# 4D TO 3D REDUCTION OF SEIBERG DUALITY FOR SU(N) SUSY GAUGE THEORIES WITH ADJOINT MATTER: A PARTITION FUNCTION APPROACH

Carlo Sana

29 giugno 2015

Università degli Studi di Milano-Bicocca
Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica "G. Occhialini"

# PAUSE

Dualità di Seiberg e KSS in 4D e 3D

Riduzione dimensionale 4D $\rightarrow$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità di Seiberg e KSS in 4D e 3D

Riduzione dimensionale 4D $\to$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

# PAUSE

Dualità di Seiberg e KSS in 4D e 3D

Riduzione dimensionale 4D $\rightarrow$ 3D

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

# DUALITÀ DI SEIBERG E KSS IN 4D E 3D

# DUALITÀ ELETTRICA-MAGNETICA DI DIRAC

Introducendo i monopoli magnetici con corrente $J^\mu_{mag}$ ottengo una invarianza $\mathbb{Z}_2$ delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$\left(E^i, B^i\right) \longrightarrow \left(B^i, -E^i\right) \qquad \left(J^\mu_{el}, J^\mu_{mag}\right) \longrightarrow \left(J^\mu_{mag}, -J^\mu_{el}\right) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla MQ si ottiene una condizione di quantizzazione della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono inversamente proporzionali.

Generalizzazione per teorie di campo supersimmetriche della dualità fra campi elettrici e magnetici di Dirac.

Prima dualità scoperta nel '94 fra teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD)

$$\begin{array}{lcl} \text{Superquark} & \longrightarrow & \text{squark (spin 0) + quark}\left(\text{spin } \frac{1}{2}\right) \\ \text{Supergluone} & \longrightarrow & \text{gaugino } \left(\text{spin } \frac{1}{2}\right) \text{ + gluone (spin 1)} \end{array}$$

**Perchè la supersimmetria?**

Studiare una teoria con più simmetri porta molti vantaggi da un punto di vista teorico.

Le teorie di campo supersimmetriche sono più facilmente trattabili , soprattutto in regime non perturbativo.

Studiare un sistema fisico più vincolato può dare informazioni che possono essere valide anche per sistemi con meno simmetria.

Generalizzazione per teorie di campo supersimmetriche della dualità fra campi elettrici e magnetici di Dirac.

Prima dualità scoperta nel '94 fra teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD)

$$\begin{aligned} &\text{Superquark} &&\longrightarrow &&\text{squark (spin 0)} + \text{quark}\left(\text{spin } \tfrac{1}{2}\right) \\ &\text{Supergluone} &&\longrightarrow &&\text{gaugino } \left(\text{spin } \tfrac{1}{2}\right) + \text{gluone (spin 1)} \end{aligned}$$

## Perchè la supersimmetria?

Studiare una teoria con più simmetri porta molti vantaggi da un punto di vista teorico.

Le teorie di campo supersimmetriche sono più facilmente trattabili , soprattutto in regime **non perturbativo**.

Studiare un sistema fisico più vincolato può dare **informazioni** che possono essere valide anche per sistemi **con meno simmetria**.

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

**Teoria elettrica** $SU(N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori

**Teoria magnetica** $SU(N_f - N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori, $N_f^2$ mesoni, costruiti con i quark elettrici $M = Q\tilde{Q}$

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

**Teoria elettrica** $SU(N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori $(Q, \tilde{Q})$ e un campo di materia $X$ nell'aggiunta con superpotenziale $\mathrm{tr}\, X^{k+1}$

**Teoria magnetica** $SU(kN_f - N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori $(q, \tilde{q})$, un campo di materia $Y$ nell'aggiunta con superpotenziale $\mathrm{tr}\, Y^{k+1}$ e $k\, N_f^2$ Mesoni $M^j$, costruiti dai campi elettrici $M^j = Q\, X^j\, \tilde{Q}$

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

**Teoria elettrica** $SU(N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori

**Teoria magnetica** $SU(N_f - N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori, $N_f^2$ mesoni, costruiti con i quark elettrici $M = Q\tilde{Q}$

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

**Teoria elettrica** $SU(N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori $(Q, \tilde{Q})$ e un campo di materia $X$ nell'aggiunta con superpotenziale $\mathrm{tr}\, X^{k+1}$

**Teoria magnetica** $SU(kN_f - N_c)$ $SQCD$ con $N_f$ sapori $(q, \tilde{q})$, un campo di materia $Y$ nell'aggiunta con superpotenziale $\mathrm{tr}\, Y^{k+1}$ e $k\, N_f^2$ Mesoni $M^j$, costruiti dai campi elettrici $M^j = Q\, X^j\, \tilde{Q}$

## In cosa consiste la dualità?

Entrambe le teorie nello stesso intervallo di sapori e colori fluiscono a basse energie a un punto fisso superconforme fortemente interagente.

Gli operatori gauge invarianti vengono mappati fra l'una e l'altra teoria

**Seiberg duality**

$$
\begin{aligned}
M_{el} &= Q\tilde{Q} && \longleftrightarrow && M_{mag} \neq q\tilde{q} \\
B_{el} &= Q_{[i} \dots Q_{N_c]} && \longleftrightarrow && B_{mag} = q_{[i} \dots q_{N_f - N_c]} \\
\tilde{B}_{el} &= \tilde{Q}_{[i} \dots \tilde{Q}_{N_c]} && \longleftrightarrow && \tilde{B}_{mag} = \tilde{q}_{[i} \dots \tilde{q}_{N_f - N_c]}
\end{aligned}
$$

Tutte le osservabili della teoria elettrica possono essere calcolate nella teoria magnetica e si ottengono gli stessi risultati.

Non ho modo di sapere se si osservano i gradi di libertà dell'una o dell'altra teoria.

## In cosa consiste la dualità?

Entrambe le teorie nello stesso intervallo di sapori e colori fluiscono a basse energie a un punto fisso superconforme fortemente interagente.

Gli operatori gauge invarianti vengono mappati fra l'una e l'altra teoria

**Seiberg duality**

$$
\begin{aligned}
M_{el} &= Q\tilde{Q} & \longleftrightarrow \quad & M_{mag} \neq q\tilde{q} \\
B_{el} &= Q_{[i} \dots Q_{N_c]} & \longleftrightarrow \quad & B_{mag} = q_{[i} \dots q_{N_f - N_c]} \\
\tilde{B}_{el} &= \tilde{Q}_{[i} \dots \tilde{Q}_{N_c]} & \longleftrightarrow \quad & \tilde{B}_{mag} = \tilde{q}_{[i} \dots \tilde{q}_{N_f - N_c]}
\end{aligned}
$$

Tutte le osservabili della teoria elettrica possono essere calcolate nella teoria magnetica e si ottengono gli stessi risultati.

Non ho modo di sapere se si osservano i gradi di libertà dell'una o dell'altra teoria.

# DUALITÀ STRONG-WEAK COUPLING

Per tutte le dualità elettriche-magnetiche vale la relazione

$$g_{el} \sim \frac{1}{\tilde{g}_{mag}} \quad \longrightarrow \quad \text{strong-weak coupling}$$

Quando una delle due teoria è fortemente accoppiata, la teoria duale è in regime perturbativo.

Si può calcolare una osservabile nella teoria fortemente accoppiata (difficile da trattare) con tecniche perturbative ben note nella teoria duale.

# DUALITÀ STRONG-WEAK COUPLING

Per tutte le dualità elettriche-magnetiche vale la relazione

$$g_{el} \sim \frac{1}{\tilde{g}_{mag}} \quad \longrightarrow \quad \text{strong-weak coupling}$$

Quando una delle due teoria è fortemente accoppiata, la teoria duale è in regime perturbativo.

Si può calcolare una osservabile nella teoria fortemente accoppiata (difficile da trattare) con tecniche perturbative ben note nella teoria duale.

# ALTRI ESEMPI DI DUALITÀ STRONG-WEAK COUPLING

- Dualità di Montonen-Oliven
- AdS/CFT $\to$ gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

In particolare, con la dualità AdS/CFT (Anti-deSitter/Conformal field Theory):

- calcolo viscosità del quark/gluon plasma
- modelli per superconduttori olografici ($AdS_4/CFT_3$))

CFT fortemente interagente, teoria di gravità debolmente accoppiata.

## DUALITÀ DI SEIBERG IN 3D

Caratteristiche simili alle dualità di Seiberg in 4D, nonostante le teorie di campo in 3D presentano

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner scalare
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria assiale e topologica
- uno spazio dei moduli (vuoti supersimmetrici) con un *branch* aggiuntivo

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica $\longrightarrow$ singoletti nella teoria magnetica

# DUALITÀ DI SEIBERG IN 3D

Caratteristiche simili alle dualità di Seiberg in 4D, nonostante le teorie di campo in 3D presentano

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner scalare
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria assiale e topologica
- uno spazio dei moduli (vuoti supersimmetrici) con un *branch* aggiuntivo

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica $\longrightarrow$ singoletti nella teoria magnetica

# Riduzione dimensionale 4D $\to$ 3D

## Riduzione naturale: $r \to 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio $r$:

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.
Infine, si manda $r \to 0$.

## Con questo procedimento non si ottengono due teorie duali in 3D

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

## Riduzione naturale: $r \to 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio $r$:

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.
Infine, si manda $r \to 0$.

**Con questo procedimento non si ottengono due teorie duali in 3D**

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

## Riduzione corretta: $r$ finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale ($\eta$) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale $\eta$ impone vincoli tipici delle 4D (anomalie). In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie: per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale $\eta$ rimane anche scendendo a basse energie.

# Riduzione corretta: $r$ finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale ($\eta$) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale $\eta$ impone vincoli tipici delle 4D (anomalie). In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie: per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale $\eta$ rimane anche scendendo a basse energie.

Si può arrivare a una dualità 3D senza il superpotenziale $\eta$ causato dalla presenza del cerchio?

### Dualità di Seiberg & KSS

Facendo un RG flow con masse reali si ottengono teorie senza il vincolo imposto dal superpotenziale $\eta$.

Si genera anche la simmetria assiale che è anomala in 4D, ma che è permessa in 3D.
I vincoli sulle cariche dei campi vengono rimossi.

La riduzione delle dualità è compresa in teoria di campo per diverse dualità 4D.

Nel caso della dualità KSS è necessario deformare la teoria aggiungendo una perturbazione nel superpotenziale.

Nella teoria duale, essa rompe la teoria in $k$ settori senza aggiunta con gruppo di gauge

$$SU(kN_f - N_c) = \prod_i^k SU(n_i) \times U(1)^k / U(1) \qquad \text{con} \quad \sum_i n_i = kN_f - N_c$$

Si può dualizzare il settore $U(1)^k$ in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

**Rimuovendo la deformazione $U(1)^k \longrightarrow U(k)$ e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.**

$\Downarrow$

Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

**Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.**

# RIDUZIONE DIMENSIONALE IN TEORIA DI CAMPO

Si può dualizzare il settore $U(1)^k$ in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

Rimuovendo la deformazione $U(1)^k \longrightarrow U(k)$ e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.

$$\Downarrow$$

Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

# Ho modo di verificare se questa intuizione è corretta?

# RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

Si calcola l'indice superconforme $I_{el}$ & $I_{mag}$: conta i multipletti BPS corti della teoria su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Nel limite $r \to 0$ l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D con superpotenziale $\eta$.

**Indice superconf.** integrale sul gruppo di gauge di $\Gamma_e$ ellittiche
**Funz. di partiz.** integrale sul gruppo di gauge di $\Gamma_h$ iperboliche

$$\begin{array}{lcccc} \text{4D:} & I_{el} & = & I_{mag} & \Gamma_e \\ r \to 0 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \text{3D:} & Z^{\eta}_{el} & = & Z^{\eta}_{mag} & \Gamma_h \end{array} \tag{1}$$

La dualità in 4D (fisicamente) e identità integrali (matematicamente) dimostrano l'identità fra gli indici in 4D.

⬇

Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale $\eta$ sono uguali grazie all'identità degli indici in 4D

Si fa un RG flow con masse reali direttamente sulla funzione di partizione.
Con questo metodo non è necessario introdurre una deformazione e il gruppo di gauge si rompe come

$$SU(k(N_f+1)-N_c) \longrightarrow U(kN_f-N_c)\times U(k)/U(1)$$

Utilizzando una identità matematica fra gamma iperboliche $\Gamma_h$ sul settore $U(k)$ si ottengono gli stessi singoletti trovati in teoria di campo dualizzando $U(1)^k$.

Il nostro lavoro è una verifica indipendente dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare assunzioni non giustificabili.

Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una nuova identità integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ non ancora dimostrate matematicamente.

Il nostro lavoro è una verifica indipendente dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare assunzioni non giustificabili.

Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una nuova identità integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ non ancora dimostrate matematicamente.

Il nostro lavoro è una verifica indipendente dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare assunzioni non giustificabili.

Questo risultato non era presente in letteratura.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una nuova identità integrale tra funzioni iperboliche $\Gamma_h$ non ancora dimostrate matematicamente.

N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, *Nucl.Phys.* **B435** (1995) 129–146, [hep-th/9411149].

O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, *JHEP* **1307** (2013) 149, [arXiv:1305.3924].

H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, *JHEP* **1306** (2013) 106, [arXiv:1302.3645].

A. Amariti and C. Klare, *Chern-Simons and RG Flows: Contact with Dualities*, *JHEP* **1408** (2014) 144, [arXiv:1405.2312].

K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, *JHEP* **1502** (2015) 024, [arXiv:1409.3230].

D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, *Phys.Lett.* **B354** (1995) 315–321, [hep-th/9505004].

A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, arXiv:1409.8623.

P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, *JHEP* **1308** (2013) 011, [arXiv:1211.2808].

O. Aharony, *IR duality in d = 3 N=2 supersymmetric USp(2N(c)) and U(N(c)) gauge theories*, *Phys.Lett.* **B404** (1997) 71–76, [hep-th/9703215].