

Aula 1

Axiomas de Incidência e Ordem

IMD1003 Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

`lourena@imd.ufrn.br`

Instituto Metr pole Digital

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal-RN

Agenda



Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

2 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Pinceladas sobre Conjuntos

Definição

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de objetos, chamados seus **elementos** ou **membros**.

Geralmente definimos um determinado conjunto listando seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto contendo os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é escrito como $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- ▶ Conjuntos são representados por letras maiúsculas. Ex.: A, B, C
- ▶ Elementos são representados por letras minúsculas. Ex.: x, y, z

Relação de Pertinência

- ▶ Se x é um elemento do conjunto A dizemos que x *pertence a* A e escrevemos: $x \in A$.
- ▶ Se x **não** é um elemento do conjunto A , dizemos que x *não pertence a* A e escrevemos: $x \notin A$.

Assim, dado um elemento x e um conjunto A , verifica-se apenas uma das duas possibilidades:

$$x \in A, \quad x \notin A.$$

Pinceladas sobre Conjuntos (cont.)



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

5 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição:

De uma maneira mais geral, definimos o **Conjunto Vazio**, como sendo o conjunto desprovido de elementos.

Notação: Usaremos o símbolo \emptyset para designar o tal conjunto.

Relação de Inclusão

Dados conjuntos A e B , dizemos que A é **subconjunto** de B se todos os elementos de A são também elementos de B e denotamos

$$A \subseteq B \quad \text{ou} \quad B \supseteq A.$$

Também podemos dizer que A **está contido em** B , ou que B **contém** A .

Em símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Pinceladas sobre Conjuntos (cont.)



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

7 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Usaremos $A \not\subseteq B$, para dizer que A **não é um subconjunto** de B , ou seja, que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$.

Em símbolos:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } a \notin B.$$

Igualdade de Conjuntos:

Dados dois conjuntos A e B (em um mesmo conjunto universo), dizemos que A **é igual a** B , e escrevemos $A = B$ se possuem os mesmos elementos.

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

As seguintes propriedades são conseqüências diretas da definição de igualdade de conjuntos.

1. $A = A$, qualquer que seja o conjunto A ,
2. se $A = B$ então $B = A$, e
3. se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Pinceladas sobre Conjuntos (cont.)



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

9 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição:

Dados dois conjuntos A e B , sua **interseção** é o conjunto denotado por $A \cap B$ (lê-se: A interseção B), formado por todos os elementos que pertencem a A e a B , ou seja,

$$A \cap B = \{x ; x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Pinceladas sobre Conjuntos (cont.)



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

10 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição:

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os conjuntos A e B são **disjuntos**.

Pinceladas sobre Conjuntos (cont.)



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

11 Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição:

Dados dois conjuntos A e B , sua **união** é o conjunto denotado por $A \cup B$ (lê-se “ A união B ”), formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B , ou a ambos, isto é,

$$A \cup B = \{x ; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

12 Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Axiomas de Incidência

Axiomas de Incidência



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

13 Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Axioma I_1

Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

Axioma I_2

Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Definição

Quando duas retas têm um ponto em comum, diz-se que elas se *intersectam* ou que elas se cortam naquele ponto.

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

14 Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição

Quando duas retas têm um ponto em comum, diz-se que elas se *intersectam* ou que elas se cortam naquele ponto.

Proposição

Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

14 Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

Definição

Quando duas retas têm um ponto em comum, diz-se que elas se *intersectam* ou que elas se cortam naquele ponto.

Proposição

Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Prova: Sejam m e n duas retas distintas. A intersecção destas duas retas não pode conter dois (ou mais) pontos, do contrário, pelo axioma I_2 elas coincidiriam. Logo, a intersecção de m e n é vazia ou contém apenas um ponto.

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

14 Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

Bibliografia

- Utilizaremos letras maiúsculas A, B, C, \dots para designar pontos, e letras minúsculas a, b, c, \dots para designar retas.
- Dados três pontos A, B, C em uma reta, dizemos que o ponto C *localiza-se entre* A e B ou, equivalentemente, os pontos A e B *estão separados pelo ponto* C , se eles estão colocados como na figura abaixo:



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

Axiomas de Incidência

16 Axiomas de Ordem

Bibliografia

Axiomas de Ordem

Axioma II_1

Dados três pontos distintos de uma reta, só um deles localiza-se entre os outros dois.

Definição

O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado **segmento** AB . Os pontos A e B são denominados **extremos** ou **extremidades** dos segmento.

Definição

Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C , tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de **semirreta** de origem A contendo o ponto B , e é representado por S_{AB} . O ponto A é, então, denominado **origem** da semirreta S_{AB} .



Note que dois pontos A e B determinam duas semirretas S_{AB} e S_{BA} as quais contêm o segmento AB .



Proposição

Para as semirretas determinadas por dois pontos A e B tem-se:

- a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta determinada por A e B .
- b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Prova: No quadro.

Axioma II_2

Dados dois pontos distintos A e B , sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D , tal que B está entre A e D .

Consequências:

- ▶ Entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos.
- ▶ Uma semirreta S_{AB} contém um infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento AB .

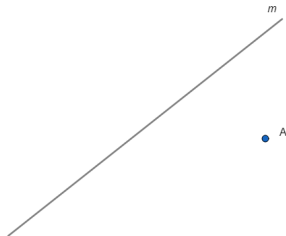
Considere uma reta m e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Diremos que A e B estão em um mesmo lado da reta m se o segmento AB não a intercepta.

Definição

Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a m . O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m , é chamado de **semi-plano** determinado por m contendo A , e será representado por P_{mA} .

Axioma II_3

Uma reta m determina exatamente dois semiplanos distintos cuja intersecção é a reta m .



Leitura e Atividades Sugeridas



Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

Axiomas de Incidência

23 Axiomas de Ordem

Bibliografia

Livro do João Lucas, Capítulo 1.
Fazer os exercícios e problemas do capítulo.

Geometria Euclidiana

Lourena Rocha

Introdução

Axiomas de Incidência

Axiomas de Ordem

24 Bibliografia

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques.
Geometria Euclidiana Plana.
11. ed. SBM, 2012.
- [2] Euclides
Os Elementos.
Unesp, 2009.