

Caderno de Exercícios

LC1

Marcos Silva

2023

Contents

1	Aula 2	2
1.1	Exercício 1	2
1.2	Exercício 2	3
1.3	Exercício 3	3
1.4	Exercício 4	4
1.5	Exercício 5	4
2	Aula 4	5
2.1	Exercício 1 - negação	5
2.2	Exercício 2 - negação	6
2.3	Exercício 3 - negação	7
2.4	Exercício 4 - negação	7
2.5	Exercício 1 - conjunção	8
2.6	Exercício 2 - conjunção	8
2.7	Exercício - associatividade da disjunção	9
2.8	Exercício - variante da contrapositiva	9
3	Aula 5	10
3.1	Exercício 1	10
3.2	Exercício 2	10
3.3	Exercício 3	11
3.4	Exercício 4	11
3.5	Exercício 5	12
3.6	Exercício 6	12
3.7	Exercício 7	13
3.8	Exercício 8	13
3.9	Exercício 9	14
3.10	Exercício 10	14
3.11	Exercício 11	15
3.12	Exercício 12	15
3.13	Exercício 13	15

3.14	Exercício 14	16
3.15	Exercício 15	16
3.16	Exercício 16	17
4	Aula 6	18
4.1	Exercício 1	18
4.2	Exercício 2	19
4.3	Exercício 3	20

1 Aula 2

1.1 Exercício 1

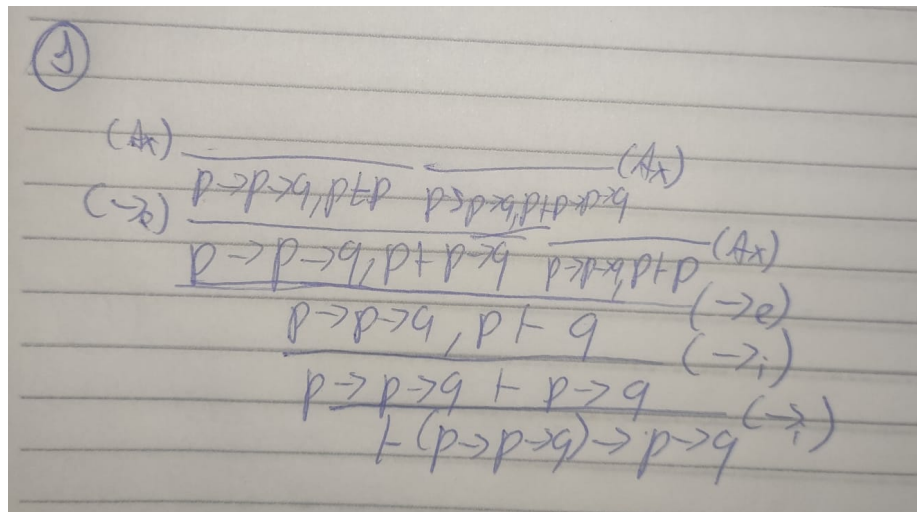


Figure 1: Exercício 1

1.2 Exercício 2

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{2} \\
 \hline
 p \rightarrow q, p + p \rightarrow q \quad (Ax) \\
 \hline
 p \rightarrow q \quad (-\rightarrow i) \\
 \hline
 p \rightarrow q + p \rightarrow p \rightarrow q \\
 \hline
 + (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q) \quad (-\rightarrow i)
 \end{array}$$

Figure 2: Exercício 2

1.3 Exercício 3

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{3} \\
 \hline
 (Ax) \quad q \rightarrow r \rightarrow T, p \rightarrow q, p + q \rightarrow r \rightarrow T \quad (Ax) \\
 \hline
 (Ax) \quad q \rightarrow r \rightarrow T, p \rightarrow q, p + q \rightarrow r \rightarrow T \quad (-\rightarrow e) \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow T, p \rightarrow q, p + r \rightarrow T \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow T, p \rightarrow q + p \rightarrow r \rightarrow T \quad (-\rightarrow i) \\
 \hline
 q \rightarrow r \rightarrow T + (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow T \quad (-\rightarrow i) \\
 \hline
 + (q \rightarrow r \rightarrow T) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow T \quad (-\rightarrow i)
 \end{array}$$

Figure 3: Exercício 3

1.4 Exercício 4

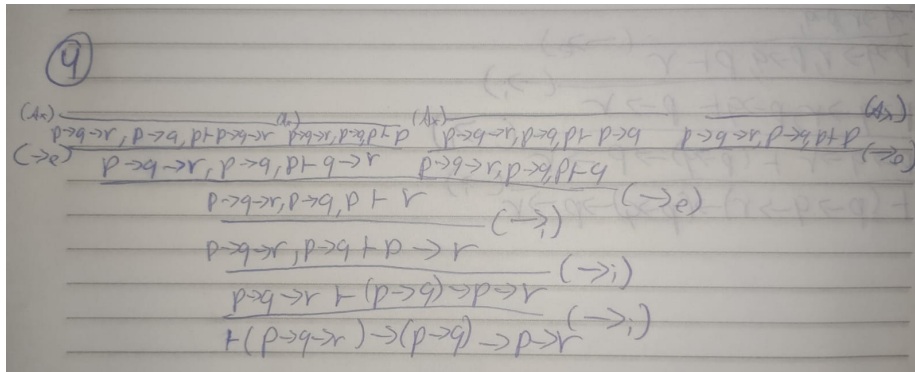


Figure 4: Exercício 4

1.5 Exercício 5

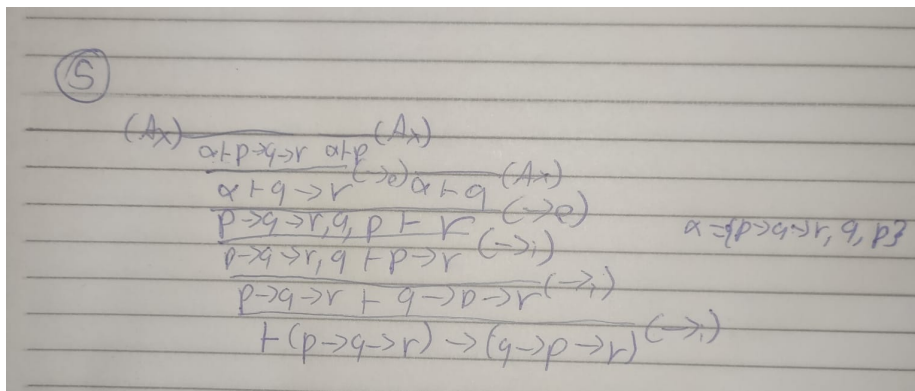


Figure 5: Exercício 5

2 Aula 4

2.1 Exercício 1 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \vdash (\neg p) \rightarrow (\neg q) \\
 \frac{\frac{[\neg q]^y}{\neg q} \quad \frac{p \rightarrow q \quad [p]^z}{q} (\rightarrow e)}{[\neg q]^y} \\
 \frac{\frac{[\neg q]^y}{\neg q} \quad \frac{\perp}{\neg p} (\neg i)}{[\neg p]^x} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg p} (\neg i)^y}{\neg p} \\
 \frac{\neg p \quad \neg q}{\neg p \rightarrow \neg q} (\rightarrow i)^x
 \end{array}$$

Figure 6: Exercício 1

2.2 Exercício 2 - negação

$$\textcircled{2} \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash (\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg\neg q}{\neg\neg q}^y}{q}(\neg e) \quad \frac{\frac{[p \rightarrow q]^2}{[p]}^a}{(\rightarrow e)} \\
 \frac{\neg p \quad [\neg\neg p]^x}{\perp}(\neg e) \\
 \frac{\perp}{\neg\neg(p \rightarrow q)}(\neg i)^2 \\
 \frac{\neg\neg(p \rightarrow q) \quad \neg\neg(p \rightarrow q)}{\perp}(\neg e) \\
 \frac{\perp}{\neg\neg q}(\neg i)^y \\
 \frac{\neg\neg q}{(\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)}(\rightarrow_i)^x
 \end{array}$$

Figure 7: Exercício 2

2.3 Exercício 3 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{3} \vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q \\
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow_i)^a \frac{[p]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^2 \frac{q}{p \rightarrow q} \quad [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^y (\rightarrow_e) \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^y \frac{p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_e) \frac{q}{(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q} (\rightarrow_i)^x \\
 \hline
 (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 8: Exercício 3

2.4 Exercício 4 - negação

$$\textcircled{4} p, \neg p \vdash \neg q$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg q} (\neg i)^x
 \end{array}$$

Figure 9: Exercício 4

2.5 Exercício 1 - conjunção

$$\textcircled{1} p \wedge q \vdash q \wedge p$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{p \wedge q}{q}}{p} \quad \frac{p \wedge q (Ae)}{p}}{q \wedge p} (Ai)$$

Figure 10: Exercício 1

2.6 Exercício 2 - conjunção

$$\textcircled{2} (p \wedge q) \wedge p \vdash p \wedge (q \wedge p)$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p \wedge q} \quad (Ae) \frac{p \wedge q}{q}}{p} \quad \frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p}}{p}}{p \wedge (q \wedge p)} (Ai)$$

Figure 11: Exercício 2

2.7 Exercício - associatividade da disjunção

$$\begin{array}{c}
 (a \vee b) \vee c \vdash a \vee (b \vee c) \\
 \frac{(ve)^x (a \vee b) \vee c \quad \frac{(vi)^x \frac{[c]^x (vi)}{b \vee c} \quad (ve)^y \frac{[a]^y (vi) \quad \frac{[b]^y (vi)}{b \vee c}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}
 \end{array}$$

Figure 12: Exercício

2.8 Exercício - variante da contrapositiva

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p \\
 \frac{(\rightarrow e) \frac{p \rightarrow \neg q [p]^y}{\neg q} \quad (\neg e) \frac{\neg q \quad [q]^x}{\perp} \quad \frac{\perp (hi)^y}{\neg p} \quad (\rightarrow i)^x}{q \rightarrow \neg p}
 \end{array}$$

Figure 13: Exercício

3 Aula 5

3.1 Exercício 1

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \quad \frac{\frac{[q]^u}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 14: Exercício 1

3.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 2) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p} (se) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q} (se) \quad \frac{[p]^x}{\neg p} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)
 \end{array}$$

Figure 15: Exercício 2

3.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 3) \\
 \hline
 \frac{\frac{a \rightarrow b \quad [a]^u}{(\rightarrow e)} \quad \frac{\frac{c}{c \vee b} (vi) \quad \frac{b}{c \vee b} (vi)}{c \vee b} (ve)}{c \vee b} (\rightarrow i)^u \\
 \hline
 a \rightarrow b \vdash (c \vee a) \rightarrow (c \vee b)
 \end{array}$$

Figure 16: Exercício 3

3.4 Exercício 4

$$\begin{array}{c}
 4) \\
 \hline
 \frac{p \rightarrow q \quad [p]^x}{q} (\rightarrow e) \quad \frac{[p \wedge \neg q]^u}{\neg q} (\wedge e)}{q \quad \neg q} (\neg e)}{p \wedge \neg q} (\wedge e) \quad \frac{\perp}{\neg p} (\neg i)^x} \\
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg e)}{\perp} (\neg i)^u \\
 \hline
 p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)
 \end{array}$$

Figure 17: Exercício 4

3.5 Exercício 5

$$\begin{array}{c}
 \underline{5)} \quad \frac{\frac{p \wedge q}{p} (1e) \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q}{q} (1e) \quad [\neg q]^y}{\neg p} (1e) \quad \frac{[\neg p \vee q]^u \quad \frac{\perp}{\neg p} (1i)^x}{[\neg p]^x} (ve)^{x,y}}{\neg p} (1e) \quad \frac{\perp}{\neg p} (1i)^u}{\perp} (1i)^u \\
 p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)
 \end{array}$$

Figure 18: Exercício 5

3.6 Exercício 6

$$\begin{array}{c}
 \underline{6)} \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} (vi) \quad \neg(p \vee q) (1e) \quad \frac{[q]^y}{p \vee q} (vi) \quad \neg(p \vee q) (1e)}{\frac{\perp}{\neg p} (1i)^x \quad \frac{\perp}{\neg q} (1i)^y}{\neg p \wedge \neg q} (1i) \\
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 19: Exercício 6

3.7 Exercício 7

$$\begin{array}{c}
 7/ \\
 \frac{\frac{\frac{[P]^x \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg P} \quad [Q]^y \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg Q} (\wedge e)}{\perp} (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg(P \vee Q)} (\neg i) \emptyset}{\neg(P \vee Q)} (\vee e) x, y} \\
 \frac{[P \vee Q]^u \neg(P \vee Q)}{\perp} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \wedge (\neg Q) \vdash \neg(P \vee Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 20: Exercício 7

3.8 Exercício 8

$$\begin{array}{c}
 8/ \\
 \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{Q} \quad [\neg Q]^y}{\perp} (\neg e)}{\frac{\neg P \vee \neg Q [P]^x \quad \frac{\perp}{\neg P} (\neg i) \emptyset}{\neg P} (\vee e) x, y} \\
 \frac{\perp}{(\neg P) \vee (\neg Q) \vdash \neg(P \wedge Q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 21: Exercício 8

3.9 Exercício 9

$$\begin{array}{c} 9) \quad \neg\neg(p \wedge q) \vdash (\neg\neg p) \wedge (\neg\neg q) \\ \frac{\frac{[p \wedge q]_{(1e)}^x}{p} \quad \frac{[p \wedge q]_{(1e)}^a}{[\neg\neg p]_{(1e)}}}{\neg\neg(p \wedge q) \quad \neg\neg(p \wedge q)} \quad \frac{\frac{[p \wedge q]_{(1e)}^y}{q} \quad \frac{[p \wedge q]_{(1e)}^b}{[\neg\neg q]_{(1e)}}}{\neg\neg(p \wedge q) \quad \neg\neg(p \wedge q)} \\ \frac{\frac{\perp_{(1e)}^x}{\neg\neg p} \quad \frac{\perp_{(1e)}^a}{\neg\neg p}}{\neg\neg p} \quad \frac{\frac{\perp_{(1e)}^y}{\neg\neg q} \quad \frac{\perp_{(1e)}^b}{\neg\neg q}}{\neg\neg q} \\ \hline (\neg\neg p) \vee (\neg\neg q) \end{array}$$

Figure 22: Exercício 9

3.10 Exercício 10

[illegible]

Figure 23: Exercício 10

3.11 Exercício 11

11)

$$\frac{\frac{a \vee (b \wedge c)}{(ae)} \quad \frac{\frac{[a]^x_{(vi)} \quad [a]^x_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai) \quad \frac{\frac{[b \wedge c]^y_{(ae)} \quad [b \wedge c]^y_{(ae)}}{b \quad c} (vi) \quad \frac{b \quad c}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{a \vee (b \wedge c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 24: Exercício 11

3.12 Exercício 12

12)

$$\frac{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi) \quad \frac{a \quad \frac{[c]^y_{(ae)}}{a \vee c}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{a \vee b \quad a \vee (b \wedge c)} (ai) \quad \frac{a \vee (b \wedge c) \quad a \vee (b \wedge c)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{(a \vee b) \wedge (a \vee c) \vdash a \vee (b \wedge c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 25: Exercício 12

3.13 Exercício 13

13)

$$\frac{\frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(ae)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{\frac{b \vee c \quad (a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai) \quad \frac{a \wedge (b \vee c) \quad (a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{a \wedge (b \vee c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 26: Exercício 13

3.14 Exercício 14

$$\frac{\frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge q]^x_{(P)}}{P} \quad \frac{[P \wedge r]^y_{(R)}}{P}}{P^{(ve)x,y}}}{\frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{q \vee r} \quad \frac{\frac{[P \wedge q]^z_{(A)}}{q} \quad \frac{[P \wedge r]^u_{(R)}}{r}}{q \vee r^{(v), (v)}}} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{q \vee r} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{q \vee r^{(ve)z,u}}}{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \vdash P \wedge (q \vee r)^{(A,i)}}$$

Figure 27: Exercício 14

3.15 Exercício 15

[illegible]

Figure 28: Exercício 15

3.16 Exercício 16

$$\begin{array}{c}
 \text{36)} \\
 \hline
 \frac{[P \wedge \neg P]^u}{P} (\wedge e) \quad \frac{[P \wedge \neg P]^u}{\neg P} (\wedge e) \\
 \hline
 \frac{P \quad \neg P}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg(P \wedge \neg P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 29: Exercício 16

4.1 Exercício 1

Figure 30: Exercício 1

4.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 \underline{2)} \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{[P]^y}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow i)^y}{\neg P \rightarrow P} \\
 \frac{[\neg P]^x \quad \frac{\perp}{P} (\neg i)^y}{\neg P} (\neg e) \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{\frac{\perp}{P} (\neg e)}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow i)^x}{\neg P \rightarrow P} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg P \rightarrow P)} (\neg i)^u \\
 \vdash \neg(\neg P \rightarrow P)
 \end{array}$$

Figure 31: Exercício 2

4.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 \text{3)} \\
 \hline
 \frac{\frac{\frac{[P]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow_i)^x}{\perp} (\perp_e)}{\frac{\frac{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow_e)}{\perp} (\perp_e)} \\
 \hline
 \frac{\frac{\frac{[P]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow_i)^x}{\perp} (\perp_e)}{\frac{\frac{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow_e)}{\perp} (\perp_e)} \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg \neg ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\neg_i)^4
 \end{array}$$

Figure 32: Exercício 3