Caderno de Exercícios
LC1

Marcos Silva

2023

Contents

1 Aula 2

1.1 Exercicio 1

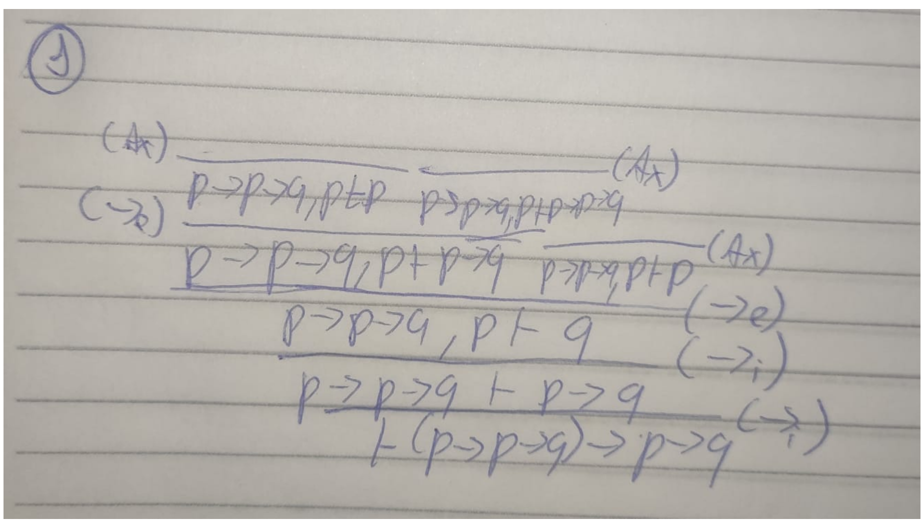


Figure 1: Exercício 1

1.2 Exercicio 2

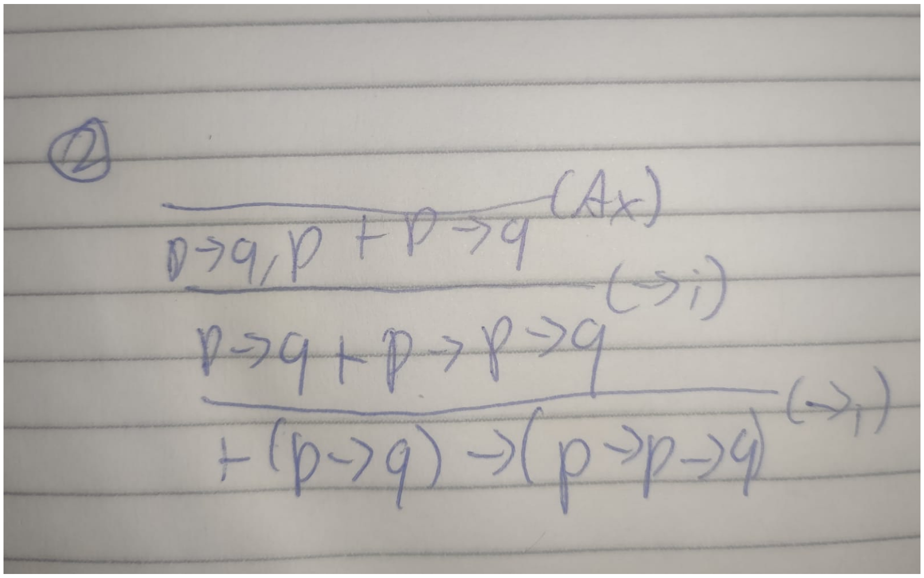


Figure 2: Exercício 2

1.3 Exercicio 3

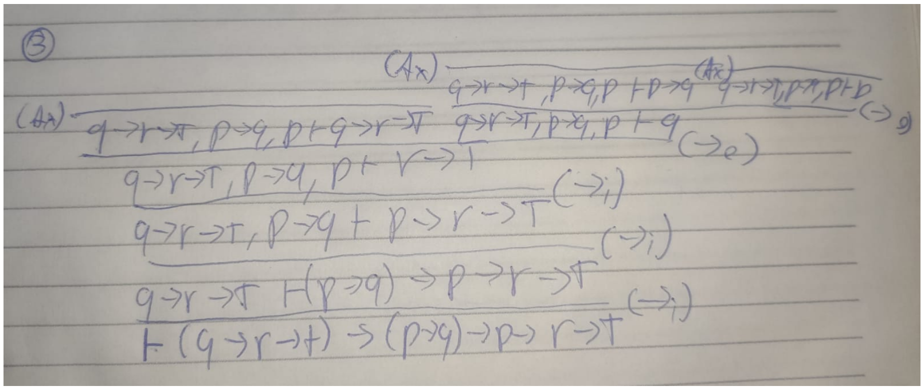


Figure 3: Exercício 3

1.4 Exercício 4

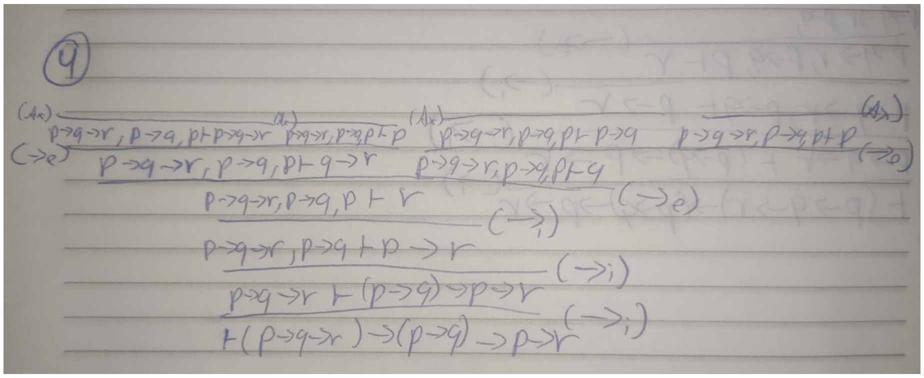


Figure 4: Exercício 4

1.5 Exercício 5

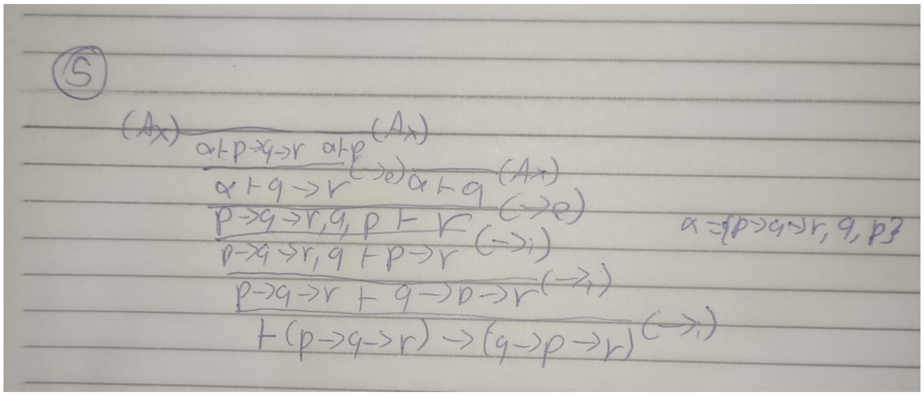


Figure 5: Exercício 5

2 Aula 4

2.1 Exercicio 1 - negação

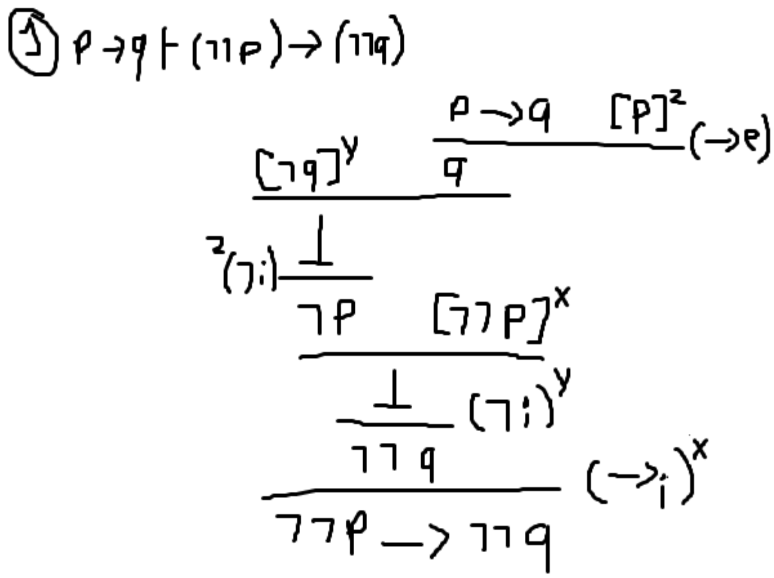


Figure 6: Exercício 1

2.2 Exercicio 2 - negação

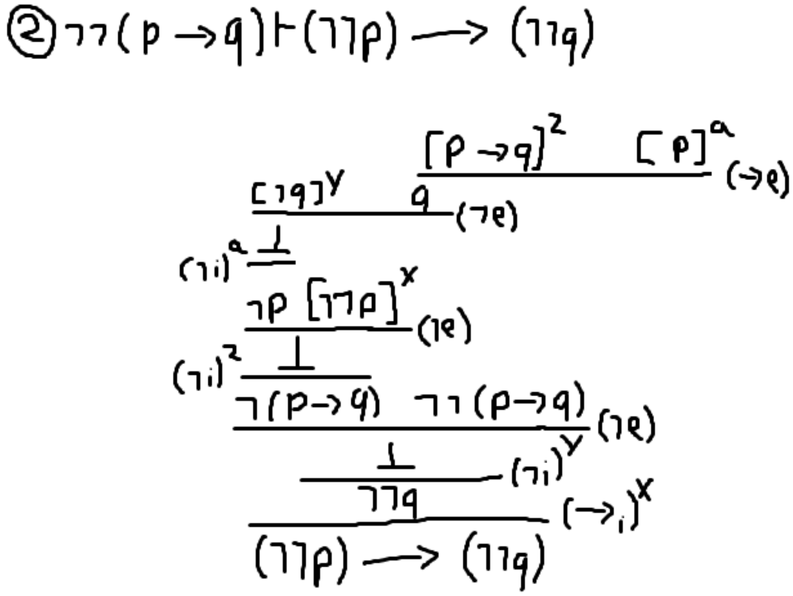


Figure 7: Exercício 2

2.3 Exercicio 3 - negação

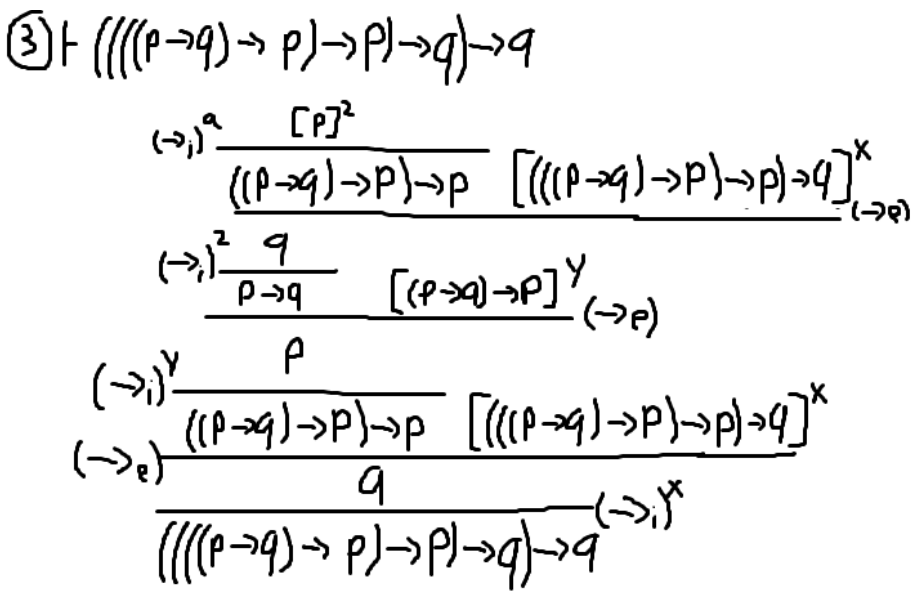


Figure 8: Exercício 3

2.4 Exercício 4 - negação

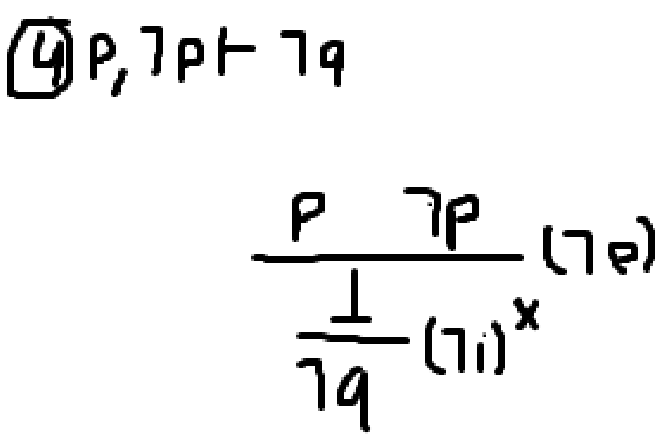


Figure 9: Exercício 4

2.5 Exercício 1 - conjunção

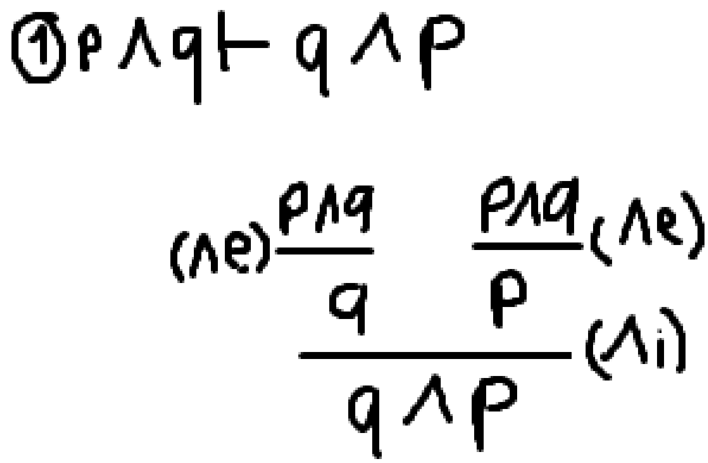


Figure 10: Exercício 1

2.6 Exercício 2 - conjunção

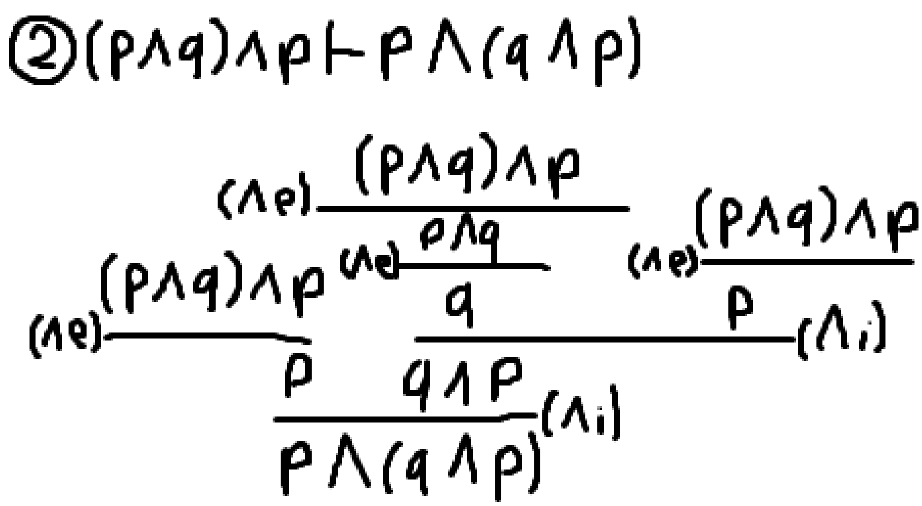


Figure 11: Exercício 2

2.7 Exercício - associatividade da disjunção

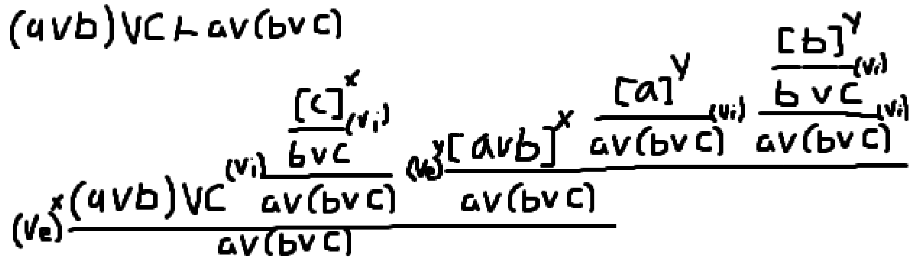


Figure 12: Exercício

2.8 Exercício - variante da contrapositiva

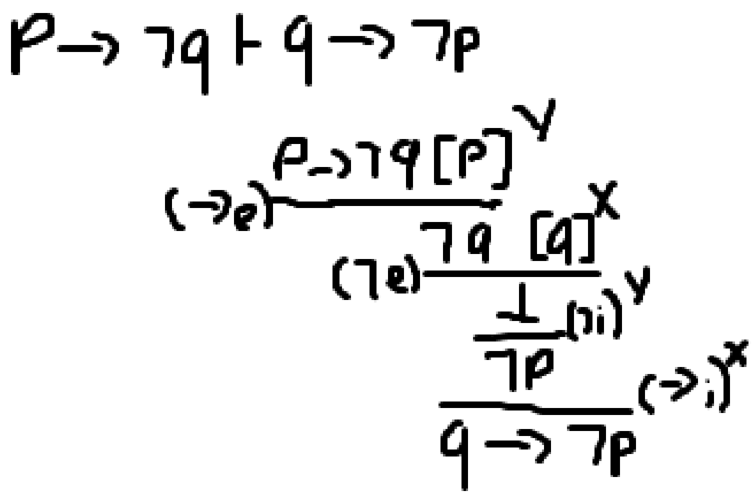


Figure 13: Exercício

3 Aula 5

3.1 Exercício 1

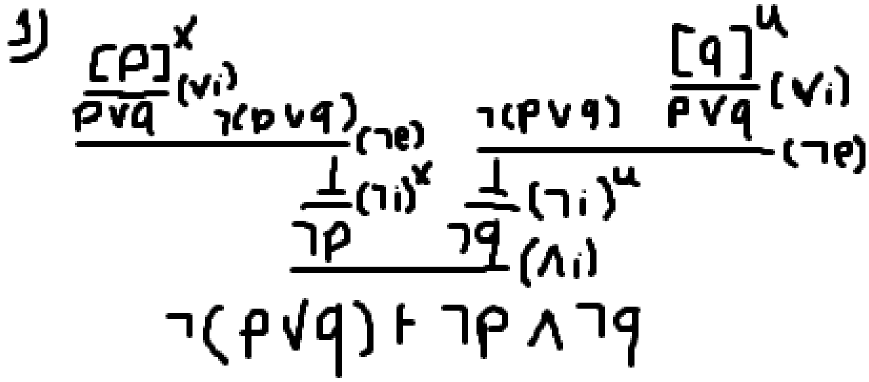


Figure 14: Exercício 1

3.2 Exercício 2

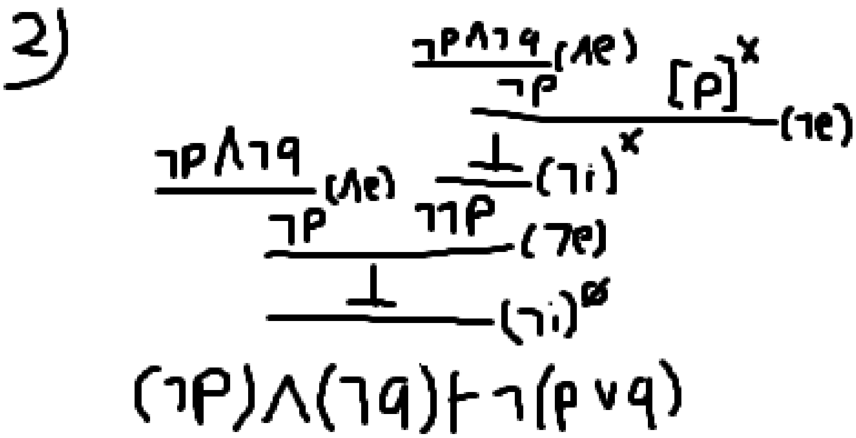


Figure 15: Exercício 2

3.3 Exercício 3

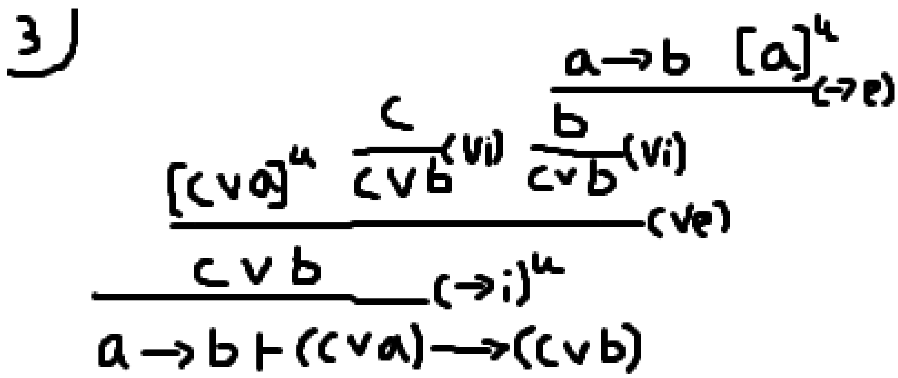


Figure 16: Exercício 3

3.4 Exercício 4

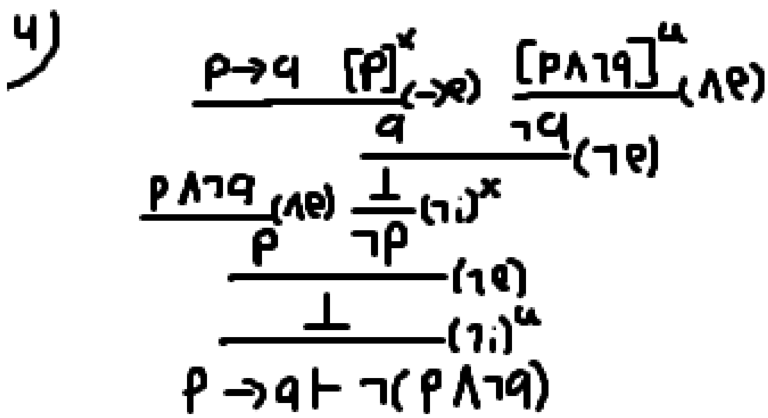


Figure 17: Exercício 4

3.5 Exercício 5

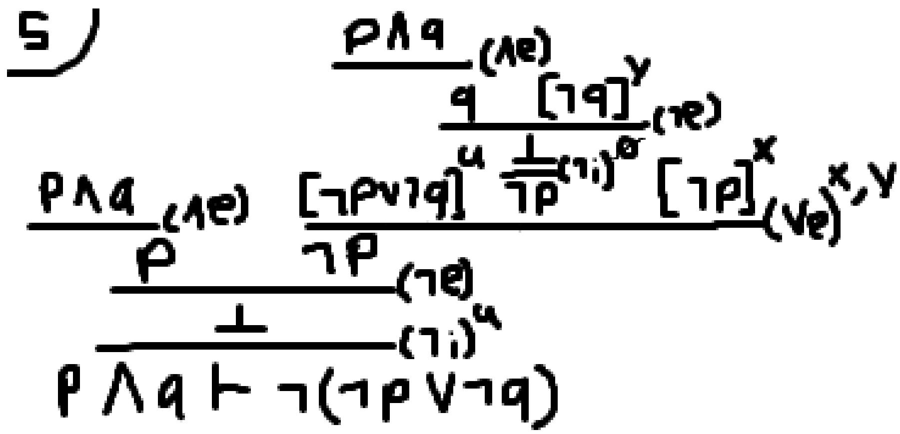


Figure 18: Exercício 5

3.6 Exercício 6

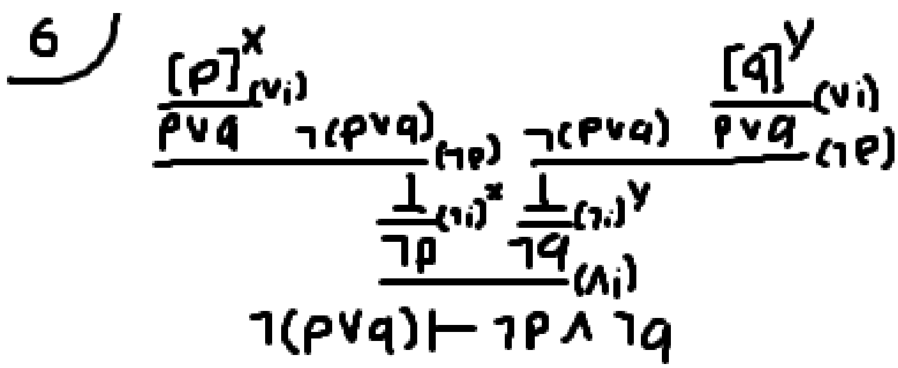


Figure 19: Exercício 6

3.7 Exercício 7

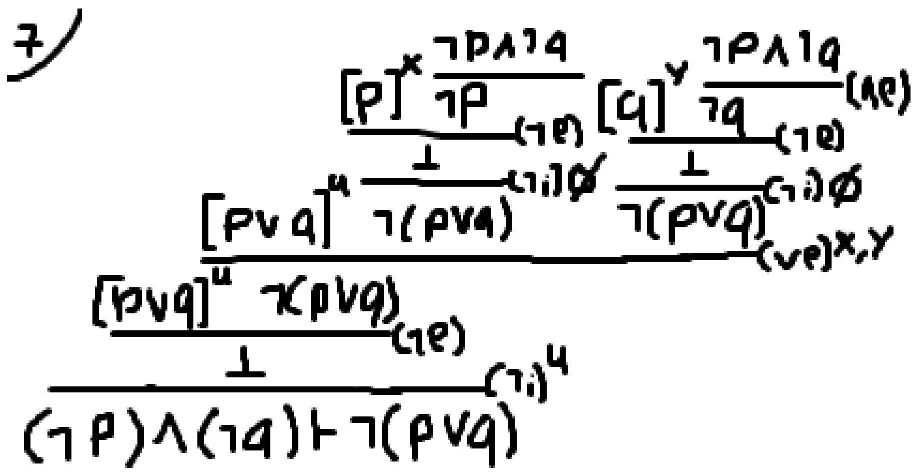


Figure 20: Exercício 7

3.8 Exercício 8

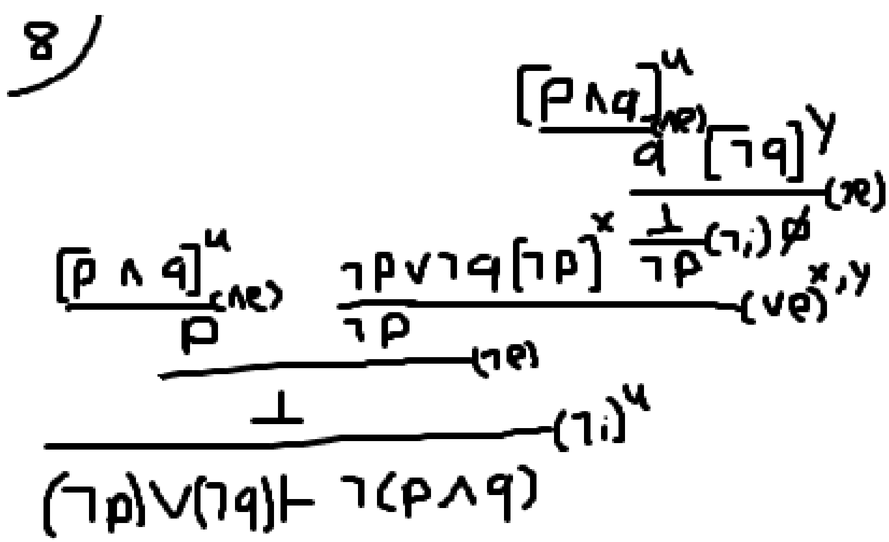


Figure 21: Exercício 8

3.9 Exercício 9

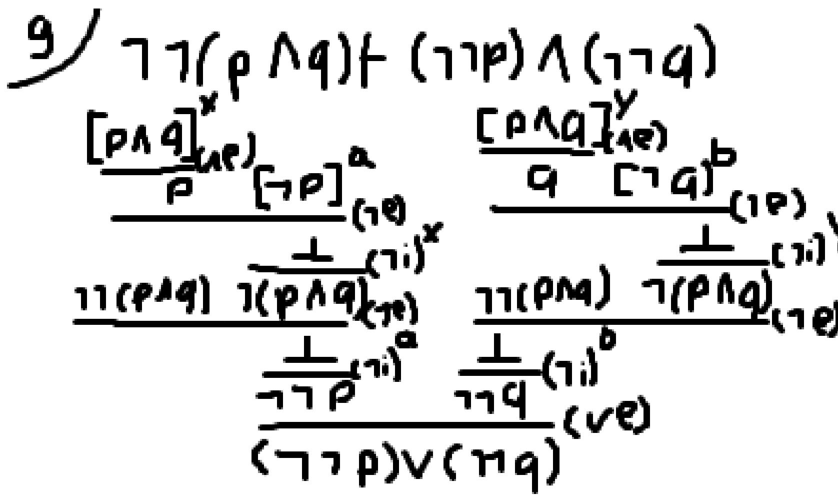


Figure 22: Exercício 9

3.10 Exercício 10

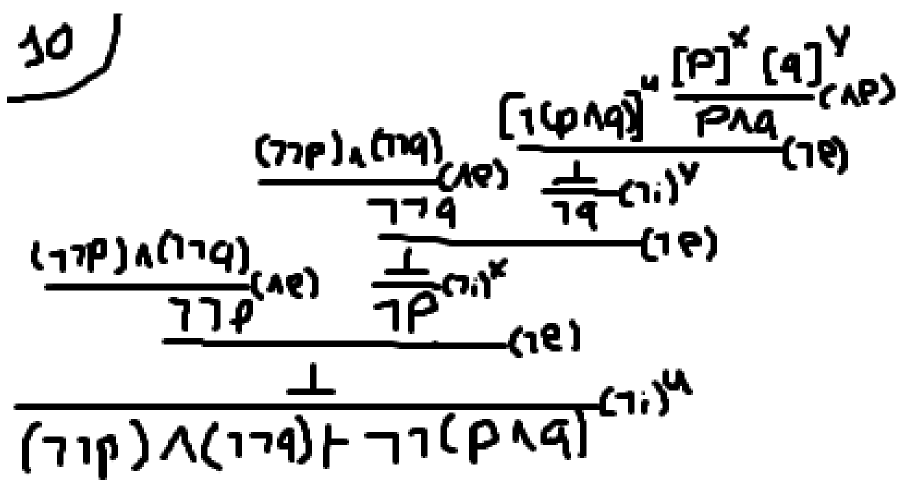


Figure 23: Exercício 10

3.11 Exercício 11

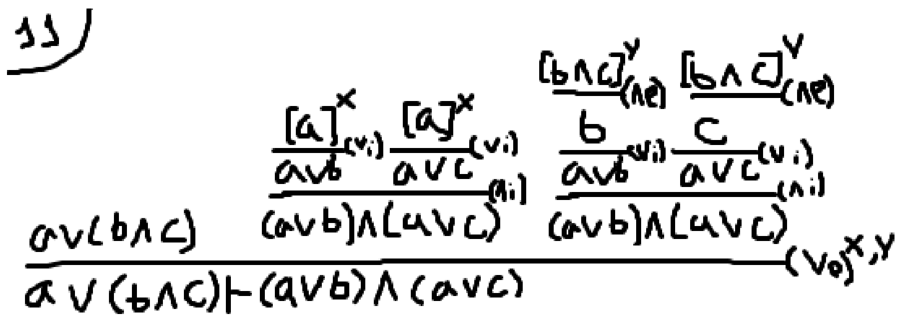


Figure 24: Exercício 11

3.12 Exercício 12

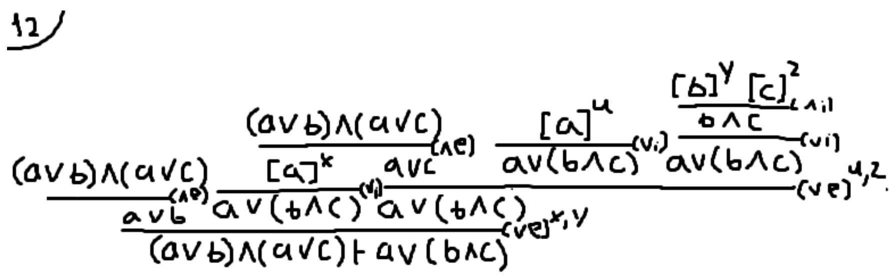


Figure 25: Exercício 12

3.13 Exercício 13

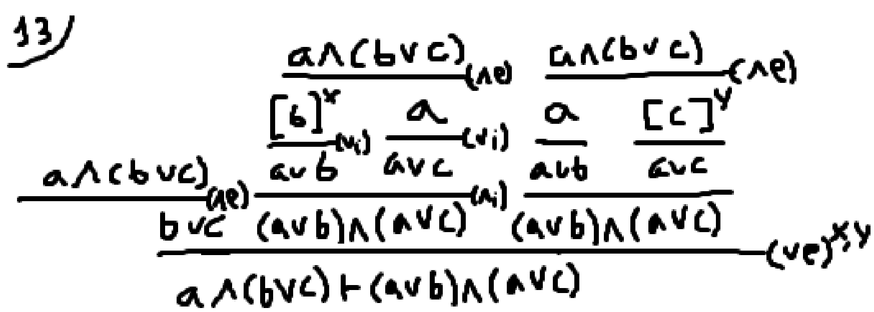


Figure 26: Exercício 13

3.14 Exercício 14

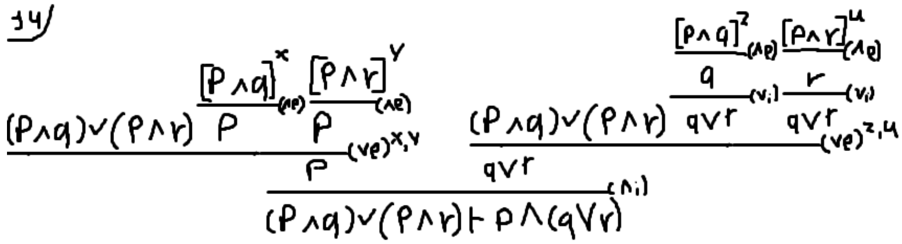


Figure 27: Exercício 14

3.15 Exercício 15

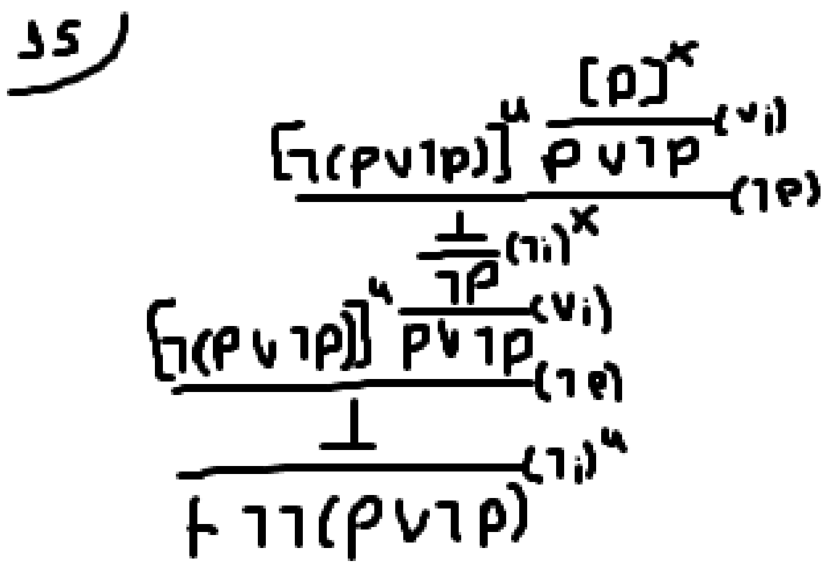


Figure 28: Exercício 15

3.16 Exercício 16

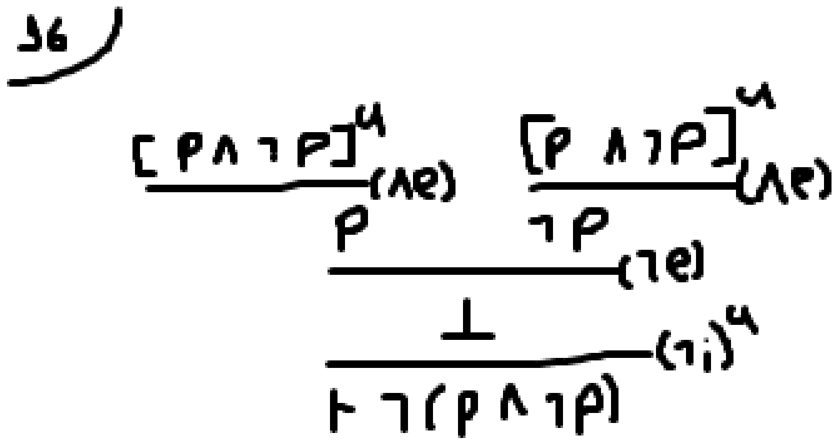


Figure 29: Exercício 16

4 Aula 6

4.1 Exercício 1

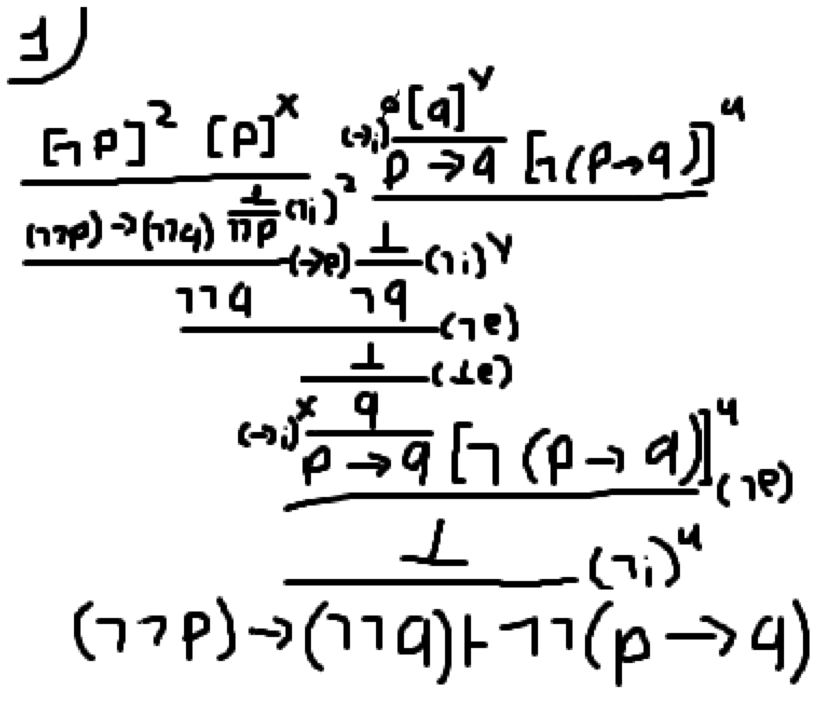


Figure 30: Exercício 1

4.2 Exercício 2

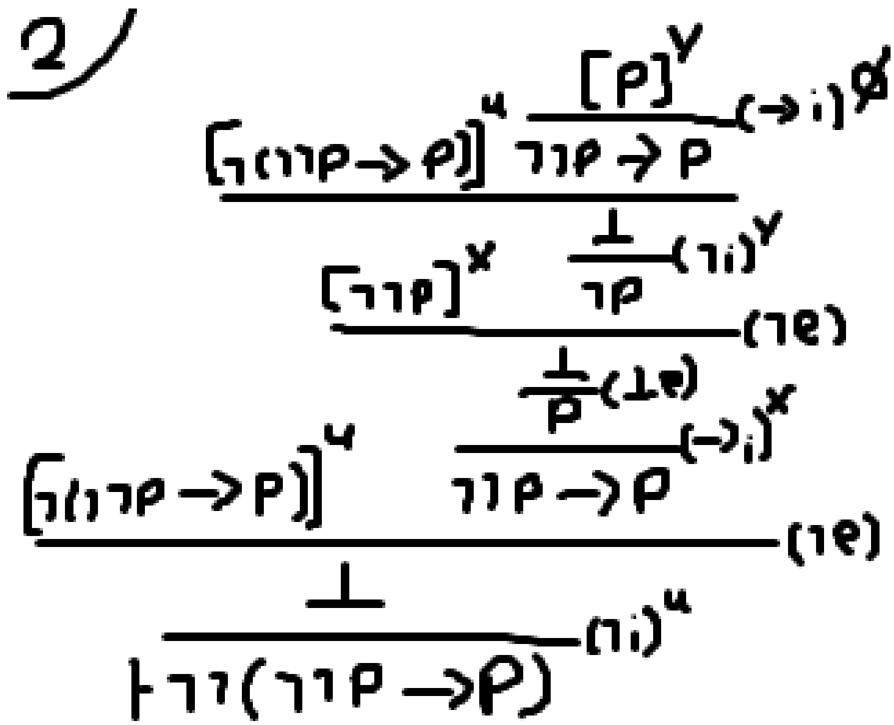


Figure 31: Exercício 2

4.3 Exercício 3

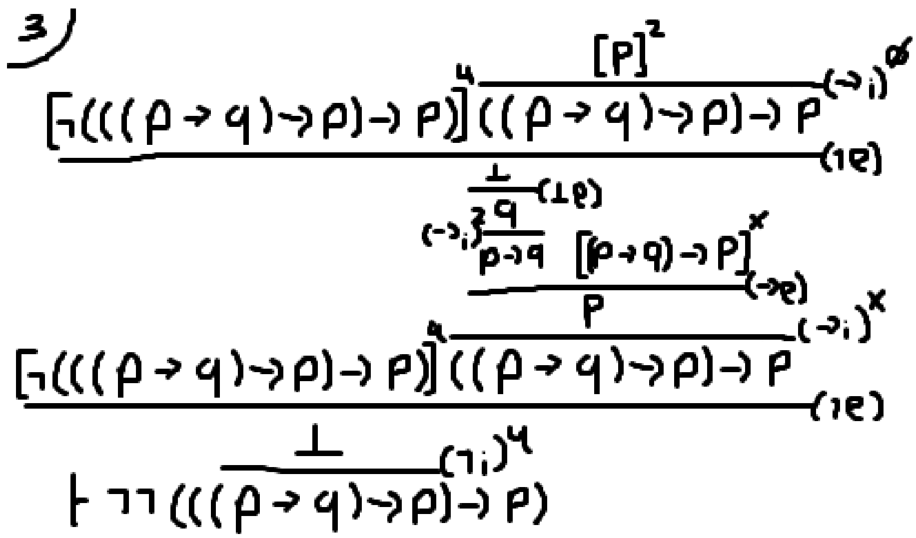


Figure 32: Exercício 3

5 Aula 7

5.1 Exercício 1

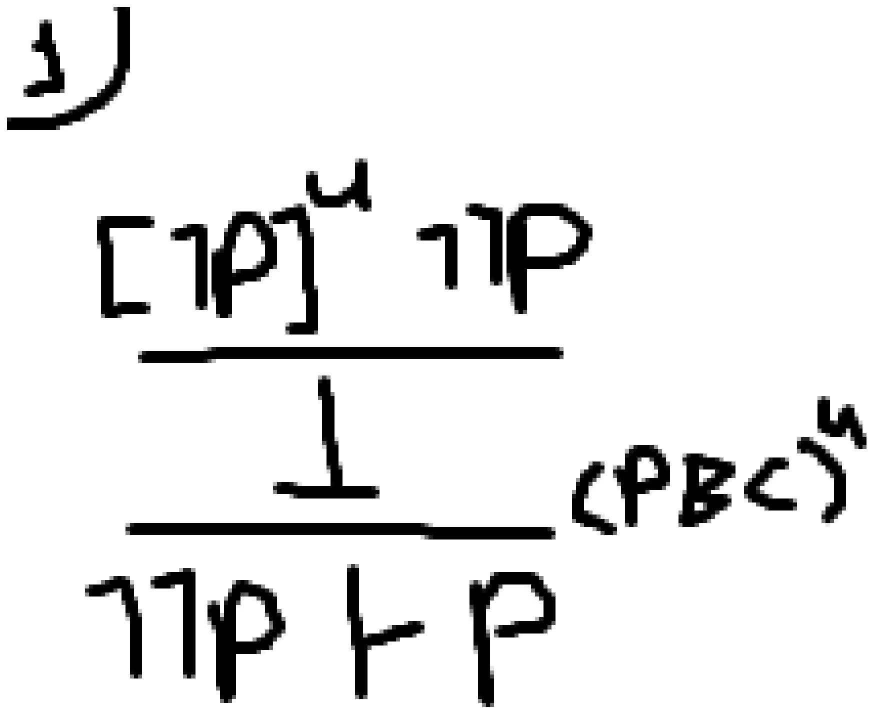


Figure 33: Exercício 1

5.2 Exercício 2

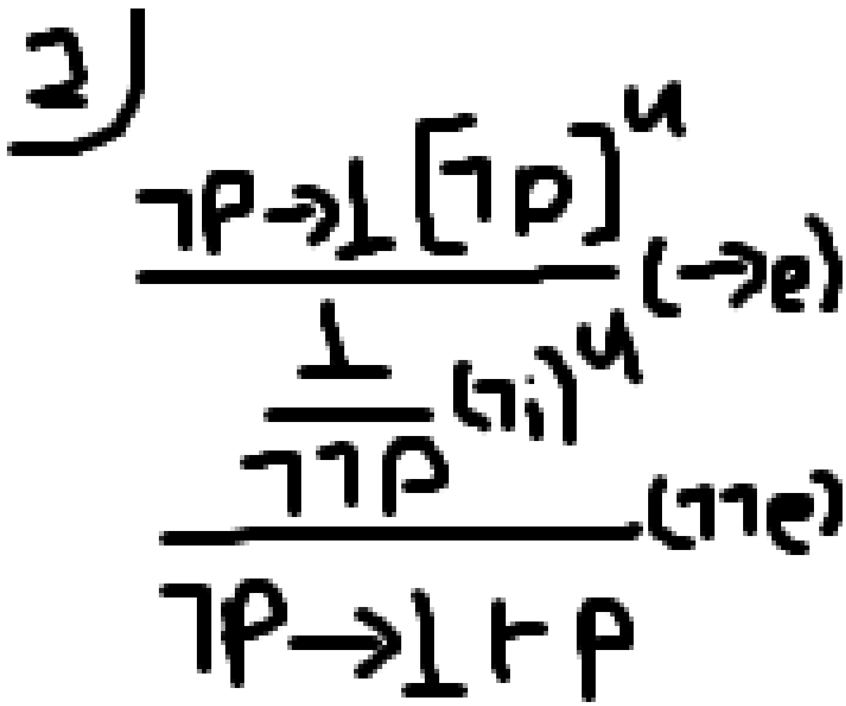


Figure 34: Exercício 2

5.3 Exercício 3

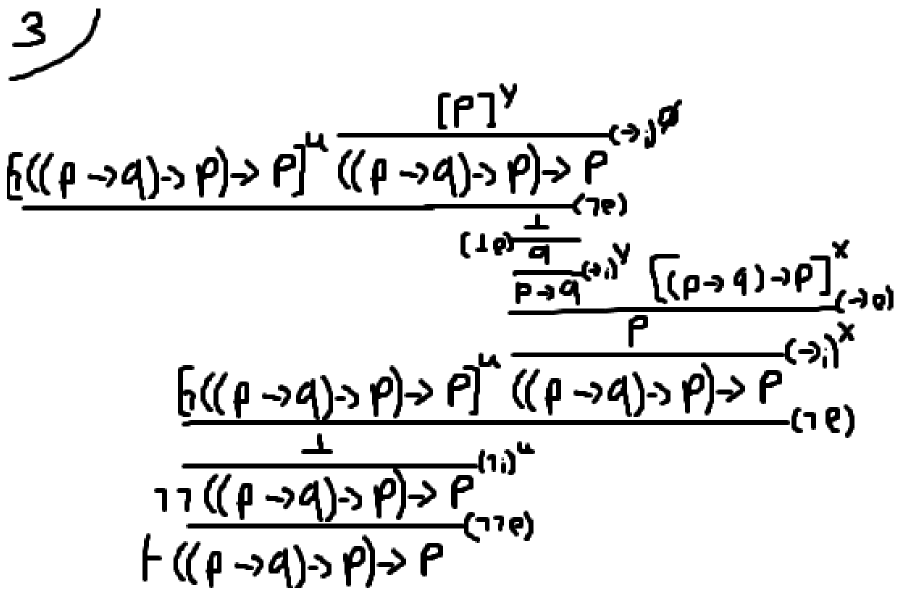


Figure 35: Exercício 3

5.4 Exercício 4

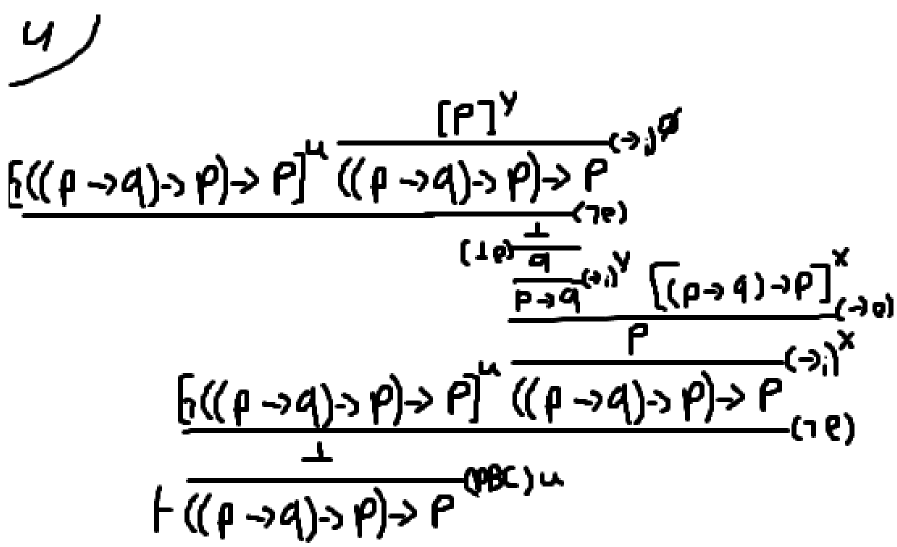


Figure 36: Exercício 4

5.5 Exercício 5

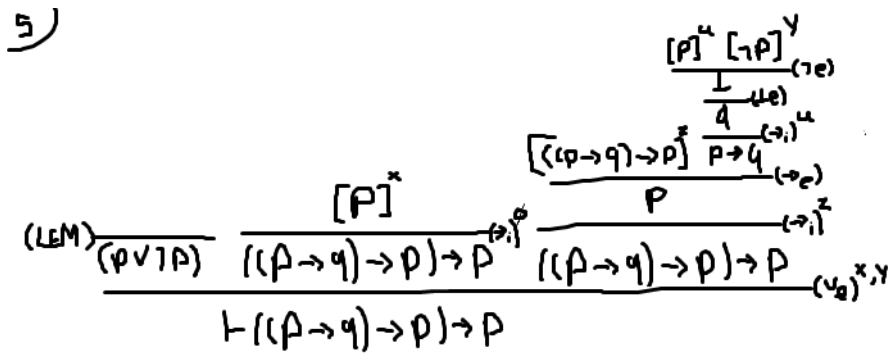


Figure 37: Exercício 5

5.6 Exercício 6

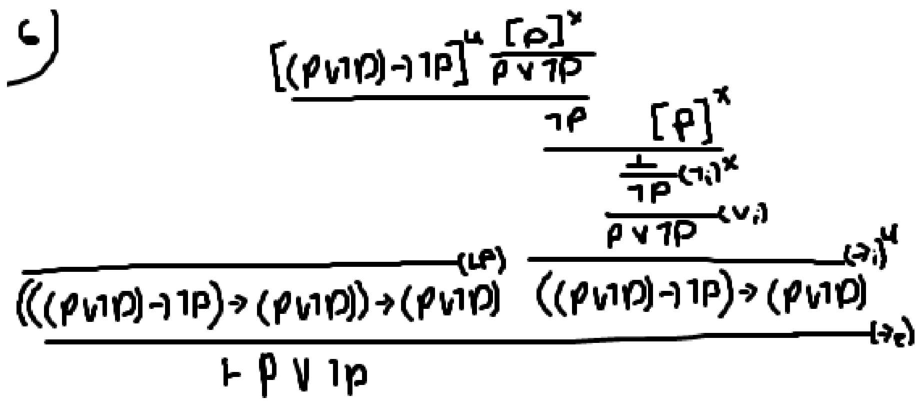


Figure 38: Exercício 6

5.7 Exercício 7

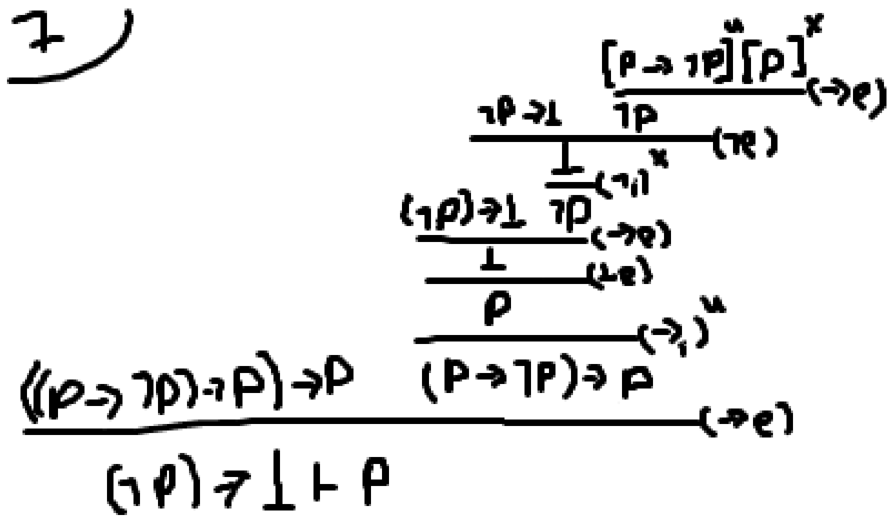


Figure 39: Exercício 7

5.8 Exercício 8

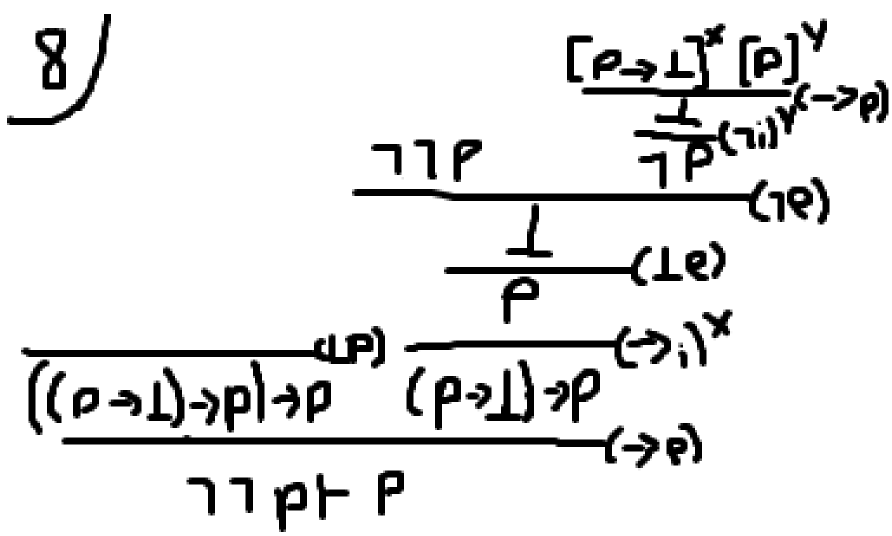


Figure 40: Exercício 8

5.9 Exercício 9

O número mínimo de provas necessárias são 4, conectando cada uma das quatro regras. Com uma conexão entre cada uma das regras, ao possuirmos uma delas, necessariamente há um caminho para chegar até as outras três.

É trivial notar que não é possível que isso seja realizado com menos de quatro, uma vez que uma das regras estará desconectada, sem que possamos prová-la. Tendo isso em mente, só é preciso demonstrar que existem quatro provas que as conectem.

A partir do exercício 1, 3 e 6, já criamos uma conexão seguindo a ordem PBC $\rightarrow$ $\sim\sim$E $\rightarrow$ LP $\rightarrow$ LEM; sendo cada uma das setas uma prova, respectivamente. Só resta provar LEM $\rightarrow$ PBC para que haja um ciclo e a equivalência se mostre possível com quatro provas.

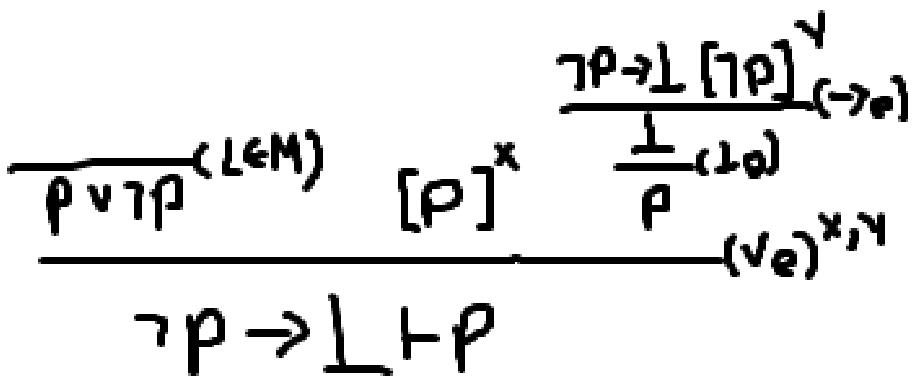


Figure 41: Prova PBC usando LEM

Assim, fica provado que quatro é valor mínimo e suficiente de provas para estabelecer equivalência entre essas quatro regras.

5.10 Execício 10

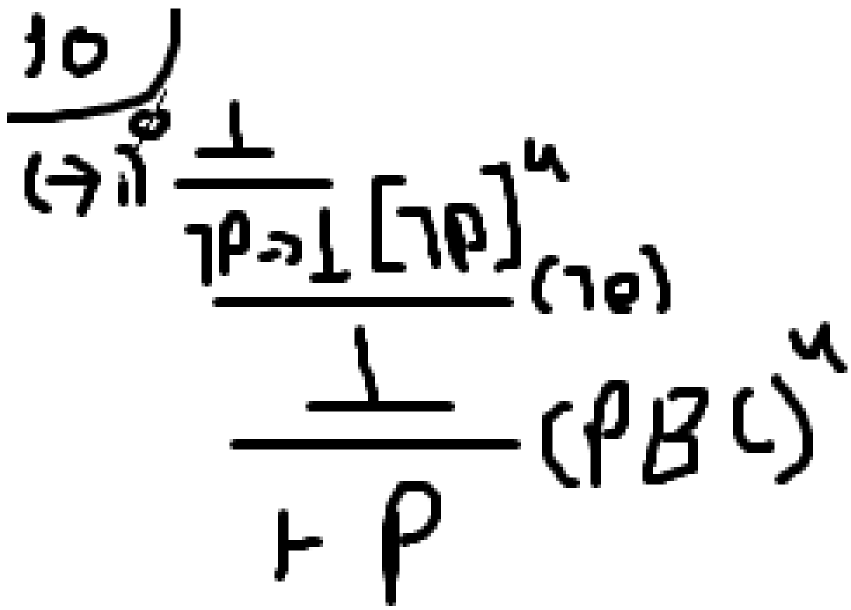


Figure 42: Exercício 10

6 Exercícios 66-71

6.1 Exercício 66

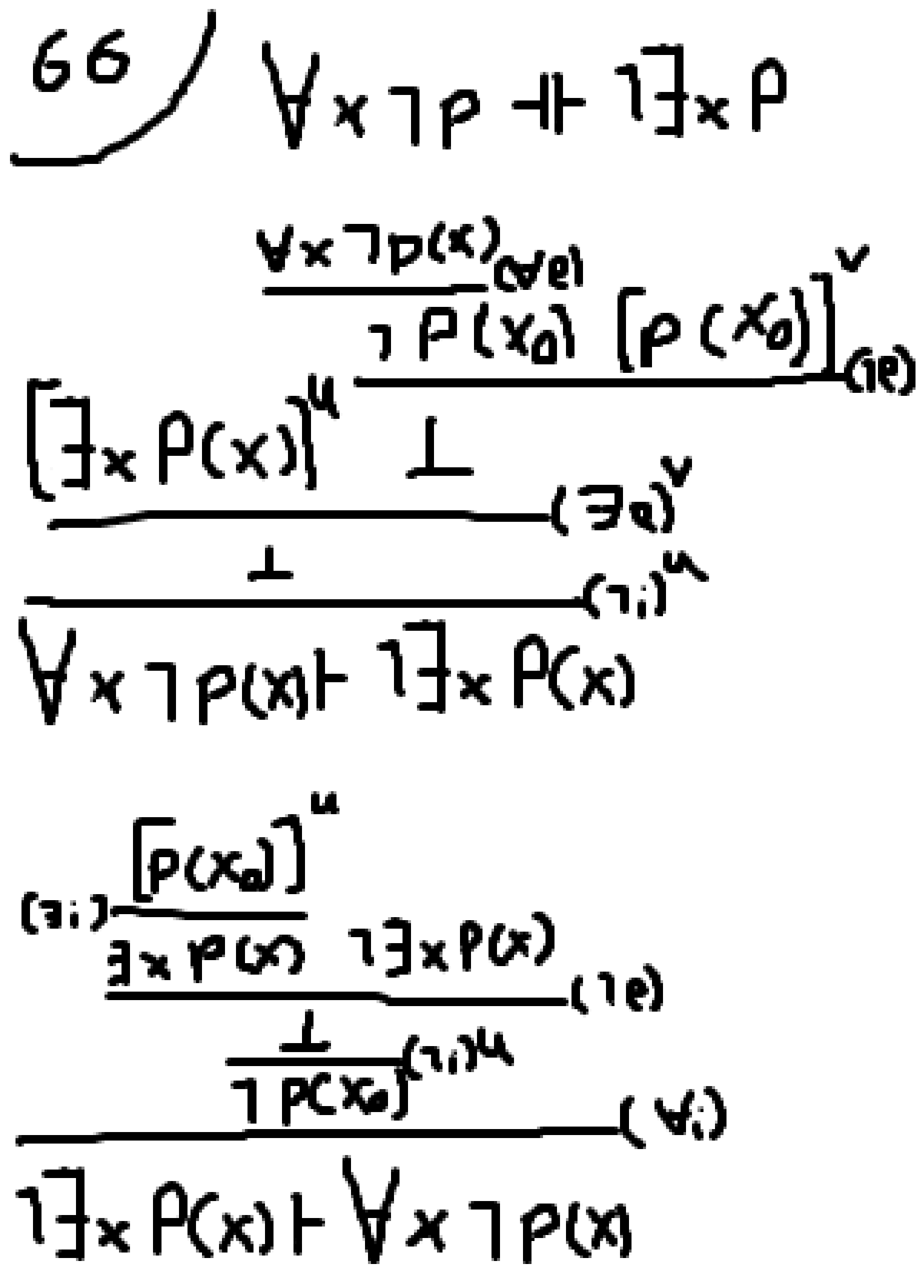


Figure 43: Exercício 66

6.2 Exercício 67

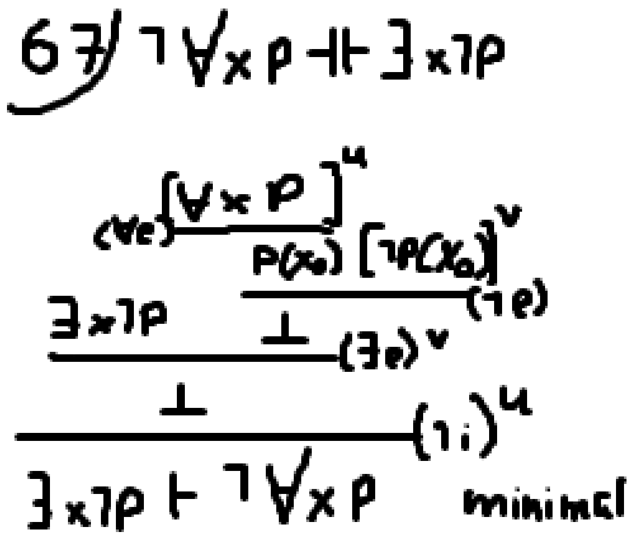


Figure 44: Exercício 67

6.3 Exercício 68

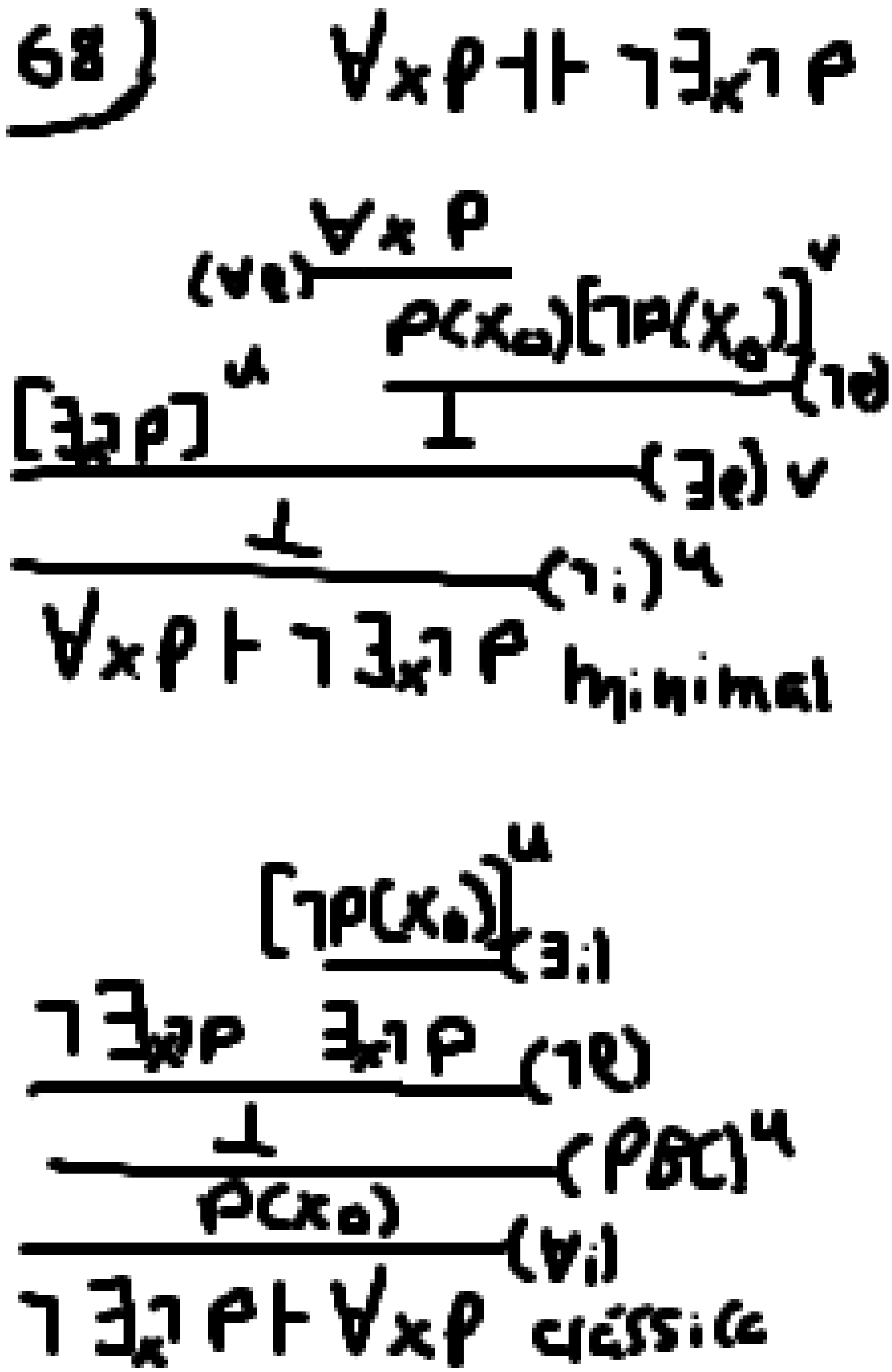


Figure 45: Exercício 68

6.4 Exercício 69

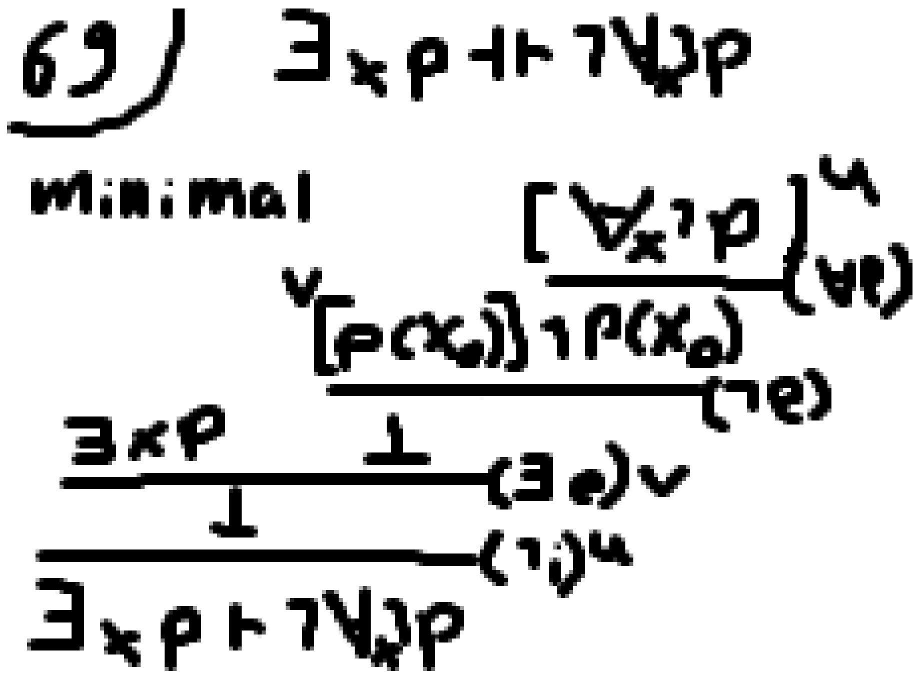


Figure 46: Exercício 69

6.5 Exercício 70

6.5.1 Exercício 70-1

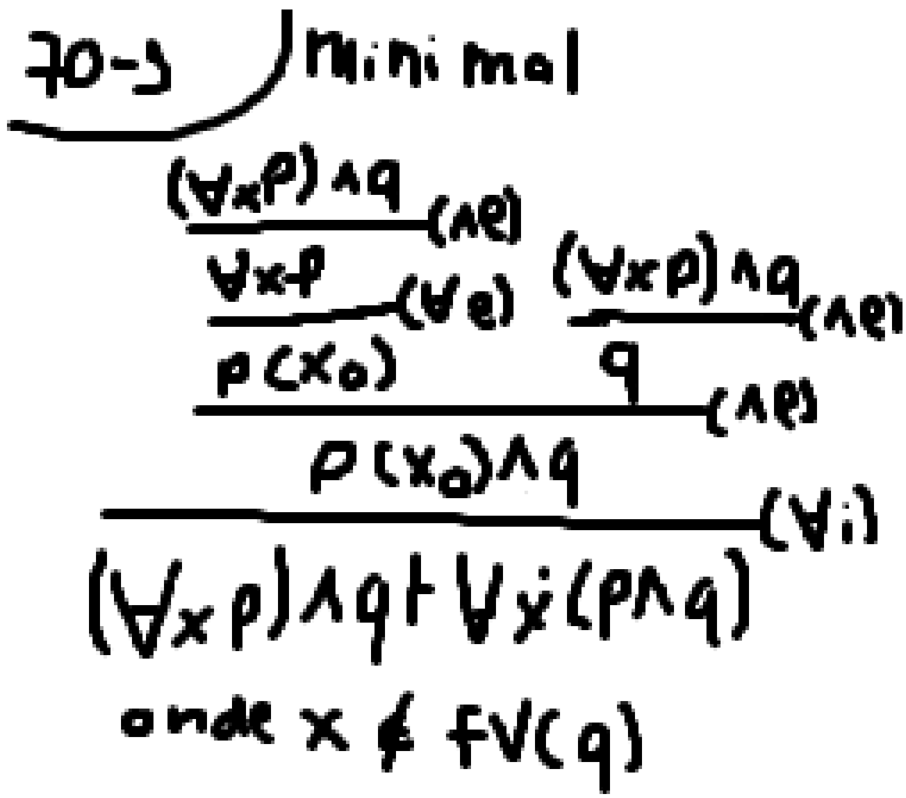


Figure 47: Exercício 70-1

6.5.2 Exercício 70-2

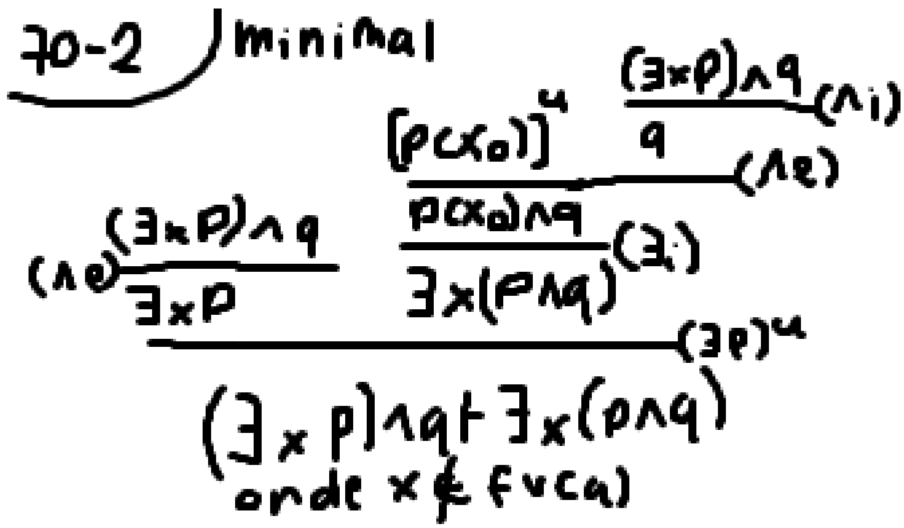


Figure 48: Exercício 70-2

6.5.3 Exercício 70-3

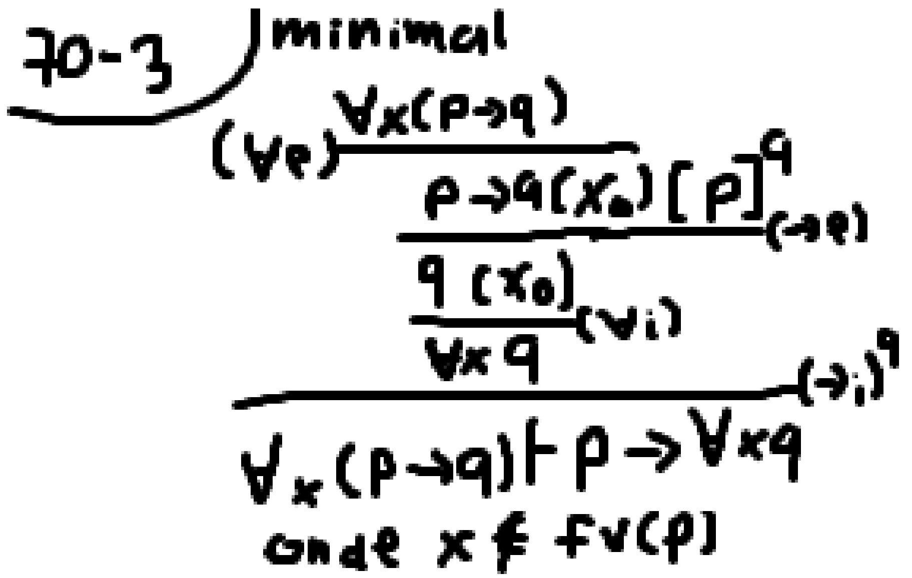


Figure 49: Exercício 70-3

6.5.4 Exercício 70-4

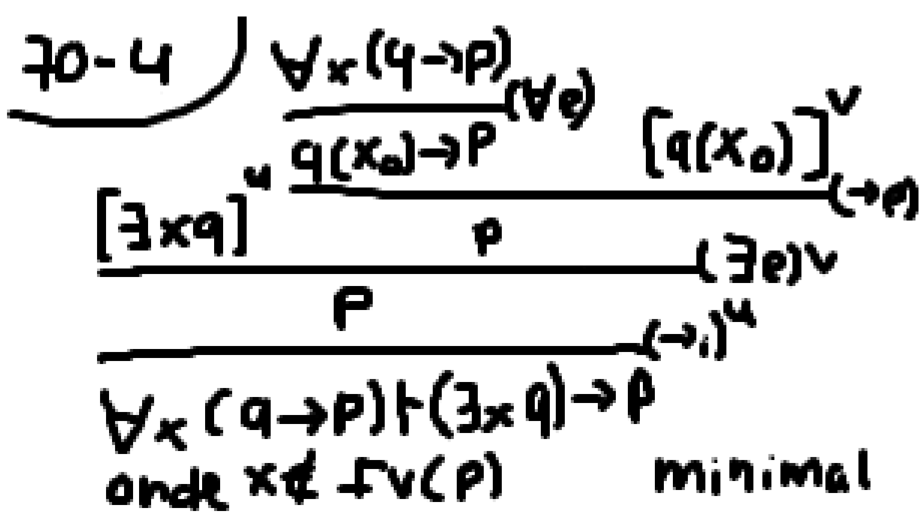


Figure 50: Exercício 70-4

6.6 Exercício 71

6.6.1 Exercício 71-1

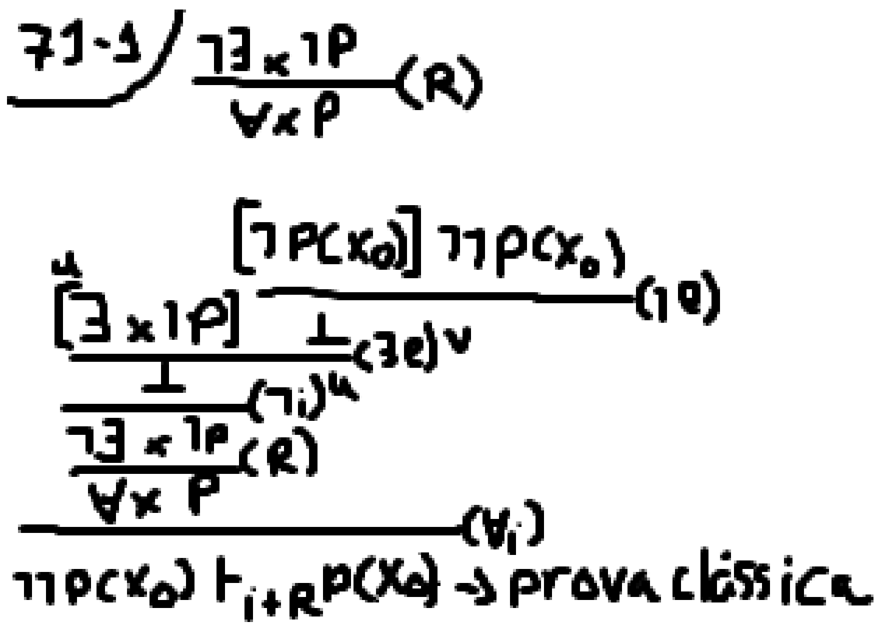


Figure 51: Exercício 71-1

6.6.2 Exercício 71-2

6.6.3 Exercício 71-3

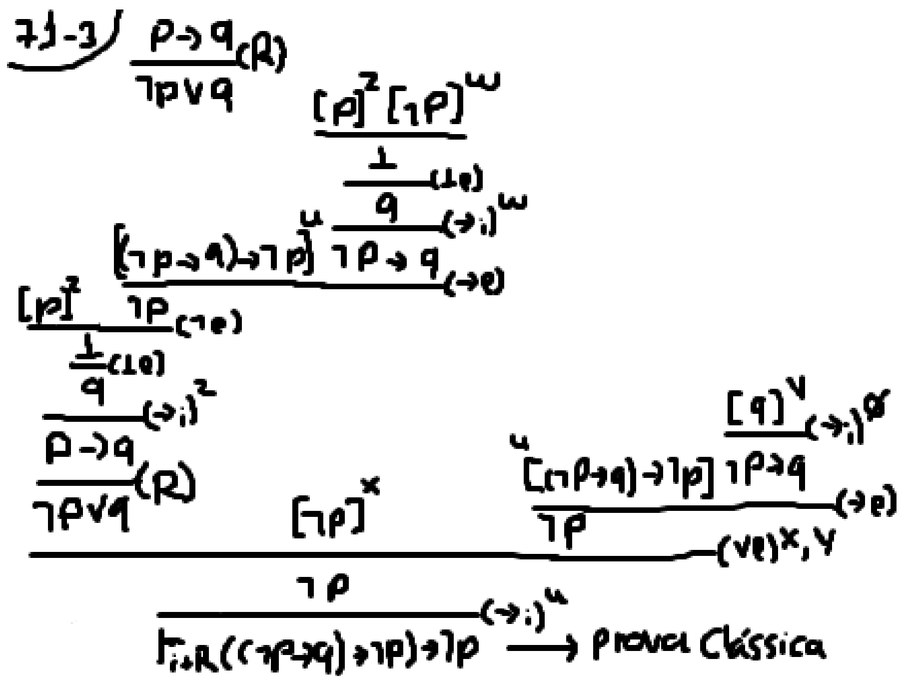


Figure 52: Exercício 71-3

7 Exercícios 73-79

7.1 Exercício 73

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \sum_{i=1}^{1} i$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)(k)}{2}$.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i = (\sum_{i=1}^{k-1} i) + k =^{(*)} (\frac{(k-1)(k)}{2}) + k = (\frac{k^2-k+2k}{2}) = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.

∎

7.2 Exercício 74

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2 = \sum_{i=1}^{1} i^2$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $i = 1^{k-1}i^2 = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}$.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^2) + k^2 =^{(*)} (\frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}) + k^2 = \frac{(2k^3-3k^2+k)+6k^2}{6} = \frac{(2k^3+3k^2+k)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

■

7.3 Exercício 75

Proof. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Caso base com $n = 0$: $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 = 2^0 = \sum_{i=0}^{0} 2^i$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$.

Passo de indução: $\sum_{i=0}^{k} 2^i = (\sum_{i=0}^{k-1} 2^1) + 2^k =^{(*)} 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

■

7.4 Exercício 76

Proof. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$

Caso base com $n = 1$: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = 1^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$. Portanto, é válido para o caso base.

Já foi provado no exercício 73 que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto, assumo como hipótese de indução $(*)$ que $\sum_{i=1}^{k-1} i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i)^2 = (\frac{(k-1)k}{2})^2$

Passo de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^3) + k^3 =^{(*)} (\frac{(k-1)k}{2})^2 + k^3 = \frac{(k-1)^2k^2+4k^3}{4} = \frac{k^2((k-1)^2+4k)}{4} = \frac{k^2(k^2+2k+1)}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = (\frac{k(k+1)}{2})^2 = (\sum_{i=1}^{k} i)^2$

■

7.5 Exercício 77

Proof. $\forall n \geq 0,\ 3|(2^{2n} - 1)$

Caso base com $n = 0$: $2^{0\cdot2} - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $3|(2^{2k-2} - 1)$, portanto, $(2^{2k-2} - 1 = 3m)$ para algum $m \exists \mathbb{N}$.

Passo de indução: $2^{2k} - 1 = (4 \cdot 2^{2k-2}) - 1 = 3(2^{k-2}) + 2^{k-2} - 1 = 3m \cdot 3(2^{k-2}) = 3(m \cdot 2^{k-2}) =^{(*)} 3p$ para algum $p \exists \mathbb{N}$.

■

7.6 Exercício 78

Proof. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2 + 3$ ■

Caso base com $n = 2$: $3^2 = 9 \geq 7 = 2^2 + 3$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $3^k \geq (k)^2 + 3$.

Passo de indução: $3^{k+1} = 3(3^k)$, logo, por meio de $(*)$, $3(3^k) \geq 3((k)^2+3) \geq 3k^2+9 \geq k^2+2k^2+9 \geq k^2+2k+4 \geq (k+1)^2+3$, portanto $3^{k+1} \geq (k+1)^2+3$.

7.7 Exercício 79

Proof. $\forall n \geq 1, n! \leq n^n$

Caso base com $n = 1$: $1! = 1 \leq 1^1$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução $(*)$ que $(k-1)! \leq (k-1)^{k-1}$.

Passo de indução: $k! = (k-1)! \cdot k$, logo, por meio de $(*)$, $(k-1)! \cdot k \leq (k-1)^{k-1} \cdot k \leq k^{k-1} \cdot k \leq k^k$, portanto $k! \leq k^k$. ∎

8 Exercícios 90-93

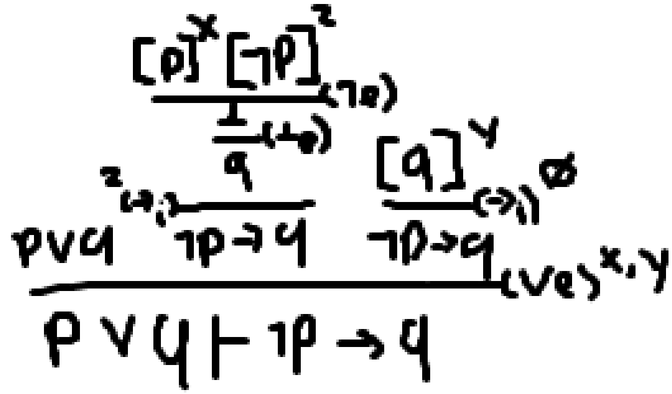
8.1 Exercício 90

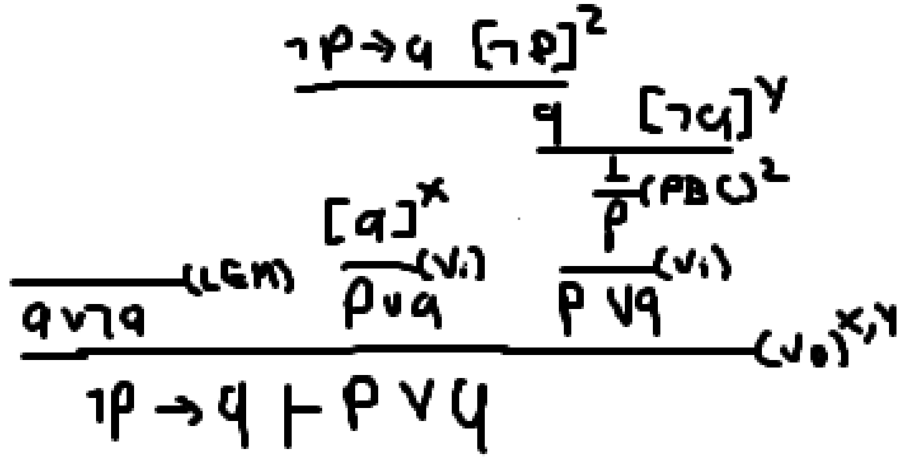
Proof. Prova de que para cada fórmula p, existe fórmula p' construída com $\neg$ e $\rightarrow$

Faremos a indução estrutural na estrutura de p:

- Se p é variável proposicional ou constante $\bot$, segue que p' = p.
- Se p é p = $q_1 \rightarrow q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q_i'(i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i(i = 1, 2)$.. Basta tomar p' = $q_1' \rightarrow q_2'$.
- Se p = $q_1 \wedge q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q_i'(i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i(i = 1, 2)$.. Basta provar que há uma fórmula construída com $\neg$ e $\rightarrow$ equivalente a $q_1' \wedge q_2'$:

$$p \vee q \dashv\vdash \neg p \to q$$





- se p $= q_1 \vee q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q_i'(i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i(i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com $\neg$ e $\to$ equivalente a $q_1' \vee q_2'$:

$$p \wedge q \dashv\vdash \neg(p \to \neg q)$$

$$\dfrac{\dfrac{[p \to q]^{x} \quad \dfrac{p \wedge q}{p}(\wedge e)}{\neg q}(\to i) \qquad \dfrac{p \wedge q}{q}(\wedge e)}{\dfrac{\bot}{p \wedge q \vdash \neg(p \to \neg q)}(\neg i)^{x}}(\neg e)$$

$$\dfrac{{}^{y}(PBC)\dfrac{\bot}{p} \qquad \dfrac{\bot}{q}(PBC)^{x}}{\neg(p \to \neg q) \vdash p \wedge q}(\wedge e)$$

where

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^{z}[\neg p]^{y}}{\bot}(\neg e)}{\neg q}(\bot e)}{p \to \neg q}(\to i)^{z} \quad \neg(p \to \neg q)}{\bot}(\neg e) \qquad \dfrac{\neg(p \to \neg q) \quad \dfrac{[\neg q]^{x}}{p \to \neg q}(\to i)^{\emptyset}}{\bot}(\neg e)$$

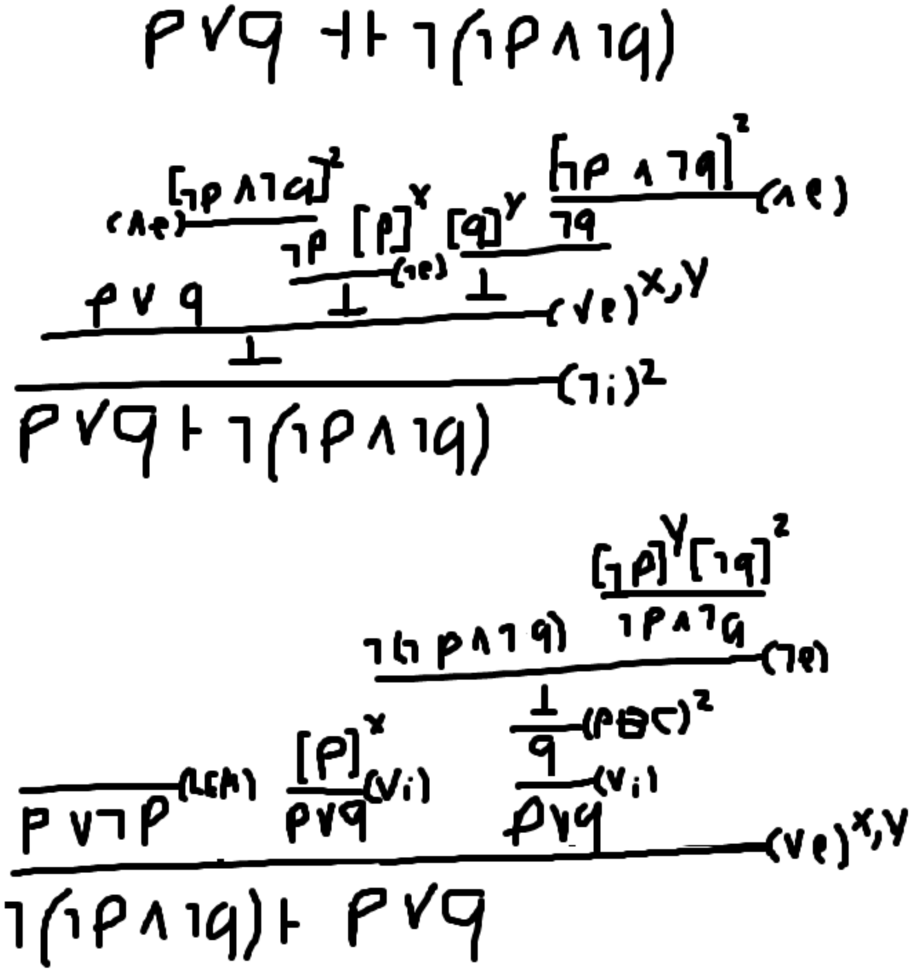
-Portanto, por indução, qualquer fórmula p pode ser construída por fórmula p' com tais conectivos. ■

8.2 Exercício 91

Proof. Prova de que para cada fórmula p, existe fórmula p' construída com $\neg$ e $\wedge$

Faremos a indução estrutural na estrutura de p:

- Se p é variável proposicional ou constante $\perp$, segue que p' = p.
- Se p = $q_1 \wedge q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q_i'(i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i(i = 1, 2)$. Basta tomar p' = $q_1' \wedge q_2'$.
- Se p = $q_1 \vee q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q_i'(i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i(i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com $\neg$ e $\wedge$ equivalente a $q_1' \vee q_2'$:



- Se p = $q_1 \rightarrow q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com $\neg$ e $\wedge$ equivalente a $q'_1 \rightarrow q'_2$. Essa prova já foi feita anteriormente no exercício 90, figura 8.1.

Portanto, por indução, qualquer fórmula p pode ser construída por fórmula p' com tais conectivos. ∎

8.3 Exercício 92

Proof. Faremos a indução estrutural na estrutura de ϕ^N:

- Se φ^N é fórmula atômica ou a constante $\perp$:

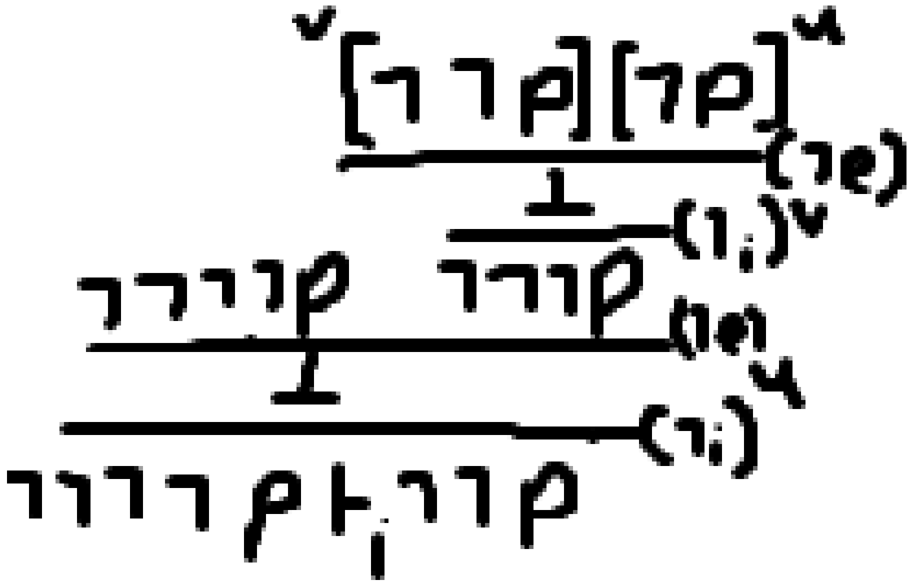


Figure 53: Exercício 92.1

- Se $\varphi = \neg q$:

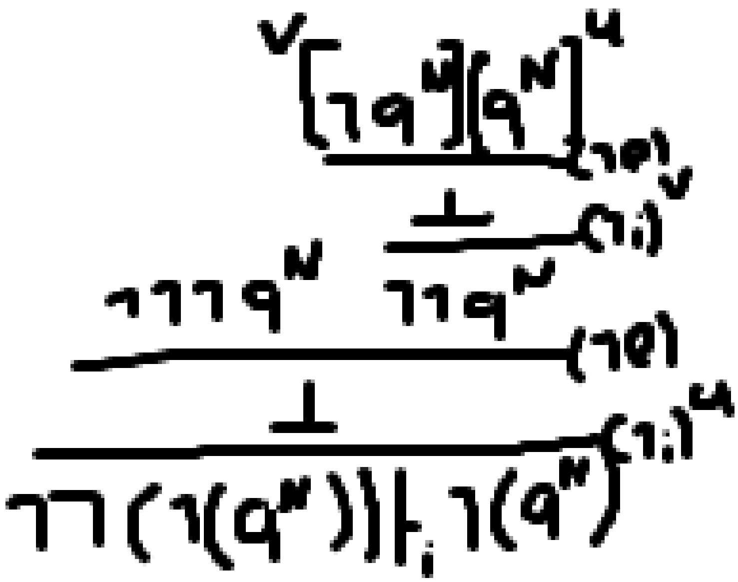


Figure 54: Exercício 92.2

- Se $\varphi = p \wedge q$, assumo por hipótese de indução que é válido para q^N e p^N e:

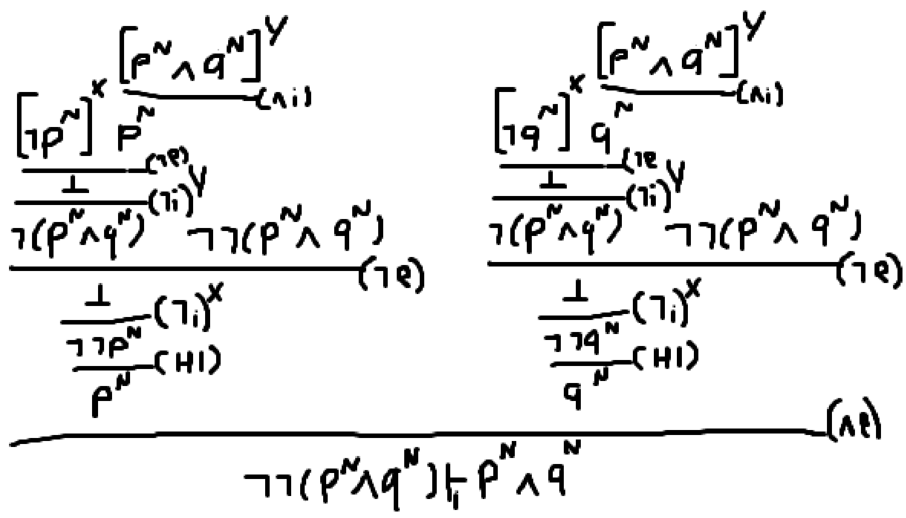


Figure 55: Exercício 92.3

- Se $\varphi = p \vee q$:

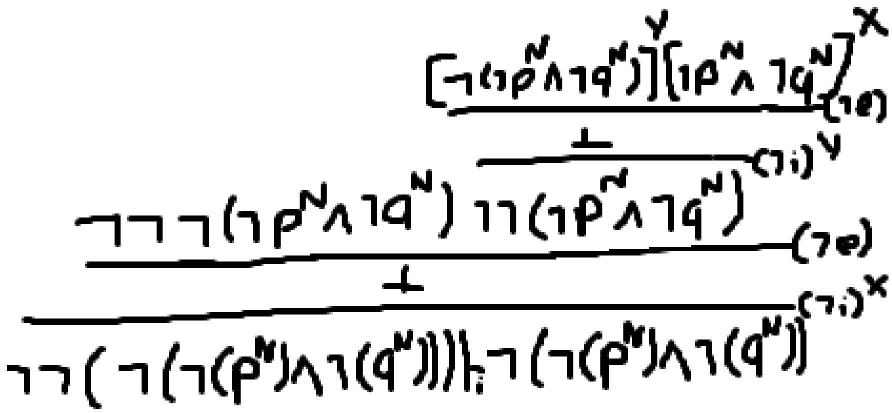


Figure 56: Exercício 92.4

- Se $\varphi = p \to q$, assumo por hipótese de indução que é válido para q^N e p^N e:

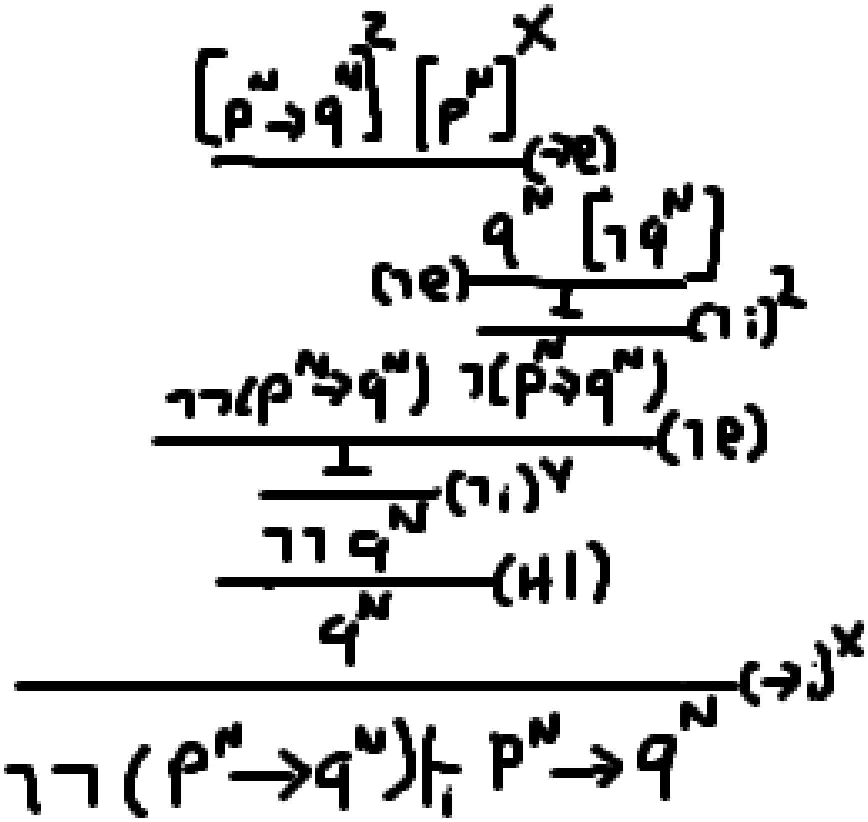


Figure 57: Exercício 92.5

- Se $\varphi = \forall_x p$, assumo por hipótese de indução que é válido para todo p^N:

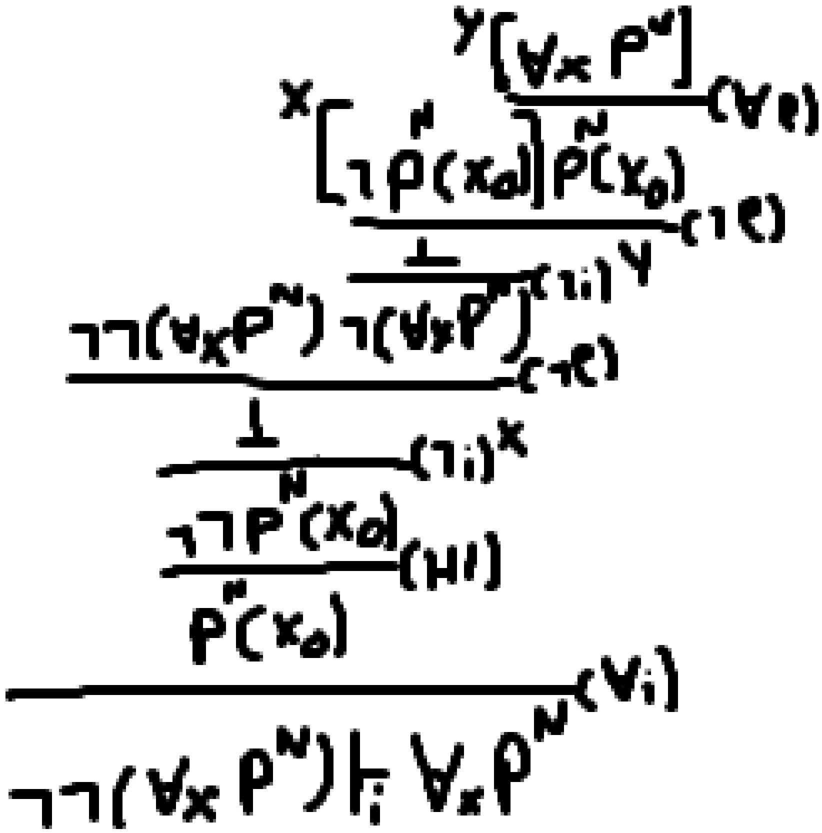


Figure 58: Exercício 92.6

- Se $\varphi = \exists_x p$:

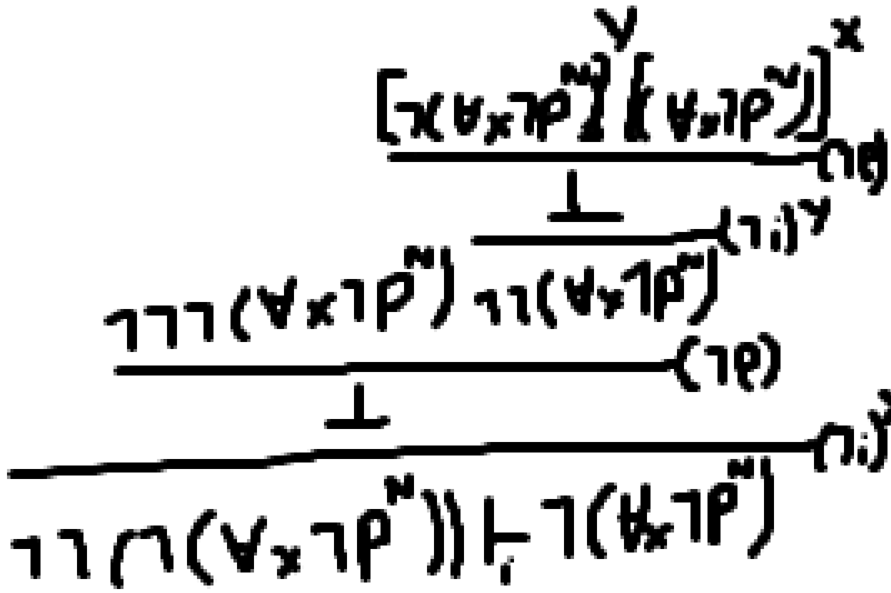


Figure 59: Exercício 92.7

Assim, fica provado por indução estrutural que há uma prova intuicionista de $\neg\neg(\varphi^N) \vdash \varphi^N$ para cada caso de φ^N. ■

8.4 Exercício 93

Proof. Prova de $\neg\neg\phi \vdash_m \phi$ para qualquer fórmula ϕ pertencente ao fragmento negativo

Faremos a indução estrutural na estrutura de ϕ:

- Se ϕ é uma fórmula negativa:

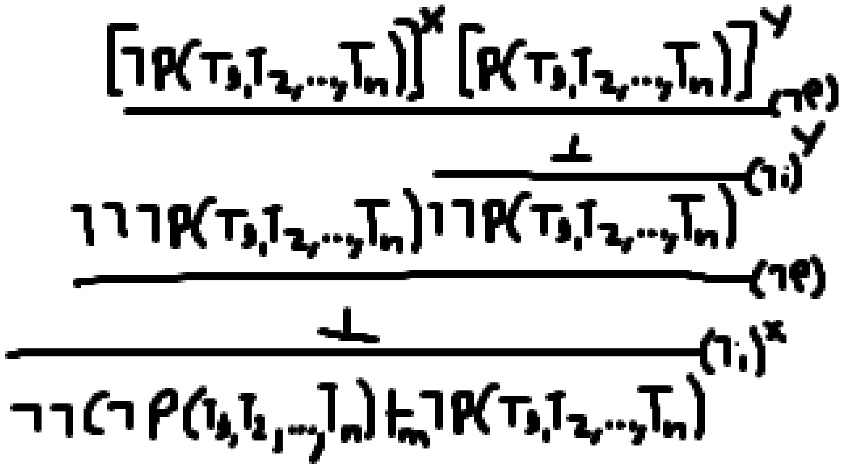


Figure 60: Exercício 93.1

- Se $\phi = \bot$:

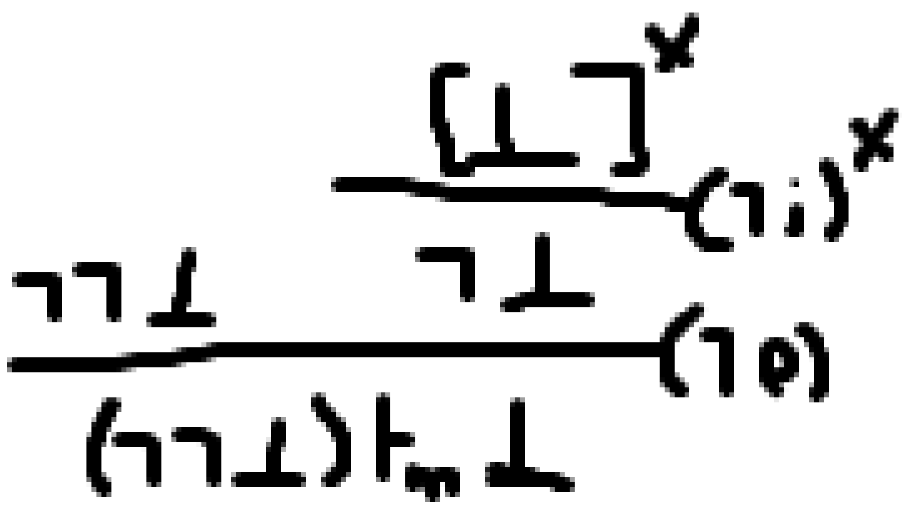


Figure 61: Exercício 93.2

- Se $\phi = \neg q$:

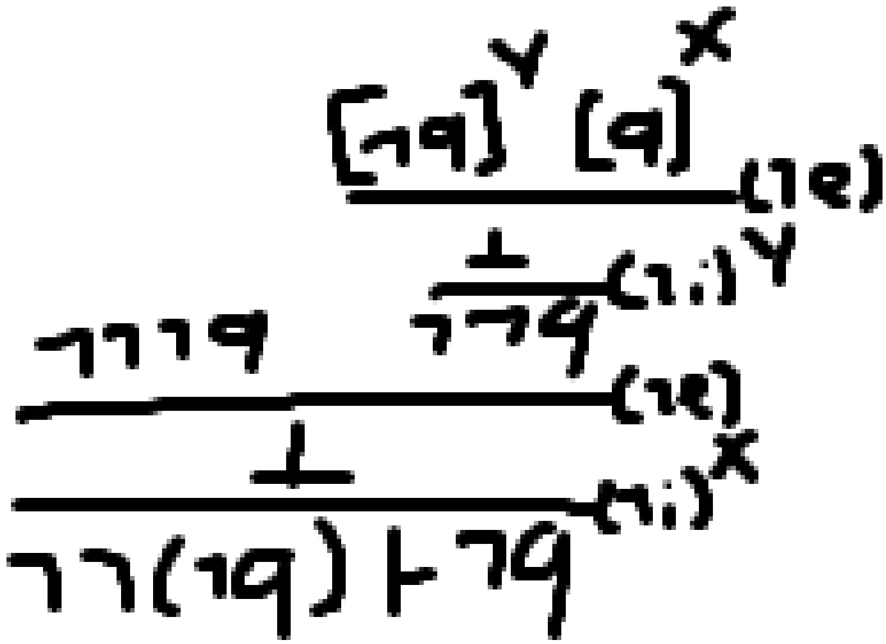


Figure 62: Exercício 93.3

- Se $\phi = (p \vee q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para p e q:

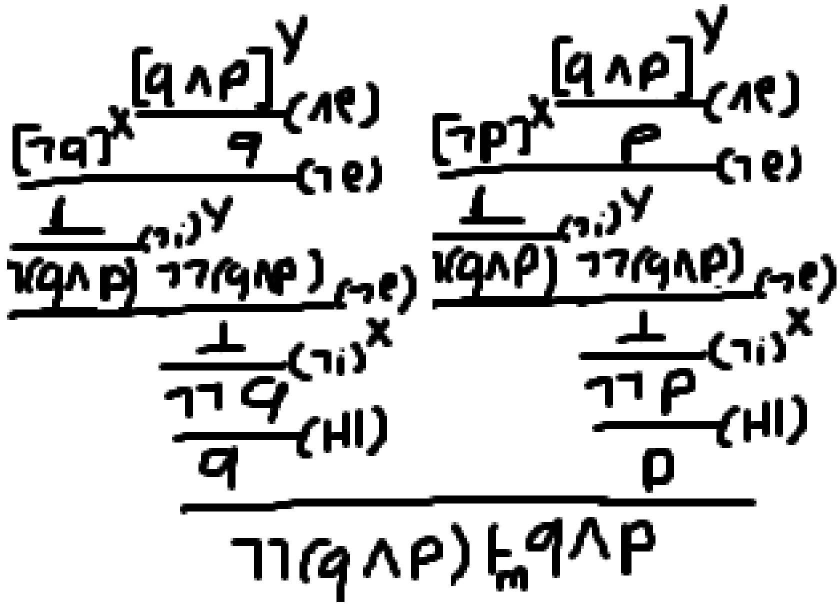


Figure 63: Exercício 93.4

- Se $\phi = (p \rightarrow q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para p e q:

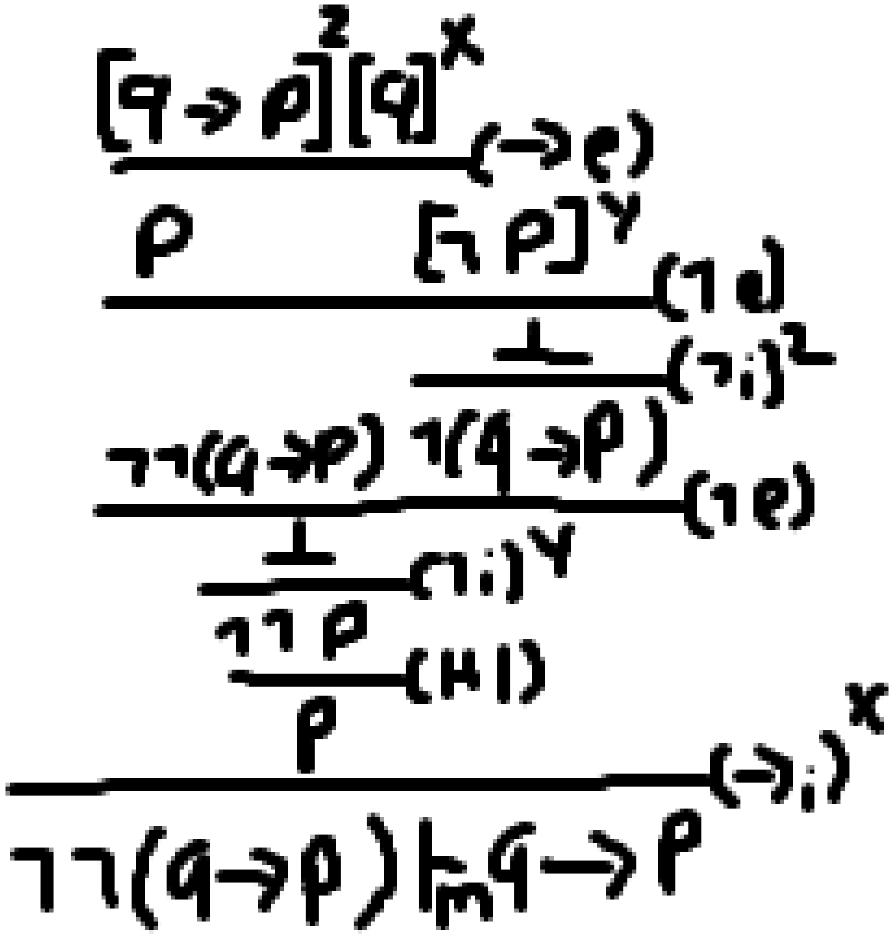


Figure 64: Exercício 93.5

- Se $\phi = (\forall_x q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para todo q:

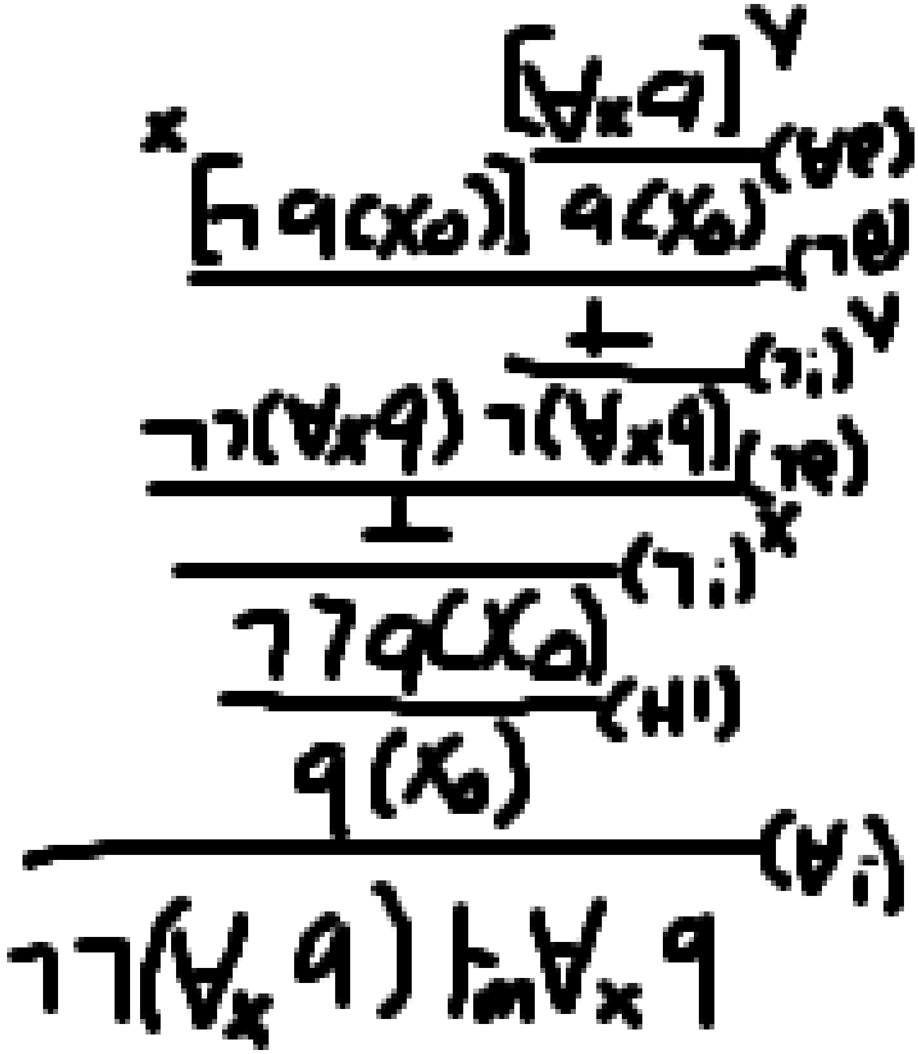


Figure 65: Exercício 93.6

Assim, fica provado por meio de indução estrutural que $\neg\neg\phi \vdash_m \phi$ é válido para qualquer fórmula ϕ pertencente ao fragmento negativo. ∎

9 Exercícios 94-99

9.1 Exercício 94

Proof. Prova de $|l_1 \circ l_2| = |l_1| + |l_2|$, quaisquer que sejam listas l_1 e l_2

Indução na estrutura de l_1, utilizando noções da estrutura de listas pré-estabelecidas:

Caso base com $l_1 = nil$:
$|l_1 \circ l_2| = |nil \circ l_2| = |l_2| = 0 + |l_2| = |nil| + |l_2| = |l_1| + |l_2|$, portanto é válido para o caso base.

Assumo, por hipótese de indução $(*)$ que $|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$, qualquer que seja $|l_2|$.
Passo de indução com $l_1 = h :: l'_1$:
$|l_1 \circ l_2| = |h :: l'_1 \circ l_2| = |h :: (l'_1 \circ l_2)| = 1 + |l'_1 \circ l_2| =^{(*)} 1 + |l'_1| + |l_2| = |h :: l'_1| + |l_2| = |l_1| + |l_2|$ ∎

9.2 Exercício 95

Proof. Prova de $l \circ nil = l$, qualquer que seja a lista l
Indução na estrutura de l_1, utilizando noções da estrutura de listas e concatenação pré-estabelecidas:

Caso base com $l = nil$:
$l \circ nil = nil \circ nil = nil = l$

Assumo por hipótese de indução $(*)$ que $(l' \circ nil = l')$.
Passo de indução com $l = h :: l'$:
$l \circ nil = h :: l' \circ nil = h :: (l' \circ nil) =^{(*)} h :: l' = l$ ∎

9.3 Exercício 96

Proof. Prova de $(l_1 \circ l_2) \circ l_3 = l_1 \circ (l_2 \circ l_3)$, quaisquer que sejam l_1, l_2 e l_3
Indução na estrutura de l_1, utilizando noções da estruturas de listas e concatenação pré-estabelecidas:

Caso base com $l_1 = nil$, utilizando prova do exercício 95:
$(l_1 \circ l_2) \circ l_3 = (nil \circ l_2) \circ l_3 = l_2 \circ l_3 =^{(95)} l_2 \circ (l_3 \circ nil) = l_2 \circ (l_3 \circ l_1)$, portanto é válido para o caso base.

Assumo por hipótese de indução $(*)$ que $(l'_1 \circ l_2) \circ l_3 = l'_1 \circ (l_2 \circ l_3)$
Passo de indução com $l_1 = h :: l'_1$:
$(l_1 \circ l_2) \circ l_3 = (h :: l'_1 \circ l_2) \circ l_3 = (h :: (l'_1 \circ l_2)) \circ l_3 = h :: (l'_1 \circ l_2) \circ l_3 = h :: ((l'_1 \circ l_2) \circ l_3) =^{(*)} h :: (l'_1 \circ (l_2 \circ l_3)) = h :: l'_1 \circ (l_2 \circ l_3) = l_1 \circ (l_2 \circ l_3)$ ∎

9.4 Exercício 97

Proof. Prova de $|rev(l)| = |l|$, qualquer que seja a lista l

Indução na estrutura de l, utilizando noções da estrutura de listas, reverso e concatenação pré-estabelecidas:

Caso base com $l = nil$:
$|rev(l)| = |rev(nil)| = |l|$, portanto é válido para o caso base.

Assumo, por hipótese de indução $(*)$ que $|rev(l')| = |l'|$.
Passo de indução com $l = h :: l'$, levando em consideração o resultado do exercício 94:
$|rev(l)| = |rev(l') \circ (h :: nil)| = |rev(l')| + |(h :: nil)| =^{(*)} |l'| + |(h :: nil)| = |l' \circ (h :: nil)| =^{(94)} |l'| + 1 = |l|$ ■

9.5 Exercício 98

Proof. Prova de $rev(l_1 \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$, quaisquer que sejam as listas l_1 e l_2
Indução na estrutura de l_1, utilizando noções da estrutura de listas, reverso e concatenação pré-estabelecidas:

Caso base com $l_1 = nil$:
$rev(l_1 \circ l_2) = rev(nil \circ l_2) = rev(l_2) = (rev(l_2') \circ (a :: nil)) = (rev(l_2') \circ (a :: nil)) \circ nil = (rev(l_2)) \circ (rev(nil)) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$, portanto é válido para o caso base.

Assumo, por hipótese de indução $(*)$ que $rev(l_1' \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1'))$.
Passo de indução com $l_1 = h :: l_1'$, utilizando associatividade do exercício 96:
$rev(l_1 \circ l_2) = rev(h :: l_1' \circ l_2) = rev(h :: (l_1' \circ l_2)) = rev(l_1' \circ l_2) \circ (h :: nil) =^{(*)} ((rev(l_2)) \circ (rev(l_1'))) \circ (h :: nil) =^{(96)} (rev(l_2)) \circ ((rev(l_1')) \circ (h :: nil)) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$ ■

9.6 Exercício 99

Proof. Prova que $rev(rev(l)) = l$, qualquer que seja a lista l
Indução na estrutura de l:

Caso base com $l = nil$, utilizando noções da estrutura de listas, reverso e concatenação pré-estabelecidas:
$rev(rev(l)) = rev(rev(nil)) = rev(l) = rev(nil) = l$, portanto é válido para o caso base.

Assumo, por hipótese de indução $(*)$ que $rev(rev(l')) = l'$.
Passo de indução com $l = h :: l'$, utilizando a prova do exercício 98:
$rev(rev(l)) = rev(rev(h :: l')) = rev(rev(l') \circ (h :: nil)) =^{(98)} rev(h :: nil) \circ rev(rev(l')) =^{(*)} (rev(nil) \circ h :: nil) \circ l' = (l \circ h :: nil) \circ l' = (nil \circ h :: nil) \circ l' = h :: nil \circ l' = h :: (nil \circ l') = h :: l' = l$ ■

10 Exercício 100

Proof. Prova de $n(t) \leq 2^{h(t)+1} - 1$, para qualquer árvore binária t

Indução na estrutura de t, utilizando noções de árvore, nós e altura:

Caso base com $t = \bullet$: $n(t) \leq 1 \leq 2 - 1 \leq 2^{0+1} - 1 \leq 2^{h(t)+1} - 1$, portanto é válido para o caso base.

Assumo, por hipótese de indução $(*)$ que $n(t_i) \leq 2^{h(t_1)+1} - 1$, $(i = 1, 2)$, sendo t_1 e t_2 filhos de t.

Passo de indução com $t = \circ(t_1, t_2)$:

$n(t) \leq n(\circ(t_1, t_2)) \leq 1 + n(t_1) + n(t_2) \leq^{(*)} 1 + (2^{h(t_1)+1} - 1) + (2^{h(t_2)+1} - 1) \leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1$

- Se $max(h(t_1), h(t_2)) = h(t_1)$:
  $2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_1)+1} - 1 \leq 2(2^{h(t_1)+1}) - 1 \leq 2^{2+h(t_1)} - 1 \leq 2^{1+max(h(t_1),h(t_2))+1} - 1 \leq 2^{h(t)+1} - 1$

- Se $max(h(t_1), h(t_2)) = h(t_2)$:
  $2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \leq 2^{h(t_2)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \leq 2(2^{h(t_2)+1}) - 1 \leq 2^{2+h(t_2)} - 1 \leq 2^{1+max(h(t_1),h(t_2))+1} - 1 \leq 2^{h(t)+1} - 1$

Portanto, $n(t) \leq 2^{h(t)+1} - 1$ ∎