



Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte
Campus de Natal

Lista de Cálculo 1: Derivada

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Natal
Setembro de 2022

Sumário

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Retas tangentes e taxas de variação | 2 |
| 2 | Definição de derivada | 5 |
| 3 | Regras de derivação | 5 |
| 4 | Derivadas de funções trigonométricas, exponencial e logarítmica. | 11 |
| 5 | Regra da Cadeia | 25 |
| 6 | Diferenciação implícita | 25 |
| 7 | Taxas relacionadas | 25 |
| 8 | Respostas dos exercícios | 25 |

1 Retas tangentes e taxas de variação

Exercícios 7.2

1. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Calcule

a) $f'(1)$

b) $f'(0)$

c) $f'(x)$

2. Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

3. Seja $f(x) = 3x + 2$. Calcule

a) $f'(2)$

b) $f'(0)$

c) $f'(x)$

4. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados

a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 4$

c) $f(x) = 5x - 3$ e $p = -3$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 1$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 3$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $p = 2$

g) $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $p = 2$

5. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$

d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$

6. Calcule $f'(x)$, pela definição.

a) $f(x) = x^2 + x$

b) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = 5x$

f) $f(x) = 10$

g) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

7. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(1) = 0$.
8. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(x) > 0$ para todo x .
9. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(0) < f'(1)$.
10. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e contínua em \mathbb{R} , tal que $f'(1)$ não exista.
11. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$.
12. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$.
13. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e derivável em \mathbb{R} , tal que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.
14. Mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 1 \\ -x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de g .

$$15. \text{ Seja } g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$.
- b) Esboce o gráfico de g .

$$16. \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- a) Esboce o gráfico de f .
- b) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

2 Definição de derivada

3 Regras de derivação

gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto (8, 2). ■

Exercícios 7.3

1. Seja $f(x) = x^5$. Calcule

a) $f'(x)$

b) $f'(0)$

c) $f'(2)$

2. Calcule $g'(x)$ sendo g dada por

a) $g(x) = x^6$

b) $g(x) = x^{100}$

c) $g(x) = \frac{1}{x}$

d) $g(x) = x^2$

e) $g(x) = \frac{1}{x^3}$

f) $g(x) = \frac{1}{x^7}$

g) $g(x) = x$

h) $g(x) = x^{-3}$

3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto de abscissa 2. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

4. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

5. Seja $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'(1)$

c) $f'(-32)$

6. Calcule $g'(x)$, sendo g dada por

Solução

i) Para $n = 2$ é verdadeira (D1).

ii) Seja $k \geq 2$. De

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = [f_1 + f_2 + \dots + f_k] + f_{k+1}$$

segue que se a afirmação for verdadeira para $n = k$ também o será para $n = k + 1$. ■

EXEMPLO 8. Calcule a derivada

a) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2$.

b) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$.

Solução

$$a) f'(x) = \left[3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2 \right]' = (3x^5)' + \left(\frac{1}{3}x^4 \right)' + (x)' + (2)' = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

Assim,

$$f'(x) = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

$$b) g'(x) = \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right]' = (x^2)' + \left(\frac{1}{x^2} \right)' + (\sqrt{x})' = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 7.7 _____

1. Calcule $f'(x)$.

$$a) f(x) = 3x^2 + 5$$

$$c) f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$$

$$e) f(x) = 5 + 3x^{-2}$$

$$g) f(x) = 3x + \frac{1}{x}$$

$$i) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$l) f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$n) f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + k, \text{ em que } b, c \text{ e } k \text{ são constantes.}$$

$$b) f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$d) f(x) = 3x + \sqrt{x}$$

$$f) f(x) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$h) f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}$$

$$j) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$$

$$m) f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x}$$

2. Seja $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, g(1))$.
3. Seja $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
 - a) Determine o ponto do gráfico de f em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo x .
 - b) Esboce o gráfico de f .
4. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
 - a) Estude o sinal de $f'(x)$.
 - b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - c) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f .
5. Mesmo exercício que o anterior, considerando a função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.
6. Seja $f(x) = x^3 + 3x$.
 - a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.
 - b) Estude o sinal de $f'(x)$.
 - c) Esboce o gráfico de f .
7. Calcule $F'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$$a) \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$c) \frac{3x^2 + 3}{5x - 3}$$

$$d) \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$$

$$e) 5x + \frac{x}{x - 1}$$

$$f) \sqrt{x} + \frac{3}{x^3 + 2}$$

$$g) \frac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$h) \frac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2 + 3}$$

8. Seja $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- Determine os pontos do gráfico de g em que as retas tangentes, nestes pontos, sejam paralelas ao eixo x .
- Estude o sinal de $g'(x)$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de g .

9. Calcule $f'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$$a) 3x^2 + 5 \cos x$$

$$b) \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

$$c) x \sin x$$

$$d) x^2 \operatorname{tg} x$$

$$e) \frac{x + 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$f) \frac{3}{\sin x + \cos x}$$

$$g) \frac{\sec x}{3x + 2}$$

$$h) \cos x + (x^2 + 1) \sin x$$

$$i) \sqrt{x} \sec x$$

$$j) 3 \cos x + 5 \sec x$$

$$l) x \cotg x$$

$$m) 4 \sec x + \cotg x$$

$$n) x^2 + 3x \operatorname{tg} x$$

$$o) \frac{x^2 + 1}{\sec x}$$

$$p) \frac{x + 1}{x \sin x}$$

$$q) \frac{x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$r) (x^3 + \sqrt{x}) \operatorname{cosec} x$$

$$s) \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$$

10. Seja $f(x) = x^2 \sin x + \cos x$. Calcule:

- a) $f'(x)$
- b) $f'(0)$
- c) $f'(3a)$
- d) $f'(x^2)$

11. Seja $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a) Estude o sinal de $f'(x)$.
- b) Faça um esboço do gráfico de f .

12. Calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(x) = 3x + 5 \ln x$

c) $f(x) = e^x \cos x$

d) $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

e) $f(x) = x^2 \ln x + 2e^x$

f) $f(x) = \frac{x + 1}{x \ln x}$

g) $f(x) = 4 + 5x^2 \ln x$

h) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

j) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

13. Sejam f , g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x) g(x) h(x)]' = f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) g(x) h'(x).$$

14. Calcule $F'(x)$ sendo $f(x)$ igual a

- a) $x e^x \cos x$
- b) $x_2 (\cos x) (1 + \ln x)$
- c) $e^x \sin x \cos x$
- d) $(1 + \sqrt{x}) e^x \operatorname{tg} x$

7.8. FUNÇÃO DERIVADA E DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada*

4 Derivadas de funções trigonométricas, exponencial e logarítmica.

$$a) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \quad \text{pois,} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(Exemplo 3-6.3).

$$b) g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

$$\left(u = \frac{h}{x} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}$$

$$\text{pois, } \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e \text{ (Exemplo 2-6.3).}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

■

Exercícios 7.4

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.
2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.
3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.
4. Calcule $f'(x)$.
 - a) $f(x) = 2^x$
 - b) $f(x) = 5^x$
 - c) $f(x) = \pi^x$
 - d) $f(x) = e^x$
5. Seja $g(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

6. Calcule $g'(x)$

a) $g(x) = \log_3 x$

b) $g(x) = \log_5 x$

c) $g(x) = \log_{\pi} x$

d) $g(x) = \ln x$

7.5. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

a) $\text{sen}'x = \cos x.$

b) $\text{cos}'x = -\text{sen } x.$

c) $\text{tg}'x = \sec^2 x.$

d) $\sec'x = \sec x \text{ tg } x.$

e) $\text{cotg}'x = -\text{cosec}^2 x.$

f) $\text{cosec}'x = -\text{cosec } x \text{ cotg } x.$

Demonstração

Exercícios 7.5

1. Seja $f(x) = \sin x$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sin x$ no ponto de abscissa 0.

3. Seja $f(x) = \cos x$. Calcule.

a) $f'(x)$

b) $f'(0)$

c) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

4. Calcule $f'(x)$ sendo

a) $f(x) = \tan x$

b) $f(x) = \sec x$

5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \tan x$ no ponto de abscissa 0.

6. Seja $f(x) = \cotg x$. Calcule.

a) $f'(x)$

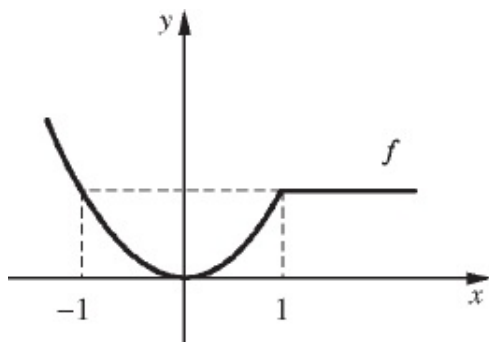
b) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7. Seja $g(x) = \operatorname{cosec} x$. Calcule.

a) $g'(x)$

b) $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7.6. DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE



f é contínua em 1, mas não é derivável neste ponto; o gráfico de f apresenta um “bico” no ponto $(1, f(1))$.

■

EXEMPLO 3. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

- a) f é derivável em 1?
b) f é contínua em 1?

Solução

$$a) \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

Logo, f é derivável em 1 e $f'(1) = 2$.

- b) Como f é derivável em 1, segue que f é contínua em 1. ■

Exercícios 7.6 =====

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

- a) f é contínua em 2? Por quê?
b) f é derivável em 2? Por quê?

2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

- a) f é derivável em 0? Justifique.
b) f é contínua em 0? Justifique.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x < 3 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$.

- a) f é derivável em 3? Justifique.
b) f é contínua em 3? Justifique.

7.7. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Teorema 1. Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p e têm-se

(D1) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

(D2) $(kf)'(p) = kf'(p)$.

(D3) $(f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

Demonstração

$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad (f + g)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(p) + g(p)]}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right] \end{aligned}$$

(Em palavras: a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.)

$$\text{(D2)} \quad (kf)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} = k \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = kf'(p),$$

$$(kf)'(p) = kf'(p).$$

Solução

i) Para $n = 2$ é verdadeira (D1).

ii) Seja $k \geq 2$. De

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = [f_1 + f_2 + \dots + f_k] + f_{k+1}$$

segue que se a afirmação for verdadeira para $n = k$ também o será para $n = k + 1$. ■

EXEMPLO 8. Calcule a derivada

$$a) f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2.$$

$$b) g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}.$$

Solução

$$a) f'(x) = \left[3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2 \right]' = (3x^5)' + \left(\frac{1}{3}x^4 \right)' + (x)' + (2)' = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

Assim,

$$f'(x) = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

$$b) g'(x) = \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right]' = (x^2)' + \left(\frac{1}{x^2} \right)' + (\sqrt{x})' = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 7.7 _____

1. Calcule $f'(x)$.

$$a) f(x) = 3x^2 + 5$$

$$c) f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$$

$$e) f(x) = 5 + 3x^{-2}$$

$$g) f(x) = 3x + \frac{1}{x}$$

$$i) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$l) f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$n) f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + k, \text{ em que } b, c \text{ e } k \text{ são constantes.}$$

$$b) f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$d) f(x) = 3x + \sqrt{x}$$

$$f) f(x) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$h) f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}$$

$$j) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$$

$$m) f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x}$$

2. Seja $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, g(1))$.
3. Seja $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
 - a) Determine o ponto do gráfico de f em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo x .
 - b) Esboce o gráfico de f .
4. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
 - a) Estude o sinal de $f'(x)$.
 - b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - c) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f .
5. Mesmo exercício que o anterior, considerando a função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.
6. Seja $f(x) = x^3 + 3x$.
 - a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.
 - b) Estude o sinal de $f'(x)$.
 - c) Esboce o gráfico de f .
7. Calcule $F'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$$a) \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$c) \frac{3x^2 + 3}{5x - 3}$$

$$d) \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$$

$$e) 5x + \frac{x}{x - 1}$$

$$f) \sqrt{x} + \frac{3}{x^3 + 2}$$

$$g) \frac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$h) \frac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2 + 3}$$

8. Seja $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- Determine os pontos do gráfico de g em que as retas tangentes, nestes pontos, sejam paralelas ao eixo x .
- Estude o sinal de $g'(x)$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de g .

9. Calcule $f'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$$a) 3x^2 + 5 \cos x$$

$$b) \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

$$c) x \sin x$$

$$d) x^2 \operatorname{tg} x$$

$$e) \frac{x + 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$f) \frac{3}{\sin x + \cos x}$$

$$g) \frac{\sec x}{3x + 2}$$

$$h) \cos x + (x^2 + 1) \sin x$$

$$i) \sqrt{x} \sec x$$

$$j) 3 \cos x + 5 \sec x$$

$$l) x \cotg x$$

$$m) 4 \sec x + \cotg x$$

$$n) x^2 + 3x \operatorname{tg} x$$

$$o) \frac{x^2 + 1}{\sec x}$$

$$p) \frac{x + 1}{x \sin x}$$

$$q) \frac{x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$r) (x^3 + \sqrt{x}) \operatorname{cosec} x$$

$$s) \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$$

10. Seja $f(x) = x^2 \sin x + \cos x$. Calcule:

- a) $f'(x)$
- b) $f'(0)$
- c) $f'(3a)$
- d) $f'(x^2)$

11. Seja $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a) Estude o sinal de $f'(x)$.
- b) Faça um esboço do gráfico de f .

12. Calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(x) = 3x + 5 \ln x$

c) $f(x) = e^x \cos x$

d) $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

e) $f(x) = x^2 \ln x + 2e^x$

f) $f(x) = \frac{x + 1}{x \ln x}$

g) $f(x) = 4 + 5x^2 \ln x$

h) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

j) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

13. Sejam f , g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x) g(x) h(x)]' = f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) g(x) h'(x).$$

14. Calcule $F'(x)$ sendo $f(x)$ igual a

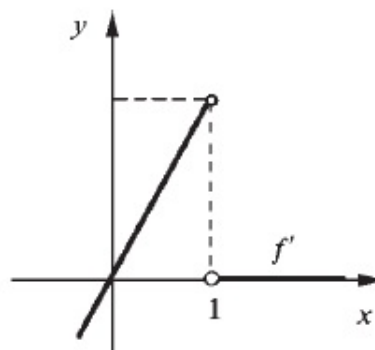
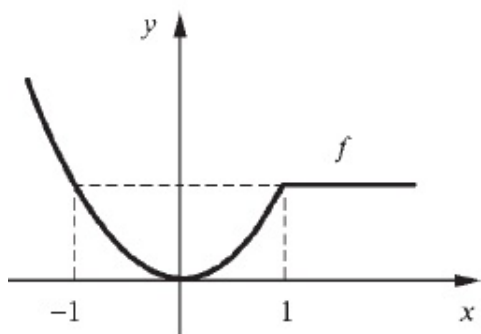
- a) $x e^x \cos x$
- b) $x_2 (\cos x) (1 + \ln x)$
- c) $e^x \sin x \cos x$
- d) $(1 + \sqrt{x}) e^x \operatorname{tg} x$

7.8. FUNÇÃO DERIVADA E DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada*

Logo, f não é derivável em 1, isto é, $f'(1)$ não existe. Portanto

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}; \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}.$$



■

Exercícios 7.8

1. Determine f' , f'' e f''' .

a) $f(x) = 4x^4 + 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

e) $f(x) = x|x|$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

2. Esboce os gráficos de f , f' e f'' .

a) $f(x) = x^2|x|$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

3. Determine a derivada de ordem n .

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \ln x$

7.9. NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (t^3 x) = \left[\frac{d}{dt} (t^3) \right] x + t^3 \frac{dx}{dt}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 x + t^3 \frac{dx}{dt}.$$

b) Temos:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} [3t^2 x] + \frac{d}{dt} \left[t^3 \frac{dx}{dt} \right] = 6tx + 3t^2 \frac{dx}{dt} + 3t^2 \frac{dx}{dt} + t^3 \frac{d^2 x}{dt^2},$$

ou seja,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 6tx + 6t^2 \frac{dx}{dt} + t^3 \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

■

Exercícios 7.9

1. Calcule a derivada.

a) $y = 5x^3 + 6x - 1$

b) $s = \sqrt[5]{t} + \frac{3}{t}$

c) $x = \frac{t}{t+1}$

d) $y = t \cos t$

e) $y = \frac{u+1}{\ln u}$

f) $x = t^3 e^t$

g) $s = e^t \operatorname{tg} t$

h) $y = \frac{x^3 + 1}{\operatorname{sen} x}$

i) $y = \sqrt[3]{u} \sec u$

j) $x = \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}$

l) $x = e^t \cos t$

m) $u = 5v^2 + \frac{3}{v^4}$

n) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

o) $E = \frac{1}{2} v^2$

p) $E = \frac{1}{2} m v^2$, m constante

q) $U = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$, a e b constantes

2. Seja $y = \frac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule.

a) $\frac{dy}{dx}$

b) $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$

3. Seja $y = t^2x$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=1}$ supondo $\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=1} = 2$ e $x = 3$ para $t = 1$ (isto é, $x(1) = 3$).

4. Considere a função $y = xt^3$, na qual $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=2}$ sabendo que $\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

5. Considere a função $y = \frac{t}{x+t}$, na qual $t = t(x)$ é uma função derivável. Calcule $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$ sabendo que $\frac{dt}{dx}\bigg|_{x=1} = 4$ e que $t = 2$ para $x = 1$. (Observe que t está sendo olhado como função de x .)

6. Seja $y = \frac{1}{x^2}$. Verifique que $x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

7. Seja $y = \frac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

8. Calcule a derivada segunda.

a) $y = x^3 + 2x - 3$

b) $x = t \sin t$

c) $y = x^{10} + \frac{1}{x^3}$

d) $y = t \ln t$

e) $x = e^t \cos t$

f) $y = \frac{e^x}{x}$

9. Seja $y = x^2 - 3x$. Verifique que $x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 3$.

10. Seja $y = \frac{1}{x}$. Verifique que $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} = 6 \frac{dy}{dx}$.

11. Seja $x = \cos t$. Verifique que $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$.

12. Seja $y = e^x \cos x$. Verifique que $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

13. Seja $y = te^t$. Verifique que $\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 0$.

14. Suponha que $y = y(r)$ seja derivável até a 2.^a ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dr} \left[(r^2 + r) \frac{dy}{dr} \right] = (2r + 1) \frac{dy}{dr} + (r^2 + r) \frac{d^2 y}{dr^2}.$$

15. Seja $y = x^2$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável até a 2.^a ordem. Verifique que

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

16. Suponha que $x = x(t)$ seja derivável até a 2.^a ordem. Verifique que

$$a) \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{dx}{dt} \right) = 2t \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$b) \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

7.10. REGRA DA CADEIA PARA DERIVAÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $\text{Im}g \subset D_f$. Nosso objetivo, a seguir, é provar que a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e que vale a *regra da cadeia*

①

$$h'(t) = f'(g(t)) g'(t), t \in D_g$$

Antes de passarmos à demonstração de ①, vejamos como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz. Temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ e } \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(t))$, segue de ① que

- 5 Regra da Cadeia**
- 6 Diferenciação implícita**
- 7 Taxas relacionadas**
- 8 Respostas dos exercícios**

g) $-\infty$

6.3

1. a) e^2

b) e

c) $e^{\frac{1}{2}}$

d) e^2

e) e

f) 1

g) e^2

h) e^2

2. *Sugestão:* $a^h = e^h \ln a$

3. a) 2

b) 0

c) $\ln 5$

d) $+\infty$

CAPÍTULO 7

7.2

1. a) 2

c) $2x$

2. 2

3. a) 3

b) 3

c) 3

4. a) 3

b) $\frac{1}{4}$

c) 5

d) -1

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

f) $-\frac{1}{4}$

g) 4

h) $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

5. a) $y = 4x - 4$

b) $y = -\frac{1}{4}x + 1$

c) $x - 6y + 9 = 0$

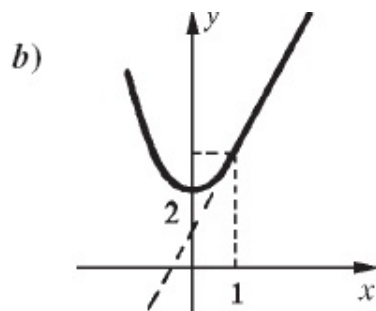
d) $y = x - 1$

6. a) $2x + 1$ b) 3 c) $3x^2$ d) $-\frac{1}{x^2}$ e) 5 f) 0 g) $\frac{1}{(x+1)^2}$ h) $-\frac{2}{x^3}$

14. $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

15. a) 2



16. **b)** 0

17. **b)** Não

7.3

1. **a)** $5x^4$

b) 0

c) 80

2. **a)** $6x^5$ **b)** $100x^{99}$ **c)** $-\frac{1}{x^2}$ **d)** $2x$ **e)** $-\frac{3}{x^4}$ **f)** $-\frac{7}{x^8}$

g) 1 **h)** $-3x^{-4}$

3. $y = -\frac{1}{4}x + 1$

4. $y = -2x + 3$

5. **a)** $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{80}$

6. **a)** $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

b) $\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

c) $\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$

d) $\frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$

7. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

9. $y = 4x - 4$

7.4

1. $y = x + 1$

2. $y = x - 1$

4. **a)** $2^x \ln 2$

b) $5^x \ln 5$

c) $\pi^x \ln \pi$

d) e^x

6. **a)** $\frac{1}{x \ln 3}$

b) $\frac{1}{x \ln 5}$

c) $\frac{1}{x \ln \pi}$

d) $\frac{1}{x}$

7.5

1. **a)** $\cos x$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $y = x$

3. **a)** $-\sin x$

b) 0

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **a)** $\sec^2 x$

b) $\sec x \operatorname{tg} x$

5. $y = x$

6. **a)** $-\operatorname{cosec}^2 x$

b) -2

7. **a)** $-\operatorname{cosec} x \cotg x$

b) $-\sqrt{2}$

7.7

1. a) $6x$ b) $3x^2 + 2x$ c) $9x^2 - 4x$ d) $3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $-6x^{-3}$ f) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ g) $3 - \frac{1}{x^2}$ h) $-\frac{4}{x^2} - \frac{10}{x^3}$

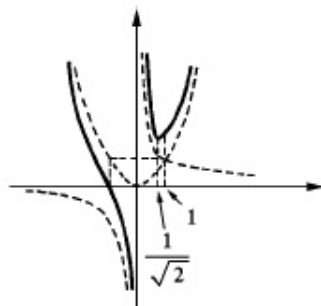
i) $2x^2 + \frac{1}{2}x$ j) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ l) $2 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

m) $18x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ n) $20x^3 + 3bx^2 + 2cx$

2. $y = 2x$

3. a) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \right)$

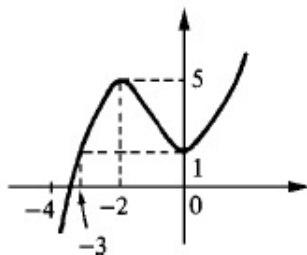
b)



4. a) $f'(x) > 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$; $f'(x) < 0$ em $]-2, 0[$

b) $+\infty$ e $-\infty$

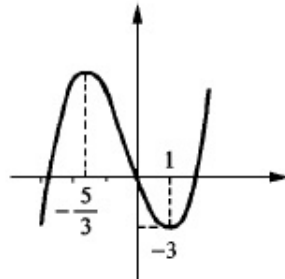
c)



5. a) $f'(x) > 0$ em $]-\infty, -\frac{5}{3}[$ e em $]1, +\infty[$; $f'(x) < 0$ em $]-\frac{5}{3}, 1[$

b) $+\infty$ e $-\infty$

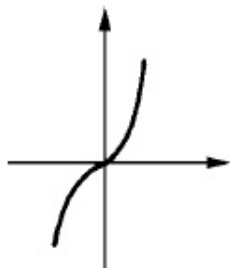
c)



6. a) $y = 3x$

b) $f'(x) > 0$ em \mathbb{R}

c)



7. a) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ b) $\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$ c) $\frac{15x^2-18x-15}{(5x-3)^2}$

d) $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ e) $5 - \frac{1}{(x-1)^2}$ f) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9x^2}{(x^3+2)^2}$

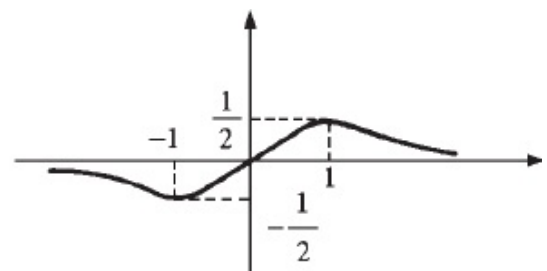
g) $\frac{3x - \sqrt[3]{x}}{6x\sqrt{x}}$ h) $\frac{4\sqrt[4]{x^3}(3-x^2) - 7x^2 + 3}{4\sqrt[4]{x^3}(x^2+3)^2}$

8. a) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

b) $g'(x) > 0$ em $]-1, 1[$
 $g'(x) < 0$ em $]-\infty, -1[$
e em $]1, +\infty[$

c) 0

d)



9. a) $6x - 5 \sin x$ b) $-\frac{(x^2 + 1) \sin x + 2x \cos x}{(x^2 + 1)^2}$ c) $\sin x + x \cos x$

d) $x [2 \operatorname{tg} x + x \sec^2 x]$ e) $\frac{\operatorname{tg} x - (x + 1) \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$ f) $\frac{-3 (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$

g) $\frac{\sec x [3x \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} x - 3]}{(3x + 2)^2}$ h) $\sin x [2x - 1] + \cos x [x^2 + 1]$

i) $\frac{\sec x [1 + 2x \operatorname{tg} x]}{2\sqrt{x}}$ j) $-3 \sin x + 5 \sec x \operatorname{tg} x$ l) $\cotg x - x \operatorname{cosec}^2 x$

m) $4 \sec x \operatorname{tg} x - \operatorname{cosec}^2 x$ n) $2x + 3 \operatorname{tg} x + 3x \sec^2 x$ o) $\frac{2x - (x^2 + 1) \operatorname{tg} x}{\sec x}$

p) $-\frac{x(x + 1) \cos x + \sin x}{x^2 \sin^2 x}$ q) $\frac{1 + x \cotg x}{\operatorname{cosec} x}$

r) $\operatorname{cosec} x \left[3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - (x^3 + \sqrt{x}) \cotg x \right]$ s) $\frac{(x - 1) \cos x - (x + 1) \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}$

10. a) $(2x - 1) \sin x + x^2 \cos x$

b) 0

c) $(6a - 1) \sin (3a) + 9a^2 \cos (3a)$

d) $(2x^2 - 1) \sin x^2 + x^4 \cos x^2$

11. a) $f'(x) > 0$ em $\left[0, \frac{\pi}{4} \right[$ e em $\left] \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$

$f'(x) < 0$ em $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[$

b)

12. a) $x e^x [2 + x]$ b) $3 + \frac{5}{x}$ c) $e^x [\cos x - \sin x]$ d) $\frac{2e^x}{[1 - e^x]^2}$

e) $2x \ln x + x + 2e^x$ f) $\frac{-x - \ln x - 1}{[x \ln x]^2}$ g) $5x [1 + 2 \ln x]$

h) $\frac{e^x [x - 1]^2}{(x^2 + 1)^2}$ i) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ j) $\frac{x e^x}{(x + 1)^2}$

$$14. \quad a) e^x [\cos x + x \cos x - x \operatorname{sen} x] \quad b) x [(1 + \ln x) (2 \cos x - x \operatorname{sen} x) + \cos x]$$

$$c) e^x [\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]$$

$$d) e^x \left[\frac{\operatorname{tg} x}{2 \sqrt{x}} + (1 + \sqrt{x}) (\operatorname{tg} x + \sec^2 x) \right]$$

7.8

$$1. \quad a) f'(x) = 16x^3 + 2, f''(x) = 48x^2 \text{ e } f'''(x) = 96x$$

$$b) f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3} \text{ e } f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$c) f'(x) = 10x + \frac{3}{x^4}, f''(x) = 10 - \frac{12}{x^5} \text{ e } f'''(x) = 60x^{-6}$$

$$d) f'(x) = 9x^2 - 6, f''(x) = 18x \text{ e } f'''(x) = 18$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ e } \\ f'''(x) = 0 \text{ para } x \neq 0$$

$$2. \quad a) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ e } f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x \geq 0 \\ -6x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$b) f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 5 & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ e } f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$3. \quad a) f^{(n)}(x) = e^x \quad b) f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos x & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen} x & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

$$c) f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen} x & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos x & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

$$d) f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n}$$

7.9

$$\begin{array}{lll}
1. & a) \frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6 & b) \frac{ds}{dt} = \frac{1}{5\sqrt[5]{t^4}} - \frac{3}{t^2} & c) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{(t+1)^2} \\
& d) \frac{dy}{dt} = \cos t - t \sin t & e) \frac{dy}{du} = \frac{u \ln u - u - 1}{u (\ln u)^2} & f) \frac{dx}{dt} = t^2 e^t (3+t) \\
& g) \frac{ds}{dt} = e^t [\operatorname{tg} t + \sec^2 t] & h) \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin x - (x^3 + 1) \cos x}{\sin^2 x} \\
& i) \frac{dy}{du} = \frac{\sec u [1 + 3u \operatorname{tg} u]}{3\sqrt[3]{u^2}} & j) \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3} \\
& l) \frac{dx}{dt} = e^t [\cos t - \sin t] & m) \frac{du}{dv} = 10v - \frac{12}{v^5} & n) \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \\
& o) \frac{dE}{dv} = v & p) \frac{dE}{dv} = mv & q) \frac{du}{dx} = -\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} \\
2. & a) \frac{x^3 (4\sqrt{x} + 5)}{2\sqrt{x} (x + \sqrt{x})^2} & b) \frac{9}{8}
\end{array}$$

3. 8

4. 36

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dt}{dx} (x+t) - t \left(1 + \frac{dt}{dx}\right)}{(x+t)^2}; \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2}{9}$$

8. a) $6x$

b) $2 \cos t - t \sin t$

c) $90x^8 + \frac{12}{x^5}$

d) $\frac{1}{t}$

e) $-2e^t \sin t$

f) $\frac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

1. **a)** $4 \cos 4x$

b) $-5 \sin 5x$

c) $3e^{3x}$

d) $-8 \sin 8x$

e) $3t^2 \cos t^3$

f) $\frac{2}{2t+1}$

g) $e^{\sin t} \cos t$

h) $-e^x \sin e^x$

i) $3 (\sin x + \cos x)^2 (\cos x - \sin x)$

j) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

l) $\frac{2}{3(x+1)^2} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$ **m)** $-5e^{-5x}$ **n)** $\frac{2t+3}{t^2+3t+9}$ **o)** $e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x$

p) $-\sin x \cos (\cos x)$ **q)** $8t(t^2+3)^3$ **r)** $-2x \sin (x^2+3)$

s) $\frac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$ **t)** $3 \sec^2 3x$ **u)** $3 \sec 3x \operatorname{tg} 3x$

2. 10

3. 4

4. a) $e^{3x}(1 + 3x)$ b) $e^x(\cos 2x - 2 \sin 2x)$ c) $e^{-x}(\cos x - \sin x)$
d) $e^{-2t}(3 \cos 3t - 2 \sin 3t)$ e) $-2xe^{-x^2} + \frac{2}{2x+1}$ f) $\frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$
g) $-\frac{5 \sin 5x \sin 2x + 2 \cos 5x \cos 2x}{\sin^2 2x}$ h) $3(e^{-x} + e^{x^2})^2(-e^{-x} + 2xe^{x^2})$
i) $3t^2e^{-3t}(1 - t)$ j) $e^{x^2} \left[2x \ln(1 + \sqrt{x}) + \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)} \right]$
l) $3(\sin 3x + \cos 2x)^2(3 \cos 3x - 2 \sin 2x)$ m) $\frac{e^x - e^{-x}}{2\sqrt{e^x + e^{-x}}}$
n) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ o) $\frac{4x\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^3 + xe^{\sqrt{x}}}}$ p) $\ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x + 1}$
q) $\frac{6x[\ln(x^2 + 1)]^2}{x^2 + 1}$ r) $\sec x$ s) $-9x^2 \cos^2 x^3 \sin x^3$
t) $-\frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x}$ u) $e^{2t} \frac{(1 + 2t) \ln(3t + 1) - \frac{3t}{3t + 1}}{[\ln(3t + 1)]^2}$
5. a) $-25 \sin 5t$ b) $-16 \cos 4t$ c) $-w^2 \sin wt$ d) $9e^{-3x}$
e) $2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ f) $\frac{e^x(x^2 + 1)}{(x + 1)^3}$ g) $\frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ h) $\frac{2}{(x - 1)^3}$
i) $e^{-x} - 4e^{-2x}$ j) $e^{-x}(4 \sin 2x - 3 \cos 2x)$ l) $\frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

$$\begin{array}{ll}
 m) \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x)^3} & n) \frac{-2[4 \sin 3x + 3 \cos 3x]}{e^x} \\
 o) 4e^{-2x}(x-1) & p) -\cos x \cos(\cos x) - \sin^2 x \sin(\cos x) \\
 q) \frac{8x^3 + 30x^2 + 24x + 10}{(x^2 - 1)^3} & r) \frac{e^{1/x}}{x^3} \quad s) \frac{2(-x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\
 t) \frac{3}{(t^2 + 3)\sqrt{t^2 + 3}} & u) \frac{4x + 12}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}
 \end{array}$$

7. 8

8. 11

12. ± 2

13. 1 ou 2

16. **a)** $3 \sec^2 3x$

b) $4 \sec 4x \operatorname{tg} 4x$

c) $-2x \operatorname{cosec}^2 x^2$

d) $\sec^2 x \sec(\operatorname{tg} x) \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$

e) $3x^2 \sec x^3 \operatorname{tg} x^3$

f) $2x \sec^2 x^2 e^{\operatorname{tg} x^2}$

g) $-2 \operatorname{cosec} 2x \cotg 2x$

h) $x^2 [3 \operatorname{tg} 4x + 4x \sec^2 4x]$

i) $3 \sec 3x$

j) $-e^{-x} \sec x^2 [1 - 2x \operatorname{tg} x^2]$

l) $6x (x^2 + \cotg x^2)^2 (1 - \operatorname{cosec}^2 x^2)$

m) $2x [\operatorname{tg} 2x + x \sec^2 2x]$

23. **b)** 7

c) $y = 2x - 1$

28. $-\frac{4}{7}$

30. 8

7.12

1. a) $5^x \ln 5 + \frac{1}{x \ln 3}$

b) $2x 2^{x^2} \ln 2 + 2 \cdot 3^{2x} \ln 3$

c) $2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3 + \frac{2x}{(x^2+1) \ln 2}$

d) $(2x+1)^x \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right]$

e) $x^{\sin 3x} \left[3 \cos 3x \ln x + \frac{\sin 3x}{x} \right]$

f) $(3 + \cos x)^x \left[\ln(3 + \cos x) - \frac{x \sin x}{3 + \cos x} \right]$

g) $x^x [(1 + \ln x) \sin x + \cos x]$

h) $x^{x^2+1} \left[2x \ln x + \frac{x^2+1}{x} \right]$

i) $-(1+i)^{-t} \ln(1+i)$

j) $(10^x + 10^{-x}) \ln 10$

l) $(2 + \sin x)^{\cos 3x} \left[-3 \sin 3x \ln(2 + \sin x) + \frac{\cos x \cos 3x}{2 + \sin x} \right]$

m) $\frac{x^x (1 + \ln x)}{1 + x^x}$

n) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$

o) $x^{x^x} x^x \left[(1 + \ln x) \ln x + \frac{1}{x} \right]$

p) $\pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi$

q) $(1+x)e^{-x} \left[-e^{-x} \ln(1+x) + \frac{e^{-x}}{1+x} \right]$

3. a) $(x+2)^x \ln(x+2) + x(x+2)^{x-1}$
 b) $2x(1+e^x)^{x^2} \ln(1+e^x) + x^2(1+e^x)^{x^2-1} e^x$
 c) $(4+\sin 3x)^x \ln(4+\sin 3x) + x(4+\sin 3x)^{x-1} (3 \cos 3x)$
 d) $2x(x+3)^{x^2} \ln(x+3) + x^2(x+3)^{x^2-1}$
 e) $2x(3+\pi)^{x^2} \ln(3+\pi)$ f) $2\pi x(x^2+1)^{\pi-1}$

7.13

2. $y = \frac{-1 + \sqrt{-4x^2 + 4x + 1}}{2x}$ 3. $\frac{3}{4}$
4. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy-1}{3y^2+x^2}$ c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2xy+2}$
 d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+5y^4}$ e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$ f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x+3y^2}$
 g) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y+1}$ h) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3+y}{3x^2y^2+x}$ i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+e^y}{xe^y+x}$
 j) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2+y^2+2y}$ l) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{5-\sin y-x}$ m) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2+\cos y}$
5. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 6. $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$
8. a) 1 b) $y-1 = -\frac{3}{7}(x-1)$
11. $y = \frac{1}{5}(x+3)$

7.14

1. a) $dy = 3x^2 dx$ b) $dy = (2x-2) dx$
 c) $dy = \frac{1}{(x+1)^2} dx$ d) $dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$
2. a) $dA = 2l dl$
3. a) $dV = 4\pi r^2 dr$

4. **a)** $dy = (2x + 3) dx$

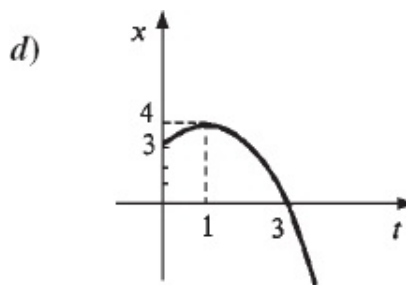
b) $(dx)^2$

7.15

1. **a)** $2 - 2t$

b) -2

c) $v(t) > 0$ em $[0, 1[$
 $v(t) < 0$ em $]1, +\infty[$



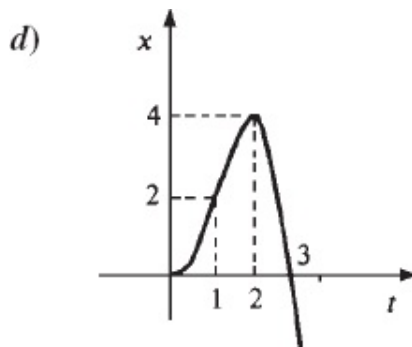
2. **a)** $\frac{1}{2}$

b) 0

3. **a)** $v(t) > 0$ em $]0, 2[$
 $v(t) < 0$ em $]2, +\infty[$

b) $a(t) > 0$ em $[0, 1[$
 $a(t) < 0$ em $]1, +\infty[$

c) $-\infty$

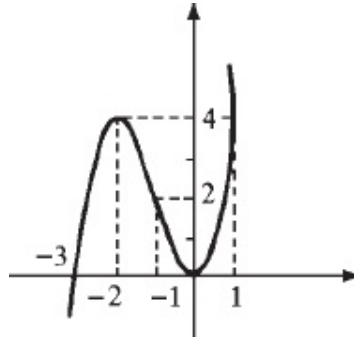


7. **a)** $f'(t) > 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$
 $f'(t) < 0$ em $]-2, 0[$

b) $f''(t) < 0$ em $]-\infty, -1[$
 $f''(t) > 0$ em $]-1, +\infty[$

c) $+\infty$ e $-\infty$

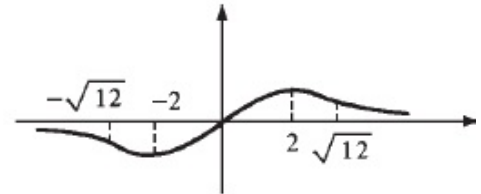
d)



8. a) $f'(t) > 0$ em $]-2, 2[$
 $f'(t) < 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$

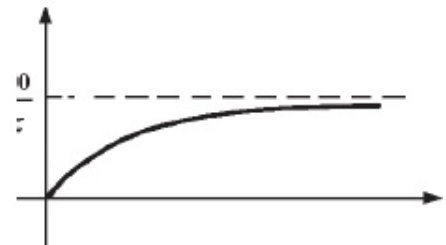
b) $f''(t) > 0$ em $]-\sqrt{12}, 0[$
e em $]\sqrt{12}, +\infty[$
 $f''(t) < 0$ em $]-\infty, -\sqrt{12}[$
e em $]0, \sqrt{12}[$

d)

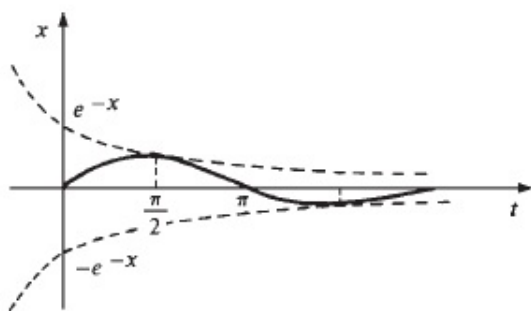


9. a) $v_0 e^{-kt}$
c) $-v_0 k e^{-kt}$
e) $\frac{v_0}{k}$

f)



10. c)



11. Ponto de abscissa $x = \frac{5}{6}$

12. $\frac{-100}{(101)^2}$

15. $(-2, 1)$

16. $-\frac{6}{\sqrt{55}}$

17. $-\frac{3}{2}$ (cm/s)

18. $\frac{0,9}{100\pi}$ (m/s)

19. $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos \theta$ e $\frac{dy}{dt} = \sin \theta$

7.16

1. a) $y = -3x$ e $y = \frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$ e $y = -12x + 98$

c) $y = -2x + 3$ e $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d) $y = 2$ e $x = 1$

2. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$

3. $y = 6x - 2$ ou $y = 6x + 2$

4. $y = 2x - \frac{25}{4}$

5. $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{27}$ ou $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{27}$

6. a) $(1, 1)$

b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7. $y = -3x$ ou $y = -4x$

8. $(0, 12), (-2, -12)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{253}{16}\right)$

9. Pontos de abscissas $\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$

10. $y = 3x + 2$

$$11. \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$12. \quad (a, b) \text{ tal que } b < a^2$$

$$13. \quad \pm 1$$

$$14. \quad -1$$

$$15. \quad y = -x + \frac{1}{4} \text{ ou } y = x + \frac{1}{4}.$$

7.17

$$1. \quad a) -\frac{1}{9} \quad b) 1 \quad c) -\pi \quad d) 0 \quad e) 0 \quad f) \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad g) 0 \quad h) \frac{\sqrt{2}}{8} \quad i) 1$$

$$2. \quad a) \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad b) \frac{3}{\sqrt{1+9x^2}} \quad c) 5^{x^2}[1+2x^2 \ln 5]$$

$$d) (2 + \sin x)^x \left[\ln(2 + \sin x) + \frac{x \cos x}{2 + \sin x} \right]$$

$$e) \sec x \quad f) e^{t^2}[2t \sin 3t + 3 \cos 3t] \quad g) \ln \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \frac{4t^2}{t^4 - 1}$$

$$h) \frac{3x^2 + 4x - 1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad i) \frac{3t^2 - t^4}{(t^2 + 1)^3} \quad j) \frac{3x(4 + x^2)\sec^2 3x + (4 - x^2)\operatorname{tg} 3x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$l) \sec x \quad m) \frac{e^{\sec \sqrt{x}} [\sqrt{x} \sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} - 2]}{2x^2} \quad n) e^{x^x} x^x (1 + \ln x)$$

$$o) \operatorname{tg}^3 x \quad p) \frac{1-x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \quad q) -\frac{(2 - \sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}} \quad r) \frac{12 \ln 2}{(2^{3t} + 2^{-3t})^2}$$

$$s) -\frac{1}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} \quad t) -6e^{-3x} \cos 3x \quad u) -5 \operatorname{cotg}^3 5x$$

$$3. \quad a) -\frac{y \cos xy}{3y^2 + x \cos xy}$$

$$b) \frac{1-y}{x+e^y}$$

$$c) \frac{1+y^x \ln y}{2y - xy^{x-1}}$$

$$d) \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}$$

$$4. \quad y - 5 = -\frac{5}{38}(x-1) \text{ e } y - 5 = \frac{38}{5}(x-1)$$

$$5. \quad x + y = 2 \text{ ou } x + y = -2$$

6. $x + 4y = 9$ ou $-x + 4y = 9$

8. $x + y = -1$

9. $0,5 \text{ m}^2/\text{s}$

10. $\frac{0,064 \pi}{3} \text{ m}^3/\text{s}$

11. $\frac{0,3 - 0,4rh}{r^2}$

13. $-\frac{0,1}{3} \text{ cm/s}$

14. $0,003 \text{ m/min}$

17. $a = \frac{1}{3}$

21. a) $2x^2 + 2$

b) $4x^3 + 4x$

22. a) $\cos(\sin x)$

b) $-x^2$

c) $\frac{2 \ln(x^2 + 1)}{1 + [\ln(x^2 + 1)]^2}$

d) $2e^{-x^2} e^{(e^{x^2})^2}$

23. a) $\cos(\sin x) \cos x$

b) 1

25. a) $\frac{d^2x}{dt^2} = -9x$

b) $-\frac{9}{2}$

27. a) $h''(t) = -9 \cos 3t f'(\cos 3t) + 9 \sin^2 3t f''(\cos 3t)$

28. a) $y^2 + 2t^2 y^3$

b) 3

29. a) $\cos y + (x + \sin y)(\cos 2y - x \sin y)$

34. $P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3$, ou seja,
 $P(x) = 6 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$
39. a) $\frac{101}{98}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $-\frac{8}{17}$ d) $\frac{1}{2}$
41. a) 1 b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{6\pi}{7}$

CAPÍTULO 8

8.1

1. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $-\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{\pi}{3}$ g) $-\frac{\pi}{6}$
h) $-\frac{\pi}{2}$ i) $-\frac{\pi}{3}$ j) $-\frac{\pi}{3}$ l) $\frac{\pi}{6}$ m) $-\frac{\pi}{6}$
3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) x f) x g) $\frac{\pi}{3}$ h) 0
i) $-\frac{\pi}{3}$ j) \bar{x}
7. a) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ b)
8. $g(x) = \frac{1}{x}$
9. $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

