# 4d to 3d reduction of Seiberg duality for SU(N) SUSY gauge theories with adjoint matter: a partition function approach

Carlo Sana

29 giugno 2015

Università degli Studi di Milano-Bicocca
Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica "G. Occhialini"

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale 4D $\to$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale 4D $\rightarrow$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale 4D $\rightarrow$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale 4D $\to$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

# dualità strong/weak coupling

Relatività speciale
+ = **Teoria quantistica dei campi (QFT)**
Meccanica Quantistica

Metodi **perturbativi** utilizzabili a weak coupling:
sviluppi in serie nella costante di accoppiamento (e.g. carica elettrica)

## Gruppo di rinormalizzazione

Le costanti di accoppiamento variano in funzione della scala di energia:
la teoria a bassa energia può fluire a strong coupling
(e.g. confinamento in QCD)

Nessuno strumento teorico per studiarne la dinamica. $\longrightarrow$ QCD su reticolo

Esiste uno strumento teorico per trattare teorie a strong coupling?

## Dualità strong/weak coupling

**Dualità:** le due teorie sono fisicamente equivalenti

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria fortemente accoppiata con tecniche perturbative ben note nella teoria duale.

## Dualità strong/weak coupling

**Dualità:** le due teorie sono fisicamente equivalenti

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \quad \longrightarrow \quad \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria fortemente accoppiata con tecniche perturbative ben note nella teoria duale.

# ESEMPI DI DUALITÀ STRONG-WEAK COUPLING

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg e generalizzazioni
- AdS/CFT $\to$ gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una generalizzazione della dualità di Dirac per teorie di gauge non-abeliane con supersimmetria.

# ESEMPI DI DUALITÀ STRONG-WEAK COUPLING

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg e generalizzazioni
- AdS/CFT $\rightarrow$ gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una generalizzazione della dualità di Dirac per teorie di gauge non-abeliane con supersimmetria.

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico $J^\mu_{mag}$ si ottiene una invarianza $\mathbb{Z}_2$ delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$\left(E^i, B^i\right) \longrightarrow \left(B^i, -E^i\right) \qquad \left(J^\mu_{el}, J^\mu_{mag}\right) \longrightarrow \left(J^\mu_{mag}, -J^\mu_{el}\right) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Dualità EM + Meccanica Quantistica: condizione di quantizzazione della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono inversamente proporzionali.

primo esempio di dualità strong/weak coupling

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico $J^\mu_{mag}$ si ottiene una invarianza $\mathbb{Z}_2$ delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$\left(E^i, B^i\right) \longrightarrow \left(B^i, -E^i\right) \qquad (J^\mu_{el}, J^\mu_{mag}) \longrightarrow (J^\mu_{mag}, -J^\mu_{el}) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Dualità EM + Meccanica Quantistica: condizione di quantizzazione della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono inversamente proporzionali.

primo esempio di dualità strong/weak coupling

# DUALITÀ DI SEIBERG E DI KUTASOV-SCHWIMMER-SEIBERG

# Dualità di Seiberg e Kutasov-Schwimmer-Seiberg (KSS)

Teoria elettrica $\longleftrightarrow$ Teoria magnetica

QCD con supersimmetria minimale ($\mathcal{N} = 1$) con gruppo $SU(N)$.
Dualità KSS ha un ulteriore campo di materia nell'aggiunta.

| **Uguali** | **Diverse** |
|---|---|
| Funzioni di correlazione | Particelle (mesoni) |
| Simmetrie Globali (fisiche) | Costanti di accoppiamento |
| Struttura dei vuoti (susy) | Dinamica (numero di colori) |

Dualità a basse energie $\longrightarrow$ punto fisso superconforme
ad alte energie descrivono sistemi diversi

# Dualità di Seiberg e Kutasov-Schwimmer-Seiberg (KSS)

Teoria elettrica $\longleftrightarrow$ Teoria magnetica

QCD con supersimmetria minimale ($\mathcal{N} = 1$) con gruppo $SU(N)$.
Dualità KSS ha un ulteriore campo di materia nell'aggiunta.

| Uguali | Diverse |
|---|---|
| Funzioni di correlazione | Particelle (mesoni) |
| Simmetrie Globali (fisiche) | Costanti di accoppiamento |
| Struttura dei vuoti (susy) | Dinamica (numero di colori) |

Dualità a **basse energie** $\longrightarrow$ **punto fisso superconforme**
ad alte energie descrivono sistemi diversi

Simili a teorie 4D $\mathcal{N} = 1$ ma con alcune differenze

**Differenze delle teorie di campo 3D $\mathcal{N} = 2$**

- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria assiale e topologica
- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner scalare
- uno spazio dei moduli (vuoti supersimmetrici) con un *branch* aggiuntivo

É necessario far combaciare questi nuovi *branch* fra le due teorie

Insieme aggiuntivo di singoletti nella teoria magnetica

Simili a teorie 4D $\mathcal{N} = 1$ ma con alcune differenze

**Differenze delle teorie di campo 3D $\mathcal{N} = 2$**

- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria assiale e topologica
- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner scalare
- uno spazio dei moduli (vuoti supersimmetrici) con un *branch* aggiuntivo

É necessario far combaciare questi nuovi *branch* fra le due teorie

Insieme aggiuntivo di singoletti nella teoria magnetica

# Riduzione dimensionale 4D $\to$ 3D

# 4D $\longrightarrow$ 3D: METODO NÄIVE

**Riduzione naturale:** $r \to 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio $r$:

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignora la dinamica sul cerchio e si manda $r \to 0$.
Si ottengono due teorie che non sono duali fra loro

**Riduzione corretta:** $r$ **finito**

La finitezza del cerchio modifica la dinamica e impone vincoli tipici della teoria 4D (anomalie), generati da un termine di superpotenziale $\eta$.

Si scende a energie $\ll \frac{1}{r}$: la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

# RIDUZIONE DUALITÀ KSS - TEORIA DEFORMATA

Si possono rimuovere questi vincoli con un particolare RG flow. Inoltre, si riesce a generare la simmetria assiale (assente in 4D).

Si è in grado di ridurre la dualità KSS con tecniche standard di QFT solo se si introduce una perturbazione al superpotenziale.

Con essa, si riesce a generare i singoletti necessari per far coincidere i vuoti.

# RIDUZIONE DUALITÀ KSS - TEORIA SENZA DEFORMAZIONE

Per ottenere la dualità 3D standard si rimuove la deformazione. L'unico problema di questo passaggio è che non si ha modo di generare i singoletti.

Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo comunque i singoletti corretti.

Non ci sono però giustificazioni teoriche a riguardo.

# Ho modo di verificare se questa intuizione è corretta?

# RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

Si calcola l'indice superconforme $I_{el}$ & $I_{mag}$: è uguale per teorie duali. Esso conta i multipletti BPS corti su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$, che una volta integrati i modi sul cerchio si riducono a stati sulla sfera 3D.

Infatti nel limite $r \to 0$ l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D con superpotenziale $\eta$.

| | |
|---|---|
| **Indice superconf.** | funzioni gamma ellittiche $\Gamma_e$ |
| **Funz. di partiz.** | funzioni gamma iperboliche $\Gamma_h$ |

**Identità matematiche**: $\Gamma_e \xrightarrow{r\to 0} \Gamma_h$

$$\begin{array}{llcl} \text{4D:} & I_{el} & = & I_{mag} \\ r \to 0 & \downarrow & & \downarrow \\ \text{3D:} & Z^{\eta}_{el} & = & Z^{\eta}_{mag} \end{array}$$

La dualità in 4D impone che gli indici superconformi siano uguali

⇓

Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale $\eta$ sono uguali

Per rimuovere i vincoli, si fa un RG flow simile a quanto fatto precedentemente, ma direttamente sulla funzione di partizione.

Si genera anche la simmetria assiale, richiesta per la dualità.

La dualità in 4D impone che gli indici superconformi siano uguali

⇓

Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale $\eta$ sono uguali

Per rimuovere i vincoli, si fa un RG flow simile a quanto fatto precedentemente, ma direttamente sulla funzione di partizione.

Si genera anche la simmetria assiale, richiesta per la dualità.

# FLOW VERSO UNA TEORIA SENZA SUPERPOTENZIALE $\eta$

Lavorando direttamente sulla funzione di partizione non è necessario introdurre una deformazione, come è stato fatto precedentemente.

## Singoletti

Utilizzando una identità matematica fra gamma iperboliche $\Gamma_h$ si ottengono i singoletti corretti per la dualità.
Coincidono con quelli trovati in teoria di campo con la deformazione.

É stato verificato che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione non giustificata, è **corretta**, confermando così il legame fra le dualità di Seiberg in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **identità** integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ **non ancora dimostrate** matematicamente.

É stato verificato che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione non giustificata, è **corretta**, confermando così il legame fra le dualità di Seiberg in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **identità** integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ **non ancora dimostrate** matematicamente.

É stato verificato che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione non giustificata, è corretta, confermando così il legame fra le dualità di Seiberg in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una identità integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ non ancora dimostrate matematicamente.

Grazie per l’attenzione

N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, *Nucl.Phys.* **B435** (1995) 129–146, [hep-th/9411149].

D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, *Phys.Lett.* **B354** (1995) 315–321, [hep-th/9505004].

O. Aharony, *IR duality in d = 3 N=2 supersymmetric USp(2N(c)) and U(N(c)) gauge theories*, *Phys.Lett.* **B404** (1997) 71–76, [hep-th/9703215].

P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, *JHEP* **1308** (2013) 011, [arXiv:1211.2808].

H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, *JHEP* **1306** (2013) 106, [arXiv:1302.3645].

O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, *JHEP* **1307** (2013) 149, [arXiv:1305.3924].

K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, *JHEP* **1502** (2015) 024, [arXiv:1409.3230].

A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, arXiv:1409.8623.

$$
\begin{aligned}
Z_{el}(\mu_i,\nu_i) = \ & \frac{1}{N_c!}\Gamma_h(\Delta_X\omega)^{N_c-1} \\
& \int \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\sigma_i}{\sqrt{-\omega_1\omega_2}}\,\delta(\sum_i \sigma_i) \prod_{1\le i<j\le N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega \pm (\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))} \\
& \prod_{a,b=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{N_c}\Gamma_h(m_a+m_B+m_A+\sigma_j)\Gamma_h(-\tilde{m}_a-m_B+m_A-\sigma_j)
\end{aligned}
$$

# FUNZIONE DI PARTIZIONE MAGNETICA

$$
\begin{aligned}
Z_{mag} = &\frac{1}{(kN_f - N_c)!}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{kN_f-N_c-1} \\
&\left(\prod_{j=0}^{k-1}\prod_a^{N_f}\prod_b^{N_f}\Gamma_h\left(\mu_a+\nu_b+j\omega\Delta_X\right)\right) \\
&\int\prod_{i=1}^{kN_f-N_c}\frac{d\sigma_i}{\omega_1\omega_2}\int d\xi\, e^{\frac{\pi i}{\omega_1\omega_2}2\xi(m_B N_c+\sum\sigma_i)}\prod_{i<j}^{kN_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))} \\
&\Bigg(\prod_{a,b}^{N_f}\prod_{j=1}^{kN_f-N_c}\quad\Gamma_h\left(-m_a-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)+\tilde{\sigma}_j\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\Gamma_h\left(+\tilde{m}_b-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)-\tilde{\sigma}_j\right)\Bigg) \\
&\prod_{j'=0}^{k-1}\Gamma_h\left(\pm\xi+\omega\left(N_f(1-\Delta_Q)-\Delta_X(N_c-j')\right)-m_A N_f\right)
\end{aligned}
$$