Concrete Math: Homework 1

Due on March-09, 2022 at 14:00

Professor Chen Xue

SA21011018
Zhou Enshuai

2022 年 3 月 8 日

Problem 1

Let $z_1 < z_2 < ... < z_n$ be the correct order of all elements in the array A. Then consider those pivots chosen in the natural order of QuickSort. For any z_j and z_k, argue that

1. If the 1st pivot chosen among $z_j, ..., z_k$ is not z_j or z_k, the algorithm won't compare z_j and z_k.
2. z_j or z_k get compared only if the 1st pivot chosen among $z_j, ..., z_k$ is either z_j or z_k.

Solution

不妨设 $j < k$, 则 $z_j < z_k$。

1. 设第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 z_i，且 $z_i \neq z_j, z_i \neq z_k$，那么 $z_j < z_i < z_k$，这时区间 $z_j, ..., z_k$ 会以 z_i 为 pivot 划分成两个子区间，z_j 在前一子区间，z_k 在后一子区间。在此之后，z_j 和 z_k 不在同一子区间内，自然不会比较；而在此之前，z_j 和 z_k 也没有成为 pivot（否则 z_i 不是第一个 pivot），自然也不会比较。所以，z_j 和 z_k 不会比较。
2. 即证明: "z_j 和 z_k 发生比较" $\Leftrightarrow$ "第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 z_j 或 z_k"。先证明充分性：由 1 的逆否命题可知，若 z_j 和 z_k 发生比较，则第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 z_j 或 z_k；再证明必要性：若第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 z_j 或 z_k，不妨设选的 pivot 是 z_j，则说明之前没有选自该区间的 pivot，那么该区间还未被划分。此时，该区间内的每一个元素都要和 pivot z_j 比较，z_k 也不例外，所以 z_j 和 z_k 发生比较。

Problem 2

在一块厚奶酪上划出五道直的切痕，可以得到多少块奶酪？（在你划切痕时，奶酪必须保持在它原来的位置上，且每道切痕必定与三维空间中的一个平面相对应。）对 P_n 求一个递归关系，这里 P_n 表示 n 个不同的平面所能定义的三维区域的最大个数。

Solution

切第 n 刀时，第 n 刀平面与之前的 n-1 个平面相交，这 n-1 个平面在第 n 个平面上产生 n-1 条交线，这 n-1 条交线将第 n 个平面划分成 L_{n-1} 个子平面。对第 n 刀而言，增加的奶酪块是从原有的奶酪块区域分裂出来的，第 n 刀平面上每个子平面和原有的 1 个奶酪块区域相交，从而将该区域分裂成了 2 个子区域，也即增加了一个奶酪块区域。所以第 n 刀平面上子平面的个数就是切第 n 刀时新增的奶酪块数。由此可得：

$$P_n = P_{n-1} + L_{n-1}$$

由之前二维平面分割数 L_n 的递归关系可得：

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

则 P_n 的递归关系为：

$$P_n = \begin{cases} P_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} + 1 & (n \geq 2) \\ 2 & (n = 1) \end{cases}$$

当 $n \geq 2$ 时，可以累加求和：

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + \sum_{i=2}^{n} L_{i-1} \\ &= 2 + \sum_{i=2}^{n} (\frac{i(i-1)}{2} + 1) \\ &= n + 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2} \\ &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} \\ &= n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= n + 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

可以发现 $n = 1$ 时，P_n 也满足上述公式，所以综上：

$$P_n = n + 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4}$$

Problem 3

约瑟夫有一个朋友，他站在倒数第二的位置上因而获救。当每隔一个人就有一人被处死时，倒数第二个幸存者的号码 $I(n)$ 是多少？

Solution

和求 $J(n)$ 的思路一样，分成奇数和偶数两种情况讨论：

$$\begin{aligned} &I(2)=2\\ &I(3)=1\\ &I(2n)=2I(n)-1 \qquad (n>1)\\ &I(2n+1)=2I(n)+1 \quad (n>1) \end{aligned}$$

当 n 为 2 的幂次时，即 $n=2^k$，$I(2n)-1=2(I(n)-1)$，代入可得：

$$\begin{aligned} I(2^k)-1 &= 2^1(I(2^{k-1})-1)\\ &= 2^2(I(2^{k-2})-1)\\ &...\\ &= 2^{k-1}(I(2)-1)\\ &= 2^{k-1} \end{aligned}$$

也就是说，$I(2^k)=2^{k-1}+1$。

回归本题，讨论一般情况下的 n，设 $n=2^m+l\ (0\le l<2^m)$，在删去 l 个人之后，剩下 2^m 个人，将这 2^m 个人重新编号为 $1,2,3,4,...,2^m$，原编号与新编号映射关系为：

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & ... & 2l-1 & 2l+1 & 2l+2 & ... & 2^m+l\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2^m-l+1 & 2^m-l+2 & ... & 2^m & 1 & 2 & ... & 2^m-l \end{array}$$

在 $1,2,...,2^m$ 新编号中，被删去的倒数第二个幸存者新编号为 $I(2^m)=2^{m-1}+1$，根据该新编号和映射表可以得到：

- 当 $2^{m-1}+1\le 2^m-l$,即 $l<2^{m-1}$ 时,$2^{m-1}+1$ 对应的原编号为 $2^{m-1}+1+2l$,即 $I(n)=2l+1+2^{m-1}$。
- 当 $2^{m-1}+1>2^m-l$，即 $l\ge 2^{m-1}$ 时，$2^{m-1}+1$ 对应的原编号为 $2(2^{m-1}+1-(2^m-l))-1$，即 $I(n)=2l+1-2^m$。

综上：

$$I(n)=\begin{cases} 2l+1+2^{m-1}=J(n)+2^{m-1} & 0\le l<2^{m-1}\\ 2l+1-2^m=J(n)-2^m & 2^{m-1}\le l<2^m \end{cases}$$

其中 $n=2^m+l\ (0\le l<2^m)$。

Problem 4