Inversão de matrizes e determinantes

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de inversão de matrizes e determinantes

1. Determinantes por expansão em cofatores
2. Calculando determinantes por meio de redução por linhas
3. Propriedades dos determinantes; regra de Cramer

Determinantes por expansão em cofatores

Lembre-se que uma matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1}$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$ e que a expressão $ad - bc$ é denominada **determinante** da matriz A. Lembre, também, que esse deteminante é denotado escrevendo

$$\det(A) = ad - bc \text{ ou } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{2}$$

e que a inversa de A pode ser expressa em termos do determinante por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{3}$$

Determinantes

A principal ideia deste estudo é obter uma fórmula análado a Eq. (3) que seja aplicável a matrizes quadradas de todas as ordens. Para isso, é conveniente usar entradas com índices ao escrever matrizes ou determinantes. Assim, denotando uma matriz 2×2 por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

as duas equações em (2) tomam a forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{5}$$

Menores principais e cofatores

A definição seguinte é fundamental para o nosso objetivo de definir o determinante de uma matriz de ordem superior

Definition

Se A for uma matriz quadrada, então o **menor da entrada** a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a $i-$ésima linha e a $j-$ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é denominado **cofator da entrada** a_{ij}.

Exemplo

Example

Encontre os menores principais e cofatores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Observação: Tabuleiro de xadrez

Observe que um menor M_{ij} e seu cofator C_{ij} são ou iguais ou negativos um do outro, e que o sinal $(-1)^{i+j}$ que os relaciona é $+1$ ou -1 de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{7}$$

Por exemplo,

$$C_{11} = M_{11}, \quad C_{21} = -M_{21}, \quad C_{22} = M_{22} \tag{8}$$

e assim por diante. Assim, realmente nunca é preciso calcular $(-1)^{i+j}$ para encontrar C_{ij} basta calcular o menor M_{ij} e ajustar o sinal, se necessário, de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez.

Note que, $\det(A)$ pode ser expresso em termos de cofatores das quatro maneiras a seguir

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\
a_{21}C_{21} &+ a_{22}C_{22} \\
a_{11}C_{11} &+ a_{21}C_{21} \\
a_{12}C_{12} &+ a_{22}C_{22}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Cada uma das quatro últimas equações é denominada expansão em cofatores do $\det(A)$. Em cada expansão de cofatores, todas as entradas e os cofatores vêm da mesma linha ou coluna de A. Por exemplo, na primeira equação, todas as entradas e os cofatores vêm da primeira linha de A; na segunda, todas elas vêm da segunda linha de A; na terceira, todas elas vêm da primeira coluna de A; e na quarta, todas elas vêm da segunda coluna de A.

Teorema dos cofatores

Theorem

Se A for uma matriz $n \times n$, então independentemente de qual linha ou coluna escolhermos, sempre obteremos o mesmo número multiplicando as entradas daquela linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e somando os produtos obtidos.

Cálculo do determinante

Definition

Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado **determinante de A**. As próprias somas são denominadas **expansões em cofatores de** $\det(A)$, ou seja,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \tag{10}$$

e

$$\det(A) = a_{ij}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \tag{11}$$

Exemplos

Example

Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

expandindo em cofatores ao longo da primeira linha.

Example

Seja a matriz A do exemplo anterior. Calcule $\det(A)$ expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna de A.

Exemplo

Example

Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Determinante de uma matriz triangular inferior

As contas a seguir mostram que o determinante de uma matriz triangular inferior 4×4 é o produto de suas entradas diagonais. Cada parte da conta usa uma expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & 4_{44} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}
\end{aligned} \tag{14}$$

Determinante de matrizes triangulares

Theorem

Se A for uma matriz triangular $n \times n$ (triangular superior, inferior ou diagonal), então $\det(A)$ é o produto das entradas na diagonal principal da matriz, ou seja, $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Regra de Sarrus

Example

Utilize a regra de Sarrus para calcular os determinantes das matriz abaixo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \tag{15}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} \tag{16}$$

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas para calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3.
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

Theorem

Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.

O teorema útil a seguir relaciona o determinante de uma matriz com o determinante de sua transposta.

Theorem

Seja A uma matriz quadrada. Então $\det(A) = \det(A^T)$.

O próximo teorema mostra como uma operação elementar com as linhas de uma matriz afeta o valor de seu determinante.

Theorem

Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) *Se B for a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de A é multiplicada por um escalar κ, então $\det(B) = \kappa \det(A)$.*

(b) *Se B for a matriz que resulta quando duas linhas ou colunas de A são permutadas, então $\det(B) = -\det(A)$.*

(c) *Se B for a matriz que resulta quando um mútiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um mútiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.*

Caso das matrizes elementares

Theorem

Seja E uma matriz elementar $n \times n$.

(a) *Se E resulta da multiplicação de uma linha de I_n por um número não nulo κ, então $\det(E) = \kappa$.*

(b) *Se E resulta da permutação de duas linhas de I_n, então $\det(E) = -1$.*

(c) *Se E resulta da soma de um múltiplo de uma linha de I_n com uma outra linha, então $\det(E) = 1$.*

Exemplos

Example

Calcule mentalmente o determinante das seguintes matrizes elementares:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Matriz com linhas proporcionais

Se uma matriz quadrada A tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Analogamente para colunas. Mas somar um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que devemos ter $\det(A) = 0$. Isso prova o teorema seguir.

Theorem

Se A for uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

Exemplo

Example

Calcule o determinante da matriz dada a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Método de redução por linhas para calcular um determinante

Veremos, agora, um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos cálculos do que a expansão em cofatores. A ideia do método é reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares com as linhas, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e, finalmente, relacionar esse determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

Example

Calcule $\det(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Exemplo

Usando operações com colunas para calcular um determinante

Example

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Às vezes, a expansão em cofatores e as operações com linhas e colunas podem ser usadas em combinação para fornecer um método eficaz de calcular determinantes. Veja o exemplo a seguir.

Example

Calcule $\det(A)$, com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Aptidões desenvolvidas

- Conhecer o efeito de operações elementares com linhas no valor do determinante.
- Conhecer o determinante dos três tipos de matrizes elementares
- Saber como introduzir zeros nas linhas ou colunas de uma matriz para facilitar o cálculo de seu determinante.
- Usar redução por linhas para calcular o determinante de uma matriz.
- Usar operações com as colunas para calcular o determinante de uma matriz
- Combinar o uso de redução por linhas e expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz.

Suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ e que κ seja um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$ e $\det(B)$, isto é,

$$\det(\kappa A),\ \det(A+B) \text{ e } \det(AB). \tag{24}$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser trazido para fora do determinante e como cada uma das n linhas de κA tem o fator κ em comum, segue que

$$\det(\kappa A) = \kappa^n \det(A). \tag{25}$$

Exemplo

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & \kappa a_{12} & \kappa a_{13} \\ \kappa a_{21} & \kappa a_{22} & \kappa a_{23} \\ \kappa a_{31} & \kappa a_{32} & \kappa a_{33} \end{vmatrix} = \kappa^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{26}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e o determinante da soma $\det(A + B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A + B)$ geralmente não é igual a $\det(A) + \det(B)$. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.

Exemplo: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ e $\det(A+B) = 23$; assim,

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B). \tag{28}$$

Determinante da soma

Não obstante o aspecto negativo do exemplo precedente, existe uma relação útil que trata de somas de determinantes e que é aplicável quando as matrizes envolvidas são iguais exceto por *uma* linha (ou coluna). Por exemplo, considere as duas matrizes seguintes, que só diferenm na segunda linha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Calculando os determinantes de A e B, obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

Teorema da soma de determinantes

Theorem

Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem somente em uma única linha, diagamos, a $r-$ésima, e suponha que a $r-$ésima linha de C possa ser obtida somando as entradas correspondentes nas $r-$ésimas linhas de A e B. Então,

$$\det(C) = \det(A) + \det(B). \tag{31}$$

O mesmo resultado vale para colunas.

Example

Verifique que

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Determinante da multiplicação de matrizes

Considerando a complexidade das fórmulas de determinantes e multiplicação matricial, poderia paracer improvável que existisse alguma relação simples entre esses conceitos. Isso é o que faz tão surpreendente a simplicidade do nosso próximo resultado. Mostraremos que se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{33}$$

Teste do determinante para a invertibilidade

Theorem

Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$.

Teoremas importantes

Theorem (Teorema de Binet)

Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{34}$$

Theorem (Cálculo da inversa)

Se A for invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{35}$$

Exemplos

Calcule $\det(AB)$, sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Entradas e cofatores de linhas diferentes

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Considere a expressão

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \tag{38}$$

que é formada multiplicando as entradas da primeira linha pelos cofatores das entradas correspondentes da terceira linha e somando os produtos resultantes. Usando o arifício a seguir, mostramos que essa quantidade é zero.

Entradas e cofatores de linhas diferentes

Construa uma nova matriz A' substituindo a terceira linha de A com uma cópia da primeira linha, ou seja,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Sejam C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} os cofatores das entradas da terceira linha de A'. Como as duas primeiras linhas de A e A' são iguais e como os cálculos para obter C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} envolvem somente as entradas das duas primeiras linhas de A e A', segue que

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}. \tag{40}$$

Como A' tem duas linhas idênticas, segue ue

$$\det(A') = 0. \tag{41}$$

Entradas e cofatores de linhas diferentes

Por fim, calculando $\det(A')$ por expansão em cofatores ao longo da terceira linha, dá

$$\begin{aligned} \det(A') &= a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} \\ &= a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}, \end{aligned} \tag{42}$$

que resulta em

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0. \tag{43}$$

Definição: matriz adjunta

Definition

Se A for uma matriz $n \times n$ qualquer e C_{ij} o cofator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{44}$$

é denominada matriz de cofatores de A. A transposta dessa matriz é denominada adjunta de A e denotada por $adj(A)$.

Exemplo

Example

Determine a matriz $adj(A)$, sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Teorema da matriz inversa

Theorem

Se A for uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A). \tag{46}$$

Exemplo

Example

Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Regra de Cramer

Theorem

Se $Ax = b$ for um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$ *, então o sistema tem uma única solução. Essa solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \; \ldots \; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \tag{48}$$

em que A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da $j-$ésima coluna de A pelas entradas da matriz

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{49}$$

Exemplo

Example

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8. \end{aligned} \tag{50}$$