Aula 4

Geometria Euclidiana
Congruência

9 de junho de 2018

Lourena Rocha
lourena@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Congruência de Segmentos, Ângulos e Triângulos

1º Caso de Congruência de Triângulos

2º Caso de Congruência de Triângulos

Triângulos Isósceles

Mediana, Bissetriz, Altura

3º Caso de Congruência de Triângulos

Exercícios

Bibliografia

Congruência de Segmentos e Ângulos

Definição 4.1

Diremos que dois segmentos AB e CD são **congruentes** quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são **congruentes** se eles têm a mesma medida.

- As propriedades da igualdade de números passam a valer para congruência de segmentos e ângulos.
- Consequência: um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo vale para ângulos.

Notação

Usaremos o símbolo "$=$" para significar **congruente**. Assim, $AB = CD$ lê-se como **AB é congruente a CD** e $\widehat{A} = \widehat{B}$ lê-se como **ângulo A é congruente ao ângulo B**.

Definição 4.2

Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Escreveremos $ABC = EFG$ para significar que os triângulos ABC e EFG são congruentes e que a congruência leva A em E, B em F e C e G.

Consequência da Definição 4.2

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & E \\ B & \leftrightarrow & F \\ C & \leftrightarrow & G \end{array}$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações a seguir:

$$\begin{array}{ccc} AB = EF & BC = FG & AC = EG \\ \widehat{A} = \widehat{E} & \widehat{B} = \widehat{F} & \widehat{C} = \widehat{G} \end{array}$$

Axioma IV (1^o Caso: LAL)

Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$, então $ABC = EFG$.

Consequência do Axioma IV

Para verificarmos se dois triângulos são congruentes é suficiente verificar apenas três das seis relações que são obtidas a partir da Definição 4.2:

$$\begin{array}{c} AB = EF \\ AC = EG \\ \widehat{A} = \widehat{E} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} AB = EF \\ \widehat{A} = \widehat{E} \end{array} \quad \begin{array}{c} BC = FG \\ \widehat{B} = \widehat{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} AC = EG \\ \widehat{C} = \widehat{G} \end{array}$$

2º Caso de Congruência de Triângulos

Teorema 4.3 (2º Caso: ALA)

Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$, então $ABC = EFG$.

Definição 4.4

Um triângulo é dito **isósceles** se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de **laterais** e o terceiro lado é chamado de **base**.

Proposição 4.5

Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

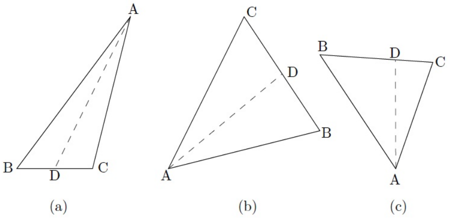
Proposição 4.6

Se em um triâgulo ABC tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulos é isósceles.

Mediana, Bissetriz, Altura

Definição 4.7

Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento AD chama-se **mediana** do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se **bissetriz** do ângulo $\widehat{A}$ se a semirreta S_{AD} divide o ângulo $C\widehat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é se $C\widehat{A}D = D\widehat{A}B$. O segmento AD chama-se **altura** do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.



Proposição 4.8

Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.

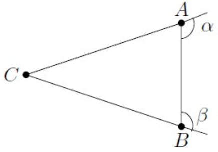
Teorema 4.8 (3º Caso: LLL)

Se dois triângulos tem três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exercícios

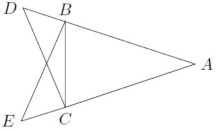
1. Um ângulo raso é dividido por duas semirretas em três ângulos adjacentes congruentes. Mostre que a bissetriz do ângulo do meio é perpendicular aos lados do ângulo raso.
2. Desenhe um triângulo. Construa agora um outro triângulo congruente ao que você desenhou. Descreva o procedimento.

3. Na figura abaixo os ângulos, α e β são congruentes. Mostre que $AC = BC$.



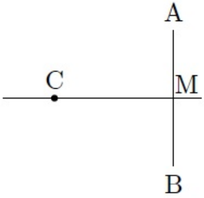
Exercícios

4. Na figura abaixo, tem-se $AB = AC$ e $BD = CE$. Mostre que $ACD = ABE$ e $BCD = CBE$.



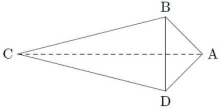
5. Mostre que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

6. Na figura abaixo, $C\widehat{M}A$ é um ângulo reto e M é o ponto médio de AB. Mostre que $CA = CB$.



Exercícios

7. Na figura abaixo, ABD e BCD são triângulos isósceles com base DB. Prove que os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{D}C$ são congruentes.



8. Usando a mesma figura, mostre que também a reta AC é bissetriz de $B\widehat{A}D$ e é perpendicular a DB.

9. Considere um ângulo $A\widehat{O}B$ onde $AO = BO$. Trace dois círculos de mesmo raio centrados em A e B. Suponha que seus raios sejam grandes o suficiente para que eles se interceptem em dois pontos. Mostre que a reta ligando estes dois pontos passa pelo vértice do ângulo e é sua bissetriz.

10. Use o resultado anterior para descrever um método de construir a bissetriz de um ângulo, usando apenas régua e compasso.

Exercícios

11. Justifique o seguinte procedimento para determinação do ponto médio de um segmento. “ Seja AB um segmento. Com um compasso centrado em A, desenhe um círculo de raio $\overline{AB}$. Descreva outro círculo de mesmo raio e centro em B. Estes dois círculos se interceptam em dois pontos. Trace a reta ligando estes dois pontos. A interseção desta reta com o segmento AB será o ponto médio de AB.”

12. Na construção acima é realmente necessário que os dois círculos tenham raio $\overline{AB}$?

13. Mostre que na construção descrita no exercício 11, a reta que determina o ponto médio de AB é perpendicular a AB.

14. Utilize a ideia da construção descrita no exercício 11 e proponha um método de construção de uma perpendicular a uma reta dada passando por um ponto desta reta.

Bibliografia

[1] BARBOSA, João L M.
Geometria Euclidiana Plana.
11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.