

PREPARED FOR SUBMISSION TO JHEP

# Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer $4d \rightarrow 3d$

---

Carlo Sana

---

## Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Teoria Elettrica</b>                                     | <b>3</b>  |
| 1.1      | Calcolo indice superconforme                                | 3         |
| 1.1.1    | Contributo dalla parte vettoriale                           | 5         |
| 1.1.2    | Contributo della materia nell'aggiunta                      | 6         |
| 1.1.3    | Contributo materia nella fondamentale                       | 8         |
| 1.2      | Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d       | 8         |
| 1.3      | Riduzione dell'indice alla funzione di partizione           | 9         |
| 1.3.1    | Contributo divergente                                       | 10        |
| 1.4      | Funzione di partizione                                      | 11        |
| 1.4.1    | Masse reali e flow senza $\eta$                             | 11        |
| 1.4.2    | Limite per $m \rightarrow \infty$                           | 13        |
| <b>2</b> | <b>Teoria Magnetica</b>                                     | <b>15</b> |
| 2.1      | Calcolo dell'indice superconforme                           | 15        |
| 2.1.1    | Contributo dei campi chirali                                | 15        |
| 2.1.2    | Contributo dei mesoni                                       | 16        |
| 2.2      | Indice e funzione di partizione                             | 17        |
| 2.2.1    | Espressione dell'indice                                     | 17        |
| 2.2.2    | Funzione di partizione                                      | 18        |
| 2.3      | Contributi divergenti                                       | 20        |
| 2.4      | Formula per la funzione di partizione                       | 22        |
| 2.5      | Vuoti e rotture di simmetria per il limite a massa infinita | 22        |
| 2.6      | Calcoli per limite a massa divergente                       | 24        |
| 2.6.1    | Mesoni  | 24        |
| 2.6.2    | Chirali   | 26        |
| 2.6.3    | Contributo della materia nell'aggiunta e campo vettoriale   | 28        |
| 2.6.4    | Somma dei contributi  | 29        |
| 2.6.5    | Contributi proporzionali a $m$                              | 30        |
| 2.6.6    | Contribui proporzionali a $m_B$                             | 31        |
| 2.6.7    | Contributo dei termini misti                                | 31        |
| 2.6.8    | Contributi con $\sigma$ e $\rho$                            | 32        |
| 2.7      | Funzione di partizione nel limite (riassumendo)             | 32        |
| <b>3</b> | <b>Analisi dualità</b>                                      | <b>34</b> |

---

## KS duality: rappresentazioni e cariche

Teoria in quattro dimensioni.

### Teoria Elettrica

|             | $SU(N_f)_L$ | $SU(N_f)_R$      | $U(1)_B$ | $U(1)_R$                            |
|-------------|-------------|------------------|----------|-------------------------------------|
| $Q$         | $N_F$       | 1                | 1        | $1 - \frac{2}{k+1} \frac{N_c}{N_f}$ |
| $\tilde{Q}$ | 1           | $\overline{N_F}$ | -1       | $1 - \frac{2}{k+1} \frac{N_c}{N_f}$ |
| $X$         | 1           | 1                | 0        | $\frac{2}{k+1}$                     |

**Tabella 1.** Tabella delle cariche per teoria elettrica

La materia nell'aggiunta ha un superpotenziale dato da  $W = \text{tr} Y^{k+1}$  che ne fissa la R-Carica.

Le R-cariche sono fissate in modo che la R-simmetria sia non anomala (queste vale solo in 4D). Il contributo dai diagrammi triangolare è dato da:

$$R_{gaugino} T(\text{Ad}) + \sum_{\text{Repr } R} (R_{ferm} - 1) T(R) \dim(\text{global}) = 0$$

$$N_c + (R_Q - 1) \frac{1}{2} 2N_f + (R_X - 1) N_c = 0 \quad \rightarrow \quad (R_Q - 1) N_f = -R_X N_c \rightarrow R_Q = 1 - R_X \frac{N_c}{N_f}$$

È stato usato il fatto che il gaugino ha R carica 1.

Questa condizione non è presente in 3D. ( Il grafico non è anomalo)

### Teoria Magnetica

|             | $SU(N_f)_L$      | $SU(N_f)_R$      | $U(1)_B$                  | $U(1)_R$  |
|-------------|------------------|------------------|---------------------------|---|
| $q$         | $\overline{N_F}$ | 1                | $\frac{N_c}{kN_f - N_c}$  | $1 - \frac{2}{k+1} \frac{kN_f - N_c}{N_f}$            |
| $\tilde{q}$ | 1                | $N_F$            | $-\frac{N_c}{kN_f - N_c}$ | $1 - \frac{2}{k+1} \frac{kN_f - N_c}{N_f}$            |
| $Y$         | 1                | 1                | 0                         | $\frac{2}{k+1}$                                       |
| $M_j$       | $N_f$            | $\overline{N_f}$ | 0                         | $2 - \frac{4}{k+1} \frac{N_c}{N_f} + j \frac{2}{k+1}$ |

**Tabella 2.** Tabella delle cariche per teoria magnetica

Il superpotenziale per questa teoria è dato da

$$W = \text{tr} X^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} M_j q Y^{k-j-1} \tilde{q} \quad \text{dove } M_j = Q Y^j \tilde{Q}$$

I mesoni sono costruiti dai quark ELETTRICI.

Questo superpotenziale oltre a fissare  $R_X = R_Y$  fissa le R-cariche di mesoni e quark duali.

$$\begin{aligned} 2 &= R(M_j q Y^{k-j-1} \tilde{q}) = 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k-j-1)R_Y = \\ 2 &= 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k+1)R_X - 2R_X \\ 2 &= 2R_Q + jR_Y + 2R_q + 2 - 2R_X \rightarrow R_q = R_X - R_Q \end{aligned}$$

## 1 Teoria Elettrica

Si seguiranno le convenzioni di [2].

### 1.1 Calcolo indice superconforme

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer (  $SU(N_C) \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B$  ) è dato da (vedi [3])

$$\begin{aligned} i_E(p, q, v, y, \tilde{y}, z) &= \\ &- \left( \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) (p_{N_c}(z) p_{N_c}(z^{-1}) - 1) \\ &+ \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left( (pq)^{\frac{1}{2}r} v p_{N_f}(y) p_{N_c}(z) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} p_{N_f}(y^{-1}) p_{N_c}(z^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} p_{N_f}(\tilde{y}) p_{N_c}(z^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} v p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) p_{N_c}(z) \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

I polinomi sono definiti come

$$p_{N_c}(x) = \sum_i^{N_c} x_i \quad p_{N_c}(x^{-1}) = \sum_i^{N_c} \frac{1}{x_i}$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$\begin{aligned} i_E(p, q, v, y, \tilde{y}, z) &= \\ &- \left( \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left( \sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i}{z_j} - 1 \right) \\ &+ \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_c} \left( (pq)^{\frac{1}{2}r} v y_i z_j - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} y_i^{-1} z_j^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} \tilde{y}_i z_j^{-1} - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} v \tilde{y}_i^{-1} z_j \right) \end{aligned}$$

riscalando  $(pq)^{\frac{1}{2}r}vy \rightarrow y$  e  $(pq)^{-\frac{1}{2}r}v\tilde{y} \rightarrow \tilde{y}$  :

$$\begin{aligned}
i_E(p, q, y, \tilde{y}, y) = & \\
& - \left( \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left( \sum_{1 \leq i, j \leq N_c} z_i/z_j - 1 \right) \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_c} \left( (y_i - pq \tilde{y}_i) z_j + (\tilde{y}_i^{-1} - pq y_i^{-1}) z_j^{-1} \right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

dove  $R_q$  e  $R_X$  sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$R_Q = 1 - \frac{2}{k+1} \frac{N_c}{N_f}, \quad s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} R_X \tag{1.3}$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).

L'indice superconforme è definito come:

$$I_E(p, q, v, y, \tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z) \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E(p^n, q^n, v^n, y^n, \tilde{y}^n, z^n) \right)$$

L'integral sul gruppo  $SU(N_c)$  può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$\int_{SU(N_c)} d\mu(z) f(z) = \frac{1}{N_c!} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \Delta(z) \Delta(z^{-1}) f(z) \Big|_{\prod_{i=1}^{N_c} z_i=1} \tag{1.4}$$

e dove  $\Delta(z)$  è il determinante di Vandermonde:

$$\Delta(z) = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} (z_i - z_j) = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} \left( 1 - \frac{z_i}{z_j} \right) z_j = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} \left( 1 - \frac{z_i}{z_j} \right)$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo  $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$ .

Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella  $i_E$  si fattorizza nell'indice "completo"  $I_E$  essendo all'interno di un esponenziale.

s

### 1.1.1 Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$\begin{aligned}
& \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^{Vett}(p^n, q^n, z^n) \right) \stackrel{def}{=} \\
& \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left( \left( \sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) - 1 \right) \right) = \\
& = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left( \left( \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) + \left( \sum_{i=1}^{N_c} 1 \right) - 1 \right) \right) = \\
& = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left( \left( \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) + (N_c) - 1 \right) \right) = \\
& = \left[ \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left( \left( \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right) \right] \right. \\
& \quad \left. \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) (N_c - 1) \right) \right] = \\
& = \left[ \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right] \left[ \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \right) \right]^{N_c-1} \\
& \quad \left[ \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right] \left[ \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) \right]^{N_c-1} \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Da questi termini si ottengono le funzioni  $\Gamma_e$  attraverso le seguenti identità non banali:

$$\exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) (z^n + z^{-n}) = \frac{\theta(z; p) \theta(z; q)}{1 - z^2} \quad (1.6)$$

$$= \frac{1}{(1-z)(1-z^{-1}) \Gamma_e(z; p, q) \Gamma_e(z^{-1}; p, q)} \quad (1.7)$$

$$\exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) = (p; p)(q; q) \quad (1.8)$$

$$\text{dove } i_E^V(p^n, q^n) = - \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \quad (1.9)$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\begin{aligned}\Gamma_e(y; p, q) &= \prod_{j,k \geq 0} \frac{1 - y^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - y p^j q^k} \\ \theta(z; p) &= \prod_{j \geq 0} (1 - z p^j)(1 - z^{-1} p^{j+1}) \\ (x; p) &= \prod_{j \geq 0} (1 - x p^j)\end{aligned}$$

L'identità 1.8 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} = \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \left( \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right)$$

A questo punto identificando  $\frac{z_i}{z_j} = z$  si applica l'identità 1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left( \frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left( \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) \right) = \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \left( \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) \right) \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{(1 - \frac{z_i}{z_j})(1 - \frac{z_j}{z_i}) \Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}\end{aligned}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$\begin{aligned}(p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{(1 - \frac{z_i}{z_j})(1 - \frac{z_j}{z_i}) \Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\ (p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \frac{1}{\Delta(z) \Delta(z^{-1})} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}\end{aligned}$$

### 1.1.2 Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z; p, q) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n - \left( \frac{pq}{z} \right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)} \right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$1_E^{Adj}(p, q, z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \left( \left( \sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i}{z_j} \right) - 1 \right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p, q, z) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_E^{Adj}(p^n, q^n, z^n) \right) \quad (1.10)$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) - 1 = \\ & \left( \sum_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + N_c - 1 \end{aligned}$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p, q, z) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} ((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}) \left( \left( \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + N_c - 1 \right) \right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da  $z$  da quelli che non ne dipendono.

Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da  $\frac{z_i}{z_j}$  è dato da:

$$\exp \left( (N_c - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)} \right) = \exp \left( (N_c - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(y)^n - \left(\frac{pq}{y}\right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)} \right)$$

Avendo posto  $(pq)^s = y$

L'identità 1.1.2 si applica immediatamente ai termini indipendenti da  $z_i$  e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da  $z_i$  consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}) \left( \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left( (pq)^{sn} \frac{z_i^n}{z_j^n} - (pq)^{(1-s)n} \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + \left( (pq)^{sn} \frac{z_j^n}{z_i^n} - (pq)^{(1-s)n} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right)$$



il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \quad y' = (pq)^s \frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 1.1.2 utilizzando le variabili  $y, y'$  e il contributo è pari a

$$\prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e \left( (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left( (pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

Riassumendo il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e \left( (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left( (pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

### 1.1.3 Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscaldamento di  $y$  e  $\tilde{y}$ ):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left[ \left( (y_i z_j)^n - \left( \frac{pq}{y_i z_j} \right)^n \right) + \left( \frac{1}{(\tilde{y}_i z_j)^n} - (pq \tilde{y}_i z_j)^n \right) \right] \right]$$

Identificando  $t = y_i z_j$  e  $t' = (\tilde{y}_i z_j)^{-1}$  con gli argomenti delle  $\Gamma_e$  nell'identità 1.1.2 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})$$

## 1.2 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$\begin{aligned} I_{El}(p, q, y, \tilde{y}, v) = & \frac{1}{N_c!} (p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1} \\ & \int_{T^{N_c-1}} \left( \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta \left( \prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_e((pq)^s \frac{z_i}{z_j}) \Gamma_e((pq)^s \frac{z_j}{z_i})}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\ & \prod_{1 \leq j \leq N_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1}) \end{aligned}$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

### 1.3 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari potenziali chimici si può calcolare la funzione di partizione, nel limite  $r \rightarrow 0$ .

$$p = e^{2\pi i r \omega_1} \quad q = e^{2\pi i r \omega_2} \quad z_i = e^{2\pi i r \sigma_i} \\ y_a = e^{2\pi i r m_a} \quad y_{\tilde{a}} = e^{2\pi i r \tilde{m}_a} \quad v = e^{2\pi i r m_B}$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [7] pag 30)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} = \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$$

con  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ . Si possono riscrivere le variabili in modo da sistemare il fattore di  $\pi$  all'esponente:

$$z \rightarrow \pi z \quad \omega_1 \rightarrow \pi\omega_1 \quad \omega_2 \rightarrow \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi r z}; e^{i\pi r \omega_1}, e^{i\pi r \omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z) - (\pi\omega))} \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di  $\Gamma_h$ : la sua definizione infatti è ( cfr [7] 2.2.4):

$$\Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2) = \exp \left( \pi i \frac{(2z - \omega_1 - \omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2} \right) \\ \frac{(\exp(-2\pi i(z - \omega_2)/\omega_1); \exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi i z/\omega_2); \exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty} \\ = \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2)$$

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per  $r \rightarrow 0$  utilizzando le ridefinizioni delle fugacità in 1.3. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che  $s = \frac{\Delta_X}{2}$ )

$$\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi i r \Delta_X \omega})^{N_c-1} = \\ = \left[ \exp - \frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega \Delta_X - \omega) \right]^{N_c-1} \Gamma_h(\omega \Delta_X; \omega_1, \omega_2)^{N_c-1}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}(\frac{z_i}{z_j}))\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}(\frac{z_j}{z_i})) = \\
& = \Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_i-\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_j-\sigma_i)}) = \\
& = \Gamma_e(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i)}) \\
& = \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_X + (\sigma_i - \sigma_j) + (\sigma_j - \sigma_i) - 2\omega)\right) \Gamma_h(\Delta_X\omega + \sigma_i - \sigma_j)\Gamma_h(\Delta_X\omega + \sigma_j - \sigma_i) \\
& = \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_X - 1))\right) \Gamma_h(\Delta_X\omega + \sigma_i - \sigma_j)\Gamma_h(\Delta_X\omega + \sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j})\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}) &= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)} \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i) = \\
&= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)\right), \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}by_iz_j})\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}b^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1}}) = \\
& = \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(m_i+m_B+\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j)}) = \\
& = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j-\omega)+(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j-\omega))} \\
& \Gamma_h(\omega\Delta + m_i + m_B + \sigma_j)\Gamma_h(\omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B - \sigma_j) = \\
& = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i)} \Gamma_h(\mu_i + \sigma_j)\Gamma_h(\nu_i - \sigma_j)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$\mu_i = \omega\Delta + m_i + m_B \quad \nu_i = \omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B$$

### 1.3.1 Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo  $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$ ):

$$\begin{aligned}
& \omega(\Delta_X - 1)(N_c - 1) + \frac{N_c(N_c - 1)}{2}2\omega(\Delta_x - 1) - \frac{N_c(N_c - 1)}{2}(-2\omega) + \\
& + (N_c - 1 \text{ (qualcosa)}) + N_c(\sum_i^{N_f} 2\omega(\Delta - 1) + m_i - \tilde{m}_i) = \\
& = \omega(\Delta_X - 1)(N_c^2 - 1) + (N_c^2 - 1)\omega + N_c N_f 2\omega(\Delta - 1) + N_c(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i)
\end{aligned}$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate  $z_i = e^{2\pi ir\sigma_i}$ :

$$\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right)$$

Il determinante della trasformazione è

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial \sigma_j}\right) = (2\pi i r)^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} z_i \quad \longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i} = r^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i$$

La *delta function* diventa:

$$\delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right) = \delta\left(e^{2\pi i r \sum \sigma_i} - 1\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{((2\pi i r) e^{2\pi i r (\sum \sigma_i)})}\right)^{N_c} \delta\left(\sum \sigma_i\right) \quad (1.11)$$

#### 1.4 Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer, vedi [6])

$$Z_{el}(\mu_i, \nu_i) = \frac{1}{(2\pi i)^{N_c}} \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{N_c-1} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i \delta\left(\sum_i \sigma_i\right) \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(\mu_a + \sigma_j) \Gamma_h(\nu_b - \sigma_j)$$

usando la convenzione  $\Gamma_h(\pm x) = \Gamma_h(x) \Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale  $\eta$  impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$\frac{1}{2} \sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(-N_c \Delta_X + (N_f + 1)) \quad (1.12)$$

##### 1.4.1 Masse reali e flow senza $\eta$

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di  $SU(N_f+1)^2 \times U(1)_B \rightarrow SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$ . Vediamo come si implementa tale rottura per il gruppo  $SU(N_f+1) \times U(1)_B$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B, \dots, m_B - \sum_a m_a) \quad \text{compatibile con } SU(N_f+1) \times U(1)_B$$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B + m_A, \dots, m_B - N_f m_A - \sum_a m_a) \quad \text{shift di } m_a \rightarrow m_a + m_A$$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B + m_A, \dots, m_B - N_f m_A) \quad \text{imponendo } \sum_a m_a = 0 : SU(N_f+1) \rightarrow SU(N_f)$$

A questo punto si può aggiungere una massa  $\hat{m}$  che sarà poi quella che manderemo ad infinito mischiando  $SU(N) \times U(1)_B$ :

$$\text{diag}(0, \dots, m) = \text{diag}(m_B - M, \dots, m_B + N_f M) \quad \text{con } M = m_B \text{ e dove } M \text{ sta in } SU(N_f+1)$$

Abbiamo quindi  $m = (N_f + 1)M$ . NOTA BENE  $m_B$  non è tutta la massa barionica, ma un altro shift..

A questo punto mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\mu = \left( \begin{array}{cccc|c} m_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m - m_A N_f \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc|c} m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B + \omega\Delta_m \end{array} \right)$$

dove valgono le condizioni:

$$\sum_a^{N_f} m_a = 0 \quad m = m'_B + N_f M$$

La stessa cosa si fa per  $SU(N_f)_R$

$$\nu = \left( \begin{array}{cccc|c} \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc|c} -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega\Delta_m \end{array} \right)$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).

Il valore di  $m_A$  è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un  $U(1)$  diagonale.

NB:  $U(1)_A$  mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi  $N_f$  sapori e l'ultimo ( $\Delta$  e  $\Delta_m$ ).

NB: da [1] (5.28): Date masse  $m_a$  e  $\tilde{m}_a$  per  $Q$  e  $\tilde{Q}$ , abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - \tilde{m}_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + \tilde{m}_a)$$

#### 1.4.2 Limite per $m \rightarrow \infty$

Per fare il limite  $m \rightarrow \infty$  utilizziamo la seguente identità [1] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_h(\omega\Delta + \sigma_i + M + m) = \exp \left( \text{sign}(m) \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left( [\omega(\Delta - 1) + \sigma_i + (m + M)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right) \right)$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned} \Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp \left( \text{sign}(m) \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ [\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right] \right) \\ \Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp \left( \text{sign}(-m) \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ [\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right] \right) \end{aligned}$$

Per via del fattore  $\text{sign}(\pm m)$  i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned} &\exp \left[ \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ 4\omega(\Delta_M - 1)(m + \sigma_i + m_B) - 4(m_A N_f)(\sigma_i + m + m_B) \right] \right] = \\ &= \exp \left[ \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ 4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) \right] \right] \end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{N_c} \exp \left[ \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ 4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) \right] \right] = \\ &\exp \left[ \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[ 4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4 \left( \sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i \right) (\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) \right] \right] \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a  $\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i$  può essere inglobato nella  $\delta(\sum \sigma_i)$ .

Definendo la funzione  $c(x) = e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1\omega_2}}$  i contributi diventano:

$$c(4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) c(4(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f)$$

Utilizziamo la condizione 1.12 utilizzando questa assegnazione delle masse, ossia:

$$\frac{1}{2} \sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(-N_c \Delta_X + N_f + 1) = \omega(N_f \Delta + \Delta_M) \quad (1.13)$$

Utilizziamo questa relazione nell'esponenziale precedente (in modo da non avere termini che dipendono dal campo che ha massa che tende a infinito):

$$c(4N_c(m + m_B)(\omega(N_f(1 - \Delta) - N_c \Delta_X) - m_A N_f) c(4(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i)(\omega(N_f(1 - \Delta) - N_c \Delta_X) - m_A N_f)$$

## 2 Teoria Magnetica

### 2.1 Calcolo dell'indice superconforme

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione (  $\tilde{N}_c = kN_f - N_c$ ) (NB: Corretto rispetto a [3]):

$$\begin{aligned}
i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \\
& - \left( \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) (p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - 1) + \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left( (pq)^{\frac{1}{2}r} \tilde{v} p_{N_f}(y^{-1}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} p_{N_f}(y) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) + \right. \\
& + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} p_{N_f}(\tilde{y}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \tilde{v} p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) \Big) + \\
& \sum_{l=0}^{k-1} \left( (pq)^{\frac{1}{2}2(r+ls)} p_{N_f}(y) p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}2(r+sl)} p_{N_f}(y^{-1}) p_{N_f}(\tilde{y}) \right)
\end{aligned}$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$\begin{aligned}
i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \\
& - \left( \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left( \sum_{i,j}^{\tilde{N}_c} \tilde{z}_i \tilde{z}_j^{-1} - 1 \right) + \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left[ \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \left( (pq)^{\frac{1}{2}r} \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} y_i \tilde{z}_j^{-1} + \right. \right. \\
& + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} (\tilde{y}_i) (\tilde{z}_j^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \tilde{v} \tilde{y}_i^{-1} \tilde{z}_j \Big) + \\
& \left. \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left( (pq)^{r+sl} y_i \tilde{y}_j^{-1} - (pq)^{1-(r+sl)} y_i^{-1} \tilde{y}_i \right) \right]
\end{aligned}$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni (solo flavour nessun colore).

#### 2.1.1 Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$\alpha = \frac{1}{2}r$$



L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$i_M^{Chiral}(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \left( (pq)^\alpha \tilde{v} y_i \tilde{z}_j - (pq)^{1-\alpha} \frac{1}{\tilde{v}} y_i^{-1} \tilde{z}_j^{-1} + \right. \\ \left. + (pq)^\alpha \frac{1}{\tilde{v}} (\tilde{y}_i) (\tilde{z}_j^{-1}) - (pq)^{1-\alpha} \tilde{v} \tilde{y}_i^{-1} \tilde{z}_j \right) +$$

Esponenziamo separatamente i primi due termini dagli ultimi due:

$$\exp \left( \sum_n \frac{1}{n} i_M^{Chiral}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n, \tilde{z}^n) \right) = \\ \exp \left( \sum_n \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} ((pq)^{\alpha n} \tilde{v}^n y_i^n \tilde{z}_j^n - (pq)^{(1-\alpha)n} \tilde{v}^{-n} y_i^{-n} \tilde{z}_j^{-n}) \right) \\ \text{facciamo il cambio di variabile } (pq)^\alpha \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j = t \\ = \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \exp \left( \sum_n \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} (t^n - (\frac{pq}{t})^n) \right)$$

A questo punto si utilizza l'identità 1.1.2 e otteniamo così:

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e(t; p, q) = \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^\alpha \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j; p, q) \quad (2.1)$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1} (pq)^\alpha = t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di  $\alpha$ ):

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r} \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j; p, q) \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r} \tilde{v}^{-1} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1}; p, q) \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolato come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è  $R_M = 2R_Q + R_X j$  dove  $j$  indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone.  $R_Q$  è la carica del quark della teoria ELETTERICA. Utilizzo  $m_{ij} = y_i \tilde{y}_j$

(Seconda formula è da [3], inutilmente complicata, equivale alla mia (la prima))

$$i_M^{Mesons}(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left( (pq)^{(r+ls)} m_{ij} - (pq)^{1-(r+ls)} m_{ij}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)} \frac{1 - (pq)^{1-s}}{1 - (pq)^s} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \left( (pq)^r m_{ij} - (pq)^{2s-r} m_{ij}^{-1} \right)$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\exp \left( \sum_n \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n \left( \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left( (pq)^{(r+ls)n} m_{ij}^n - (pq)^{(1-(r+ls)n)} m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

Ponendo ora  $(pq)^{r+sl} m_{ij} = y$ :

$$\exp \left( \sum_n \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n \left( \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left( y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

$$= \prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls}; p, q)$$

## 2.2 Indice e funzione di partizione

### 2.2.1 Espressione dell'indice

L'indice superconforme per la teoria magnetica è dato da ( $\tilde{N}_c = kN_f - N_c$ ):

$$I_{Mag}(p, q, y, \tilde{y}, \tilde{v}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{N}_c!} (p; p)^{\tilde{N}_c-1} (q; q)^{\tilde{N}_c-1} \Gamma_e((pq)^s; p, q)^{\tilde{N}_c-1} \left( \prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls} y_i \tilde{y}_j^{-1}; p, q) \right)$$

$$\int_{T^{N_c-1}} \left( \prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta \left( \prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} z_i - 1 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq \tilde{N}_c} \frac{\Gamma_e((pq)^s \frac{z_i}{z_j}) \Gamma_e((pq)^s \frac{z_j}{z_i})}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}$$

$$\prod_{1 \leq j \leq \tilde{N}_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j; p, q) \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v}^{-1} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1}; p, q)$$

dove  $r$  è la R-Carica del quark NON duale ,  $\Delta'$  la R-Carica del quark DUALE e  $s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \Delta_X$ . La presenza delle cariche dei quark NON duali è dovuto al fatto che i mesoni nella teoria magnetica sono i mesoni costruibili nella teoria elettrica.

### 2.2.2 Funzione di partizione

Come fatto per la teoria elettrica si riduce l'indice superconforme alla funzione di partizione della teoria. I contributi del campo vettoriale e del campo chirale nell'aggiunta sono espressioni identiche ( in funzione del nuovo numero di colori ( $\tilde{N}_c$ )).

#### Mesoni

Il contributo dei mesoni è dato da:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls} y_i \tilde{y}_j^{-1}; p, q) = \\
& \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e(\exp(2\pi i r[(2\omega)(r+ls) + (m_i - \tilde{m}_j)]); p, q) = \\
& \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (2\omega(r+ls) + m_i - \tilde{m}_j - \omega)\right) \Gamma_h(\omega(2\Delta_Q + l\Delta_X) + m_i - \tilde{m}_j) = \\
& = \exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2} \left(N_f^2 \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2\omega(r+ls - \frac{1}{2})\right) + N_f \left(\sum_{l=0}^{k-1} \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right)\right)\right) \\
& \quad \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\omega(2\Delta_Q + l\Delta_X) + m_i - \tilde{m}_j) \\
& = \exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2} \left(N_f^2 \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2\omega(\Delta_Q - \frac{1}{2}) + \omega l\Delta_X\right) + N_f \left(\sum_{l=0}^{k-1} \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right)\right)\right) \\
& \quad \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\omega(2\Delta_Q + l\Delta_X) + m_i - \tilde{m}_j)
\end{aligned}$$

#### Chirali fondamentali

Per i chirali nella fondamentale abbiamo (  $r = \Delta'$ ):

$$\begin{aligned}
& \prod_{1 \leq j \leq \tilde{N}_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j; p, q) \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v}^{-1} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1}; p, q) = \\
& = \prod_{1 \leq j \leq \tilde{N}_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e(\exp(2\omega(\frac{1}{2}\Delta') + \tilde{m}_B - m_i + \tilde{\sigma}_j); p, q) \\
& \quad \Gamma_e(\exp(2\omega(\frac{1}{2}\Delta') - \tilde{m}_B + \tilde{m}_i - \tilde{\sigma}_j); p, q) = \\
& \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \prod_{1 \leq j \leq \tilde{N}_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2} \left( (\omega(\Delta' - 1) + \tilde{m}_B - m_i + \tilde{\sigma}_j) + (\omega(\Delta' - 1) - \tilde{m}_B + \tilde{m}_i - \tilde{\sigma}_j) \right)\right) \\
& \quad \Gamma_h(\omega\Delta' + \tilde{m}_B - m_i + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\omega\Delta' - \tilde{m}_B + \tilde{m}_i - \tilde{\sigma}_j) = \\
& = \exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (2N_f \tilde{N}_c \omega(\Delta' - 1) + \tilde{N}_c \left(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\right))\right) \Gamma_h(\mu_i + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\nu_i - \tilde{\sigma}_j)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo definito le masse reali

$$\mu_i = \omega\Delta' + \tilde{m}_B - m_i \quad \nu_i = \omega\Delta' - \tilde{m}_B + \tilde{m}_i$$

### Campo di gauge e materia nell'aggiunta

Come detto precedentemente i contributi sono come nel caso elettrico:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)})^{\tilde{N}_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi i r \Delta_X \omega})^{\tilde{N}_c-1} = \\
& = \left[ \exp - \frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (\omega\Delta_X - \omega) \right]^{N_c-1} \Gamma_h(\omega\Delta_X; \omega_1, \omega_2)^{\tilde{N}_c-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}} \left(\frac{z_i}{z_j}\right)) \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}} \left(\frac{z_j}{z_i}\right)) = \\
& = \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(\sigma_i - \sigma_j)}) \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(\sigma_j - \sigma_i)}) = \\
& = \Gamma_e(e^{2\pi i r(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j)}) \Gamma_e(e^{2\pi i r(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i)}) \\
& = \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (2\omega\Delta_X + (\sigma_i - \sigma_j) + (\sigma_j - \sigma_i) - 2\omega)\right) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i) \\
& = \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (2\omega(\Delta_X - 1))\right) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_e\left(\frac{z_i}{z_j}\right) \Gamma_e\left(\frac{z_j}{z_i}\right) = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2} ((\sigma_j - \sigma_i) + (\sigma_i - \sigma_j) - 2\omega)} \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i) = \\
& = \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2} (-2\omega)\right) \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

Attenzione che l'ultimo termine entra nella funzione di partizione al denominatore.

### 2.3 Contributi divergenti

Cerchiamo ora di mettere insieme tutti i contributi divergenti ottenuti dal limite per  $r \rightarrow 0$ . Essendo le 't Hooft anomalies per anomalie gravitazionali, devono matchare con il corrispettivo elettrico.

Scriviamo solo l'esponente (a meno di  $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$ ):

C'E' DA FARE ANCORA IL CONTRIBUTO DEI POCHHAMMER!!

$$\begin{aligned}
& \overbrace{(\tilde{N}_c - 1)\text{Q-pochhammer} + (2\omega)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c - 1)}{2}}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_x - 1)(\tilde{N}_c - 1) + (2\omega(\Delta_x - 1)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c - 1)}{2})}^{\text{Adj Chiral}} + \\
& \overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta' - 1) + \tilde{N}_c\left(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\right)}^{\text{Fond Chirals}} + \overbrace{N_f^2\left(\sum_{l=0}^{k-1} 2\omega(\Delta_Q + l\frac{\Delta_X}{2} - \frac{1}{2})\right) + N_f\left(\sum_{l=0}^{k-1} \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right)}^{\text{Mesons}} =
\end{aligned}$$

Per calcolare il contributo dato dai mesoni è sufficiente notare che:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}$$

Nel caso del mesone, la somma va fino a  $k-1$ :

$$\begin{aligned}
& N_f^2\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2} + kN_f\left(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right) \\
& = \overbrace{(\tilde{N}_c - 1)\text{Q} + \omega\tilde{N}_c(\tilde{N}_c - 1)}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_X - 1)(\tilde{N}_c^2 - 1) + 2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta' - 1) + \tilde{N}_c\left(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\right))}^{\text{Adj Chiral}} + \\
& \overbrace{N_f^2\left(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\right) + kN_f\left(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right)}^{\text{Fond Chirals}} = \\
& \overbrace{(kN_f - N_c - 1)\text{Q} + \omega(kN_f - N_c)(kN_f - N_c - 1) + (\omega(\Delta_X - 1)((kN_f - N_c)^2 - 1))}^{\text{Mesons}} + \\
& \overbrace{2N_f(kN_f - N_c)\omega(\Delta' - 1) + (kN_f - N_c)\left(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\right)}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_X - 1)((kN_f - N_c)^2 - 1))}^{\text{Adj Chiral}} + \\
& \overbrace{2N_f(kN_f - N_c)\omega(\Delta' - 1) + (kN_f - N_c)\left(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\right)}^{\text{Fond Chirals}} + \\
& \overbrace{N_f^2\left(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\right) + kN_f\left(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\right)}^{\text{Mesons}}
\end{aligned}$$

I termini in blu si cancellano grazie al fatto che quark e mesoni sono in rappresentazioni opposte di flavour.

Ora poniamo  $Q = 1$  DA VERIFICARE , MA DOVREBBE ESSERE OK! (LO ERA NEL CASO ELETTRICO).

$$\begin{aligned}
&= \overbrace{(k^2 N_f^2 + N_c^2 - 2k N_f N_c - 1)\omega}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(k^2 N_f^2 + N_c^2 - 2k N_f N_c - 1)\omega(\Delta_X - 1)}^{\text{Adj Chiral}} + \\
&\quad \overbrace{(2k N_f^2 - 2N_f N_c)\omega(\Delta' - 1) + N_c(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i)}^{\text{Fond Chirals}} + \\
&\quad \overbrace{N_f^2(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X \frac{(k-1)k}{2})}^{\text{Mesons}}
\end{aligned}$$

Il termine sottolineato in verde matcha già con la teoria elettrica con il segno corretto. D'ora in poi verrà tralasciato e inserito solo alla fine.

A questo punto è necessario esplicitare la R-Carica del quark duale per poter confrontare il risultato con la teoria elettrica.

Ricordare che la carica dei mesoni è data dai quark ELETTTRICI e l'aggiunta. Abbiamo da ?? che

$$\Delta' = \Delta_X - \Delta_Q$$

Utilizziamo questa relazione per andare avanti:

$$\begin{aligned}
&= (k^2 N_f^2 + N_c^2 - 2k N_f N_c - 1)\omega\Delta_X + (2k N_f^2 - 2N_f N_c)\omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \\
&+ N_f^2 \left( k\omega(2\Delta_Q - 1) + \omega\Delta_X \frac{(k-1)k}{2} \right) = \\
&= \omega\Delta_X (k^2 N_f^2 - 2k N_f N_c + 2k N_f^2 - 2N_f N_c + N_f^2 \frac{k(k-1)}{2} + N_c^2 - 1) + \\
&+ \omega\Delta_Q (-\underline{2k N_f^2} + 2N_f N_c + \underline{2k N_f^2}) + \omega(-2k N_f^2 + 2N_f N_c - k N_f^2)
\end{aligned}$$

Ora manipoliamo separatamente i termini a seconda della R-Carica. Sarà necessario utilizzare il valore esplicito di  $\Delta_X = \frac{2}{k+1}$  per matchare le anomalie tra i due modelli.

$$\begin{aligned}
&\omega \frac{2}{k+1} \left( -2N_f N_c(k+1) + k N_f^2(k+1) + k N_f^2 + k N_f^2 \frac{k(k+1-2)}{2} + N_c^2 - 1 \right) = \\
&= \omega(-4N_f N_c + 2k N_f^2 + \underline{k N_f^2} + 2N_f^2 \frac{k}{2} - \underline{k N_f^2}) + \omega\Delta_x(N_c^2 - 1)
\end{aligned}$$

A questo punto abbiamo ottenuto dei termini spogli di R-cariche che possiamo combinare con l'altro termine senza R-cariche :

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\quad \text{termini da } \omega\Delta_X \quad \quad \quad \text{termini da } \omega \quad} \omega \left( \overbrace{-4N_f N_c + 2kN_f^2 + kN_f^2}^{\text{termini da } \omega\Delta_X} - \overbrace{2kN_f^2 + 2N_f N_c - 2kN_f^2}^{\text{termini da } \omega} \right) = \\ & = \omega(-2N_f N_c) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo mettere insieme tutti i pezzi che abbiamo calcolato separatamente:

$$\begin{aligned} & \omega\Delta_x(N_c^2 - 1) + \omega(-2N_f N_c) + \omega\Delta_Q(2N_f N_c) + N_c \left( \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i \right) = \\ & = \omega\Delta_x(N_c^2 - 1) + (+\omega - \omega)(N_c^2 - 1) + 2N_f N_c \omega(\Delta_Q - 1) + N_c \left( \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i \right) = \\ & = \omega(N_c^2 - 1) + (N_c^2 - 1)\omega(\Delta_x - 1) + 2N_f N_c \omega(\Delta_Q - 1) + N_c \left( \sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i \right) \end{aligned}$$

Come si può vedere combacia con il contributo divergente della teoria elettrica.

## 2.4 Formula per la funzione di partizione

Dopo aver controllato le anomalie gravitazionali, possiamo scrivere la la funzione di partizione.

MANCANO I POCHHAMMERRRRRR

$$\begin{aligned} Z_{mag}(\mu_a, \nu_b, \tilde{\mu}_a, \tilde{\nu}_b) &= \frac{1}{\tilde{N}_c! (2\pi i)^{\tilde{N}_c}} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{\tilde{N}_c - 1} \left( \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + l\omega\Delta_X) \right) \\ & \int_{T^{\tilde{N}_c - 1}} \prod_{i=1}^{kN_f - N_c} d\sigma_i \delta\left(\sum_i \sigma_i\right) \prod_{1 \leq i < j \leq kN_f - N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \\ & \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h(\tilde{\mu}_a + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_b - \tilde{\sigma}_j) \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le definizioni:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \omega\Delta_Q + m_i & \nu_i &= \omega\Delta_Q - \tilde{m}_i \\ \tilde{\mu}_i &= \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \tilde{m}_B - m_i & \tilde{\nu}_i &= \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - \tilde{m}_B + \tilde{m}_i \end{aligned}$$

## 2.5 Vuoti e rotture di simmetria per il limite a massa infinita

Come prima cosa è necessario mappare le masse reali fra le due teorie. Sappiamo che i barioni costruiti con i quark nelle due teorie coincidono. Ciò mappa le masse

reali barioniche delle due teorie.:  $B = Q^{N_c} = q^{kN_f - N_c}$ . ciò fissa le cariche barioniche in 1 e 2:

$$\tilde{m}_B = \frac{N_c}{kN_f - N_c} m_B$$

Le cariche di flavour rimangono invariate a meno di un segno ( sono infatti opposte), non essendo legate al gruppo di gauge (come la simmetria barionica). Possiamo scrivere quindi:

$$\tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) + \tilde{m}_B - m_a \quad \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) - \tilde{m}_B + \tilde{m}_a$$

dove  $m_a$  e  $\tilde{m}_a$  sono le masse reali di flavour elettriche.

A questo punto è necessario rompere la simmetria in modo consistente con quanto fatto nella teoria elettrica. Considero per il gruppo  $SU(N_f + 1)L \times U(1)_B$  per il contributo divergente nella teoria elettrica. Gli altri contributi vengono mappati in maniera *banale*.

$$\begin{aligned} \text{Teoria elettrica:} \quad \mu &= \text{diag}(m_b - M, \dots, m_B + N_f M) \quad \text{con } m_B = M \\ \longrightarrow \quad \mu &= \text{diag}(0, \dots, \hat{m}) \quad \text{con } M(N_f + 1) = \hat{m} \end{aligned}$$

È importante ricordare che le cariche barioniche e di sapore nella dualità si mappano in modo diverso, cfr 1 con 2. Per questo motivo le masse nella teoria magnetica non sono mappate *banalmente* ed è per questo motivo che tutti i quark ricevono un contributo nella teoria magnetica.

Ricordiamo innanzitutto la mappa:

$$\begin{aligned} m_B &\longrightarrow \tilde{m}_B = \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B \\ M &\longrightarrow \tilde{M} = -M \end{aligned}$$

A questo punto le masse reali saranno della forma  $\tilde{\mu} = \text{diag}(m_1, \dots, m_2)$ . Calcoliamo ora questi due valori.

$$\begin{aligned} m_1 = \tilde{m}_B - \tilde{M} &= \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B + M = \frac{N_c + k(N_f + 1) - N_c}{k(N_f + 1) - N_c} M \\ &= \frac{k(N_f + 1)}{k(N_f + 1) - N_c} M = \frac{k}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m} \\ m_2 = \tilde{m}_B + N_f \tilde{M} &= \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B - N_f M = \frac{N_c - N_f(k(N_f + 1) - N_c)}{k(N_f + 1) - N_c} m_B = \\ &= \frac{N_c(N_f + 1) - N_f k(N_f + 1)}{k(N_f + 1) - N_c} m_B = \frac{N_c - kN_f}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m} \end{aligned}$$

Il resto delle masse viene mappato in maniera banale, seguendo la tabella delle cariche della teoria magnetica.



Per il gruppo  $SU(N_f + 1)_R$  avviene in maniera identica, ma le cariche hanno segno opposto (sia quelle barioniche che di flavour), quindi c'è un segno overall e i calcoli sono identici.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_a &= \begin{cases} \tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} - m_a - m_A + m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\mu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_X - \Delta_M) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + m_A N_f + m_2 \end{cases} \\ \tilde{\nu}_a &= \begin{cases} \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + \tilde{m}_a - m_A - m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\nu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_X - \Delta_M) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + m_A N_f - m_2 \end{cases}\end{aligned}$$

dove (  $\hat{m}$  è quella che viene mandata a  $\infty$  nella teoria elettrica)

$$m_1 = \frac{k}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m} \quad m_2 = -\frac{kN_f - N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m}$$

Per ottenere la teoria duale con  $N_f$  sapori è necessario anche rompere la simmetria di gauge:  $SU(k(N_f + 1) - N_c) \rightarrow U(kN_f - N_c) \times (\text{qualcosa})$ . Inoltre bisogna fare in modo che i primi  $N_f$  flavour rimangano leggeri nel limite a massa infinita. Come si vede dalle masse reali, è necessario bilanciare i fattori pari a  $m_1$  ed  $m_2$  (che sono proporzionali a  $m$ ) dando un contributo opposto con la massa reale data da  $\tilde{\sigma}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -m_1 \mathbf{1}_{kN_f - N_c} & 0 \\ 0 & -m_2 \mathbf{1}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{(k(N_f+1) - N_c)(kN_f - N_c)} \mathbf{1}_{kN_f - N_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k(N_f+1) - N_c} \mathbf{1}_k \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Si può vedere che questa scelta per il vev rispetta la condizione  $\text{tr } \tilde{\sigma} = 0$ . Con questa scelta l'ultimo quark rimane leggero e carico sotto  $U(k)$  (dovrebbe esser giusto). Nota che non riesco a trovare  $SU(kN_f - N_c)$  perchè dovendo andare all'infinito è dura soddisfare il constraint  $\text{tr } \sigma = 0$  (avendo anche l'ultimo flavour leggero) ..

## 2.6 Calcoli per limite a massa divergente

A differenza del caso elettrico, tutte le masse reali e tutte le componenti di  $\tilde{\sigma}$  divergono. Utilizziamo anche in questo caso la formula

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_h(a + m) = \quad (2.4)$$

$$\exp \left( \text{sign}(m) \frac{\pi i}{2\omega_1 \omega_2} \left( (a - \omega + m)^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right) \right) \quad (2.5)$$

### 2.6.1 Mesoni

Dobbiamo calcolare il contributo dei mesoni. Notare che siccome la simmetria di sapore è rotta solo parzialmente, solo i contributi con il flavour  $N_f + 1$ -esimo divergeranno. Inoltre ricordiamo che le masse reali per i mesoni non sono uguali a quelle dei

quark che sono scritte sopra, differiscono per R-Carica e per il fatto che sono scarichi sotto l' $U(1)_B$ . Inoltre sono in rappresentazioni di flavour opposte rispetto ai quark.

$$\mu_a = \begin{cases} m_a + m_A - M + \omega\Delta \\ MN_f - m_A N_f + \omega\Delta_M \end{cases}$$

$$\nu_a = \begin{cases} -\tilde{m}_a + m_A + M + \omega\Delta \\ -MN_f - m_A N_f + \omega\Delta_M \end{cases}$$

NOTA BENE: non ci sono  $m_1$  e  $m_2$  come per i quark dato che esse sono costruite anche da una parte barionica divergente.  $M$  è lo stesso della teoria elettrica (ricordo che  $\hat{m} = (N_f + 1)M$ ).

$$\prod_{i=1}^{N_f+1} \prod_{j=1}^{N_f+1} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_i + \nu_i + l\omega\Delta_X) =$$

$$\left( \prod_{a=1}^{N_f} \prod_{b=1}^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + l\omega\Delta_X) \right) \left( \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_{N_f+1} + \nu_{N_f+1} + l\omega\Delta_X) \right)$$

$$\left( \prod_{l=0}^{k-1} \prod_{a=1}^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_{N_f+1} + \omega l\Delta_X) \Gamma_h(\mu_{N_f+1} + \nu_a + \omega l\Delta_X) \right)$$

I primi due termini non dipendono da  $m$  e quindi non danno luogo ad una fase. Si può riscrivere il risultato come:

$$\prod_{i=1}^{N_f+1} \prod_{j=1}^{N_f+1} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_i + \nu_i + l\omega\Delta_X) =$$

$$\left( \prod_{l=0}^{k-1} \left( \prod_{a=1}^{N_f} \prod_{b=1}^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + l\omega\Delta_X) \right) \right) \Gamma_h(-2m_A N_f + \omega(2\Delta_M + l\Delta_X))$$

$$\left( \prod_{l=0}^{k-1} \prod_{a=1}^{N_f} \Gamma_h(m_a - m_A(N_f - 1) - \underbrace{M(N_f + 1)}_m + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X)) \right.$$

$$\left. \Gamma_h(-\tilde{m}_a + \underbrace{M(N_f + 1)}_m - m_A(N_f - 1) + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X)) \right)$$

Utilizziamo ora 2.5 per le  $\Gamma_h$  divergenti.

Otengo (strippo i fattori banali e quello che si cancella e con un po' di occhio sulla parità dei termini):

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_a^{N_f} -m_a^2 + \tilde{m}_a^2 - m_a(\dots) + \tilde{m}_a(\dots) + 4m(m_A(N_f - 1) + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X - 1))$$

(2.6)

### 2.6.2 Chirali

Per i campi chirali bisogna sviluppare questi termini. Ricordiamo che  $\mu_i$  e  $\sigma_j$  hanno vev tali che le prime  $N_f$  componenti e il singoletto rimangono leggere, solo i termini misti saranno da sviluppare.

$$\prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{(k+1)N_f - N_c} \Gamma_h(\tilde{\mu}_i + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_i - \tilde{\sigma}_j) \quad (2.7)$$

D'ora in poi chiameremo  $\rho_j$  con  $j = 1 \dots k$  le componenti di  $\sigma_j$  per  $j = kN_f - N_c + 1 \dots k(N_f + 1) - N_c$ :

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h(\tilde{\mu}_i + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_i - \tilde{\sigma}_j) \right) \left( \prod_{j=1}^k \Gamma_h(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \rho_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \rho_j) \right) \\ & \left( \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \tilde{\sigma}_j) \right) \left( \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^k \Gamma_h(\tilde{\mu}_i + \rho_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_i - \rho_j) \right) \end{aligned}$$

I termini della prima riga non hanno divergenze, mentre quelli nella seconda riga sono da sistemare.

Primo termine:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \tilde{\sigma}_j) \Gamma_h(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \tilde{\sigma}_j) = \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h \left( m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} + m_A N_f + m_2 + \omega(\Delta_X - \Delta_M) + \right. \\ & \quad \left. - m_1 + \frac{k}{(k(N_f + 1) - N_c)(kN_f - N_c)} + \sigma'_j \right) \\ & \Gamma_h \left( -m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} + m_A N_f - m_2 + \omega(\Delta_X - \Delta_M) \right. \\ & \quad \left. + m_1 - \frac{k}{(k(N_f + 1) - N_c)(kN_f - N_c)} - \sigma'_j \right) \end{aligned}$$

dove  $\sigma'$  è l'espansione di  $\tilde{\sigma}$  intorno al suo *vev*. Come prima  $m_1 - m_2 = m$ . Ora utilizziamo la formula per il limite della  $\Gamma_h$ . I due termini si beccano un segno opposto davanti che contribuisce a cancellare i termini che non cambiano segno dopo aver fatto i quadrati. Nessun quadrato sopravvive e solo alcuni termini misti. Semplificando i prefattori e il secondo termine della formula (che si cancella per via della differenza di segno) ottengo dopo aver posto

$$A = \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \quad B = \frac{k}{(k(N_f + 1) - N_c)(kN_f - N_c)}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j^{kN_f - N_c} - \left( m_B A + m_A N_f + \underbrace{(m_2 - m_1)}_{-m} + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1) + B + \sigma'_j \right)^2 + \\
& \quad \left( -m_B A + m_A N_f - \underbrace{(m_2 - m_1)}_m + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1) - B - \sigma'_j \right)^2 = \\
& \sum_j^{kN_f - N_c} 4 \left[ m_B A (-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + m_A N_f (m - B - \sigma'_j) + \right. \\
& \quad \left. + m \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1) + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)(-B - \sigma'_j) \right]
\end{aligned}$$

Isoliamo ora i termini che dipendono da  $j$  (che dovranno comunque rimanere sotto il segno di integrale):

$$\sum_j^{kN_f - N_c} 4\sigma'_j \left( -m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1) \right)$$

Per gli altri termini invece avremo:

$$\begin{aligned}
& 4(kN_f - N_c) \left( m_B A (-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + \right. \\
& \quad \left. + m(m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + \right. \\
& \quad \left. - B(m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) \right)
\end{aligned}$$

Secondo termine:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^k \Gamma_h \left( -m_a + m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} - m_A + m_1 + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \right. \\
& \quad \left. - m_2 - \frac{1}{k(N_f + 1) - N_c} + \rho'_j \right) \\
& \Gamma_h \left( \tilde{m}_a - m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} - m_A - m_1 + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \right. \\
& \quad \left. + m_2 + \frac{1}{k(N_f + 1) - N_c} - \rho'_j \right)
\end{aligned}$$

Usando le stesse convenzioni di prima abbiamo e usando  $C = \frac{1}{k(N_f + 1) - N_c}$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \sum_a^{N_f} \sum_j^k \left( -m_a + m_B A - m_A + \underbrace{(m_1 - m_2)}_m + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) - C + \rho'_j \right)^2 + \\
& \quad - \left( +\tilde{m}_a - m_B A - m_A - \underbrace{(m_1 - m_2)}_m + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + C - \rho'_j \right)^2 =
\end{aligned}$$

Notiamo che rispetto al caso precedente qui abbiamo le masse reali, che sono diverse fra *left* e *right*, quindi sopravvivono i loro termini.

$$\begin{aligned} \sum_a^{N_f} \sum_j^k [m_a^2 - \tilde{m}_a^2 + 2m_a(\dots) - 2\tilde{m}_a(\dots) + \\ + 4(m_B A(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) - m_A(m - C + \rho'_j) + \\ + m\omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)(-C + \rho'_j))] \end{aligned}$$

Come fatto prima, esplicitiamo i termini con  $\rho'_j$  ( i termini lineari in  $m_a$  e  $\tilde{m}_a$  non li considero perchè vanno a zero per la condizione  $m = 0$ )

$$4N_f \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1))$$

Gli altri termini invece sono dati da:

$$\begin{aligned} 4kN_f (m_B A(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + m(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \\ + C(m_A - \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + k \sum_a^{N_f} m_a^2 - \tilde{m}_a^2) \end{aligned}$$

### 2.6.3 Contributo della materia nell'aggiunta e campo vettoriale

Per la materia nell'aggiunta abbiamo:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq k(N_f+1)-N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} = \\ \prod_{1 \leq i < j \leq kN_f-N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\rho_i - \rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\rho_i - \rho_j))} \prod_{\substack{1 \leq i \leq kN_f-N_c \\ 1 \leq j \leq k}} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \rho_j))} \end{aligned}$$

I primi due termini rimangono così come sono perchè le parti divergenti si cancellano a vicenda. L'esponente dell'ultimo sarà dato da (a meno dei soliti prefattori..):

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq kN_f-N_c} \sum_{1 \leq j \leq k} \left( -(\omega(\Delta_X - 1) + (-m_1 + m_2) + B + C + \sigma'_i - \rho'_j)^2 \right. \\ + (\omega(\Delta_X - 1) + (m_1 - m_2) - B - C - \sigma'_i + \rho'_j)^2 \\ + (-\omega - m_1 + m_2 + B + C + \sigma'_i - \rho'_j)^2 + \\ \left. - (-\omega + m_1 - m_2 - B - C - \sigma'_i + \rho'_j)^2 \right) \end{aligned}$$

dove vale  $m_1 - m_2 = m$  e  $B + C = \frac{1}{kN_f-N_c} = D$ .

Le ultime due righe hanno segno opposto perchè sono a denominatore nella formula.

Quindi abbiamo:

$$\sum_{1 \leq i \leq kN_f - N_c} \sum_{1 \leq j \leq k} \left( -(\omega(\Delta_X - 1) - m + D + \sigma'_i - \rho'_j)^2 + (\omega(\Delta_X - 1) + m - D - \sigma'_i + \rho'_j)^2 \right. \\ \left. - (-m + D + \sigma'_i - \rho'_j)^2 + (m - D - \sigma'_i + \rho'_j)^2 \right)$$

Per la prima riga invece abbiamo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq kN_f - N_c \\ 1 \leq j \leq k}} 4\omega(\Delta_X - 1)(m - D - \sigma'_i + \rho'_j)$$

Per la seconda riga abbiamo:

$$-4\omega \left( k(kN_f - N_c)(-m + B + C) + \sum_i^{kN_f - N_c} \sum_j^k (\sigma_i - \rho_j) \right)$$

Sommando i due contributi otteniamo:

$$4\omega\Delta_X \left( k(kN_f - N_c)(m - D) + \sum_i^{kN_f - N_c} \sum_k^k (\sigma'_i + \rho'_j) \right)$$

#### 2.6.4 Somma dei contributi

I termini quadratici nelle masse reali si cancellano con il contributo dato dai mesoni di 2.6. Ora mettiamo insieme tutti i contributi (lascio stare  $\rho_i$  e  $\sigma_i$ ):

$$\begin{aligned} & \text{Mesons} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} 4N_f m (-m_A(N_f - 1) + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + j\Delta_X - 1)) + \right. \\ & \text{Chiral 1} \left\{ \begin{aligned} & +4(kN_f - N_c)(m_B A(-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + \\ & + m(m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + \\ & - B(m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1))) + \\ & +4 \sum_j^{kN_f - N_c} \sigma'_j (-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) \end{aligned} \right. \\ & \text{Chiral 2} \left\{ \begin{aligned} & +4kN_f(m_B A(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + \\ & + m(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + \\ & + C(m_A - \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + \\ & +4N_f \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) \end{aligned} \right. \\ & \text{Adj matter} \left\{ \begin{aligned} & +m(4\omega\Delta_X k(kN_f - N_C) + \\ & - D(4\omega\Delta_X k(kN_f - N_C) + \\ & -4k \sum_i \sigma'_i(\omega\Delta_X) + \\ & +4(kN_f - N_c) \sum_i \rho'_i(\omega\Delta_X) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

### 2.6.5 Contributi proporzionali a $m$

I contributi proporzionali ad  $m$  sono:

$$m \left( -4kN_fm_A(N_f - 1) - 4N_fN_cm_A + 4kN_fm m_A(N_f - 1) \right) + \\ 4m\omega \left( kN_f(\Delta_Q + \Delta_M - 1 + \frac{(k-1)}{2}\Delta_X) + (kN_f - N_c)(\Delta_X - \Delta_M - 1) + kN_f(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \right. \\ \left. + \Delta_X k(kN_f - N_c) \right)$$

Ora usiamo la condizione sulle masse reali:

$$\omega(-N_c\Delta_X + N_f + 1) = \omega(N_f\Delta_Q + \Delta_M) \quad (2.8)$$

da cui:

$$\Delta_M = -N_c\Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q) + 1 \quad (2.9)$$

Otteniamo usando il valore esplicito di  $\Delta_X$  e scrivendo  $\frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} - 1$

$$4m \left( -N_fN_cm_A + \omega \left( kN_f(\Delta_Q - N_c\Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q) + 1 + \overbrace{\frac{k+1}{2}}^{=1}\Delta_X - \Delta_X - 1) + \right. \right. \\ \left. + (kN_f - N_c)(\Delta_X - (-N_c\Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q) + 1) - 1) + kN_f(\Delta_X - \Delta_Q - 1) \right) + \\ \left. + \Delta_X k(kN_f - N_c) \right)$$

Semplificando (utilizzando il valore esplicito di  $\Delta_X$  primi termini otteniamo:

$$4m\omega N_c \left( -N_fm_A - \Delta_X N_c - (\Delta_Q - 1)N_f \right) + \\ + 4m\omega(kN_f - N_c) \left( (\Delta_X - 2 + k\Delta_X) \right) = \\ = 4m\omega N_c \left( -N_fm_A - \Delta_X N_c - (\Delta_Q - 1)N_f \right) + \\ + 4m\omega(kN_f - N_c) \left( \Delta_X(k+1) - 2 \right) = \\ = 4m\omega N_c \left( -N_fm_A - \Delta_X N_c - (\Delta_Q - 1)N_f \right) +$$

### 2.6.6 Contribui proporzionali a $m_B$

Il contributo proporzionale a  $m_B$  invece è:

$$\begin{aligned}
& 4m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \left( (kN_f - N_c)(-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) + \right. \\
& \quad \left. + kN_f(-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) \right) = \\
& = 4m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \left( kN_f(-m_A(N_f + 1) + \omega(\Delta_M - \Delta_Q)) + \right. \\
& \quad \left. - N_c(-m_A N_f - \omega(\Delta_X - \Delta_M - 1)) \right) = \\
& = 4m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \left( kN_f(-m_A(N_f + 1) + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q) + 1 - \Delta_Q)) + \right. \\
& \quad \left. + N_c(m_A N_f + \omega(\Delta_X - (-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q) + 1) - 1)) \right) = \\
& = 4m_B \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} \left( kN_f(-m_A(N_f + 1) + \omega(-N_c \Delta_X + N_f - (N_f + 1)\Delta_Q) + 1)) + \right. \\
& \quad \left. + m_A N_f N_c + N_c \omega(\Delta_X(N_c + 1) + N_f(\Delta_Q - 1) - 2) \right)
\end{aligned}$$

Semplificando le frazioni ove possibile si ottiene:

$$\begin{aligned}
& 4m_B N_c N_f (-m_A) + 4m_B N_c N_f (-\omega \Delta_Q) + 4m_B N_c^2 \omega \Delta_X \left( -1 + \frac{k+1}{k(N_f + 1) - N_c} \right) \\
& + 4m_B N_c N_f - 8m_B N_c^2 \omega \frac{1}{k(N_f + 1) - N_c}
\end{aligned}$$

A questo punto esplicitando la R-Carica  $\Delta_X$  otteniamo:

$$4m_B N_c (-m_A N_f + \omega(N_f(1 - \Delta_Q) - N_c \Delta_X)) + 4m_B N_c^2 \omega \frac{1}{k(N_f + 1) - N_c} \left( \overbrace{\frac{2}{k+1}}^{\Delta_X} (k+1) - 2 \right) \quad (2.10)$$

Come si può vedere matcha esattamente con la fase ottenuta dalla teoria elettrica.

$$4m_B N_c (-m_A N_f + \omega(N_f(1 - \Delta_Q) - N_c \Delta_X)) \quad (2.11)$$

### 2.6.7 Contributo dei termini misti

I termini rimanenti da calcolare sono dati da:

$$m_A(-BN_f + C) + \omega((C + B)(-\Delta_X + 1) + (-k(kN_f - N_c)\Delta_X + B\Delta_M + C\Delta_Q)) =$$

Non c'è modo di farli andare via se non con  $B = C = 0$



### 2.6.8 Contributi con $\sigma$ e $\rho$

Ho anche contributi proporzionali a  $\rho$  e a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
& 4 \sum_j^{kN_f - N_c} \sigma'_j \left( -m_A N_f - \omega(\Delta_X(1+k) - \Delta_M - 1) \right) + 4N_f \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1)) + \\
& + 4(kN_f - N_c) \sum_i \rho'_i (\omega \Delta_X) = \\
& = 4 \sum_j^{kN_f - N_c} \sigma'_j \left( -m_A N_f - \omega(1 - \Delta_M) \right) + 4 \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A N_f + \omega(\Delta_X(N_f + (kN_f - N_c)) - N_f \Delta_Q - N_f)) \\
& = 4 \sum_j^{kN_f - N_c} \sigma'_j \left( -m_A N_f + \omega(\Delta_M - 1) \right) + 4 \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A N_f + \omega(\Delta_X N_f(k+1) - N_c \Delta_X) - N_f \Delta_Q - N_f) \\
& = 4 \sum_j^{kN_f - N_c} \sigma'_j \left( -m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q)) \right) + 4 \sum_{j=1}^k \rho'_j (-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q))) \\
& = 4 \left( \sum_i^{kN_f - N_c} \sigma_i + \sum_j^k \rho_j \right) (-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q)))
\end{aligned}$$

### 2.7 Funzione di partizione nel limite (riassumendo)

Vediamo ora di tirare le somme su quanto trovato dopo aver fatto il limite nella parte magnetica.

$$\begin{aligned}
Z_{mag}(\mu_a, \nu_b, \tilde{\mu}_a, \tilde{\nu}_b) = & \frac{1}{(k(N_f + 1) - N_c)!(2\pi i)^{k(N_f+1)-N_c}} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{(k(N_f+1)-N_c)-1} \\
& c(4N_c(m + m_B)(-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q)))) \\
& \left( \prod_{j=0}^{k-1} \left( \prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + j\omega \Delta_X) \right) \Gamma_h(-2m_A N_f + \omega(2\Delta_M + j\Delta_X)) \right) \\
& \int_{T^{\tilde{N}_c}} \prod_{i=1}^{kN_f-N_c} d\sigma_i \prod_{i=1}^k d\rho_i d\xi e^{2\pi i \xi (\sum \sigma_i + \sum \rho_i)} \\
& \prod_{1 \leq i < j \leq kN_f-N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\rho_i - \rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\rho_i - \rho_j))} \\
& \left( \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f-N_c} \Gamma_h\left(m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} - m_a - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \tilde{\sigma}_j\right) \right. \\
& \quad \left. \Gamma_h\left(-m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + \tilde{m}_b - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - \tilde{\sigma}_j\right) \right) \\
& \left( \prod_{i=1}^k \Gamma_h\left(\pm(\rho_i + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c}) + m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M)\right) \right) \\
& c(4(\sum_i^{kN_f-N_c} \sigma_i + \sum_j^k \rho_j)(-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q))))
\end{aligned}$$

Posso fare un ulteriore shift sul vev di  $\sigma$  e  $\rho$ , a traccia nulla in modo da rinormalizzare le cariche barioniche a  $\frac{N_c}{kN_f-N_c}$  invece di  $\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}$ . Questo shift è dato da:

$$\begin{aligned}
\sigma_i & \longrightarrow \sigma_i + \frac{kN_c}{(kN_f - N_c)(k(N_f + 1) - N_c)} m_B \\
\rho_i & \longrightarrow \rho_i - \frac{N_c}{(kN_f - N_c)(k(N_f + 1) - N_c)} m_B
\end{aligned}$$

Questo shift non crea alcun problema in quanto è traceless e quindi non contribuisce all'esponenziale dell'ultima riga, l'unico effetto che ha è rinormalizzare le cariche

barioniche. A questo punto la funzione di partizione diventa:

$$\begin{aligned}
Z_{mag}(\mu_a, \nu_b, \tilde{\mu}_a, \tilde{\nu}_b) = & \frac{1}{(k(N_f + 1) - N_c)!(2\pi i)^{k(N_f+1)-N_c}} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{(k(N_f+1)-N_c)-1} \\
& c(4N_c(m + m_B)(-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q)))) \\
& \left( \prod_{j=0}^{k-1} \left( \prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + j\omega \Delta_X) \right) \right) \Gamma_h(-2m_A N_f + \omega(2\Delta_M + j\Delta_X)) \\
& \int_{T^{\tilde{N}_c}} \prod_{i=1}^{kN_f-N_c} d\sigma_i \prod_{i=1}^k d\rho_i d\xi e^{2\pi i \xi (\sum \sigma_i + \sum \rho_i)} \\
& \prod_{1 \leq i < j \leq kN_f-N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\rho_i - \rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\rho_i - \rho_j))} \\
& \left( \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f-N_c} \Gamma_h\left(m_B \frac{N_c}{kN_f - N_c} - m_a - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \tilde{\sigma}_j\right) \right. \\
& \quad \left. \Gamma_h\left(-m_B \frac{N_c}{kN_f - N_c} + \tilde{m}_b - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - \tilde{\sigma}_j\right) \right) \\
& \left( \prod_{i=1}^k \Gamma_h(\pm \rho_i + m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M)) \right) \\
& c(4(\sum_i^{kN_f-N_c} \sigma_i + \sum_j^k \rho_j)(-m_A N_f + \omega(-N_c \Delta_X + N_f(1 - \Delta_Q))))
\end{aligned}$$

### 3 Analisi dualità

A questo punto possiamo capire il rapporto fra le due teorie in questo limite. Utilizziamo la seguente identità integrale.

Definendo prima:

$$\begin{aligned}
W_{N_c, K}(\mu_a, \nu_b, \tau, \lambda) = & \frac{\Gamma_h(\tau)^{N_c}}{N_c!} \int \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i e^{\frac{i\pi}{2\omega_1 \omega_2} (2\lambda \text{tr } \sigma - 2K \text{tr } \sigma^2)} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_h(\tau \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \\
& \prod_{i=1}^{N_c} \prod_{a,b=1}^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \sigma_i) \Gamma_h(\nu_b - \sigma_i)
\end{aligned}$$

Abbiamo (da [7](5.3.15) & [2](3.18)):

$$W_{N_c, 0}(\mu_a, \nu_b, \omega \Delta_X, \lambda) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h\left(\omega - j\omega \Delta_X - \frac{\mu + \nu}{2} \pm \frac{\lambda}{2}\right) \Gamma_h(\mu + \nu + j\omega \Delta_X)$$

Possiamo utilizzare questa identità integrale sul settore  $U(k)$  (attenzione al fattore  $k!$  da considerare).

Prima di dualizzare il settore faccio uno shift in  $\xi$  in modo da cancellare i termini dell'ultima riga (proporzionali a  $\sum \sigma + \sum \rho$ ).

Inoltre bisogna effettuare una dilatazione in  $\xi$  in modo da matchare con il termine FI dell'identità (cambia anche la misura). Utilizzando le seguenti cariche otteniamo:

$$\begin{aligned}\mu_a &= m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M) \\ \nu_a &= m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M) \\ \tau &= \omega \Delta_X \\ \lambda &= \xi\end{aligned}$$

Otengo l'espressione:

$$\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left( \omega - j\omega \Delta_X - (m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M)) \pm \frac{\xi}{2} \right) \Gamma_h (2m_A N_f + 2\omega(\Delta_X - \Delta_M) + j\omega \Delta_X)$$

Il primo termine può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}& \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left( \omega - j\omega \Delta_X - (m_A N_f + \omega((N_c + 1)\Delta_X - N_f(1 - \Delta_Q) - 1)) \pm \frac{\xi}{2} \right) = \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left( \pm \frac{\xi}{2} + \omega(2 + N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c + 1 + j)) - m_A N_f \right) = \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left( \pm \frac{\xi}{2} + \omega(2 + N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c + 1 + (k - 1 - j))) - m_A N_f \right)\end{aligned}$$

Shift di  $j$ :  $j' = j + 1$

$$\begin{aligned}& \prod_{j'=1}^k \Gamma_h \left( \pm \frac{\xi}{2} + \omega(2 + N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c + k + 1 - j')) - m_A N_f \right) = \\ & \prod_{j'=1}^k \Gamma_h \left( \pm \frac{\xi}{2} + \omega(N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c - j')) - m_A N_f \right)\end{aligned}$$

dove nell'ultima riga ho usato il valore esplicito di  $\Delta_X$ .

Questi termini sono associati a dei singoletti (monopoli elettrici) che hanno le seguenti cariche (si leggono dagli argomenti delle  $\Gamma_h$ ): Confrontando con la tabella 6 di [5]

|               | $U(kN_f - N_c) \times U(1)_{mirror}$ | $U(1)_B$ | $U(1)_A$   | $U(1)_R$                                |                   |
|---------------|--------------------------------------|----------|------------|---|-------------------|
| $b_i$         | $1_1$                                | 0        | $-m_A N_f$ | $N_f(1 - \Delta_Q) + \Delta_X(i - N_c)$ | $i = 1, \dots, k$ |
| $\tilde{b}_i$ | $1_{-1}$                             | 0        | $-m_A N_f$ | $N_f(1 - \Delta_Q) + \Delta_X(i - N_c)$ | $i = 1, \dots, k$ |

(vedi anche [4]) (ricordare che  $\Delta_X = \frac{2}{k+1}$ ).

Posso fare la stessa cosa anche per il secondo termine:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h(2m_A N_f + 2\omega(\Delta_X - \Delta_M) + j\omega\Delta_X) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h(2m_A N_f + \omega(\Delta_X(2+j) - 2\Delta_M)) = \\ & = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h(2m_A N_f + \omega(\Delta_X(2 + (k-1-j) - 2\Delta_M))) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h(2m_A N_f + \omega(2 - j\Delta_X - 2\Delta_M)) = \end{aligned}$$

Utilizzando ora l'identità matematica  $\Gamma_h(2\omega - x)\Gamma_h(x) = 1$  otteniamo che questo termine e il singoletto generato dall' $N_f + 1$ -esima componente dei mesoni si cancellano a vicenda.

Ciò deriva dal fatto che dualizzando il settore  $U(k)$  viene generata una massa olo-morfa per il singoletto.

$$W = mM^\dagger M \quad \longrightarrow \quad R(M^\dagger) = 2 - R(M) \quad (3.1)$$

A questo punto la funzione di partizione diventa (strippando i fattori divergenti)

:

$$\begin{aligned} Z_{mag}(\mu_a, \nu_b, \tilde{\mu}_a, \tilde{\nu}_b) &= \frac{1}{(2\pi i)^{k(N_f+1)-N_c}} \frac{k!}{(k(N_f+1) - N_c)!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{kN_f - N_c - 1} \\ & \quad \left( \prod_{j=0}^{k-1} \prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + j\omega\Delta_X) \right) \\ & \quad \int_{T^{\tilde{N}_c}} \prod_{i=1}^{kN_f - N_c} d\sigma_i \frac{d\xi}{2\omega_1\omega_2} e^{\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} 2\xi \sum \sigma_i} \prod_{1 \leq i < j \leq kN_f - N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \\ & \quad \left( \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h\left(m_B \frac{N_c}{kN_f - N_c} - m_a - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \tilde{\sigma}_j\right) \right. \\ & \quad \left. \Gamma_h\left(-m_B \frac{N_c}{kN_f - N_c} + \tilde{m}_b - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - \tilde{\sigma}_j\right) \right) \\ & \quad \prod_{j'=1}^k \Gamma_h\left(\pm \frac{\xi}{2} + \omega(N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c - j')) - m_A N_f\right) \end{aligned}$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.
- [2] Antonio Amariti and Claudius Klare. A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction. 2014.
- [3] F.A. Dolan and H. Osborn. Applications of the Superconformal Index for Protected Operators and q-Hypergeometric Identities to N=1 Dual Theories. *Nucl.Phys.*, B818: 137–178, 2009. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2009.01.028.
- [4] Hyungchul Kim and Jaemo Park. Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter. *JHEP*, 1306:106, 2013. doi: 10.1007/JHEP06(2013)106.
- [5] Keita Nii. 3d duality with adjoint matter from 4d duality. *JHEP*, 1502:024, 2015. doi: 10.1007/JHEP02(2015)024.
- [6] V.P. Spiridonov and G.S. Vartanov. Elliptic Hypergeometry of Supersymmetric Dualities. *Commun.Math.Phys.*, 304:797–874, 2011. doi: 10.1007/s00220-011-1218-9.
- [7] Fokko van de Bult. Hyperbolic hypergeometric functions. *Master thesis*, 2007.