Circuitos digitais

André Furlan - andre.furlan@unesp.br

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

2024



Sistema binário, álgebra de Boole e lógica



Números binários

Vantagens

- ► Dois estados (mais difícil deteriorar)
- Discretos
- Manipulação algébrica (álgebra de Boole)
 Mundo ideal: Junção do analógico com o digital

Desantagens

- Dois estados em oposição a infinitos estados
- Discretos em oposição a contínuo





Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos $d \in D = \{d_0, \ldots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^{n} d_{i}.B^{n-i}$$
 (1)

Sendo $\mid\mid$ o operador de cardinalidade então n=|D|-1

Por exemplo, para o número decimal 249:

$$B = 10$$

$$D = \{2, 4, 9\} \implies |D| = 3 \implies n = 2$$

2.100 + 4.10 + 9.1 = 249

$$V(10) = \sum_{i=0}^{2} d_i \cdot 10^{2-i} =$$

$$d_0 \cdot 10^{2-0} + d_1 \cdot 10^{2-1} + d_2 \cdot 10^{2-2} = (2)$$

$$2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 =$$





Sistema numérico posicional

Dada a base com uma certa quantidade de elementos B e símbolos $d \in D = \{d_0, \ldots, d_n\}$, então um valor numérico decimal V **posicional** pode ser representado por

$$V(B) = \sum_{i=0}^{n} d_i . B^{n-i}$$
 (1)

Sendo $\mid\mid$ o operador de cardinalidade então n=|D|-1

Por exemplo, para o número binário 11:

$$B = 2$$

 $D = \{1, 1\} \implies |D| = 2 \implies n = 1$

$$V(2) = \sum_{i=0}^{1} d_i \cdot 2^{1-i} =$$

$$d_0 \cdot 2^{1-0} + d_1 \cdot 2^{1-1} =$$

$$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
(2)

$$2 + 1 = 3$$





Circuitos lógicos e algébra Booleana

Antes de avançarmos no estudo e na representação de circuitos lógicos, vamos entender como os estados de "ligado" e "desligado" dos componentes podem ser utilizados para gerar resultados úteis. Portanto, antes de abordarmos esses tópicos, faremos uma imersão na álgebra booleana, explorando tabelas verdade e formas de composição.





Álgebra de Boole: Operadores AND, OR e NOT

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

AND denotado como . ou \land

O operador **AND** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$AND(a, b) = a.b$$

 $AND(a, b) = 1, \forall a = b = 1$ (3)
 $AND(a, b) = 0, \forall a \neq b$

а	b	a . b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela: Tabela verdade para AND.





Álgebra de Boole: Operadores AND, OR e NOT

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

 \mathbf{OR} denotado com + ou \lor

O operador **OR** é uma função de 2 variáveis definida como:

$$OR(a, b) = a + b$$

 $OR(a, b) = 0, \forall a = b = 0$ (3)
 $OR(a, b) = 1, \forall a \neq b, a = b = 1$

b	a+b
0	0
1	1
0	1
1	1
	0

Tabela: Tabela verdade para OR.





Álgebra de Boole: Operadores AND, OR e NOT

Sendo o sistema binário posicional aplica-se a ele muitas das regras as quais podemos aplicar aos números decimais o que nos leva a Álgebra de Boole e seus operadores:

NOT denotado com \overline{a} ou $\neg a$

O operador **NOT** é uma função de 1 variável definida como:

$$NOT(a) = \overline{a}$$

 $NOT(a) = 0, \forall a = 1$
 $NOT(a) = 1, \forall a = 0$ (3)

a	a
0	1
1	0

Tabela: Tabela verdade para NOT.





Álgebra de Boole: Composição de de operadores

É importante destacar que assim com na álgebra tradicional os operadores tem prioridade no momento de sua aplicação na seguinte ordem: **NOT**, **AND** e por fim **OR**. Se usarmos os sinais as regras ficam bem parecidas com a álgebra tradicional: \bar{a} , . e +.

A partir dos operadores apresentados vamos brincar um pouquinho com eles:

$$(a+b).c (4)$$

а	b	С	a+b	a+b . c
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1





Álgebra de Boole: Composição de operadores NAND e NOR

Alguns operadores comuns são compostos:

O operador **NAND** (NOT AND) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

а	b	a . b	a.b
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabela: Tabela verdade para NAND.

O operador **NOR** (NOT OR) é definido segundo a seguinte tabela verdade:

а	b	a + b	$\overline{a+b}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Tabela: Tabela verdade para NOR.





Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Uma expressão boleana equivalente é aquela que, dada uma mesma entrada, retorna exatamente o mesmo resultado. Expressões boleanas equivalentes podem ser ou não a versão otimizada uma da outra.

O que foi dito acima só é possível se alguns axiomas¹ forem definidos.

A partir desses axiomas podemos definir **teoremas**².

Veremos ambos no próximo slide.



¹hipóteses básicas ou pré-supostos baseados na experiência empírica ou filosófica

²Teoremas são proposições demonstráveis a partir dos axiomas

Axiomas:

- 1. 0.0 = 0
- 211 = 1
- 3. 0.1 = 1.0 = 0
- 4. 1+1=1
- 5. 0+0=0
- 6. 1+0=0+1=1
- 7. $x = 0 \implies \overline{x} = 1$
- 8. $x = 1 \implies \overline{x} = 0$

Teoremas para AND

- 1. x.0 = 0
- 2. x.1 = x
- 3. x.x = x
- 4. $x.\overline{x} = 0$

Teoremas para OR

- 1. x + 1 = 1
- 2. x + 0 = x
- 3. x + x = x
- 4. $x + \overline{x} = 1$

Teorema para NOT

1.
$$\overline{(\overline{x})} = x$$



Álgebra de Boole: Expressão booleanas equivalentes

Princípio da dualidade

Dada uma expressão lógica que expressa uma igualdade então é possível criar uma expressão dual na qual a igualdade continua verdadeira.

Uma expressão dual é obtida quando se troca os valores de 0 para 1, de 1 para 0 e os operadores de and para or e de or para and. Perceba que **o resultado da expressão pode mudar** porém a **igualdade é preservada**.

Voltando ao slide 10 você perceberá que os teoremas para *OR* são **dualidades de uma variável** dos teoremas de *AND* e vice-versa.





$$x.y = y.x \Leftrightarrow x + y = y + x \text{ comutacao}$$

$$x + (x.y) = x \Leftrightarrow x.(x + y) = x \text{ absorcao}$$

$$(x.y) + (x.\overline{y}) = x \Leftrightarrow (x + y).(x + \overline{y}) = x \text{ combinacao}$$

$$(5)$$
Teorema de De Morgan: $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y} \Leftrightarrow \overline{(x + y)} = \overline{x}.\overline{y}$

$$x + (\overline{x}.y) = x + y \Leftrightarrow x.(\overline{x} + y) = x.y$$



$$x.(y.z) = (x.y).z \Leftrightarrow x + (y + z) = (x + y) + z \text{ associação}$$

$$x.(y + z) = (x.y) + (x.z) \Leftrightarrow x + (y.z) = (x + y).(x + z) \text{ distribuição}$$

$$(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z) = (x.y) + (\overline{x}.z) \Leftrightarrow (x + y).(y + z).(\overline{x} + z) = (x + y).(\overline{x} + z)$$

$$\text{consenso (sumiço :D)}$$

$$(6)$$

Em tempo: Eu sei que em alguns lugares tem parenteses sobrando, isso foi intencional pra facilitar a visualização das relações.



Teorema de D.Morgan

Tabela: Prova exaustiva do teorema de De Morgan: $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$

X	у	x.y	$\overline{x.y}$	\overline{X}	\overline{y}	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Tabela: Prova exaustiva para o dual do teorema de De Morgan: $\overline{(x+y)} = \overline{x}.\overline{y}$

X	у	x + y	$\overline{x+y}$	\overline{X}	\overline{y}	$\overline{x}.\overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0





Provas de expressões na álgebra de Boole

- Indução perfeita: Devido a pequena quantidade de valores possíveis (0 ou 1) geralmente é viável provar as igualdades dessa forma. A indução perfeita (prova exaustiva) se dá ao fazer a tabela verdade da igualdade, verificando se os valores literais realmente coincidem. Quando a expressão começa a ter muitas variáveis e/ou se tornar muito grande, esse método pode se tornar inviável devido a grande quantidade de estados possíveis que o sistema pode ter.
- manipulação algébrica: Levando em consideração os axiomas e teoremas é possível manipular as igualdades de forma que a igualdade seja provada.
- diagrama de Ven: Nos próximos capítulos.





Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Se interpretarmos **AND** ou . como \cap e **OR** ou + como \cup é possível fazer a prova de uma igualdade usando o diagrama de Venn.

Para começar, uma dica interessante é representar as relações do espaço para identificar cada uma das regiões de acordo com a expressão avaliada.

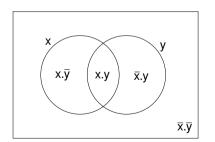


Figura: Relações de um espaço com duas variáveis

A partir disso é possível escrever outras relações:

$$(x.\overline{y}) + (x.y) = x$$

$$(\overline{x}.y) + (x.y) = y$$

$$(x.\overline{y}) + (x.y) + (\overline{x}.y) = x + y$$
(7)





Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos o do teorema de DeMorgan: $\overline{(x.y)} = \overline{x} + \overline{y}$

Lado esquerdo da igualdade.

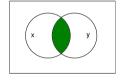


Figura: (x.y)

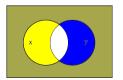
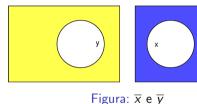
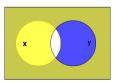


Figura: $\overline{(x.y)}$



Lado direito da igualdade.





Provas de expressões na álgebra de Boole com diagrama de Venn

Como exemplo provaremos
$$(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z) = (x.y) + (\overline{x}.z) \Leftrightarrow (x+y).(y+z).(\overline{x}+z) = (x+y).(\overline{x}+z)$$
 consenso (sumiço :D)

Lado esquerdo da igualdade.

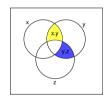


Figura: (x.y) + (y.z)

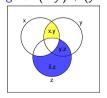


Figura: $(x.y) + (y.z) + (\overline{x}.z)$

Lado direito da igualdade.

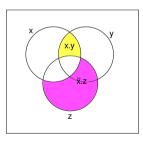


Figura: $(x.y) + (\overline{x}.z)$





Short test

A partir dos teoremas e propriedades apresentados mostre que (x + y).(x + z) = x + y.z. Indique quais os teoremas e/ou propriedades usados na solução.

Crie dualidades para

- ▶ 0.0
- ▶ 1.1
- $x = 0 \implies \overline{x} = 0$



Crie a tabela verdade para a porta lógica AND. Crie a tabela verdade para a porta lógica OR. Crie a tabela verdade para a porta lógica NOT.





Dada a tabela verdade a seguir, construa a expressão lógica correspondente:

Α	В	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Dada a expressão lógica $F = A \cdot \overline{B}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.



Dada a expressão lógica $F = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$, construa a tabela verdade correspondente.



Circuitos

Até agora, revisamos a lógica, as tabelas-verdade e a álgebra booleana. No entanto, ainda não abordamos os circuitos digitais propriamente ditos. A partir de agora, exploraremos a correlação entre as expressões lógicas da álgebra booleana e o projeto de circuitos elétricos.



A chave binária é um componente que permite ou impede a passagem da corrente elétrica dado seus estado. A partir dela criaremos circuitos mais complexos.



Figura: Chave binária

A chave binária pode ser representada de outra forma:

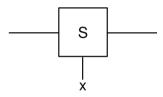


Figura: Chave binária





Agora considere uma função que depende um argumento x para definir seu estado. Tal função pode ser representada no circuito abaixo:

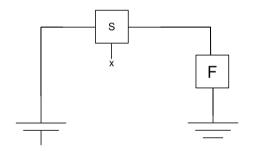


Figura: Função lógica de uma variável. No circuito *F* pode ser ligada a qualquer elemento de saída com um led ou outro circuito.

$$F=1 \forall x=1$$
 $F=0 \forall x=0$ Portanto F é uma função lógica de **uma** variável tal que $F(x)=x$





A partir de agora é possível construir circuitos mais complexos como OR e AND.

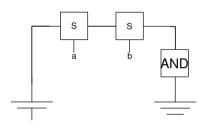


Figura: Circuito **AND**: *a* e *b* são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a *n* entradas.

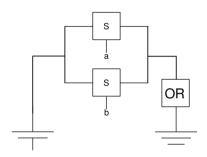


Figura: Circuito **OR**: $a \in b$ são suas entradas. Aqui se pode constatar que este circuito pode receber de 2 a n entradas.

Circuito NOT

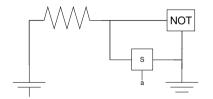


Figura: Circuito **NOT**: Inverte a entrada a.

Nada aqui por questões estéticas...





E assim como vimos na álgebra de Boole **OR** e **AND** podem ser combinados.

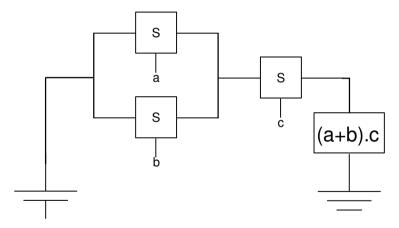


Figura: O \mathbf{OR} recebe as entradas $a \in b$, o circuito \mathbf{AND} recebe $c \in a$ saída de \mathbf{OR}



Para representar circuitos simples os símbolos já vistos são suficientes, porém, quando a complexidade aumenta pode ficar beeeeeemmmm complicado entender o que se passa. Então precisamos aumentar o nível de abstração encapsulando esse componentes.



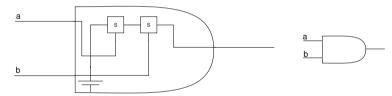


Figura: Abstração de circuito AND para a porta AND



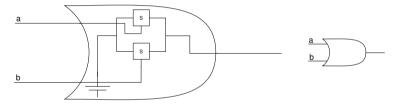


Figura: Abstração de circuito **OR** para a porta **OR**



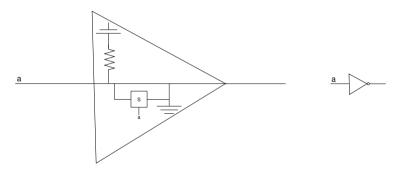


Figura: Abstração de circuito NOT para a porta NOT



Circuitos combinacionais

Veja como fica o circuito (a + b).c com as novas abstrações.

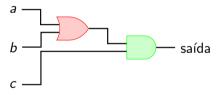
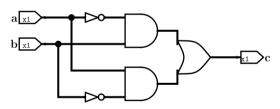


Figura: Circuito correspondente a expressão lógica (a+b).c

Porta XOR

Agora que temos acesso a novos circuitos que foram abstraídos em portas podemos, combinando essas portas, criar novas portas como as estradas a seguir.

XOR:
$$\overline{a}.b + a.\overline{b} = a \oplus b$$





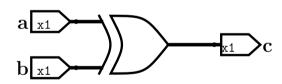


Figura: Porta XOR

Porta NOR

NOR:
$$\overline{a+b} = a \downarrow b$$

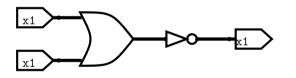


Figura: O circuito da porta NOR

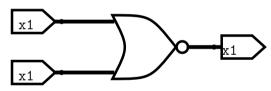


Figura: Porta NOR

Porta NAND

NAND:
$$\overline{a.b} = a \uparrow b$$

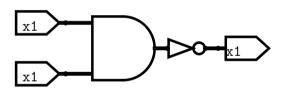


Figura: O circuito da porta NAND

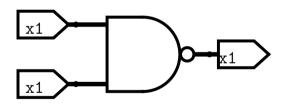
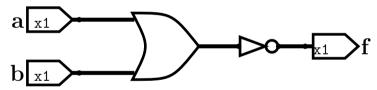


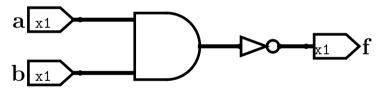
Figura: Porta NAND

Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:





Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade:





- 1. Dada a expressão lógica $f = a \cdot \overline{b}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.
- 2. Dada a expressão lógica $f = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$, construa a tabela verdade correspondente.
- 3. Dada a expressão lógica $f = (a \cdot b + \overline{c}) \cdot (a + c)$, desenhe o circuito combinacional correspondente.
- 4. Dada a expressão lógica $f = a + b \cdot \overline{c}$, desenhe o circuito combinacional correspondente.





Dado o circuito combinacional a seguir, construa a expressão lógica e a tabela verdade correspondente:

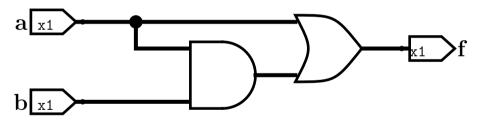


Diagrama de Tempo (Waveform)

Quando fazemos o diagrama de tempo ou o *waveform* apresentamos ao circuito uma sequência de sinais de forma que o circuito responde a essa sequência gerando outras sequências.

- Mostra os estados do circuito ao longo do tempo.
- Permite a visualização do comportamento do circuito durante o tempo.

Nome do sinal	Valor do sinal	9 ns	20,0	jus.	40,0 με	60,0 µ		80,0 µs	100,0 µз	120,0 με	140,0 με	160,0 με 180,0 με	194999 m
□ - Entrada(190,		0	1	0	1 0	1	0	1	0 1 0 1 0	1	0 1 0 1	0 1 0 1	
⊃ Entrada(190,	1	0 1	0 /1	0	/1	0 1	0	1 (1 0 1	0	1 0	1
□ Saída(360,200)	0	0 /1 (0	0 1 0	√1 \o	1 0 1	0 1 0	1 0	1 0 1	0 1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 1	0

Figura: Consegue saber qual porta é esta?



Construção de Circuito a partir de Expressão Algébrica

- ▶ Dada a expressão algébrica $F(x, y, z) = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot z$, construa:
 - 1. O circuito correspondente usando portas lógicas básicas (AND, OR, NOT).
 - 2. A tabela verdade que representa o comportamento da função.
 - 3. O diagrama de tempo (waveform) que mostra os estados do circuito para todas as combinações de x, y e z ao longo do tempo.





Análise de Diagrama de Tempo



- Considerando o diagrama dado:
 - O circuito que pode gerar o comportamento mostrado no diagrama.
 - 2. A tabela verdade associada ao circuito.
 - 3. A expressão algébrica correspondente ao circuito.





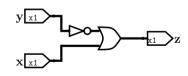
Análise de Diagrama de Tempo



- Considerando o diagrama dado:
 - O circuito que pode gerar o comportamento mostrado no diagrama.
 - 2. A tabela verdade associada ao circuito.
 - 3. A expressão algébrica correspondente ao circuito.

Tabela verdade:

X	У	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1



Expressão:

$$z = \overline{y} + x$$



Exemplo: Determinação de Função Lógica a partir de Tabela Verdade Usando

Mintermos e Maxtermos

Tabela Verdade

Vamos considerar uma função booleana f(a, b, c) com três variáveis. Aqui está a tabela verdade:

а	Ь	С	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0





Determinação da Função Usando Mintermos

Passo 1: Identifique as linhas onde f(a, b, c) = 1.

As linhas onde a função vale 1 são:

- Linha 2: a = 0, b = 0, $c = 1 \rightarrow Mintermo$: a'b'c
- Linha 4: a = 0, b = 1, $c = 1 \rightarrow Mintermo$: a'bc
- Linha 5: a = 1, b = 0, $c = 0 \rightarrow Mintermo$: ab'c'
- Linha 6: a = 1, b = 0, $c = 1 \rightarrow Mintermo$: ab'c

Passo 2: Escreva a função como a soma (OR) desses mintermos.

A função lógica pode ser expressa como a soma dos mintermos correspondentes:

$$f(a,b,c) = a'b'c + a'bc + ab'c' + ab'c$$





Determinação da Função Usando Maxtermos

Passo 1: Identifique as linhas onde f(a, b, c) = 0.

As linhas onde a função vale 0 são:

- Linha 1: a = 0, b = 0, $c = 0 \rightarrow Maxtermo$: (a + b + c)
- Linha 3: a = 0, b = 1, $c = 0 \rightarrow Maxtermo$: (a + b' + c)
- ▶ Linha 7: a = 1, b = 1, c = 0 → Maxtermo: (a' + b + c)
- ▶ Linha 8: a = 1, b = 1, c = 1 → Maxtermo: (a' + b + c')

Passo 2: Escreva a função como o produto (AND) desses maxtermos.

A função lógica pode ser expressa como o produto dos maxtermos correspondentes:

$$f(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (a + b' + c) \cdot (a' + b + c) \cdot (a' + b + c')$$





Resumo

- ▶ Usando Mintermos (Soma de Produtos Canônica): A função é expressa como a soma (OR) dos mintermos das linhas onde a função vale 1.
- ▶ Usando Maxtermos (Produto de Somas Canônica): A função é expressa como o produto (AND) dos maxtermos das linhas onde a função vale 0.

Definição e Propriedades

- A implementação canônica de uma função booleana que seleciona os produtos das variáveis onde o resultado é 1.
- Propriedades:
 - Unicidade: Existe uma única SOP canônica para cada função booleana.
 - ► Importância: Útil na análise e síntese de circuitos digitais.
 - Minimização: Pode ser simplificada com Mapas de Karnaugh ou Quine-McCluskey.



Exemplo de SOP Canônica

Considere a função F(A, B, C) definida pela tabela verdade:

	Α	В	С	F(A, B, C)
	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	1	0	0
► Tabela Verdade:	0	1	1	1
	1	0	0	1
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	1	1

- - ► A'B'C, A'BC, AB'C', ABC', ABC
- SOP Canônica:

Mintermos:







Produto de Somas Canônica (POS)



Definição e Propriedades

- Forma canônica que seleciona as somas das variáveis onde o resultado é 0.
- ► Propriedades:
 - Unicidade: Existe uma única POS canônica para cada função booleana.
 - Importância: Utilizada em design digital para implementar lógica com portas OR e AND.
 - Minimização: Pode ser simplificada como a SOP canônica.





Exemplo de POS Canônica

•	Tabela	Verdade:

	Α	В	С	F(A, B, C)
	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	1	0	0
:	0	1	1	1
	1	0	0	1
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	1	1

- Maxtermos:
 - ightharpoonup (A + B + C), (A + B + C')
- ► POS Canônica:

$$F(A, B, C) = (A + B + C) \cdot (A + B' + C) \cdot (A' + B + C')$$



Mintermos e Maxtermos



Definição de Mintermos e Maxtermos

▶ Mintermo:

- Produto de todas as variáveis complementadas ou não.
- Exemplo: 'A'B'C'

Maxtermo:

- Soma de todas as variáveis complementadas ou não.
- ► Exemplo: '(A + B + C')'



Criação de Circuito a partir da Tabela Verdade

► Dada a seguinte tabela verdade:

X	у	Z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- 1. Construa o circuito digital que implementa essa função.
- 2. Derive a expressão algébrica na forma de Soma de Produtos Canônica (SOP) a partir da tabela verdade.
- 3. Crie o diagrama de tempo correspondente ao circuito.



Mini prova 03

- Dado o circuito abaixo, determine:
 - 1. A tabela verdade correspondente ao circuito não simplificado.
 - 2. A expressão algébrica **simplificada** que representa a função lógica do circuito.
 - 3. O circuito simplificado.
 - 4. O diagrama de tempo (waveform) que reflete o comportamento do circuito.

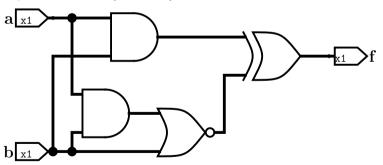


Figura: Passarinho... Resolve esse... Qual é a expressão desse?³

