Matrizes e sistemas lineares

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de matrizes e sistemas lineares

Equações lineares

Observe que um sistema linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As equações seguintes são lineares:

$$\begin{cases} x + 3y = y \\ \frac{1}{2}x - y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases} \tag{1}$$

As seguintes não são lineares.

$$\begin{cases} x + 3y^2 = 4 \\ \sin x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - xy = 5 \\ \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Um conjunto finito de equações lineares é denominado um sistema de equações lineares ou, simplesmente, um sistema linear. As variáveis são denominadas incógnitas.

Um sistema linear arbitrário de m equações nas n incógnitas x_1, x_2, x_n pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Uma solução de um sistema nas n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma squência de n números $s_1, s_2, \dots, s_n$ que fazem com que cada equação do sistema seja uma afirmação verdadeira.

Sistemas lineares em duas incógnitas

Os sistemas lineares em duas incógnitas aparecem relacionados com interseção de retas. Por exemplo, considere o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{4}$$

em que os gráficos das equações são retas no plano xy. Cada solução (x, y) desse sistema corresponde a um ponto de interseção das retas, de modo que há três possibilidades.

Interpretação geométrica da solução de sistemas em duas incógnitas

- As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não há interseção e, consequentemente, não existe solução.
- As retas podem intersectar em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
- As retas podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de pontos de interseção (os pontos da reta comum) e, consequentemente, uma infinidade de soluções.

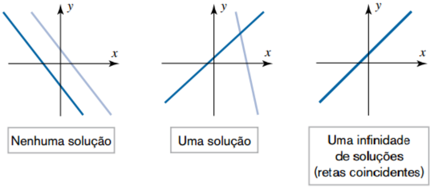

Figura 1: Interpretação geométrica da solução.

Interpretação geométrica para sistemas de três incógnitas

O mesmo vale para um sistema linear de três equações em três incónitas em que os gráficos das equações são planos.

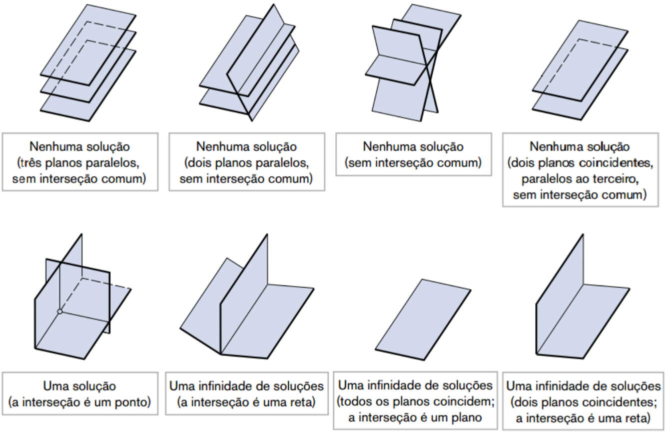

Figura 2: Interpretação geométrica da solução.

Em geral, dizemos que um sistema linear é consistente se possuir pelo menos uma solução e inconsistente se não tiver solução. Assim, um sistema linear consistente de duas equações em duas incógnitas tem uma solução ou uma infinidade de soluções, não havendo outra possibilidade.

Definition

Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

Exemplos

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned} \tag{5}$$

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned} \tag{6}$$

Exemplos

Example

Resolva o sistema linear e interprete geometricamente

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned} \tag{7}$$

Example

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned} \tag{8}$$

Matriz aumentada

À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução. As contas que precisamos fazer podem ficar mais tratáveis simplificando a notação e padronizando os procedimentos. Por exemplo, mantendo na memória a localização das somas, das variáveis e das igualdades no sistema linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{9}$$

podemos abreviar a escrita do sistema escrevendo apenas a tabela retangular de números

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}...a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{10}$$

Operações elementares com linhas

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. As operações típicas são as seguintes.

1. Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas equações entre si.
3. Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Essas operações são denominadas operações elementares com linhas de uma matriz.

Exemplo

Example

Resolva o sistema linear abaixo com o auxílio da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Revisão

- Equação linear
- Equação linear homogênea
- Sistema de equações lineares
- Ênupla ordenada
- Sistema linear consistente
- Sistem linear inconsistente
- Parâmetro
- Equações paramétricas
- Matriz aumentada
- Operações elementares com linhas

Forma escalonada reduzida por linhas

Considere o seguinte sistema nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

a partir da qual ficou evidente a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Isso é um eemplo de uma matriz que está em forma escalonada reduzida por linhas.

Forma escalonada reduzida por linhas - definição

Para ser dessa forma, uma matriz deve ter as propriedades seguintes;

- Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um pivô.
- Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.
- Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em forma escalonada por linhas, ou simplesmente, em forma escalonada. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhs necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

Exemplos de formas escalonada reduzida por linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Exemplos

Example

Conclua que o sistema a seguir, dado por sua matriz aumentada, tem solução única

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Example

Resolva o sistema a seguir, dado por meio de sua matriz aumentada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Definição de solução geral

Definition

Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma solução geral do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Agora, daremos um procedimento de eliminação passo a passo, que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada reduzida. À medida que enunciamos cada passo, ilustramos a ideia reduzindo a matriz seguinte à forma escalonada por linhas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Método de eliminação - Passos 1 e 2

Passo 1. Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda

Passo 2. Permutamos a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

Figura 3: Passos 1 e 2.

Método de eliminação - Passos 3 e 4

Passo 3. Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é a, multiplicamos a primeira linha inteira por $1/a$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Passo 4. Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

Figura 4: Passos 3 e 4.

Método de eliminação - Passo 5

Passo 5. Agora escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que *toda* a matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por $\frac{1}{2}$ para introduzir um pivô.

Figura 5: Passo 5.

Método de eliminação - Passo 5 (Continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow$ -5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow$ A linha superior da submatriz foi tratada e retornamos ao Passo 1.

Coluna não nula mais à esquerda da nova submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow$ A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um pivô.

Agora *toda* a matriz está em forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas, precisamos de mais um passo.

Figura 6: Passo 5 (continuação).

Método de eliminação - Passo 6

Passo 6. Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

$\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

A última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas.

Figura 7: Passo 6.

Método de Gauss-Jordan

O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado eliminação de Gauss-Jordan. Esse algoritmo consiste em duas partes: uma fase para a frente, ou direita, na qual os zeros são introduzidos abaixo dos pivôs; e uma fase para trás, ou inversa, em que os zeros são introduzidos acima dos pivôs. Se usarmos somente a fase direta, então o procedimento, denominado eliminação gaussiana, produz uma forma escalonada por linhas. Por exemplo, nos cálculos precedentes, obtivemos uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas no final do passo 5.

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Sistema homogêneo

Um sistema de equações lineares é dito homogêneo se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Cada sistema de equações lineares homogêneo é consistente, pois todos esses istemas têm $x_1 =, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ como uma solução. Essa solução é denominada solução trivial ou solução nula; quaisquer outras solução, se as houver, são ditas não triviais.

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só há duas possibilidades para suas soluções

- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem.

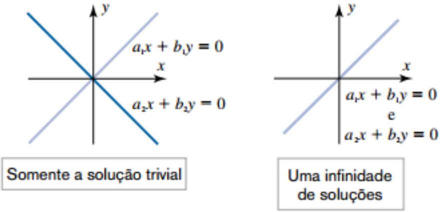

Figura 8: Solução trivial passa pela origem.

Comentários sobre o método de Gauss-Jordan

A eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida por linhas) é um procedimento útil com sistemas lineares pequenos que são resolvidos a mão (como a maioria dos sistemas deste texto). Contudo, com sistemas lineares grandes, que exigem utilização de computadores, em geral é mais eficiente usar a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas), seguida por uma técnica conhecida por substituição inversa, ou retrossubstituição, para complementar o processo de resolução do sistema. O próximo exemplo ilustra essa ideia.

Eliminação gaussiana e retrosubstituição

Example

Resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Eliminação de Gauss e Gauss-Jordan

Muitas vezes, há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática, e as eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan são bons exemplos disso. O problema é que os computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de arredondamento; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos instáveis. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondadamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direita, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstituição

Definição de matriz

Definition

Uma matriz é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as entradas da matriz.

Example

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \tag{21}$$

O tamanho de uma matriz é descrito em termos do número de linhas e de colunas que ela contém.

Igualdade de matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Se $x = 5$, então $A = B$, mas para todos os outros valores de x, as matrizes A e B não são iguais, pois nem todas as suas entradas coincidem.

Adição e subtração

Definition

Se A e B são matrizes de mesmo tamanho, então a soma $A + B$ é a matriz obtida somando as entradas de B às entradas correspondentes de A, e a diferença $A - B$ é a matriz obtida subtraindo as entradas de B das entradas correspondentes de A. Matrizes de tamanhos distintos não podem ser somadas ou subtraídas.

Exemplo

Example

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Assim, calcule $A + B$, $A - B$, $B + C$ e $B - C$.

Multiplos escalares

Definition

Se A for uma matriz e c um escalar, então o produto cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por c. Dizemos que a matriz cA é um múltiplo escalar de A.

Exemplo

Example

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Calcule $2A$, $(-1)B$ e $\frac{1}{3}C$.

Método de Jacobi-Richardson

O material deste método está postado no repositório ensino-imd.github.io

Aplicações de sistemas lineares

Nesta aula, discutiremos resumidamente algumas aplicações de sistemas lineares. Essa é apenas uma pequena amostragem da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais é aplicável nosso estudo de sistemas lineares.

Conceito de rede

O conceito de rede aparece numa variedade de aplicações. Em termos gerais, uma rede é um conjunto de **ramos** através dos quais "flui" algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de uma cidade pelas quais fluem veículos, ou conexões financeiras pelas quais fluid dinheiro, para citar apenas alguns.

Os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados **nós** ou **vértices**, nos quais o fluixo divide. Por exemplo, numa rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou mais fios se juntam; na rede do trânsito, eles ocorrem em cruzamentos de ruas; e numa rede financeira, eles ocorrem em centros bancários, nos quais o dinheiro é distribuído a indivíduos ou outras instituições.

Conservação do fluxo

No estudo de redes, existe, em geral, alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio flui ao longo do ramo. Por exemplo, o fluxo de uma corrente elétrica, em geral, é medido em ampères; a taxa de fluxo da água ou petróleo, em litros por minuto; a do fluxo do trânsito, em veículos por hora; e a taxa do fluxo de moeda europeia, em milhões de euros por dia.
Vamos restringir nossa atenção às redes em que há **convervação do fluxo** em cada nó, com o que queremos dizer que a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó. Isso garante que o meio não se acumula nos nós e não impede o movimento livre do meio ao longo da rede.
Um problema comum na análise de redes é usar taxas de fluxo cnohecidas em certos ramos para enctontrar a taxa de fluxo em todos os demais ramos da rede.

Example

A Figura 9 mostra uma rede de quatro nós com indicação de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo de ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.

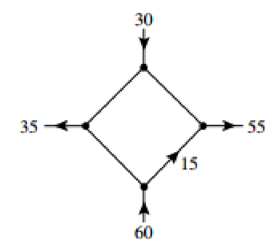

Figura 9: Exemplo de rede.

Example

A rede da Figura 10 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

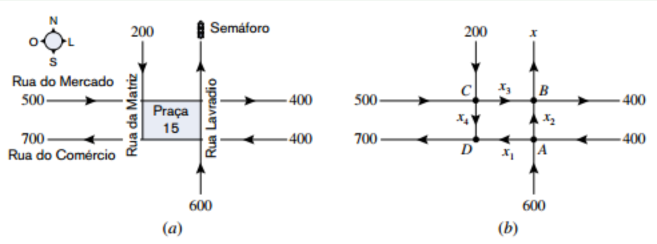

Figura 10: Fluxo de tráfego.

Example

(a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

(b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

Fluxo elétrico - Lei de Ohm

Definition

Se uma corrente de I ampères passa por um resistor com uma resistência de R ohms, então o resultado é uma queda de tensão elétrica de E volts, que é o produto da corrente pela resistência, ou seja,

$$E = IR \tag{25}$$

Definições

Uma rede elétrica típica possui várias fontes e resistores ligados por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios de rede se encontram é um **nó** da rede. Um **ramo** é um fio ligando dois nós, e um **laço fechado** é uma sucessão de ramos conectados que começa e termina no mesmo nó. Por exemplo, o circuito elétrico da Figura 11 tem dois nós e três laços fechados, dois internos e um externo. À medida que a corrente flu pelo circuito elétrico, ela passa por aumentos e diminuições de tensão elétrica, que são **elevações** e **quadas** de voltagem, respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de laços fechados é governado por duas leis fundamentais.

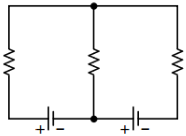

Figura 11: Circuito elétrico.

Leis de Kirchhoff

Definition (Lei das correntes)

A soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.

Definition (Lei das tensões)

Em uma volta em torno de qualquer laço fechado, a soma das elevações de voltagem é igual à soma das quedas de voltagem.

Em geral, não é possível saber de antemão os sentidos nos quais estão fluindo as correntes em circuitos com vários laços e capacitores; por isso, na análise de circuitos, é costume atribuir sentidos arbitrários aos fluxos das correntes nos vários ramos e deixar os cálculos matemáticos determinarem se os sentidos atribuídos estão corretos. Além disso, atribuir sentidos aos fluxos de corrente, a lei das tensões de Kirchhoff requer um sentido de percurso para cada laço fechado. A escolha é sempre arbitrária, mas para obter alguma consistência, sempre tomaremos esse sentido como sendo o horário (Figura 12)

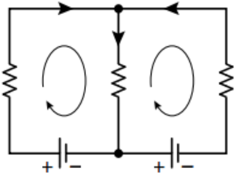

Figura 12: Convenção de laço fechado.

Exemplo - circuito com um laço fechado

Example

Determine a corrente I do circuito mostrado na Figura 13.

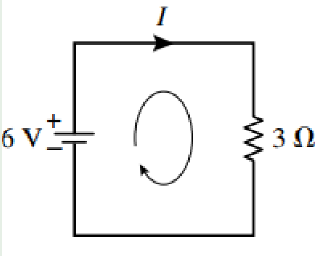

Figura 13: Circuito com um laço fechado.

Exemplo - circuito com três laços fechados

Example

Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na Figura 14.

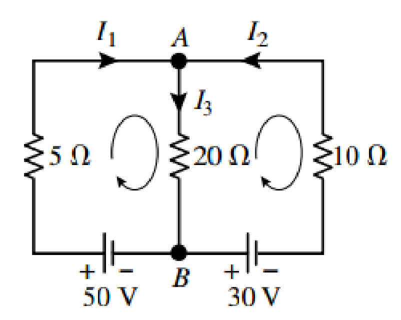

Figura 14: Circuito com três laços fechados.

Theorem

Dados quaisquer $n+1$ pontos no plano xOy que têm coordenadas x distintas, existe um único polinômio de grau n ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

Polinômio interpolador

Vejamos, agora, como poderíamos encontrar o polinômio interpolador cujo gráfico passa pelos pontos dados. Como o gráfico desse polinômio é o gráfico da equação

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{26}$$

segue que as coordenadas dos pontos satisfazem

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ & a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ & \vdots \\ & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned} \tag{27}$$

Matriz dos coeficientes para se determinar o polinômio interpolador

Estamos supondo que os valores dos x e y sejam conhecidos nessas equações, de modo que podemos ver esse sistema como um sistema linear nas incógnitas a_0, a_1, ..., a_n. Desse ponto de vista, a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & y_n \end{pmatrix} \tag{28}$$

e, portanto, podemos encontrar o polinômio interpolador reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas (elimnação de Gauss-Jordan).

Exemplo - Interpolação polinomial por eliminação de Gauss

Example

Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos $(1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-5)$, $(4,0)$.

Example

Cálcule a integral

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx. \tag{29}$$

Essa integral não pode ser calculada diretamente, pois não existe maneira de expressar a antiderivada do integrando em termos de funções elementares. Uma alternativa é aproximar o integrando por um polinômio interpolador e integrar o polinômio aproximante. Por exemplo, utilize os pontos $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 1 para obter uma aproximação da integral (29).