# Concrete Math: Homework 1

Due on March-09, 2022 at 14:00

*Professor Chen Xue*

**SA21011018**
**Zhou Enshuai**

2022 年 3 月 8 日

# Problem 1

Let $z_1 < z_2 < ... < z_n$ be the correct order of all elements in the array A. Then consider those pivots chosen in the natural order of QuickSort. For any $z_j$ and $z_k$, argue that

1. If the 1st pivot chosen among $z_j, ..., z_k$ is not $z_j$ or $z_k$, the algorithm won't compare $z_j$ and $z_k$.

2. $z_j$ or $z_k$ get compared only if the 1st pivot chosen among $z_j, ..., z_k$ is either $z_j$ or $z_k$.

## Solution

不妨设 $j < k$, 则 $z_j < z_k$。

1. 设第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 $z_i$，且 $z_i \neq z_j, z_i \neq z_k$，那么 $z_j < z_i < z_k$，这时区间 $z_j, ..., z_k$ 会以 $z_i$ 为 pivot 划分成两个子区间，$z_j$ 在前一子区间，$z_k$ 在后一子区间。在此之后，$z_j$ 和 $z_k$ 不在同一子区间内，自然不会比较；而在此之前，$z_j$ 和 $z_k$ 也没有成为 pivot（否则 $z_i$ 不是第一个 pivot），自然也不会比较。所以，$z_j$ 和 $z_k$ 不会比较。

2. 即证明: "$z_j$ 和 $z_k$ 发生比较" $\Leftrightarrow$ "第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 $z_j$ 或 $z_k$"。先证明充分性：由 1 的逆否命题可知，若 $z_j$ 和 $z_k$ 发生比较，则第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 $z_j$ 或 $z_k$；再证明必要性：若第一个选自 $z_j, ..., z_k$ 的 pivot 是 $z_j$ 或 $z_k$，不妨设选的 pivot 是 $z_j$，则说明之前没有选自该区间的 pivot，那么该区间还未被划分。此时，该区间内的每一个元素都要和 pivot $z_j$ 比较，$z_k$ 也不例外，所以 $z_j$ 和 $z_k$ 发生比较。

# Problem 2

在一块厚奶酪上划出五道直的切痕，可以得到多少块奶酪？（在你划切痕时，奶酪必须保持在它原来的位置上，且每道切痕必定与三维空间中的一个平面相对应。）对 $P_n$ 求一个递归关系，这里 $P_n$ 表示 n 个不同的平面所能定义的三维区域的最大个数。

**Solution**

切第 n 刀时，第 n 刀平面与之前的 n-1 个平面相交，这 n-1 个平面在第 n 个平面上产生 n-1 条交线，这 n-1 条交线将第 n 个平面划分成 $L_{n-1}$ 个子平面。对第 n 刀而言，增加的奶酪块是从原有的奶酪块区域分裂出来的，第 n 刀平面上每个子平面和原有的 1 个奶酪块区域相交，从而将该区域分裂成了 2 个子区域，也即增加了一个奶酪块区域。所以第 n 刀平面上子平面的个数就是切第 n 刀时新增的奶酪块数。由此可得：

$$P_n = P_{n-1} + L_{n-1}$$

由之前二维平面分割数 $L_n$ 的递归关系可得：

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

则 $P_n$ 的递归关系为：

$$P_n = \begin{cases} P_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} + 1 & (n \geq 2) \\ 2 & (n = 1) \end{cases}$$

当 $n \geq 2$ 时，可以累加求和：

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + \sum_{i=2}^{n} L_{i-1} \\ &= 2 + \sum_{i=2}^{n}(\frac{i(i-1)}{2} + 1) \\ &= n + 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2} \\ &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} \\ &= n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= n + 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

可以发现 $n = 1$ 时，$P_n$ 也满足上述公式，所以综上：

$$P_n = n + 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4}$$

# Problem 3

约瑟夫有一个朋友，他站在倒数第二的位置上因而获救。当每隔一个人就有一人被处死时，倒数第二个幸存者的号码 $I(n)$ 是多少？

## Solution

和求 $J(n)$ 的思路一样，分成奇数和偶数两种情况讨论：

$$\begin{aligned}
&I(2) = 2 \\
&I(3) = 1 \\
&I(2n) = 2I(n) - 1 && (n > 1) \\
&I(2n+1) = 2I(n) + 1 && (n > 1)
\end{aligned}$$

当 n 为 2 的幂次时，即 $n = 2^k$，$I(2n) - 1 = 2(I(n) - 1)$，代入可得：

$$\begin{aligned}
I(2^k) - 1 &= 2^1(I(2^{k-1}) - 1) \\
&= 2^2(I(2^{k-2}) - 1) \\
&\dots \\
&= 2^{k-1}(I(2) - 1) \\
&= 2^{k-1}
\end{aligned}$$

也就是说，$I(2^k) = 2^{k-1} + 1$。

回归本题，讨论一般情况下的 n，设 $n = 2^m + l \ (0 \le l < 2^m)$，在删去 $l$ 个人之后，剩下 $2^m$ 个人，将这 $2^m$ 个人重新编号为 $1, 2, 3, 4, \dots, 2^m$，原编号与新编号映射关系为：

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 3 & \dots & 2l-1 & 2l+1 & 2l+2 & \dots & 2^m + l \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^m - l + 1 & 2^m - l + 2 & \dots & 2^m & 1 & 2 & \dots & 2^m - l
\end{array}$$

在 $1, 2, \dots, 2^m$ 新编号中，被删去的倒数第二个幸存者新编号为 $I(2^m) = 2^{m-1} + 1$，根据该新编号和映射表可以得到：

- 当 $2^{m-1}+1 \le 2^m - l$，即 $l < 2^{m-1}$ 时，$2^{m-1}+1$ 对应的原编号为 $2^{m-1}+1+2l$，即 $I(n) = 2l+1+2^{m-1}$。
- 当 $2^{m-1}+1 > 2^m - l$，即 $l \ge 2^{m-1}$ 时，$2^{m-1}+1$ 对应的原编号为 $2(2^{m-1}+1-(2^m-l))-1$，即 $I(n) = 2l+1-2^m$。

综上：

$$I(n) = \begin{cases} 2l+1+2^{m-1} = J(n) + 2^{m-1} & 0 \le l < 2^{m-1} \\ 2l+1-2^m = J(n) - 2^m & 2^{m-1} \le l < 2^m \end{cases}$$

其中 $n = 2^m + l \ (0 \le l < 2^m)$。

# Problem 4

利用求和因子来求解递归式：

$$\begin{aligned} &T_0 = 5; \\ &2T_n = nT_{n-1} + 3 \times n!, \quad n > 0. \end{aligned}$$

## Solution

$$a_n = 2,\ b_n = n,\ c_n = 3n!$$

求和因子设为 $s_n$：

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{b_n}$$

由于 $s_1$ 最后会消去，所以不妨设 $s_1 = 1$，则：

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}...a_1}{b_n b_{n-1}...b_2} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

代入 $s_n$ 可得：

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k}{s_n a_n} \\ &= \frac{5 + \sum_{k=1}^{n} 3 \times 2^{k-1}}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{3 \times 2^n + 2}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= n! \cdot (3 + 2^{1-n}) \end{aligned}$$

# Problem 5

证明拉格朗日恒等式：

$$\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2$$

## Solution

可以交换求和式中的 $k, j$ 变量名得到：

$$\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2=\sum_{1\le j<k\le n}(a_kb_j-a_jb_k)^2=\sum_{1\le k<j\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2$$

所以：

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2&=\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2+\sum_{1\le k<j\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2+\sum_{1\le j=k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2\\&=2\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2+\sum_{1\le j\le n}(a_jb_j-a_jb_j)^2\\&=2\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2\end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2&=\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2\\&=\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}(a_j^2b_k^2+a_k^2b_j^2-2a_jb_ja_kb_k)\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{1\le j,k\le n}a_j^2b_k^2+\sum_{1\le j,k\le n}a_k^2b_j^2-2\sum_{1\le j,k\le n}a_jb_ja_kb_k\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)+\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-2\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)\right]\\&=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\end{aligned}$$

证毕。