

4D TO 3D REDUCTION OF SEIBERG DUALITY FOR $SU(N)$ SUSY GAUGE THEORIES WITH ADJOINT MATTER: A PARTITION FUNCTION APPROACH

CARLO SANA

29 GIUGNO 2015

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA
SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA "G. OCCHIALINI"

Dualità elettrica-magnetica

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità elettrica-magnetica

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità elettrica-magnetica

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

DUALITÀ ELETTRICA-MAGNETICA

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** per teorie di **gauge non-abeliane con supersimmetria** della dualità di Dirac.

Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico J_{mag}^μ ottengo una invarianza \mathbb{Z}_2 delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$(E^i, B^i) \longrightarrow (B^i, -E^i) \quad (J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu) \longrightarrow (J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla MQ si ottiene una condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

dualità strong/weak coupling



Relatività speciale
+
Meccanica Quantistica = Teoria quantistica dei campi (QFT)

Metodi **perturbativi** utilizzabili a **weak coupling**:
sviluppi in serie nella costante di accoppiamento (e.g. **carica elettrica**)

RG flow

Le costanti di accoppiamento variano in funzione della scala di energia:
la teoria a bassa energia può fluire a **strong coupling**
(e.g. confinamento in QCD: mesoni, barioni)

Nessuno strumento teorico per studiarne la dinamica. → QCD su reticolo

Strumento teorico a disposizione: **dualità strong/weak coupling**

Prima dualità scoperta nel '94 fra teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD)

| | | |
|-------------|---|---|
| Superquark | → | squark (spin 0) + quark (spin $\frac{1}{2}$) |
| Supergluone | → | gaugino (spin $\frac{1}{2}$) + gluone (spin 1) |

Perchè la supersimmetria?

Le teorie di campo supersimmetriche sono più facilmente trattabili, soprattutto in regime **non perturbativo**:
olomorfia, rinormalizzazione, vuoti Studiare un sistema fisico più vincolato può dare **informazioni** che possono essere valide anche per sistemi **con meno simmetria**.

Prima dualità scoperta nel '94 fra teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD)

$$\begin{array}{ll} \text{Superquark} & \longrightarrow \text{squark (spin 0) + quark (spin } \frac{1}{2} \text{)} \\ \text{Supergluone} & \longrightarrow \text{gaugino (spin } \frac{1}{2} \text{) + gluone (spin 1)} \end{array}$$

Perchè la supersimmetria?

Le teorie di campo supersimmetriche sono più facilmente trattabili, soprattutto in regime **non perturbativo**:
olomorfia, rinormalizzazione, vuoti Studiare un sistema fisico più vincolato può dare **informazioni** che possono essere valide anche per sistemi **con meno simmetria**.

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica SQCD con N_c colori N_f sapori

Teoria magnetica SQCD con N_c colori e N_f sapori, N_f^2 mesoni, costruiti con i **quark elettrici** $M = Q\tilde{Q}$

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica SQCD con N_c colori e N_f sapori (Q, \tilde{Q}) e un campo di materia X nell'aggiunta con superpotenziale $\text{tr } X^{k+1}$

Teoria magnetica SQCD con $kN_f - N_c$ colori e N_f sapori (q, \tilde{q}), un campo di materia Y nell'aggiunta con superpotenziale $\text{tr } Y^{k+1}$ e $k N_f^2$ Mesoni M^j , costruiti dai **campi elettrici** $M^j = Q X^j \tilde{Q}$

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica $SQCD$ con N_c colori N_f sapori

Teoria magnetica $SQCD$ con N_c colori e N_f sapori, N_f^2 mesoni, costruiti con i **quark elettrici** $M = Q\tilde{Q}$

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica $SQCD$ con N_c colori e N_f sapori (Q, \tilde{Q}) e un campo di materia X nell'aggiunta con superpotenziale $\text{tr } X^{k+1}$

Teoria magnetica $SQCD$ con $kN_f - N_c$ colori e N_f sapori (q, \tilde{q}), un campo di materia Y nell'aggiunta con superpotenziale $\text{tr } Y^{k+1}$ e kN_f^2 Mesoni M^j , costruiti dai **campi elettrici** $M^j = QX^j\tilde{Q}$

IN COSA CONSISTE LA DUALITÀ?

Entrambe le teorie nello stesso intervallo di sapori e colori fluiscono a basse energie a un **punto fisso superconforme non banale**: $g \neq 0$

Gli operatori **gauge invarianti** vengono mappati fra l'una e l'altra teoria

Seiberg duality

$$M_{el} = Q\tilde{Q} \quad \longleftrightarrow \quad M_{mag} \neq q\tilde{q}$$

$$B_{el} = Q_{[i} \dots Q_{N_c]} \quad \longleftrightarrow \quad B_{mag} = q_{[i} \dots q_{N_f - N_c]}$$

$$\tilde{B}_{el} = \tilde{Q}_{[i} \dots \tilde{Q}_{N_c]} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{B}_{mag} = \tilde{q}_{[i} \dots \tilde{q}_{N_f - N_c]}$$

IN COSA CONSISTE LA DUALITÀ?

Le simmetrie **globali** coincidono fra le teorie.

Tutte le **osservabili** della teoria elettrica possono essere calcolate nella teoria magnetica e si ottengono gli **stessi risultati**.

Non ho modo di sapere se si osservano i gradi di libertà dell'una o dell'altra teoria.

IN COSA CONSISTE LA DUALITÀ?

Le simmetrie **globali** coincidono fra le teorie.

Tutte le **osservabili** della teoria elettrica possono essere calcolate nella teoria magnetica e si ottengono gli **stessi risultati**.

Non ho modo di sapere se si osservano i gradi di libertà dell'una o dell'altra teoria.

Per tutte le dualità elettriche-magnetiche vale la relazione

$$g_{el} \sim \frac{1}{\tilde{g}_{mag}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Quando una delle due teoria è fortemente accoppiata, la teoria duale è in regime perturbativo.

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** (difficile da trattare) con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

Per tutte le dualità elettriche-magnetiche vale la relazione

$$g_{el} \sim \frac{1}{\tilde{g}_{mag}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Quando una delle due teoria è fortemente accoppiata, la teoria duale è in regime perturbativo.

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** (difficile da trattare) con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

- Dualità di Montonen-Oliven
- AdS/CFT \rightarrow gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

In particolare, con la dualità AdS/CFT (Anti-deSitter/Conformal field Theory):

- calcolo viscosità del quark/gluon plasma
- modelli per superconduttori olografici ($\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$)

CFT **fortemente** interagente, teoria di gravità **debolmente** accoppiata.

Caratteristiche simili alle dualità di Seiberg in 4D, nonostante le teorie di campo in 3D presentano

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica → **singoletti** nella teoria magnetica

Caratteristiche simili alle dualità di Seiberg in 4D, nonostante le teorie di campo in 3D presentano

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica \rightarrow **singoletti** nella teoria magnetica

RIDUZIONE DIMENSIONALE $4D \rightarrow 3D$

Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio r :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda $r \rightarrow 0$.

Con questo procedimento non si ottengono
due teorie duali in 3D

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio r :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda $r \rightarrow 0$.

**Con questo procedimento non si ottengono
due teorie duali in 3D**

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

Riduzione corretta: r finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale (η) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale η impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).
In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:
per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale η rimane anche scendendo a basse energie.

Riduzione corretta: r finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale (η) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale η impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).

In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:
per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale η rimane anche scendendo a basse energie.

SI PUÒ ARRIVARE A UNA DUALITÀ 3D SENZA IL
SUPERPOTENZIALE η CAUSATO DALLA PRESENZA DEL
CERCHIO?

Dualità di Seiberg & KSS

Facendo un RG flow con masse reali si ottengono teorie senza il vincolo imposto dal superpotenziale η .

Si genera anche la simmetria assiale che è anomala in 4D, ma che è permessa in 3D.

I vincoli sulle cariche dei campi vengono rimossi.

La riduzione delle dualità è compresa in teoria di campo per diverse dualità 4D.

Nel caso della dualità KSS è necessario deformare la teoria aggiungendo una **perturbazione** nel superpotenziale.

Nella teoria duale, essa rompe la teoria in k settori **senza aggiunta** con gruppo di gauge

$$SU(kN_f - N_c) = \prod_i^k U(n_i) \times U(1)^k / U(1) \quad \text{con} \quad \sum_i n_i = kN_f - N_c$$

Si può dualizzare il settore $U(1)^k$ in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

Rimuovendo la deformazione $U(1)^k \rightarrow U(k)$ e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

Si può dualizzare il settore $U(1)^k$ in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

Rimuovendo la deformazione $U(1)^k \rightarrow U(k)$ e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

HO MODO DI VERIFICARE SE QUESTA INTUIZIONE È
CORRETTA?

RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

Si calcola l'indice superconforme I_{el} & I_{mag} : conta i multipletti BPS corti della teoria su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Nel limite $r \rightarrow 0$ l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D **con superpotenziale η** .

Indice superconf. integrale sul gruppo di gauge di Γ_e ellittiche

Funz. di partiz. integrale sul gruppo di gauge di Γ_h iperboliche

$$\begin{array}{rclcl} 4D: & I_{el} & = & I_{mag} & \Gamma_e \\ r \rightarrow 0 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 3D: & Z_{el}^{\eta} & = & Z_{mag}^{\eta} & \Gamma_h \end{array} \quad (1)$$

La dualità in 4D (**fisicamente**) e identità integrali (**matematicamente**) dimostrano l'identità fra gli indici in 4D.



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale η sono uguali grazie all'identità degli indici in 4D

Si fa un RG flow con masse reali direttamente sulla funzione di partizione.

Con questo metodo non è necessario introdurre una deformazione e il gruppo di gauge si rompe come

$$SU(k(N_f + 1) - N_c) \longrightarrow U(kN_f - N_c) \times U(k)/U(1)$$

Utilizzando una identità **matematica** fra gamma iperboliche Γ_h sul settore $U(k)$ si ottengono gli **stessi singoletti** trovati in teoria di campo dualizzando $U(1)^k$.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** non giustificabili.

Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** non giustificabili.









Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** non giustificabili.

Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

-  N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, Nucl.Phys. **B435** (1995) 129–146, [[hep-th/9411149](#)].
-  O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, JHEP **1307** (2013) 149, [[arXiv:1305.3924](#)].
-  H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, JHEP **1306** (2013) 106, [[arXiv:1302.3645](#)].
-  K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, JHEP **1502** (2015) 024, [[arXiv:1409.3230](#)].
-  D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys.Lett. **B354** (1995) 315–321, [[hep-th/9505004](#)].
-  A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, [arXiv:1409.8623](#).
-  P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, JHEP **1308** (2013) 011, [[arXiv:1211.2808](#)].
-  O. Aharony, *IR duality in $d = 3$ $N=2$ supersymmetric $USp(2N(c))$ and $U(N(c))$ gauge theories*, Phys.Lett. **B404** (1997) 71–76, [[hep-th/9703215](#)].