



## Econometria II: Practica 2

Cristóbal Donoso Oliva<sup>1</sup>, Roberto Flores<sup>2</sup>, Francisco Medina<sup>3</sup>,  
Nicolás Moreno<sup>4</sup>, Sebastián Rivera<sup>5</sup>,

Rómulo Chumacero<sup>6</sup>, Santiago García<sup>7</sup>, María Jesús Negrete<sup>8</sup> y Leonardo Siles<sup>9</sup>

1-5 Estudiantes

6. Profesor

7-9 Ayudantes

2 de septiembre de 2025

### Introducción

El propósito de esta segunda tarea es evaluar y aplicar conceptos teóricos presentados en durante la unidad de Vectores Autorregresivos. En ella se busca estudiar relaciones dinámicas entre el IMACEC ( $Y$ ), el IPC ( $P$ ) y la Tasa de Política Monetaria ( $i$ ), transformadas en tasas de crecimiento interanual:  $\pi = \ln(P_t/P_{t-12})$  y  $y = \ln(Y_t/Y_{t-12})$ . Para ello, lo que hicimos fue:

- 1) Determinar direccionalidad en las relaciones entre variables a través de Causalidad de Granger.
- 2) Implementar y estimar un modelo VAR; selección de rezagos, estimación por MCO y verificación de estacionariedad.
- 3) Determinar el impacto de los shocks; calculo de IRF a través de distintos métodos.
- 4) Cuantificar la contribución de cada shock a la varianza de pronóstico.
- 5) Inferencia y construcción de intervalos de confianza.

En suma, usamos teoría y métodos computacionales para modelar, estimar y analizar vectores autorregresivos utilizando los contenidos vistos durante la unidad de *Vectores Autorregresivos*.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El código y los datos asociados a esta tarea se encuentran en: <https://github.com/ensta630team/HW2.git>

## Sobre los Datos

El conjunto de datos utilizado para este análisis consta de tres series de tiempo macroeconómicas clave con frecuencia mensual, abarcando el período desde principios de 2009 hasta mediados de 2025. A partir de los datos brutos del IPC ( $P$ ), el IMACEC ( $Y$ ) y la Tasa de Política Monetaria ( $i$ ), se construyeron las variables para el modelo. Específicamente, **la tasa de inflación ( $\pi$ ) y la tasa de crecimiento del producto ( $y$ ) fueron transformadas para representar su variación anual en forma logarítmica**, según las fórmulas  $\pi = \ln(P_t/P_{t-12})$  y  $y = \ln(Y_t/Y_{t-12})$ . La tasa de interés se utilizó en niveles. Las tres series procesadas se muestran en la Figura 1. Las tres series fueron concatenadas, formando una matriz de dimensión  $185 \times 3$ .

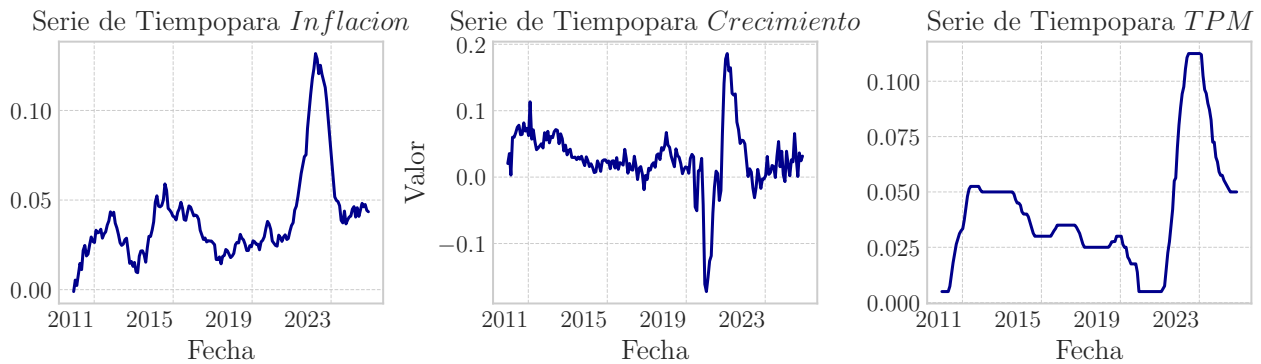


Figura 1: Series de tiempo de las variables macroeconómicas utilizadas en el estudio. Los paneles muestran la evolución de la Inflación, el Crecimiento y la Tasa de Política Monetaria (TPM).

## Pregunta 1.A: Relación bivariada

El objetivo de esta sección será estudiar la posible relación bivariada entre las siguientes series: la tasa de crecimiento anual del índice al precio del consumidor ( $\pi_t$ ) y la tasa de crecimiento anual del IMACEC ( $y_t$ )

Una pregunta relevante a contestar en el desarrollo de modelos de series de tiempo es si información pasada de una variable mejora significativamente la predicción de otra (la que se encuentra definida por sus rezagos).

## Test de Granger

Ante esta pregunta, el trabajo de Clive W.J. Granger [3] es fundamental. A través de su test (Test de Granger) es posible investigar si una serie temporal es útil para predecir otra serie temporal.

En el test la  $H_0$  (Hipótesis Nula) nos dirá que los coeficientes de los rezagos de  $X$  son cero. Es decir,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_q = 0$ . La  $H_1$  (Hipótesis Alternativa), por tanto, nos dirá que al menos uno de los coeficientes de los rezagos de  $X$  es diferente de cero.

Es importante destacar que este test aplica para modelos estacionarios. Por esta razón, de acuerdo a las instrucciones iniciales de la tarea, el problema se limitó a las variables  $y_t$  y  $\pi_t$ , a fin de asegurar la correcta aplicación del método descrito.

En términos formales lo anterior se traduce a lo siguiente:

Modelo Restringido (Modelo Nulo -  $H_0$ ):

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i Y_{t-i} + \epsilon_t. \quad (1)$$

Modelo No Restringido (Modelo Alternativo -  $H_1$ ):

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \gamma_j X_{t-j} + u_t. \quad (2)$$

El test de Granger utiliza un test F para comparar los dos modelos. El test F examina si la inclusión de los términos de  $X$  (el modelo no restringido) conduce a una mejora estadísticamente significativa en la capacidad de predicción del modelo. El test F, a diferencia del test t nos permite evaluar si todos los rezagos de una variable son conjuntamente significativos. Un estadístico F alto (o un p value bajo) nos llevará a rechazar la hipótesis nula, lo que implica decir que la incidencia de los rezagos de  $X$  sobre  $Y$  son significativos.

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{NR})(T - 2p - 1)}{RSS_{NR} \cdot p}, \quad (3)$$

donde  $RSS_R$  y  $RSS_{NR}$  son las sumas de residuos al cuadrado de los modelos restringido y no restringido respectivamente, y  $T$  es el número total de observaciones.



Generalmente se considera  $p = q$  (mismo número de rezagos para ambas variables), razón por la cual la ecuación anterior posee el término  $2p$  y no  $p - q$ . La elección de  $p$  y  $q$  puede realizarse mediante criterios de información vistos previamente. Ahora bien, para series anuales se recomienda utilizar hasta 2 rezagos en los tests de causalidad de Granger. Enderson (2004) [1], por ejemplo, recomienda: “Para series anuales, el uso de 1 a 2 rezagos generalmente captura adecuadamente las dinámicas temporales sin sobreparametrizar el modelo” (p. 312). De manera similar, Lütkepohl (2005) [7] sostiene que la evidencia empírica sugiere 2 rezagos son usualmente suficientes para modelar las dependencias temporales en modelos anuales.

En el uso de esta herramienta se debe ser especialmente cuidadoso con la interpretación de los resultados, ya que este nos permite observar la precedencia estadística, no así la causalidad inferencial. En un ejemplo cotidiano, si todos los perros ladran o se inquietan antes de la llegada de un temblor, podríamos encontrar una precedencia, mas no una causalidad (los perros no provocan terremotos). Esta alerta o distinción es sumamente relevante al momento de utilizar modelos de series de tiempo. En un ejemplo económico, es la tasa de interés la que generalmente precede a cambios positivos o negativos en el crecimiento. sin embargo, la causalidad económica nos dice que la relación va en la otra dirección:  $\Delta y \rightarrow \Delta r$ .

## Resultados del test

En el desarrollo de este test se programó la función en el programa Python. Para su construcción se consideró el caso de 1 lag y 2 lags, siguiendo con la literatura citada más arriba, y se calcularon las regresiones respectivas para el modelo restringido (sin rezagos de  $X$ ) y no restringido (con rezagos de  $X$ ). De ellas se obtuvieron los residuos, los cuales fueron utilizados para la construcción de la ecuación número 3. Para corroborar que los cálculos estuvieran correctos, se utilizó la función *grangercausalitytests* de la librería *stattools*. En la siguiente tabla se computan los cálculos para cada caso, dando cuenta de la exactitud de nuestro método creado:

De la tabla es posible observar que el test arroja una precedencia estadística en el caso de la tasa de crecimiento anual del IMACEC, respecto a la tasa de crecimiento del IPC, cuando se analiza el caso de un solo rezago (recordar que este criterio aplica para ambas variables). En el caso inverso ( $\pi_t \rightarrow y$ ), esto no ocurre.

Una pregunta relevante es por qué al agregar un segundo rezago se pierde significancia estadística, a tal punto que la relación estadísticamente significativa de  $y \rightarrow \pi$  se diluye. La razón más plausible es que, siendo el primer rezago el más significativo, la inclusión de más lags solo contribuya a

Cuadro 1: Resultados de Test de Granger

Relación	Lags	F-stat	p-value	Significativo	Método
$\pi \rightarrow y$	1	2.8310	0.0942	No	Propio
	1	2.8154	0.0951	No	Statsmodels
	2	2.1916	0.1147	No	Propio
	2	2.1673	0.1175	No	Statsmodels
$y \rightarrow \pi$	1	8.8664	0.0033	Sí	Propio
	1	8.8177	0.0034	Sí	Statsmodels
	2	2.5088	0.0842	No	Propio
	2	2.4809	0.0866	No	Statsmodels

aumentar el número de parámetros del modelo (quita grados de libertad). Lo anterior hace que el test F sea menos potente.

## Precedencia estadística y causalidad en los resultados

Los resultados significativos de la relación  $y \rightarrow \pi$  para un rezago, nos dicen que los movimientos pasados del crecimiento económico (un año atrás) contienen información útil para predecir los movimientos futuros de la inflación. Es decir, la inflación no sólo se explica por sus propios rezagos. Estos resultados se alinean con la hipótesis keynesiana respecto a que shocks de demanda se transmiten al nivel de precios. Todo esto es central de la formulación de la curva de Phillips [9].

Sin embargo, debemos ser enfáticos en un punto ya señalado anteriormente. La relación estadísticamente significativa entre  $y_t \rightarrow \pi_t$  muestra una relación temporal, no una verdad causal. Por ejemplo, la omisión de una variable relevante podría sesgar nuestro análisis. En este sentido, podría ser una tercera variable la que genera los efectos observados (por ejemplo un shock en el subsidio a la inversión). Otra posibilidad se relaciona a las expectativas, argumento desarrollado por Lucas (1977) [6]. El buen desempeño de la economía genera expectativas de mayor inflación futura, esto podría generar que mercado se anticipe a ello aumentando precios antes que los costos lo hagan.

## Pregunta 1.B: Implementando el modelo VAR

La incorporación del modelo VAR consistió en agregar una nueva clase **VAR** dentro del **Módulo: Models** de nuestro sistema. Como se observa en la Figura 2, cada módulo agrupa un conjunto de funcionalidades. En particular, el **Módulo: Models** contiene las implementaciones de los modelos econométricos desarrollados.

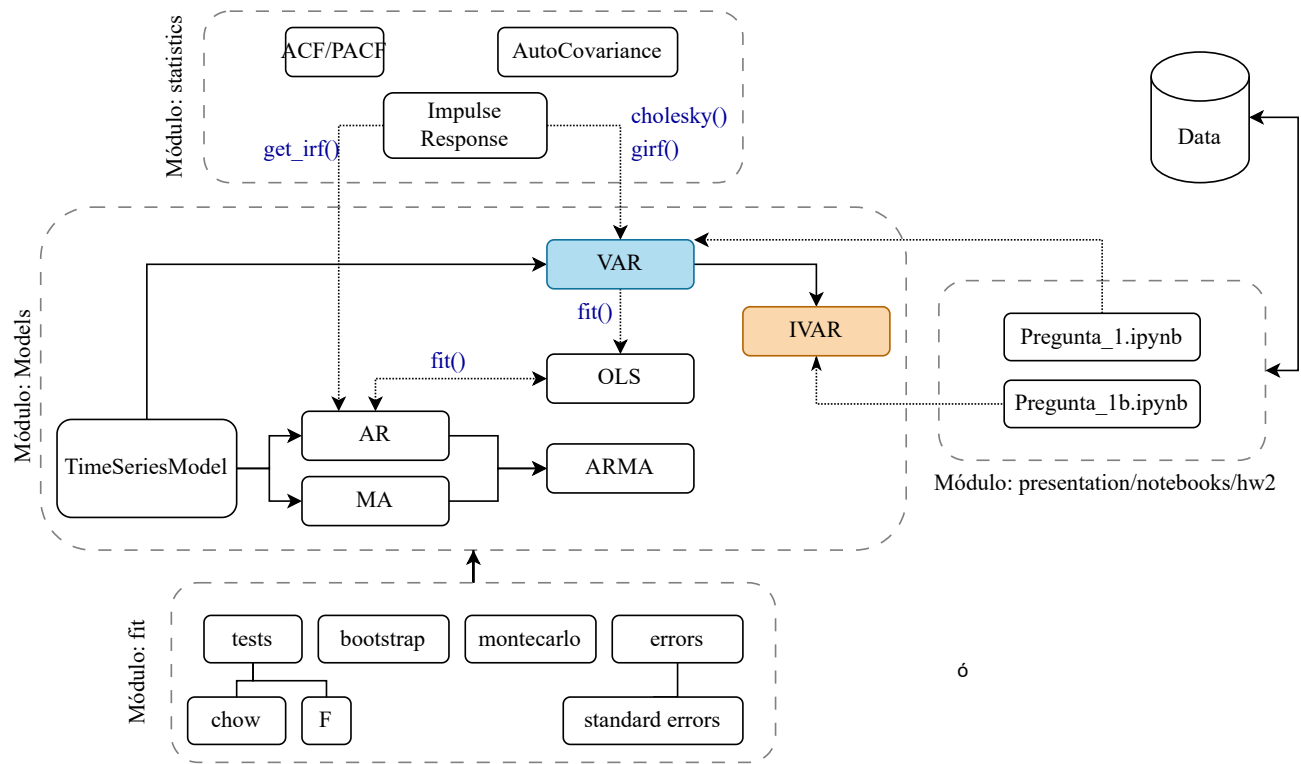


Figura 2: Diagrama general del código. Cada módulo representa una agrupación de funcionalidades específicas para el análisis de series de tiempo

Matemáticamente, un modelo de Vectores Autorregresivos de orden  $p$ , o  $VAR(p)$ , se define como:

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde:

- $Y_t$  es un vector de  $k \times 1$  que contiene las  $k$  variables de series de tiempo en el instante  $t$ .



- $c$  es un vector de  $k \times 1$  de constantes (interceptos).
- $\Phi_i$  es una matriz de coeficientes de  $k \times k$  para el rezago  $i$ .
- $\varepsilon_t$  es un vector de  $k \times 1$  de errores de ruido blanco, con media cero y una matriz de covarianza constante  $\Sigma$ .

En nuestra implementación, los coeficientes de las matrices  $A_i$  y el vector  $c$  son estimados a través de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS), lo cual se ejecuta mediante la función `fit()` del modelo VAR. Posteriormente, el modelo ajustado se utiliza para realizar análisis, como la generación de Funciones de Impulso-Respuesta (**Impulse Response**), tal como se indica en el diagrama.

Uno de los elementos importantes es inicialización de los parámetros del VAR. Para generar parámetros que garanticen un modelo VAR estacionario, el método se basa en la condición fundamental de estabilidad: un VAR es estacionario si y solo si todos los eigenvalores de su matriz compañera ( $F$ ) tienen un módulo menor que 1.

La función implementa este principio de forma inversa. En lugar de crear parámetros y luego verificar su estabilidad, el proceso es el siguiente:

- 1) Genera Eigenvalores Estables: Primero, crea un conjunto de eigenvalores aleatorios cuyo módulo se restringe explícitamente a ser menor que 1. Esto garantiza que todos se encuentren dentro del círculo unitario en el plano complejo.
- 2) Construye la Matriz Compañera: Utiliza estos eigenvalues estables para construir la matriz  $F$  del sistema. Esto asegura que la matriz resultante cumpla la condición de estacionariedad por diseño.
- 3) Extrae los Coeficientes: Finalmente, extrae las matrices de coeficientes del modelo VAR (los parámetros  $\Phi$ ) directamente de la estructura de esta matriz compañera ya estabilizada. Los otros parámetros, como el intercepto ( $c$ ) y la matriz de covarianza de los errores ( $\Omega$ ), se generan de forma aleatoria, ya que no influyen en la estacionariedad del proceso.



## Pregunta 1.C: IRF utilizando la descomposición de Cholesky

En esta sección buscamos medir el impacto de los shocks en las variables del modelo. Para ello, computaremos las IRF utilizando la descomposición de Cholesky.

Una pregunta importante que responderemos, es cómo varían estos cálculos a la hora de cambiar el ordenamiento a la hora de definir el VAR.

### Teoría

Utilizar la descomposición de Cholesky para obtener las IRF es un primer acercamiento muy utilizado debido a lo simple de su implementación. Ahora bien, la principal crítica se debe a la dependencia del orden establecido a la hora de construir el VAR. En secciones siguientes utilizaremos otros métodos que responden de buena manera esta crítica.

Recordemos que para realizar análisis de Impulso Respuesta, requerimos que nuestro modelo VAR(3) sea estacionario, es decir, que los valores propios asociados a la matriz dada por:

$$F := \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

estén dentro del círculo unitario. En el escenario anterior, el polinomio  $\Psi(L) = (I_n - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3)^{-1}$  existe y sus coeficientes  $\Psi_s$  satisfacen las condiciones (ver [4]):

$$\Psi_0 = I_n \quad , \quad \Psi_s = \sum_{i=1}^3 \Phi_i \Psi_{s-i} \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad , \quad \Psi_s = 0_n \quad s < 0.$$

Estas condiciones permiten entender el modelo VAR(3) como un modelo VMA( $\infty$ ) de la forma:

$$\mathbf{Y}_t = \mu + \mathbf{u}_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i \mathbf{u}_{t-i},$$

de donde al obtener una expresión para  $\frac{\partial \mathbf{Y}_{t+s}}{\partial \mathbf{u}_t}$ , esta sólo dependerá de  $\Psi_s$  (salvo situaciones críticas que buscan resolver los distintos métodos de cálculo de IRF). Hecho lo anterior y para responder



lo pedido, sólo debemos obtener la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianzas  $\Omega$  para obtener que las IRF ortogonalizadas. Así, luego del cambio de variable  $v_t = P^{-1}\mathbf{u}_t$  se tendrá:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{t+s}}{\partial \mathbf{v}_{i,t}} = [\Psi_s P] e_i,$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector canónico del espacio euclideo. Por último, esta información se guardó directamente en una matriz y posteriormente se realizaron las gráficas a través de información local (Ver Anexo 1).

## Resultados

Se calcularon los criterios de Akaike (AIC), Bayesiano (BIC) y Hannan-Quinn (HQIC) para un rango de hasta 30 rezagos. Como se muestra en la figura, tanto el criterio de Hannan-Quinn como el Bayesiano (BIC), que penalizan más fuertemente la inclusión de parámetros adicionales, alcanzaron su valor mínimo con dos rezagos ( $p = 2$ ). Basado en estos resultados, se seleccionó un modelo  $VAR(2)$  como la especificación más parsimoniosa y adecuada para el análisis (Figura 3). La inferencia y la construcción de los intervalos de confianza para las funciones de impulso-respuesta, se realizó utilizando el método de *residual bootstrap*, el cual preserva la estructura de dependencia de los residuos del modelo estimado.

Note que los gráficos (Figura 4) de la diagonal principal (una variable es afectada por el impulso de ella misma) es de esperarse que el shock sea positivo y presente persistencia sobre su propio futuro. Por otra parte, si usamos la expresión  $X \rightarrow Y$  para referirnos a la respuesta de  $Y$  ante un shock en  $X$ , de los demás gráficos se desprenderá:

- 1) IMACEC  $\rightarrow$  Inflación: Un aumento inesperado en la actividad económica, genera presiones inflacionarias. La resta es positiva y estadísticamente significativa, pues la banda de confianza no incluye al 0 al comienzo del shock, lo que es consistente con la teoría económica de la Curva de Phillips: en el corto plazo, a mayor actividad, mayor inflación.
- 2) TPM  $\rightarrow$  Inflación: El aumento de la TPM hace que la inflación disminuya. La respuesta es negativa y significativa, pues la banda de confianza no incluye al 0. Esto muestra la efectividad de la política monetaria para controlar la inflación: el banco central sube TPM para enfriar la economía y reducir la inflación.
- 3) Inflación  $\rightarrow$  IMACEC: Un aumento sorpresivo de la inflación tiene un efecto negativo (aun-

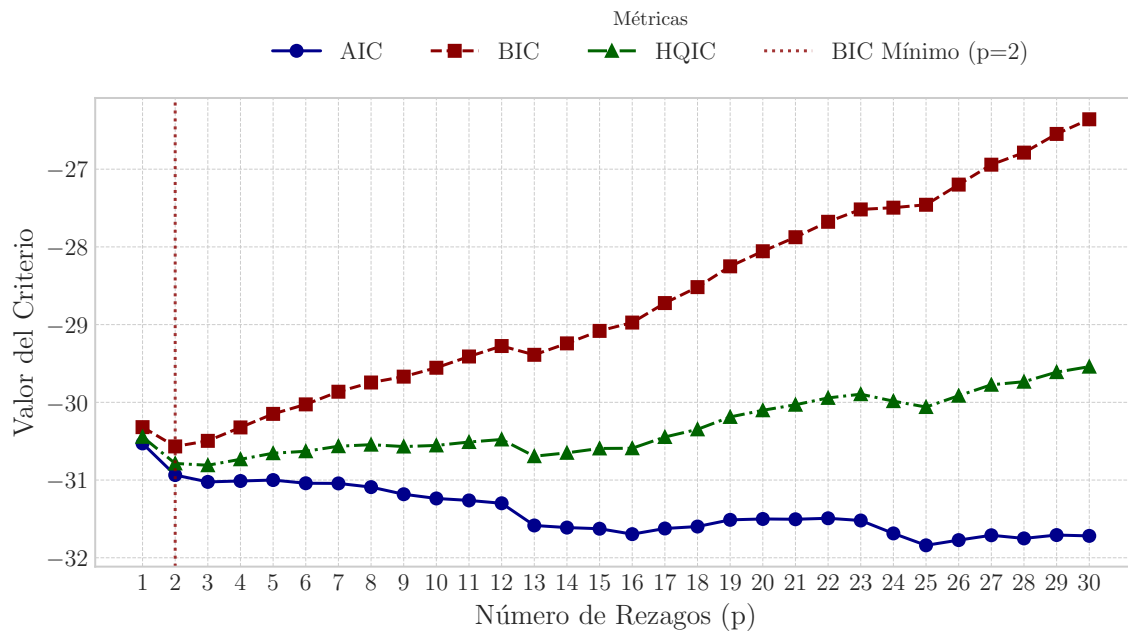


Figura 3: Selección del orden de rezagos ( $p$ ) para el modelo VAR utilizando criterios de información. Se muestran los valores de los criterios de Akaike (AIC), Bayesiano (BIC) y Hannan-Quinn (HQIC) para un rango de hasta 30 rezagos. El criterio BIC alcanza su valor mínimo en  $p = 2$ , sugiriendo este como el orden óptimo para el modelo.

que pequeño y que rápidamente se vuelve insignificante) sobre la actividad económica. Los motivos pueden ser la incertidumbre o a la pérdida de poder adquisitivo.

- 4) TPM  $\rightarrow$  IMACEC: Es uno de los resultados más claros. Un aumento de la TPM frena significativamente la actividad económica (IMACEC). La respuesta es negativa, significativa y persistente. Este es el canal tradicional de la política monetaria: tasas más altas encarecen el crédito, desincentivan la inversión y el consumo, y enfrían la economía.
- 5) Inflación  $\rightarrow$  TPM: La respuesta es positiva y significativa, lo cual es crucial: Ante un aumento de la inflación, el banco central reacciona subiendo la tasa de interés (TPM) para contrarrestarlo.
- 6) IMACEC  $\rightarrow$  TPM: Un aumento en la actividad económica (IMACEC) induce al banco central a subir la TPM. Ante un sobrecalentamiento de la economía, el banco central sube tasas para prevenir presiones inflacionarias futuras.

Finalmente, en relación al uso de la descomposición de Cholesky, esta impone una estructura (o un ordenamiento causal) al sistema de variables, en nuestro caso Inflación  $\rightarrow$  IMACEC  $\rightarrow$  TPM:

### Funciones de Impulso-Respuesta con Intervalos de Confianza del 95%

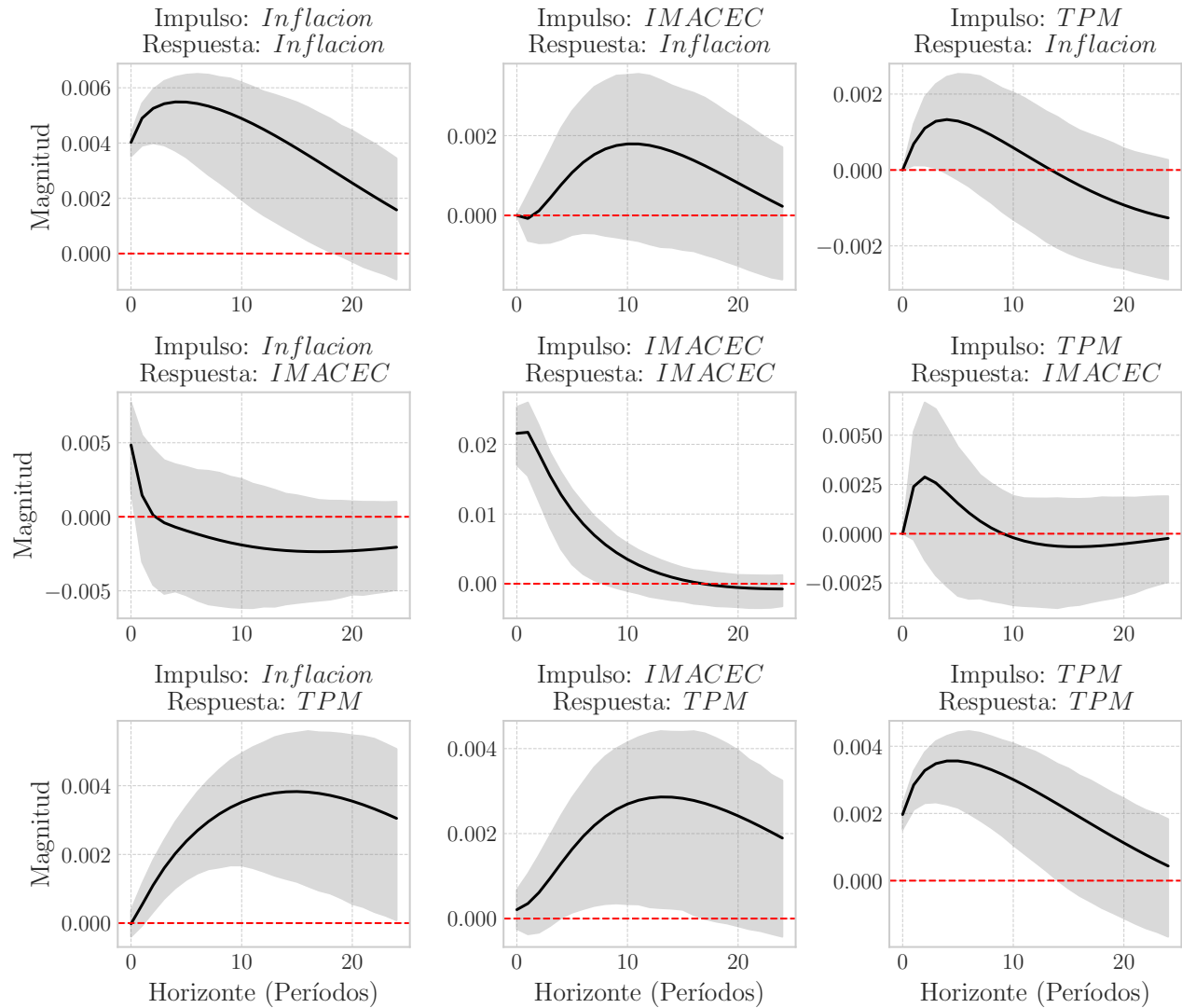


Figura 4: Funciones de Impulso-Respuesta (IRF) estimadas para el modelo VAR(p). Cada gráfico muestra la respuesta de una variable (filas) a un shock de una desviación estándar en otra variable (columnas). Las áreas sombreadas representan los intervalos de confianza del 95 % obtenidos mediante bootstrap.

- 1) Inflación primero: Se asume que los shocks de inflación (por ejemplo, shocks de oferta como el precio del petróleo) afectan de inmediato tanto a la actividad económica (IMACEC) como a la decisión de política monetaria (TPM). La inflación no reacciona de forma inmediata a las otras porque los precios son rígidos.<sup>o</sup> lentos para ajustarse a nueva información.



- 2) IMACEC después: Los shocks de actividad económica (shocks de demanda) afectan de inmediato a la TPM (el banco central reacciona al ver los datos), pero no afectan de inmediato a la inflación (esta tarda en responder a cambios en la demanda).
- 3) TPM último: Un shock de política monetaria (decisión del banco central) no afecta de forma contemporánea a la inflación ni al IMACEC. Esto se debe a que existe un "lag.<sup>o</sup> desfase en la transmisión de la política monetaria. Una decisión de subir tasas hoy tarda varios meses en afectar la inversión, el consumo y finalmente los precios. Por eso, en el mismo período, la TPM no tiene un efecto inmediato sobre las otras variables.

## Conclusión

A pesar de la crítica al ordenamiento que asume Cholesky, en nuestro caso, usamos el ordenamiento causal dado por:

$$\text{Inflación} \rightarrow \text{IMACEC} \rightarrow \text{TPM},$$

el cual es muy común y se justifica por la teoría económica: los supuestos de rigidez de precios y los desfases en la transmisión de la política monetaria, esto permite interpretar las IRF de la manera en que lo hicimos. Sin embargo, si no hubiésemos contado con una teoría que *sustentara* estas causalidades, es probable haber escogido otro método.

## Pregunta 1.D: IRF estimando un VAR Identificado

En esta sección estimaremos un modelo VAR identificado. Para ello crearemos un código que permite estimar  $B_0$  y  $D$ . Luego, con teoría económica plantearemos la estructura de  $B_0$ , mientras que la matriz  $D$  siempre sigue la misma estructura. Finalmente, computaremos las IRF y las compararemos con las obtenidas utilizando la descomposición de Cholesky.

### Teoría

La gracia de los modelos IVAR es que podemos dar cierta estructura teórica a las variables. Por lo tanto, la decisión de que shock afecta al otro no viene dado por el orden en que se construye el VAR, como ocurre con Cholesky, sino que es consecuencia de la estructura dada por  $B_0$ . La crítica es que armar  $B_0$  es tan arbitrario como ordenar un VAR, lo cual es cierto, sin embargo, los IVAR dan mayor libertad, ya que no necesariamente cada variable afecta a otra, sino que se pueden definir menos relaciones y estimar un VAR sobreidentificado. Esto permite poder comparar entre diferentes especificaciones de la matriz  $B_0$ .

Para plantear la matriz  $B_0$  utilizamos teoría económica. Sabemos que el crecimiento es el causante de la tasa de interés, sin embargo, esta última tiene precedencia estadística, por lo que vamos a modelar que la tasa de interés influye en el crecimiento ( $b_2$ ). Por otro lado, el banco central, con sus reglas de política monetaria reacciona a la inflación, por lo que modelaremos que la inflación influye en la tasa de interés ( $b_3$ ). Finalmente, por la ecuación cuantitativa del dinero, un aumento del producto real debería reducir el nivel de precios, por lo que modelaremos que el crecimiento influye en la inflación ( $b_1$ ).

Teniendo presente que el VAR está en el siguiente orden: primero la inflación, luego el crecimiento y finalmente la tasa de interés. Entonces las matrices  $B_0$  y  $D$  quedarían:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_t = \begin{bmatrix} \text{Inflacion} \\ \text{Crecimiento} \\ \text{Tasa de Interes} \end{bmatrix}.$$

Para estimar el IVAR maximizamos una función de verosimilitud. Como  $T$  y  $p$  son constantes maximizamos:

$$\mathcal{L}(B_0, D, \hat{\Omega}) \propto \ln|B_0|^2 - \ln|D| - \text{tr}[B_0' D^{-1} B_0 \hat{\Omega}].$$

## Resultados

La verosimilitud se maximiza cuando el gradiente es igual a 0. Por lo que resolveremos por métodos numérico el sistema de ecuaciones  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , con  $x$  cada incógnita de  $B_0$  y  $D$ . Realizando lo anterior, las matrices estimadas son:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 1,542 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 4,841 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 3,916 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \hat{B}_0 = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,041 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & -1,215 \\ 0,017 & 0,000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

Lo anterior se interpreta como que una tasa de interés un punto porcentual mayor esta relacionado con un crecimiento 1.215 puntos porcentuales menor ( $\hat{b}_2 = -1,215$ ). Lo que tiene sentido con que estamos en la parte “mala” del ciclo, el futuro se prevee más prospero, por que la tasa de interés esta mas alta. Por otro lado, más crecimiento esta relacionado con menos inflación ( $\hat{b}_1 = -0,041$ ), esto esta en línea con lo que predice la teoría cuantitativa del dinero, pero es muy pequeño, quizás por aumentos simultaneos de  $M$ . Finalmente, más inflación esta relacionado con una mayor tasa de interés ( $\hat{b}_3 = 0,017$ ), en línea con lo esperado dadas las reglas de política monetaria del Banco Central.

Luego calculamos las IRF, análogamente al método de Cholesky:

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial v_{j,t}} = \psi_s b^j \sqrt{d_j}, \quad (4)$$

donde  $b^j$  es la columna  $j$  de la inversa de la matriz  $B_0$  estimada. Las IRF computadas se presentan en el [Figura 5](#).

Se pueden observar que las IRF son muy parecidas a las obtenidas por Cholesky hasta el periodo 10 (donde son comparable). El efecto de los shocks en si mismos es muy similar a los obtenidos por Cholesky. Quizás lo más interesante sería centrarse en las variables que le di estructura en la matriz  $B_0$ . Se puede ver que en 2 casos ( $b_1$  y  $b_2$ ) las IRF varían empezando desde más negativo. Esta relación negativa es más esperable por la teoría económica (ecuación cuantitativa y ecuación de Euler).

### Funciones de Respuesta al Impulso

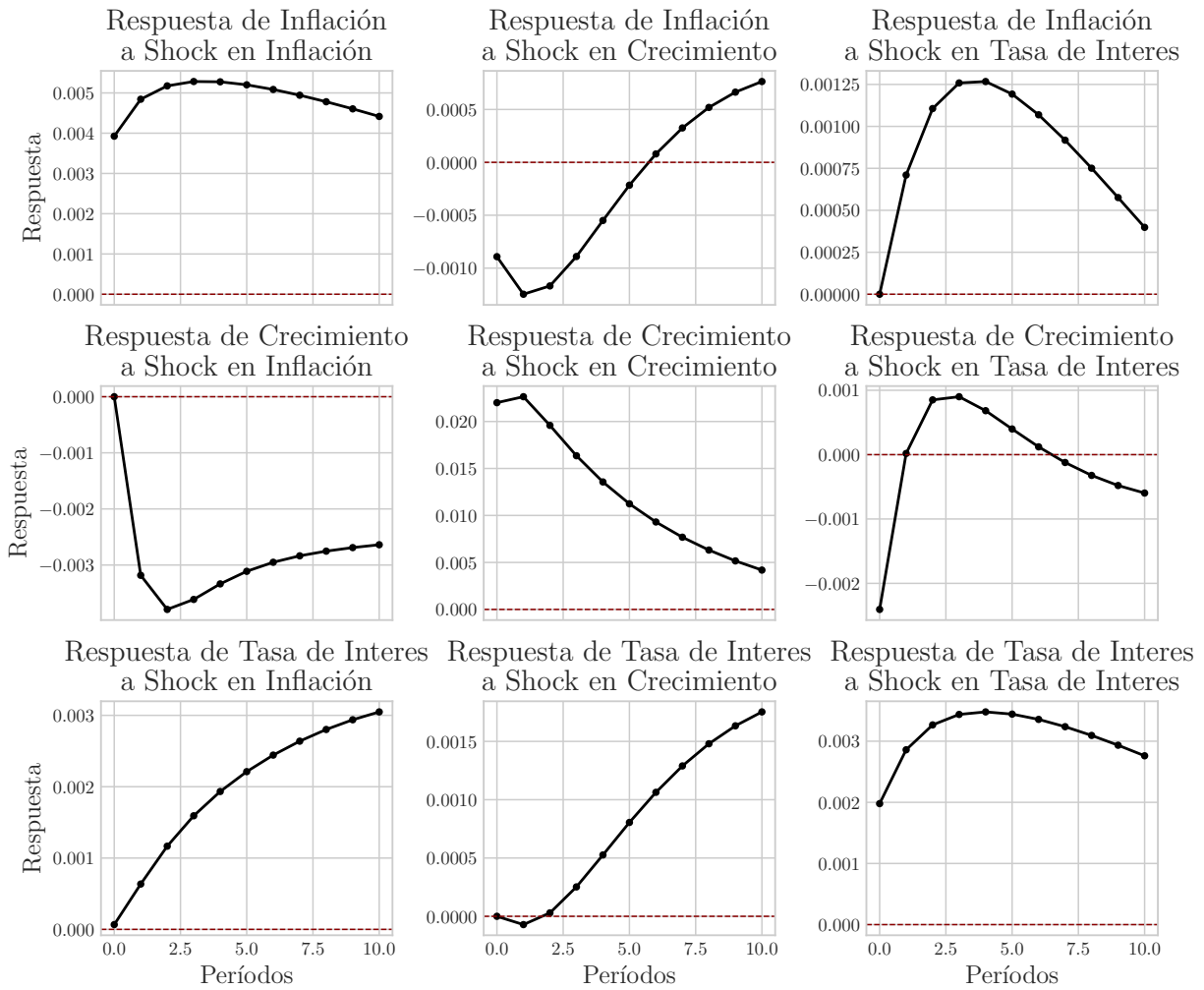


Figura 5: IRF computadas utilizando modelo IVAR

## Conclusión

Concluimos que las IRF de un VAR identificado pueden capturar mejor el efecto shocks que tienen fundamentos económicos. Los IVAR permiten ajustar mejor la estructura que Cholesky, ya que en este siempre es una matriz triangular, por lo que esta más restringido.



## Pregunta 1.E: IRF generalizadas de Pesaran y Shin

En esta sección computaremos las IRF generalizadas planteado por Pesaran y Smith (1998). Para ello, representamos el VAR como un VMA infinito. Con ello estimamos los coeficientes para poder computar las IRF.

### Teoría

Las principal ventaja de las IRF generalizadas es que no dependen del ordenamiento del VAR o de la definición de una matriz  $B_0$ , por lo que es mucho menos arbitrario. Además, no requiere descomponer la matriz de covarianzas estimada. Sin embargo, hay un cierto supuesto de simultaneidad que al final tampoco es que se pueda testear.

Para realizar esto, es necesario el supuesto de que la serie  $x_t$  sea débilmente estacionaria, ya que de esta manera, los procesos VAR(p) pueden ser representados como un  $VMA(\infty)$ :

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} G_i w_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T,$$

donde  $A_i$  son las matrices de coeficientes de la parte  $MA$ ,  $w$  corresponde a un vector de variables exógenas y/o determinísticas, las cuáles para este análisis no consideramos, por lo que solo nos enfocamos en la parte de medias móviles. En particular, las matrices de coeficientes  $A_i$  son  $m \times m$ , la cual se puede obtener de manera recursiva usando lo siguiente

$$A_i = \Phi_1 A_{i-1} + \Phi_2 A_{i-2} + \dots + \Phi_p A_{i-p}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

donde  $A_0 = I_m$  y  $A_i = 0$  para  $i < 0$ .

Y por último, para construir la IRF generalizada construimos

$$\psi_j^g(n) = \sigma_{jj}^{-\frac{1}{2}} A_n \Sigma e_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Donde  $\sigma_{jj}$  corresponde al elemento  $j, j$  de la matriz de varianzas y covarianza  $\Omega$ , es decir, es la desviación estándar de la variable  $j$ .  $e_j$  es un vector de selección  $m \times 1$ , donde el elemento  $j$  es una



unidad y el resto de valores es 0, tiene el fin de poder aislar el efecto del shock en la variable  $j$ .

## Resultados

Como vimos en las partes anteriores, el mejor modelo a estimar es un  $VAR(2)$  y en la [Figura 6](#) podemos observar los resultados de la IRF Generalizada usando el método de Pesaran y Shin.

En este caso, para construir las matrices de impulso respuesta, se debe calcular  $A_1$  y  $A_2$ , donde

$$\begin{aligned}A_1 &= \hat{\Phi}_1 A_0 = \hat{\Phi}_1 \\A_2 &= \hat{\Phi}_2 A_1 + \hat{\Phi}_1 A_0 = \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_1,\end{aligned}$$

una vez tenemos esto, calculamos las funciones de impulso respuesta. En este caso en particular, fijamos un horizonte de 100, por lo que vamos a tener un gráfico donde podemos observar el impacto de un shock en la ecuación de la variable  $y_i$  en cada una de las variables  $y_j$ .

En la primera columna de la [Figura 6](#), podemos ver como reaccionan las variables ante shocks en la inflación. Respecto al IMACEC, se genera un impacto positivo en el crecimiento, el cual comienza a disminuir hasta alrededor del periodo 50 para incluso llegar a decrecer, luego de esto se estabiliza. Respecto a la inflación, podemos ver un efecto positivo instantáneo, el cual cae rápidamente hasta caer a los valores negativos y luego se estabiliza en el periodo 100 aproximadamente. Por último, la TPM aumenta drásticamente luego del shock, para empezar a caer, y después de un periodo de tiempo se estabiliza.

En la segunda columna de gráficos de la [Figura 6](#) podemos observar como reaccionan las variables ante un shock en el IMACEC. El IMACEC reacciona aumentando su crecimiento en los primeros periodos, para luego ir desapareciendo en el tiempo, pasando por un periodo de decrecimiento y luego estabilizarse. Respecto a la inflación, se puede notar que tiene un efecto muy grande en los primeros periodos, el cual ya casi se disipa para el periodo 25, se estabiliza rápidamente. Por último, la TPM reacciona aumentando hasta el periodo 40 aproximadamente para luego decrecer y estabilizarse alrededor del periodo 100.

Funciones de Respuesta  
al Impulso

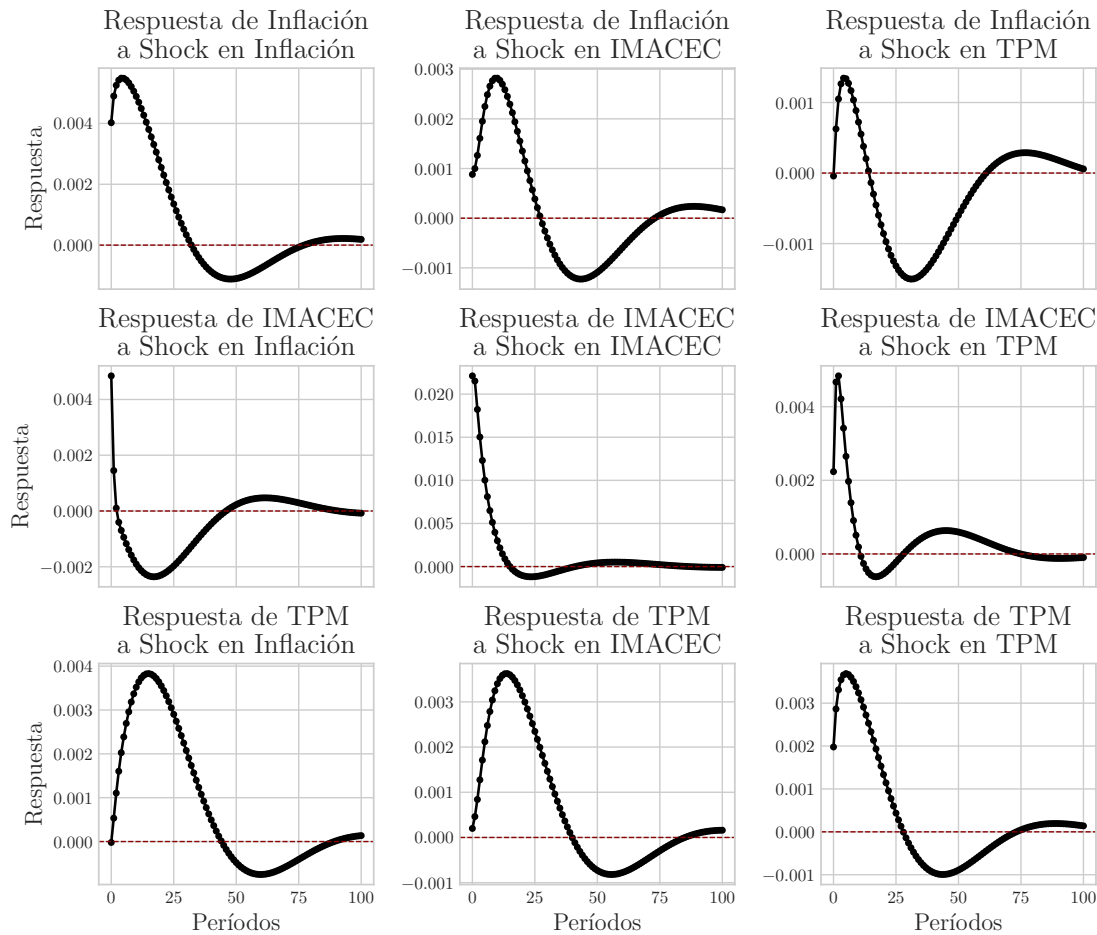


Figura 6: IRF Generalizado

En la tercera columna, tenemos el efecto de un shock en la TPM sobre las variables de interés. En el IMACEC se ve un leve aumento en el crecimiento pero este cae rápidamente hasta empezar a decrecer por un largo periodo de tiempo, luego se logra estabilizar. La inflación, parecida al caso anterior, aumenta levemente para caer rápidamente y luego mantenerse relativamente estable en el tiempo. Por último, el impacto en la TPM es que los periodos siguientes del shock, aumenta levemente para empezar a caer en el tiempo, pasando por un periodo de tiempo negativo y luego estabilizarse.



## Conclusión

Para concluir, en esta pregunta revisamos la función de impulso-respuesta de Pesaran y Shin, donde analizamos el impacto de un shock del IMACEC, inflación y TPM, donde analizamos su dinámica en el tiempo. Estos resultados que obtuvimos muestran que ante cualquier shock individual en cada una de las variables, estos se disipan en el tiempo, lo cual es acorde a que el modelo VAR(2) estimado es débilmente estacionario.

## Pregunta 1.F: IRF con proyecciones locales

En esta sección, junto a una presentación sucinta de la teoría detrás de las proyecciones locales, utilizaremos las herramientas provistas por las proyecciones locales (LP de aquí en adelante por su sigla en inglés) para calcular la función de impulso respuesta.

### Teoría

Siguiendo a Montiel et al. (2025) [8], las LP buscan estimar el efecto causal dinámico de shocks en outcomes determinados:

$$y_{t+h} = \mu_h + \theta_h^{LP} \cdot x_t + \gamma_h' \cdot r_t + \sum_{j=1}^p \delta_{h,j}' \cdot w_{t-j} + \epsilon_{h,t}$$

, donde  $Y_t$  es el outcome (escalar),  $x_t$  el shock (escalar),  $r_t$  controles contemporáneos y  $w_t$  controles rezagados. El IRF se obtendrá del coeficiente theta.

Este shock suele no estar “limpio”, sino se encuentra correlacionado con otras variables control. Para lidiar con esto, se debe efectuar un proceso en dos etapas, primero regresionando el shock respecto a los controles, para así obtener el residuo estimado, el que luego será utilizado como el shock "puro".<sup>en</sup> la ecuación presentada más arriba.

Mientras los modelos VAR( $p$ ) presentan un error estándar menor tanto en muestras pequeñas como grandes, los LP poseen una mejor performance en lo que respecta al sesgo. Esto último se explica en gran medida a la interdependencia que tiene la estructura del VAR. Una mala decisión, por ejemplo, en la elección del  $p$ , podría sesgar fuertemente la estimación (Montiel et al, 2025).

En el caso particular de nuestro problema, estudiaremos el efecto que tiene el shock de política monetaria sobre las variables de inflación y crecimiento; los shocks de inflación sobre TPM y crecimiento; y los shocks de crecimiento sobre TPM e inflación. Como se comentaba previamente, para ello primero planteamos una primera regresión que tiene al shock como la variable dependiente y a los rezagos de las variables independientes como controles. Será el residuo estimado de esa regresión el shock limpio. Para verlo de una forma más práctica si, por ejemplo, la TPM en un mes determinado fuera 5,2 %, pero un 5 % es explicado por los controles, estaríamos diciendo que el Banco Central subió la tasa 0.2 puntos más de lo que se esperaba dada la historia económica (shock contractivo sorpresivo).

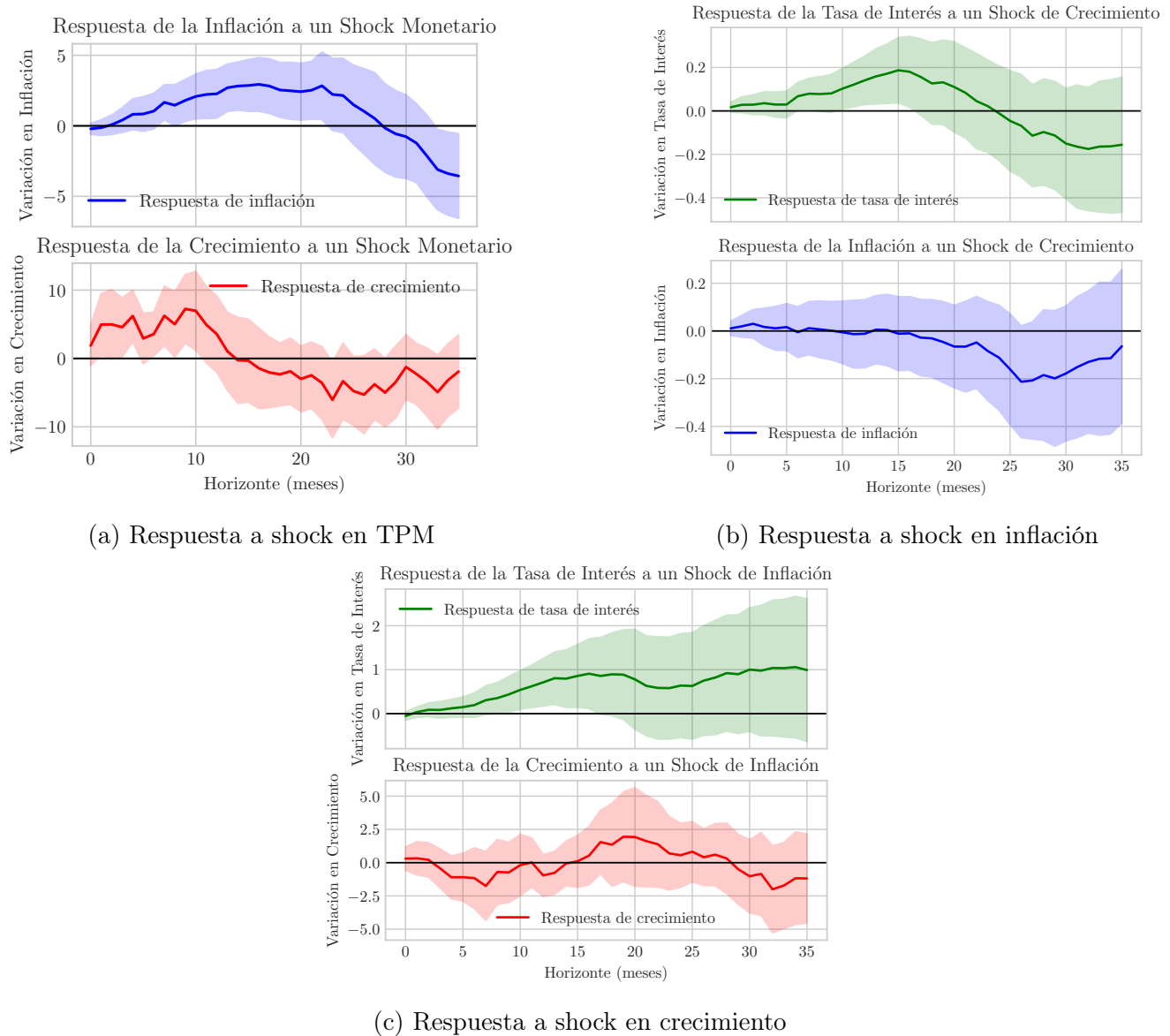


Figura 7: Análisis completo de shocks económicos

Dos aspectos fundamentales del modelo son el número de rezagos a considerar y el horizonte de la evaluación. El primer factor resulta relevante para la primera regresión descrita (para determinar el residuo), mientras el horizonte será relevante en la regresión final. En ambos casos nos valdremos de la prolífica literatura levantada sobre el tema.

Para datos de inflación, crecimiento y TPM, investigaciones sugieren que una regla práctica es definir un  $p$  de 12 rezagos base más un número variable de 3 a 6 rezagos adicionales (Ghysels et

al., 2016 [2]; Stock y Watson, 2012 [11]). Por otro lado, para el caso del horizonte de análisis el trabajo de Romer y Romer (2004) [10] da luces importantes respecto al horizonte a considerar en series de este tipo: entre 24 a 36 meses para datos anualizados. Óscar Jordá y otros [5] sintetizan ambos elementos en su trabajo "Monetary policy transmission and the long-term interest rate" utilizando un  $p$  igual a 12 meses y un horizonte de 36 meses.

En la siguiente figura se presenta la función de impulso respuesta, junto a un intervalo del 95 %

## Resultados

Para el caso de la respuesta a un shock en la TPM (a), la respuesta de  $\pi_t$  es positiva en horizontes cortos-medios y tiende a moderarse y disminuir más adelante. Estos resultados sugieren la presencia de un price puzzle: tras un shock contractivo la inflación sube transitoriamente. En el caso del crecimiento económico, el efecto es menor en horizontes pequeños, pero se vuelve negativa en horizontes intermedios-largos. El efecto contractivo aparece con rezago, lo que calza con la transmisión monetaria usual.

En el caso de shock en la inflación (b) la respuesta de la tasa de interés será aumentar en el corto y mediano plazo progresivamente. El aumento es suave, es decir, no existe una respuesta agresiva de la TPM ante shocks inflacionarios. En el caso del crecimiento, el shock inflacionario se asocia en el horizonte inmediato a un aumento de la actividad económica, para luego impactarlo negativamente en el mediano plazo, y finalmente recuperarse en el largo plazo. Lo anterior coincide con el patrón "hump-shaped". Un shock inflacionario podría en el corto impulsar la oferta ante la expectativa de aumento de precios, para luego impactar al crecimiento en el mediano plazo. Finalmente, gracias al ajuste de expectativas o el carácter transitorio del shock, se recupera la senda de crecimiento. En el caso de shock en el crecimiento (c) la respuesta de la tasa de interés será aumentar en el corto y mediano plazo, para disminuir en el largo plazo. Lo anterior conversa de buena forma con las acciones tomadas por el Banco Central ante el "sobrecalentamiento" de la economía. Por parte de la inflación, el shock en el crecimiento tiene un efecto positivo de corto plazo, aunque dicho efecto se diluye en el mediano plazo y cae en el largo plazo. Lo anterior podría explicarse por un posible efecto del shock en la oferta agregada.

Finalmente, puede observarse cierta coincidencia en el comportamientos de las funciones de impulso respuesta calculadas vía LP, respecto a las funciones presentadas en la sección anterior. Ahora bien, en la intensidad de las pendientes puede observarse diferencias, las que posiblemente se deban a las elecciones de  $p$  hechas en cada método.



## Conclusión

Los LP muestran un patrón coherente con la teoría en materia respecto a los shocks en la tasa de interés, el crecimiento y la inflación. Muy probablemente la elección del  $p$  es lo que alejó más la función impulso calculada por LP (la que se valió de la literatura para su definición) respecto al método VAR( $p$ ).



## Conclusiones

Este trabajo buscó aplicar un conjunto de técnicas teóricas y computacionales vistas en la unidad de vectores autorregresivos (VAR) para analizar las dinámicas entre el crecimiento económico (IMACEC), la inflación (IPC) y la tasa de política monetaria (TPM) en Chile. A través de la implementación de modelos VAR, tests de causalidad de Granger, funciones de impulso-respuesta (IRF) bajo distintos esquemas de identificación (Cholesky, IVAR, IRF generalizadas de Pesaran-Shin y proyecciones locales), y descomposiciones de varianza, se logró caracterizar las interacciones temporales y estructurales entre estas variables macroeconómicas clave.

Los resultados muestran evidencia de una relación significativa desde el crecimiento económico hacia la inflación en el corto plazo, consistente con la teoría de la curva de Phillips, aunque esta relación se atenúa al incluir rezagos adicionales. Además, se identificaron respuestas coherentes de la política monetaria: la TPM reacciona positivamente a shocks inflacionarios y de crecimiento, mientras que un shock contractivo en la TPM reduce la actividad económica con cierto rezago.

La comparación entre metodologías de identificación (Cholesky, IRF generalizadas y proyecciones locales) nos entregó que, si bien los resultados cualitativos son robustos en términos de dirección y signo de las respuestas, existen diferencias en la intensidad y persistencia de los efectos, destacando la sensibilidad de los modelos VAR al ordenamiento de variables. Las proyecciones locales, en particular, muestran ventajas en cuanto a menor sesgo en la especificación dinámica.

Por ultimo, además de abordar e intentar cumplir consistentemente los objetivos propios de la tarea y del curso, estas metodologías proporcionan una sólida base para futuros análisis para política económica en Chile, subrayando la necesidad de integrar evidencia empírica robusta con fundamentos teóricos sólidos en el diseño de políticas macroeconómicas.





## Anexo 1

Calculando las IRF para cada shock  $j$  por separado:

$$\text{Para } j = 1 : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} \sigma_1 = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma \\ c\alpha + d\gamma \end{bmatrix} \sigma_1$$

$$\text{Para } j = 2 : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} a\beta + b\delta \\ c\beta + d\delta \end{bmatrix} \sigma_2$$

Calculando de forma matricial todas las IRF al mismo tiempo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a\alpha + b\gamma)\sigma_1 & (a\beta + b\delta)\sigma_2 \\ (c\alpha + d\gamma)\sigma_1 & (c\beta + d\delta)\sigma_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\Psi B_0 D^{1/2} = \left[ \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma \\ c\alpha + d\gamma \end{bmatrix} \sigma_1, \begin{bmatrix} a\beta + b\delta \\ c\beta + d\delta \end{bmatrix} \sigma_2 \right].$$

Como se observa, es correcto calcular todas las IRF al mismo tiempo.



## Referencias

- [1] Walter Enders. *Applied Econometric Time Series*. Wiley, New York, 2nd edition, 2004.
- [2] Eric Ghysels, Leonardo Iania, and Jonas Striaukas. Macroeconomic forecasting and structural change. *Journal of Applied Econometrics*, 31(7):1375–1398, 2016.
- [3] C. W. J. Granger. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 37(3):424–438, 1969.
- [4] J.D. Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 2020.
- [5] Òscar Jordà, Moritz Schularick, Alan M Taylor, and Felix Ward. Monetary policy transmission and the long-term interest rate. *FRBSF Economic Letter*, 9:1–5, 2019.
- [6] Robert E. Lucas. Understanding business cycles. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5:7–29, 1977.
- [7] Helmut Lütkepohl. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin, 2005.
- [8] José Luis Montiel Olea, Mikkel Plagborg-Møller, and Christian K Wolf. When can local projections and vars be used for structural inference? a primer for macroeconomists. *Journal of Economic Perspectives*, 39(1):223–248, 2025.
- [9] A. W. Phillips. The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957. *Economica*, 25(100):283–299, 1958.
- [10] Christina D Romer and David H Romer. A new measure of monetary shocks: Derivation and implications. *American Economic Review*, 94(4):1055–1084, 2004.
- [11] James H Stock and Mark W Watson. Generalized shrinkage methods for forecasting using many predictors. *Journal of Business Economic Statistics*, 30(4):481–493, 2012.