Caderno de Exercícios
LC1

Marcos Silva

2023

Contents

1 Aula 2

1.1 Exercicio 1

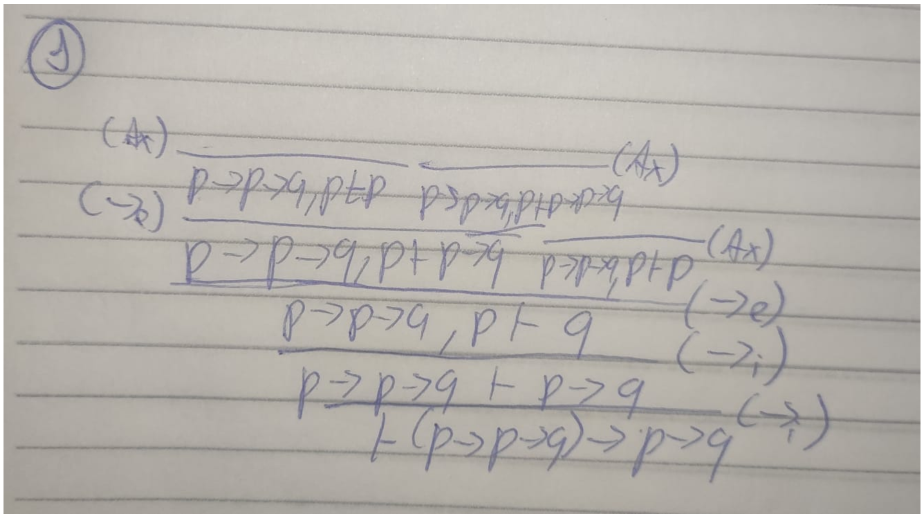

Figure 1: Exercício 1

1.2 Exercicio 2

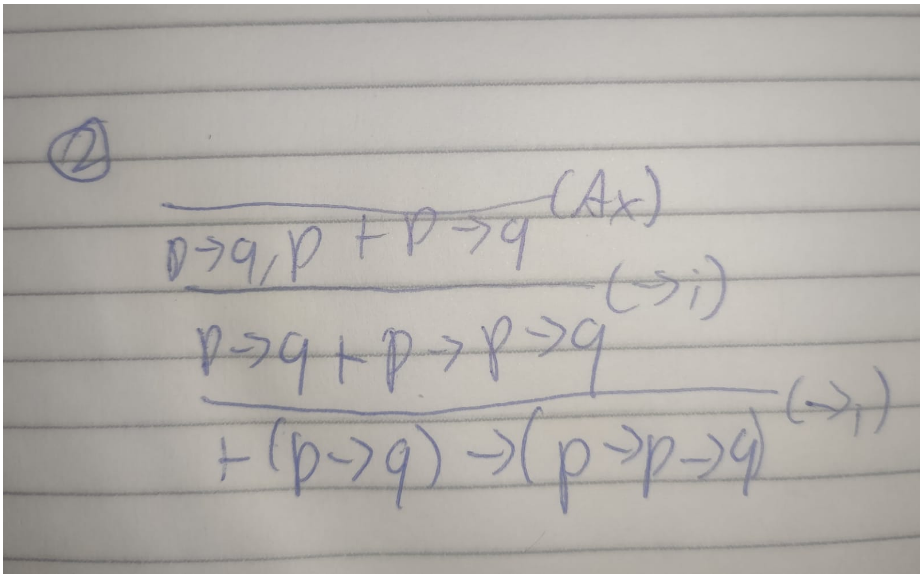

Figure 2: Exercício 2

1.3 Exercicio 3

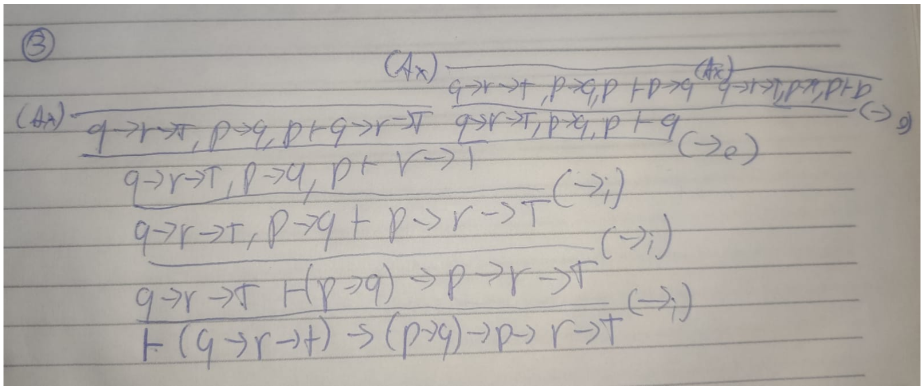

Figure 3: Exercício 3

1.4 Exercício 4

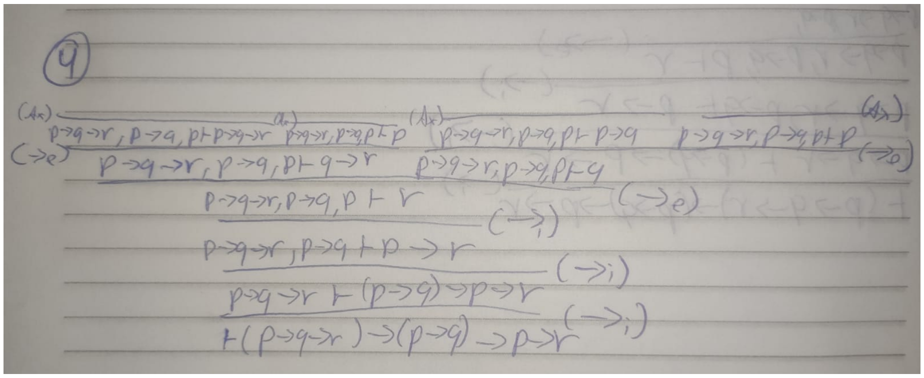

Figure 4: Exercício 4

1.5 Exercício 5

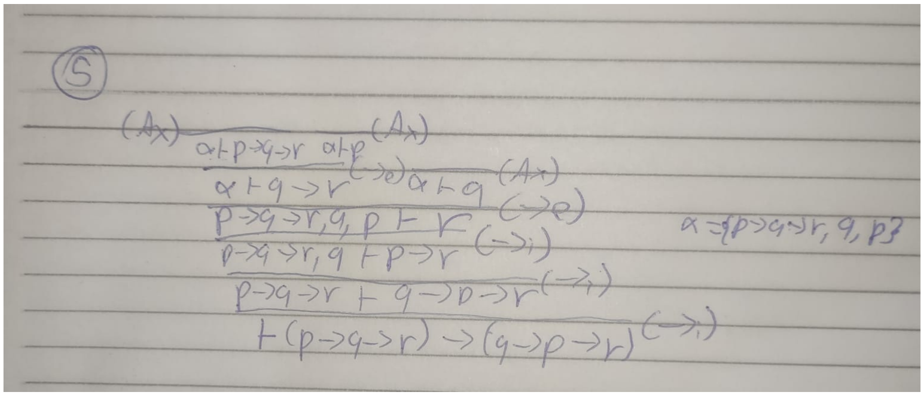

Figure 5: Exercício 5

2 Aula 4

2.1 Exercicio 1 - negação

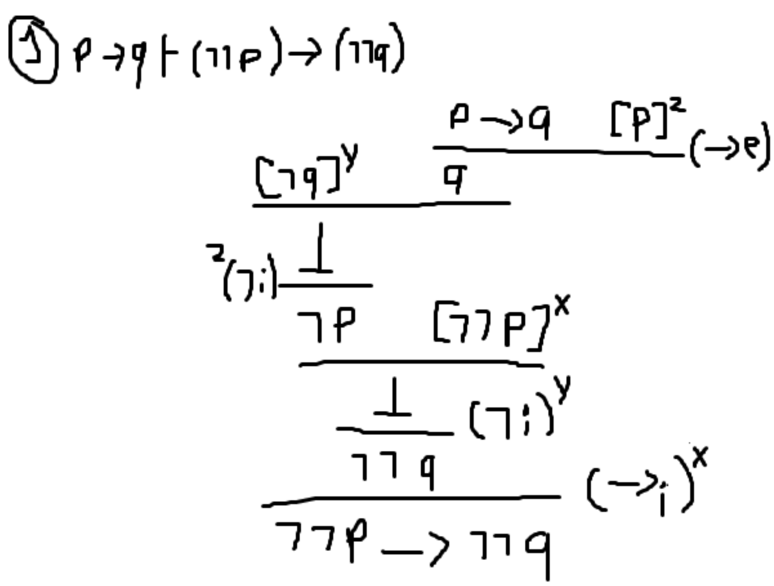

Figure 6: Exercício 1

2.2 Exercicio 2 - negação

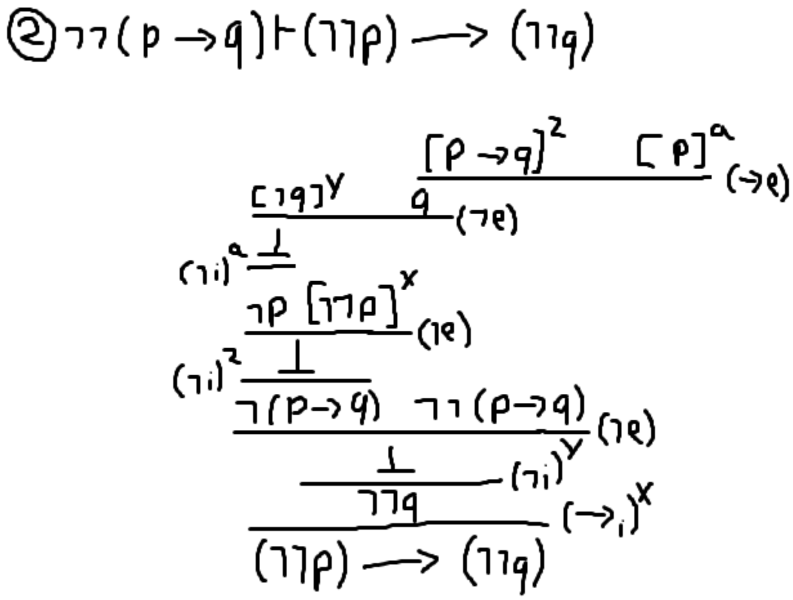

Figure 7: Exercício 2

2.3 Exercicio 3 - negação

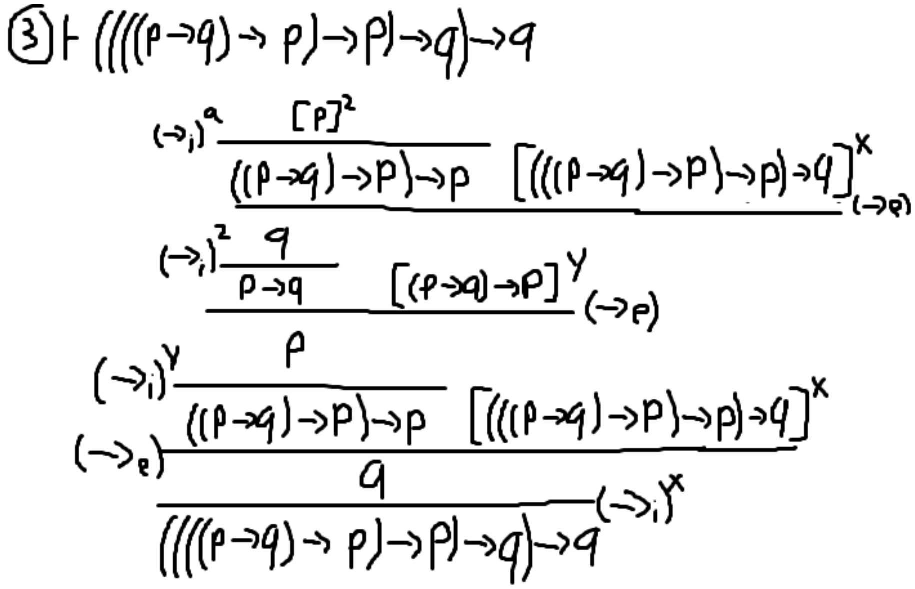

Figure 8: Exercício 3

2.4 Exercício 4 - negação

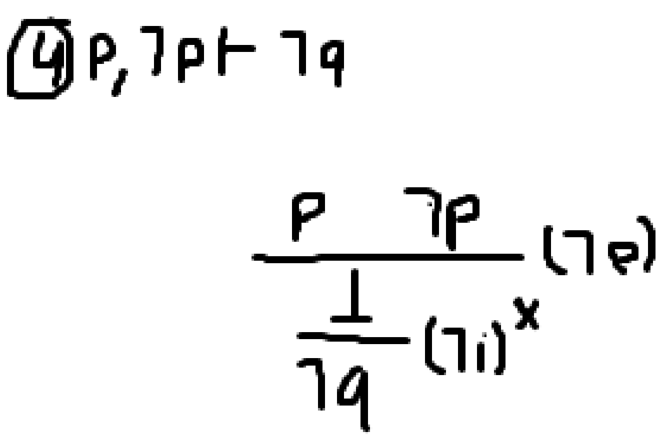

Figure 9: Exercício 4

2.5 Exercício 1 - conjunção

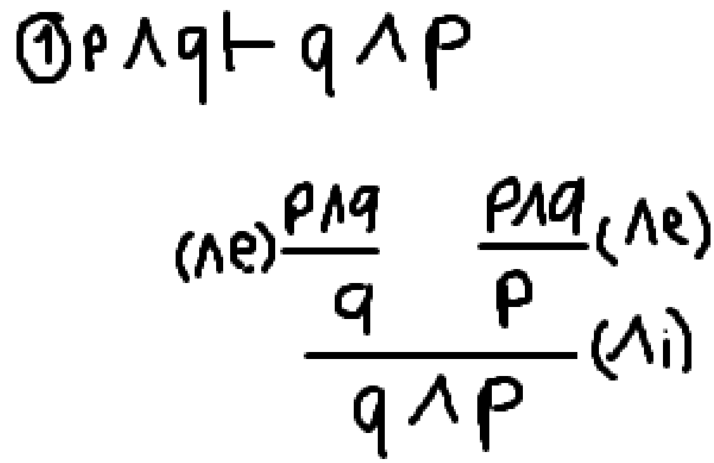

Figure 10: Exercício 1

2.6 Exercício 2 - conjunção

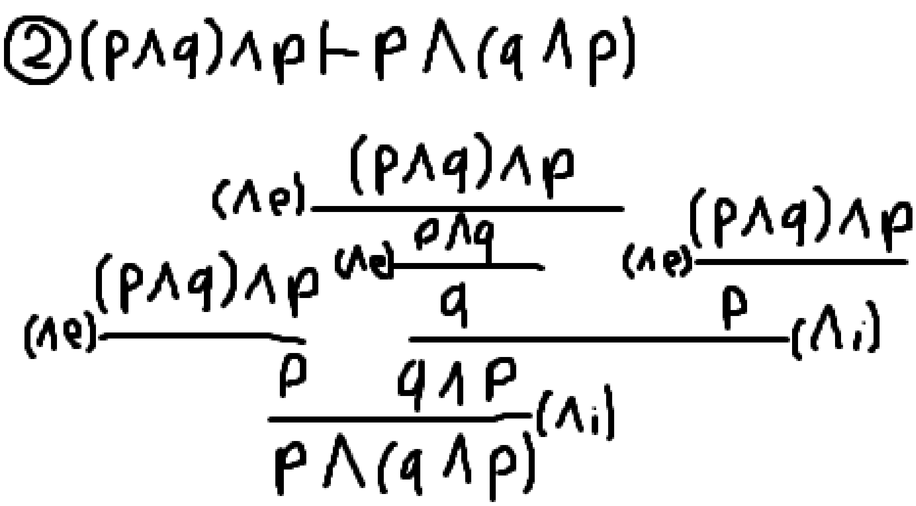

Figure 11: Exercício 2

2.7 Exercício - associatividade da disjunção

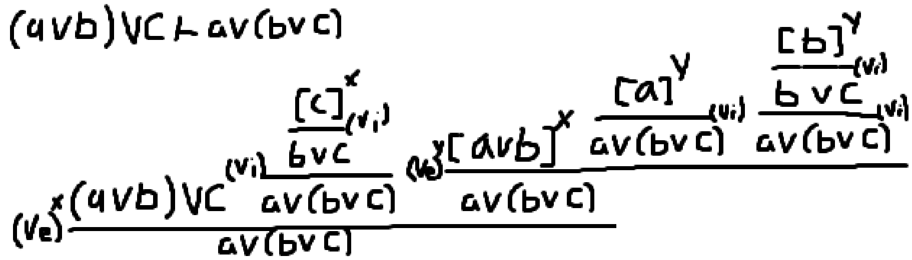

Figure 12: Exercício

2.8 Exercício - variante da contrapositiva

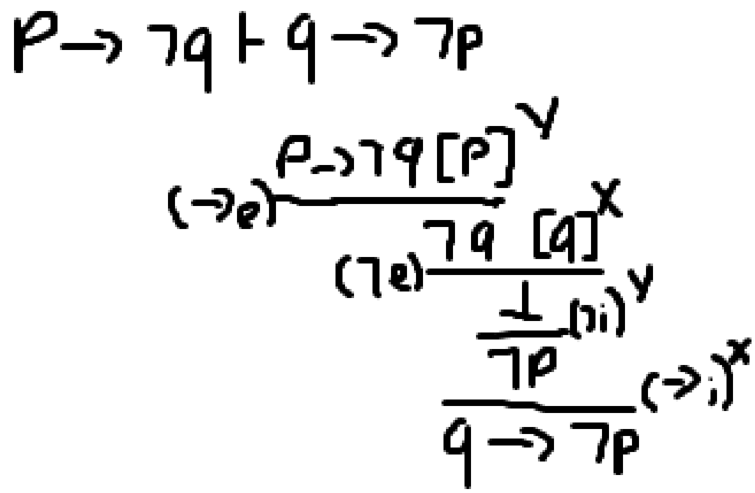

Figure 13: Exercício

3 Aula 5

3.1 Exercício 1

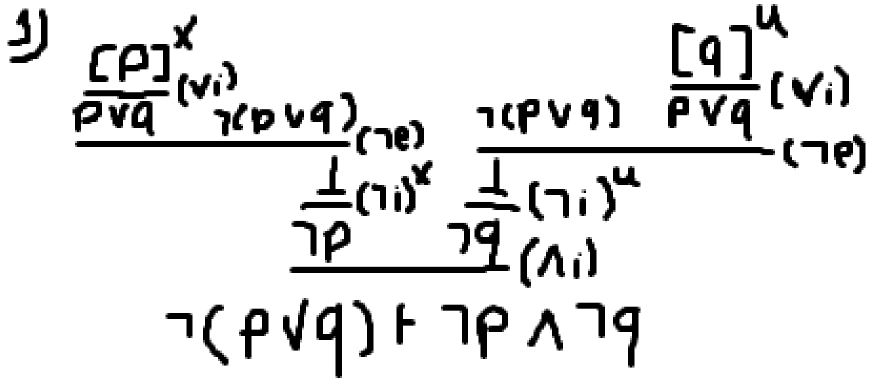

Figure 14: Exercício 1

3.2 Exercício 2

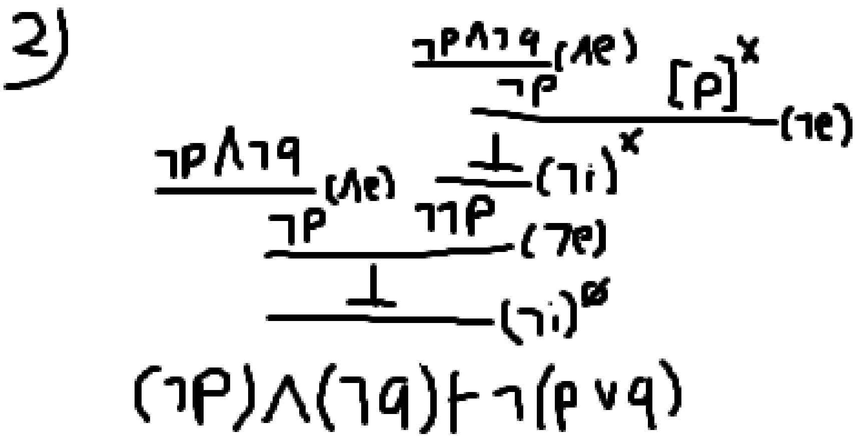

Figure 15: Exercício 2

3.3 Exercício 3

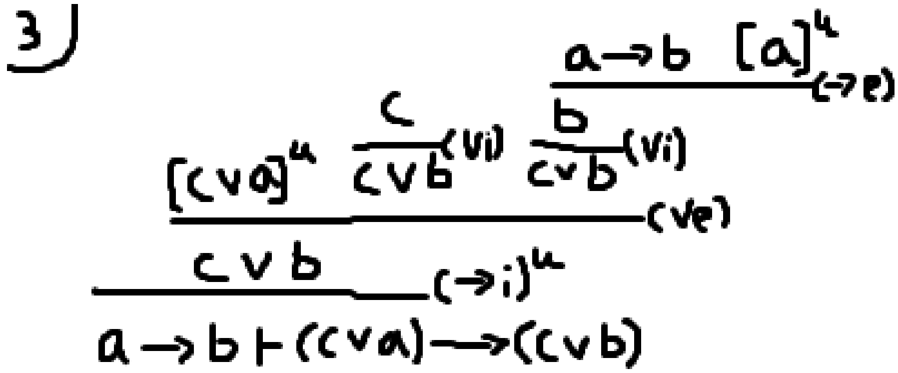

Figure 16: Exercício 3

3.4 Exercício 4

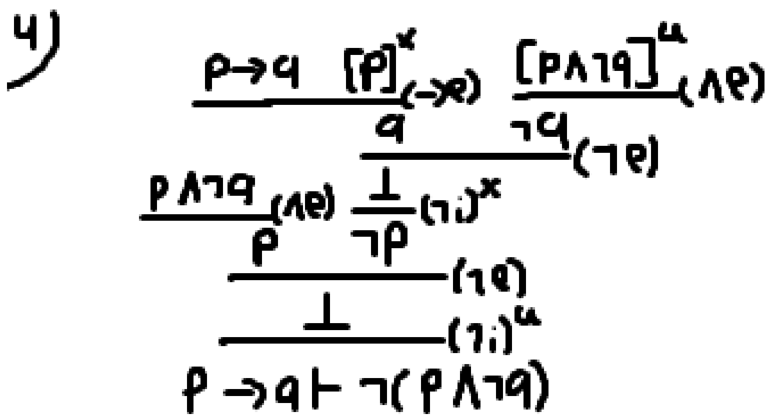

Figure 17: Exercício 4

3.5 Exercício 5

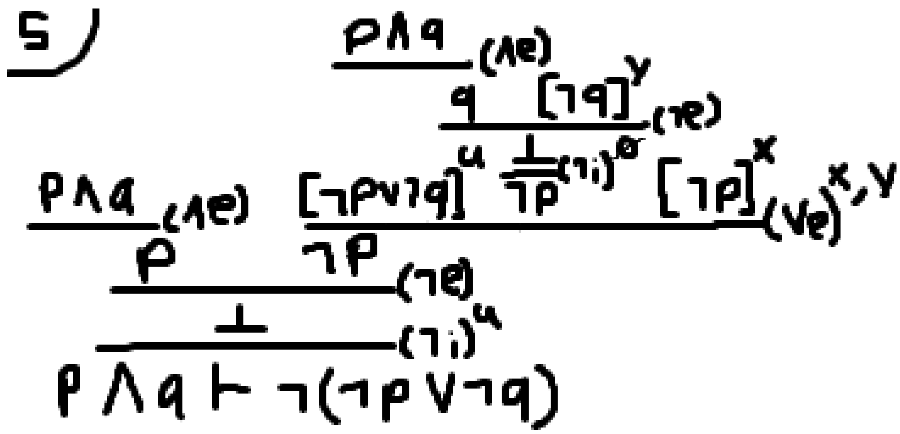

Figure 18: Exercício 5

3.6 Exercício 6

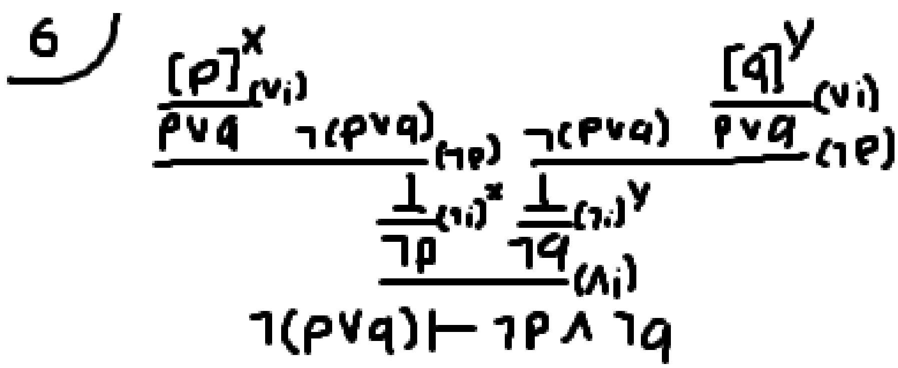

Figure 19: Exercício 6

3.7 Exercício 7

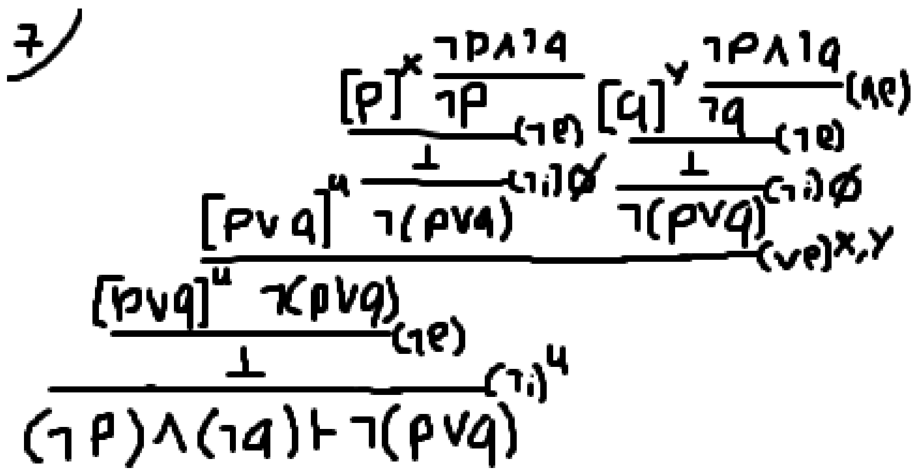

Figure 20: Exercício 7

3.8 Exercício 8

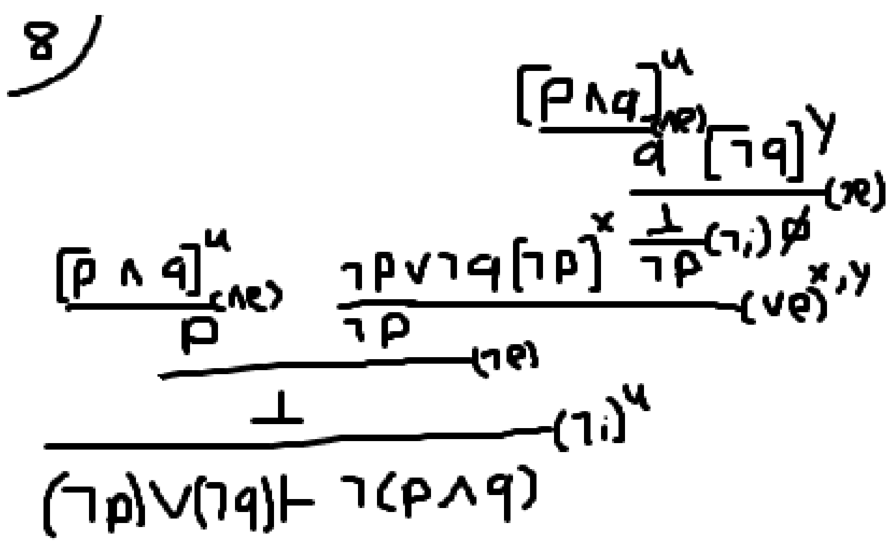

Figure 21: Exercício 8

3.9 Exercício 9

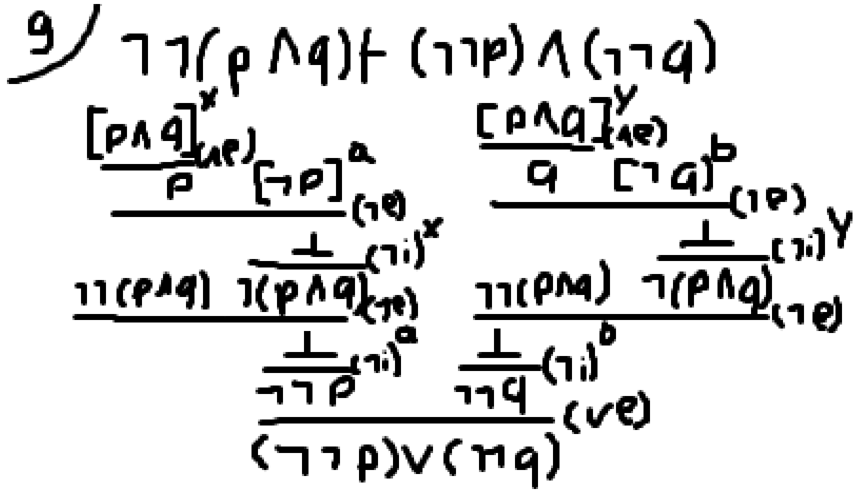

Figure 22: Exercício 9

3.10 Exercício 10

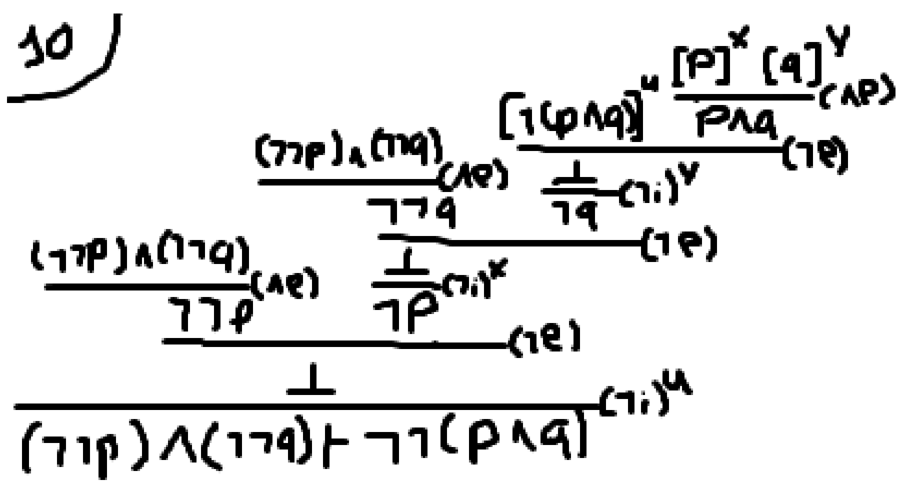

Figure 23: Exercício 10

3.11 Exercício 11

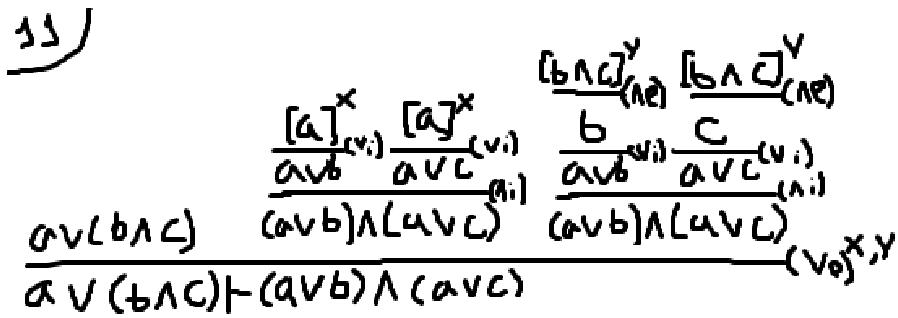

Figure 24: Exercício 11

3.12 Exercício 12

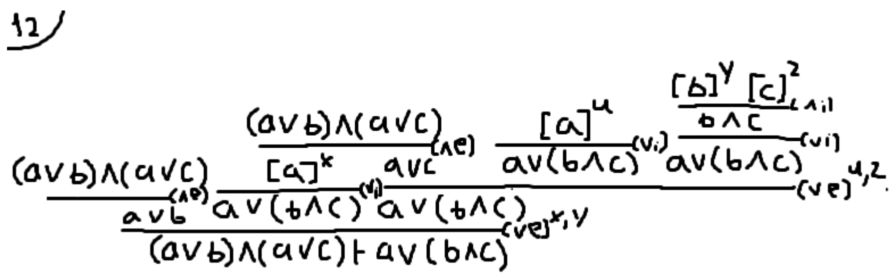

Figure 25: Exercício 12

3.13 Exercício 13

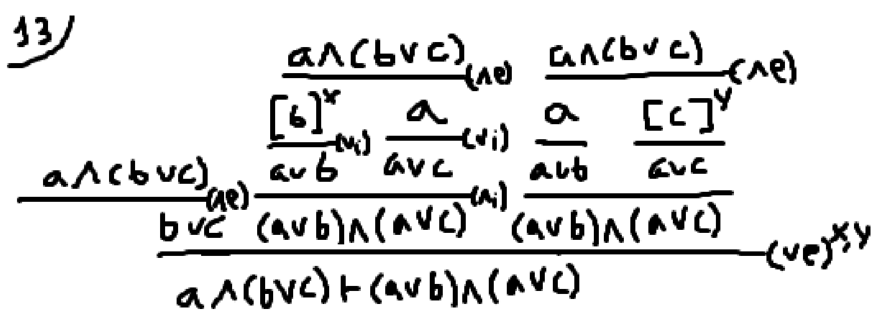

Figure 26: Exercício 13

3.14 Exercício 14

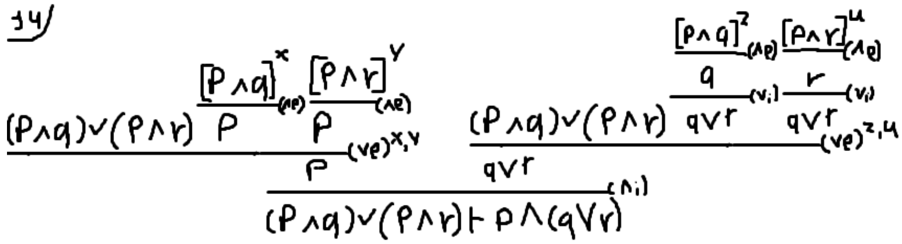

Figure 27: Exercício 14

3.15 Exercício 15

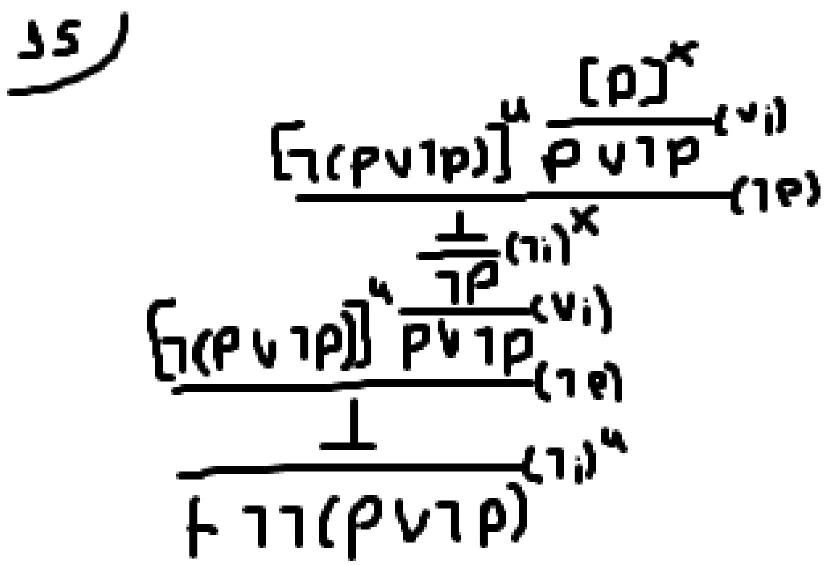

Figure 28: Exercício 15

3.16 Exercício 16

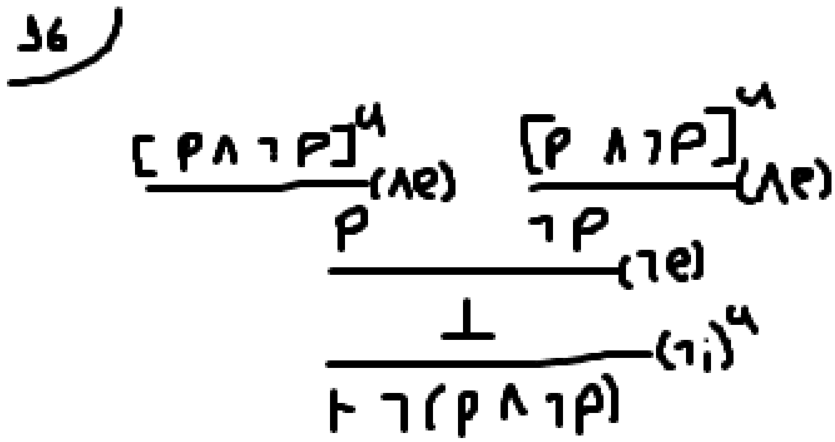

Figure 29: Exercício 16

4 Aula 6

4.1 Exercício 1

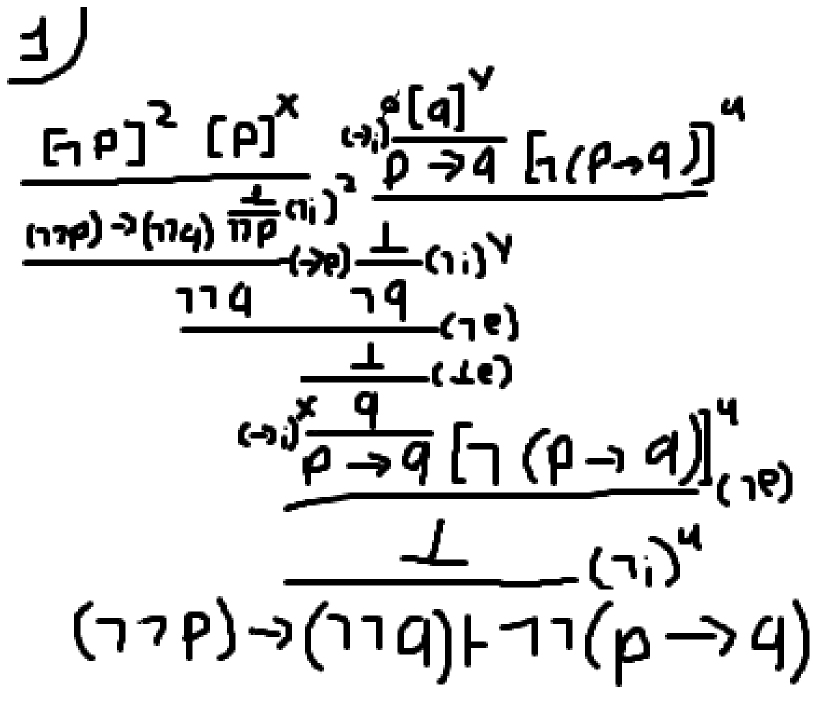

Figure 30: Exercício 1

4.2 Exercício 2

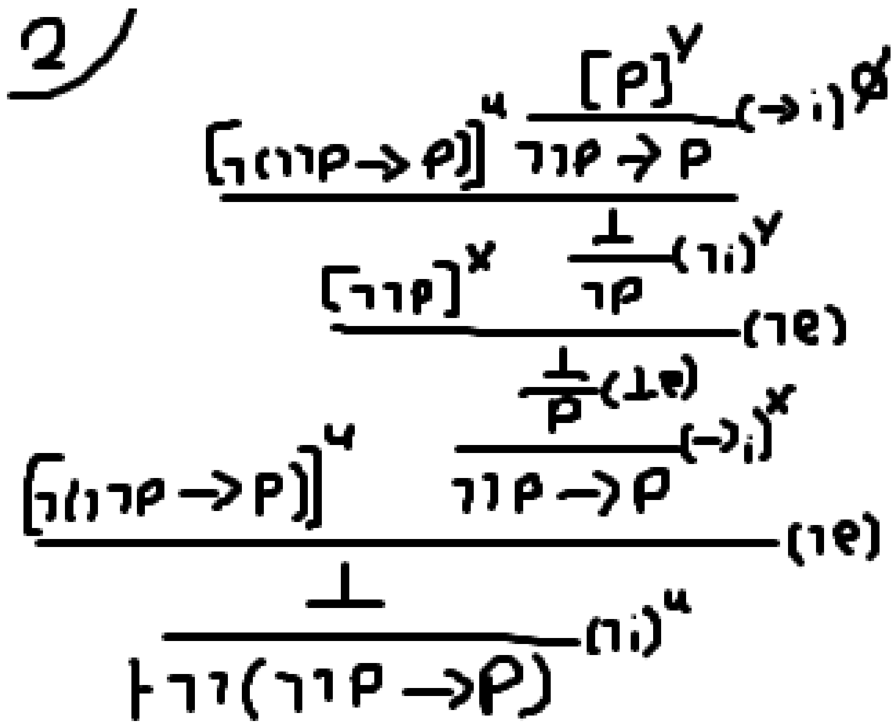

Figure 31: Exercício 2

4.3 Exercício 3

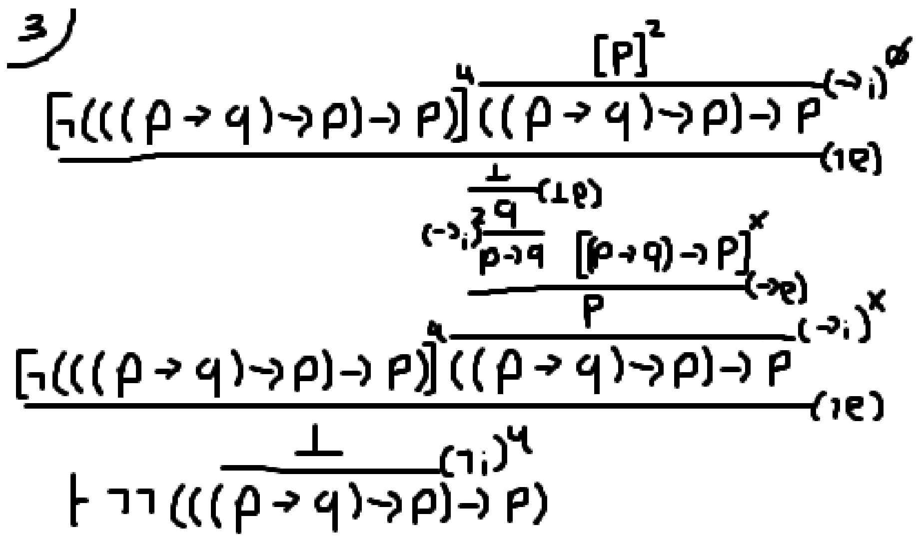

Figure 32: Exercício 3

5 Aula 7

5.1 Exercício 1

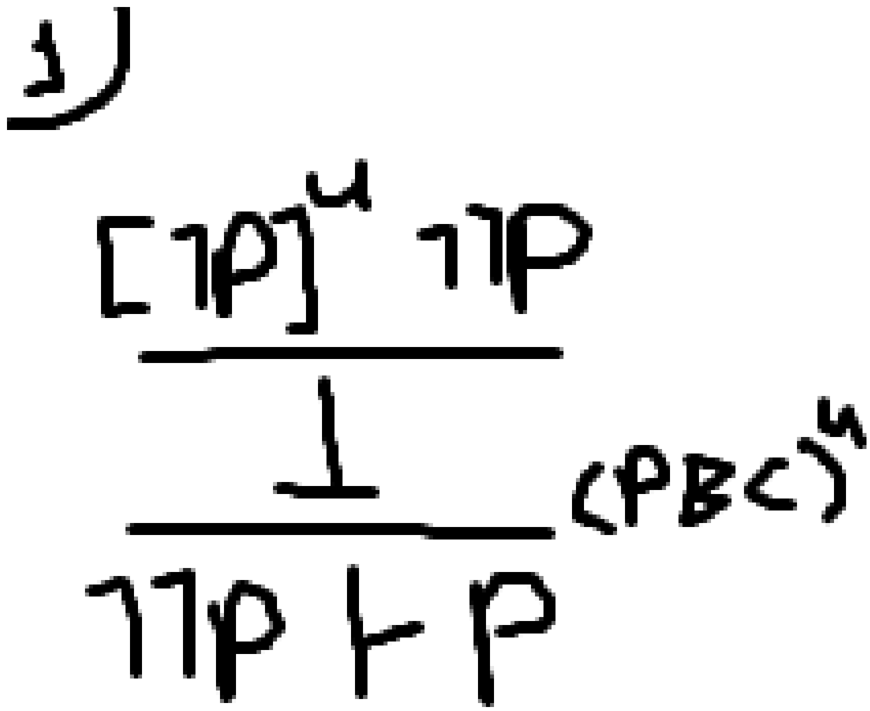

Figure 33: Exercício 1

5.2 Exercício 2

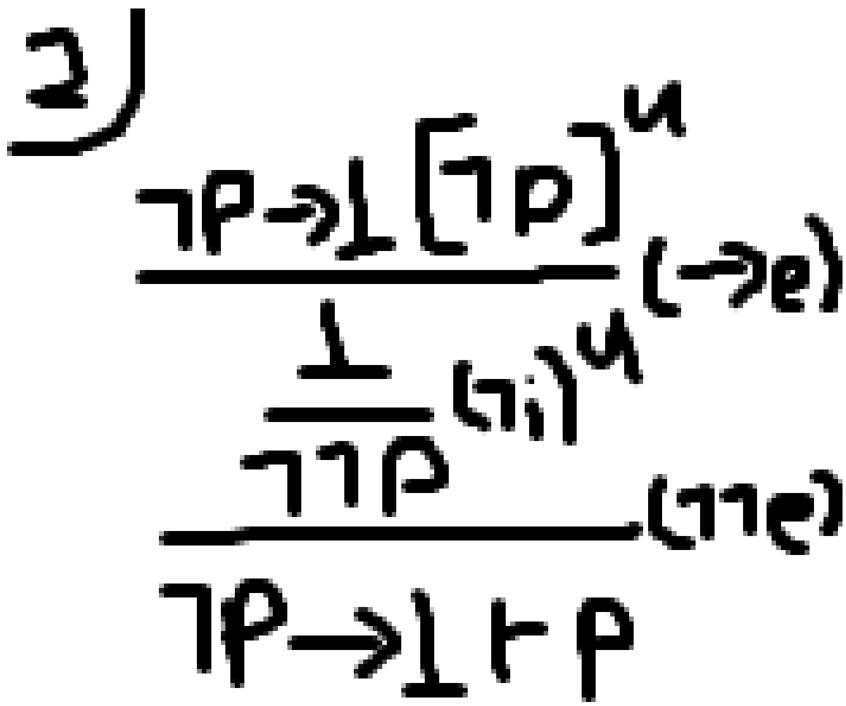

Figure 34: Exercício 2

5.3 Exercício 3

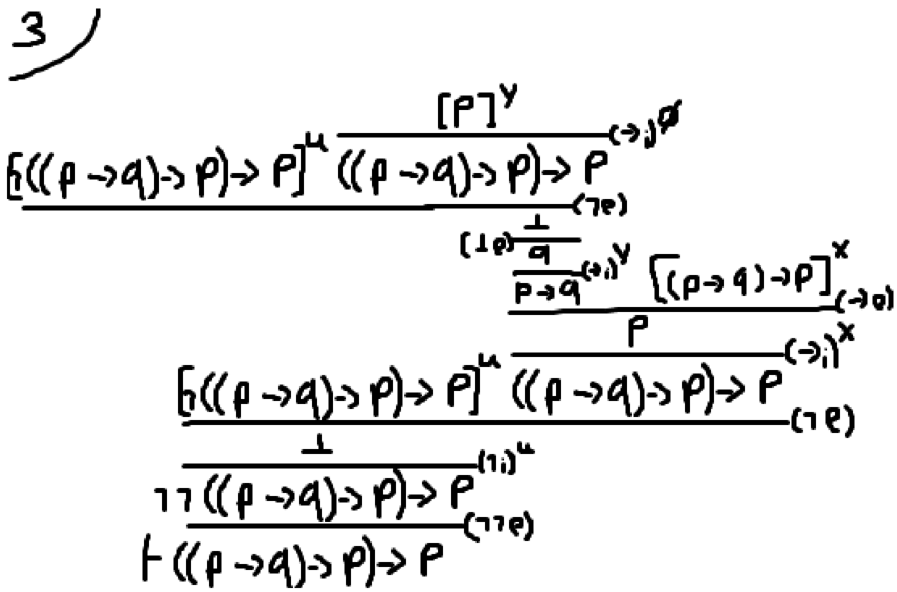

Figure 35: Exercício 3

5.4 Exercício 4

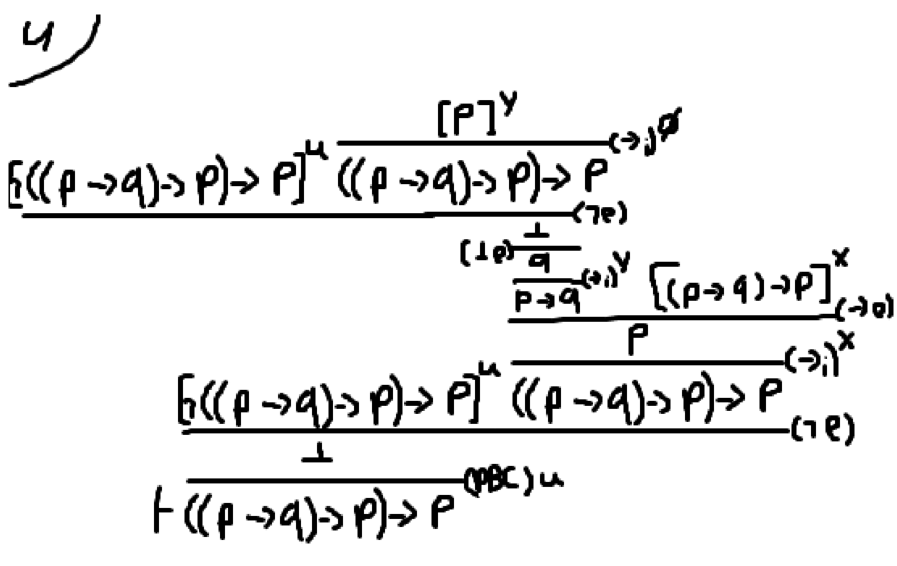

Figure 36: Exercício 4

5.5 Exercício 5

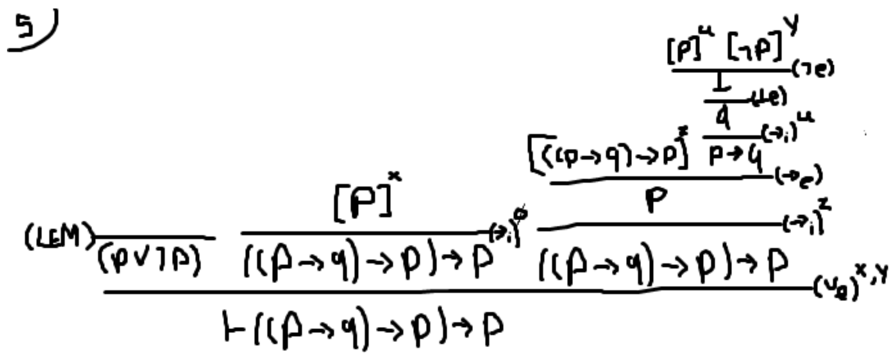

Figure 37: Exercício 5

5.6 Exercício 6

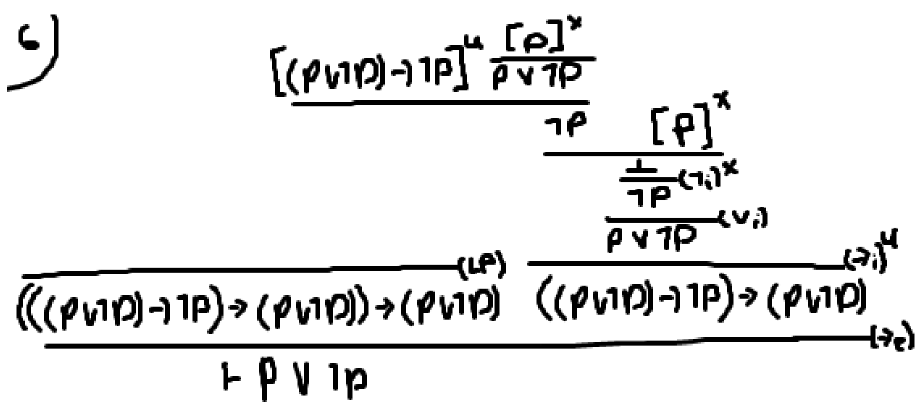

Figure 38: Exercício 6

5.7 Exercício 7

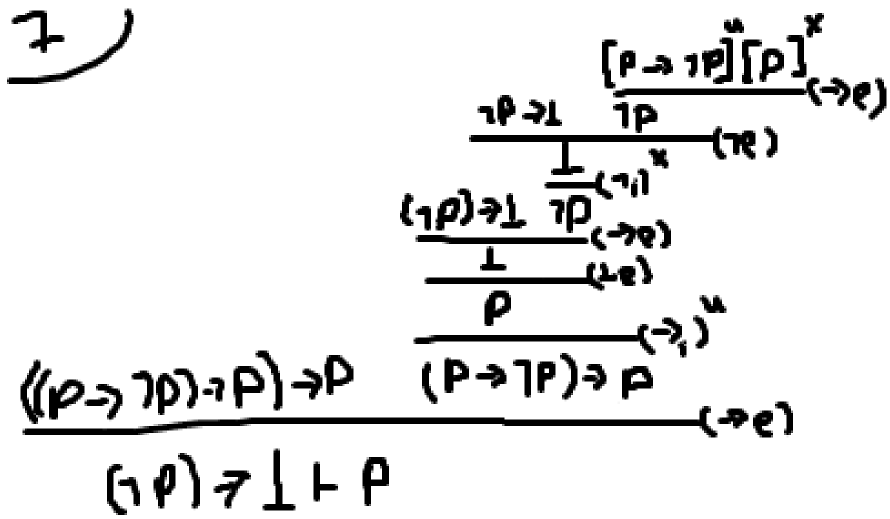

Figure 39: Exercício 7

5.8 Exercício 8

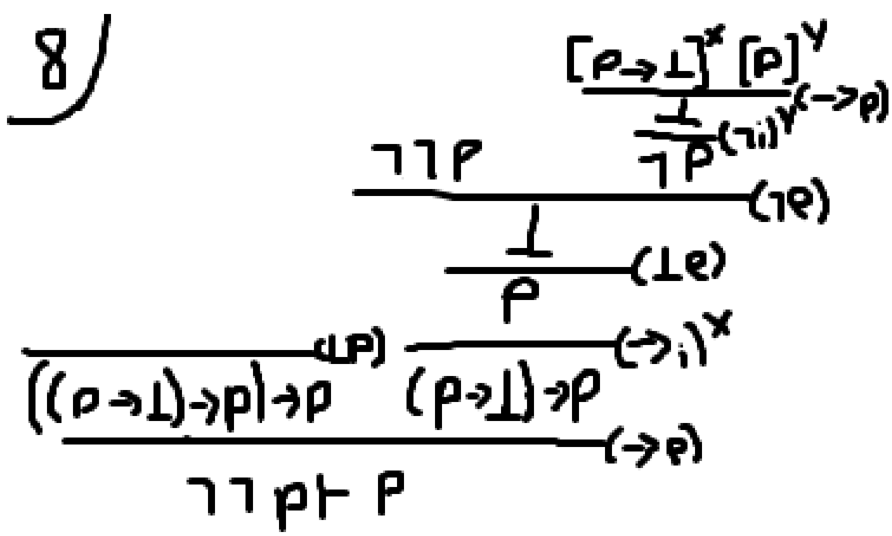

Figure 40: Exercício 8

5.9 Exercício 9

O número mínimo de provas necessárias são 4, conectando cada uma das quatro regras. Com uma conexão entre cada uma das regras, ao possuirmos uma delas, necessariamente há um caminho para chegar até as outras três.

É trivial notar que não é possível que isso seja realizado com menos de quatro, uma vez que uma das regras estará desconectada, sem que possamos prová-la. Tendo isso em mente, só é preciso demonstrar que existem quatro provas que as conectem.

A partir do exercício 1, 3 e 6, já criamos uma conexão seguindo a ordem PBC $\rightarrow$ $\sim\sim$E $\rightarrow$ LP $\rightarrow$ LEM; sendo cada uma das setas uma prova, respectivamente. Só resta provar LEM $\rightarrow$ PBC para que haja um ciclo e a equivalência se mostre possível com quatro provas.

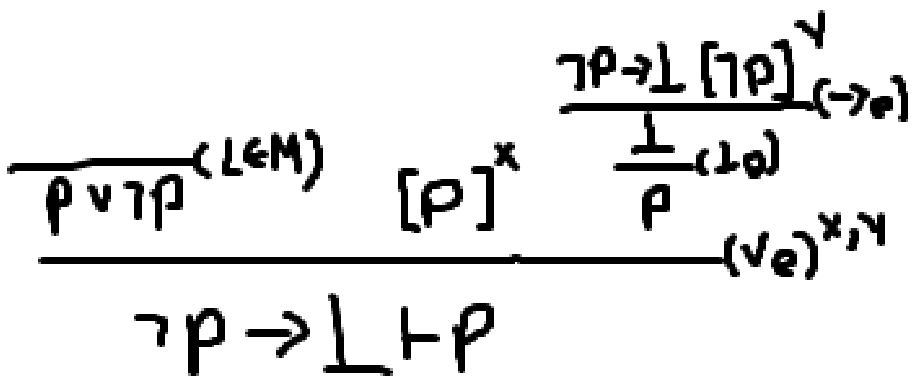

Figure 41: Prova PBC usando LEM

Assim, fica provado que quatro é valor mínimo e suficiente de provas para estabelecer equivalência entre essas quatro regras.

5.10 Execício 10

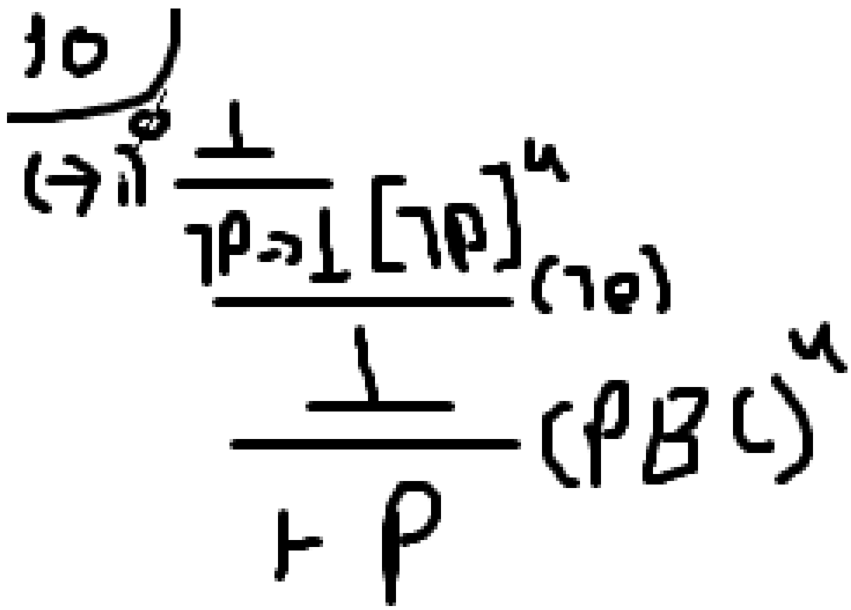

Figure 42: Exercício 10

6 Exercícios 66-71

6.1 Exercício 66

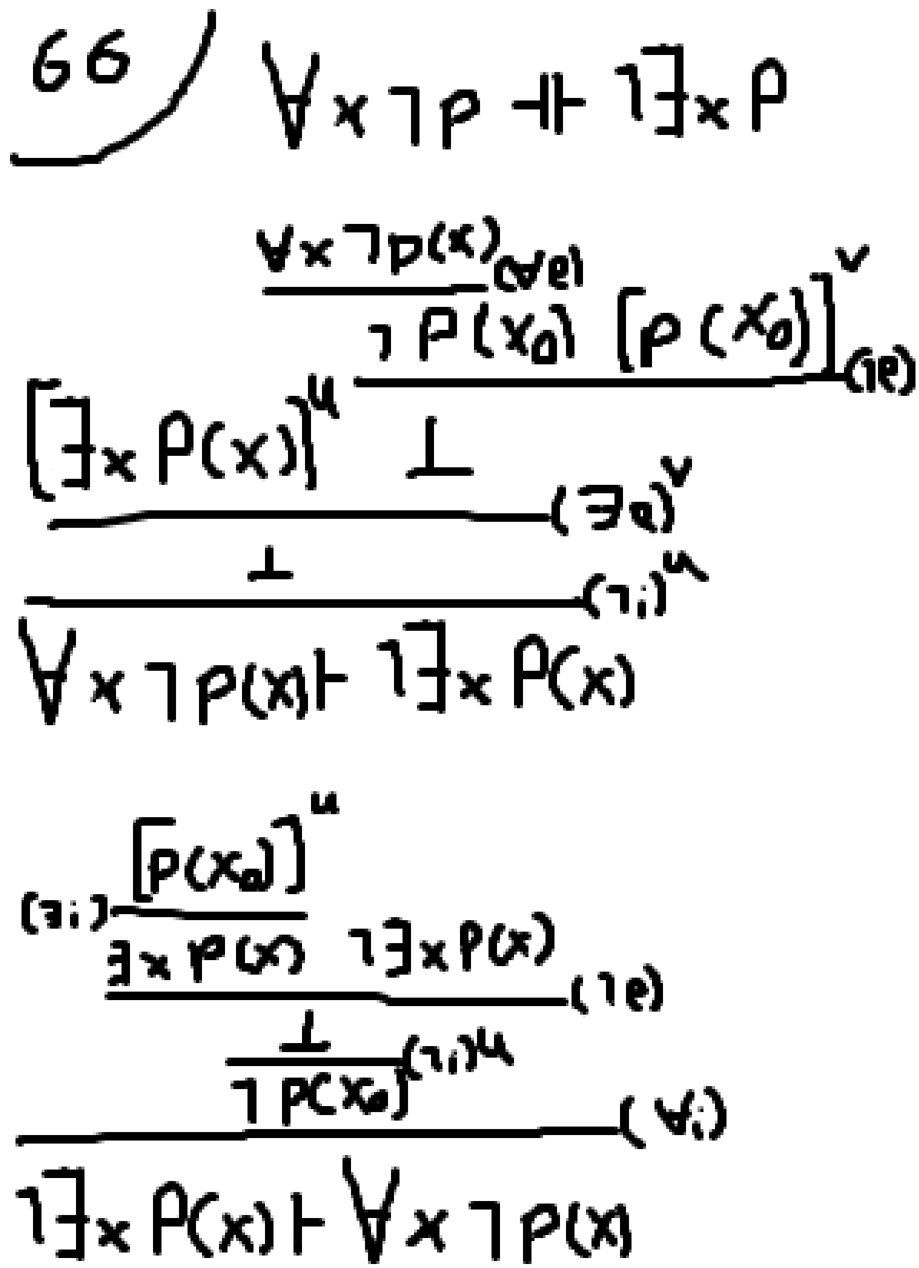

Figure 43: Exercício 66

6.2 Exercício 67

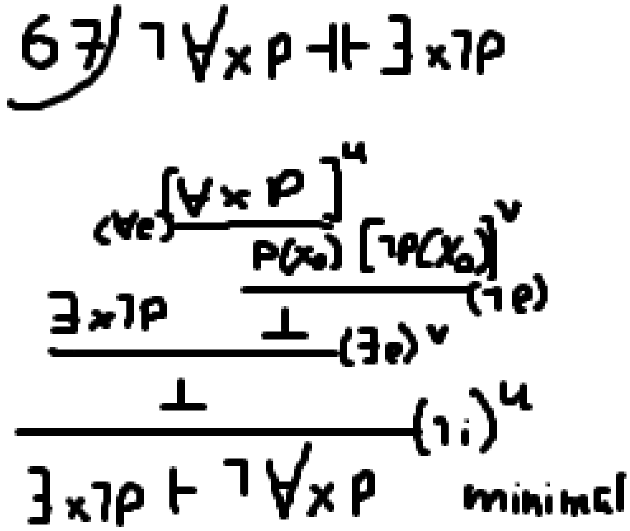

Figure 44: Exercício 67

6.3 Exercício 68

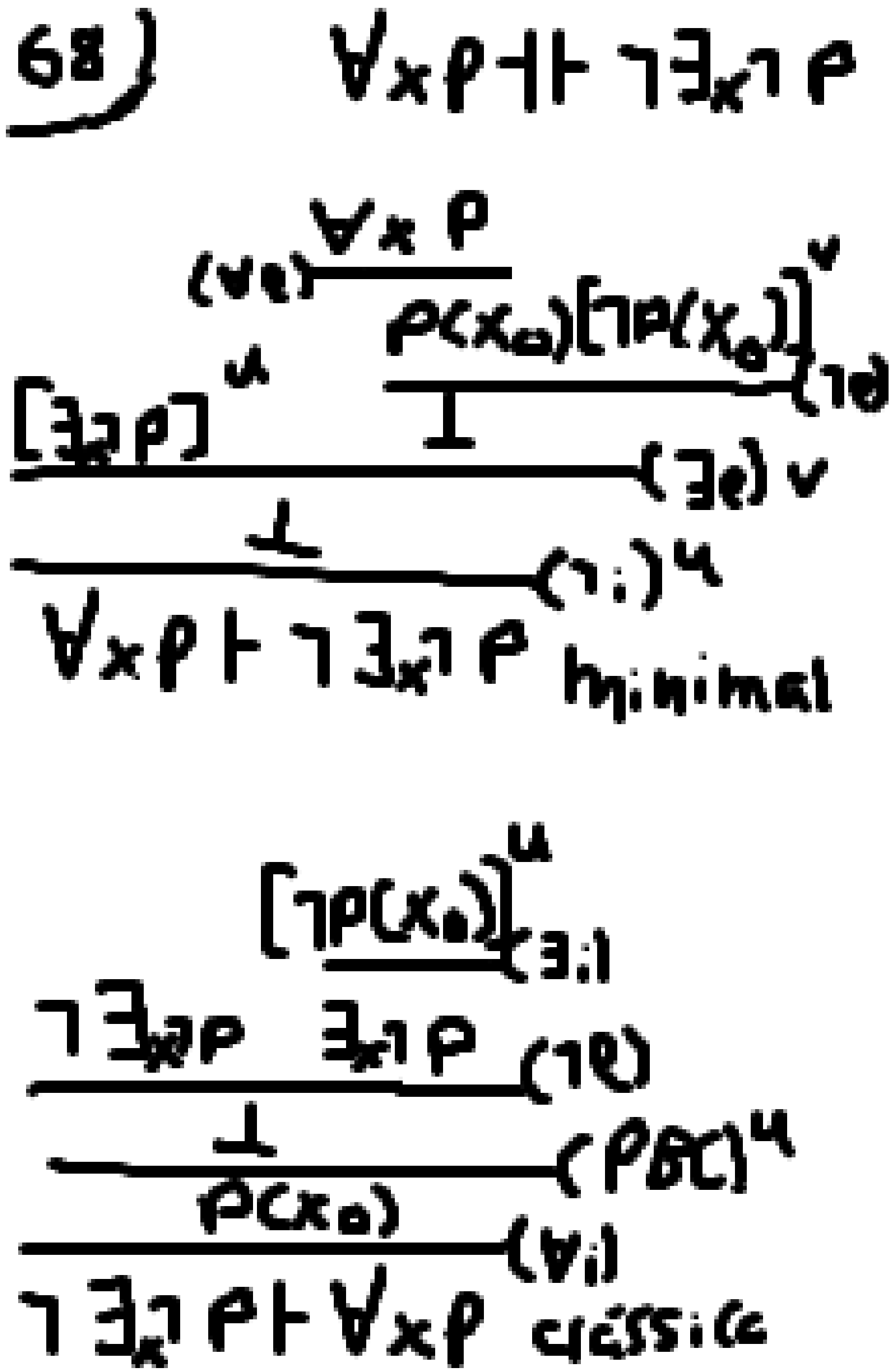

Figure 45: Exercício 68

6.4 Exercício 69

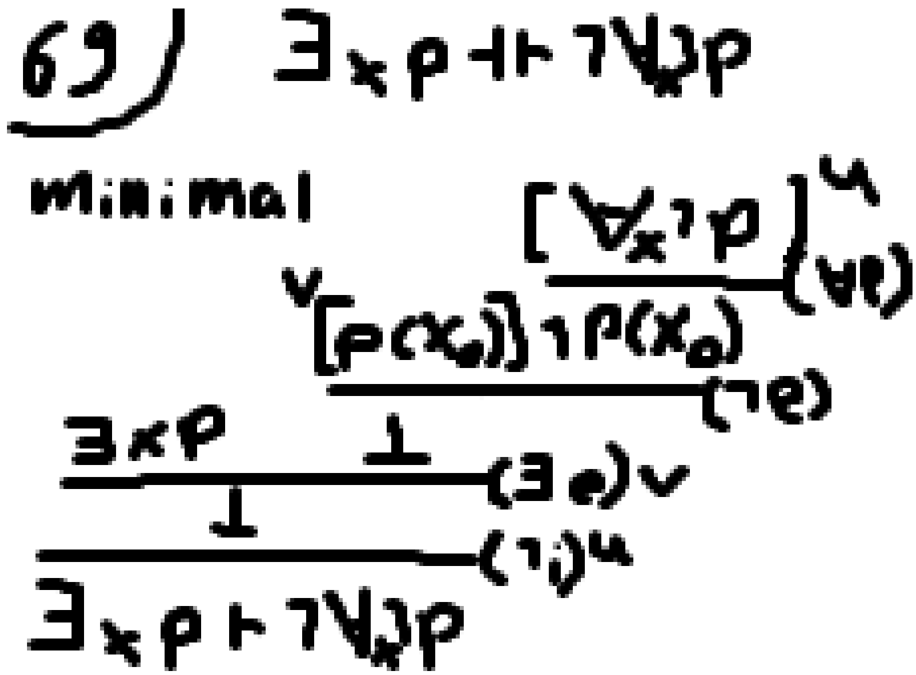

Figure 46: Exercício 69

6.5 Exercício 70

6.5.1 Exercício 70-1

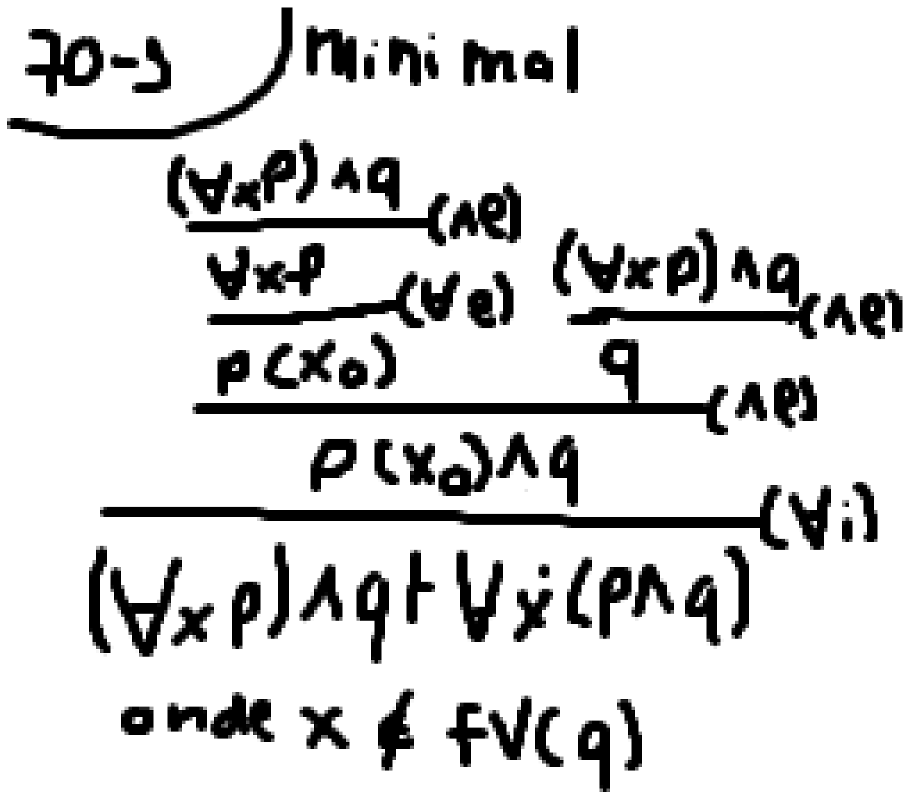

Figure 47: Exercício 70-1

6.5.2 Exercício 70-2

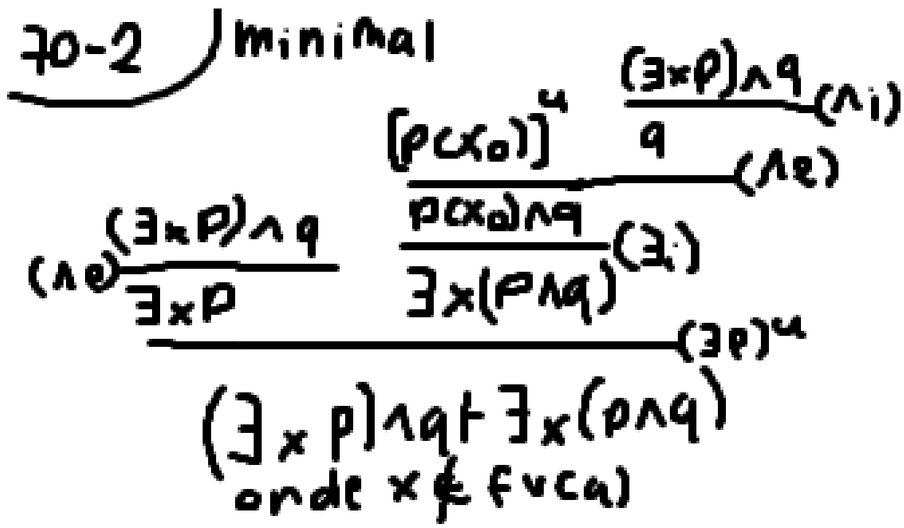

Figure 48: Exercício 70-2

6.5.3 Exercício 70-3

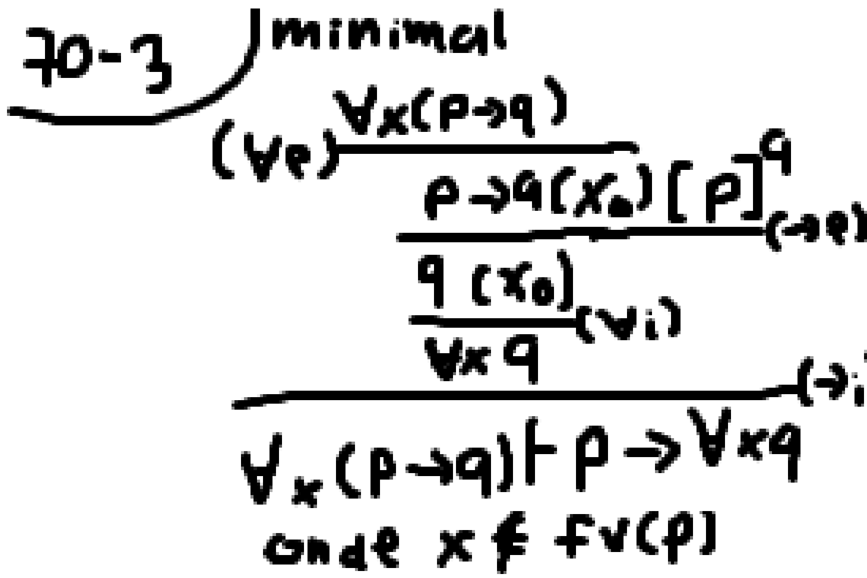

Figure 49: Exercício 70-3

6.5.4 Exercício 70-4

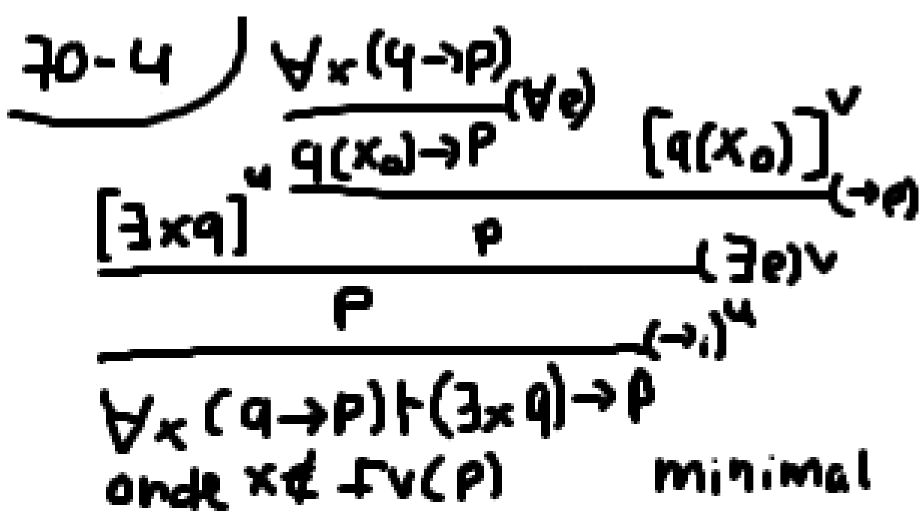

Figure 50: Exercício 70-4

6.6 Exercício 71

6.6.1 Exercício 71-1

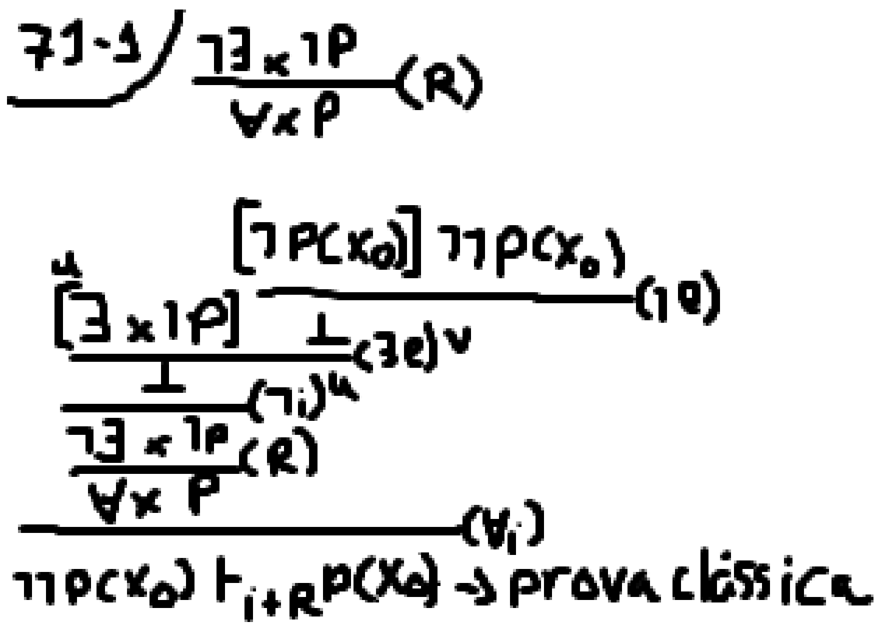

Figure 51: Exercício 71-1

6.6.2 Exercício 71-2

6.6.3 Exercício 71-3

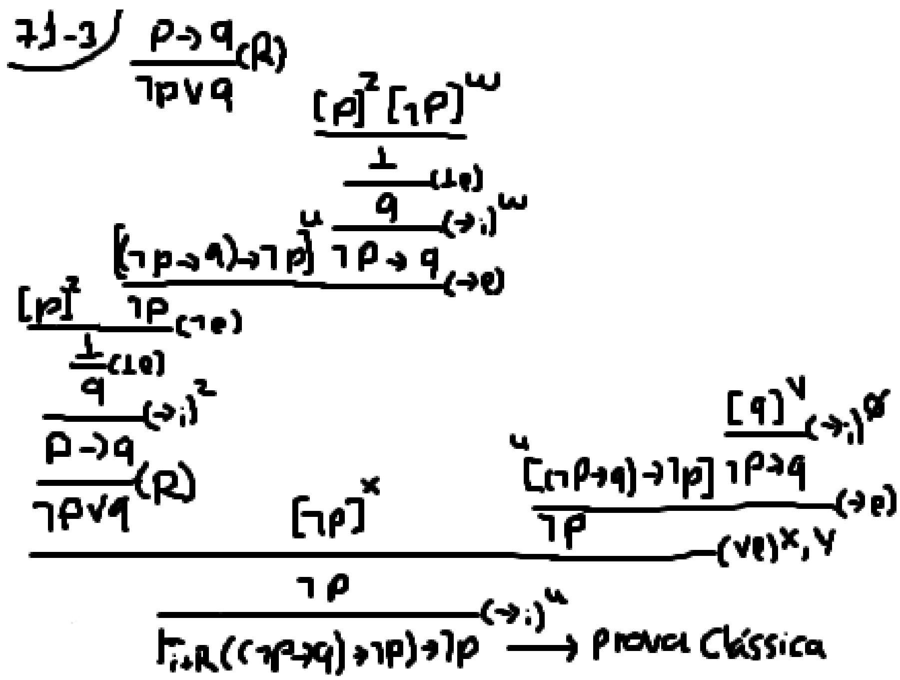

Figure 52: Exercício 71-3

7 Exercícios 73-79

7.1 Exercício 73

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \sum_{i=1}^{1} i$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)(k)}{2}$.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i = (\sum_{i=1}^{k-1} i) + k =^{(*)} (\frac{(k-1)(k)}{2}) + k = (\frac{k^2-k+2k}{2}) = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.

■

7.2 Exercício 74

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2 = \sum_{i=1}^{1} i^2$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $i = 1^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}$.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^2) + k^2 =^{(*)} (\frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}) + k^2 = \frac{(2k^3-3k^2+k)+6k^2}{6} = \frac{(2k^3+3k^2+k)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

■

7.3 Exercício 75

Proof. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Caso base com $n = 0$: $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 = 2^0 = \sum_{i=0}^{0} 2^i$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$.

Passo de indução: $\sum_{i=0}^{k} 2^i = (\sum_{i=0}^{k-1} 2^1) + 2^k =^{(*)} 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

■

7.4 Exercício 76

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$

Caso base com $n = 1$: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = 1^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$. Portanto, é válido para o caso base.

Já foi provado no exercício 73 que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto, assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=1}^{k-1} i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i)^2 = (\frac{(k-1)k}{2})^2$

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^3) + k^3 =^{(*)} (\frac{(k-1)k}{2})^2 + k^3 = \frac{(k-1)^2k^2+4k^3}{4} = \frac{k^2((k-1)^2+4k)}{4} = \frac{k^2(k^2+2k+1)}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = (\frac{k(k+1)}{2})^2 = (\sum_{i=1}^{k} i)^2$

■

7.5 Exercício 77

Proof. $\forall n \geq 0,\ 3|(2^{2n} - 1)$

Caso base com $n = 0$: $2^{0\cdot2} - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $3|(2^{2k-2} - 1)$, portanto, $(2^{2k-2} - 1 = 3m)$ para algum $m \exists \mathbb{N}$.

Passo de indução: $2^{2k} - 1 = (4 \cdot 2^{2k-2}) - 1 = 3(2^{k-2}) + 2^{k-2} - 1 = 3m \cdot 3(2^{k-2}) = 3(m \cdot 2^{k-2}) =^{(*)} 3p$ para algum $p \exists \mathbb{N}$.

■

7.6 Exercício 78

Proof. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2 + 3$ ■

Caso base com $n = 2$: $3^2 = 9 \geq 7 = 2^2 + 3$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $3^k \geq (k)^2 + 3$.

Passo de indução: $3^{k+1} = 3(3^k)$, logo, por meio de $(*)$, $3(3^k) \geq 3((k)^2+3) \geq 3k^2+9 \geq k^2+2k^2+9 \geq k^2+2k+4 \geq (k+1)^2+3$, portanto $3^{k+1} \geq (k+1)^2+3$.

7.7 Exercício 79

Proof. $\forall n \geq 1, n! \leq n^n$

Caso base com $n = 1$: $1! = 1 \leq 1^1$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $(k-1)! \leq (k-1)^{k-1}$.

Passo de indução: $k! = (k-1)! \cdot k$, logo, por meio de $(*)$, $(k-1)! \cdot k \leq (k-1)^{k-1} \cdot k \leq k^{k-1} \cdot k \leq k^k$, portanto $k! \leq k^k$. ■