Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati
2020/2021 — Prima parte

Mattia Bonaccorsi — 124610 – bonaccorsi.mattia@spes.uniud.it
Muhamed Kouate — 137359 – kouate.muhamed@spes.uniud.it
Enrico Stefanel — 137411 – stefanel.enrico@spes.uniud.it
Andriy Torchanyn — 139535 – torchanyn.andriy@spes.uniud.it

18 aprile 2021

Indice

1 Il periodo frazionario **2**

2 Algoritmo *PeriodNaïve* **2**
2.1 Descrizione dell'algoritmo . . . 2
2.2 Codice dell'algoritmo . . . 2
2.2.1 Osservazioni sul codice . . . 3

3 Algoritmo *PeriodSmart* **3**
3.1 Descrizione dell'algoritmo . . . 3
3.2 Codice dell'algoritmo . . . 4

4 Calcolo dei tempi di esecuzione dei due algoritmi **4**
4.1 Calcolo della precisione del sistema . . . 4
4.2 Generazione dell'*array* delle dimensioni degli input . . . 5
4.3 Generazione dell'*array* degli input . . . 6
4.4 Calcolo del tempo medio . . . 7
4.5 Risultati della sperimentazione . . . 8

5 Ulteriori osservazioni **9**
5.1 Caso pessimo per l'algoritmo PeriodNaïve . . . 9
5.1.1 Ideazione dell'input . . . 9
5.2 Codice dell'algoritmo . . . 10
5.2.1 Risultati della sperimentazione . . . 11

1 Il periodo frazionario

Definizione Il *periodo frazionario minimo* di una stringa s è il più piccolo intero $p > 0$ che soddisfa la proprietà

$$s(i) = s(i+p) \qquad \forall i = 1, \ldots, (n-p) \tag{$\star$}$$

dove n denota la lunghezza e $s(k)$ è il k-esimo carattere della stringa s.

Esempio Il *periodo frazionario minimo* della stringa `abcabcab` è 3, mentre il *periodo frazionario minimo* della stringa `aba` è 2.

Si implementano di seguito due algoritmi scritti in linguaggio Python3 per il calcolo del *periodo frazionario minimo* di una qualsiasi stringa.

In particolare, l'algoritmo *PeriodNaïve* con complessità $O(n^2)$, e l'algoritmo *PeriodSmart* con complessità $\Theta(n)$.

2 Algoritmo *PeriodNaïve*

2.1 Descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo utilizza un ciclo `for` con un intero p che varia da 1 a n e termina restituendo p alla prima iterazione che soddisfa la proprietà ($\star$). Quest'ultima viene verificata confrontando la congruenza tra il prefisso della stringa s fino alla posizione $n-p$, e il suffisso dalla posizione p fino al termine della stringa. Nel caso in cui queste parti combacino, la dimensione p è esattamente il *periodo frazionario minimo* cercato.

2.2 Codice dell'algoritmo

```
1  # Returns the minimum fractional period of s
2  def PeriodNaive(s):
3      assert s, "String can't be empty!"
4      n = len(s)
5      for p in range(1,n+1):
6          if(_isPeriod(s,p)):
7              return p
8
9  # Returns True if p is a fractional period of s,
10 # False otherwise.
11 def _isPeriod(s,p):
12     n = len(s)
13     return (s[:n-p] == s[p:])
```

sources/PeriodNaive.py

2.2.1 Osservazioni sul codice

Alternativamente al controllo della congruenza tra il prefisso $[1 \dots n-p]$ e suffisso $[p \dots n]$, la funzione *isPeriod* potrebbe venire implementata anche con un ciclo secondario per il controllo dell'uguaglianza tra $s(j)$ e $s(j+p)$, con j che varia da 1 a $n-p$. Tale implementazione sarebbe stata scritta così:

```
1 # Returns True if p is a fractional period of s,
2 # False otherwise.
3 def _isPeriod_2(s,p):
4     n = len(s)
5     for j in range(0,n-p):
6         if(s[j] != s[j+p]):
7             return False
8     return True
```

sources/PeriodNaive.py

Il motivo per cui non è stata scelta questa implementazione è che nel caso di un generico input s, il ciclo interno si sarebbe fermato alla prima disuguaglianza trovata. Questo avrebbe di certo ottimizzato l'algoritmo in pratica, ma avrebbe reso più difficile un confronto generale tra questo algoritmo e la versione *smart* illustrata di seguito, che ha un andamento lineare sulla dimensione dell'input.

3 Algoritmo *PeriodSmart*

3.1 Descrizione dell'algoritmo

Definizione Un *bordo* di una stringa s è una qualunque stringa t che sia, allo stesso tempo, prefisso proprio di s e suffisso proprio di s.

Si osserva che p è un periodo frazionario di s se e solo se $s = |p| - r$, dove r è la lunghezza di un bordo di s. Ciò permette di ridurre il problema del calcolo del periodo frazionario minimo di s al problema del calcolo della lunghezza massima di un bordo di s.

Per risolvere quest'ultimo problema si procede per induzione, calcolando per ogni prefisso $s[1, \dots, i]$, dal più corto al più lungo, la lunghezza $r(i)$ del bordo massimo di $s[1, \dots, i]$. Per implementare il passo induttivo da i a $i+1$ si consideri la sequenza

$$r(i) > r(r(i)) > r(r(r(i))) > \cdots > r^k(i) = 0$$

e si osserva che nel calcolo di $r(i+1)$ solamente i due casi seguenti possono darsi:

- per qualche indice $j \leq k$ vale l'uguaglianza $s[i+1] = s[r^j(i)+1]$. In tal caso, $r(i+1) = r^j(i)+1$ dove j è il primo indice per cui vale la suddetta uguaglianza;
- non esiste alcun indice $j \leq k$ che soddisfi l'uguaglianza $s[i+1] = s[r^j(i)+1]$. In tal caso, $r(i+1) = 0$.

3.2 Codice dell'algoritmo

```
# Returns the minimum fractional period of s
def PeriodSmart(s):
    n = len(s)
    pf = [0]
    for i in range (1, n):
        j = pf[i-1]
        while ((j > 0) and (s[i] != s[j])):
            j = pf[j-1]
        if (s[i] == s[j]):
            j += 1
        pf.append(j)
    return n - pf[n-1]
```

sources/PeriodSmart.py

4 Calcolo dei tempi di esecuzione dei due algoritmi

Si vogliono misurare i tempi medi di esecuzione dei due algoritmi *PeriodNaïve* e *PeriodSmart* al variare della lunghezza n della stringa fornita in input.

4.1 Calcolo della precisione del sistema

La precisione della misurazione sperimentale è data dal più piccolo intervallo di tempo che il nostro computer può misurare.

Possiamo stimare la risoluzione del *clock* di sistema utilizzando un ciclo `while` per calcolare l'intervallo minimo di tempo misurabile.

Successivamente si calcola il *tempo minimo ammissibile* in funzione della risoluzione stimata e dell'errore relativo ammissibile (pari, nel nostro caso, a 0.001).

```
# System time resolution
import time as t

TIME_ERROR = 0.001

start = t.time()
end = t.time()

while (start == end):
    end = t.time()

r = end - start
t_min = r*((1/TIME_ERROR)+1)
```

sources/Complexity.py

Il *tempo minimo ammissibile*, nel calcolatore utilizzato, è di `0.0009546279907226562` secondi.

4.2 Generazione dell'*array* delle dimensioni degli input

Si definisce un *array* `sizes` di lunghezze n dell'input con distribuzione esponenziale per ottenere un buon compromesso in termini di efficienza e di completezza dello studio. Tale *array* viene definito come l'insieme di tutti i valori $\lfloor A \cdot B^i \rfloor$, con $0 \leq i < 100$ e A, B calcolati opportunamente in modo da avere $n = 1000$ quando $i = 0$, e $n = 500000$ quando $i = 99$.

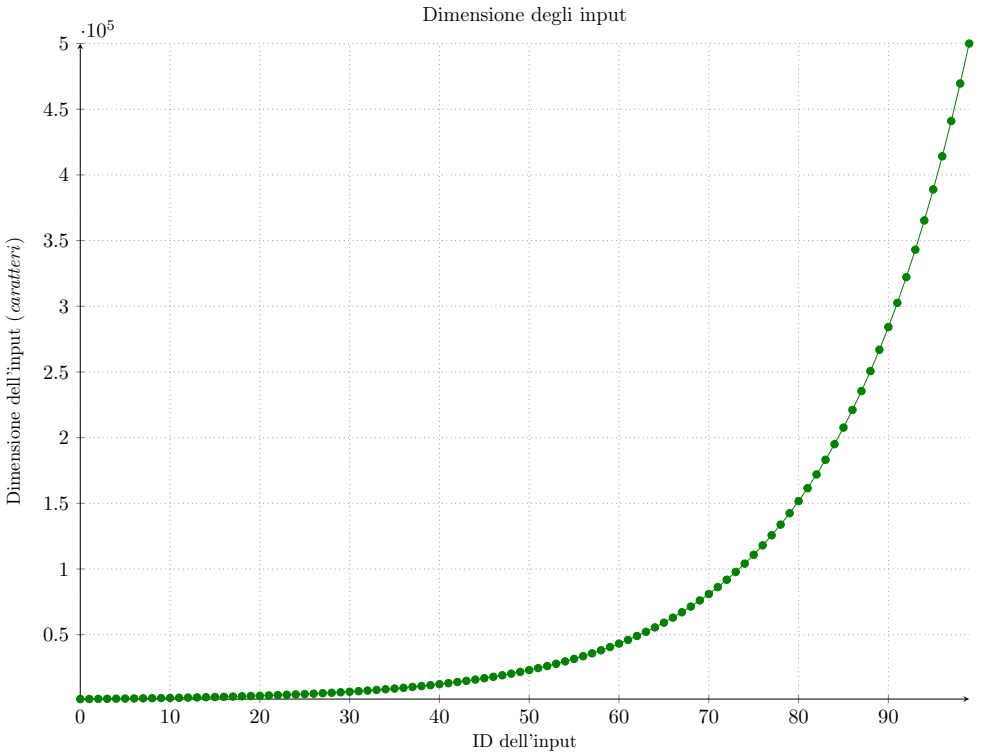
$$\lfloor A \cdot B^i \rfloor = 1000 \quad \text{se} \quad i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lfloor A \cdot 1 \rfloor = 1000 \quad \Rightarrow \quad A = 1000$$
$$\lfloor 1000 \cdot B^i \rfloor = 500000 \quad \text{se} \quad i = 99 \quad \Rightarrow \quad \lfloor B^{99} \rfloor = 500 \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt[99]{500}$$

```python
# Set chosen parameters
FIRST_SIZE = 1_000
LAST_SIZE = 500_000
RANGE = 100
```

sources/Complexity.py

```python
# Create an array with exponential sizes
# in range(FIRST_SIZE,LAST_SIZE)
def _getSizes(first_size, last_size, span):
    sizes = []
    a = first_size
    b = (last_size/first_size)**(float(1/(span-1)))
    for i in range(span):
        sizes.append(int(a*(b**i)))
    return sizes
```

sources/InputGenerator.py



4.3 Generazione dell'*array* degli input

Sono stati implementati diverse procedure per la generazione delle stringhe da utilizzare come input nel calcolo dei tempi di esecuzione degli algoritmi.

Dopo attente analisi e sperimentazioni, si è deciso di utilizzare la procedura *Random3*, descritta di seguito.

La stringa s di lunghezza n viene generata su un alfabeto ternario `{a,b,c}` in modo che ogni lettera $s(i)$ della stringa sia generata in modo pseudo-casuale indipendentemente dalle altre fino alla posizione $q - 1$, parametro scelto randomicamente nell'intervallo $[1, n]$. Ad $s(q)$ viene assegnato il carattere "`d`", mentre per le lettere rimanenti si procede assegnando a $s(i)$ il valore di $s((i-1) \mod q)$.

```
def InputGenerator(first_size, last_size, span):
    sizes = _getSizes(first_size, last_size, span)
    strings = []
    for size in sizes:
        strings.append(_StringGenerator_3(size))
    return strings
# Create a string of size 'size' using the same
# method of '_InputGenerator_2', but the character in position
# q will be different from the others ('d')
def _StringGenerator_3(size):
    q = random.randint(1, size)
```

```
12      s = (''.join(random.choices(['a', 'b', 'c'], k=q-1)))
13      s = s + 'd'
14      for i in range(q+1, size+1):
15          s = s + s[((i-1)%q)]
16      return s
```

sources/InputGenerator.py

Con questa implementazione, ci si aspetta che il risultato degli algoritmi coincida con la posizione del carattere "d", ovvero con il parametro q.

4.4 Calcolo del tempo medio

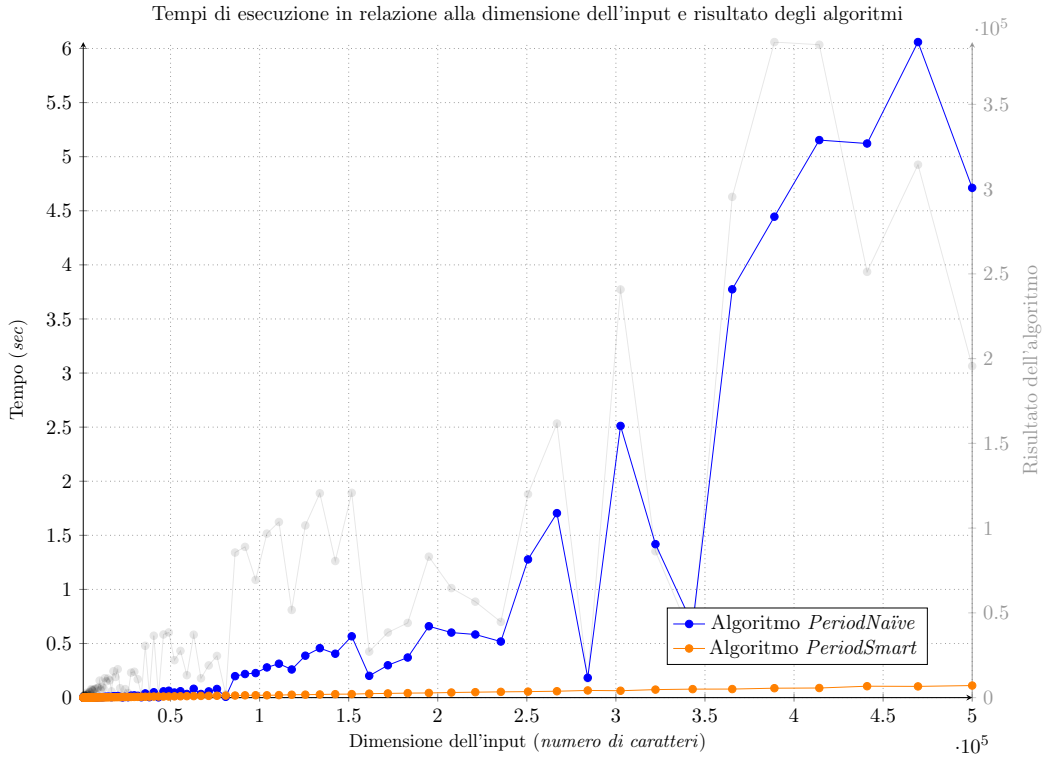
Vengono salvati in due array `growth_PN` e `growth_PS` rispettivamente i tempi di esecuzione dell'algoritmo *PeriodNaïve* e *PeriodSmart* al variare della lunghezza n della stringa fornita in input, seguendo la distribuzione indicata dall'array `strings` calcolata in precedenza.

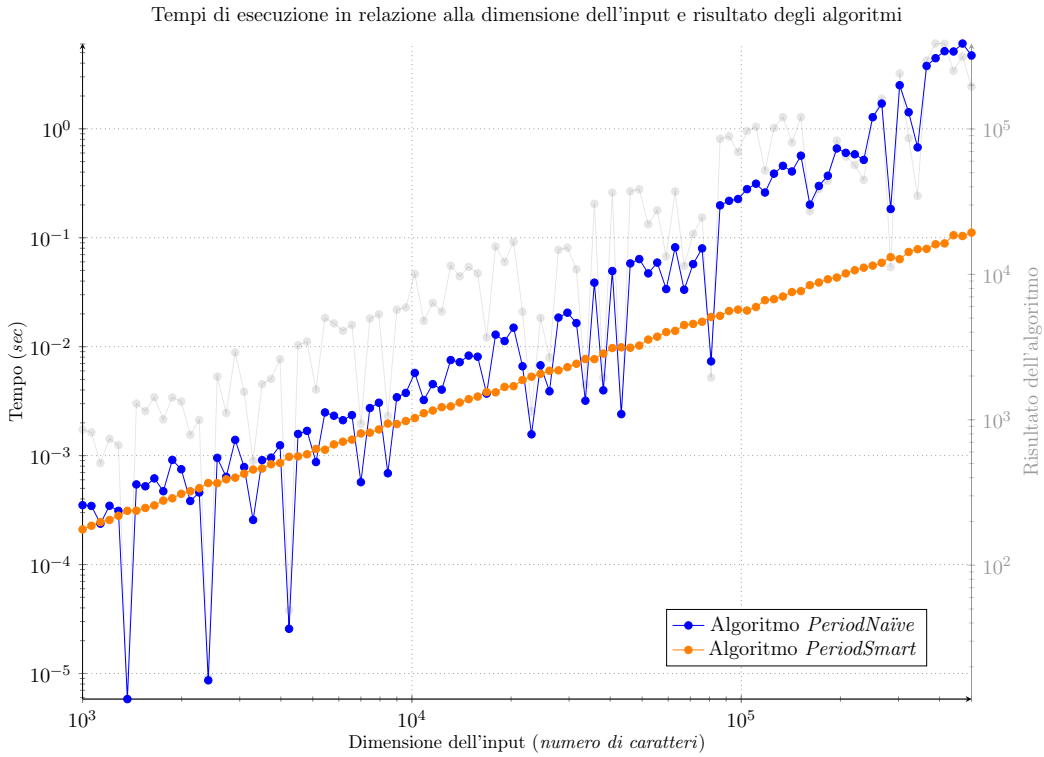
```
1  # Create an array with average timings from PeriodNaive
2  growth_PN = []
3  results_PN = []
4  for s in strings:
5      i = 0
6      t_passed = 0
7      while ( t_passed <= t_min ):
8          start = t.time()
9          result = PeriodNaive(s)
10         end = t.time()
11         i += 1
12         t_passed += end-start
13     results_PN.append(result)
14     growth_PN.append(t_passed/i)
15
16 # Create an array with average timings from PeriodSmart
17 growth_PS = []
18 results_PS = []
19 for s in strings:
20     i = 0
21     t_passed = 0
22     while ( t_passed <= t_min ):
23         start = t.time()
24         result = PeriodSmart(s)
25         end = t.time()
26         i += 1
27         t_passed += end-start
28     results_PS.append(result)
29     growth_PS.append(t_passed/i)
```

sources/Complexity.py

4.5 Risultati della sperimentazione

Visualizzando i risultati dei tempi di esecuzione con le rispettive lunghezze dell'input, si ottengono i grafici che seguono:





Entrambi i grafici confermano l'andamento lineare dell'algoritmo *PeriodSmart* al variare della dimensione dell'input.

Per quanto riguarda l'algoritmo *PeriodNaïve*, invece, i tempi di esecuzione sono molto più legati all'input: avendo inserito anche il risultato degli algoritmi, possiamo notare come un risultato molto inferiore alla dimensione dell'input coincida con un tempo di esecuzione molto ridotto. Al contrario, a risultati molto vicini alla dimensione dell'input coincide un tempo di esecuzione molto superiore. In generale, si può affermare dai grafici che la complessità di *PeriodNaïve* sia nell'ordine di n^2 nel caso peggiore, ovvero una complessità complessiva di $O(n^2)$.

5 Ulteriori osservazioni

5.1 Caso pessimo per l'algoritmo PeriodNaïve

5.1.1 Ideazione dell'input

Ritorniamo sul primo algoritmo proposto in questo studio

```
1  # Returns the minimum fractional period of s
2  def PeriodNaive(s):
3      assert s, "String can't be empty!"
4      n = len(s)
5      for p in range(1,n+1):
```

```
6           if(_isPeriod(s,p)):
7               return p
8
9   # Returns True if p is a fractional period of s,
10  # False otherwise.
11  def _isPeriod(s,p):
12      n = len(s)
13      return (s[:n-p] == s[p:])
```

sources/PeriodNaive.py

e ci chiediamo come debba essere formato un input che funga da caso pessimo.

Notiamo che il codice principale è composto da un ciclo `for` con indice p varia da 1 alla lunghezza dell'input, ma termina se la porzione della stringa dall'inizio fino alla posizione p è un periodo frazionario minimo. Dunque, per massimizzare i tempi di esecuzione, dobbiamo massimizzare la posizione p che rende vero il controllo citato.

Una possibile implementazione del codice per la creazione di tale input può essere formalizzato come segue: la stringa s di lunghezza n viene generata su un alfabeto ternario `{a,b,c}` in modo tale che per ogni sottostringa t che va da un carattere `a` non preceduto da altro `a`, al primo carattere `c` non seguito da un altro `c` è generata seguendo lo schema

$$t(i) = i * \mathtt{a} + i * \mathtt{b} + i * \mathtt{c}$$

dove $i * \mathtt{n}$ indica il carattere `n` ripetuto i volte. La stringa s così formata, viene troncata se necessario al raggiungimento del n-esimo carattere.

Esempi Un esempio di stringa formata in questo modo è:

$$s(30) = \underbrace{\mathtt{abc}}_{t(1)}\underbrace{\mathtt{aabbcc}}_{t(2)}\underbrace{\mathtt{aaabbbccc}}_{t(3)}\underbrace{\mathtt{aaaabbbbcccc}}_{t(4)},$$

mentre un altro esempio (con l'ultima sottostringa t "non completa") è

$$s(40) = \underbrace{\mathtt{abc}}_{t(1)}\underbrace{\mathtt{aabbcc}}_{t(2)}\underbrace{\mathtt{aaabbbccc}}_{t(3)}\underbrace{\mathtt{aaaabbbbcccc}}_{t(4)}\underbrace{\mathtt{aaaaabbbbbccccc}}_{t(5)}.$$

5.2 Codice dell'algoritmo

```
1   # Create a string of size 'size' in the form
2   # 'abcaabbccaaabbbccc...'
3   # This is also the worst input pattern for
4   # PeriodNaive algorithm
5   def _StringGenerator_4(size):
6       i = 0
7       s = ''
8       while len(s)<=size:
9           s = s + 'a'*i + 'b'*i + 'c'*i
10          i += 1
11      return s[:size+1]
```

`sources/InputGenerator.py`

5.2.1 Risultati della sperimentazione

Effettuando la sperimentazione con la stessa procedura descritta in precedenza, ma utilizzando la procedura *_StringGenerator_4* per la generazione delle stringhe, si ottiene un grafico con andamento quadratico.