Circuitos digitais

André Furlan - andre.furlan@unesp.br

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

2024

unesp

Sistema binário, álgebra de Boole e lógica

unesp

Números binários

Vantagens

- Dois estados (mais difícil deteriorar)
- Discretos
- Manipulação algébrica (álgebra de Boole)

Mundo ideal: Junção do analógico com o digital

Desantagens

- Dois estados em oposição a infinitos estados
- Discretos em oposição a contínuo

unesp

Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos $d \in D = \{d_0, \ldots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^{n} d_i.B^{n-i} \qquad (1)$$

Sendo $||$ o operador de cardinalidade então $n = |D| - 1$

Por exemplo, para o número **decimal** 249:

$B = 10$

$D = \{2, 4, 9\} \implies |D| = 3 \implies n = 2$

$$V(10) = \sum_{i=0}^{2} d_i.10^{2-i} =$$

$$d_0.10^{2-0} + d_1.10^{2-1} + d_2.10^{2-2} = \qquad (2)$$

$$2.10^2 + 4.10^1 + 9.10^0 =$$

$$\boxed{2.100 + 4.10 + 9.1 = 249}$$

unesp

Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos $d \in D = \{d_0, \ldots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^{n} d_i . B^{n-i} \qquad (1)$$

Sendo $||$ o operador de cardinalidade então $n = |D| - 1$

Por exemplo, para o número **binário** 11:

$B = 2$

$D = \{1, 1\} \implies |D| = 2 \implies n = 1$

$$V(2) = \sum_{i=0}^{1} d_i . 2^{1-i} =$$

$$d_0 . 2^{1-0} + d_1 . 2^{1-1} = \qquad (2)$$

$$1.2^1 + 1.2^0 =$$

$$\boxed{2 + 1 = 3}$$

unesp

Circuitos lógicos e algébra Booleana

Antes de avançarmos no estudo e na representação de circuitos lógicos, vamos entender como os estados de "ligado" e "desligado" dos componentes podem ser utilizados para gerar resultados úteis. Portanto, antes de abordarmos esses tópicos, faremos uma imersão na álgebra booleana, explorando tabelas verdade e formas de composição.

unesp

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

AND denotado como **.** ou $\wedge$

O operador **AND** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$
\begin{aligned}
&AND(a,b) = a.b \\
&AND(a,b) = 1, \forall a = b = 1 \\
&AND(a,b) = 0, \forall a \neq b
\end{aligned}
\tag{3}
$$

a	b	a . b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela: Tabela verdade para **AND**.

unesp

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

OR denotado com $+$ ou $\vee$

O operador **OR** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$
\begin{aligned}
&OR(a,b) = a + b \\
&OR(a,b) = 0, \forall a = b = 0 \\
&OR(a,b) = 1, \forall a \neq b, a = b = 1
\end{aligned}
\tag{3}
$$

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela: Tabela verdade para **OR**.

unesp

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

NOT denotado com $\overline{a}$ ou $\neg a$

O operador **NOT** é uma função de 1 variável definida como:

$$\begin{aligned} &NOT(a) = \overline{a} \\ &NOT(a) = 0, \forall a = 1 \\ &NOT(a) = 1, \forall a = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Tabela: Tabela verdade para **NOT**.

unesp

Álgebra de Boole: Composição de de operadores

É importante destacar que assim com na álgebra tradicional os operadores tem prioridade no momento de sua aplicação na seguinte ordem: **NOT**, **AND** e por fim **OR**. Se usarmos os sinais as regras ficam bem parecidas com a álgebra tradicional: $\overline{a}$, . e $+$.

A partir dos operadores apresentados vamos brincar um pouquinho com eles:

$$(a + b).c \qquad (4)$$

a	b	c	a+b	$a + b$. c
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabela: Tabela verdade para **(a + b) . c**.

unesp

Álgebra de Boole: Composição de operadores NAND e NOR

Alguns operadores comuns são compostos:

O operador **NAND** (NOT AND) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

a	b	a . b	$\overline{a.b}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabela: Tabela verdade para **NAND**.

O operador **NOR** (NOT OR) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

a	b	a + b	$\overline{a+b}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Tabela: Tabela verdade para **NOR**.

unesp

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Uma expressão boleana equivalente é aquela que, dada uma mesma entrada, retorna exatamente o mesmo resultado. Expressões boleanas equivalentes podem ser ou não a versão otimizada uma da outra.

O que foi dito acima só é possível se alguns **axiomas**[1] forem definidos.
A partir desses axiomas podemos definir **teoremas**[2].

Veremos ambos no próximo slide.

[1] hipóteses básicas ou pré-supostos baseados na experiência empírica ou filosófica
[2] Teoremas são proposições demonstráveis a partir dos axiomas

unesp

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Axiomas e teoremas

Axiomas:

1. $0.0 = 0$
2. $1.1 = 1$
3. $0.1 = 1.0 = 0$
4. $1 + 1 = 1$
5. $0 + 0 = 0$
6. $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
7. $x = 0 \implies \overline{x} = 1$
8. $x = 1 \implies \overline{x} = 0$

Teoremas para AND

1. $x.0 = 0$
2. $x.1 = x$
3. $x.x = x$
4. $x.\overline{x} = 0$

Teoremas para OR

1. $x + 1 = 1$
2. $x + 0 = x$
3. $x + x = x$
4. $x + \overline{x} = 1$

Teorema para NOT

1. $\overline{(\overline{x})} = x$

unesp

Dada uma expressão lógica que expressa uma igualdade então é possível criar uma **expressão dual** na qual a igualdade continua verdadeira.

Uma expressão dual é obtida quando se troca os valores de 0 para 1, de 1 para 0 e os operadores de and para or e de or para and. Perceba que **o resultado da expressão pode mudar** porém a **igualdade é preservada**.

Voltando ao slide 10 você perceberá que os teoremas para *OR* são **dualidades de uma variável** dos teoremas de *AND* e vice-versa.

$$x.y = y.x \Leftrightarrow x + y = y + x \text{ comutacao}$$
$$x + (x.y) = x \Leftrightarrow x.(x + y) = x \text{ absorcao}$$
$$(x.y) + (x.\overline{y}) = x \Leftrightarrow (x + y).(x + \overline{y}) = x \text{ combinacao} \quad (5)$$
$$\boxed{\text{Teorema de De Morgan: } \overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}} \Leftrightarrow \overline{(x + y)} = \overline{x}.\overline{y}$$
$$x + (\overline{x}.y) = x + y \Leftrightarrow x.(\overline{x} + y) = x.y$$

$$
\begin{aligned}
x.(y.z) = (x.y).z \Leftrightarrow x + (y + z) = (x + y) + z \text{ associação} \\
x.(y + z) = (x.y) + (x.z) \Leftrightarrow x + (y.z) = (x + y).(x + z) \text{ distribuição} \\
(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z) = (x.y) + (\overline{x}.z) \Leftrightarrow (x + y).(y + z).(\overline{x} + z) = (x + y).(\overline{x} + z) \\
\text{consenso (sumiço :D)}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Em tempo: Eu sei que em alguns lugares tem parenteses sobrando, isso foi intencional pra facilitar a visualização das relações.

unesp

Teorema de D.Morgan

Tabela: Prova exaustiva do teorema de De Morgan: $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$

x	y	$x.y$	$\overline{x.y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Tabela: Prova exaustiva para o dual do teorema de De Morgan: $\overline{(x + y)} = \overline{x}.\overline{y}$

x	y	$x + y$	$\overline{x + y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}.\overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

unesp

Provas de expressões na álgebra de Boole

- indução perfeita: Devido a pequena quantidade de valores possíveis (0 ou 1) geralmente é viável provar as igualdades dessa forma. A indução perfeita (prova exaustiva) se dá ao fazer a tabela verdade da igualdade, verificando se os valores literais realmente coincidem. Quando a expressão começa a ter muitas variáveis e/ou se tornar muito grande, esse método pode se tornar inviável devido a grande quantidade de estados possíveis que o sistema pode ter.
- manipulação algébrica: Levando em consideração os axiomas e teoremas é possível manipular as igualdades de forma que a igualdade seja provada.
- diagrama de Ven: *Nos próximos capítulos*.

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Se interpretarmos **AND** ou **.** como $\cap$ e **OR** ou **+** como $\cup$ é possível fazer a prova de uma igualdade usando o diagrama de Venn.

Para começar, uma dica interessante é representar as relações do espaço para identificar cada uma das regiões de acordo com a expressão avaliada.

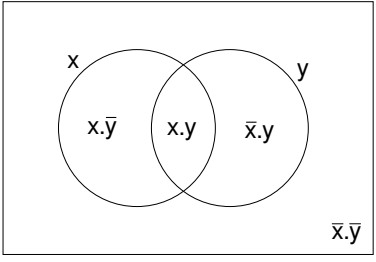


Figura: Relações de um espaço com duas variáveis

A partir disso é possível escrever outras relações:

$$\begin{aligned} (x.\overline{y}) + (x.y) &= x \\ (\overline{x}.y) + (x.y) &= y \\ (x.\overline{y}) + (x.y) + (\overline{x}.y) &= x + y \end{aligned} \tag{7}$$

unesp

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos o do teorema de DeMorgan: $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$

Lado esquerdo da igualdade.

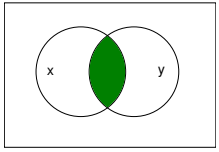


Figura: $(x.y)$

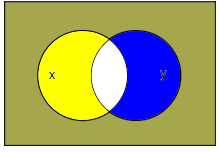
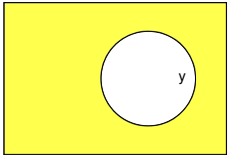


Figura: $\overline{(x.y)}$

Lado direito da igualdade.



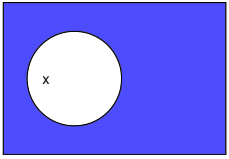


Figura: $\overline{x}$ e $\overline{y}$

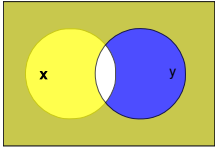


Figura: $\overline{x} + \overline{y}$

unesp

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos $(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z) = (x.y) + (\overline{x}.z) \Leftrightarrow$
$(x + y).(y + z).(\overline{x} + z) = (x + y).(\overline{x} + z)$ consenso (sumiço :D)

Lado esquerdo da igualdade.

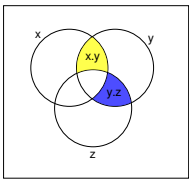


Figura: $(x.y) + (y.z)$

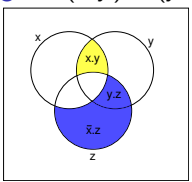


Figura: $(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z)$

Lado direito da igualdade.

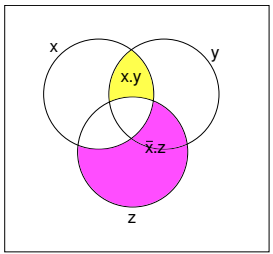


Figura: $(x.y) + (\overline{x}.z)$

unesp

Short test

A partir dos teoremas e propriedades apresentados mostre que $(x + y).(x + z) = x + y.z$. Indique quais os teoremas e/ou propriedades usados na solução.

Crie dualidades para

- 0.0
- 1.1
- $x = 0 \implies \overline{x} = 0$

Exercícios

A partir dos teoremas e propriedades apresentados mostre que $(x + y).(x + z) = x + y.z$. Indique quais os teoremas e/ou propriedades usados na solução.

unesp

Exercícios

Crie a tabela verdade para a porta lógica AND.
Crie a tabela verdade para a porta lógica OR.
Crie a tabela verdade para a porta lógica NOT.

unesp

Exercícios

Dada a tabela verdade a seguir, construa a expressão lógica correspondente:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercícios

Dada a expressão lógica $F = A \cdot \overline{B}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

unesp

Exercícios

Dada a expressão lógica $F = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$, construa a tabela verdade correspondente.

unesp

Circuitos

Até agora, revisamos a lógica, as tabelas-verdade e a álgebra booleana. No entanto, ainda não abordamos os circuitos digitais propriamente ditos. A partir de agora, exploraremos a correlação entre as expressões lógicas da álgebra booleana e o projeto de circuitos elétricos.

unesp

A chave binária é um componente que permite ou impede a passagem da corrente elétrica dado seus estado. A partir dela criaremos circuitos mais complexos.

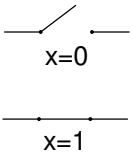


Figura: Chave binária

A chave binária pode ser representada de outra forma:

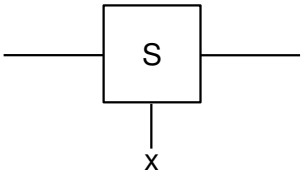


Figura: Chave binária

unesp

Agora considere uma função que depende um argumento x para definir seu estado. Tal função pode ser representada no circuito abaixo:

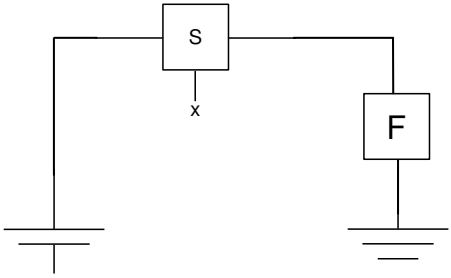


Figura: Função lógica de uma variável. No circuito F pode ser ligada a qualquer elemento de saída com um led ou outro circuito.

$F = 1 \forall x = 1$
$F = 0 \forall x = 0$
Portanto F é uma função lógica de **uma** variável tal que $F(x) = x$

A partir de agora é possível construir circuitos mais complexos como **OR** e **AND**.

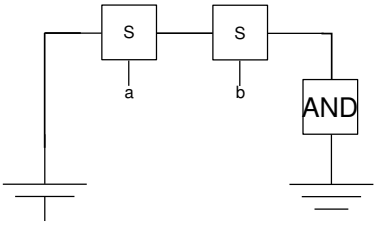


Figura: Circuito **AND**: *a* e *b* são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a *n* entradas.

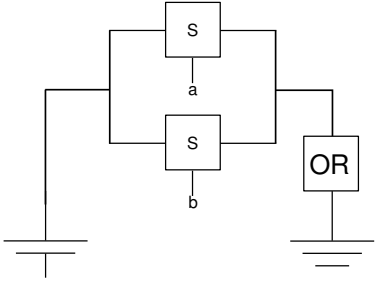


Figura: Circuito **OR**: *a* e *b* são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a *n* entradas.

unesp

Circuito **NOT**

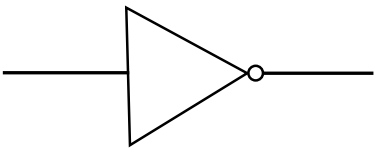


Figura: Circuito **NOT**: Inverte a entrada *a*.

Nada aqui por questões estéticas...

E assim como vimos na álgebra de Boole **OR** e **AND** podem ser combinados.

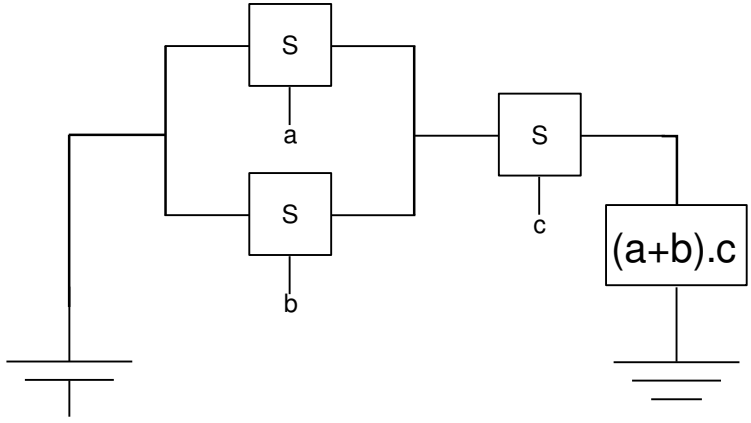


Figura: O **OR** recebe as entradas *a* e *b*, o circuito **AND** recebe *c* e a saída de **OR**

Circuitos combinacionais

Para representar circuitos simples os símbolos já vistos são suficientes, porém, quando a complexidade aumenta pode ficar beeeeeemmmm complicado entender o que se passa. Então precisamos aumentar o nível de abstração encapsulando esse componentes.

unesp

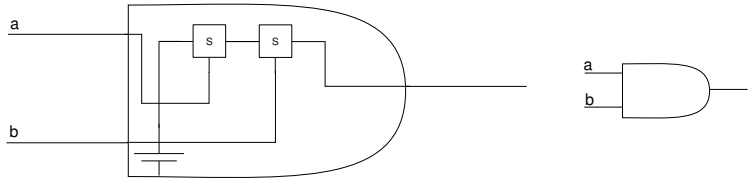


Figura: Abstração de circuito **AND** para a porta **AND**

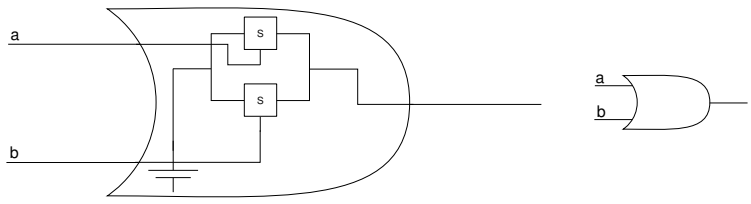


Figura: Abstração de circuito **OR** para a porta **OR**

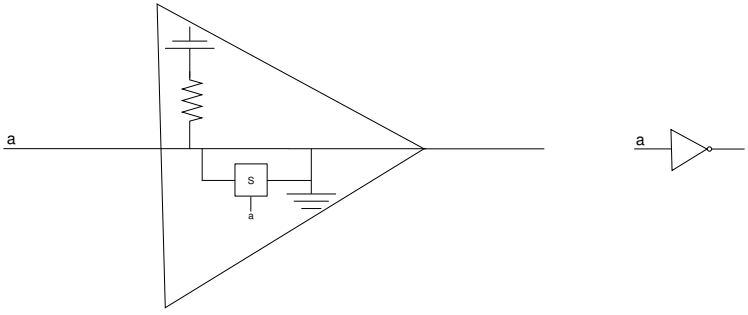


Figura: Abstração de circuito **NOT** para a porta **NOT**

Veja como fica o circuito $(a + b).c$ com as novas abstrações.

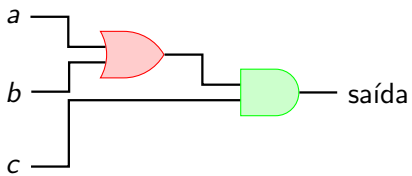


Figura: Circuito correspondente a expressão lógica (a+b).c

Exercícios

Dada a expressão lógica $F = A \cdot \overline{B}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

unesp

Exercícios

Dada a expressão lógica $F = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$, construa a tabela verdade correspondente.

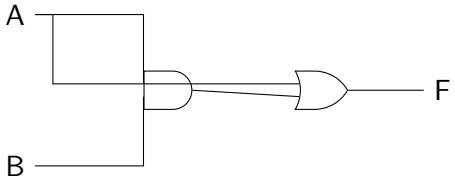
unesp

Exercícios

Dada a expressão lógica $F = (A \cdot B + \overline{C}) \cdot (A + C)$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

Exercícios

Construa a expressão lógica a partir do seguinte circuito combinacional:



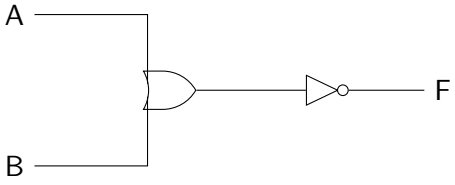
Exercícios

Dada a expressão lógica $F = A + B \cdot \overline{C}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

unesp

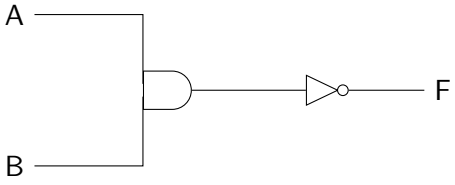
Exercícios

Identifique as portas lógicas utilizadas no seguinte circuito combinacional:



Exercícios

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a tabela verdade correspondente:



Exercícios

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade correspondente: