

# Caderno de Exercícios

## LC1

Marcos Silva

2023

### Contents

<b>1</b>	<b>Aula 2</b>	<b>3</b>
1.1	Exercício 1 . . . . .	3
1.2	Exercício 2 . . . . .	3
1.3	Exercício 3 . . . . .	4
1.4	Exercício 4 . . . . .	4
1.5	Exercício 5 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Aula 4</b>	<b>5</b>
2.1	Exercício 1 - negação . . . . .	5
2.2	Exercício 2 - negação . . . . .	6
2.3	Exercício 3 - negação . . . . .	7
2.4	Exercício 4 - negação . . . . .	7
2.5	Exercício 1 - conjunção . . . . .	8
2.6	Exercício 2 - conjunção . . . . .	8
2.7	Exercício - associatividade da disjunção . . . . .	9
2.8	Exercício - variante da contrapositiva . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Aula 5</b>	<b>10</b>
3.1	Exercício 1 . . . . .	10
3.2	Exercício 2 . . . . .	10
3.3	Exercício 3 . . . . .	11
3.4	Exercício 4 . . . . .	11
3.5	Exercício 5 . . . . .	12
3.6	Exercício 6 . . . . .	12
3.7	Exercício 7 . . . . .	13
3.8	Exercício 8 . . . . .	13
3.9	Exercício 9 . . . . .	14
3.10	Exercício 10 . . . . .	14
3.11	Exercício 11 . . . . .	15
3.12	Exercício 12 . . . . .	15
3.13	Exercício 13 . . . . .	15

3.14	Exercício 14 . . . . .	16
3.15	Exercício 15 . . . . .	16
3.16	Exercício 16 . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Aula 6</b>	<b>18</b>
4.1	Exercício 1 . . . . .	18
4.2	Exercício 2 . . . . .	19
4.3	Exercício 3 . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Aula 7</b>	<b>21</b>
5.1	Exercício 1 . . . . .	21
5.2	Exercício 2 . . . . .	22
5.3	Exercício 3 . . . . .	23
5.4	Exercício 4 . . . . .	23
5.5	Exercício 5 . . . . .	24
5.6	Exercício 6 . . . . .	24
5.7	Exercício 7 . . . . .	25
5.8	Exercício 8 . . . . .	25
5.9	Exercício 9 . . . . .	26
5.10	Exercício 10 . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Exercícios 66-71</b>	<b>28</b>
6.1	Exercício 66 . . . . .	28
6.2	Exercício 67 . . . . .	29
6.3	Exercício 68 . . . . .	30
6.4	Exercício 69 . . . . .	31
6.5	Exercício 70 . . . . .	32
6.5.1	Exercício 70-1 . . . . .	32
6.5.2	Exercício 70-2 . . . . .	33
6.5.3	Exercício 70-3 . . . . .	34
6.5.4	Exercício 70-4 . . . . .	34
6.6	Exercício 71 . . . . .	35
6.6.1	Exercício 71-1 . . . . .	35
6.6.2	Exercício 71-2 . . . . .	36
6.6.3	Exercício 71-3 . . . . .	36

# 1 Aula 2

## 1.1 Exercício 1

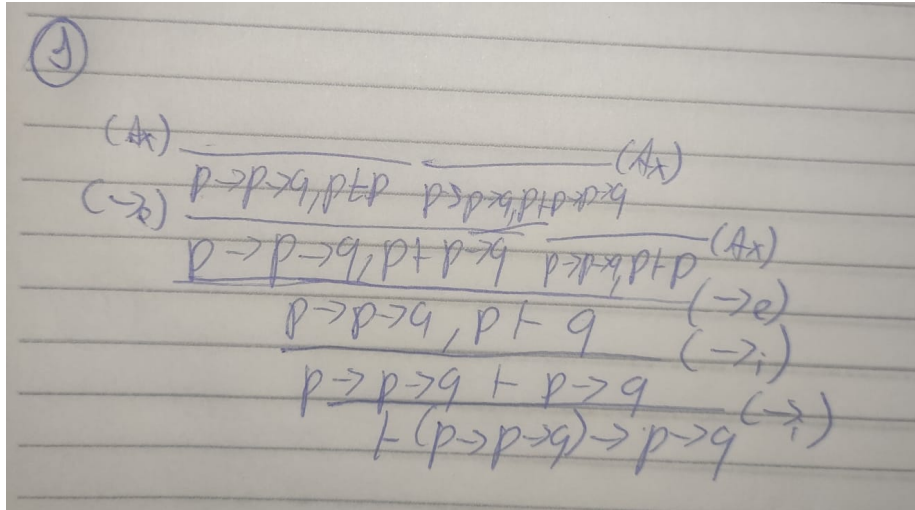


Figure 1: Exercício 1

## 1.2 Exercício 2

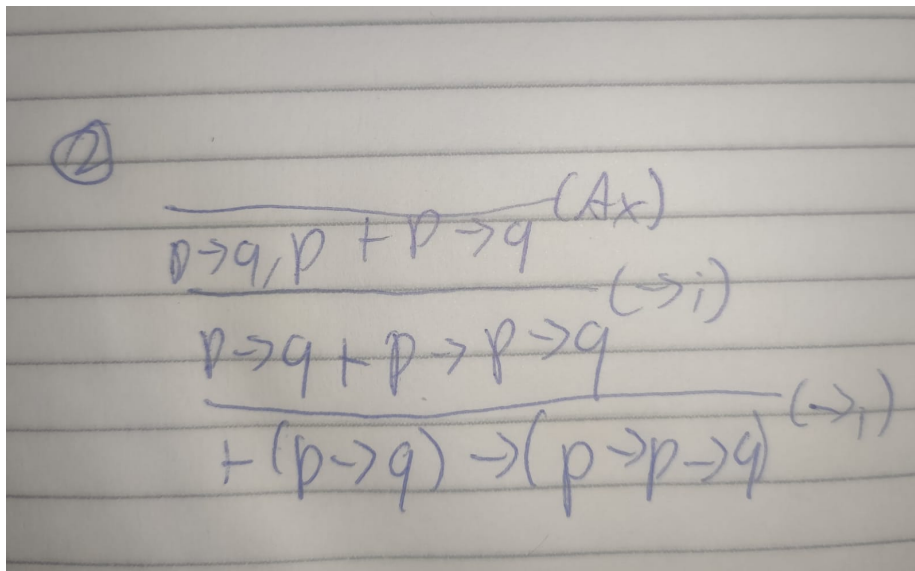
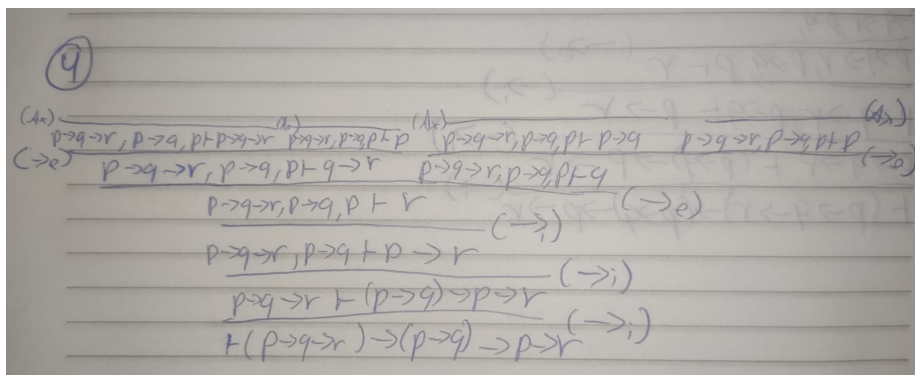


Figure 2: Exercício 2

③

$$\begin{array}{l}
 (Ax) \frac{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash p} (Ax) \\
 (Ax) \frac{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r \rightarrow \perp}{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow e) \\
 \frac{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash q \rightarrow r \rightarrow \perp}{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q, p \vdash r \rightarrow \perp} (\rightarrow i) \\
 \frac{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow r \rightarrow \perp}{q \rightarrow r \rightarrow \perp, p \rightarrow q} (\rightarrow i) \\
 \frac{q \rightarrow r \rightarrow \perp \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow \perp}{\vdash (q \rightarrow r \rightarrow \perp) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow \perp} (\rightarrow i)
 \end{array}$$

### 1.4 Exercício 4



4

## 1.5 Exercício 5

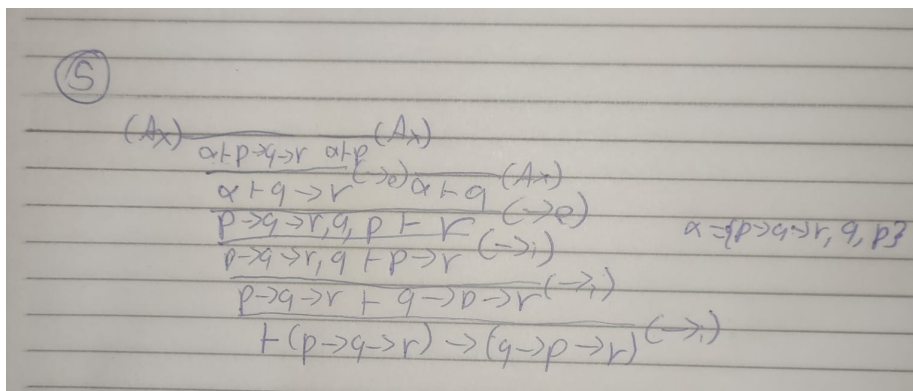


Figure 5: Exercício 5

## 2 Aula 4

### 2.1 Exercício 1 - negação

Handwritten logical derivation for Exercise 1:

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \vdash (\neg p) \rightarrow (\neg q) \\
 \frac{p \rightarrow q \quad [p]^2}{q} \text{(-}\rightarrow\text{e)} \\
 \frac{[ \neg q ]^y}{\vdash} \text{(-}\neg\text{i)} \\
 \frac{\vdash \quad [ \neg p ]^x}{\neg p} \text{(-}\neg\text{i)} \\
 \frac{\neg p \quad [ \neg p ]^x}{\vdash} \text{(-}\neg\text{i)} \\
 \frac{\vdash \quad [ \neg q ]^y}{\neg q} \text{(-}\neg\text{i)} \\
 \frac{\neg p \quad \neg q}{\neg p \rightarrow \neg q} \text{(-}\rightarrow\text{i)}^x
 \end{array}$$

Figure 6: Exercício 1

## 2.2 Exercício 2 - negação

$$\textcircled{2} \neg\neg(p \rightarrow q) \vdash (\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg\neg q}{\neg\neg q}^y}{q}(\neg e) \quad \frac{\frac{[p \rightarrow q]^2}{[p]}^a}{(\rightarrow e)} \\
 \frac{\frac{\neg}{\neg p}^a \quad \frac{\neg\neg p}{\neg\neg p}^x}{\neg\neg p}(\neg e) \\
 \frac{\frac{\neg}{\neg\neg(p \rightarrow q)}^z \quad \neg\neg(p \rightarrow q)}{\neg\neg(p \rightarrow q)}(\neg e) \\
 \frac{\frac{\neg}{\neg\neg q}^y}{\neg\neg q}(\neg i)^y \\
 \frac{\neg\neg q}{(\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg q)}(\rightarrow_i)^x
 \end{array}$$

Figure 7: Exercício 2

### 2.3 Exercício 3 - negação

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{3} \vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q \\
 \begin{array}{c}
 (\rightarrow_i)^a \frac{[p]^2}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^2 \frac{q}{p \rightarrow q} \quad [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^y (\rightarrow_e) \\
 \hline
 (\rightarrow_i)^y \frac{p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad [(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]^x \\
 \hline
 (\rightarrow_e) \frac{q}{(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q} (\rightarrow_i)^x \\
 \hline
 (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 8: Exercício 3

### 2.4 Exercício 4 - negação

$$\textcircled{4} p, \neg p \vdash \neg q$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \quad \neg p}{\perp} (\neg_e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg q} (\neg_i)^x
 \end{array}$$

Figure 9: Exercício 4

## 2.5 Exercício 1 - conjunção

$$\textcircled{1} p \wedge q \vdash q \wedge p$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{p \wedge q}{q}}{p} (Ai)}{q \wedge p}$$

Figure 10: Exercício 1

## 2.6 Exercício 2 - conjunção

$$\textcircled{2} (p \wedge q) \wedge p \vdash p \wedge (q \wedge p)$$

$$\frac{\frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p} (Ai) \quad \frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{q} (Ai)}{p \wedge (q \wedge p)} (Ai)}{(p \wedge q) \wedge p} (Ae) \quad \frac{(Ae) \frac{(p \wedge q) \wedge p}{p} (Ai)}{p \wedge (q \wedge p)} (Ai)}{(p \wedge q) \wedge p \vdash p \wedge (q \wedge p)}$$

Figure 11: Exercício 2



## 2.7 Exercício - associatividade da disjunção

$$\begin{array}{c}
 (a \vee b) \vee c \vdash a \vee (b \vee c) \\
 \frac{(ve)^x (a \vee b) \vee c \quad \frac{(vi)^x \frac{[c]^x (vi)}{b \vee c} \quad (ve)^y \frac{[a]^y (vi) \quad \frac{[b]^y (vi)}{b \vee c}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}}{a \vee (b \vee c)}
 \end{array}$$

Figure 12: Exercício

## 2.8 Exercício - variante da contrapositiva

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p \\
 \frac{(\rightarrow e) \frac{p \rightarrow \neg q [p]^y}{\neg q} \quad (\neg e) \frac{\neg q \quad [q]^x}{\perp} \quad \frac{\perp (hi)^y}{\neg p} \quad (\rightarrow i)^x}{q \rightarrow \neg p}
 \end{array}$$

Figure 13: Exercício

### 3 Aula 5

#### 3.1 Exercício 1

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \quad \frac{\frac{[q]^u}{p \vee q} (vi)}{\neg(p \vee q)} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 14: Exercício 1

#### 3.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 2) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p} (se) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q} (se) \quad \frac{[p]^x}{\neg p} (re) \\
 \frac{\perp (i)^x}{\neg p} \quad \frac{\perp (i)^u}{\neg q} \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)
 \end{array}$$

Figure 15: Exercício 2

### 3.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 3) \\
 \hline
 \frac{\frac{[c \vee a]^u}{c \vee b} \quad \frac{c}{c \vee b} (vi) \quad \frac{a \rightarrow b \quad [a]^u}{b} (\rightarrow e)}{c \vee b} (ve) \\
 \hline
 \frac{c \vee b}{a \rightarrow b \vdash (c \vee a) \rightarrow (c \vee b)} (\rightarrow i)^u
 \end{array}$$

Figure 16: Exercício 3

### 3.4 Exercício 4

$$\begin{array}{c}
 4) \\
 \hline
 \frac{p \rightarrow q \quad [p]^x}{q} (\rightarrow e) \quad \frac{[p \wedge \neg q]^u}{\neg q} (\wedge e) \\
 \hline
 \frac{p \wedge \neg q (\wedge e) \quad \frac{q}{\neg q} (\neg e)}{p} (\neg i)^x \\
 \hline
 \frac{p}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 17: Exercício 4

### 3.5 Exercício 5

$$\begin{array}{c}
 \underline{5)} \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q}{(1e)} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{\frac{q}{[\neg q]^y} \quad \frac{1}{\neg p} (1i)^o}{[\neg p]^x} \quad \frac{[\neg p]^x}{(ve)^{x,y}}}{\frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{1}{\neg p} (1i)^o}}{\frac{1}{\neg p} (1i)^o}} \\
 \frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]^u}{\neg p} \quad \frac{1}{\neg p} (1i)^o \\
 \frac{1}{\neg p} (1i)^o \\
 p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)
 \end{array}$$

Figure 18: Exercício 5

### 3.6 Exercício 6

$$\begin{array}{c}
 \underline{6)} \quad \frac{\frac{[p]^x}{p \vee q} \quad \frac{[q]^y}{p \vee q}}{\frac{1}{\neg p} (1i)^x \quad \frac{1}{\neg q} (1i)^y} \quad \frac{[\neg p \vee \neg q]}{\neg p \vee \neg q} \\
 \frac{1}{\neg p} (1i)^x \quad \frac{1}{\neg q} (1i)^y \\
 \frac{1}{\neg p} (1i)^x \quad \frac{1}{\neg q} (1i)^y \\
 \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q
 \end{array}$$

Figure 19: Exercício 6

### 3.7 Exercício 7

$$\begin{array}{c}
 7/ \\
 \frac{\frac{\frac{[P]^x \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg P} \quad [Q]^y \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg Q} (1e)}{\perp} (1i) \phi}{\neg(P \vee Q)} (1i) \phi}{\neg(P \vee Q)} (ve) x, y \\
 \frac{[P \vee Q]^u \neg(P \vee Q)}{\perp} (1e) \\
 \frac{}{\neg(P) \wedge \neg(Q) \vdash \neg(P \vee Q)} (1i) u
 \end{array}$$

Figure 20: Exercício 7

### 3.8 Exercício 8

$$\begin{array}{c}
 8/ \\
 \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge Q]^u}{Q} \quad [\neg Q]^y}{\perp} (1e)}{\neg(P \vee \neg Q) [P]^x \frac{\perp}{\neg P} (1i) \phi} (1e) \phi}{\neg(P \vee \neg Q)} (ve) x, y \\
 \frac{}{\neg(P) \vee \neg(Q) \vdash \neg(P \wedge Q)} (1i) u
 \end{array}$$

Figure 21: Exercício 8

### 3.9 Exercício 9

[illegible]

Figure 22: Exercício 9

### 3.10 Exercício 10

10

$$\frac{\frac{\frac{(17p) \wedge (17q)}{17p} (1e) \quad \frac{\frac{1}{17q} (17i)^v}{17q} (1e) \quad \frac{[1(p \wedge q)]^u \frac{[p]^x [q]^y}{p \wedge q} (1e)}{(17p) \wedge (17q)} (1e)}}{\frac{1}{17p} (17i)^x} (1e)$$

$$\frac{\perp}{(17p) \wedge (17q) \vdash 17(p \wedge q)} (17i)^u$$

Figure 23: Exercício 10

### 3.11 Exercício 11

11)

$$\frac{\frac{a \vee (b \wedge c)}{(ae)} \quad \frac{\frac{[a]^x_{(vi)} \quad [a]^x_{(vi)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai) \quad \frac{\frac{[b \wedge c]^y_{(ae)} \quad [b \wedge c]^y_{(ae)}}{b \quad c} (vi) \quad \frac{b \quad c}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}}{a \vee (b \wedge c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 24: Exercício 11

### 3.12 Exercício 12

12)

$$\frac{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[a]^x_{(vi)} \quad \frac{[b]^y_{(ae)} \quad [c]^z_{(ai)}}{b \wedge c} (vi)}{a \vee (b \wedge c)} (vi) \quad \frac{a \quad \frac{[c]^y_{(ae)}}{a \vee c}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{\frac{(a \vee b) \wedge (a \vee c)}{a \vee b} \quad \frac{a \vee (b \wedge c)}{a \vee (b \wedge c)} (ve)^{x,y}}{(a \vee b) \wedge (a \vee c) \vdash a \vee (b \wedge c)} (ve)^{x,y}$$

Figure 25: Exercício 12

### 3.13 Exercício 13

13)

$$\frac{\frac{a \wedge (b \vee c)}{(ae)} \quad \frac{[b]^x_{(vi)} \quad a}{a \vee b \quad a \vee c} (vi) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(ae)}}{a \vee b \quad a \vee c} (ai)}{\frac{b \vee c}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai) \quad \frac{a \quad [c]^y_{(ae)}}{(a \vee b) \wedge (a \vee c)} (ai)}{(a \wedge (b \vee c) \vdash (a \vee b) \wedge (a \vee c))} (ve)^{x,y}$$

Figure 26: Exercício 13

### 3.14 Exercício 14

$$\frac{\frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge q]^x_{(P)} \quad [P \wedge r]^y_{(P)}}{P} \quad \frac{[P \wedge q]^z_{(P)} \quad [P \wedge r]^u_{(P)}}{q \vee r}}{P} \quad \frac{(P \wedge q) \vee (P \wedge r)}{q \vee r} \quad \frac{q \vee r}{q \vee r} \quad \frac{r}{q \vee r}}{(P \wedge q) \vee (P \wedge r) \vdash P \wedge (q \vee r)}$$

Figure 27: Exercício 14

### 3.15 Exercício 15

$$\frac{\frac{[\Gamma(\rho \vee \neg \rho)]^u \frac{[\rho]^x}{\rho \vee \neg \rho} (v_i)}{\perp (v_i)^x}}{[\Gamma(\rho \vee \neg \rho)]^u \frac{[\rho]^x}{\rho \vee \neg \rho} (v_i)} \quad (14)$$

$$\frac{\frac{[\Gamma(\rho \vee \neg \rho)]^u \frac{[\rho]^x}{\rho \vee \neg \rho} (v_i)}{\perp (v_i)^x}}{\perp (v_i)^u} \quad (15)$$

$$\frac{\perp (v_i)^u}{\vdash \neg \neg (\rho \vee \neg \rho)} \quad (16)$$

Figure 28: Exercício 15



### 3.16 Exercício 16

$$\begin{array}{c}
 \text{36)} \\
 \hline
 \frac{[P \wedge \neg P]^u}{P} (\wedge e) \quad \frac{[P \wedge \neg P]^u}{\neg P} (\wedge e) \\
 \hline
 \frac{P \quad \neg P}{\perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg(P \wedge \neg P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 29: Exercício 16

### 4.1 Exercício 1

Figure 30: Exercício 1

## 4.2 Exercício 2

$$\begin{array}{c}
 \underline{2)} \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{[P]^y}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow i)^y}{\neg P \rightarrow P} \\
 \frac{[\neg P]^x \quad \frac{\perp}{P} (\neg i)^y}{\neg P} (\neg e) \\
 \frac{[\neg(\neg P \rightarrow P)]^u \quad \frac{\frac{\perp}{P} (\neg e)}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow i)^x}{\neg(\neg P \rightarrow P)} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{\vdash \neg(\neg P \rightarrow P)} (\neg i)^u
 \end{array}$$

Figure 31: Exercício 2

### 4.3 Exercício 3

$$\begin{array}{c}
 \text{3)} \\
 \hline
 \frac{\frac{\frac{[P]^2}{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (\rightarrow_i)^x}{\perp} (\perp_e)}{\frac{\frac{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P}{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (\rightarrow_e)}{\perp} (\perp_e)} \\
 \hline
 \frac{\frac{\frac{[P]^2}{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (\rightarrow_i)^x}{\perp} (\perp_e)}{\frac{\frac{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P}{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (\rightarrow_e)}{\perp} (\perp_e)} \\
 \hline
 \frac{\perp}{\vdash \neg \neg ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P} (\neg_i)^4
 \end{array}$$

Figure 32: Exercício 3

## 5 Aula 7

### 5.1 Exercício 1

$$\begin{array}{l}
 \downarrow \\
 \frac{[1P]^u \quad 11P}{\perp} (PB)^u \\
 \hline
 11P \vdash P
 \end{array}$$

Figure 33: Exercício 1

## 5.2 Exercício 2

$$\begin{array}{l}
 2) \\
 \hline
 \neg P \rightarrow \bot \quad [\neg P]^u \\
 \hline
 \bot \quad (\rightarrow e) \\
 \hline
 \neg \neg P \quad (\neg i)^u \\
 \hline
 \neg P \rightarrow \bot \vdash P
 \end{array}$$

Figure 34: Exercício 2

### 5.3 Exercício 3

3

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[P]^y}{(\rightarrow_i)^x} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P}{(\neg e)} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{(\neg e)} \quad \frac{[P \rightarrow q]^{(u)y}}{(\rightarrow_i)^x} [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^x}{P}}{(\rightarrow_i)^x} \\
 \frac{\frac{\frac{[((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P]^u}{(\neg e)} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P}{\perp}}{(\neg i)^u} \\
 \frac{\perp}{\neg \neg ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P} (\neg \neg e) \\
 \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P
 \end{array}$$

Figure 35: Exercício 3

### 5.4 Exercício 4

4

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[P]^y}{(\rightarrow_i)^x} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P}{(\neg e)} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{(\neg e)} \quad \frac{[P \rightarrow q]^{(u)y}}{(\rightarrow_i)^x} [(p \rightarrow q) \rightarrow p]^x}{P}}{(\rightarrow_i)^x} \\
 \frac{\frac{[((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P]^u}{(\neg e)} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P}{\perp}}{(\neg i)^u} \\
 \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow P \quad (PBC)^u
 \end{array}$$

Figure 36: Exercício 4

### 5.5 Exercício 5

5)

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^x}{(p \vee \neg p)} \quad \frac{[P]^x}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \quad \frac{\frac{\frac{[P]^x \quad [\neg p]^y}{\perp} (\neg e) \quad \frac{\perp}{q} (\neg e)}{p \rightarrow q} (\rightarrow i)^u \quad \frac{[ (p \rightarrow q) \rightarrow p ]^z}{p \rightarrow q} (\rightarrow e)}{p} (\rightarrow i)^z \\
 \frac{(LEM) \quad \frac{(p \vee \neg p) \quad ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\vee_e)^{x,y}}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p}
 \end{array}$$

Figure 37: Exercício 5

### 5.6 Exercício 6

6)

$$\begin{array}{c}
 \frac{[ (p \vee \neg p) \rightarrow \neg p ]^u \quad \frac{[p]^x}{p \vee \neg p}}{\neg p} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg p} (\neg i)^x}{p \vee \neg p} (\vee i) \\
 \frac{((p \vee \neg p) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p)}{((p \vee \neg p) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p)} (\rightarrow i)^u \\
 \frac{((p \vee \neg p) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p) \quad ((p \vee \neg p) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p)}{\vdash p \vee \neg p} (\rightarrow e)
 \end{array}$$

Figure 38: Exercício 6



7)

Figure 39: Exercício 7

8)

Figure 40: Exercício 8

## 5.9 Exercício 9

O número mínimo de provas necessárias são 4, conectando cada uma das quatro regras. Com uma conexão entre cada uma das regras, ao possuírmos uma delas, necessariamente há um caminho para chegar até as outras três.

É trivial notar que não é possível que isso seja realizado com menos de quatro, uma vez que uma das regras estará desconectada, sem que possamos prová-la. Tendo isso em mente, só é preciso demonstrar que existem quatro provas que as conectem.

A partir do exercício 1, 3 e 6, já criamos uma conexão seguindo a ordem  $PBC \rightarrow \sim\sim E \rightarrow LP \rightarrow LEM$ ; sendo cada uma das setas uma prova, respectivamente. Só resta provar  $LEM \rightarrow PBC$  para que haja um ciclo e a equivalência se mostre possível com quatro provas.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{p \vee \neg p}{(LEM)} \quad [p]^x \quad \frac{\frac{\neg p \rightarrow \perp \quad [\neg p]^y}{\perp} (\rightarrow e) \quad \frac{\perp}{p} (\perp e)}{p} (ve)^{x,y}}{\neg p \rightarrow \perp \vdash p}
 \end{array}$$

Figure 41: Prova PBC usando LEM

Assim, fica provado que quatro é valor mínimo e suficiente de provas para estabelecer equivalência entre essas quatro regras.

### 5.10 Exercício 10

$$\begin{array}{l}
 10 \\
 \hline
 (\rightarrow) \frac{\frac{1}{\Gamma P \supset \perp [\Gamma P]^u} (10)}{\frac{1}{\vdash P} (PB\perp)^u}
 \end{array}$$

Figure 42: Exercício 10

## 6 Exercícios 66-71

### 6.1 Exercício 66

$$\begin{array}{c}
 \underline{66} \quad \forall x \neg P \vdash \neg \exists x P \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{\forall x \neg P(x)}{\neg P(x_0)} \text{ (ve)} \\
 \frac{\neg P(x_0) \quad [P(x_0)]^v}{\perp} \\
 \frac{[\exists x P(x)]^u \quad \perp}{\perp} \text{ (}\exists\text{e)} \\
 \frac{\perp}{\neg \exists x P(x)} \text{ (}\neg\text{i)}^u \\
 \hline
 \forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{(\exists\text{i}) \quad [P(x_0)]^u}{\exists x P(x)} \\
 \frac{\exists x P(x) \quad \neg \exists x P(x)}{\perp} \text{ (}\exists\text{e)} \\
 \frac{\perp}{\neg P(x_0)} \text{ (}\neg\text{i)}^u \\
 \frac{\neg P(x_0)}{\neg \exists x P(x)} \text{ (}\forall\text{i)} \\
 \hline
 \neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Figure 43: 28 Exercício 66

6.2 Exercício 67

$$67) \neg \forall x P \vdash \exists x \neg P$$

$$\neg \forall x P \quad \forall x P$$

$$\frac{\frac{\overline{\neg \exists x P} \quad \exists x P}{\perp}}{\neg P(x_0)} \quad \frac{\neg P(x_0)}{\neg \forall x P \vdash \exists x \neg P} (\exists i)$$

$$\frac{\frac{\frac{(\forall e) \frac{[\forall x P]^u}{P(x_0)} \quad \frac{(\exists e) \frac{[\neg P(x_0)]^v}{\perp}}{(\exists e)^v}}{\exists x \neg P}}{\perp}}{(\exists i)^u} \quad \frac{\perp}{\exists x \neg P \vdash \neg \forall x P}$$

Figure 44: Exercício 67

6.3 Exercício 68

$$68) \quad \forall x P \vdash \neg \exists x \neg P$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{(\forall e) \quad \forall x P}{P(x_0) [\neg P(x_0)]^{\neg}} \\
 \frac{[\exists x P]^{\neg} \quad \frac{P(x_0) [\neg P(x_0)]^{\neg}}{\perp}}{\neg (\exists e) \neg} \\
 \frac{\perp}{\neg (\neg i) \neg} \\
 \hline
 \forall x P \vdash \neg \exists x \neg P
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg P(x_0)]^{\neg}}{\neg \exists x P \quad \exists x \neg P} \\
 \frac{\perp}{\neg (\neg e) \neg} \\
 \frac{P(x_0)}{\neg \exists x \neg P \vdash \forall x P} \quad (\forall i)
 \end{array}$$

Figure 45: Exercício 68

## 6.4 Exercício 69

$$69) \quad \exists x p \vdash \neg \forall x p$$
$$\frac{\begin{array}{c} [\forall x \neg p]^\vee \\ \frac{[p(x_0)] \wedge \neg p(x_0)}{(\neg e)} \\ (\exists e) \end{array}}{\perp} \text{ (PE)}$$
$$\frac{}{\exists x p \vdash \neg \forall x p} \text{ (I)}$$
$$\frac{}{\neg \forall x \neg p \quad \forall x p}$$
$$\frac{}{\perp} \text{ (PBC)}$$
$$\neg \forall x \neg p \vdash \exists x p$$

Figure 46: Exercício 69

## 6.5 Exercício 70

### 6.5.1 Exercício 70-1

70-1

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\forall x p) \wedge q}{\forall x p} (\wedge e) \quad \frac{(\forall x p) \wedge q}{q} (\wedge e) \\
 \frac{\forall x p}{p(x_0)} (\forall e) \quad \frac{q}{p(x_0) \wedge q} (\wedge i) \\
 \hline
 p(x_0) \wedge q \\
 \hline
 (\forall x p) \wedge q \vdash \forall x (p \wedge q) \quad (\forall i)
 \end{array}$$

onde  $x \notin \text{fV}(q)$

Figure 47: Exercício 70-1



6.5.2 Exercício 70-2

70-2

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x p} (\wedge e) \quad \frac{\frac{[p(x_0)]^u}{p(x_0) \wedge q} (\wedge i) \quad \frac{(\exists x p) \wedge q}{q} (\wedge e)}{(\exists x p) \wedge q} (\wedge e) \\
 \frac{\frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x (p \wedge q)} (\exists i) \quad \frac{(\exists x p) \wedge q}{\exists x p} (\exists e)}{(\exists x p) \wedge q \vdash \exists x (p \wedge q)} \\
 \text{onde } x \notin fvc(q)
 \end{array}$$

Figure 48: Exercício 70-2

70-3

Figure 49: Exercício 70-3

$$\underline{70-4}$$

Figure 50: Exercício 70-4

### 6.6.1 Exercício 71-1

Figure 51: Exercício 71-1

### 6.6.3 Exercício 71-3

[illegible]

36