Aplicações da Derivada

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de limite e continuidade

1. O teorema do valor médio

2. Concavidade e pontos de inflexão

3. Regras de L'Hospital

4. Máximos e mínimos

O Teorema do valor médio

Theorem (Teorema do valor médio (TVM))

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{1}$$

Interpretação geométrica do TVM

Geometricamente, este teorema conta-nos que se s é uma reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, talque a reta tangente ao gráfico de f, neste ponto, é paralela à reta s. Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

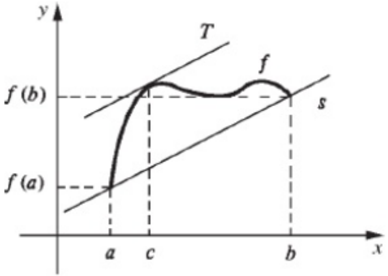


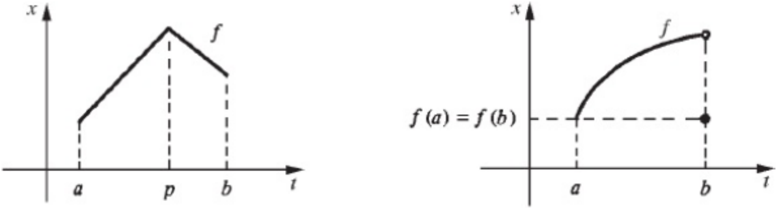
Figura 1: TVM.

Interpretação cinemática do TVM

Vejamos, agora, uma interpretação cinemática para o TVM. Suponhamos que $x = f(t)$ seja a função de posição do movimento de uma partícula sobre o eixo Ox. Assim, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Pois bem, o TVM conta-nos que se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então tal velocidade média será igual à velocidade (instantânea) da partícula em algum instante c entre a e b.

Importância das hipóteses no TVM

As situações que apresentamos a seguir mostram-nos que as hipóteses "f contínua em $[a, b]$ e f derivável em $]a, b[$" são indispensáveis.



f não é derivável em p; não existe c verificando ①.

f não é contínua em $[a, b]$; não existe c verificando ①.

Figura 2: Casos particulares.

Vamos relembrar as seguintes definições. Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f. Dizemos que f é estritamente crescente (estritamente decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t) \quad (f(s) > f(t)). \tag{2}$$

Por outro lado, dizemos que f é crescente (decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A,

$$s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t) \quad (f(s) \geq f(t)). \tag{3}$$

Intervalos de crescimento e de decrescimento

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

Theorem (Intervalos de crescimento e de decrescimento)

Seja f contínua no intervalo I.

a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.*

b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Exemplos

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboce o gráfico.

Example

Seja $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$. Estude f com relação a crescimento e decrescimento. Esboce o gráfico.

Example

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Esboce o gráfico.

Exemplos

Example

Suponha $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ e que existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente decrescente em $]a, c[$ e estritamente crescente em $]c, b[$.

Example

Prove que $g(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$ admite uma única raiz real a, com $-3 < a < -2$.

Example

a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.

b) Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$.

c) Conclua de (b) que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Observação

Vamos mostrar, a seguite, que para $x \to +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x.
Seja $\alpha > 0$ um real dado. Observamos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha\frac{x}{\alpha}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{\alpha u} = +\infty. \tag{4}$$

Temos, agora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right]^\alpha = \lim_{u\to+\infty} u^\alpha = +\infty. \tag{5}$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \ (\alpha > 0) \tag{6}$$

Para $x \to +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de x.

Exemplo

Example

Suponha g derivável no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tal que $\lim_{x \to p^+} g(x) = 0$. Nestas condições, prove que, para todo $x \in I$, tem-se $g(x) > 0$.

Exemplo

Example

Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to p^+} g(x) = 0. \tag{7}$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo $x \in I$, $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que, para todo $x \in I$, tem-se, também,

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta. \tag{8}$$

Exemplo

Example

Sejam f e g deriváveis no intervalo aberto $I =]m, p[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty. \tag{9}$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo x em I, $\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que existem constantes M, N e s, com $s \in]m, p[$, tais que, para todo $x \in]s, p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}. \tag{10}$$

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

$$y - f(p) = f'(p)\,(x - p) \text{ ou } y = f(p) + f'(p)(x - p). \tag{11}$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p). \tag{12}$$

Concavidade para cima

Definition

Dizemos que f tem a concavidae para cima no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x) \tag{13}$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

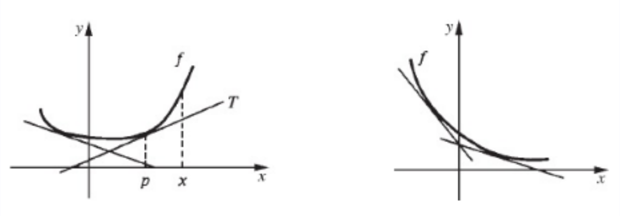


Figura 3: Concavidade voltada para cima.

Concavidade para baixo

Definition

Dizemos que f tem concavidae para baixo no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x) \tag{14}$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

Definition

Sejam f uma função e $P \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existir números reais a e b, com $p \in]a, b[\in D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.

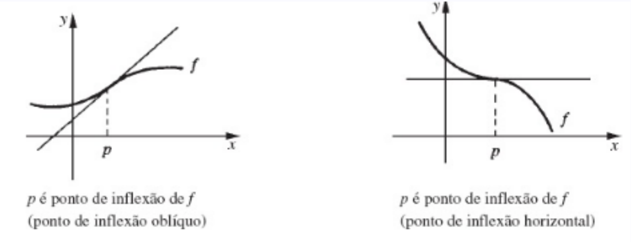


Figura 4: Ponto de inflexão.

Teste da derivada segunda

Theorem

Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I.

a) *Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.*

b) *Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.*

Exemplos

Example

Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Estude f com relação à concavidae e determine os pontos de inflexão.

Example

Esboce o gráfico de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Example

Seja f derivável até a 3^a ordem no intervalo aberto I e seja $P \in I$. Suponha que $f''(p) = 0$, $f'''(p) \neq 0$ e que f''' seja contínua em p. Prove que p é ponto de inflexão.

Exemplo

Example

Seja f derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p. Prove que $f''(p) = 0$ é condição necessária (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f.

As regras de L'Hospital, que vamos enunciar a seguir, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1^a regra de L'Hospital

Definition (1^a regra de L'Hospital)

Sejam f e g deriváveis em $]p-r,p[$ e em $]p,p+r[$ $(r>0)$, com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to p} f(x)=0, \ \lim_{x\to p} g(x)=0 \tag{15}$$

e se $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{16}$$

Observamos que a 1^a regra de L'Hospital continua válida se substituirmos "$x\to p$" por "$x\to p^+$" ou por "$x\to p^-$" ou por "$x\to\pm\infty$".

Definition (2^a regra de L'Hospital)

Sejam f e g deriváveis em $]m, p[$, com $g'(x) \neq 0$ em $]m, p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty \tag{17}$$

e se $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{18}$$

Observamos que a 2^a regra de L'Hospital continua válida se substituirmos "$x \to p^-$" por "$x \to p^+$" ou por "$x \to p$" ou por "$x \to \pm\infty$". A regra permanece válida se substituirmos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.

Example

Calcule

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$

c) $\lim_{x0^+} x \ln x$.

Example

Calcule

a) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Exemplo

Example

Calcule $\lim_{x\to+\infty} e^x \left[e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$.

Example

Calcule

a) $\lim_{x\to0^+} x^x$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left[1+\frac{1}{x^2}\right]^x$

Example

Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$.

Example

Suponha f derivável no intervalo $]p-r, p+r[$, $r>0$, e que a derivada de 2^a ordem de f exista em p. Mostre que se

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left[f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^2\right]^2}{(x-p)^2}=0 \tag{19}$$

então $a=\frac{f''(p)}{2}$.

Gráficos

Para o esboço do gráfico de um função f, sugerimos o roteiro:

a) Explicitar o domínio;

b) Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento;

c) Estudar a concavidade e destacar os pontos de inflexão;

d) Calcular os limites laterias de f, em p, nos casos:

   i) $p \notin D_f$, mas p é extremo de um dos intervalos que compõe D_f,

   ii) $p \in D_f$, mas f não é contínua em p.

e) Calcular os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

f) Determinar ou localizar as raízes de f.

Exemplos

Example

Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Example

Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$.

Example

Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$.

Definition

Sejam f uma função, $A \in D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo de f em A ou que p um ponto de máximo de f em A se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in A$. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A, dizemos então que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A ou que p é um ponto de mínimo de f em A.

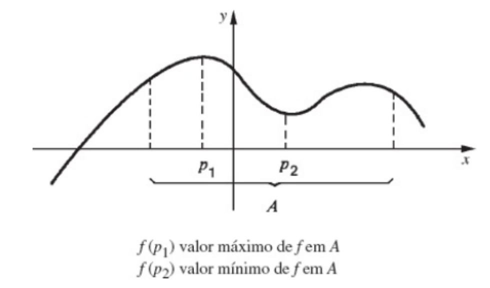


Figura 5: Ponto de máximo e mínimo em A.

Máximo e mínimo global

Definition

Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo global de f ou que p é um ponto de máximo global de f se, para todo x em D_f, $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo x em D_f, $f(x) \geq f(p)$, diremos que $f(p)$ é o valor mínimo global de f ou que p é um ponto de mínimo global de f.

Máximo e mínimo local

Definition

Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é ponto de máximo local de f se existir $f > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(p) \tag{20}$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é ponto de mínimo local de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(p) \tag{21}$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$.

Uma boa maneira de se determinar os pontos de máximo e de mínimo de uma função f é estudá-la com relação a crescimento e decrescimento. Sejam $a < c < b$; se f for crescente em $]a, c[$ e decrescente em $]c, b[$, então c será um ponto de máximo local de f; se f fpr decrescente em $]a, c]$ e crescente em $[c, b[$ então c será um ponto de mínimo local de f.

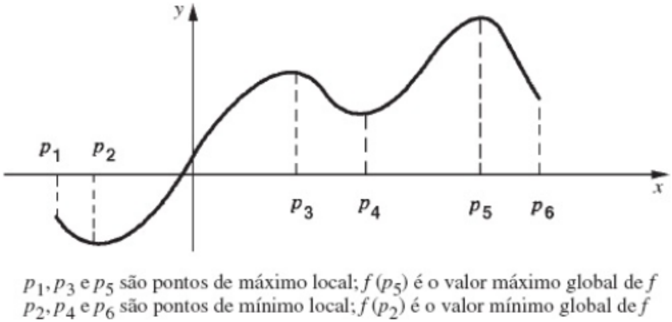


Figura 6: Máximos e mínimos locais.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Estude f com relação a máximos e mínimos.

b) Determine os valores máximo e mínimo de f em $[-2, 3]$. Em que pontos estes valores são atingidos?

Example

Determine dois números positivos cuja soma seja 4 e tal que a soma do cubo menor com o quadrado do maior seja mínima.

Example

Pede-se construir um cilindro circular reto de área total S dada e cujo volume seja máximo.

1. Certa pessoa que se encontra em A, para atingir C, utilizará a travessia do rio (de 100 m de largura) um barco com velocidade máxima de 10 km/h; de B a C utilizará uma bicicleta com velocidade máxima de 15 km/h. Determine B para que o tempo gasto no percurso seja o menor possível.

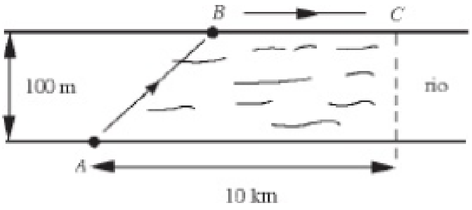


Figura 7: Travessia do rio.

2. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semiesfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

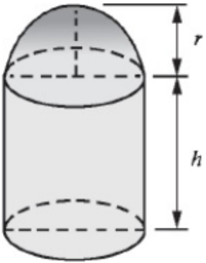
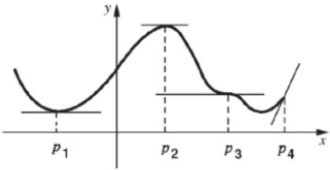


Figura 8: Solido.

Condição necessária e condições suficientes para máximo e mínimos locais

Sejam f uma função e p um ponto interior a D_f (p interior a $D_f \iff$ existe um intervalo aberto I, com $I \subset D_f$ e $p \in I$). Suponhamos f derivável em p. O nosso próximo teorema conta-nos que uma condição necessária, mas não suficiente, para que p seja ponto de máximo ou mínimo local é que $f'(p) = 0$. A figura abaixo dá-nos uma ideia geométrica do que falamos acima.



p_1 é o ponto de mínimo local: $f'(p_1) = 0$
p_2 é o ponto de máximo local: $f'(p_2) = 0$
$f'(p_3) = 0$, mas p_3 nem é ponto de máximo, nem de mínimo; p_3 é ponto de inflexão horizontal
p_4 é ponto de máximo local, mas $f'(p_4) \neq 0$; p_4 não é *ponto interior*.

Teorema - condição necessária para máximo e mínimo

Theorem

Seja f uma função derivável em p, em que p é um ponto interior a D_f. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Um ponto $p \in D_f$ se diz ponto crítico ou ponto estacionário de f se $f'(p) = 0$. O teorema anterior conta-nos, então, que se p for interior a D_f e f derivável em p, então uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local de f é que p seja ponto crítico de f.

Condição suficiente para ponto de máximo e mínimo

Vamos, agora, estabelecer uma condição suficiente para que um ponto p seja ponto de máximo ou de mínimo local.

Theorem

Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ *é ponto de mínimo local.*

b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ *é ponto de máximo loca.*