

Caderno de Exercícios

LC1

Marcos Silva

2023

Contents

1	Aula 2	3
1.1	Exercício 1	3
1.2	Exercício 2	4
1.3	Exercício 3	4
1.4	Exercício 4	5
1.5	Exercício 5	5
2	Aula 4	6
2.1	Exercício 1 - negação	6
2.2	Exercício 2 - negação	7
2.3	Exercício 3 - negação	8
2.4	Exercício 4 - negação	8
2.5	Exercício 1 - conjunção	9
2.6	Exercício 2 - conjunção	9
2.7	Exercício - associatividade da disjunção	10
2.8	Exercício - variante da contrapositiva	10
3	Aula 5	11
3.1	Exercício 1	11
3.2	Exercício 2	11
3.3	Exercício 3	12
3.4	Exercício 4	12
3.5	Exercício 5	13
3.6	Exercício 6	13
3.7	Exercício 7	14
3.8	Exercício 8	14
3.9	Exercício 9	15
3.10	Exercício 10	15
3.11	Exercício 11	16
3.12	Exercício 12	16
3.13	Exercício 13	16

3.14	Exercício 14	17
3.15	Exercício 15	17
3.16	Exercício 16	18
4	Aula 6	19
4.1	Exercício 1	19
4.2	Exercício 2	20
4.3	Exercício 3	21
5	Aula 7	22
5.1	Exercício 1	22
5.2	Exercício 2	23
5.3	Exercício 3	24
5.4	Exercício 4	24
5.5	Exercício 5	25
5.6	Exercício 6	25
5.7	Exercício 7	26
5.8	Exercício 8	26
5.9	Exercício 9	27
5.10	Exercício 10	28
6	Exercícios 66-71	30
6.1	Exercício 66	30
6.2	Exercício 67	31
6.3	Exercício 68	33
6.4	Exercício 69	34
6.5	Exercício 70	35
6.5.1	Exercício 70-1	35
6.5.2	Exercício 70-2	36
6.5.3	Exercício 70-3	37
6.5.4	Exercício 70-4	37
6.6	Exercício 71	38
6.6.1	Exercício 71-1	38
6.6.2	Exercício 71-2	39
6.6.3	Exercício 71-3	39
7	Exercícios 73-79	39
7.1	Exercício 73	39
7.2	Exercício 74	39
7.3	Exercício 75	40
7.4	Exercício 76	40
7.5	Exercício 77	40
7.6	Exercício 78	40
7.7	Exercício 79	41

8 Exercícios 90-93	41
8.1 Exercício 90	41
8.2 Exercício 91	44
8.3 Exercício 92	45
8.4 Exercício 93	51

1 Aula 2

1.1 Exercício 1

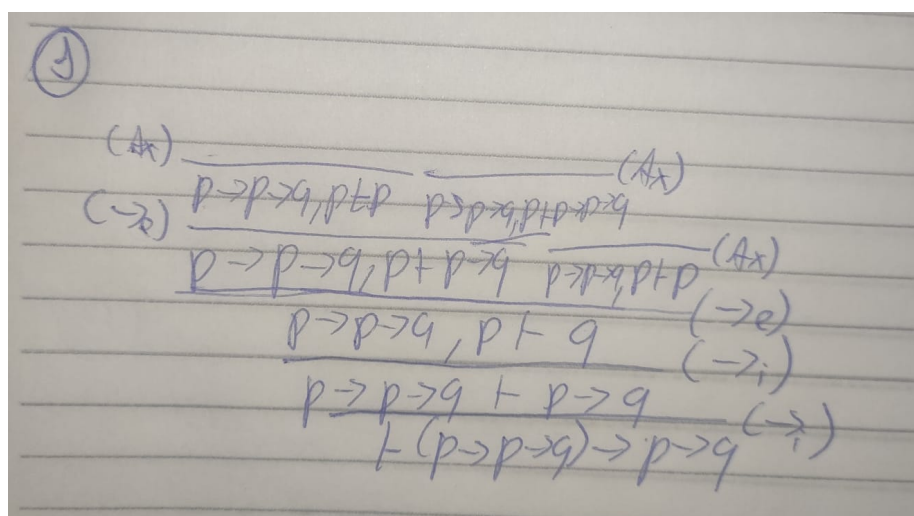


Figure 1: Exercício 1

1.2 Exercício 2

②

$$\begin{array}{c}
 \hline
 p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q \quad (Ax) \\
 \hline
 \vdash p \rightarrow q \quad (\rightarrow i) \\
 \hline
 p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q \\
 \hline
 \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q) \quad (\rightarrow i)
 \end{array}$$

Figure 2: Exercício 2

1.3 Exercício 3

③

$$\begin{array}{c}
 \hline
 (Ax) \quad q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q \quad (Ax) \\
 \hline
 (Ax) \quad q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r \rightarrow t \quad (Ax) \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow e) \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q, p \vdash r \rightarrow t \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow t, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow t \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i) \\
 \hline
 \vdash (q \rightarrow r \rightarrow t) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow t \quad (\rightarrow i)
 \end{array}$$

Figure 3: Exercício 3

1.4 Exercício 4

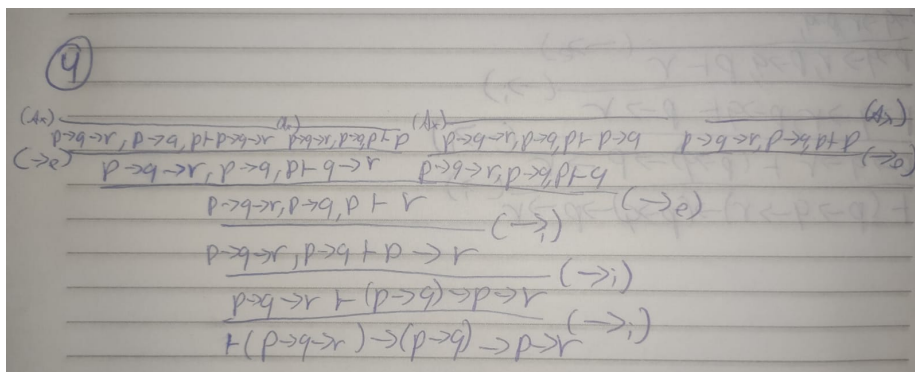


Figure 4: Exercício 4

1.5 Exercício 5

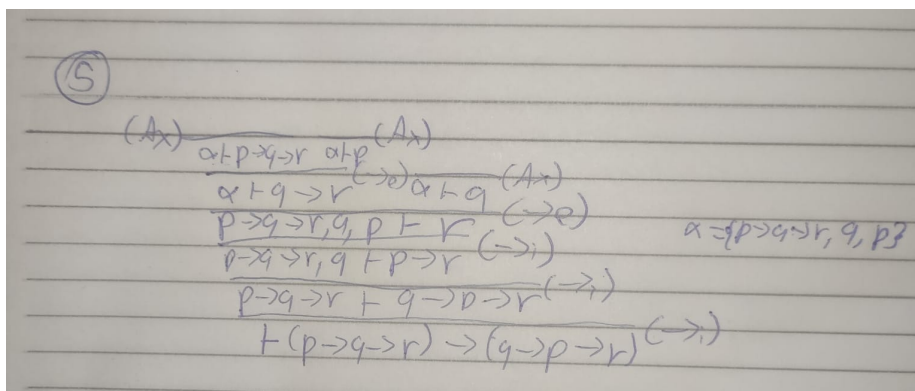


Figure 5: Exercício 5

2 Aula 4

2.1 Exercício 1 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \vdash (\neg p) \rightarrow (\neg q) \\
 \begin{array}{c}
 \frac{[\neg q]^y}{\neg q} \quad \frac{p \rightarrow q \quad [p]^z}{q} (\rightarrow e) \\
 \frac{\neg p \quad [\neg p]^x}{\perp} (\neg i) \\
 \frac{\perp}{\neg \neg q} (\neg i)^y \\
 \frac{\neg \neg p \rightarrow \neg \neg q}{\neg p \rightarrow \neg q} (\rightarrow i)^x
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 6: Exercício 1

2.2 Exercício 2 - negação

$$\textcircled{2} \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash (\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)$$

[illegible]

Figure 7: Exercício 2

2.3 Exercício 3 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{3} \vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q \\
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow_i)^a \frac{[p]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^2 \frac{q}{p \rightarrow q} \quad [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^y \quad (\rightarrow_e) \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^y \frac{p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_e) \frac{q}{(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q} \quad (\rightarrow_i)^x \\
 \hline
 (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 8: Exercício 3

2.4 Exercício 4 - negação

$$\textcircled{4} p, \neg p \vdash \neg q$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg q} (\neg i)^x
 \end{array}$$

Figure 9: Exercício 4

2.5 Exercício 1 - conjunção

$$\textcircled{1} p \wedge q \vdash q \wedge p$$

$$\frac{\frac{(\wedge e) \frac{p \wedge q}{q} \quad \frac{p \wedge q (\wedge e)}{p}}{q \wedge p} (\wedge i)$$

Figure 10: Exercício 1

2.6 Exercício 2 - conjunção

$$\textcircled{2} (p \wedge q) \wedge p \vdash p \wedge (q \wedge p)$$

$$\frac{\frac{(\wedge e) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p} \quad \frac{(\wedge e) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{q} \quad \frac{(\wedge e) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p}}{p} (\wedge i)}{q \wedge p} (\wedge i)}{p \wedge (q \wedge p)} (\wedge i)$$

Figure 11: Exercício 2

2.7 Exercício - associatividade da disjunção

$$\begin{array}{c}
 (a \vee b) \vee c \vdash a \vee (b \vee c) \\
 \frac{(ve)^x (a \vee b) \vee c \quad \frac{(vi)^x \frac{[c]^x (vi)}{b \vee c} \quad (ve)^y \frac{[a]^y (vi) \quad \frac{[b]^y (vi)}{b \vee c}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}
 \end{array}$$

Figure 12: Exercício

2.8 Exercício - variante da contrapositiva

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p \\
 \frac{(\rightarrow e) \frac{p \rightarrow \neg q [p]^y}{\neg q} \quad (\neg e) \frac{\neg q \quad [q]^x}{\perp} \quad \frac{\perp (hi)^y}{\neg p}}{q \rightarrow \neg p} (\rightarrow i)^x
 \end{array}$$

Figure 13: Exercício

3 Aula 5

3.1 Exercício 1

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \quad \frac{\frac{[q]^u}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 14: Exercício 1

3.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 2) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p} (se) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q} (se) \quad \frac{[p]^x}{\neg p} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \perp (i)^{\emptyset} \\
 \hline
 (\neg p) \wedge (\neg q) \vdash \neg(p \vee q)
 \end{array}$$

Figure 15: Exercício 2

3.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 3) \\
 \hline
 \frac{\frac{a \rightarrow b \quad [a]^u}{(\rightarrow e)} \quad \frac{\frac{c}{c \vee b} (vi) \quad \frac{b}{c \vee b} (vi)}{c \vee b} (ve)}{c \vee b} (\rightarrow i)^u \\
 \hline
 a \rightarrow b \vdash (c \vee a) \rightarrow (c \vee b)
 \end{array}$$

Figure 16: Exercício 3

3.4 Exercício 4

$$\begin{array}{c}
 4) \\
 \hline
 \frac{p \rightarrow q \quad [p]^x}{q} (\rightarrow e) \quad \frac{[p \wedge \neg q]^u}{\neg q} (\wedge e)}{q \quad \neg q} (\neg e)}{p \wedge \neg q} (\wedge e) \quad \frac{\perp}{\neg p} (\neg i)^x} \\
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg e)}{\perp} (\neg i)^u \\
 \hline
 p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)
 \end{array}$$

Figure 17: Exercício 4

3.5 Exercício 5

$$\begin{array}{c}
 \underline{5)} \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q}{(1e)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{\frac{q}{(1e)} \quad \frac{[\neg q]^y}{\neg q}}{\frac{1}{(1i)^o}} \quad \frac{[\neg p]^x}{(ve)^{x,y}}}{\frac{p}{(1e)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{[\neg p]^x}{(ve)^{x,y}}}{\frac{1}{(1i)^u}} \\
 p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)
 \end{array}$$

Figure 18: Exercício 5

3.6 Exercício 6

$$\begin{array}{c}
 \underline{6)} \quad \frac{\frac{[\neg p]^x}{(vi)} \quad \frac{[\neg q]^y}{(vi)}}{\frac{p \vee q}{(1e)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg(p \vee q)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg(p \vee q)} \quad \frac{[\neg q]^y}{(vi)}}{\frac{1}{(1i)^x} \quad \frac{1}{(1i)^y}} \\
 \frac{1}{\neg p} \quad \frac{1}{\neg q} \quad (1i) \\
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 19: Exercício 6

3.7 Exercício 7

$$\begin{array}{c}
 7/ \\
 \frac{\frac{\frac{[P]^x \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg P} \quad [Q]^y \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg Q} (\wedge e)}{\perp} (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg(P \vee Q)} (\neg i) \emptyset}{[P \vee Q]^u \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q)} (\vee e) x, y} \\
 \frac{[P \vee Q]^u \neg(P \vee Q)}{\perp} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \wedge (\neg Q) \vdash \neg(P \vee Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 20: Exercício 7

3.8 Exercício 8

$$\begin{array}{c}
 8/ \\
 \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{P} (\wedge e) \quad \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{Q} (\wedge e) \quad [\neg Q]^y}{\perp} (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg P} (\neg i) \emptyset}{\frac{[P \wedge Q]^u}{P} \quad \frac{\neg P \vee \neg Q [P] \quad \frac{\perp}{\neg P} (\neg i) \emptyset}{\neg P} (\vee e) x, y} \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \vee (\neg Q) \vdash \neg(P \wedge Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 21: Exercício 8

3.9 Exercício 9

$$\begin{array}{c} 9) \quad \neg\neg(p \wedge q) \vdash (\neg\neg p) \wedge (\neg\neg q) \\ \frac{\frac{[p \wedge q]_{(se)}^x}{p} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^y}{q} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^z}{\neg\neg(p \wedge q)}}{\frac{\frac{[p \wedge q]_{(se)}^x}{p} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^y}{q} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^z}{\neg\neg(p \wedge q)}}{\frac{[p \wedge q]_{(se)}^x}{p} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^y}{q} \quad \frac{[p \wedge q]_{(se)}^z}{\neg\neg(p \wedge q)}}} \end{array}$$

Figure 22: Exercício 9

3.10 Exercício 10

10

$$\frac{\frac{\frac{(17p) \wedge (17q)}{17p} (1e) \quad \frac{\frac{(17p) \wedge (17q)}{17q} (1e) \quad \frac{[1(p \wedge q)]^u \frac{[p]^x [q]^y}{p \wedge q} (1e)}{17q} (1e)}{17p} (1e)}{17p} (1e)}{(17p) \wedge (17q) \vdash 17(p \wedge q)} (1i)^u$$

Figure 23: Exercício 10

3.11 Exercício 11

11)

$$\frac{\frac{a \vee (b \wedge c)}{(ae)} \quad \frac{\frac{[a]^x_{(vi)} \quad [a]^x_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai) \quad \frac{\frac{[b \wedge c]^y_{(ae)} \quad [b \wedge c]^y_{(ae)}}{b \quad c} (vi) \quad \frac{b \quad c}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{a \vee (b \wedge c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 24: Exercício 11

3.12 Exercício 12

12)

$$\frac{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi) \quad \frac{a \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c) \vdash a \vee (b \wedge c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 25: Exercício 12

3.13 Exercício 13

13)

$$\frac{\frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai) \quad \frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (vi)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai)}{a \wedge (b \vee c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 26: Exercício 13

3.14 Exercício 14

14/

$$\frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \frac{[P \wedge q]^x \quad [P \wedge r]^y}{P \quad P} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \frac{q \quad r}{q \vee r}}{P \quad q \vee r} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \frac{q \vee r}{q \vee r}}{P \wedge (q \vee r)}$$

Figure 27: Exercício 14

3.15 Exercício 15

15/

$$\frac{\frac{\frac{[\neg (P \vee \neg P)]^u}{\perp} \quad \frac{[P]^x}{P \vee \neg P}}{\perp} \quad \frac{[\neg (P \vee \neg P)]^u}{\perp}}{\vdash \neg \neg (P \vee \neg P)}$$

Figure 28: Exercício 15

3.16 Exercício 16

$$\begin{array}{c}
 \text{36)} \\
 \hline
 \frac{[P \wedge \neg P]^u}{P} (\wedge e) \quad \frac{[P \wedge \neg P]^u}{\neg P} (\wedge e) \\
 \hline
 \frac{P \quad \neg P}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg(P \wedge \neg P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 29: Exercício 16

4.1 Exercício 1

Figure 30: Exercício 1

4.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 \underline{2)} \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{[P]^y}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow i)^y}{\neg P} (\neg e) \\
 \frac{[\neg P]^x \quad \frac{\perp}{P} (\neg i)^y}{\perp} (\neg e) \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{\perp}{\neg P \rightarrow P} (\neg i)^x}{\perp} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{\vdash \neg(\neg P \rightarrow P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 31: Exercício 2

3)

Figure 32: Exercício 3

5 Aula 7

5.1 Exercício 1

$$\begin{array}{l}
 \downarrow \\
 \frac{[1P]^4 \quad 11P}{\perp} (PB)^4 \\
 \hline
 11P \vdash P
 \end{array}$$

Figure 33: Exercício 1

5.2 Exercício 2

$$\begin{array}{l}
 2) \\
 \hline
 \neg P \rightarrow \bot \quad [\neg P]^u \\
 \hline
 \bot \quad (\rightarrow e) \\
 \hline
 \neg \neg P \quad (\neg i)^u \\
 \hline
 \neg P \rightarrow \bot \vdash P
 \end{array}$$

Figure 34: Exercício 2

3

Figure 35: Exercício 3

4)

Figure 36: Exercício 4

5)

Figure 37: Exercício 5

۷

Figure 38: Exercício 6

7)

Figure 39: Exercício 7

8)

Figure 40: Exercício 8

5.9 Exercício 9

O número mínimo de provas necessárias são 4, conectando cada uma das quatro regras. Com uma conexão entre cada uma das regras, ao possuírmos uma delas, necessariamente há um caminho para chegar até as outras três.

É trivial notar que não é possível que isso seja realizado com menos de quatro, uma vez que uma das regras estará desconectada, sem que possamos prová-la. Tendo isso em mente, só é preciso demonstrar que existem quatro provas que as conectem.

A partir do exercício 1, 3 e 6, já criamos uma conexão seguindo a ordem $PBC \rightarrow \sim\sim E \rightarrow LP \rightarrow LEM$; sendo cada uma das setas uma prova, respectivamente. Só resta provar $LEM \rightarrow PBC$ para que haja um ciclo e a equivalência se mostre possível com quatro provas.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{p \vee \neg p} (LEM)}{[p]^x} \quad \frac{\frac{\frac{\neg p \rightarrow \perp \quad [\neg p]^y}{\perp} (\rightarrow e)}{p} (\perp e)}{(\vee e)^{x,y}} \\
 \hline
 \neg p \rightarrow \perp \vdash p
 \end{array}$$

Figure 41: Prova PBC usando LEM

Assim, fica provado que quatro é valor mínimo e suficiente de provas para estabelecer equivalência entre essas quatro regras.

5.10 Exercício 10

$$\begin{array}{l}
 10 \\
 \hline
 (\rightarrow) \frac{\frac{1}{\Gamma P \supset \perp [\Gamma P]^u} (10)}{\frac{1}{\vdash P} (PB\perp)^u}
 \end{array}$$

Figure 42: Exercício 10

6 Exercícios 66-71

6.1 Exercício 66

$$\begin{array}{l}
 \text{66) } \forall x \neg P \vdash \neg \exists x P \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\forall x \neg P(x)}{\neg P(x_0)} \text{ (ve)} \\
 \frac{\neg P(x_0) \quad [P(x_0)]^v}{\perp} \text{ (re)} \\
 \frac{[\exists x P(x)]^u \quad \perp}{(\exists e)^v} \\
 \frac{\perp}{(\neg i)^u} \\
 \hline
 \forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{(\exists i) \quad [P(x_0)]^u}{\exists x P(x) \quad \neg \exists x P(x)} \text{ (re)} \\
 \frac{\perp}{\neg P(x_0)} \text{ (ri)^u} \\
 \frac{\neg P(x_0)}{(\forall i)} \\
 \hline
 \neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 43: Exercício 66

6.2 Exercício 67

$$\begin{array}{c}
 67) \neg \forall x P \vdash \exists x \neg P \\
 \\
 \frac{\frac{\frac{(\forall e) [\forall x P]^u}{P(x_0)} [\neg P(x_0)]^v}{\perp} (\exists e)^v}{\perp} (\exists i)^u \\
 \hline
 \exists x \neg P \vdash \neg \forall x P \quad \text{minimal}
 \end{array}$$

Figure 44: Exercício 67

6.3 Exercício 68

$$\begin{array}{c}
 \text{68)} \quad \forall x P \vdash \neg \exists x \neg P \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 (\forall i) \frac{\forall x P}{P(x_0) [\neg P(x_0)]^u} \\
 \frac{[\exists x P]^u \quad \frac{P(x_0) [\neg P(x_0)]^u}{\perp}}{\neg (\exists e) \neg} \\
 \hline
 \neg (\neg i)^u \\
 \hline
 \forall x P \vdash \neg \exists x \neg P \text{ minimal}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg P(x_0)]^u}{\neg \exists x P \quad \exists x \neg P} \\
 \hline
 \frac{\perp}{P(x_0)} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{P(x_0)}{\neg \exists x \neg P \vdash \forall x P} (\forall i) \\
 \hline
 \neg \exists x \neg P \vdash \forall x P \text{ clássica}
 \end{array}$$

Figure 45: Exercício 68

6.4 Exercício 69

69) $\exists x p \vdash \neg \forall x p$

minimal

$$\frac{\frac{\frac{\exists x p}{\perp} \quad \perp}{(\exists e) \vee} \quad \frac{\frac{[\forall x p]}{p(x_0)} \quad \frac{p(x_0)}{\perp}}{(\neg e)} \quad \vee}{(\neg \vee)}$$

$\exists x p \vdash \neg \forall x p$

Figure 46: Exercício 69

6.5 Exercício 70

6.5.1 Exercício 70-1

70-1 Minimal

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{(\forall x p) \wedge q}{\forall x p} (\forall e)}{p(x_0)} (\forall e) \quad \frac{(\forall x p) \wedge q}{q} (\forall e)}{p(x_0) \wedge q} (\wedge e) \\
 \hline
 (\forall x p) \wedge q \vdash \forall x (p \wedge q) \quad (\forall i) \\
 \text{onde } x \notin \text{fv}(q)
 \end{array}$$

Figure 47: Exercício 70-1

6.5.2 Exercício 70-2

70-2 minimal

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x p} (\wedge e)}{\frac{\frac{p(x_0) \wedge q}{\exists x (p \wedge q)} (\exists i)}{\frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x p} (\wedge e)} (\wedge e)} \\
 \frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x p} (\wedge e)
 \end{array}$$

$(\exists x p) \wedge q \vdash \exists x (p \wedge q)$
 onde $x \notin fvc q$

Figure 48: Exercício 70-2

6.5.3 Exercício 70-3

$$\begin{array}{c}
 \text{70-3} \quad \text{minimal} \\
 \hline
 (\forall e) \frac{\forall x (P \rightarrow q)}{P \rightarrow q(x_0) [P]^q} (\rightarrow e) \\
 \hline
 \frac{q(x_0)}{\forall x q} (\forall i) \\
 \hline
 \frac{}{\forall x (P \rightarrow q) \vdash P \rightarrow \forall x q} (\rightarrow i)^q \\
 \text{onde } x \notin fv(P)
 \end{array}$$

Figure 49: Exercício 70-3

6.5.4 Exercício 70-4

$$\begin{array}{c}
 \text{70-4} \\
 \hline
 (\forall e) \frac{\forall x (q \rightarrow p)}{q(x_0) \rightarrow p} (\forall e) \\
 \hline
 \frac{[\exists x q] \quad p \quad [q(x_0)]^v}{p} (\rightarrow e)^v \\
 \hline
 \frac{}{\forall x (q \rightarrow p) \vdash (\exists x q) \rightarrow p} (\rightarrow i)^q \\
 \text{onde } x \notin fv(P) \quad \text{minimal}
 \end{array}$$

Figure 50: Exercício 70-4

6.6 Exercício 71

6.6.1 Exercício 71-1

$$\begin{array}{c}
 \hline
 71-1 \quad \frac{\neg \exists x \neg P}{\forall x P} (R) \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\neg \exists x \neg P}{\forall x P} (R)}{\neg \exists x \neg P} \quad \frac{\frac{[\neg P(x_0)] \neg P(x_0)}{\perp} (10)}{\perp} (3e) v}{\perp} (\neg i) u}{\neg \exists x \neg P (R)} \\
 \hline
 \neg \exists x \neg P (R)
 \end{array} \\
 \hline
 \neg P(x_0) \vdash_{i+R} P(x_0) \rightarrow \text{prova clássica}
 \end{array}$$

Figure 51: Exercício 71-1

6.6.3 Exercício 71-3

Figure 52: Exercício 71-3

7.1 Exercício 73

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \sum_{i=1}^1 i$. Portanto, é válido para o caso base.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^k i = (\sum_{i=1}^{k-1} i) + k \stackrel{(*)}{=} \binom{(k-1)(k)}{2} + k = \binom{k^2-k+2k}{2} = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.

Proof. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base com $n = 1$: $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2 = \sum_{i=1}^1 i^2$.
Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução (*) que $i = 1^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}$.

Passo de indução: $\sum_{i=1}^k i^2 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^2) + k^2 \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}\right) + k^2 = \frac{(2k^3 - 3k^2 + k) + 6k^2}{6} = \frac{(2k^3 + 3k^2 + k)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

■

7.3 Exercício 75

Proof. $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

Caso base com $n = 0$: $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 = 2^0 = \sum_{i=0}^0 2^i$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução (*) que $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$.

Passo de indução: $\sum_{i=0}^k 2^i = (\sum_{i=0}^{k-1} 2^i) + 2^k \stackrel{(*)}{=} 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

■

7.4 Exercício 76

Proof. $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$

Caso base com $n = 1$: $\sum_{i=1}^1 i = 1 = 1^3 = \sum_{i=1}^1 i^3$. Portanto, é válido para o caso base.

Já foi provado no exercício 73 que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto, assumo como hipótese de indução (*) que $\sum_{i=1}^{k-1} i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i)^2 = \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2$

Passo de indução: $\sum_{i=1}^k i^3 = (\sum_{i=1}^{k-1} i^3) + k^3 \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 + k^3 = \frac{(k-1)^2 k^2 + 4k^3}{4} = \frac{k^2((k-1)^2 + 4k)}{4} = \frac{k^2(k^2 + 2k + 1)}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k i\right)^2$

■

7.5 Exercício 77

Proof. $\forall n \geq 0, 3|(2^{2n} - 1)$

Caso base com $n = 0$: $2^{0 \cdot 2} - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução (*) que $3|(2^{2k-2} - 1)$, portanto, $(2^{2k-2} - 1 = 3m)$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

Passo de indução: $2^{2k} - 1 = (4 \cdot 2^{2k-2}) - 1 = 3(2^{k-2}) + 2^{k-2} - 1 = 3m \cdot 3(2^{k-2}) = 3(m \cdot 2^{k-2}) \stackrel{(*)}{=} 3p$ para algum $p \in \mathbb{N}$.

■

7.6 Exercício 78

Proof. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2 + 3$

■

Caso base com $n = 2$: $3^2 = 9 \geq 7 = 2^2 + 3$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução (*) que $3^k \geq (k)^2 + 3$.

Passo de indução: $3^{k+1} = 3(3^k)$, logo, por meio de (*), $3(3^k) \geq 3((k)^2 + 3) \geq 3k^2 + 9 \geq k^2 + 2k^2 + 9 \geq k^2 + 2k + 4 \geq (k+1)^2 + 3$, portanto $3^{k+1} \geq (k+1)^2 + 3$.

7.7 Exercício 79

Proof. $\forall n \geq 1, n! \leq n^n$

Caso base com $n = 1$: $1! = 1 \leq 1^1$. Portanto, é válido para o caso base.

Assumo como hipótese de indução (*) que $(k-1)! \leq (k-1)^{k-1}$.

Passo de indução: $k! = (k-1)! \cdot k$, logo, por meio de (*), $(k-1)! \cdot k \leq (k-1)^{k-1} \cdot k \leq k^{k-1} \cdot k \leq k^k$, portanto $k! \leq k^k$. ■

8 Exercícios 90-93

8.1 Exercício 90

Proof. Prova de que para cada fórmula p , existe fórmula p' construída com \neg e \rightarrow

Faremos a indução estrutural na estrutura de p :

- Se p é variável proposicional ou constante \perp , segue que $p' = p$.
- Se p é $p = q_1 \rightarrow q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta tomar $p' = q'_1 \rightarrow q'_2$.
- Se $p = q_1 \wedge q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta provar que há uma fórmula construída com \neg e \rightarrow equivalente a $q'_1 \wedge q'_2$:

$$p \vee q \vdash \neg p \rightarrow q$$

$$\frac{\frac{\frac{[p]^x [\neg p]^2}{\neg p} (\neg e)}{p} (\vee e) \quad \frac{[q]^y}{\neg p \rightarrow q} (\rightarrow i)}{\neg p \rightarrow q} (\vee e) \quad x, y$$

$$p \vee q \vdash \neg p \rightarrow q$$

$$\frac{\frac{q \vee \neg q}{\neg q} (\neg e) \quad \frac{[q]^x}{p \vee q} (\vee i) \quad \frac{\frac{\neg p \rightarrow q \quad [\neg q]^2}{\neg q} (\rightarrow e) \quad \frac{[q]^y}{\neg q} (\neg e)}{p \vee q} (\vee i)}{\neg p \rightarrow q \vdash p \vee q} (\vee e) \quad x, y$$

- se $p = q_1 \vee q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com \neg e \rightarrow equivalente a $q'_1 \vee q'_2$:

$$p \wedge q \vdash \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{x}{[p \rightarrow q]} \quad \frac{p \wedge q}{p} (\wedge e)}{\neg q} (\rightarrow i) \quad \frac{p \wedge q}{q} (\wedge e)}{\perp} (\neg e) \\ \hline p \wedge q \vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \quad (Ti)^x \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{y}{[p]} \quad \frac{z}{[\neg q]} (\neg e)}{\neg q} (\wedge e) \quad \frac{\frac{[p]}{p} \quad \frac{[\neg q]}{\neg q} (\neg e)}{\neg(p \rightarrow \neg q)} (\rightarrow i) \quad \frac{\frac{[p]}{p} \quad \frac{[\neg q]}{\neg q} (\neg e)}{\neg(p \rightarrow \neg q)} (\rightarrow i) \quad \frac{[p]}{p} \quad \frac{[\neg q]}{\neg q} (\neg e)}{\perp} (\neg e) \\ \hline \neg(p \rightarrow \neg q) \vdash p \wedge q \quad (ve) \end{array}$$

-Portanto, por indução, qualquer fórmula p pode ser construída por fórmula p' com tais conectivos. ■

8.2 Exercício 91

Proof. Prova de que para cada fórmula p , existe fórmula p' construída com \neg e \wedge

Faremos a indução estrutural na estrutura de p :

- Se p é variável proposicional ou constante \perp , segue que $p' = p$.
- Se $p = q_1 \wedge q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta tomar $p' = q'_1 \wedge q'_2$.
- Se $p = q_1 \vee q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com \neg e \wedge equivalente a $q'_1 \vee q'_2$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)}{(1e)} \quad \frac{[P]^\chi}{\neg P} \quad \frac{[Q]^\chi}{\neg Q} \quad \frac{[P \wedge \neg Q]^2}{(1e)}}{\frac{P \vee Q \quad \frac{\frac{[P]^\chi}{\neg P} \quad \frac{[Q]^\chi}{\neg Q}}{(1e)} \quad \frac{[P \wedge \neg Q]^2}{(1e)}}{(ve)^{\chi, \chi}}}{\vdash} \quad (1i)^2 \\
 P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)
 \end{array}$$

- Se $p = q_1 \rightarrow q_2$, segue por hipótese de indução que há formulas $q'_i (i = 1, 2)$ equivalentes a $q_i (i = 1, 2)$. Basta provar que há fórmula construída com \neg e \wedge equivalente a $q'_1 \rightarrow q'_2$. Essa prova já foi feita anteriormente no exercício 90, figura 8.1.

Portanto, por indução, qualquer fórmula p pode ser construída por fórmula p' com tais conectivos. ■

8.3 Exercício 92

Proof. Faremos a indução estrutural na estrutura de ϕ^N :

- $$\frac{\frac{[Q][R]^v}{[P]^u}}{\frac{1}{(1_i)^v}} = \frac{Q R^v}{P^u (1_i)^v}$$

- Se $\varphi = \neg q$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(\neg p^N \wedge \neg q^N)]^Y [\neg p^N \wedge \neg q^N]^X}{\perp} \quad (1) \\
 \frac{\neg \neg \neg (\neg p^N \wedge \neg q^N) \quad \neg \neg (\neg p^N \wedge \neg q^N)}{\perp} \quad (2) \\
 \hline
 \neg \neg (\neg (\neg (\neg p^N) \wedge \neg (q^N))) \vdash \neg (\neg (\neg p^N) \wedge \neg (q^N)) \quad (3)
 \end{array}$$

Figure 56: Exercício 92.4

- Se $\varphi = p \rightarrow q$, assumo por hipótese de indução que é válido para q^N e p^N e:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p^N \rightarrow q^N]^2 \quad [p^N]^x}{\quad} (\rightarrow e) \\
 \frac{q^N \quad [1 q^N]}{(1e)} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{(1i)^2} \\
 \frac{\neg \neg (p^N \rightarrow q^N) \quad \neg (p^N \rightarrow q^N)}{\quad} (\neg e) \\
 \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\neg \neg q^N (1i)^{\vee}} \\
 \frac{\neg \neg q^N}{q^N} (H1) \\
 \hline
 \neg \neg (p^N \rightarrow q^N) \vdash_i p^N \rightarrow q^N (\rightarrow i)^x
 \end{array}$$

Figure 57: Exercício 92.5

- Se $\varphi = \forall_x p$, assumo por hipótese de indução que é válido para todo p^N :

[illegible]

Figure 58: Exercício 92.6

- Se $\varphi = \exists_x p$:

$$\frac{\frac{\frac{[x \vee x \wedge p^n] \vee [x \wedge p^n]}{(17)} \quad \perp}{\neg \neg (x \vee x \wedge p^n) \wedge \neg \neg (x \wedge p^n)} (18) \quad \perp}{\neg \neg \neg \neg (x \vee x \wedge p^n) \vdash \neg \neg (x \wedge p^n)} (19)^x$$

Figure 59: Exercício 92.7

Assim, fica provado por indução estrutural que há uma prova intuicionista de $\neg\neg(\varphi^N) \vdash \varphi^N$ para cada caso de φ^N . \blacksquare

8.4 Exercício 93

Proof. Prova de $\neg\neg\phi \vdash_m \phi$ para qualquer fórmula ϕ pertencente ao fragmento negativo

Faremos a indução estrutural na estrutura de ϕ :

- Se ϕ é uma fórmula negativa:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)]^x [P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)]^y}{(\neg e)} \\
 \frac{\frac{\perp}{(\neg i)^y}}{\neg \neg P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \vee \neg P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)} \\
 \frac{\perp}{(\neg i)^x} \\
 \hline
 \neg \neg (\neg P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \vdash_m \neg P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n))
 \end{array}$$

Figure 60: Exercício 93.1

- Se $\phi = \perp$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\perp]^x}{(\neg i)^x} \\
 \frac{\neg \neg \perp \quad \neg \perp}{(\neg e)} \\
 \hline
 (\neg \neg \perp) \vdash_m \perp
 \end{array}$$

Figure 61: Exercício 93.2

- Se $\phi = \neg q$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p]^Y \quad [q]^X}{(1e)} \\
 \frac{\perp}{\neg \neg q} (1i)^Y \\
 \frac{\neg \neg p \quad \neg \neg q}{(1e)} \\
 \frac{\perp}{\neg (1q)} (1i)^X \\
 \neg \neg (1q) \vdash \neg q
 \end{array}$$

Figure 62: Exercício 93.3

- Se $\phi = (p \vee q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para p e q :

$$\frac{\frac{\frac{[\neg q]^x \frac{[q \wedge p]^y}{q} (1e)}{\perp} (2i) y}{\neg(q \wedge p) \neg \neg(q \wedge p)} (3e)}{\frac{\perp}{\neg \neg q} (2i) x} \quad \frac{\frac{[\neg p]^x \frac{[q \wedge p]^y}{p} (1e)}{\perp} (2i) y}{\neg(q \wedge p) \neg \neg(q \wedge p)} (3e)}{\frac{\perp}{\neg \neg p} (2i) x}$$

Figure 63: Exercício 93.4

- Se $\phi = (p \rightarrow q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para p e q:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[q \rightarrow p]^2 [q]^x}{\quad} (\rightarrow e) \\
 \frac{p \quad [\neg p]^y}{\quad} (\neg d) \\
 \frac{\quad}{\quad} \perp (\neg i)^2 \\
 \frac{\neg \neg (q \rightarrow p) \quad \neg (q \rightarrow p)}{\quad} (\neg e) \\
 \frac{\quad}{\quad} \perp (\neg i)^1 \\
 \frac{\neg \neg p}{\quad} (\neg i) \\
 \frac{\quad}{p} (\neg i) \\
 \frac{\quad}{\quad} \perp (\neg i)^x \\
 \neg \neg (q \rightarrow p) \vdash_m q \rightarrow p
 \end{array}$$

Figure 64: Exercício 93.5

- Se $\phi = (\forall_x q)$, assumo por hipótese de indução que é válido para todo q :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{x \quad [\neg q(x_0)] \quad \frac{[\forall x q]}{q(x_0)} (\forall e)}{\neg q(x_0)} (\neg e)}{\neg \neg (\forall x q)} (\neg \neg i)} \\
 \frac{\neg \neg (\forall x q) \quad \frac{\perp}{\neg (\forall x q)} (\neg i)}{\neg \neg q(x_0)} (\neg \neg e)} \\
 \frac{\neg \neg q(x_0)}{q(x_0)} (H) \\
 \hline
 \neg \neg (\forall x q) \vdash \forall x q \quad (\forall i)
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 65: Exercício 93.6

Assim, fica provado por meio de indução estrutural que $\neg \neg \phi \vdash_m \phi$ é válido para qualquer fórmula ϕ pertencente ao fragmento negativo. ■