

Circuitos digitais

André Furlan - andre.furlan@unesp.br

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

2024

Sistema binário, álgebra de Boole e lógica

Vantagens

- ▶ Dois estados (mais difícil deteriorar)
- ▶ Discretos
- ▶ Manipulação algébrica (álgebra de Boole)

Mundo ideal: Junção do analógico com o digital

Desvantagens

- ▶ Dois estados em oposição a infinitos estados
- ▶ Discretos em oposição a contínuo

Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos

$d \in D = \{d_0, \dots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot B^{n-i} \quad (1)$$

Sendo $||$ o operador de cardinalidade então $n = |D| - 1$

Por exemplo, para o número **decimal** 249:

$$B = 10$$

$$D = \{2, 4, 9\} \implies |D| = 3 \implies n = 2$$

$$\begin{aligned} V(10) &= \sum_{i=0}^2 d_i \cdot 10^{2-i} = \\ d_0 \cdot 10^{2-0} + d_1 \cdot 10^{2-1} + d_2 \cdot 10^{2-2} &= \quad (2) \\ 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 &= \\ \boxed{2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1 = 249} \end{aligned}$$

Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos

$d \in D = \{d_0, \dots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot B^{n-i} \quad (1)$$

Sendo $||$ o operador de cardinalidade então $n = |D| - 1$

Por exemplo, para o número **binário** 11:

$$B = 2$$

$$D = \{1, 1\} \implies |D| = 2 \implies n = 1$$

$$\begin{aligned} V(2) &= \sum_{i=0}^1 d_i \cdot 2^{1-i} = \\ d_0 \cdot 2^{1-0} + d_1 \cdot 2^{1-1} &= \\ 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= \\ \boxed{2 + 1 = 3} \end{aligned} \quad (2)$$

Antes de avançarmos no estudo e na representação de circuitos lógicos, vamos entender como os estados de "ligado" e "desligado" dos componentes podem ser utilizados para gerar resultados úteis. Portanto, antes de abordarmos esses tópicos, faremos uma imersão na álgebra booleana, explorando tabelas verdade e formas de composição.

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

AND denotado como $.$ ou \wedge

O operador **AND** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$AND(a, b) = a.b$$

$$AND(a, b) = 1, \forall a = b = 1 \quad (3)$$

$$AND(a, b) = 0, \forall a \neq b$$

| a | b | a . b |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade para **AND**.

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

OR denotado com $+$ ou \vee

O operador **OR** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$OR(a, b) = a + b$$

$$OR(a, b) = 0, \forall a = b = 0 \quad (3)$$

$$OR(a, b) = 1, \forall a \neq b, a = b = 1$$

| a | b | a + b |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade para **OR**.

Álgebra de Boole: Operadores **AND**, **OR** e **NOT**

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

NOT denotado com \bar{a} ou $\neg a$

O operador **NOT** é uma função de 1 variável definida como:

$$\begin{aligned} NOT(a) &= \bar{a} \\ NOT(a) &= 0, \forall a = 1 \\ NOT(a) &= 1, \forall a = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

| a | \bar{a} |
|-----|-----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Tabela: Tabela verdade para **NOT**.

Álgebra de Boole: Composição de operadores

É importante destacar que assim com na álgebra tradicional os operadores tem prioridade no momento de sua aplicação na seguinte ordem: **NOT**, **AND** e por fim **OR**. Se usarmos os sinais as regras ficam bem parecidas com a álgebra tradicional: \bar{a} , $.$ e $+$.

A partir dos operadores apresentados vamos brincar um pouquinho com eles:

$$(a + b).c \quad (4)$$

| a | b | c | $a+b$ | $a + b . c$ |
|---|---|---|-------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade para $(a + b) . c$.

Álgebra de Boole: Composição de operadores NAND e NOR

Alguns operadores comuns são compostos:

O operador **NAND** (NOT AND) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

| a | b | $a \cdot b$ | $\overline{a \cdot b}$ |
|---|---|-------------|------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabela: Tabela verdade para **NAND**.

O operador **NOR** (NOT OR) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

| a | b | $a + b$ | $\overline{a + b}$ |
|---|---|---------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabela: Tabela verdade para **NOR**.

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Uma expressão booleana equivalente é aquela que, dada uma mesma entrada, retorna exatamente o mesmo resultado. Expressões booleanas equivalentes podem ser ou não a versão otimizada uma da outra.

O que foi dito acima só é possível se alguns **axiomas**¹ forem definidos. A partir desses axiomas podemos definir **teoremas**².

Veremos ambos no próximo slide.

¹hipóteses básicas ou pré-supostos baseados na experiência empírica ou filosófica

²Teoremas são proposições demonstráveis a partir dos axiomas

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Axiomas e teoremas

Axiomas:

1. $0.0 = 0$
2. $1.1 = 1$
3. $0.1 = 1.0 = 0$
4. $1 + 1 = 1$
5. $0 + 0 = 0$
6. $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
7. $x = 0 \implies \bar{x} = 1$
8. $x = 1 \implies \bar{x} = 0$

Teoremas para AND

1. $x.0 = 0$
2. $x.1 = x$
3. $x.x = x$
4. $x.\bar{x} = 0$

Teoremas para OR

1. $x + 1 = 1$
2. $x + 0 = x$
3. $x + x = x$
4. $x + \bar{x} = 1$

Teorema para NOT

1. $\overline{(\bar{x})} = x$

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Princípio da dualidade

Dada uma expressão lógica que expressa uma igualdade então é possível criar uma **expressão dual** na qual a igualdade continua verdadeira.

Uma expressão dual é obtida quando se troca os valores de 0 para 1, de 1 para 0 e os operadores de and para or e de or para and. Perceba que **o resultado da expressão pode mudar** porém a **igualdade é preservada**.

Voltando ao slide 10 você perceberá que os teoremas para *OR* são **dualidades de uma variável** dos teoremas de *AND* e vice-versa.

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Dualidade de duas variáveis

$$x.y = y.x \Leftrightarrow x + y = y + x \text{ comutacao}$$

$$x + (x.y) = x \Leftrightarrow x.(x + y) = x \text{ absorcao}$$

$$(x.y) + (x.\bar{y}) = x \Leftrightarrow (x + y).(x + \bar{y}) = x \text{ combinacao} \quad (5)$$

| |
|---|
| Teorema de De Morgan: $\overline{(x.y)} = \bar{x} + \bar{y} \Leftrightarrow \overline{(x + y)} = \bar{x}.\bar{y}$ |
|---|

$$x + (\bar{x}.y) = x + y \Leftrightarrow x.(\bar{x} + y) = x.y$$

Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Dualidade de três variáveis

$$x.(y.z) = (x.y).z \Leftrightarrow x + (y + z) = (x + y) + z \text{ associação}$$

$$x.(y + z) = (x.y) + (x.z) \Leftrightarrow x + (y.z) = (x + y).(x + z) \text{ distribuição}$$

$$(x.y) + (y.z) + (\bar{x}.z) = (x.y) + (\bar{x}.z) \Leftrightarrow (x + y).(y + z).(\bar{x} + z) = (x + y).(\bar{x} + z)$$

consenso (sumiço :D)

(6)

Em tempo: Eu sei que em alguns lugares tem parenteses sobrando, isso foi intencional pra facilitar a visualização das relações.

Teorema de D.Morgan

Tabela: Prova exaustiva do teorema de De Morgan: $\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$

| x | y | $x \cdot y$ | $\overline{x \cdot y}$ | \bar{x} | \bar{y} | $\bar{x} + \bar{y}$ |
|-----|-----|-------------|------------------------|-----------|-----------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela: Prova exaustiva para o dual do teorema de De Morgan: $\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

| x | y | $x + y$ | $\overline{x + y}$ | \bar{x} | \bar{y} | $\bar{x} \cdot \bar{y}$ |
|-----|-----|---------|--------------------|-----------|-----------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Provas de expressões na álgebra de Boole

- ▶ indução perfeita: Devido a pequena quantidade de valores possíveis (0 ou 1) geralmente é viável provar as igualdades dessa forma. A indução perfeita (prova exaustiva) se dá ao fazer a tabela verdade da igualdade, verificando se os valores literais realmente coincidem. Quando a expressão começa a ter muitas variáveis e/ou se tornar muito grande, esse método pode se tornar inviável devido a grande quantidade de estados possíveis que o sistema pode ter.
- ▶ manipulação algébrica: Levando em consideração os axiomas e teoremas é possível manipular as igualdades de forma que a igualdade seja provada.
- ▶ diagrama de Ven: *Nos próximos capítulos.*

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Se interpretarmos **AND** ou \cdot como \cap e **OR** ou $+$ como \cup é possível fazer a prova de uma igualdade usando o diagrama de Venn.

Para começar, uma dica interessante é representar as relações do espaço para identificar cada uma das regiões de acordo com a expressão avaliada.

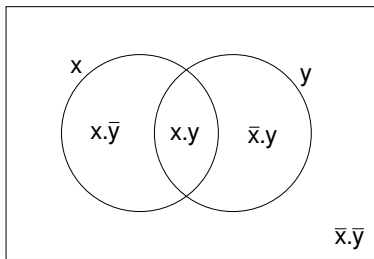


Figura: Relações de um espaço com duas variáveis

A partir disso é possível escrever outras relações:

$$(x.\bar{y}) + (x.y) = x$$

$$(\bar{x}.y) + (x.y) = y \quad (7)$$

$$(x.\bar{y}) + (x.y) + (\bar{x}.y) = x + y$$

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos o do teorema de DeMorgan: $\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$

Lado esquerdo da igualdade.

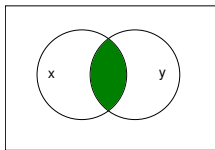


Figura: $(x \cdot y)$

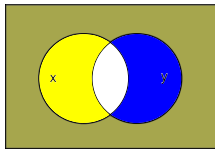


Figura: $\overline{(x \cdot y)}$

Lado direito da igualdade.

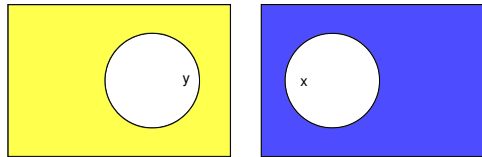


Figura: \bar{x} e \bar{y}

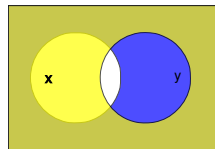


Figura: $\bar{x} + \bar{y}$

Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos $(x.y) + (y.z) + (\bar{x}.z) = (x.y) + (\bar{x}.z) \Leftrightarrow (x + y).(y + z).(\bar{x} + z) = (x + y).(\bar{x} + z)$ consenso (sumiço :D)

Lado esquerdo da igualdade.

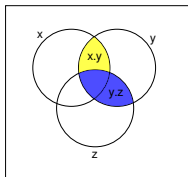


Figura: $(x.y) + (y.z)$

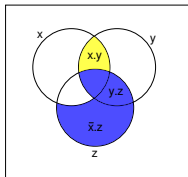


Figura: $(x.y) + (y.z) + (\bar{x}.z)$

Lado direito da igualdade.

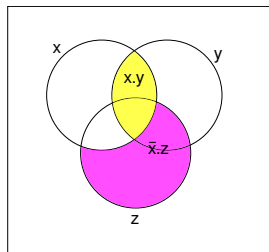


Figura: $(x.y) + (\bar{x}.z)$

A partir dos teoremas e propriedades apresentados mostre que $(x + y).(x + z) = x + y.z$.
Indique quais os teoremas e/ou propriedades usados na solução.

Crie dualidades para

- ▶ 0.0
- ▶ 1.1
- ▶ $x = 0 \implies \bar{x} = 0$

Crie a tabela verdade para a porta lógica AND.

Crie a tabela verdade para a porta lógica OR.

Crie a tabela verdade para a porta lógica NOT.

Dada a tabela verdade a seguir, construa a expressão lógica correspondente:

| A | B | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Dada a expressão lógica $F = A \cdot \overline{B}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

Dada a expressão lógica $F = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$, construa a tabela verdade correspondente.

Circuitos combinacionais

Até agora, revisamos a lógica, as tabelas-verdade e a álgebra booleana. No entanto, ainda não abordamos os circuitos digitais propriamente ditos. A partir de agora, exploraremos a correlação entre as expressões lógicas da álgebra booleana e o projeto de circuitos elétricos.

Circuitos combinacionais

Chave binária

A chave binária é um componente que permite ou impede a passagem da corrente elétrica dado seu estado. A partir dela criaremos circuitos mais complexos.

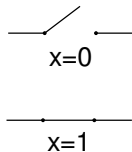


Figura: Chave binária

A chave binária pode ser representada de outra forma:

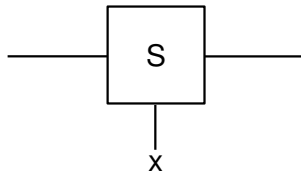
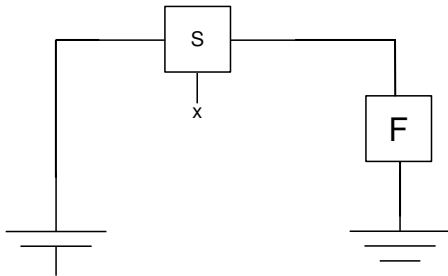


Figura: Chave binária

Circuitos combinacionais

Circuito identidade

Agora considere uma função que depende um argumento x para definir seu estado. Tal função pode ser representada no circuito abaixo:



$$F = 1 \forall x = 1$$

$$F = 0 \forall x = 0$$

Portanto F é uma função lógica de **uma** variável tal que $F(x) = x$

Figura: Função lógica de uma variável. No circuito F pode ser ligada a qualquer elemento de saída com um led ou outro circuito.

Circuitos combinacionais

Circuito OR e AND

A partir de agora é possível construir circuitos mais complexos como **OR** e **AND**.

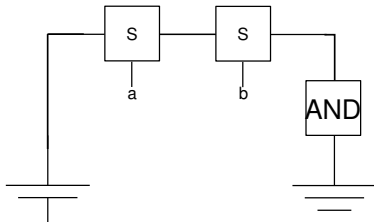


Figura: Circuito **AND**: a e b são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a n entradas.

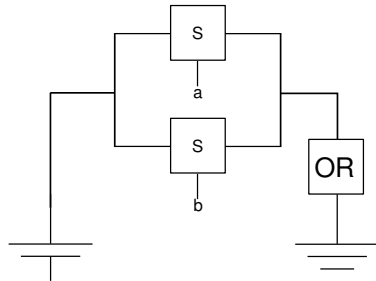


Figura: Circuito **OR**: a e b são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a n entradas.

Circuitos combinacionais

Circuito NOT

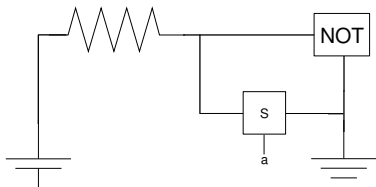


Figura: Circuito **NOT**: Inverte a entrada *a*.

Nada aqui por questões estéticas...

Circuitos combinacionais

E assim como vimos na álgebra de Boole **OR** e **AND** podem ser combinados.

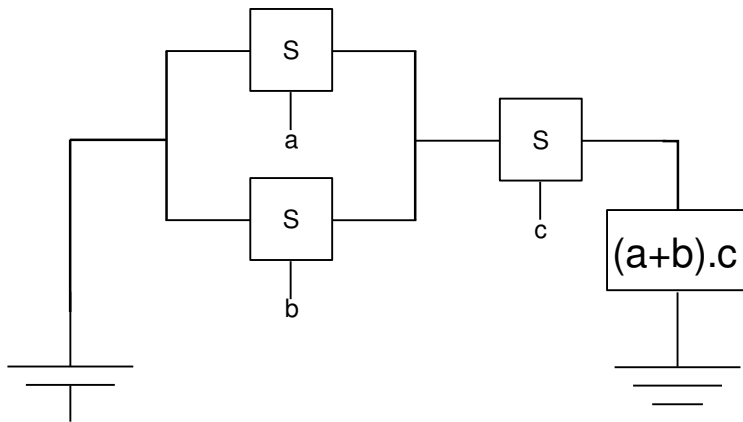


Figura: O **OR** recebe as entradas a e b , o circuito **AND** recebe c e a saída de **OR**

Portas lógicas

Portas lógicas

Aumento da abstração: Definição das portas

Para representar circuitos simples os símbolos já vistos são suficientes, porém, quando a complexidade aumenta pode ficar beeeeeemmmm complicado entender o que se passa. Então precisamos aumentar o nível de abstração encapsulando esse componentes.

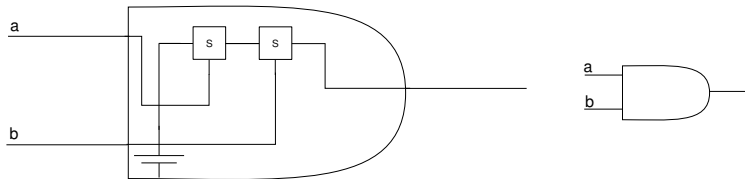


Figura: Abstração de circuito **AND** para a porta **AND**

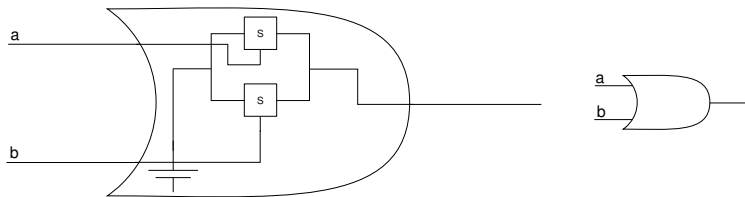


Figura: Abstração de circuito **OR** para a porta **OR**

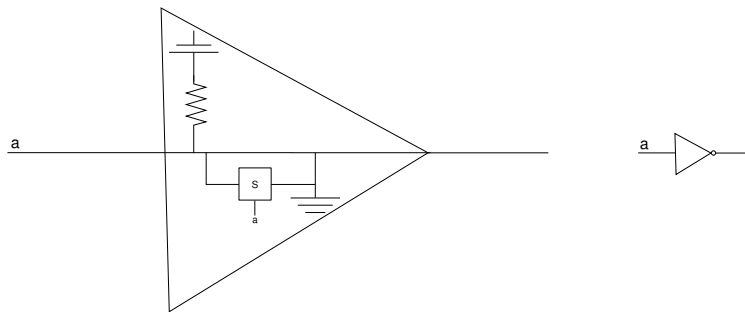


Figura: Abstração de circuito **NOT** para a porta **NOT**

Veja como fica o circuito $(a + b).c$ com as novas abstrações.

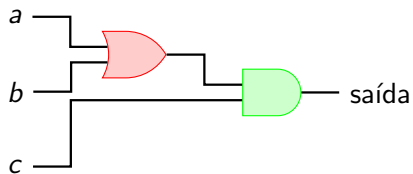


Figura: Circuito correspondente a expressão lógica $(a+b).c$

Portas lógicas

Agora que temos acesso a novos circuitos que foram abstraídos em portas podemos, combinando essas portas, criar outras como a seguir.

XOR: $\bar{a}.b + a.\bar{b} = a \oplus b$

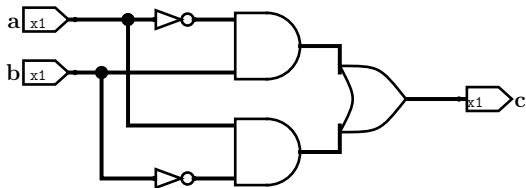


Figura: O circuito da porta XOR

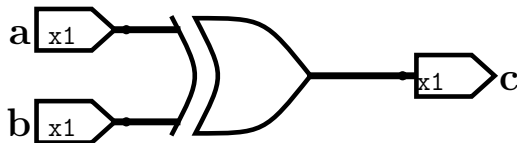


Figura: Porta XOR

Portas lógicas

NOR: $\overline{a + b} = a \downarrow b$

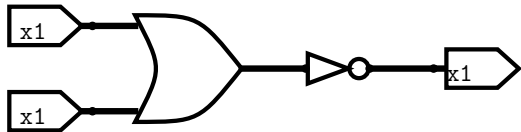


Figura: O circuito da porta NOR

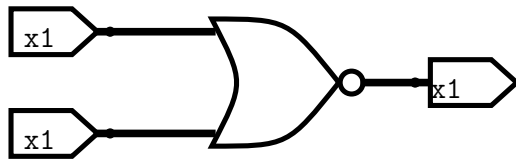


Figura: Porta NOR

NAND: $\overline{a.b} = a \uparrow b$

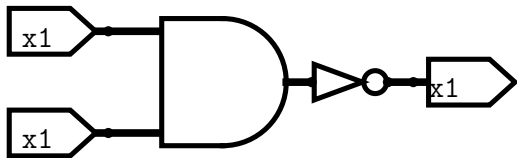


Figura: O circuito da porta NAND

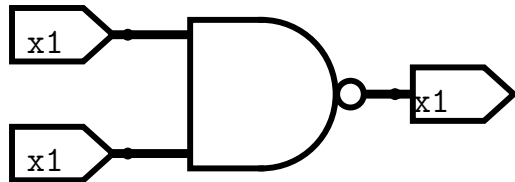
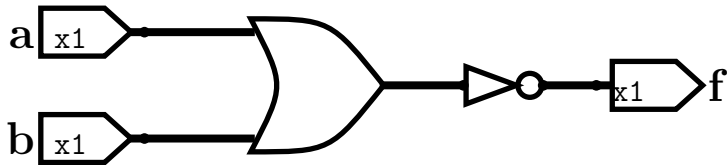


Figura: Porta NAND

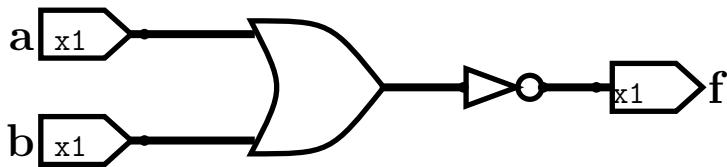
Prática dirigida 01

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:



Prática dirigida 01

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:



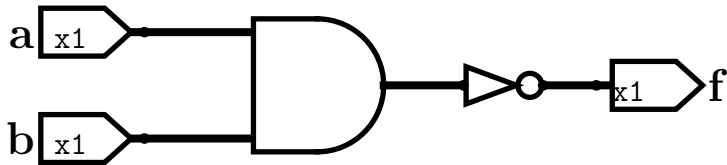
Expressão: $f = \overline{(a + b)}$

Tabela verdade:

| x | y | z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

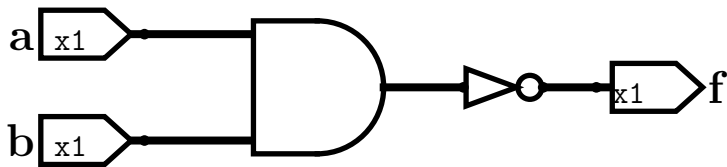
Prática dirigida 02

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:



Prática dirigida 02

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:



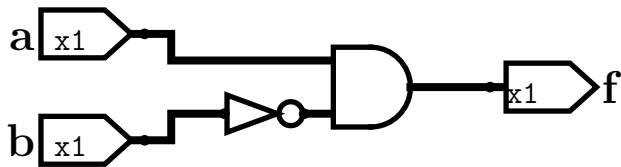
Expressão: $f = \overline{(a.b)}$

Tabela verdade:

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>x</i> |
|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Dada a expressão lógica $f = a \cdot \overline{b}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

Dada a expressão lógica $f = a \cdot \overline{b}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.



Dada a expressão lógica $f = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$, construa a tabela verdade correspondente.

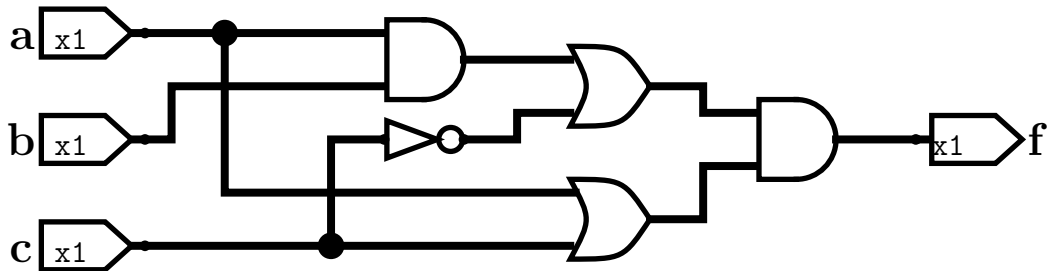
Dada a expressão lógica $f = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$, construa a tabela verdade correspondente.

Tabela verdade:

| a | b | f |
|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

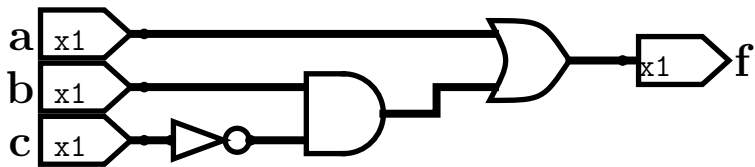
Dada a expressão lógica $f = (a \cdot b + \bar{c}) \cdot (a + c)$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

Dada a expressão lógica $f = (a \cdot b + \bar{c}) \cdot (a + c)$, desenhe o circuito combinacional correspondente.



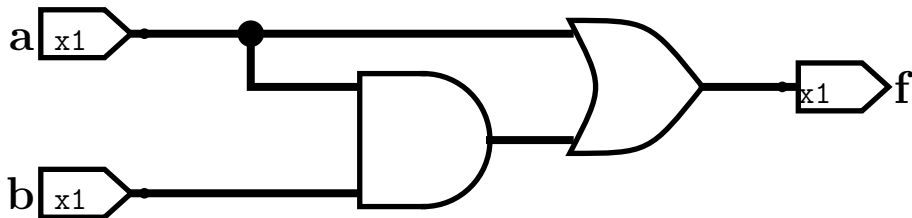
Dada a expressão lógica $f = a + b \cdot \overline{c}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.

Dada a expressão lógica $f = a + b \cdot \bar{c}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.



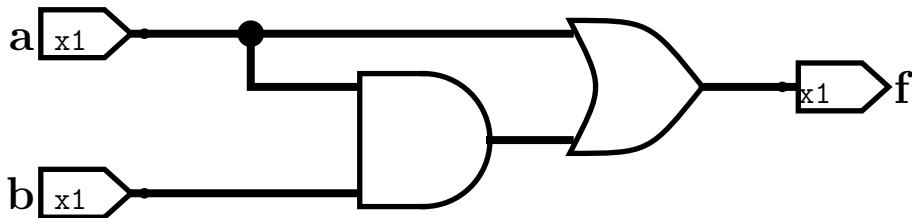
Prática dirigida 07

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade correspondente:



Prática dirigida 07

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade correspondente:



Expressão: $f = a.b + a$

Tabela verdade:

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>f</i> |
|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Diagrama de Tempo (*Waveform*)

Diagrama de Tempo (*Waveform*)

Quando fazemos o diagrama de tempo ou o *waveform* apresentamos ao circuito uma sequência de sinais de forma que o circuito responde a essa sequência gerando outras sequências.

- ▶ Mostra os estados do circuito ao longo do tempo.
- ▶ Permite a visualização do comportamento do circuito durante o tempo.



Figura: Consegue saber qual porta é esta?

Construção de Circuito a partir de Expressão Algébrica

- Dada a expressão algébrica $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} \cdot z$, construa:
1. O circuito correspondente usando portas lógicas básicas (AND, OR, NOT).
 2. A tabela verdade que representa o comportamento da função.
 3. O diagrama de tempo (waveform) que mostra os estados do circuito para todas as combinações de x , y e z ao longo do tempo.

Prática dirigida 01

Construção de Circuito a partir de Expressão Algébrica

- Dada a expressão algébrica $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} \cdot z$, construa:
1. O circuito correspondente usando portas lógicas básicas (AND, OR, NOT).
 2. A tabela verdade que representa o comportamento da função.
 3. O diagrama de tempo (waveform) que mostra os estados do circuito para todas as combinações de x , y e z ao longo do tempo.

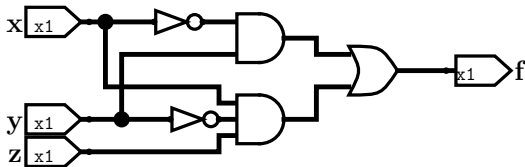
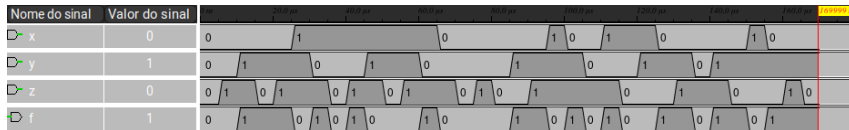
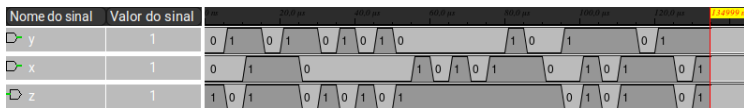


Tabela verdade:

| x | y | z | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |



Análise de Diagrama de Tempo



- Considerando o diagrama dado:
 1. O circuito que pode gerar o comportamento mostrado no diagrama.
 2. A tabela verdade associada ao circuito.
 3. A expressão algébrica correspondente ao circuito.

Mintermos e Maxtermos

Até agora, determinamos as expressões algébricas de forma intuitiva, analisando os circuitos e os resultados das tabelas verdade para, geralmente, identificar a expressão lógica correspondente ao circuito. A partir de agora, utilizaremos ferramentas que oferece um método bem definido para montar a expressão algébrica correspondente ao circuito analisado.

Tais ferramentas se chamam *Mintermos* e *Maxtermos* que, embora não produzam uma expressão otimizada, fornecem uma função inicial que pode ser manipulada e minimizada se assim o desejarmos.

Mintermos e Maxtermos

Definição

- ▶ **Mintermos (Soma de Produtos Canônica (SOP)):** A função é expressa como a soma (OR) das linhas onde a função vale 1.
- ▶ **Maxtermos (Produto de Somas Canônica (POS)):** A função é expressa como o produto (AND) das linhas onde a função vale 0.

Mintermos e Maxtermos

Definição e propriedades da soma de produtos canônica (SOP)

- ▶ A implementação canônica de uma função booleana que seleciona os produtos das variáveis onde o resultado é 1.
- ▶ Propriedades:
 - ▶ Unicidade: Existe uma única SOP canônica para cada função booleana.
 - ▶ Importância: Útil na análise e síntese de circuitos digitais.
 - ▶ Minimização: Pode ser simplificada com Mapas de Karnaugh ou Quine-McCluskey.

Mintermos e Maxtermos

Definição e Propriedades do produto de somas canônica (POS)

- ▶ Forma canônica que seleciona as somas das variáveis onde o resultado é 0.
- ▶ Propriedades:
 - ▶ Unicidade: Existe uma única POS canônica para cada função booleana.
 - ▶ Importância: Utilizada em design digital para implementar lógica com portas OR e AND.
 - ▶ Minimização: Pode ser simplificada como a SOP canônica.

Mintermos e Maxtermos

Exemplo de determinação de função lógica

Vamos determinar a **função lógica** a partir da tabela verdade abaixo:

| a | b | c | $f(a, b, c)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Mintermos e Maxtermos

Determinação da função lógica usando Mintermos

Mintermos: Linhas onde $f(a, b, c) = 1$.

Maxtermos Linhas onde $f(a, b, c) = 0$.

| a | b | c | f(a, b, c) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Passo 1: Identifique as linhas onde $f(a, b, c) = 1$.

- ▶ 02: $a = 0, b = 0, c = 1 \rightarrow$ Mintermo: $\bar{a}.\bar{b}.c$
- ▶ 04: $a = 0, b = 1, c = 1 \rightarrow$ Mintermo: $\bar{a}.b.c$
- ▶ 05: $a = 1, b = 0, c = 0 \rightarrow$ Mintermo: $a\bar{b}.\bar{c}$
- ▶ 06: $a = 1, b = 0, c = 1 \rightarrow$ Mintermo: $a\bar{b}.c$

Passo 2: Escreva a função como a soma (OR) desses mintermos.

A função lógica pode ser expressa como a soma dos mintermos correspondentes:

$$f(a, b, c) = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}$$

Mintermos e Maxtermos

Determinação da função lógica usando Maxtermos

Mintermos: Linhas onde $f(a, b, c) = 1$.

Maxtermos Linhas onde $f(a, b, c) = 0$.

| a | b | c | f(a, b, c) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Passo 1: Identifique as linhas onde $f(a, b, c) = 0$.

- ▶ 01: $a = 0, b = 0, c = 0 \rightarrow$ Maxtermo: $a + b + c$
- ▶ 03: $a = 0, b = 1, c = 0 \rightarrow$ Maxtermo: $a + \bar{b} + c$
- ▶ 07: $a = 1, b = 1, c = 0 \rightarrow$ Maxtermo: $\bar{a} + b + c$
- ▶ 08: $a = 1, b = 1, c = 1 \rightarrow$ Maxtermo: $\bar{a} + b + \bar{c}$

Passo 2: Escreva a função como o produto (AND) desses maxtermos.

A função lógica pode ser expressa como o produto dos maxtermos correspondentes: $f(a, b, c) =$

$$(a + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c})$$

- Considere a função $f(a, b, c)$ definida pela tabela verdade:

| a | b | c | $f(a, b, c)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- **tabela verdade:**

- **Mintermos:**

- $\bar{a}\bar{b}c, \bar{a}bc, a\bar{b}\bar{c}, ab\bar{c}, abc$

- **SOP Canônica:** $f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc$

- Considere a função $f(a, b, c)$ definida pela tabela verdade:

| a | b | c | $f(a, b, c)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- **tabela verdade:**

- **Maxtermos:**

- $(a + b + c), (a + \bar{b} + c), (\bar{a} + b + \bar{c})$

- **POS Canônica:** $f(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c})$

Exercício

Criação de Circuito a partir da tabela verdade

- Dada a seguinte tabela verdade:

| x | y | z | $f(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Construa o circuito digital que implementa essa função.
2. Derive a expressão algébrica na forma de Soma de Produtos Canônica (SOP) a partir da tabela verdade.
3. Crie o diagrama de tempo correspondente ao circuito.

Exercício - Resolução

Selecionando os **mintermos** (Soma de Produtos Canônica)

| x | y | z | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(x, y, z) = (\overline{x}\overline{y}z) + (\overline{x}yz) + (x\overline{y}\overline{z}) + (xyz)$$

Agrupando

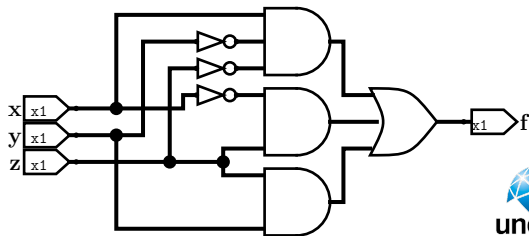
$$(\overline{x}yz) + (xyz) = (yz).(\overline{x} + x) = (yz).1 = \boxed{yz}$$

Agrupando yz com o restante da expressão

$$\boxed{yz} + (\overline{x}\overline{y}z) + (x\overline{y}\overline{z}).$$

Fatorando z : $z.(y + \overline{x}\overline{y}) + (x\overline{y}\overline{z}) =$

$$z.(\overline{x} + y) + (x\overline{y}\overline{z}) = \boxed{\overline{x}z + yz + x\overline{y}\overline{z}}$$



Mini prova 03

► Dado o circuito abaixo, determine:

1. A tabela verdade correspondente ao circuito **não simplificado**.
2. A expressão algébrica **simplificada** que representa a função lógica do circuito.
3. O circuito simplificado.
4. O diagrama de tempo (waveform) que reflete o comportamento do circuito.

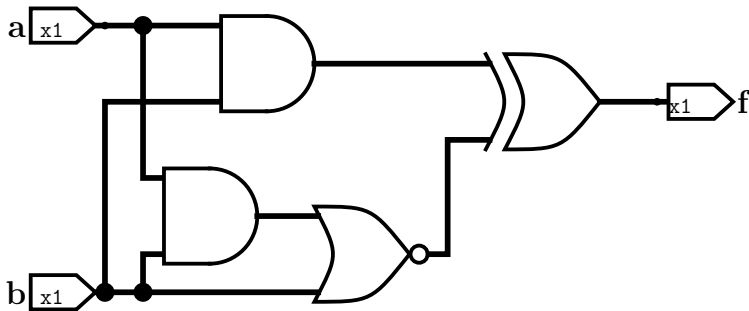


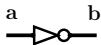
Figura: Passarinho... Resolve esse... Qual é a expressão desse?³

³referência de velho

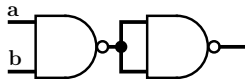
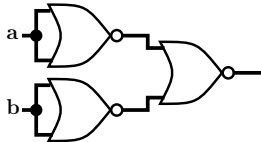
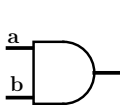
♪All you need is NAND/NOR... ♪

O que fazer se você não tem as portas lógicas que vc precisa

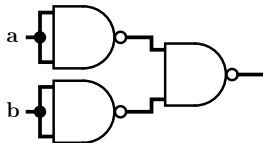
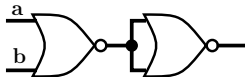
$$\bar{a} = a \downarrow a = a \uparrow a$$



$$a.b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) = (a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b)$$



$$a + b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)$$



O que mídia não quer que você saiba sobre o XOR ⁴

⁴Coringando já...

Equivalências do XOR

Até agora nos foram apresentadas as equivalências das portas AND e OR, porém, muitas vezes nos depararemos com portas XOR. Seria interessante sabermos sua equivalências também:

| a | b | $a \oplus b$ | $\bar{a}b + a\bar{b}$ | $\overline{\bar{a}b + a\bar{b}}$ | \bar{a} | \bar{b} | ab | $\bar{a}b$ | $a\bar{b}$ | $\bar{a}\bar{b}$ |
|---|---|--------------|-----------------------|----------------------------------|-----------|-----------|------|------------|------------|------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tabela: Tabela verdade das equivalências de XOR

$$a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b} = \overline{\bar{a}b + a\bar{b}}$$

Equivalências do XOR - Exercício

Usando a tabela verdade prove que $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ e portanto que XOR é comutativo.

Que idade você tinha ao ficar sabendo que XOR só tem saída verdadeira quando o número de entradas verdadeiras é ímpar??

Bom... Agora vamos fazer algumas coisa legais:
Somadores e subtratores.

Como fazer a soma binária

Expressão de exemplo

Abaixo foi realizada uma operação de soma simples entre dois números binários, a e b, cujo resultado é mostrado na linha marcada com a palavra 'Sum'. ' C_{in} ' e ' C_{out} ' significa 'Carry in' e 'Carry out', o nosso famoso 'Vai um'. A partir deste exemplo, vamos criar uma tabela-verdade que nos permitirá formular a expressão algébrica booleana e, consequentemente, o circuito somador correspondente.

| C_{out} | C_{in} | | | | C_{in} / C_{out} |
|-----------|----------|---|---|--|--------------------|
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | 1 | 0 | | a |
| | 1 | 1 | 1 | | b |
| 1 | 1 | 0 | 1 | | Sum |

Como fazer a soma binária

Tabela verdade da soma

Abaixo, representamos a tabela-verdade da soma binária. O objetivo desta é modelar o comportamento da soma de dois bits. Como vimos na soma binária anterior, quando um bit 1 é somado a outro bit 1, o valor resultante é zero; no entanto, a próxima soma recebe um bit 1 adicional. Esse bit adicional é chamado de 'Carry in' quando é recebido, e de 'Carry out' quando é emitido. O objetivo da tabela-verdade abaixo é representar a soma e o 'Carry out' resultantes da soma de dois bits.

| a | b | Sum | C_{out} |
|---|---|-----|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Tabela: Tabela verdade da soma binária

Como fazer a soma binária

Prática dirigida - Tabela verdade da soma

Como Sum e C_{out} se comportam? O que C_{out} representa em termos de uma soma computacional? Qual o circuito correspondente?

| a | b | Sum | C_{out} |
|---|---|-----|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

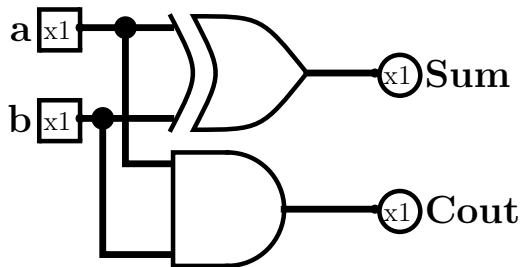
Tabela: Tabela verdade da soma binária

Como fazer a soma binária

Prática dirigida - Tabela verdade da soma

| a | b | Sum | C_{out} | $a \oplus b$ | $a \cdot b$ |
|---|---|-----|-----------|--------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Tabela: Tabela verdade da soma binária

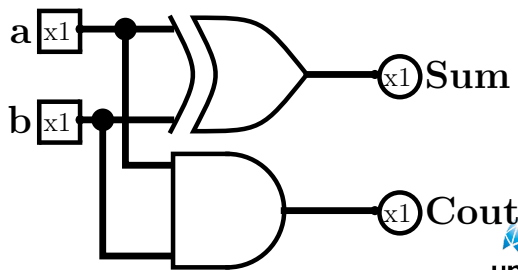


Meio somador / Somador incompleto / Half adder

A tabela-verdade e o circuito mostrados abaixo representam o que chamamos de **meio somador**, **somador incompleto** ou ainda **Half Adder**. O meio somador tem essa denominação porque, apesar de realizar a soma de dois bits, não considera um bit que possa vir para complementar sua operação. Dessa forma, o circuito é capaz de trabalhar apenas com a soma de dois bits, informando se houve um bit C_{out} . Isso impede a criação de somadores para números maiores por meio da concatenação de vários circuitos

| a | b | Sum | C_{out} | $a \oplus b$ | $a \cdot b$ |
|---|---|-----|-----------|--------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Tabela: Tabela verdade da soma binária



Somador completo

Para determinar um somador completo, é necessário considerar não apenas as entradas a e b , mas também uma entrada C_{in} , que representa o possível bit vindo do C_{out} de outro circuito. Dessa forma, o resultado da soma é alterado, o que, por sua vez, modifica a expressão final e o circuito resultante.

| a | b | C_{in} | Sum |
|-----|-----|----------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de um somador completo

Somador completo

Prática guiada

Considerando a tabela verdade mostrada determine a expressão algébrica booleana e o circuito correspondentes.

| a | b | C_{in} | Sum |
|---|---|----------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de C_{in} para somador completo

Somador completo

Prática guiada

Considerando a tabela verdade mostrada determine a expressão algébrica booleana e o circuito correspondentes.

| a | b | C_{in} | Sum |
|---|---|----------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de C_{in} para somador completo

Para facilitar a notação considerando $c = C_{in}$ Temos por *minterms*:

$$\begin{aligned} & (\bar{a}\bar{b}c) + (\bar{a}b\bar{c}) + (a\bar{b}\bar{c}) + (abc) = \\ & \bar{a}.(\bar{b}c + b\bar{c}) + a.(\bar{b}\bar{c} + bc) = \\ & \bar{a}.(b \oplus c) + a.(\overline{b \oplus c}) = \\ & \boxed{a \oplus (b \oplus c)} \end{aligned} \tag{8}$$

Somador completo

Prática guiada

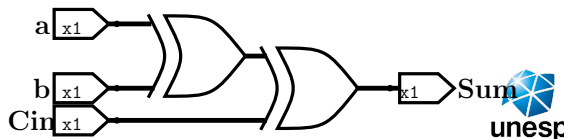
Considerando a tabela verdade mostrada determine a expressão algébrica booleana e o circuito correspondentes.

| a | b | C_{in} | Sum |
|---|---|----------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de C_{in} para somador completo

Para facilitar a notação considerando $c = C_{in}$ Temos por *minterms*:

$$\begin{aligned} &(\bar{a}\bar{b}c) + (\bar{a}b\bar{c}) + (a\bar{b}\bar{c}) + (abc) = \\ &\bar{a}.(\bar{b}c + b\bar{c}) + a.(\bar{b}\bar{c} + bc) = \\ &\bar{a}.(b \oplus c) + a.(\overline{b \oplus c}) = \\ &\boxed{a \oplus (b \oplus c)} \end{aligned} \quad (8)$$



Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | |

Somador completo

Um somador completo deve não apenas receber um C_{in} como também gerar um C_{out} . Portanto, é necessário determinar como o C_{out} é obtido.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de C_{out} para somador completo

Somador completo

Prática dirigida

A partir da tabela-verdade mostrada determine a expressão algébrica booleana correspondente e o respectivo circuito de C_{out} ⁵.

| a | b | C_{in} | C_{out} |
|---|---|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Para facilitar a notação considerando $c = C_{in}$ temos por *mintermos*:

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) = \quad (9)$$

Tabela: Tabela-verdade de C_{out} para somador completo

⁵boa sorte...

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

Somador completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) = \quad (10)$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) = \quad (10)$$

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

$$a.(c + b) + (\bar{a}bc) =$$

$$ac + ab + \bar{a}bc =$$

colocando **b** em evidência:

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

(10)

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

$$a.(c + b) + (\bar{a}bc) =$$

$$ac + ab + \bar{a}bc =$$

colocando **b** em evidência:

$$ac + b.(a + \bar{a}c) =$$

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

$$(\bar{a}bc) + (a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) =$$

reorganizando:

$$(a\bar{b}c) + (ab\bar{c}) + (abc) + (\bar{a}bc) =$$

pondo **a** em evidência:

$$a.(\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (\bar{a}bc) = \quad (10)$$

pondo **c** em evidência

$$a.(c.(\bar{b} + b) + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c.1 + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

$$a.(c + b\bar{c}) + (\bar{a}bc) =$$

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

$$a.(c + b) + (\bar{a}bc) =$$

$$ac + ab + \bar{a}bc =$$

$$\text{colocando } \mathbf{b} \text{ em evidência:} \quad (11)$$

$$ac + b.(a + \bar{a}c) =$$

usando o teorema: $x + \bar{x}y = x + y$

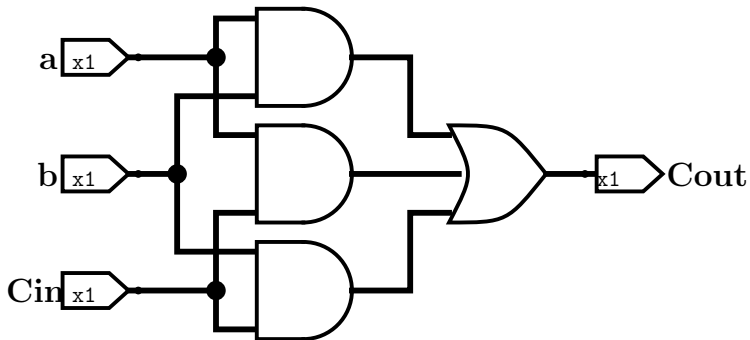
$$ac + b.(a + c) =$$

$$\boxed{ac + ba + bc}$$

Somador completo

Prática dirigida

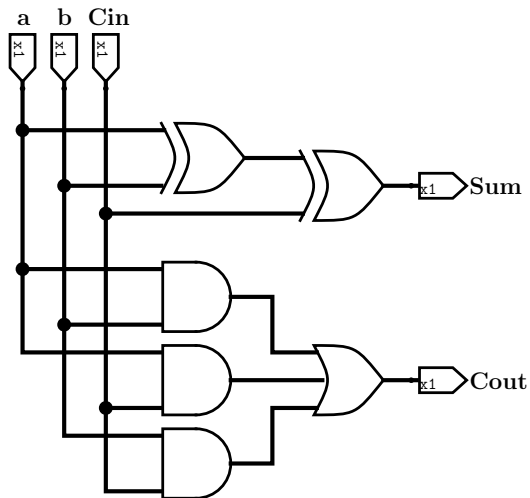
Portanto o circuito do C_{out} fica assim:



Somador completo

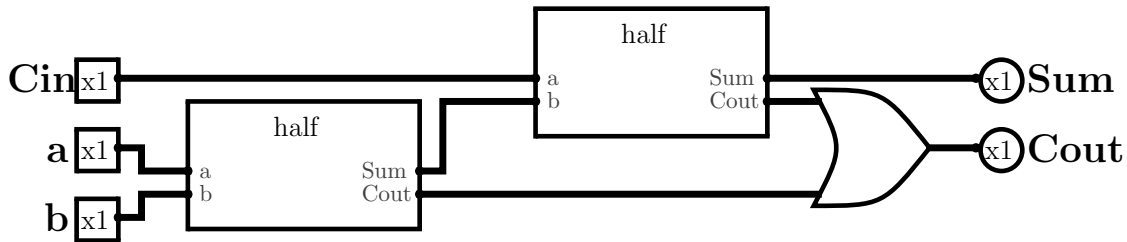
Prática dirigida

Portanto o circuito **somador completo** ou **Full adder** fica assim:



Somador completo - Gambiarra

Usando somadores incompletos podemos fazer um completo:



Subtração binária

Expressão de exemplo

Abaixo foi realizada uma operação de subtração simples entre dois números binários, a e b , cujo resultado é mostrado na linha marcada com a palavra 'Diff'. ' B_{out} ' significa 'Borrow out', o nosso famoso 'emprestar'. A partir deste exemplo, vamos criar uma tabela-verdade que nos permitirá formular a expressão algébrica booleana e, conseqüentemente, o circuito subtrator correspondente.

| | | | | |
|-------|----|----|----|-----------|
| | 10 | 10 | 10 | B_{out} |
| 1 | 1 | 0 | 0 | a |
| | 1 | 1 | 1 | b |
| <hr/> | | | | |
| | 1 | 0 | 1 | Diff |

Meio subtrator / Subtrator incompleto / Half subtractor

A tabela-verdade e o circuito mostrados abaixo representam o que chamamos de **meio subtrator**, **subtrator incompleto** ou ainda **Half subtractor**. O meio subtrator tem essa denominação porque, apesar de realizar a subtração de dois bits, não considera um bit que possa ter sido emprestado por uma operação de subtração anterior. Dessa forma, o circuito é capaz de trabalhar apenas com a subtração de dois bits, informando se houve necessidade de empréstimo de um bit B_{out} . Isso impede a criação de subtratores para números maiores por meio da concatenação de vários circuitos

| a | b | Diff | B_{out} |
|---|---|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Tabela: Tabela verdade da diferença binária

Meio subtrator / Subtrator incompleto / Half subtractor

Prática dirigida - Tabela verdade da subtração

Como $Diff$ e B_{out} se comportam? Qual o circuito correspondente?

| a | b | Diff | B_{out} |
|---|---|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Tabela: Tabela verdade da diferença binária

Meio subtrator / Subtrator incompleto / Half subtractor

Prática dirigida - Tabela verdade da subtração

| a | b | Diff | B_{out} | $a \oplus b$ | $\bar{a}.b$ |
|---|---|------|-----------|--------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

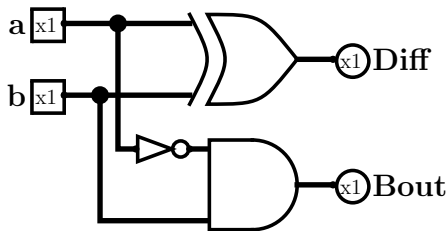
Tabela: Tabela verdade da diferença binária

Meio subtrator / Subtrator incompleto / Half subtractor

Prática dirigida - Tabela verdade da subtração

| a | b | Diff | B_{out} | $a \oplus b$ | $\bar{a}.b$ |
|---|---|------|-----------|--------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela: Tabela verdade da diferença binária



Subtrator completo

Para determinar um subtrator completo, é necessário considerar não apenas as entradas a e b , mas também uma entrada B_{in} , que representa o possível bit subtrator vindo do B_{out} de outro circuito. Dessa forma, o resultado da subtração é alterado, o que, por sua vez, modifica a expressão final e o circuito resultante.

Tenha em mente que $Diff = a - b - B_{in}$.

| a | b | B_{in} | Diff | B_{out} |
|-----|-----|----------|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de um subtrator completo

Subtrator completo

Prática guiada

Considerando a tabela verdade mostrada determine as expressões algébricas booleanas e os circuitos de $Diff$ e B_{out} correspondentes.

| a | b | B_{in} | Diff | B_{out} |
|---|---|----------|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de B_{in} para subtrator completo

Subtrator completo

Prática guiada

Considerando a tabela verdade mostrada determine as expressões algébricas booleanas e os circuitos de $Diff$ e B_{out} correspondentes.

| a | b | B_{in} | Diff | B_{out} |
|---|---|----------|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Se você olhou bem, economizou tempo!

Pois $Diff = a \oplus b \oplus c \therefore$

$$Diff = a \oplus b \oplus B_{in}$$

Tabela: Tabela verdade de B_{in} para subtrator completo

Subtrator completo

Prática guiada

Considerando a tabela verdade mostrada determine as expressões algébricas booleanas e os circuitos de $Diff$ e B_{out} correspondentes.

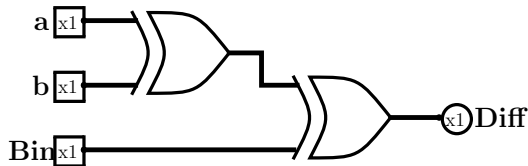
| a | b | B_{in} | Diff | B_{out} |
|---|---|----------|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela: Tabela verdade de B_{in} para subtrator completo

Se você olhou bem, economizou tempo!

Pois $Diff = a \oplus b \oplus c \therefore$

$$Diff = a \oplus b \oplus B_{in}$$



Subtrator completo

Prática dirigida

A partir da tabela-verdade mostrada determine a expressão algébrica booleana correspondente e o respectivo circuito de B_{out} .

| a | b | B_{in} | Diff | B_{out} |
|---|---|----------|------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Para facilitar a notação considerando $c = B_{in}$ temos por *mintermos*:

$$(\bar{a}\bar{b}c) + (\bar{a}b\bar{c}) + (\bar{a}bc) + (abc) \quad (12)$$

Tabela: Tabela-verdade de B_{out} para subtrator completo

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\bar{a}\bar{b}c) + (\bar{a}b\bar{c}) + (\bar{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \bar{a} :

$$\bar{a} \cdot (\bar{b}c + b\bar{c} + bc) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}.(b + c) + (abc) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) = \quad (13)$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}.(b + c) + (abc) =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) = \quad (13)$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}.(b + c) + (abc) =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

fatorando c :

$$\overline{a}b + c.(\overline{a} + ab) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) = \quad (13)$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}.(b + c) + (abc) =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

fatorando c :

$$\overline{a}b + c.(\overline{a} + ab) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}b + c.(\overline{a} + b) =$$

Subtrator completo

Prática dirigida

$$(\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}bc) + (abc) =$$

pondo em evidência \overline{a} :

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b\overline{c} + bc) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.(\overline{c} + c)) + (abc) =$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b.1) + (abc) = \quad (13)$$

$$\overline{a}.(\overline{b}c + b) + (abc) =$$

usando o teorema: $x + \overline{x}y = x + y$

$$\overline{a}.(b + c) + (abc) =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

$$\overline{a}b + \overline{a}c + abc =$$

fatorando c :

$$\overline{a}b + c.(\overline{a} + ab) =$$

$$\text{usando o teorema: } x + \overline{x}y = x + y \quad (14)$$

$$\overline{a}b + c.(\overline{a} + b) =$$

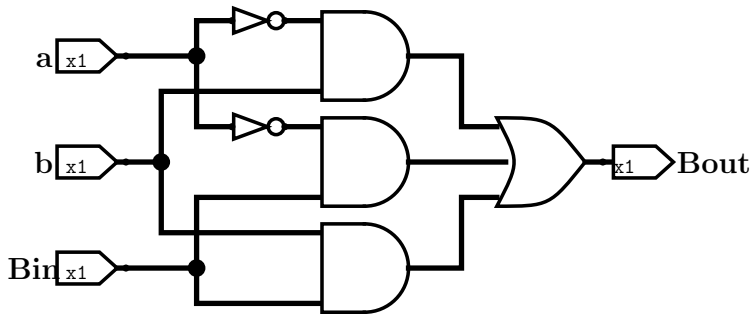
$$\overline{a}b + \overline{a}c + bc \therefore$$

$$B_{out} = \overline{a}b + \overline{a}B_{in} + bB_{in}$$

Subtrator completo

Prática dirigida

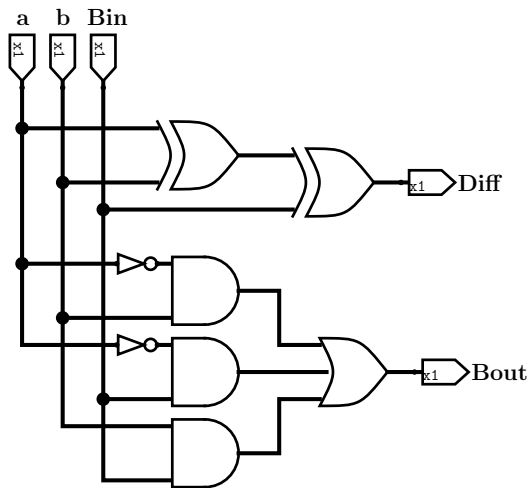
Portanto o circuito do B_{out} fica assim:



Subtrator completo

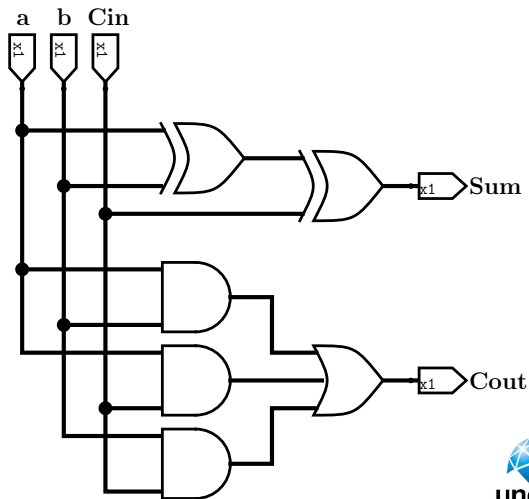
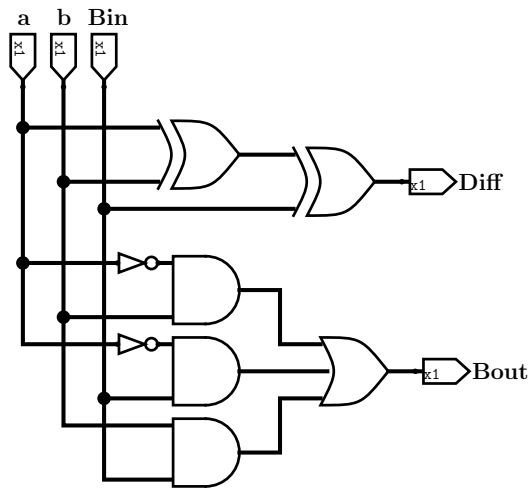
Prática dirigida

Portanto o circuito **subtrator completo** ou **Full subtractor** fica assim:



Mas... mas... *Oh... wait a fucking moment!*

KKKKKKKKK



Somador completo

Demonstração

Vamos fazer um somador completo no logisim.

Altere o circuito somador completo para que o mesmo tenha um modo somador e um modo subtrator.