

Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

2020/2021 — Seconda parte

Mattia Bonaccorsi — 124610 – bonaccorsi.mattia@spes.uniud.it

Muhammed Kouate — 137359 – kouate.muhammed@spes.uniud.it

Enrico Stefanel — 137411 – stefanel.enrico@spes.uniud.it

Andriy Torchanyyn — 139535 – torchanyyn.andriy@spes.uniud.it

27 aprile 2021

Indice

1	Alberi binari di ricerca semplici	2
1.1	Definizione di <i>BST</i>	2
1.2	Implementazione della struttura dati	2
1.3	Difetti dei <i>BST</i>	4
2	Alberi binari di ricerca di tipo AVL	4
2.1	Definizione di Albero <i>AVL</i>	4
2.2	Implementazione della struttura dati	5
2.3	Miglioramenti degli Alberi AVL rispetto ai <i>BST</i>	7
3	Alberi binari di ricerca di tipo Red-Black	8
3.1	Definizione di <i>RB Tree</i>	8
3.2	Implementazione della struttura dati	8

1 Alberi binari di ricerca semplici

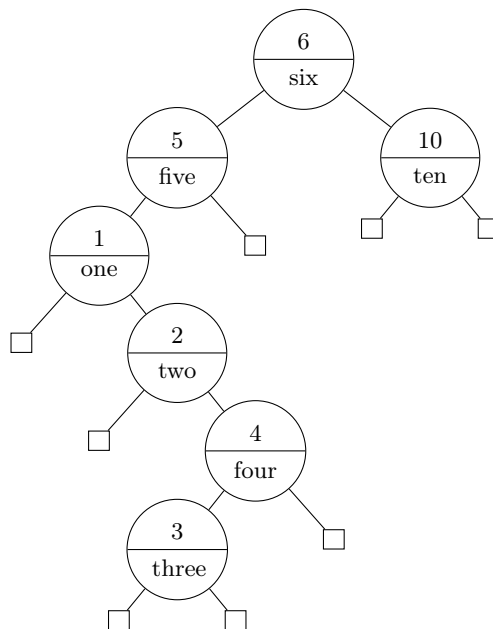
1.1 Definizione di *BST*

Un *albero binario di ricerca* (o *BST*) T è una struttura dati ad albero, in cui valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \forall x \in T, \forall y \in \text{left}(T) &\rightarrow y.\text{key} < x.\text{key} \\ \forall x \in T, \forall z \in \text{right}(T) &\rightarrow z.\text{key} > x.\text{key} \end{aligned} \quad (\star)$$

dove $k.\text{key}$ indica il valore della chiave di k , e $\text{left}(B)$ (rispettivamente $\text{right}(B)$) indica il sotto-albero sinistro (rispettivamente destro) di B .

Esempio Un *BST* di tipo semplice, in cui ogni nodo contiene una chiave numerica dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ e un campo alfanumerico di tipo stringa, è il seguente:



Bisogna notare che non è l'unico *BST* costruibile partendo dallo stesso insieme di chiavi. Un'alternativa, per esempio, potrebbe essere stata quella di utilizzare il valore minore come chiave per la radice dell'albero, e attaccare in ordine crescente le altre chiavi, ognuna come figlio destro del nodo precedente.

1.2 Implementazione della struttura dati

```
1 class Node():
2     def __init__(self, value, str_name):
3         self.key = value
4         self.name = str_name
```

```

5         self.left = None
6         self.right = None
7
8
9     def bst_insert(root, value, str_name):
10         """
11         insert a key value in a tree
12         :param root: BSTNode object that represents
13             the root of the tree
14         :param value: an integer representing the value to insert
15         :param str_name: a string corresponding to
16             the literal format of the value
17         :return: a BSTNode object
18         """
19         if root is None:
20             return Node(value, str_name)
21
22         if value < root.key:
23             root.left = bst_insert(root.left, value, str_name)
24         else:
25             root.right = bst_insert(root.right, value, str_name)
26
27         return root
28
29
30     def bst_find(root, value):
31         """
32         print the found value in a literal format
33         :param root: BSTNode object that represents
34             the root of the tree
35         :param value: an integer representing the value to find
36         """
37         if root is None:
38             return
39
40         if root.key == value:
41             print(root.name)
42
43         if root.key < value:
44             return bst_find(root.right, value)
45
46         return bst_find(root.left, value)
47
48
49     def bst_show(root):
50         """
51         print the tree in a preorder visit
52         :param root: BSTNode object that represents
53             the root of the tree

```

```

54     """
55     if root:
56         print(
57             str(root.key), root.name,
58             sep=":",
59             end=" "
60         )
61         bst_show(root.left)
62         bst_show(root.right)
63     else:
64         print("NULL", end=" ")

```

sources/bst.py

1.3 Difetti dei *BST*

Questa struttura dati ha alcuni difetti ...

2 Alberi binari di ricerca di tipo AVL

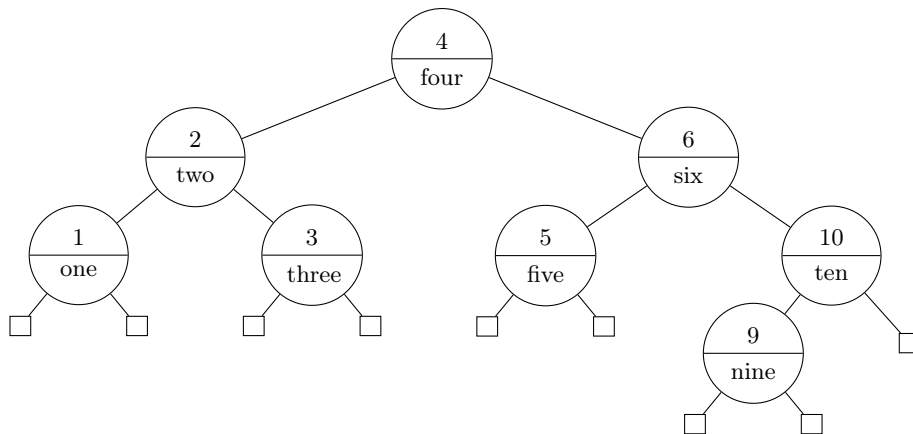
2.1 Definizione di Albero *AVL*

Un *albero AVL* T è un *BST* (\star), in cui vale la seguente proprietà:

$$\forall x \in T \rightarrow |h(\text{left}(x)) - h(\text{right}(x))| \leq 1 \quad (*)$$

dove $h(k)$ indica il valore dell'altezza dell'albero radicato in k , e $\text{left}(B)$ (rispettivamente $\text{right}(B)$) indica il sotto-albero sinistro (rispettivamente destro) di B .

Esempio Un Albero *AVL* in cui ogni nodo contiene una chiave numerica dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ e un campo alfanumerico di tipo stringa, è il seguente:



, dove, ad esempio, $\text{left}(\text{root})$ ha altezza 2, mentre $\text{right}(\text{root})$ ha altezza 3.

2.2 Implementazione della struttura dati

```
1 class AVLNode():
2     def __init__(self, value, str_name):
3         self.key = value
4         self.name = str_name
5         self.left = None
6         self.right = None
7         self.height = 1
8
9
10 def avl_insert(root, value, str_name):
11     """
12     insert a key value in a tree
13     :param root: AVLNode object that represents
14         the root of the tree
15     :param value: an integer representing the value to insert
16     :param str_name: a string corresponding to
17         the literal format of the value
18     :return: an AVLNode object
19     """
20     if root is None:
21         return AVLNode(value, str_name)
22
23     if value < root.key:
24         root.left = avl_insert(root.left, value, str_name)
25     else:
26         root.right = avl_insert(root.right, value, str_name)
27
28     root.height = 1 + max(getHeight(root.left), getHeight(root.right))
29
30     balance = getBalance(root)
31
32     # LL
33     if balance > 1 and value < root.left.key:
34         return rightRotate(root)
35
36     # RR
37     if balance < -1 and value > root.right.key:
38         return leftRotate(root)
39
40     # LR
41     if balance > 1 and value > root.left.key:
42         root.left = leftRotate(root.left)
43         return rightRotate(root)
44
45     # RL
46     if balance < -1 and value < root.right.key:
47         root.right = rightRotate(root.right)
```

```

48         return leftRotate(root)
49
50     return root
51
52
53 def avl_show(root):
54     """
55     print the tree in a preorder visit
56     :param root: AVLNode object that represents
57         the root of the tree
58     """
59     if root:
60         print(
61             str(root.key), root.name, str(root.height),
62             sep=":",
63             end=" "
64         )
65         avl_show(root.left)
66         avl_show(root.right)
67     else:
68         print("NULL", end=" ")
69
70
71 def avl_find(root, value):
72     """
73     print the found value in a literal format
74     :param root: AVLNode object that represents
75         the root of the tree
76     :param value: an integer representing the value to find
77     """
78     if root is None:
79         return
80
81     if root.key == value:
82         print(root.name)
83
84     if root.key < value:
85         return avl_find(root.right, value)
86
87     return avl_find(root.left, value)
88
89 #####
90
91
92 def getHeight(root):
93     if root is None:
94         return 0
95     else:
96         return root.height

```

```

97
98
99 def getBalance(root):
100     if root is None:
101         return 0
102     else:
103         return getHeight(root.left) - getHeight(root.right)
104
105
106 def rightRotate(z):
107     y = z.left
108     T = y.right
109
110     y.right = z
111     z.left = T
112
113     z.height = 1 + max(getHeight(z.left), getHeight(z.right))
114
115     y.height = 1 + max(getHeight(y.left), getHeight(y.right))
116
117     return y
118
119
120 def leftRotate(z):
121     y = z.right
122     T = y.left
123
124     y.left = z
125     z.right = T
126
127     z.height = 1 + max(getHeight(z.left), getHeight(z.right))
128
129     y.height = 1 + max(getHeight(y.left), getHeight(y.right))
130
131     return y

```

sources/avl.py

2.3 Miglioramenti degli Alberi AVL rispetto ai *BST*

Questa struttura dati migliora alcuni aspetti dei *BST* ...

3 Alberi binari di ricerca di tipo Red-Black

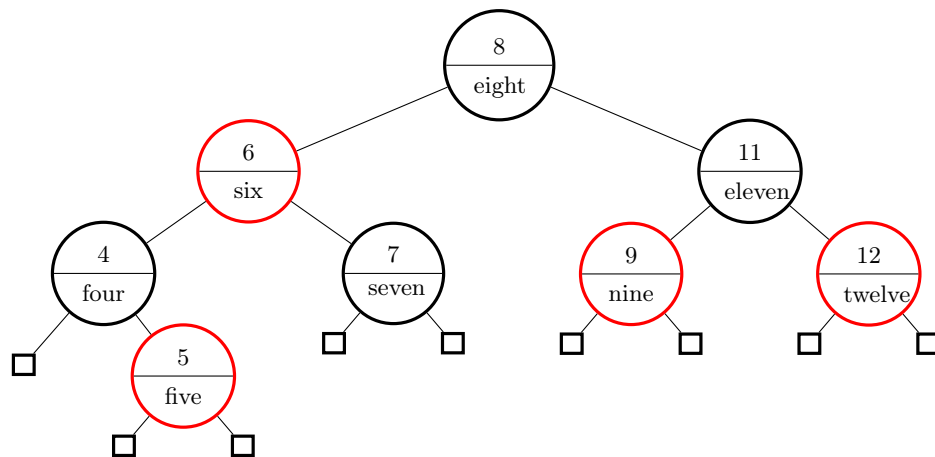
3.1 Definizione di *RB Tree*

Un albero di tipo *Red-Black* (o *RB Tree*) T è un *BST* (\star), in cui ogni nodo ha associato un campo "colore", che può assumere valore *rosso* o *nero*, ed inoltre vale che:

$$\forall x \in T \rightarrow h_b(\text{left}(x)) = h_b(\text{right}(x)) \quad (\bullet)$$

dove $h_b(x)$ indica l'altezza nera dell'albero radicato in x , ovvero il massimo numero di nodi neri lungo un possibile cammino da x a una foglia.

Esempio Un *BST* di tipo Red-Black, in cui ogni nodo contiene una chiave numerica dell'insieme $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$ e un campo alfanumerico di tipo stringa, è il seguente:



3.2 Implementazione della struttura dati

```
1 class RBTreeNode():
2     def __init__(self, value, str_name):
3         self.key = value
4         self.name = str_name
5         self.parent = None
6         self.left = None
7         self.right = None
8         self.color = "red"
9
10
11 class RedBlackTree():
12     def __init__(self):
13         self.TNIL = RBTreeNode(None, None)
14         self.TNIL.color = "black"
15         self.TNIL.left = None
16         self.TNIL.right = None
```



```

17         self.root = self.TNIL
18
19     def left_rotate(self, x):
20         y = x.right
21         x.right = y.left
22
23         if y.left != self.TNIL:
24             y.left.parent = x
25
26         y.parent = x.parent
27
28         if x.parent == self.TNIL:
29             self.root = y
30         elif x == x.parent.left:
31             x.parent.left = y
32         else:
33             x.parent.right = y
34
35         y.left = x
36         x.parent = y
37
38     def right_rotate(self, x):
39         y = x.left
40         x.left = y.right
41
42         if y.right != self.TNIL:
43             y.right.parent = x
44
45         y.parent = x.parent
46
47         if x.parent == self.TNIL:
48             self.root = y
49         elif x == x.parent.right:
50             x.parent.right = y
51         else:
52             x.parent.left = y
53
54         y.right = x
55         x.parent = y
56
57     def rbt_insert(self, value, str_name):
58
59         z = RBTreeNode(value, str_name)
60         z.left = self.TNIL
61         z.right = self.TNIL
62
63         y = self.TNIL
64         x = self.root
65

```

```

66         while x != self.TNIL:
67             y = x
68             if z.key < x.key:
69                 x = x.left
70             else:
71                 x = x.right
72
73         z.parent = y
74
75         if y == self.TNIL:
76             self.root = z
77         elif z.key < y.key:
78             y.left = z
79         else:
80             y.right = z
81
82         self.insert_fix_up(z)
83
84     def insert_fix_up(self, z):
85         while z.parent.color == "red":
86             if z.parent == z.parent.parent.right:
87                 y = z.parent.parent.left
88                 if y.color == "red":
89                     y.color = "black"
90                     z.parent.color = "black"
91                     z.parent.parent.color = "red"
92                     z = z.parent.parent
93             else:
94                 if z == z.parent.left:
95                     z = z.parent
96                     self.right_rotate(z)
97                     z.parent.color = "black"
98                     z.parent.parent.color = "red"
99                     self.left_rotate(z.parent.parent)
100         else:
101             y = z.parent.parent.right
102
103             if y.color == "red":
104                 y.color = "black"
105                 z.parent.color = "black"
106                 z.parent.parent.color = "red"
107                 z = z.parent.parent
108             else:
109                 if z == z.parent.right:
110                     z = z.parent
111                     self.left_rotate(z)
112                     z.parent.color = "black"
113                     z.parent.parent.color = "red"
114                     self.right_rotate(z.parent.parent)

```

```

115         if z == self.root:
116             break
117         self.root.color = "black"
118
119
120 def rbt_show(root):
121     """
122     print the tree in a preorder visit
123     :param root: RBTNode object that represents
124         the root of the tree (accessed by t.root in the calling)
125     """
126     if root.key is None:
127         print("NULL", end=" ")
128         return
129     if root.name is None:
130         print("NULL", end=" ")
131         return
132     if root:
133         print(
134             str(root.key), root.name, str(root.color),
135             sep=":",
136             end=" "
137         )
138         rbt_show(root.left)
139         rbt_show(root.right)
140     else:
141         print("NULL", end=" ")
142
143
144 def rbt_find(root, value):
145     """
146     print the found value in a literal format
147     :param root: RBTNode object that represents
148         the root of the tree (accessed by t.root in the calling)
149     :param value: an integer representing the value to find
150     """
151     if root.key is None:
152         return
153     if root.name is None:
154         return
155     if root is None:
156         return
157
158     if root.key == value:
159         print(root.name)
160
161     if root.key < value:
162         return rbt_find(root.right, value)
163

```

```
164     return rbt_find(root.left, value)
```

[sources/rbt.py](#)