Concrete Math: Homework 3

Due on April-06, 2022 at 14:00

Professor Chen Xue

SA21011018
Zhou Enshuai

2022 年 4 月 5 日

Problem 1

Let the prime factorization of $\binom{2n}{n}$ be

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le 2n} p^{\ell_p}$$

We have shown $\ell_p \le \lfloor \log_p 2n \rfloor$ for any p such that

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \le \prod_{p \le 2n} p^{\ell_p} \le (2n)^{\pi(2n)}$$

(a)

$$\frac{2^{2n}}{2n} \le \binom{2n}{n} \le (2n)^{\pi(2n)}$$
$$\pi(2n) \ge \log_{2n} \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{2n}{\log_2 n + 1} - 1$$

(b)

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \le \binom{2n}{n} \le 2^{2n}$$
$$\pi(2n) - \pi(n) \le \log_n 2^{2n} = \frac{2n}{\log_2 n}$$

可以找到唯一确定的整数 m 使得

$$2^{m-1} < n \le 2^m$$
$$\log_2 n \le m < \log_2 n + 1$$

可得

$$\pi(2^m) - \pi(2^{m-1}) \le \frac{2^m}{\log_2 2^{m-1}} = \frac{2^m}{m-1}$$
$$\pi(2^{m-1}) - \pi(2^{m-2}) \le \frac{2^{m-1}}{m-2}$$
$$\dots$$
$$\pi(2^2) - \pi(2^1) \le \frac{2^2}{2-1}$$

Problem 1 continued on next page...

对上面不等式累加求和

$$\begin{aligned}
\pi(2^m)-\pi(2^1) &\le \sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{k+1}}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{\lceil\frac{m-1}{4}\rceil}\frac{2^{k+1}}{k}+\sum_{k=\lceil\frac{m+3}{4}\rceil}^{\lceil\frac{m-1}{2}\rceil}\frac{2^{k+1}}{k}+\sum_{k=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{\lceil\frac{3m-3}{4}\rceil}\frac{2^{k+1}}{k}+\sum_{k=\lceil\frac{3m+1}{4}\rceil}^{m-1}\frac{2^{k+1}}{k}\\
&\le \sum_{k=1}^{\lceil\frac{m-1}{4}\rceil}\frac{2^{k+1}}{1}+\sum_{k=\lceil\frac{m+3}{4}\rceil}^{\lceil\frac{m-1}{2}\rceil}\frac{2^{k+1}}{\lceil\frac{m+3}{4}\rceil}+\sum_{k=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{\lceil\frac{3m-3}{4}\rceil}\frac{2^{k+1}}{\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}+\sum_{k=\lceil\frac{3m+1}{4}\rceil}^{m-1}\frac{2^{k+1}}{\lceil\frac{3m+1}{4}\rceil}\\
&\le \frac{2^{m+1}}{\lceil\frac{3m+1}{4}\rceil}+\frac{2^{\lceil\frac{3m+5}{4}\rceil}}{\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}+\frac{2^{\lceil\frac{m+3}{2}\rceil}}{\lceil\frac{m+3}{4}\rceil}+\frac{2^{\lceil\frac{m+7}{4}\rceil}}{1}\\
&\le \frac{\frac{8}{3}\cdot 2^m}{m}+\frac{2^{\lceil\frac{3m+5}{4}\rceil}}{\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}+\frac{2^{\lceil\frac{m+3}{2}\rceil}}{\lceil\frac{m+3}{4}\rceil}+\frac{2^{\lceil\frac{m+7}{4}\rceil}}{1}\\
&\le \frac{\frac{8}{3}\cdot 2^m}{m}+\frac{24\cdot 2^{\frac{3m}{4}}}{m}-1
\end{aligned}$$

所以

$$\pi(n)\le\pi(2^m)\le\frac{\frac{8}{3}\cdot 2^m}{m}+\frac{24\cdot 2^{\frac{3m}{4}}}{m}<\frac{\frac{16}{3}n}{\log_2 n}+\frac{24(2n)^{\frac{3}{4}}}{\log_2 n}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\pi(n)&<\frac{\frac{16}{3}n}{\log_2 n}+\frac{24(2n)^{\frac{3}{4}}}{\log_2 n}=\frac{16}{3}\cdot\frac{n}{\log_2 n}+o(\frac{n}{\log_2 n})\\
\pi(2n)&\ge\frac{2n}{\log_2 n+1}-1\\
\pi(6n)&\ge\frac{6n}{\log_2 n+2}-1=\frac{18}{3}\cdot\frac{n}{\log_2 n+2}-1
\end{aligned}$$

当 n 足够大时可以得到：

$$\pi(6n)\ge\frac{18}{3}\cdot\frac{n}{\log_2 n+2}-1>\frac{16}{3}\cdot\frac{n}{\log_2 n}+o(\frac{n}{\log_2 n})>\pi(n)$$

即

$$\begin{aligned}
\pi(6n)&>\pi(n)\\
\pi(6n)-\pi(n)&\ge 1
\end{aligned}$$

所以 $\exists N$, when $n>N$, $[n,6n]$ 内必存在一个素数。由于放缩的不精确性，可以逐一验证 $n\le N$ 时，$[n,6n]$ 内均存在素数。

(d)

若 p 在 $(n,2n]$ 内，则结论是平凡的，定理得证。下面只讨论小于 n 的素数 p。

先证明如下事实，对于任意正数 x 有：

$$\begin{aligned}
&\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=\lfloor 2\lfloor x\rfloor+2\{x\}\rfloor-2\lfloor x\rfloor=\lfloor 2\{x\}\rfloor\\
&\Rightarrow 0\le\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=\lfloor 2\{x\}\rfloor\le 1
\end{aligned}$$

根据书上 4.4 节的定理，n 的素因子分解中 p 的指数为：

$$\varepsilon(n!)=\sum_{k\ge 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

则：

$$\begin{aligned}\varepsilon_p\left(\binom{2n}{n}\right) &= \varepsilon_p\left((2n)!\right) - 2\varepsilon_p\left(n!\right)\\ &= \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\\ &= \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)\end{aligned}$$

设某一素数 p 满足 $p^l \leq 2n < p^{l+1}$。因为 $\forall x > 0$, $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor = \lfloor 2\{x\}\rfloor \leq 1$，所以：

$$\begin{aligned}\varepsilon_p\left(\binom{2n}{n}\right) &= \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)\\ &= \sum_{k\geq 1}\left\lfloor 2\{\frac{n}{p^k}\}\right\rfloor\\ &= \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor 2\{\frac{n}{p^k}\}\right\rfloor\cdot\left[\frac{n}{p^k}\geq 0.5\right]\right)\\ &\leq \sum_{k\geq 1}\left[\frac{2n}{p^k}\geq 1\right]\\ &= l\\ &= \max_s\{s|p^s\leq 2n\}\end{aligned}$$

可以得到 $p^{\ell_p} \leq 2n$。

(d.1)

当 $p \geq n$ 时，若 $\ell_p > 0$，则最终定理得证（$[n, 2n]$ 间存在素数）。所以不证明当 $n \geq p$ 的情况。

当 $\frac{2n}{3} < p < n$ 时，$n < 2p < 2n < 3p$，此时 $\varepsilon_p((2n)!) = 2$，且 $\varepsilon_p(n!) = 1$。所以

$$\ell_p = \varepsilon_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \varepsilon_p\left((2n)!\right) - 2\varepsilon_p\left(n!\right) = 2 - 2 = 0$$

(d.2)

当 $\sqrt{2n} \leq p \leq \frac{2n}{3}$ 时，若 $p = \sqrt{2n}$，则：

$$\begin{aligned}&p^2 = 2n\\ &\Rightarrow 2\backslash p\end{aligned}$$

这里不考虑 $p = 2$ 的情况（因为 $p = 2$ 时，$[2, 4]$ 内存在素数 3，定理得证），而 $2\backslash p$，推出矛盾。故 $p \neq \sqrt{2n}$，也即 $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}$。这样一来 $2n < p^2$，所以：

$$\ell_p = \varepsilon_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \max_s\{s|p^s\leq 2n\} = 1$$

(d.3)

下面证明 $\prod_{p\leq\frac{2n}{3}} p \leq 2^{\frac{4n}{3}}$。

当 $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$ 为奇数时，设 $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor = 2m + 1$

$$\prod_{p\leq\frac{2n}{3}} p = \prod_{p\leq\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor} p = \prod_{p\leq 2m+1} p$$

下证 $\prod_{p\leq 2m+1} p \leq 2^{4m+2}$：

用数学归纳法证明：
当 $m=1$ 时，$2\times 3<2^3$，不等式成立。
假设当 $m<k$ 时，不等式成立，则 $m=k$ 时：

$$\prod_{p\le 2k+1} p = \left(\prod_{p\le k+1} p\right)\cdot\left(\prod_{k+1<p\le 2k+1} p\right) \le 2^{2k+2}\cdot \prod_{k+1<p\le 2k+1} p$$

又因为 $\forall p\in[k+1,2k+1],\ p\backslash\binom{2k+1}{k+1}$，所以

$$\left(\prod_{k+1<p\le 2k+1} p\right)\Big\backslash\binom{2k+1}{k+1}$$

所以：

$$\begin{aligned}\prod_{k+1<p\le 2k+1} p &\le \binom{2k+1}{k+1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\binom{2k+1}{k+1}+\binom{2k+1}{k}\right)\\ &\le \frac{1}{2}\sum_{0\le l\le 2k+1}\binom{2k+1}{l}\\ &\le \frac{1}{2}\cdot 2^{2k+1}\\ &\le 2^{2k}\end{aligned}$$

将该结论代入上面不等式：

$$\begin{aligned}\prod_{p\le 2k+1} p &\le 2^{2k+2}\cdot\prod_{k+1<p\le 2k+1} p\\ &\le 2^{2k+2}\cdot 2^{2k}\\ &= 2^{4k+2}\end{aligned}$$

即 $m=k$ 时不等式也成立。所以证明了 $\prod_{p\le 2m+1} p\le 2^{4m+2}$。此时

$$\prod_{p\le\frac{2n}{3}} p = \prod_{p\le\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor} p = \prod_{p\le 2m+1} p \le 2^{4m+2} = 2^{2\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor} \le 2^{\frac{4n}{3}}$$

这便证明了 $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$ 为奇数时，$\prod_{p\le\frac{2n}{3}} p\le 2^{\frac{4n}{3}}$ 成立。
当 $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$ 为偶数时，$\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor-1$ 为奇数：

$$\prod_{p\le\frac{2n}{3}} p = \prod_{p\le\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor} p = \prod_{p\le\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor-1} p \le 2^{2(\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor-1)} \le 2^{\frac{4n}{3}}$$

即 $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$ 为偶数时不等式也成立。
综上，我们证明了 $\prod_{p\le\frac{2n}{3}} p\le 2^{\frac{4n}{3}}$。
(d.4)
下面用反证法证明 $[n,2n]$ 内必存在素数。假设 $[n,2n]$ 内不存在素数，那么

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\le 2n} p^{\ell_p} = \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p^{\ell_p}\cdot\prod_{\frac{2n}{3}<p<n} p^{\ell_p}\cdot\prod_{n\le p\le 2n} p^{\ell_p}$$

由前面三个已证明的定理可得：

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p^{\ell_p} \cdot \prod_{\frac{2n}{3}<p<n} p^{\ell_p} \cdot \prod_{n\le p\le 2n} p^{\ell_p} \\
&\le \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p^{\ell_p} \cdot \prod_{\frac{2n}{3}<p<n} p^{0} \\
&= \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p^{\ell_p} \\
&= \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p^{\ell_p-1} \cdot \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p \\
&= \prod_{p\le\sqrt{2n}} p^{\ell_p-1} \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p<\frac{2n}{3}} p^{\ell_p-1} \cdot \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p \\
&\le \prod_{p\le\sqrt{2n}} p^{\ell_p-1} \cdot \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p \\
&\le \prod_{p\le\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{p\le\frac{2n}{3}} p \\
&< (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}} \cdot 2^{\frac{4n}{3}}
\end{aligned}
$$

又因为 (a) 中已知 $\frac{2^{2n}}{2n} \le \binom{2n}{n}$，所以：

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{2n}}{2n} \le \binom{2n}{n} < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}} \cdot 2^{\frac{4n}{3}} \\
&\frac{2^{2n}}{2n} < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}} \cdot 2^{\frac{4n}{3}} \\
&2^{2n} < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}+1} \cdot 2^{\frac{4n}{3}}
\end{aligned}
$$

不等式两边取以 2 为底的对数：

$$
\begin{aligned}
&2n < (\frac{\sqrt{2n}}{2}+1)(\log_2 n+1) + \frac{4n}{3} \\
&\frac{2n}{3} < (\frac{\sqrt{2n}}{2}+1)(\log_2 n+1) \\
&\frac{2n}{3} < o(n)
\end{aligned}
$$

当 n 足够大时，$\frac{2n}{3} < o(n)$ 显然是不成立的，所以此时推出矛盾。即 $\exists N$, when $n > N$, $[n, 2n]$ 内必存在一个素数。这里 N 是可以很容易找出来的，那么对于小于 N 的 n，逐一验证即可（N 小于 1000，这里不再精确地寻找）。最终可以证明 $\forall n$, $[n, 2n]$ 内必存在一个素数。

Problem 2

设 $S(m,n)$ 是满足 $m \bmod k{+}n \bmod k \geq k$ 的所有整数 k 组成的集合.如 $S(7,9)=\{2,4,5,8,10,11,12,13,14,15,16\}$.
证明

$$\sum_{k\in S(m,n)} \varphi(k) = mn$$

Solution

先证明：

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq m\leq n}\sum_{d\backslash m}\varphi(d) &= \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{d\geq 1}\varphi(d)[d\backslash m] \\
&= \sum_{d\geq 1}\sum_{1\leq m\leq n}\varphi(d)[d\backslash m] \\
&= \sum_{d\geq 1}\left(\varphi(d)\sum_{1\leq m\leq n}[d\backslash m]\right) \\
&= \sum_{d\geq 1}\varphi(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor
\end{aligned}$$

观察下面等式：

$$\begin{aligned}
\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor &= \left\lfloor\frac{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor k + m \bmod k + \lfloor\frac{n}{k}\rfloor k + n \bmod k}{k}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + \frac{m \bmod k + n \bmod k}{k}\right\rfloor \\
&= \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m \bmod k + n \bmod k}{k}\right\rfloor
\end{aligned}$$

所以：

$$\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m \bmod k + n \bmod k}{k}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + 1 \Longleftrightarrow m \bmod k + n \bmod k \geq k$$

即：

$$\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor = 1 \Longleftrightarrow m \bmod k + n \bmod k \geq k$$

利用指示函数“[]”，可以得到：

$$\left(\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right) = \left[\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor = 1\right]$$

Problem 2 continued on next page...

可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in S(m,n)}\varphi(k) &= \sum_{\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor+1}\varphi(k)\\
&= \sum_{k\geq 1}\varphi(k)\left[\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor+1\right]\\
&= \sum_{k\geq 1}\varphi(k)\left(\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\\
&= \sum_{k\geq 1}\varphi(k)\left\lfloor\frac{m+n}{k}\right\rfloor-\sum_{k\geq 1}\varphi(k)\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor-\sum_{k\geq 1}\varphi(k)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\\
&= \sum_{1\leq k\leq m+n}\sum_{d\backslash k}\varphi(k)-\sum_{1\leq k\leq m}\sum_{d\backslash k}\varphi(k)-\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{d\backslash k}\varphi(k)\\
&= \sum_{1\leq k\leq m+n}k-\sum_{1\leq k\leq m}k-\sum_{1\leq k\leq n}k\\
&= \frac{(m+n)^2+m+n-m^2-m-n^2-n}{2}\\
&= mn
\end{aligned}$$

Problem 3

m 次单位根 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi i/m} = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$. $z^m - 1$ 在复数范围内的分解：

$$z^m - 1 = \prod_{0\le k<m} (z - \omega^k)$$

- 设 $\psi_m(z) = \prod_{0\le k<m, k\perp m} \left(z-\omega^k\right)$，证明 $z^m - 1 = \prod_{d\backslash m} \psi_d(z)$
- 证明 $\psi_m(z) = \prod_{d\backslash m} (z^d - 1)^{\mu(m/d)}$

Solution

a.

$$\begin{aligned}
z^m - 1 &= \prod_{0\le k<m} (z-\omega^k) \\
&= \prod_{0\le k<m} \prod_{d=gcd(m,k)} (z-\omega^k) \\
&= \prod_{0\le k<m} \prod_{d\ge 1} (z-\omega^k)^{[d=gcd(m,k)]} \\
&= \prod_{0\le k<m} \prod_{d\backslash m} (z-\omega^k)^{[d=gcd(m,k)]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k<m} (z-\omega^k)^{[d=gcd(m,k)]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k<m} (z-\omega^k)^{[m/d\perp k/d]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k/d<m/d} (z-\omega^{k/d\cdot d})^{[m/d\perp k/d]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k'<m/d} (z-\omega^{k'\cdot d})^{\left[m/d\perp k'\right]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k'<d} (z-\omega^{k'm/d})^{\left[d\perp k'\right]} \\
&= \prod_{d\backslash m} \prod_{0\le k'<d, d\perp k'} (z-\omega^{k'm/d}) \\
&= \prod_{d\backslash m} \psi_d(z)
\end{aligned}$$

证毕. 这里面需要注意的是：$\psi_d(z) = \prod_{0\le k<d, k\perp d} \left(z-\omega^k\right)$ 式中的 ω 指的是 d 次单位根.

b.

Problem 3 continued on next page...

观察待证等式，可以发现它和莫比乌斯反演类似，所以考虑证明乘法形式的反演, 代入 a 的结论可得：

$$\begin{aligned}
\prod_{d\backslash m}(z^d-1)^{\mu(m/d)} &= \prod_{d\backslash m}\left(\prod_{k\backslash d}\psi_k(z)\right)^{\mu(m/d)} \\
&= \prod_{d\backslash m}\prod_{k\backslash d}\psi_k(z)^{\mu(m/d)} \\
&= \prod_{k\backslash m}\prod_{d\backslash m, k\backslash d}\psi_k(z)^{\mu(m/d)} \\
&= \prod_{k\backslash m}\psi_k(z)^{\sum_{d\backslash m, k\backslash d}\mu(m/d)} \\
&= \prod_{k\backslash m}\psi_k(z)^{\sum_{(d/k)\backslash(m/k)}\mu(\frac{m/k}{d/k})} \\
&= \prod_{k\backslash m}\psi_k(z)^{\sum_{d'\backslash(m/k)}\mu(\frac{m/k}{d'})} \\
&= \prod_{k\backslash m}\psi_k(z)^{\sum_{d'\backslash(m/k)}\mu(d')} \\
&= \prod_{k\backslash m}\psi_k(z)^{\left[\frac{m}{k}=1\right]} \\
&= \psi_m(z)
\end{aligned}$$

证毕.

Problem 4

设 $f(m)=\sum_{d\backslash m} d$. 求 $f(m)$ 是 2 的幂的一个必要且充分条件.

Solution

设 m 的素因子分解为：

$$m = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l} = \prod_{1\le k\le l} p_k^{e_k}$$

则：

$$\begin{aligned}
f(m) &= \sum_{d\backslash m} d \\
&= \sum_{\substack{0\le i_1\le e_1\\ \cdots \\ 0\le i_l\le e_l}} \left(\prod_{1\le k\le l} p_k^{i_k}\right) \\
&= \sum_{0\le i_1\le e_1}\sum_{0\le i_1\le e_1}\cdots\sum_{0\le i_l\le e_l}\left(\prod_{1\le k\le l} p_k^{i_k}\right) \\
&= \left(\sum_{0\le i_1\le e_1} p_1^{i_1}\right)\cdot\left(\sum_{0\le i_2\le e_2} p_2^{i_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\sum_{0\le i_l\le e_l} p_l^{i_l}\right)
\end{aligned}$$

$f(m)$ 可以分解为上述若干因子的乘积，所以 $f(m)$ 是 2 的幂当且仅当上述每一项因子都是 2 的幂：

$$\sum_{0\le i_j\le e_j} p_j^{i_j} = 2^t,\quad 0\le j\le l,\quad t>0$$

下面我们研究该类型和式为 2 的幂的充要条件：
1. 先找出必要条件。为了方便书写下面用 p 来指代 m 的某一素因子：

$$\sum_{0\le i\le e} p^i = 1+p+p^2+\cdots p^e = 2^t$$

由于 $e\ge 1$，则 $\sum_{i=0}^{e} p^i \ge 3$，那么 $\sum_{i=0}^{e} p^i$ 不可能是 2 的 0 次幂，所以 $\sum_{i=0}^{e} p^i$ 必然是偶数。显然 $p\ne 2$，否则和式 $\sum_{i=0}^{e} p^i$ 为奇数。那么 p 必为奇素数，所以 p^i 也是奇数，那么和式 $\sum_{i=0}^{e} p^i$ 有偶数个求和项，即 $e+1$ 为偶数。这样一来和式可以进行因式分解：

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le i\le e} p^i &= 1+p+p^2+\cdots p^e \\
&= (1+p)+p^2(1+p)+\cdots p^{e-1}(1+p) \\
&= (1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{e-1}) \\
&= 2^t
\end{aligned}$$

继续分解，则 $(1+p)$ 与和式 $\sum_{i=0}^{\frac{e-1}{2}} p^{2i} = 1+p^2+p^4+\cdots+p^{e-1}$ 均是 2 的幂。这时有两种情况：
(1)
$e=1$, $\sum_{i=0}^{\frac{e-1}{2}} = 2^0 = 1$，则 $\sum_{i=0}^{e} p^i = 1+p$
(2)
$e>1$, $\sum_{i=0}^{\frac{e-1}{2}} = 2^{t'}$, $t'>0$。同理可证 $\frac{e+1}{2}$ 为偶数。同样地继续对 $\sum_{i=0}^{\frac{e-1}{2}}$ 分解，可得 $(1+p^2)\backslash\sum_{i=0}^{\frac{e-1}{2}}$，那么 $(1+p^2)$ 也是 2 的幂。可得：

$$1+p=2^{t_1},\ t_1\ge 2$$
$$1+p^2=2^{t_2},\ t_2\ge 3$$

Problem 4 continued on next page...

则：

$$(1+p)^2 = 2^{2t_1} = p^2 + 2p + 1 = 2^{t_2} + 2(2^{t_1} - 1)$$

也即：

$$\begin{aligned}&2^{2t_1} = 2^{t_2} + 2(2^{t_1} - 1),\ t_1 \geq 2,\ t_2 \geq 3\\&2^{t_2-1} + 2^{t_1} - 2^{2t_1-1} = 1\end{aligned}$$

等式左边是偶数，而右边是奇数，推出矛盾，所以该种情况不成立。所以 $e = 1$，$\sum_{i=0}^{e} p^i = 1 + p = 2^t$，也即 $p = 2^t - 1$ 为梅森素数，而且 m 素因子分解中 p 的指数为 1。
2. 再证明 p 为梅森素数且 $e = 1$ 为 $\sum_{i=0}^{e} p^i$ 是 2 的幂的充分条件：
根据梅森素数定义代入 $e = 1$ 可得：

$$\sum_{i=0}^{e} p^i = 1 + p = 1 + 2^t - 1 = 2^t$$

证毕。
综上所述,$f(m)$ 为 2 的幂当且仅当 $f(m)$ 的每一项因子 $\sum_{0 \leq i_j \leq e_j} p_j^{i_j}$ 都形如 $1 + p$，其中 p 是梅森素数，即 m 的素因子分解中每一个素因子的指数均为 1，且每一个素因子均为梅森素数。
也就是说 $f(m)$ 为 2 的幂当且仅当 m 是若干不同梅森素数的乘积。