

Concrete Math: Homework 1

Due on March-09, 2022 at 14:00

Professor Chen Xue

SA21011018

Zhou Enshuai

2022 年 3 月 7 日

Problem 1

Let $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ be the correct order of all elements in the array A. Then consider those pivots chosen in the natural order of QuickSort. For any z_j and z_k , argue that

1. If the 1st pivot chosen among z_j, \dots, z_k is not z_j or z_k , the algorithm won't compare z_j and z_k .
2. z_j or z_k get compared only if the 1st pivot chosen among z_j, \dots, z_k is either z_j or z_k .

Solution

不妨设 $j < k$, 则 $z_j < z_k$ 。

1. 设第一个选自 z_j, \dots, z_k 的 pivot 是 z_i , 且 $z_i \neq z_j, z_i \neq z_k$, 那么 $z_j < z_i < z_k$, 这时区间 z_j, \dots, z_k 会以 z_i 为 pivot 划分成两个子区间, z_j 在上一子区间, z_k 在下一子区间。在此之后, z_j 和 z_k 不在同一子区间内, 自然不会比较; 而在此之前, z_j 和 z_k 也没有成为 pivot (否则 z_i 不是第一个 pivot), 自然也不会比较。所以, z_j 和 z_k 不会比较。
2. 即证明: “ z_j 和 z_k 发生比较” \Leftrightarrow “第一个选自 z_j, \dots, z_k 的 pivot 是 z_j 或 z_k ”。先证明充分性: 由 1 的逆否命题可知, 若 z_j 和 z_k 发生比较, 则第一个选自 z_j, \dots, z_k 的 pivot 是 z_j 或 z_k ; 再证明必要性: 若第一个选自 z_j, \dots, z_k 的 pivot 是 z_j 或 z_k , 不妨设选的 pivot 是 z_j , 则说明之前没有选自该区间的 pivot, 那么该区间还未被划分。此时, 该区间内的每一个元素都要和 pivot z_j 比较, z_k 也不例外, 所以 z_j 和 z_k 发生比较。

Problem 2