Uma breve revisão da Mecânica Quântica para Cientistas da Computação

André Furlan - ensismoebius@gmail.com

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

2023

Introdução

Introdução

Alguns fenômenos, como o **emaranhamento** e a **superposição** presentes na mecânica quântica contribuem para uma abordagem mais eficiente em termos de velocidade na execução de alguns algoritmos. A computação quântica visa explorar e utilizar esses comportamentos.

Espaço vetorial

Espaço vetorial

Um **espaço vetorial** (V) sobre os números complexos $\mathbb{C}$ é uma estrutura matemática que permite a representação de seus elementos (vetores) e obedece ao seguinte conjunto de regras:

- $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha.|V_1\rangle \in V$
- $\vec{0}, \vec{0} + |V_1\rangle = |V_1\rangle$ (vetor nulo)
- $|V_1\rangle + |V_2\rangle = |V_2\rangle + |V_1\rangle$ (comutativa)
- $|V_1\rangle \in V, |V_2\rangle \in V \implies |V_1\rangle + |V_2\rangle \in V$
- $|-V_1\rangle; |V_1\rangle + |-V_1\rangle = \vec{0}, |-V_1\rangle = -|V_1\rangle$
- $|V_1\rangle + (|V_2\rangle + |V_3\rangle) = (|V_1\rangle + |V_2\rangle) + |V_3\rangle$ (associativa)
- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}; \alpha(|V_1\rangle + \beta.|V_2\rangle) = \alpha.|V_1\rangle + \alpha.\beta.|V_2\rangle$ (distributiva)

unesp

Base de um espaço vetorial

Sendo V um espaço vetorial, sua base é o conjunto b é tal que $b \subset V$ e os elementos de b são ortonormais, ou seja, ortogonais entre si e unitários.

Em mecânica quântica esses **vetores base** são chamados de **possíveis estados do sistema**.

Notação de Dirac e os estados quânticos

Notação de Dirac

O estado de um sistema quântico é descrito usando um formalismo chamado **vetores de estado**, que pertencem a um **espaço vetorial** associado ao sistema. Esses vetores são geralmente denotados usando a notação "ket", introduzida pelo físico Paul Dirac, onde um vetor de estado é representado como $|\psi\rangle$, pronunciado como "ket psi".

A combinação dos símbolos $|$ e $\rangle$ com um valor dentro deles é chamada de "ket". Um exemplo é demonstrado na Equação 1 (POLLI, 2020).

$$|K\rangle = \vec{K} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \tag{1}$$

Onde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ e são componentes do **vetor** (ou matriz coluna) K.

Para descrever o estado de uma partícula usando **vetores base**, o estado da partícula pode ser escrito usando a equação 2.

$$|\psi\rangle = \alpha.\,|V_1\rangle + \beta.\,|V_2\rangle \tag{2}$$

Com α e β conhecidos como **amplitudes de probabilidade**.

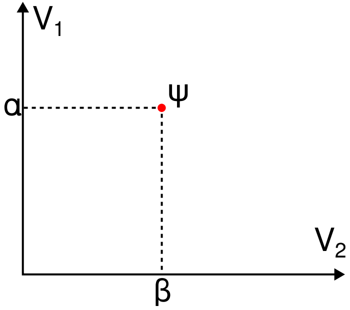

Figura: Representação visual da Equação 2. V_1 e V_2 devem ser ortogonais e normalizados.

A figura ao lado mostra espaço vetorial de duas dimensões com bases V_1 e V_2. Mas esse não é o caso da maioria das particulas. Um estado quântico bidimensional é apenas um caso particular conveniente para a computação.

Esse caso particular é chamado de **sistema de estados em dois níveis**.

Notação de Dirac para os estados quânticos II

Sendo $N =$ o número de níveis e $a \in (\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega)$ **sistema de estados multinível** pode ser representada como uma soma:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i . |V_i\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Estados Quânticos

Estados Quânticos

Os estados quânticos são representações matemáticas que fornecem informações sobre as propriedades de um sistema físico, como a posição ou o momento de uma partícula.Ao contrário dos bits clássicos, que podem representar apenas 0 ou 1, os estados quânticos podem existir em uma superposição, onde eles representam simultaneamente vários estados possíveis

Os estados quânticos são descritos usando vetores de estado, que são frequentemente representados usando a notação de Dirac "ket"(por exemplo, $|\psi\rangle$).

Exemplo físico

Um bom exemplo do que pode ser um estado quântico são as frequências de onda de um fóton. Essa partícula possui componentes elétricos e magnéticos, formando um campo eletromagnético. Podemos interpretar, por exemplo, a componente "vertical" como o estado 0 e a "horizontal" como o estado 1, conforme ilustrado na Figura abaixo.

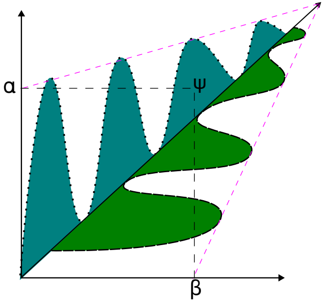

Figura: Estado da partícula é definido pelos valores de amplitude de α e β

Perceba a semelhança com a representação visual da Equação de Dirac. **Isso não é um coincidência**. Neste caso a amplitude das ondas está diretamenta relacionada com o estado dessa partícula.

Amplitude de probabilidade

Amplitude de probabilidade I

Como já dito anteriomente, sistema de estados em dois níveis, tem como parâmetros definidores os valores de α e β. Esses são chamados de amplitude de probabilidade.

O uso de tais amplitudes se dá no cálculo da probabilidade de um estado colapsar em uma das bases, neste caso $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Como tais valores podem estar no domínio dos números complexos $\mathbb{C}$, precisamos introduzir o conceito de conjugado complexo de um número. Para um número $z = u + vi$, onde $z \in \mathbb{C}$, seu conjugado é denotado como z^*, onde $z^* \in \mathbb{C}$, e é dado por $z^* = u - vi$. Em resumo, se $z = u + vi$, então $z^* = u - vi$.

Aplicando o conceito de conjugado complexo, podemos ver que $z \cdot z^* = (u + vi) \cdot (u - vi) = u^2 + v^2 \in \mathbb{R}$. Isso resolve o problema, pois o produto $z \cdot z^*$ é um número real!

Amplitude de probabilidade II

Finalmente, seja $P(S_i)$ uma função que calcula a probabilidade do estado S_i ocorrer. Por exemplo, se $|\psi\rangle = \alpha|S_0\rangle + \beta|S_1\rangle$, então $P(S_0)$ e $P(S_1)$ são definidos como mostrado nas equações 4 e 5 (BINNEY; SKINNER, 2013).

$$P(S_0) = \alpha.\alpha^* \tag{4}$$

$$P(S_1) = \beta.\beta^* \tag{5}$$

Princípio de Heisenberg

Não se pode ter tudo I

O princípio de Heisenberg se baseia no fato que a medição simultânea de certas grandezas nem sempre é posível: Se sabemos muito sobre a velocidade de uma partícula, pouco se sabe sobre sua posição; se é certa a presença de uma frequência em um sinal é difil saber quando a mesma ocorre, etc.
O último exemplo supracitado é ilustrado na figuras abaixo:

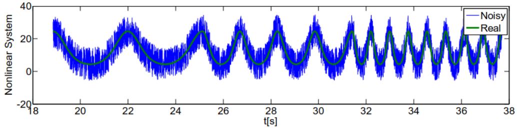

Figura: Multi-frequency signal. Source: (OLAMA; JAZAYERI-RAD, 2011)

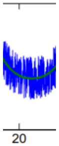

Figura: Small windowed signal. Adapted from: (OLAMA; JAZAYERI-RAD, 2011)

Não se pode ter tudo II

Perceba que, quando há acesso ao sinal por inteiro é fácil via uma transfomada de Fourrier, por exemplo, saber quais a frequências envolvidas no sinal, o mesmo não acontece qundo o foco é em alguma região de alta frequência.

Qubit ou bit quântico

Qubits existem em uma superposição dos estados 1 e 0 até serem medidos, momento em que seu estado colapsa para 1 ou 0 com probabilidades dadas por $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ (SILVA, 2018).

$$|\psi\rangle = \alpha.\,|0\rangle + \beta.\,|1\rangle = \alpha.\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta.\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \tag{6}$$

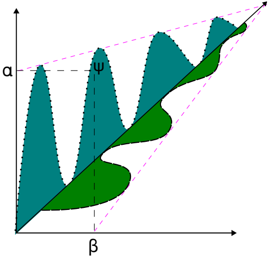

Figura: Ao ser lido este qubit tem maior probabilidade de colapsar em 0.

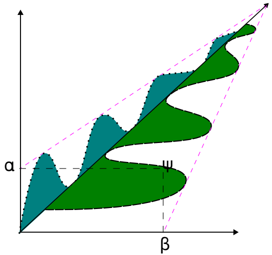

Figura: Ao ser lido este qubit tem maior probabilidade de colapsar em 1.

Qubit ou bit quântico II

Qubits têm a capacidade de armazenar e processar informações de maneira diferente dos bits clássicos devido à superposição. A sua capacidade, em termos de armazenamento de informação, é significativamente maior em comparação com os bits clássicos. No entanto, há um problema: quando os qubits são medidos, eles se transformam em bits clássicos. Portanto, atualmente, não é possível aproveitar ao máximo as propriedades quânticas para fins de armazenamento de dados. Além disso, os qubits podem armazenar dados não binários, como $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

Qubit ou bit quântico III

A lista abaixo mostra a capacidade dos qubits em compração com os bits clássicos:

- 1 qubit = 2 bits
- 2 qubits = 4 bits
- 3 qubits = 8 bits (1 byte)
- 4 qubits = 16 bits
- 13 qubits = 8,192 bits (1 kilobyte)
- 23 qubits = 8,388,608 bits (1 megabyte)
- 33 qubits = 8,589,934,592 bits (1 gigabyte)
- 43 qubits = 8,796,093,022,208 bits (1 terabyte)
- n qubits = 2^n bits

Portas Quânticas I

- Porta identidade: Mantém o qubit no mesmo estado. $I : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Porta Hadamard: Ela cria uma superposição de estados em um qubit. É representada pela seguinte matriz (HELWER, 2018): $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Porta X, ela inverte o estado de um qubit. É representada por: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Porta CNOT: A porta Controlled NOT opera em dois qubits, onde um atua como controle e o outro como alvo. É representada pela seguinte matriz:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta porta opera em **dois qubits**, onde um é o **qubit de controle** e o outro é o **target qubit**. Para representar o estado dos qubits combinados, é utilizada uma variação da notação ket, onde dois vetores são representados juntos. Isso é necessário porque os qubits não podem mais ser escritos separadamente devido ao emaranhamento que essa porta pode causar. As variações do ket são mostradas nas Equações 7, 8 e 9.

$$|1\rangle\,,|0\rangle \implies |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$|0\rangle\,,|0\rangle \implies |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$|1\rangle\,,|1\rangle \implies |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

A porta CNOT opera em dois qubits, onde o primeiro qubit serve como controle e o segundo qubit como alvo. Conforme mostrado na Equação 10, quando o qubit de controle está no estado $|1\rangle$, o qubit alvo sofre uma inversão. No entanto, quando o qubit de controle está no estado $|0\rangle$, o qubit de destino permanece inalterado (NIELSEN; CHUANG, 2002).

$$\begin{aligned} CNOT\,|00\rangle &= |00\rangle\,, \\ CNOT\,|01\rangle &= |01\rangle\,, \\ CNOT\,|10\rangle &= |11\rangle\,, \\ CNOT\,|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

Referências I

BINNEY, J.; SKINNER, D. *The physics of quantum mechanics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013.

HELWER, A. *Quantum Computing for Computer Scientists*. 2018. Disponível em: ⟨https://www.microsoft.com/en-us/research/video/quantum-computing-computer-scientists/⟩.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.

OLAMA, E. K.; JAZAYERI-RAD, H. Design and implementation of a noise tolerant polynomial nonlinear arx model using the averaging wavelet method. *International Journal of Computer Applications*, Citeseer, v. 35, n. 1, p. 1–5, 2011.

POLLI, J. G. *Notação de Dirac*. 2020. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=rZHXREnWc2o&list=PLPzErRoXFRYZ9ijxFKrzQMhdfy9P3JsGe⟩.

unesp

Referências II

SILVA, W. J. N. da. *Uma introdução à Computação Quântica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018.