

# **4D TO 3D REDUCTION OF SEIBERG DUALITY FOR $SU(N)$ SUSY GAUGE THEORIES WITH ADJOINT MATTER: A PARTITION FUNCTION APPROACH**

---

CARLO SANA

29 GIUGNO 2015

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA  
SCUOLA DI SCIENZE  
DIPARTIMENTO DI FISICA "G. OCCHIALINI"

Dualità elettrica-magnetica e strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità elettrica-magnetica e strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità elettrica-magnetica e strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità elettrica-magnetica e strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

# DUALITÀ ELETTRICA-MAGNETICA E STRONG/WEAK COUPLING

---

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** per teorie di campo **supersimmetriche non-abeliane** della dualità di Dirac.

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico  $J_{mag}^\mu$  ottengo una invarianza  $\mathbb{Z}_2$  delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$(E^i, B^i) \longrightarrow (B^i, -E^i) \quad (J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu) \longrightarrow (J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla Meccanica Quantistica si ottiene una condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

**dualità strong/weak coupling**

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** per teorie di campo **supersimmetriche non-abeliane** della dualità di Dirac.

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico  $J_{mag}^\mu$  ottengo una invarianza  $\mathbb{Z}_2$  delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$(E^i, B^i) \longrightarrow (B^i, -E^i) \quad (J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu) \longrightarrow (J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla Meccanica Quantistica si ottiene una condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

**dualità strong/weak coupling**



Relatività speciale  
+  
Meccanica Quantistica = Teoria quantistica dei campi (QFT)

Metodi **perturbativi** utilizzabili a **weak coupling**:  
sviluppi in serie nella costante di accoppiamento (e.g. **carica elettrica**)

## RG flow

Le costanti di accoppiamento variano in funzione della scala di energia:  
la teoria a bassa energia può fluire a **strong coupling**  
(e.g. confinamento in QCD)

**Nessuno strumento teorico per studiarne la dinamica.** → QCD su reticolo

ESISTE UNO STRUMENTO TEORICO PER TRATTARE  
TEORIE A STRONG COUPLING?

## Dualità strong/weak coupling

Legame fra le costanti di accoppiamento delle teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

## Dualità strong/weak coupling

Legame fra le costanti di accoppiamento delle teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

- Dualità di Montonen-Oliven
- Dualità di Seiberg
- AdS/CFT  $\rightarrow$  gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

In particolare, con la dualità AdS/CFT (Anti-deSitter/Conformal field Theory):

- calcolo viscosità del quark/gluon plasma
- modelli per superconduttori olografici ( $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ )

- Dualità di Montonen-Oliven
- Dualità di Seiberg
- AdS/CFT  $\rightarrow$  gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

In particolare, con la dualità AdS/CFT (Anti-deSitter/Conformal field Theory):

- calcolo viscosità del quark/gluon plasma
- modelli per superconduttori olografici ( $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ )

## DUALITÀ DI SEIBERG

---

Seiberg duality  $\sim$  EM-duality

Teoria elettrica  $\longleftrightarrow$  Teoria magnetica

**Uguali**

Funzioni di correlazione

Matrice S

Simmetrie Globali (**fisiche**)

**Diverse**

Particelle

Costanti di accoppiamento

Dinamica

Simmetrie locali (**non fisiche**)

Dualità a **basse energie**, ad alte energie  
le due teorie sono fisicamente **distinguibili**



Primo caso di dualità scoperto nel '94 fra due teorie di  
*Supersymmetric QCD* (SQCD)

Superquark	→	squark (spin 0) + quark (spin $\frac{1}{2}$ )
Supergluone	→	gaugino (spin $\frac{1}{2}$ ) + gluone (spin 1)

Perchè la supersimmetria?

Ci sono più strumenti teorici a disposizione per studiare teorie di campo supersimmetriche, soprattutto in regime **non perturbativo**.

Sono il terreno ideale per fare nuove scoperte, che possono essere **estese** anche a sistemi fisici non supersimmetrici.

Primo caso di dualità scoperto nel '94 fra due teorie di  
*Supersymmetric QCD* (SQCD)

$$\begin{array}{ll} \text{Superquark} & \longrightarrow \text{squark (spin 0) + quark (spin } \frac{1}{2}) \\ \text{Supergluone} & \longrightarrow \text{gaugino (spin } \frac{1}{2}) + \text{gluone (spin 1)} \end{array}$$

## Perchè la supersimmetria?

Ci sono più strumenti teorici a disposizione per studiare teorie di campo supersimmetriche, soprattutto in regime **non perturbativo**.

Sono il terreno ideale per fare nuove scoperte, che possono essere **estese** anche a sistemi fisici non supersimmetrici.

## Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica    SQCD con  $N_c$  colori e  $N_f$  sapori

Teoria magnetica    SQCD con  $N_c$  colori e  $N_f$  sapori e  $N_f^2$  mesoni,  
costruiti con i **quark elettrici**

## Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica    SQCD con  $N_c$  colori e  $N_f$  sapori e materia  
nell'aggiunta del gruppo di gauge

Teoria magnetica    SQCD con  $kN_f - N_c$  colori e  $N_f$  sapori, materia  
nell'aggiunta del gruppo di gauge e  $kN_f^2$  mesoni,  
costruiti con i campi della **teoria elettrica**.

## Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica	$SQCD$ con $N_c$ colori e $N_f$ sapori
Teoria magnetica	$SQCD$ con $N_c$ colori e $N_f$ sapori e $N_f^2$ mesoni, costruiti con i <b>quark elettrici</b>

## Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica	$SQCD$ con $N_c$ colori e $N_f$ sapori e materia nell'aggiunta del gruppo di gauge
Teoria magnetica	$SQCD$ con $kN_f - N_c$ colori e $N_f$ sapori, materia nell'aggiunta del gruppo di gauge e $kN_f^2$ mesoni, costruiti con i campi della <b>teoria elettrica</b> .

## Differenze delle teorie di campo 3D

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

**Monopoli** della teoria elettrica  $\rightarrow$  **singoletti** nella teoria magnetica

## Differenze delle teorie di campo 3D

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

**Monopoli** della teoria elettrica  $\rightarrow$  **singoletti** nella teoria magnetica

## RIDUZIONE DIMENSIONALE $4D \rightarrow 3D$

---

### Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio  $r$ :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda  $r \rightarrow 0$ .

Con questo procedimento non si ottengono  
due teorie duali in 3D

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.



### Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio  $r$ :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda  $r \rightarrow 0$ .

**Con questo procedimento non si ottengono  
due teorie duali in 3D**

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

### Riduzione corretta: $r$ finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale ( $\eta$ ) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale  $\eta$  impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).  
In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:  
per energie  $\ll \frac{1}{r}$  la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale  $\eta$  rimane anche scendendo a basse energie.

### Riduzione corretta: $r$ finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale ( $\eta$ ) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale  $\eta$  impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).  
In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:  
per energie  $\ll \frac{1}{r}$  la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale  $\eta$  rimane anche scendendo a basse energie.

SI PUÒ ARRIVARE A UNA DUALITÀ 3D SENZA IL  
SUPERPOTENZIALE  $\eta$  CAUSATO DALLA PRESENZA DEL  
CERCHIO?

### Dualità di Seiberg & KSS

Facendo un RG flow con masse reali si ottengono teorie senza il vincolo imposto dal superpotenziale  $\eta$ .

Si genera anche la simmetria assiale che è **anomala in 4D**, ma che è permessa in 3D. Anche gli altri vincoli imposti dal superpotenziale  $\eta$  sui campi vengono rimossi.

La riduzione delle dualità è compresa in teoria di campo per diverse dualità 4D.

Nel caso della dualità KSS è necessario deformare la teoria aggiungendo una **perturbazione** nel superpotenziale.

Nella teoria duale, essa rompe la teoria in  $k$  settori **senza aggiunta** con gruppo di gauge

$$SU(kN_f - N_c) = \prod_i^k U(n_i) \times U(1)^k / U(1) \quad \text{con} \quad \sum_i n_i = kN_f - N_c$$

Si può dualizzare il settore  $U(1)^k$  in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

Rimuovendo la deformazione  $U(1)^k \rightarrow U(k)$  e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

Si può dualizzare il settore  $U(1)^k$  in modo da ottenere i singoletti non presenti nella dualità 4D.

Rimuovendo la deformazione  $U(1)^k \rightarrow U(k)$  e non si sa come si possono ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo gli stessi singoletti.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.



HO MODO DI VERIFICARE SE QUESTA INTUIZIONE È  
CORRETTA?

# RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

---

Si calcola l'indice superconforme  $I_{el}$  &  $I_{mag}$ : conta i multipletti BPS corti della teoria su  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ .

Nel limite  $r \rightarrow 0$  l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D **con superpotenziale  $\eta$** .

**Indice superconf.** integrale sul gruppo di gauge di  $\Gamma_e$  ellittiche

**Funz. di partiz.** integrale sul gruppo di gauge di  $\Gamma_h$  iperboliche

$$\begin{array}{rclcl} 4D: & I_{el} & = & I_{mag} & \Gamma_e \\ r \rightarrow 0 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 3D: & Z_{el}^{\eta} & = & Z_{mag}^{\eta} & \Gamma_h \end{array} \quad (1)$$

La dualità in 4D (**fisicamente**) e identità integrali (**matematicamente**) dimostrano l'identità fra gli indici in 4D.



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale  $\eta$  sono uguali grazie all'identità degli indici in 4D

Si fa un RG flow con masse reali direttamente sulla funzione di partizione.

Con questo metodo **non è necessario** introdurre una deformazione , a differenza che in teoria di campo.

Utilizzando una identità **matematica** fra gamma iperboliche  $\Gamma_h$  sul settore  $U(k)$  si ottengono gli **stessi singoletti** trovati in teoria di campo dualizzando  $U(1)^k$ .

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso  $SU(N)$ .

L'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

**La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso  $SU(N)$ .**

L'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

**La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso  $SU(N)$ .**

L'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.



GRAZIE PER L'ATTENZIONE

N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, *Nucl.Phys.* **B435** (1995) 129–146, [[hep-th/9411149](#)].

O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, *JHEP* **1307** (2013) 149, [[arXiv:1305.3924](#)].

H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, *JHEP* **1306** (2013) 106, [[arXiv:1302.3645](#)].

K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, *JHEP* **1502** (2015) 024, [[arXiv:1409.3230](#)].

D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, *Phys.Lett.* **B354** (1995) 315–321, [[hep-th/9505004](#)].

A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, [arXiv:1409.8623](#).

P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, *JHEP* **1308** (2013) 011, [[arXiv:1211.2808](#)].

O. Aharony, *IR duality in  $d = 3$   $N=2$  supersymmetric  $USp(2N(c))$  and  $U(N(c))$  gauge theories*, *Phys.Lett.* **B404** (1997) 71–76, [[hep-th/9703215](#)].