

Aula 5

Geometria Euclidiana

O Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências

5 de julho de 2018

Lourena Rocha

`lourena@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal-RN

Ângulo Interno e Externo

Retas Paralelas e Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios

Bibliografia

IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

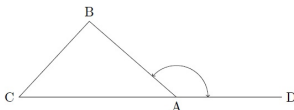
Exercícios

Bibliografia

Ângulo Interno e Externo

Definição 5.1

Se ABC é um triângulo, os seus ângulos \widehat{ABC} , \widehat{BCA} e \widehat{CAB} são chamados de **ângulos internos** ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de **ângulos externos** do triângulo.



Teorema 5.2 (ÂNGULO EXTERNO)

Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

2 Ângulo Interno e Externo

Retas Paralelas e Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios

Bibliografia

Ângulo Interno e Externo



IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Proposição 5.3

A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° .

Corolário 5.4

Todo triângulo possui, pelo menos, dois ângulos internos agudos.

Corolário 5.5

Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira, então, m e n não se interceptam.

3 Ângulo Interno e Externo

Retas Paralelas e Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios

Bibliografia

Retas Paralelas e Perpendiculares



IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

4 Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios

Bibliografia

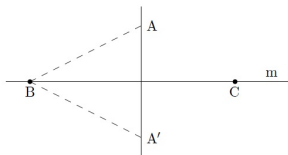
Definição 5.6

Duas retas que não se interceptam são ditas **paralelas**.

Proposição 5.7

Por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a reta dada.

Reflexo do ponto A



Definição

Na figura acima, o ponto A' é obtido sobre uma reta perpendicular à reta m passando por A , de modo que $BA' = BA$, onde B é um ponto qualquer sobre m . Tal ponto A' obtido a partir de A e m é chamado de **reflexo do ponto A** relativamente à reta m .

O reflexo é caracterizado pelas seguintes condições:

1. AA' é perpendicular a m , e
2. m corta AA' no seu ponto médio.

Definição

A função F_m que associa a cada ponto do plano o seu reflexo relativamente a uma reta m fixada é chamada **reflexão**.

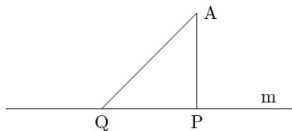
A reflexão tem as seguintes propriedades:

- ▶ $F_m(F_m(A)) = A$ para todo ponto A ,
- ▶ $F_m(A) = A$ se e somente se A for ponto da reta m ,
- ▶ $\overline{F_m(A)F_m(B)} = \overline{AB}$, ou seja, F_m preserva a distância entre pontos do plano, e
- ▶ se $A \in m$, $B \notin m$ e $B' = F_m(B)$, então m é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAB'}$.

Outras definições

Definição

Dado um ponto A e uma reta m , a perpendicular a m passando por A intercepta m em um ponto P chamado **pé da perpendicular** baixada do ponto A à reta m . Se Q é qualquer outro ponto de m , o segmento AQ é dito ser **oblíquo** relativamente a m .



Definição

Na figura acima, o segmento QP é chamado de **projeção do segmento** QA sobre a reta m . O número \overline{AP} é chamado de **distância** do ponto A à reta m .

IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

7 Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

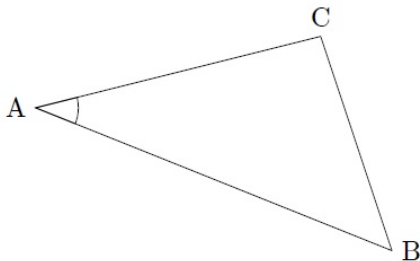
Exercícios

Bibliografia

Ângulo Oposto

Definição

Dado um triângulo ABC , diremos que o lado BC **opõe-se ao ângulo \hat{A}** ou, de maneira equivalente, que o ângulo \hat{A} é **oposto ao lado BC** .



IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

8 Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios

Bibliografia

Proposição 5.8

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então, seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Proposição 5.9

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então, os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Desigualdade Triangular



Teorema 5.10

Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

Teorema 5.11 (DESIGUALDADE TRIANGULAR)

Dados três pontos distintos A , B e C do plano, tem-se que

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Igualdade ocorre se e somente se B pertencer ao segmento AC .

Proposição 5.12

Sejam a , b e c três números positivos. Suponha que $|a - b| < c < a + b$. Então, pode-se construir um triângulo cujos lados medem a , b e c .

IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

10

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

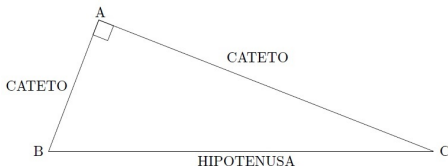
Exercícios

Bibliografia

Triângulo Retângulo

Definição 5.13

Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado **triângulo retângulo**. O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**, e os outros dois lados são denominados **catetos**.



Triângulo Retângulo



Teorema 5.14 (CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \widehat{C} e \widehat{C}' . Se alguma das condições abaixo ocorrer, então, os dois triângulos são congruentes:

1. $BC = B'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$,
2. $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, e
3. $AB = A'B'$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$.

Os casos acima podem ser identificados como igualdade entre:

1. $(c \cdot a)$ cateto e ângulo oposto,
2. $(h \cdot c)$ hipotenusa e cateto, e
3. $(h \cdot a)$ hipotenusa e ângulo agudo.

IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

12 Triângulo Retângulo

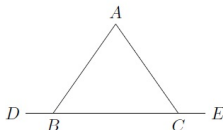
Exercícios

Bibliografia

Exercícios

1. Prove que se um triângulo tem dois ângulos externos congruentes, então ele é isósceles.

2. Na figura abaixo os ângulos externos \widehat{ACE} e \widehat{ABD} satisfazem a desigualdade $\widehat{ACE} < \widehat{ABD}$. Mostre que $\widehat{ABD} > \widehat{ABC}$

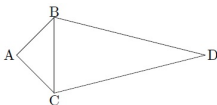


3. Prove que um triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

Exercícios

4. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos em que $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Decida se ABC e $A'B'C'$ são congruentes ou não. (Prove que eles são congruentes ou dê um exemplo para mostrar que as hipóteses podem ocorrer sem que os dois triângulos sejam congruentes.)

5. Na figura abaixo, tem-se $\overline{BD} > \overline{BC}$ e $\hat{A} > \hat{ABC}$. Prove que $\overline{BD} > \overline{AC}$.



6. Se um triângulo ABC é equilátero e D é um ponto do segmento BC , mostre que $\overline{AD} > \overline{DB}$.

Exercícios



IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

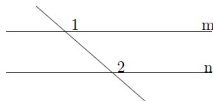
Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

15 Exercícios

Bibliografia

7. Na figura abaixo, $\hat{1} = \hat{2}$. Mostre que as retas m e n são paralelas.

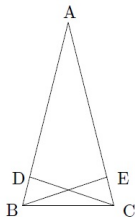


8. Mostre que se duas retas têm uma perpendicular comum, então elas não se interceptam.

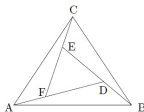
9. Prove as propriedades da função *reflexão*, constantes dos slides.

Exercícios

10. No triângulo ABC da figura abaixo, tem-se CD perpendicular a AB , BE perpendicular a AC e $CD = BE$. Mostre que ABC é um triângulo isósceles.



11. Na figura abaixo ABC é um triângulo equilátero e $AD = BE = CF$. Se, além disso, $\widehat{DAB} = \widehat{EBC}$, mostre que DEF é também equilátero.



IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

16 Exercícios

Bibliografia

- [1] BARBOSA, João L M.
Geometria Euclidiana Plana.
11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IMD1003 - Geometria
Euclidiana
Lourena Rocha

Ângulo Interno e
Externo

Retas Paralelas e
Perpendiculares

Reflexo e Reflexão

Outras definições

Ângulo Oposto

Desigualdade
Triangular

Triângulo Retângulo

Exercícios