. Faça os testes do Khan Academy do assunto `Frações`. Ao final, revise os assuntos que você teve problema.
2. Faça o estudo completo (vídeos e exercícios) no Khan Academy do `assunto` Números racionais e irracionais.
3. Faça o estudo completo (vídeos e exercícios) no Khan Academy do `conteúdo` Expressões com expoentes fracionários e radicais.

Bibliografia

[1] MEDEIROS, Valéria Z; CALDEIRA, André M; SILVA, Luiza M O; MACHADO, Maria A S.
Pré-Cálculo.
2. ed. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2009.

[2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.