Capítulo 1

Matemática Elementar

Conjuntos

19 de fevereiro de 2019

Igor Oliveira

igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação da Aula

Motivação

Praticamente toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos mesmo sendo a mais simples das ideias matemáticas. Portanto, o bom entendimento de como trabalhar com conjuntos é fundamental.

A Noção de Conjunto

- Um conjunto é <u>definido</u> por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são <u>iguais</u> se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

A Noção de Conjunto

- Um conjunto é <u>definido</u> por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são <u>iguais</u> se, e somente se, possuem os mesmos elementos.
- Dados um conjunto A e um objeto qualquer b, há somente uma pergunta cabível para nós: b é um elemento do conjunto A? Tal pergunta só admite <u>sim</u> ou <u>não</u> como resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é <u>verdadeira</u> ou é <u>falsa</u>, sem possibilidade de uma terceira opção ou de ser as duas coisas ao mesmo tempo.

A Noção de Conjunto

- Um conjunto é definido por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.
- Dados um conjunto A e um objeto qualquer b, há somente uma pergunta cabível para nós: b é um elemento do conjunto A? Tal pergunta só admite sim ou não como resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é verdadeira ou é falsa, sem possibilidade de uma terceira opção ou de ser as duas coisas ao mesmo tempo.
  - O item anterior faz parecer que a Matemática é infalível se utilizada corretamente, mas ela não é. Gödel provou que todo sistema formal é falho no sentido de que vai possuir verdades que não podem ser provadas – os chamados paradoxos. Antes de assistir ao vídeo `Este vídeo está mentindo`, reflita se você vai acreditar nele ou não.

Exemplo 1

O conjunto PP dos números primos pares pode ser representado por $PP = \{x\ ;\ x \text{ é primo e par}\} = \{2\}$. Nunca escreva $PP = \{\text{números primos pares}\}$.

Exemplo 2

Temos $V = \{a, e, i, o, u\}$ como sendo o conjunto das vogais.

Quando um elemento pertence a um determinado conjunto, usamos o símbolo $\in$, e, quando não pertence, usamos $\notin$.

Exemplo 3

Considere PP e V conforme definido anteriormente. Temos que $e \in V$ e $3 \notin PP$.

A Noção de Conjunto

Definição 4

O conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e é representado por $\emptyset$.

Exemplo 5

Quais outros conjuntos você conhece? Que tal pensar sobre o conjunto $A = \{x \;;\; x \notin A\}$?

A Relação de Inclusão

Definição 6

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B. Para indicar esse fato, usa-se a notação $A \subset B$.

Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Em outras palavras, existe pelo menos um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

Definição 7

Quando $A \subset B$, dizemos que B contém A e escrevemos $B \supset A$.

A Relação de Inclusão

Exemplo 8

Sejam T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.

Exemplo 9

Na Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos.
Quando dizemos que uma reta r está no plano Π, estamos afirmando que r está contida em Π ou, equivalentemente, que r é um subconjunto de Π, pois todos os pontos que pertencem a r pertencem também a Π.
Nesse caso, deve-se escrever $r \subset \Pi$. Porém, não é correto dizer que r pertence a Π, nem escrever $r \in \Pi$. Os elementos do conjunto Π são pontos e não retas.

A Relação de Inclusão

Exemplo 10

Para todo conjunto A, vale $\emptyset \subset A$.

Definição 11

Dizemos que $A \neq \emptyset$ é um <u>subconjunto próprio</u> de B quando $A \subset B$ e $A \neq B$.

A Relação de Inclusão

Proposição 12 (Propriedades da inclusão)

Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. Reflexividade: $A \subset A$;
ii. Antissimetria: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
iii. Transitividade: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Demonstração no quadro.

A Relação de Inclusão

Definição 13

Dado um conjunto A, chamamos de conjunto das partes de A o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 14

Dado $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

O Complementar de um Conjunto

A noção de complementar de um conjunto só faz sentido quando fixamos um conjunto universo, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Uma vez fixado $\mathcal{U}$, todos os elementos considerados pertencerão a $\mathcal{U}$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $\mathcal{U}$. Por exemplo, na geometria plana, $\mathcal{U}$ é o plano.

Definição 15

Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de $\mathcal{U}$), chama-se complementar de A ao conjunto A^C formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A.

Exemplo 16

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos. Qual o complementar do conjunto dos triângulos escalenos?

O Complementar de um Conjunto

Proposição 17 (Propriedades do complementar)

Fixado um conjunto universo $\mathcal{U}$, sejam A e B conjuntos. Tem-se:

i. $\mathcal{U}^C = \emptyset$ e $\emptyset^C = \mathcal{U}$;

ii. $\left(A^C\right)^C = A$ (Todo conjunto é complementar do seu complementar);

iii. Se $A \subset B$ então $B^C \subset A^C$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar desse outro).

Demonstração no quadro.

O Complementar de um Conjunto

Definição 18

A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:

$$B \setminus A = \{x \,;\, x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

- Em geral, não temos $B \setminus A = A \setminus B$. Pense em um contraexemplo a essa igualdade.
- Note que $A^C = \mathcal{U} \setminus A$.

União e Interseção de Conjuntos

Definição 19

Dados os conjuntos A e B:

i. A união (ou reunião) $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B;

ii. A interseção $A \cap B$ é o conjunto formado por elementos que pertencem a ambos A e B.

Exemplo 20

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

União e Interseção de Conjuntos

Proposição 21 (Propriedades da união e interseção)

Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

ii. Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

iii. Distributividade, de uma em relação à outra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

iv. $A \subset (A \cup B)$ e $(A \cap B) \subset A$;

v. Leis de DeMorgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Demonstração no quadro.

Atividade Online

Atividade 01 – Notação Básica de Conjunto

Veja o desempenho na Missão O Mundo da Matemática - Probabilidade

Em toda essa seção, considere P e Q propriedades aplicáveis aos elementos de $\mathcal{U}$. Considere também $A = \{x \; ; \; x \text{ possui } P\}$ e $B = \{x \; ; \; x \text{ possui } Q\}$.

- Inclusão e implicação: $A \subset B$ é equivalente a $P \implies Q$.
- Igualdade e bi-implicação: $A = B$ é equivalente a $P \iff Q$.

Exemplo 22

Analise as implicações abaixo:

$$\begin{aligned} x^2+1=0 &\implies \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=0\cdot\left(x^2-1\right) \\ &\implies x^4-1=0 \\ &\implies x^4=1 \\ &\implies x\in\{-1,1\} \end{aligned}$$

Isso quer dizer que o conjunto solução de $x^2+1=0$ é $\{-1,1\}$?

Conjuntos e Lógica

- Complementar e negação: A^C é equivalente a $\sim P$;
- Podemos combinar os itens (ii) e (iii) da Proposição 17 (Propriedades do complementar) e obter que

$$P \implies Q \text{ se, e somente se, } \sim Q \implies \sim P.$$

  Chamamos $\sim Q \implies \sim P$ de contrapositiva de $P \implies Q$.
- Chamamos $Q \implies P$ de recíproca de $P \implies Q$ e $P \wedge \sim Q$ de negação de $P \implies Q$.

Exemplos no Exercício 29.

Exemplo 23

Observe as afirmações abaixo:

- Todo número primo maior do que 2 é ímpar;
- Todo número par maior do que 2 é composto.

Essas afirmações dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos. Podemos reescrevê-las na forma de implicações vendo claramente que uma é a contrapositiva da outra, todas sob a hipótese que $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$:

$$\begin{aligned} n \text{ primo} &\implies n \text{ ímpar} \\ \sim (n \text{ ímpar }) &\implies \sim (n \text{ primo }) \\ n \text{ par} &\implies n \text{ composto} \end{aligned}$$

- União e disjunção: $A \cup B$ é equivalente a $P \vee Q$ (P ou Q).
- Interseção e conjunção: $A \cap B$ é equivalente a $P \wedge Q$ (P e Q).

Observação 24

O conectivo lógico ou tem significado diferente do usado normalmente no português. Na linguagem coloquial, usamos P ou Q sem permitir que sejam as duas coisas ao mesmo tempo. Analisem a seguinte história:
Um obstetra que também era matemático acabara de realizar um parto quando o pai perguntou: “É menino ou menina, doutor?”. E ele respondeu: “sim”.

$A = B$	$P \iff Q$
$A \subset B$	$P \implies Q$
A^C	$\sim P$
$A \cup B$	$P \vee Q$
$A \cap B$	$P \wedge Q$

Problema: A polícia prende quatro homens, um dos quais cometeu um furto. Eles fazem as seguintes declarações:

- Arnaldo: Bernaldo fez o furto.
- Bernaldo: Cernaldo fez o furto.
- Dernaldo: eu não fiz o furto.
- Cernaldo: Bernaldo mente ao dizer que eu fiz o furto.

Se sabemos que só uma destas declarações é a verdadeira, quem é culpado pelo furto?

Exercícios

1. Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.

a. $\emptyset \in \emptyset$;

b. $\emptyset \subset \emptyset$;

c. $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

d. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

2. Complete as demonstrações da Proposição 21 que não foram feitas em sala de aula.

3. Demonstre que os seguintes itens são equivalentes:

a. $A \cup B = B$;

b. $A \subset B$;

c. $A \cap B = A$.

<u>Dica:</u> Para tanto, é preciso provar **a.** $\iff$ **b.** e **b.** $\iff$ **c.**. Outra maneira é provar **a.** $\implies$ **b.**, **b.** $\implies$ **c.** e por fim, **c.** $\implies$ **a.**.

Exercícios

4. O diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como união de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$.)

a. $\left(X^C \cup Y\right)^C$;

b. $\left(X^C \cup Y\right) \cup Z^C$;

c. $\left(X^C \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z^C\right)$;

d. $(X \cup Y)^C \cap Z$.

5. Exprimindo cada membro como união de regiões numeradas, prove as igualdades:

a. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

b. $X \cup (Y \cap Z)^C = X \cup Y^C \cup Z^C$.

6. Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Exercícios

7. Recorde a definição da diferença entre conjuntos:

$$B \setminus A = \{x \, ; \; x \in B \text{ e } x \notin A\} \, .$$

Mostre que

a. $B \setminus A = \emptyset$ se, e somente se, $B \subset A$;

b. $B \setminus A = B$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$;

c. Vale a igualdade $B \setminus A = A \setminus B$ se, e somente se, $A = B$;

d. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

8. Dê exemplos de implicações, envolvendo conteúdos de ensino médio, que sejam: verdadeiras com recíproca verdadeira; verdadeiras com recíproca falsa; falsas, com recíproca verdadeira; falsas, com recíproca falsa.

9. Considere P, Q e R condições aplicáveis aos elementos de um conjunto universo $\mathcal{U}$, e A, B e C os subconjuntos de $\mathcal{U}$ dos elementos que satisfazem P, Q e R, respectivamente. Expresse, em termos de implicações entre P, Q e R, as seguintes relações entre os conjuntos A, B e C.

a. $A \cap B^C \subset C$;

b. $A^C \cup B^C \subset C$;

c. $A^C \cup B \subset C^C$;

d. $A^C \subset B^C \cup C$;

e. $A \subset B^C \cup C^C$.

10. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} x = 1 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \\ &\iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Conclusão (?): $x = 1 \iff x = \pm 1$. Onde está o erro?

Exercícios

11. Escreva as recíprocas, contrapositivas e negações matemáticas das seguintes afirmações:

a. Todos os gatos têm rabo; ($G \implies R$)
Recíproca: Se têm rabo então é gato; ($R \implies G$)
Contrapositiva: Se não tem rabo então não é gato; ($\sim R \implies \sim G$)
Negação: Existe um gato que não tem rabo. ($G \wedge \sim R$)

b. Sempre que chove, eu saio de guarda-chuva ou fico em casa;

c. Todas as bolas de ping pong são redondas e brancas;

d. Sempre que é terça-feira e o dia do mês é um número primo, eu vou ao cinema;

e. Todas as camisas amarelas ou vermelhas têm manga comprida;

f. Todas as coisas quadradas ou redondas são amarelas e vermelhas.

Exercícios

12. Considere os conjuntos: *F* composto por todos os filósofos; *M* por todos os matemáticos; *C* por todos os cientistas; e *P* por todos os professores.

a. Exprima cada uma das afirmativas abaixo usando a linguagem de conjuntos:
(i) Todos os matemáticos são cientistas; (ii) Alguns matemáticos são professores; (iii) Alguns cientistas são filósofos; (iv) Todos os filósofos são cientistas ou professores; (v) Nem todo professor é cientista.

b. Faça o mesmo com as afirmativas abaixo:
(vi) Alguns matemáticos são filósofos; (vii) Nem todo filósofo é cientista; (viii) Alguns filósofos são professores; (ix) Se um filósofo não é matemático, ele é professor; (x) Alguns filósofos são matemáticos.

c. Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

Exercícios

13. Considere um grupo de 4 cartões, que possuem uma letra escrita em um dos lados e um número do outro. Suponha que seja feita, sobre esses cartões, a seguinte afirmação: *Todo cartão com uma vogal de um lado tem um número ímpar do outro*. Quais dos cartões abaixo você precisaria virar para verificar se essa afirmativa é verdadeira ou falsa?

A	1	B	4

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L.
Números e Funções Reais.
1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Iniciação à Matemática: um Curso com Problemas e Soluções.
2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.