

# Caderno de Exercícios

## LC1

Marcos Silva

2023

### Contents

<b>1</b>	<b>Aula 2</b>	<b>2</b>
1.1	Exercício 1 . . . . .	2
1.2	Exercício 2 . . . . .	3
1.3	Exercício 3 . . . . .	3
1.4	Exercício 4 . . . . .	4
1.5	Exercício 5 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Aula 4</b>	<b>5</b>
2.1	Exercício 1 - negação . . . . .	5
2.2	Exercício 2 - negação . . . . .	6
2.3	Exercício 3 - negação . . . . .	7
2.4	Exercício 4 - negação . . . . .	7
2.5	Exercício 1 - conjunção . . . . .	8
2.6	Exercício 2 - conjunção . . . . .	8
2.7	Exercício - associatividade da disjunção . . . . .	9
2.8	Exercício - variante da contrapositiva . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Aula 5</b>	<b>10</b>
3.1	Exercício 1 . . . . .	10
3.2	Exercício 2 . . . . .	10
3.3	Exercício 3 . . . . .	11
3.4	Exercício 4 . . . . .	11
3.5	Exercício 5 . . . . .	12
3.6	Exercício 6 . . . . .	12
3.7	Exercício 7 . . . . .	13
3.8	Exercício 8 . . . . .	13
3.9	Exercício 9 . . . . .	14
3.10	Exercício 10 . . . . .	14
3.11	Exercício 11 . . . . .	15
3.12	Exercício 12 . . . . .	15
3.13	Exercício 13 . . . . .	15

3.14 Exercício 14 . . . . .	16
3.15 Exercício 15 . . . . .	16
3.16 Exercício 16 . . . . .	17

## 1 Aula 2

### 1.1 Exercício 1

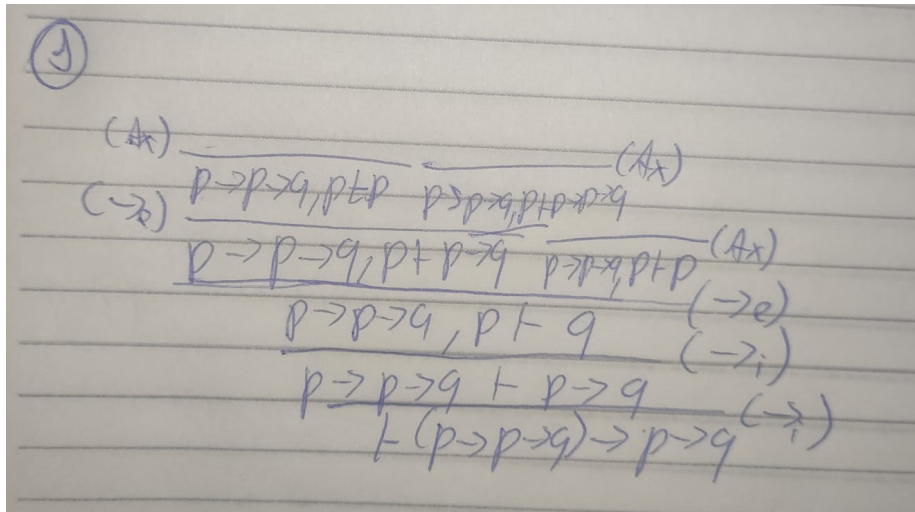


Figure 1: Exercício 1

②

$$\frac{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q} (Ax)$$
$$\frac{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q)} (\rightarrow i)$$

③

$$\begin{array}{l} (Ax) \frac{q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}{q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash b} (Ax) \\ (Ax) \frac{q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r \rightarrow t}{q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow e) \\ q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \\ q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \\ q \rightarrow r \rightarrow t \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \\ \vdash (q \rightarrow r \rightarrow t) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \end{array}$$

3

#### 1.4 Exercício 4

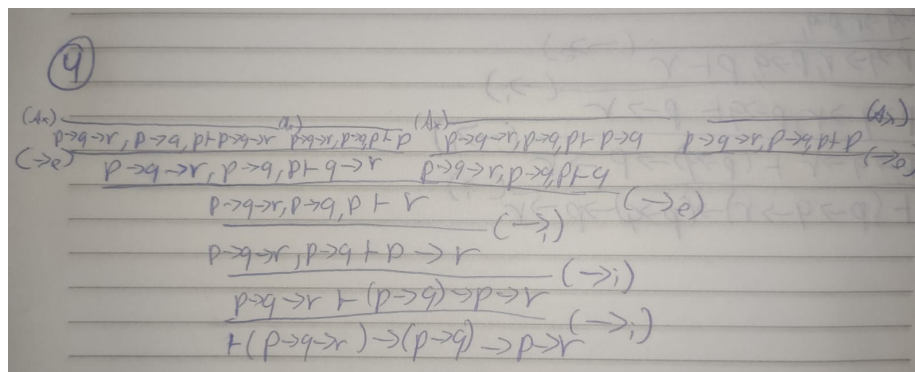


Figure 4: Exercício 4

#### 1.5 Exercício 5

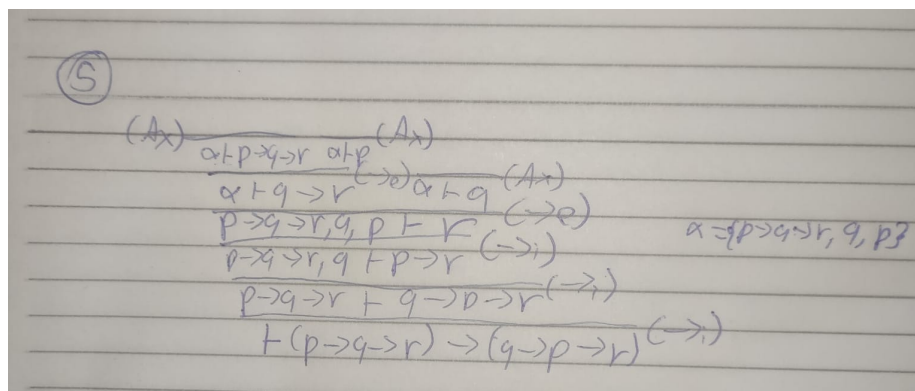


Figure 5: Exercício 5

## 2 Aula 4

### 2.1 Exercício 1 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \vdash (\neg p) \rightarrow (\neg q) \\
 \frac{\frac{[ \neg q ]^y}{\neg q} \quad \frac{p \rightarrow q \quad [p]^z}{q} (\rightarrow e)}{[ \neg q ]^y} \\
 \frac{\frac{[ \neg q ]^y}{\neg q} \quad \frac{\perp}{\neg p} (\neg i)}{[ \neg p ]^x} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg p} (\neg i)^y}{\neg p} \\
 \frac{\neg p \quad \neg q}{\neg p \rightarrow \neg q} (\rightarrow i)^x
 \end{array}$$

Figure 6: Exercício 1

## 2.2 Exercício 2 - negação

$$\textcircled{2} \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash (\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg\neg q}{\neg\neg q}^y}{q}(\neg e) \quad \frac{\frac{[p \rightarrow q]^2}{[p]}^a}{(\rightarrow e)} \\
 \frac{\neg p \quad [ \neg\neg p ]^x}{\neg p}(\neg e) \\
 \frac{\neg\neg(p \rightarrow q) \quad \neg\neg(p \rightarrow q)}{\neg\neg(p \rightarrow q)}(\neg e) \\
 \frac{\neg\neg q}{\neg\neg q}(\neg i)^y \\
 \frac{\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q}{(\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)}(\rightarrow_i)^x
 \end{array}$$

Figure 7: Exercício 2

### 2.3 Exercício 3 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{3} \vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q \\
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow_i)^a \frac{[p]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^2 \frac{q}{p \rightarrow q} \quad [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^y (\rightarrow_e) \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^y \frac{p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_e) \frac{q}{(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q} (\rightarrow_i)^x \\
 \hline
 (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 8: Exercício 3

### 2.4 Exercício 4 - negação

$$\textcircled{4} p, \neg p \vdash \neg q$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg_e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg q} (\neg_i)^x
 \end{array}$$

Figure 9: Exercício 4

## 2.5 Exercício 1 - conjunção

$$\textcircled{1} p \wedge q \vdash q \wedge p$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{p \wedge q}{q}}{p} (Ai)}{q \wedge p}$$

Figure 10: Exercício 1

## 2.6 Exercício 2 - conjunção

$$\textcircled{2} (p \wedge q) \wedge p \vdash p \wedge (q \wedge p)$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p} (Ai) \quad \frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{q} (Ai)}{p \wedge (q \wedge p)} (Ai)}{(p \wedge q) \wedge p} (Ae)$$

Figure 11: Exercício 2



## 2.7 Exercício - associatividade da disjunção

$$\begin{array}{c}
 (a \vee b) \vee c \vdash a \vee (b \vee c) \\
 \frac{(ve)^x (a \vee b) \vee c \quad \frac{(vi)^x \frac{[c]^x}{b \vee c} \quad (ve)^y \frac{[a]^y}{a \vee (b \vee c)} \quad \frac{(vi)^y \frac{[b]^y}{b \vee c}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}
 \end{array}$$

Figure 12: Exercício

## 2.8 Exercício - variante da contrapositiva

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p \\
 \frac{(\rightarrow e)^x \frac{p \rightarrow \neg q [p]^y}{\neg q} \quad (\neg e)^x \frac{[q]^x}{\perp} \quad \frac{\perp (hi)^y}{\neg p}}{q \rightarrow \neg p} (\rightarrow i)^x
 \end{array}$$

Figure 13: Exercício

### 3 Aula 5

#### 3.1 Exercício 1

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \quad \frac{\frac{[q]^u}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 14: Exercício 1

#### 3.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 2) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p} (se) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q} (se) \quad \frac{[p]^x}{\neg p} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)
 \end{array}$$

Figure 15: Exercício 2

### 3.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 3) \\
 \hline
 \frac{\frac{[c \vee a]^u}{c \vee b} \quad \frac{\frac{c}{c \vee b} (vi) \quad \frac{b}{c \vee b} (vi)}{c \vee b} \quad \frac{a \rightarrow b \quad [a]^u}{c \rightarrow e}}{c \vee b} \quad (\rightarrow i)^u \\
 a \rightarrow b \vdash (c \vee a) \rightarrow (c \vee b)
 \end{array}$$

Figure 16: Exercício 3

### 3.4 Exercício 4

$$\begin{array}{c}
 4) \\
 \hline
 \frac{p \rightarrow q \quad [p]^x}{q} \quad \frac{[p \wedge \neg q]^u}{\neg q} \quad \frac{p \wedge \neg q \quad (\wedge e)}{p} \quad \frac{q \quad \neg q}{\perp} \quad (\neg e) \\
 \frac{p \wedge \neg q \quad (\wedge e) \quad \frac{\perp}{\neg p} \quad (\neg i)^x}{p} \quad \frac{\perp}{\neg p} \quad (\neg e) \\
 \frac{\perp}{\neg p} \quad (\neg i)^u \\
 p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)
 \end{array}$$

Figure 17: Exercício 4

### 3.5 Exercício 5

$$\begin{array}{c}
 \underline{5)} \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q}{(1e)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{\frac{q}{[\neg q]^y} \quad \frac{1}{\neg p} \quad \frac{1}{(\neg i)^x}}{[\neg p]^x} \quad \frac{1}{(\neg i)^y}}{p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)}
 \end{array}$$

Figure 18: Exercício 5

### 3.6 Exercício 6

$$\begin{array}{c}
 \underline{6)} \quad \frac{\frac{\frac{[p]^x}{(vi)} \quad \frac{1}{\neg p} \quad \frac{1}{(\neg i)^x}}{\neg(p \vee q)} \quad \frac{\frac{[q]^y}{(vi)} \quad \frac{1}{\neg q} \quad \frac{1}{(\neg i)^y}}{\neg(p \vee q)}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q}
 \end{array}$$

Figure 19: Exercício 6

### 3.7 Exercício 7

$$\begin{array}{c}
 7/ \\
 \frac{\frac{\frac{[P]^x \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg P} \quad [Q]^y \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg Q} (\wedge e)}{\perp} (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg(P \vee Q)} (\neg i) \emptyset}{\neg(P \vee Q)} (\vee e) x, y} \\
 \frac{[P \vee Q]^u \neg(P \vee Q)}{\perp} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \wedge (\neg Q) \vdash \neg(P \vee Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 20: Exercício 7

### 3.8 Exercício 8

$$\begin{array}{c}
 8/ \\
 \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{Q} \quad [\neg Q]^y}{\perp} (\neg e)}{\frac{\neg P \vee \neg Q [P]^x \quad \frac{\perp}{\neg P} (\neg i) \emptyset}{\neg P} (\vee e) x, y} \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \vee (\neg Q) \vdash \neg(P \wedge Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 21: Exercício 8

### 3.9 Exercício 9

$$\begin{array}{c}
 9) \quad \neg\neg(p \wedge q) \vdash (\neg\neg p) \wedge (\neg\neg q) \\
 \frac{\frac{[p \wedge q]^x_{(se)}}{p} \quad \frac{[p \wedge q]^x_{(se)}}{\neg p}^a}{\neg\neg(p \wedge q)}^{\neg\neg i} \quad \frac{\frac{[p \wedge q]^y_{(se)}}{q} \quad \frac{[p \wedge q]^y_{(se)}}{\neg q}^b}{\neg\neg(p \wedge q)}^{\neg\neg i} \\
 \frac{\neg\neg(p \wedge q) \quad \neg\neg(p \wedge q)}{\neg\neg p}^{\neg\neg e} \quad \frac{\neg\neg(p \wedge q) \quad \neg\neg(p \wedge q)}{\neg\neg q}^{\neg\neg e} \\
 \frac{\neg\neg p \quad \neg\neg q}{(\neg\neg p) \vee (\neg\neg q)}^{\vee i}
 \end{array}$$

Figure 22: Exercício 9

### 3.10 Exercício 10

10

$$\frac{\frac{\frac{(17p) \wedge (17q)}{17p} (1e) \quad \frac{\frac{(17p) \wedge (17q)}{17q} (1e) \quad \frac{[1(p \wedge q)]^u \frac{[p]^x [q]^y}{p \wedge q} (1e)}{17q} (1e)}{17p} (1e)}{17p} (1e)}{(17p) \wedge (17q) \vdash 17(p \wedge q)} (1i)^u$$

Figure 23: Exercício 10

### 3.11 Exercício 11

11)

$$\frac{\frac{a \vee (b \wedge c)}{(ae)} \quad \frac{\frac{[a]^x_{(vi)} \quad [a]^x_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai) \quad \frac{\frac{[b \wedge c]^y_{(ae)} \quad [b \wedge c]^y_{(ae)}}{b \quad c} (vi) \quad \frac{b \quad c}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{a \vee (b \wedge c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 24: Exercício 11

### 3.12 Exercício 12

12)

$$\frac{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi) \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi)}{\frac{a \vee (b \wedge c) \quad \frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c) \vdash a \vee (b \wedge c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 25: Exercício 12

### 3.13 Exercício 13

13)

$$\frac{\frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (vi)}{\frac{b \vee c \quad \frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai)}{a \wedge (b \vee c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 26: Exercício 13

### 3.14 Exercício 14

14/

$$\frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \frac{\frac{[P \wedge q]^x}{P} \quad \frac{[P \wedge r]^y}{P}}{P} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \frac{\frac{[P \wedge q]^z}{q} \quad \frac{[P \wedge r]^u}{r}}{q \vee r}}{q \vee r}}{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \vdash P \wedge (q \vee r)}$$

Figure 27: Exercício 14

### 3.15 Exercício 15

15/

$$\frac{\frac{\frac{[ \neg (P \vee \neg P) ]^u}{\perp} \quad \frac{[P]^x}{P \vee \neg P}}{\perp} \quad \frac{[ \neg (P \vee \neg P) ]^u}{\perp}}{\vdash \neg \neg (P \vee \neg P)}$$

Figure 28: Exercício 15



### 3.16 Exercício 16

$$\begin{array}{c}
 \text{36)} \\
 \hline
 \frac{[P \wedge \neg P]^u}{P} (\wedge e) \quad \frac{[P \wedge \neg P]^u}{\neg P} (\wedge e) \\
 \hline
 \frac{P \quad \neg P}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg(P \wedge \neg P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 29: Exercício 16