Prepared for submission to JHEP

# Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer 4d $\rightarrow$ 3d

**Carlo Sana**

# Indice

## KS duality: rappresentazioni e cariche

Teoria in quattro dimensioni.

### Teoria Elettrica

| | $SU(N_f)_L$ | $SU(N_f)_R$ | $U(1)_B$ | $U(1)_R$ |
|---|---|---|---|---|
| $Q$ | $N_F$ | $1$ | $1$ | $1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}$ |
| $\tilde{Q}$ | $1$ | $\overline{N_F}$ | $-1$ | $1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}$ |
| $X$ | $1$ | $1$ | $0$ | $\frac{2}{k+1}$ |

**Tabella 1**. Tabella delle cariche per teoria elettrica

La materia nell'aggiunta ha un superpotenziale dato da $W = \mathrm{tr}Y^{k+1}$ che ne fissa la R-Carica. Le R-cariche sono fissate in modo che la R-simmetria sia NON anomala.

### Teoria Magnetica

| | $SU(N_f)_L$ | $SU(N_f)_R$ | $U(1)_B$ | $U(1)_R$ |
|---|---|---|---|---|
| $q$ | $\overline{N_F}$ | $1$ | $\frac{N_c}{kN_f-N_c}$ | $1-\frac{2}{k+1}\frac{kN_f-N_c}{N_f}$ |
| $\tilde{q}$ | $1$ | $N_F$ | $-\frac{N_c}{kN_f-N_c}$ | $1-\frac{2}{k+1}\frac{kN_f-N_c}{N_f}$ |
| $Y$ | $1$ | $1$ | $0$ | $\frac{2}{k+1}$ |
| $M_j$ | $N_f$ | $\overline{N_f}$ | $0$ | $2-\frac{4}{k+1}\frac{N_c}{N_f}+j\frac{2}{k+1}$ |

**Tabella 2**. Tabella delle cariche per teoria magnetica

Il superpotenziale per questa teoria è dato da

$$W = \mathrm{tr}X^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} M_j q Y^{k-j-1}\tilde{q} \qquad \text{dove } M_j = QY^j\tilde{Q}$$

I mesoni sono costruiti dai quark ELETTRICI.
Questo superpotenziale oltre a fissare $R_X = R_Y$ fissa le R-cariche di mesoni e quark duali.

$$\begin{aligned}
2 &= R(M_j q Y^{k-j-1}\tilde{q}) = 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k-j-1)R_Y = \\
2 &= 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k+1)R_X - 2R_X \\
2 &= 2R_Q + jR_Y + 2R_q + 2 - 2R_X \;\rightarrow\; R_q = R_X - R_Q
\end{aligned}$$

# 1 Teoria Elettrica

Si seguiranno le convenzioni di [2].

## 1.1 Calcolo indice superconforme

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer ( $SU(N_C) \times SU(N_f)_L) \times SU(N_f)_R) \times U(1)_B)$ è dato da (vedi [3])

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{N_c}(z)\,p_{N_c}(z^{-1})-1\big) \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(y)\,p_{N_c}(z)-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{N_c}(z^{-1}) \\
&\qquad+(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{N_c}(z^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{N_c}(z)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

I polinomi sono definiti come

$$
p_{N_c}(x)=\sum_i^{N_c} x_i \qquad p_{N_c}(x^{-1})=\sum_i^{N_c}\frac{1}{x_i}
$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}-1\Big) \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,y_i\,z_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,y_i^{-1}\,z_j^{-1}\Big) \\
&\qquad+(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,\tilde{y}_i\,z_j^{-1}-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,\tilde{y}_i^{-1}\,z_j\Bigg)
\end{aligned}
$$

riscalando $(pq)^{\frac{1}{2}r}vy \to y$ e $(pq)^{-\frac{1}{2}r}v\tilde{y} \to \tilde{y}$ :

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,y,\tilde{y},y) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\left(\sum_{1\le i,j\le N_c} z_i/z_j-1\right)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$
+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Big(\big(y_i-p\,q\,\tilde{y}_i\big)z_j+\big(\tilde{y}_i^{-1}-p\,q\,y_i^{-1}\big)z_j^{-1}\Big)
$$

dove $R_q$ e $R_X$ sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$R_Q = 1 - \frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}\,, \qquad s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}R_X \tag{1.3}$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).
L'indice superconforme è definito come:

$$I_E(p,q,v,y,\tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z)\, \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} i_E(p^n,q^n,v^n,y^n,\tilde{y}^n,z^n)\right)$$

L'integral sul gruppo $SU(N_c)$ può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$\int_{SU(N_c)} d\mu(z)\, f(z) = \frac{1}{N_c!}\int_{T^{N_c-1}}\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\Delta(z)\Delta(z^{-1})f(z)\Big|_{\prod_{i=1}^{N_c} z_i=1} \tag{1.4}$$

e dove $\Delta(z)$ è il determinante di Vandermonde:

$$\Delta(z) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}(z_i - z_j) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)z_j = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$.
Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella $i_E$ si fattorizza nell'indice "completo" $I_E$ essendo all'interno di un esponenziale.
s

### 1.1.1 Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^{Vett}(p^n,q^n,z^n)\right) \stackrel{def}{=}$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)-1\right)\right) =$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N_c}1\right)-1\right)\right) =$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)+\left(N_c\right)-1\right)\right) =$$

$$=\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right)\right]$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(N_c-1\right)\right) =$$

$$=\left[\prod_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\right)\right]^{N_c-1}$$

$$\left[\prod_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,i_E^V(p^n,q^n)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,i_E^V(p^n,q^n)\right)\right]^{N_c-1} \tag{1.5}$$

Da questi termini si ottengono le funzioni $\Gamma_e$ attraverso le seguenti identità non banali:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)\left(z^n+z^{-n}\right) = \frac{\theta(z;p)\theta(z;q)}{1-z^2} \tag{1.6}$$

$$= \frac{1}{(1-z)(1-z^{-1})\Gamma_e(z;p,q)\Gamma_e(z^{-1};p,q)} \tag{1.7}$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right) = (p;p)(q;q) \tag{1.8}$$

$$\text{dove}\quad i_E^V(p^n,q^n) = -\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right) \tag{1.9}$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\Gamma_e(z;p,q) = \prod_{i,j\ge 0}\frac{1-y^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-yp^jq^k}$$

$$\theta(z;p) = \prod_{j\ge 0}(1-zp^j)(1-z^{-1}p^{j+1})$$

$$(x;p) = \prod_{j\ge 0}(1-xp^j)$$

L'identità 1.8 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} = \prod_{1\le i<j\le N_c} \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

A questo punto identificando $\frac{z_i}{z_j} = z$ si applica l'identità 1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\begin{aligned}\prod_{1\le i<j\le N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right) &= \\ \prod_{1\le i<j\le N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\, i_E^V(p^n,q^n)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right) & \\ \prod_{1\le i<j\le N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)} &\end{aligned}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$\begin{aligned}&(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1} \prod_{1\le i<j\le N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)} \\ &(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\frac{1}{\Delta(z)\Delta(z^{-1})} \prod_{1\le i<j\le N_c} \frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}\end{aligned}$$

### 1.1.2 Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z;p,q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n-\left(\frac{pq}{z}\right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$\imath_E^{Adj}(p,q,z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\right)\left(\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}\right)-1\right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\imath_E^{Adj}(p^n,q^n,z^n)\right) \tag{1.10}$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)-1 = \\ &\left(\sum_{1\le i<j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+N_c-1\end{aligned}$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left((p\,q)^{sn} - (p\,q)^{(1-s)n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c \\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + N_c - 1\right)\right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da z da quelli che non ne dipendono.
Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da $\frac{z_i}{z_j}$ è dato da:

$$\exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(pq)^{sn}-(pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)}\right) = \exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(y)^n-(\frac{pq}{y})^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

Avendo posto $\quad (pq)^s = y$

L'identità 1.1.2 si applica immediatamente ai termini indipendenti da $z_i$ e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da $z_i$ consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$\left((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}\right)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left((pq)^{sn}\frac{z_i^n}{z_j^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + \left((pq)^{sn}\frac{z_j^n}{z_i^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)$$

il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s\frac{z_i}{z_j} \qquad y' = (pq)^s\frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 1.1.2 utilizzando le variabili $y, y'$ e il contributo è pari a

$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\right)$$

Riassumento il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\right)$$

### 1.1.3 Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscalamento di $y$ e $\tilde{y}$):

$$\prod_{\substack{1\leq j\leq N_c\\1\leq i\leq N_f}} \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left[\left((y_i z_j)^n - (\frac{pq}{y_i z_j})^n\right) + \left(\frac{1}{(\tilde{y}_i z_j)^n} - (pq\tilde{y}_i z_j)^n\right)\right]\right]$$

Identificando $t = y_i z_j$ e $t' = (\tilde{y}_i z_j)^{-1}$ con gli argomenti delle $\Gamma_e$ nell'identità 1.1.2 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1\leq j\leq N_c\\1\leq i\leq N_f}} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1}\tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})$$

## 1.2 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$\begin{aligned}
&I_{El}(p,q,y,\tilde{y},v) = \\
&\frac{1}{N_c!}(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\,\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1} \\
&\int_{T^{N_c-1}} \left(\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\right)\delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right) \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)} \\
&\prod_{1\leq j\leq N_c}\prod_{1\leq i\leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1}\tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})
\end{aligned}$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

## 1.3 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari potenziali chimici si può calcolare la funzione di partizione, nel limite $r \to 0$.

$$p = e^{2\pi i r\omega_1} \quad q = e^{2\pi i r\omega_2} \quad z_i = e^{2\pi i r\sigma_i}$$
$$y_a = e^{2\pi i r m_a} \quad y_a = e^{2\pi i r\tilde{m}_a} \quad v = e^{2\pi i r m_B}$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [4] pag 30)

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} =$$
$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

con $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Si possono riscalare le variabili in modo da sistemare il fattore di $\pi$ all'esponente:

$$z \to \pi z \quad \omega_1 \to \pi\omega_1 \quad \omega_2 \to \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi rz}; e^{i\pi r\omega_1}, e^{i\pi r\omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z)-(\pi\omega))}\Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)}\,\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di $\Gamma_h$: la sua definizione infatti è ( cfr [4] 2.2.4):

$$\begin{aligned}\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2) =& \exp\left(\pi i\frac{(2z-\omega_1-\omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2}\right)\\ & \frac{(\exp(-2\pi i(z-\omega_2)/\omega_1); \exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi z/\omega_2); \exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty}\\ & = \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2)\end{aligned}$$

### 1.3.1 Funzione di partizione

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per $r \to 0$ utilizzando le ridefinizioni delle fugacità in 1.3. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che $s = \frac{\Delta_X}{2}$

$$\begin{aligned}&\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi ir\Delta_X\omega})^{N_c-1} =\\ &= \big[\exp -\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_X - \omega)\big]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}(\frac{z_i}{z_j})\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}(\frac{z_j}{z_i})\big) =\\ &= \Gamma_e\Big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_i-\sigma j)}\Big)\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_j-\sigma_i)}\Big) =\\ &= \Gamma_e\Big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)}\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i)}\Big)\\ &= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_X + (\sigma_i-\sigma_j) + (\sigma_j-\sigma_i) - 2\omega)\right)\,\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)\\ &= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_X-1)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j})\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}) =& e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\;\Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i) =\\ &= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)\right),\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}by_iz_j})\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}b^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1}}) = \\
=&\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(m_i+m_B+\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j)}) = \\
=&e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j-\omega)+(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j-\omega))} \\
&\Gamma_h(\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j)\Gamma_h(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j) = \\
=&e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i)}\ \Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i-\sigma_j)
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$
\mu_i = \omega\Delta + m_i + m_B \quad \nu_i = \omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B
$$

### 1.3.2 Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):

$$
\begin{aligned}
&\omega(\Delta_X-1)(N_c-1) + \frac{N_c(N_c-1)}{2}2\omega(\Delta_x-1) - \frac{N_c(N_c-1)}{2}(-2\omega) + \\
&+ (N_c - 1\ (\text{qualcosa})) + N_c(\sum_i^{N_f} 2\omega(\Delta-1) + m_i - \tilde{m}_i) = \\
=&\omega(\Delta_X-1)(N_c^2-1) + (N_c^2-1)\omega + N_cN_f2\omega(\Delta-1) + N_c(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i)
\end{aligned}
$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate $z_i = e^{2\pi ir\sigma_i}$:

$$
\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi iz_i}\ \delta(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1)
$$

Il determinante della trasformazione è

$$
\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial \sigma_j}\right) = (2\pi ir)^{N_c}\prod_{i=1}^{N_c} z_i \quad \longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i} = r^{N_c}\prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i
$$

La *delta function* diventa:

$$
\delta\Big(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\Big) = \delta\big(e^{2\pi ir\sum\sigma_i} - 1\big) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{((2\pi ir)e^{2\pi ir(\sum\sigma_i)}}\right)^{N_c} \delta(\sum\sigma_i) \quad (1.11)
$$

### 1.3.3 Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer)

$$
\begin{aligned}
Z_{el}(\mu_i,\nu_i) =& \frac{1}{(2\ \pi i)^{N_c}} \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i\, \delta(\sum_i \sigma_i) \\
& e^{-2\pi i r N_c \sum \sigma_i} \prod_{1\le i<j\le N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega \pm (\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))} \prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i-\sigma_j)
\end{aligned}
$$

usando la convenzione $\Gamma_h(\pm x) = \Gamma_h(x)\Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale $\eta$ impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$
\frac{1}{2}\sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(N_c\Delta_X + (N_f+1)) \tag{1.12}
$$

### 1.3.4 Masse reali e flow senza $\eta$

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di $SU(N_f+1)^2\times U(1)_B \to SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$:

$$
\mu = \left(\begin{array}{cccc|c}
m_a+m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & m_a+m_A & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & m_a+m_A & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & m-m_AN_f
\end{array}\right)
+ \left(\begin{array}{cccc|c}
m_B+\omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & m_B+\omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & m_B+\omega\Delta & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B+\omega\Delta_m
\end{array}\right)
$$

dove valgono le condizioni:

$$
m_AN_f + \sum m_a = 0
$$

La stessa cosa si fa per $SU(N_f)_R$

$$\nu = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f \end{array}\right)$$
$$+ \left(\begin{array}{cccc|c} -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega\Delta_m \end{array}\right)$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).
Il valore di $m_A$ è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un $U(1)$ diagonale.
NB: $U(1)_A$ mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi $N_f$ sapori e l'ultimo ( $\Delta$ e $\Delta_m$).

NB: da [1] (5.28): Date masse $m_a$ e $\tilde{m}_a$ per $Q$ e $\tilde{Q}$, abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - m_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + m_a)$$

### 1.3.5 Limite per $m \to \infty$

Per fare il limite $m \to \infty$ utilizziamo la seguente identità [1] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\lim_{m\to\infty} \Gamma_h(\omega\Delta + \sigma_i + M + m) =$$
$$\exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left([\omega(\Delta - 1) + \sigma_i + (m + M)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}\right)\right)$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned} \Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[[\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \right.\right. \\ &\left.\left. +(m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}\right]\right) \\ \Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp\left(\text{sign}(-m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[[\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \right.\right. \\ &\left.\left. (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}\right]\right) \end{aligned}$$

Per via del fattore sign($\pm m$) i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4\,\omega(\Delta_M-1)(m+\sigma_i+m_B)-4(m_aN_f)(\sigma_i+m+m_B)\right]\right]= \\
&=\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m+m_B)(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)+4\sigma_i(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)\right]\right]
\end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{N_c}\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m+m_B)(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)+4\sigma_i(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)\right]\right]= \\
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4N_c(m+m_B)(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)+4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f\big)\right]\right]
\end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a $\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i$ può essere inglobato nella $\delta(\sum\sigma_i)$.
Definendo la funzione $c(x)=e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1\omega_2}}$ i contributi diventano:

$$c(4N_c(m+m_B)(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f)\,c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M-1)-m_aN_f\big)$$

Utilizziamo la condizione 1.12 utilizzando questa assegnazione delle masse, ossia:

$$\frac{1}{2}\sum_a\mu_a+\nu_a=\omega(N_c\Delta_X+N_f+1)\;=\;N_f\omega\Delta+\omega\Delta_M \tag{1.13}$$

Utilizziamo questa relazione nell'esponenziale precedente (in modo da non avere termini che dipendono dal campo che ha massa che tende a infinito):

$$c(4N_c(m+m_B)(\omega(1-\Delta)-N_c\Delta_X-m_aN_f)\,c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega((1-\Delta)-N_c\Delta_X-m_aN_f)\big)$$

$$c(4N_c(m+m_B)(-\omega(\Delta-1)+N_c\Delta_X+m_aN_f)\,c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(-\big(\omega((\Delta-1)+N_c\Delta_X+m_aN_f)\big)\big)$$

## 2 Teoria Magnetica

### 2.1 Calcolo dell'indice superconforme

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione ( $\tilde{N}_c = kN_f - N_c$) (NB: Corretto rispetto a [3]):

$$
\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&\quad -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-1\big)+\\
&\quad +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(y)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})+\\
&\quad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\Bigg)+\\
&\quad \sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{\frac{1}{2}2(r+ls)}p_{N_f}(y)p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})-(pq)^{1-\frac{1}{2}2(r+sl)}p_{N_f}(y^{-1}p_{N_f}\tilde{y}\right)
\end{aligned}
$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&\quad -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{i,j}^{\tilde{N}_c}\tilde{z}_i\tilde{z}_j^{-1}-1\Big)+\\
&\quad +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg[\sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{\tilde{N}_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i\,\tilde{z}_j^{-1}+\\
&\quad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Bigg)+\\
&\quad \sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{N_f}\sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{r+sl}y_i\tilde{y}_j^{-1}-(pq)^{1-(r+sl)}y_i^{-1}\tilde{y}_i\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni ( solo flavour nessun colore).

#### 2.1.1 Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$\alpha = \frac{1}{2}r$$

L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$i_M^{Chiral}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\Bigg((p\,q)^{\alpha}\,\tilde{v}\,y_i\,\tilde{z}_j - (p\,q)^{1-\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j^{-1}+$$
$$+(p\,q)^{\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1}) - (p\,q)^{1-\alpha}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Bigg)+$$

Esponenziamo separatemente i primi due termini dagli ultimi due:

$$\exp\left(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}i_M^{Chiral}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n,\tilde{z^n})\right) =$$
$$\exp\left(\sum_n^{\infty}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big((p\,q)^{\alpha n}\,\tilde{v}^n\,y_i^n\,\tilde{z}_j^n - (p\,q)^{(1-\alpha)n}\,\tilde{v}^{-n}\,y_i^{-n}\,\tilde{z}_j^{-n}\big)\right)$$

facciamo il cambio di variabile $(pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j = t$

$$=\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\exp\left(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big(t^n - (\frac{pq}{t})^n)\big)\right)$$

A questo punto si utilizza l'identità 1.1.2 e otteniamo così:

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e(t;p,q) = \prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q) \tag{2.1}$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}}\tilde{y}_i z_j^{-1}(pq)^{\alpha} = t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di $\alpha$):

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z}_j^{-1};p,q) \tag{2.2}$$

### 2.1.2 Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolto come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è $R_M = 2R_Q + R_X j$ dove $j$ indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone. $R_Q$ è la carica del quark della teoria *ELETTRICA*. Utilizzo $m_{ij} = y_i\tilde{y}_j$

(Seconda formula è da [3], inutilmente complicata, equivale alla mia (la prima))

$$i_M^{Mesons}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_i^{N_f}\sum_j^{N_f}\sum_{l=0}^{k-1}\Big((pq)^{(r+ls)}m_{ij} - (pq)^{1-(r+ls)}m_{ij}^{-1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)}\frac{1-(pq)^{1-s}}{1-(pq)^s}\sum_i^{N_f}\sum_j^{N_f}\Big((pq)^r m_{ij} - (pq)^{2s-r}m_{ij}^{-1}\Big)$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\exp\left(\sum_n^\infty \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n)\right) =$$

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\sum_n^\infty\left(\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\Big((pq)^{(r+ls)n}m_{ij}^n - (pq)^{(1-(r+ls)n}m_{ij}^{-n}\Big)\right)$$

Ponendo ora $(pq)^{r+sl}m_{ij} = y$:

$$\exp\left(\sum_n^\infty \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n)\right) =$$

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\sum_n^\infty\left(\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\Big(y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n}\Big)\right)$$

$$= \prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls};p,q)$$

## 2.2 Indice e funzione di partizione

### 2.2.1 Espressione dell'indice

L'indice superconforme per la teoria magnetica è dato da ( $\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$I_{Mag}(p,q,y,\tilde{y},\tilde{v}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{N}_c!}(p;p)^{\tilde{N}_c-1}(q;q)^{\tilde{N}_c-1}\,\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{\tilde{N}_c-1}\left(\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls}y_i\tilde{y}_j{}^{-1};p,q)\right)$$

$$\int_{T^{\tilde{N_c}-1}}\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\right)\delta\Big(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c}z_i - 1\Big)\prod_{1\le i<j\le\tilde{N}_c}\frac{\Gamma_e\big((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

$$\prod_{1\le j\le\tilde{N}_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z}_j{}^{-1};p,q)$$

dove $r$ è la R-Carica del quark NON duale , $\Delta'$ la R-Carica del quark DUALE e $s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_X$. La presenza delle cariche dei quark NON duali è dovuto al fatto che i mesoni nella teoria magnetica sono i mesono costruibili nella teoria elettrica.

### 2.2.2 Funzione di partizione

Come fatto per la teoria elettrica si riduce l'indice superconforme alla funzione di partizione della teoria. I contributi del campo vettoriale e del campo chirale nell'aggiunta sono espressioni identiche ( in funzione del nuovo numero di colori ($\tilde{N}_c$).

#### Mesoni

Il contributo dei mesoni è dato da:

$$
\begin{aligned}
&\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls}y_i\tilde{y_j}^{-1};p,q) = \\
&\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e\big(\exp(2\pi ir[(2\omega)(r+ls)+(m_i-\tilde{m}_j)]);p,q\big) = \\
\overset{r\to 0}{\sim}&\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2\omega(r+ls)+m_i-\tilde{m}_j-\omega\big)\right)\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big) = \\
&=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(r+ls-\frac{1}{2})\Big)+N_f\big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_i^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)\big)\right) \\
&\qquad\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big) \\
&=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(\Delta_Q-\frac{1}{2})+\omega l\Delta_X\Big)+N_f\big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_i^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)\big)\right) \\
&\qquad\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big)
\end{aligned}
$$

#### Chirali fondamentali

Per i chirali nella fondamentale abbiamo ( $r=\Delta'$):

$$\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde v y_i^{-1}\tilde z_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde v^{-1}\tilde y_i \tilde z_j^{-1};p,q)=$$
$$=\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}\Delta')+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big);p,q)$$
$$\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}\Delta')-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big);p,q)=$$
$$\overset{r\to 0}{\sim}\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\bigg(\big(\omega(\Delta'-1)+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big)+\big(\omega(\Delta'-1)-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big)\bigg)\right.$$
$$\Gamma_h\big(\omega\Delta'+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\omega\Delta'-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big)=$$
$$=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2N_f\tilde N_c\omega(\Delta'-1)+\tilde N_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)\big)\right)\Gamma_h\big(\mu_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\nu_i-\tilde{\sigma_j}\big)$$

Dove abbiamo definito le masse reali

$$\mu_i=\omega\Delta'+\tilde{m_B}-m_i\qquad \nu_i=\omega\Delta'-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i$$

### Campo di gauge e materia nell'aggiunta

Come detto precedentemente i contributi sono come nel caso elettrico:

$$\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1}=\Gamma_e(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1}=\Gamma_e(e^{2\pi i r\Delta_X\omega})^{N_c-1}=$$
$$=\big[\exp-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_X-\omega)\big]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}$$

$$\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big)=$$
$$=\Gamma_e\big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_i-\sigma j)}\big)\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_j-\sigma_i)}\big)=$$
$$=\Gamma_e\big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\big)$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_X+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_X-1)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$

$$\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big)=e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)=$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)\right),\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)$$

Attenzione che l'ultimo termine entra nella funzione di partizione al denominatore.

### 2.3 Contributi divergenti

Cerchiamo ora di mettere insieme tutti i contributi divergenti ottenuti dal limite per $r \to 0$. Essendo le 't Hooft anomalies per anomalie gravitazionali, devono matchare con il corrispettivo elettrico.
Scriviamo solo l'esponente ( a meno di $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):
C'E' DA FARE ANCORA IL CONTRIBUTO DEI POCHHAMMER!!

$$\overbrace{(\tilde{N}_c - 1)\text{Q-pochhammer} + (2\omega)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2}}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_x - 1)(\tilde{N}_c - 1) + (2\omega(\Delta_x - 1)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2})}^{\text{Adj Chiral}} +$$

$$\overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta' - 1) + \tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}} + \overbrace{N_f^2\big(\sum_{l=0}^{k-1} 2\omega(\Delta_Q + l\frac{\Delta_X}{2} - \frac{1}{2})) + N_f\big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i}^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)}^{\text{Mesons}} =$$

Per calcolare il contributo dato dai mesoni è sufficiente notare che:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}$$

Nel caso del mesone, la somma va fino a $k-1$:

$$N_f^2\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2} + kN_f\big(\sum_{i}^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)$$

$$= \overbrace{(\tilde{N}_c - 1)\text{Q} + \omega\tilde{N}_c(\tilde{N}_c - 1)}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_X - 1)(\tilde{N}_c^2 - 1)}^{\text{Adj Chiral}} + \overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta' - 1) + \tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}} +$$

$$\overbrace{N_f^2\big(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\big) + kN_f\big(\sum_{i}^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)}^{\text{Mesons}} =$$

$$= \overbrace{(kN_f - N_c - 1)\text{Q} + \omega(kN_f - N_c)(kN_f - N_c - 1)}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(\omega(\Delta_X - 1)((kN_f - N_c)^2 - 1)}^{\text{Adj Chiral}} +$$

$$\overbrace{2N_f(kN_f - N_c)\omega(\Delta' - 1) + (\underline{kN_f} - N_c)\big(\sum_{i=1}^{N_f} -m_i + \tilde{m}_i\big) +}^{\text{Fond Chirals}}$$

$$\overbrace{+ N_f^2\big(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\big) + \underline{kN_f\big(\textstyle\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)}}^{\text{Mesons}}$$

I termini in blu si cancellano grazie al fatto che quark e mesoni sono in rappresentazioni opposte di flavour.
Ora poniamo $Q = 1$ DA VERIFICARE , MA DOVREBBE ESSERE OK! (LO ERA NEL CASO ELETTRICO).

$$
\begin{aligned}
=&\overbrace{\underline{(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)\omega}}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{\underline{(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)}\omega(\Delta_X \underline{-1})}^{\text{Adj Chiral}} + \\
&\overbrace{(2kN_f^2 - 2N_fN_c)\omega(\Delta' - 1) + \underline{N_c\big(\textstyle\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)}}^{\text{Fond Chirals}} + \\
+&\overbrace{N_f^2\big(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\big)}^{\text{Mesons}}
\end{aligned}
$$

Il termine sottolineato in verde matcha già con la teoria elettrica con il segno corretto. D'ora in poi verrà tralasciato e inserito solo alla fine.
A questo punto è necessario esplicitare la R-Carica del quark duale per poter confrontare il risultato con la teoria elettrica.
Ricordare che la carica dei mesoni è data dai quark *ELETTRICI* e l'aggiunta. Abbiamo da **??** che

$$\Delta' \ = \ \Delta_X - \Delta_Q$$

Utilizziamo questa relazione per andare avanti:

$$
\begin{aligned}
=&(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)\omega\Delta_X + (2kN_f^2 - 2N_fN_c)\omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \\
+&N_f^2\left(k\omega(2\Delta_Q - 1) + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\right) = \\
=&\omega\Delta_X\big(k^2N_f^2 - 2kN_fN_c + 2kN_f^2 - 2N_fN_c + N_f^2\frac{k(k-1)}{2} + N_c^2 - 1\big) + \\
+&\omega\Delta_Q\big(\underline{-2kN_f^2} + 2N_fN_c + \underline{2kN_f^2}\big) + \omega\big(-2kN_f^2 + 2N_fN_c - kN_f^2\big)
\end{aligned}
$$

Ora manipoliamo separatamente i termini a seconda della R-Carica. Sarà necessario utilizzare il valore esplicito di $\Delta_X = \frac{2}{k+1}$ per matchare le anomalie tra i due modelli.

$$
\begin{aligned}
&\omega\frac{2}{k+1}\left(-2N_fN_c(k+1) + kN_f^2(k+1) + kN_f^2 + kN_f^2\frac{k(k+1-2)}{2} + N_c^2 - 1\right) = \\
=&\omega\big(-4N_fN_c + 2kN_f^2 + \underline{kN_f^2} + 2N_f^2\frac{k}{2} \underline{-kN_f^2}\big) + \omega\Delta_x(N_c^2 - 1)
\end{aligned}
$$

A questo punto abbiamo ottenuto dei termini spogli di R-cariche che possiamo combinare con l'altro termine senza R-cariche :

$$\begin{aligned}\longrightarrow \omega\big(&\overbrace{-4N_fN_c + 2kN_f^2 + kN_f^2}^{\text{termini da } \omega\Delta_X}\overbrace{-2kN_f^2 + 2N_fN_c - 2kN_f^2}^{\text{termini da } \omega}\big) = \\ = \omega\big(&-2N_fN_c\big)\end{aligned}$$

A questo punto possiamo mettere insieme tutti i pezzi che abbiamo calcolato separatamente:

$$\begin{aligned}&\omega\Delta_x(N_c^2-1) + \omega(-2N_fN_c) + \omega\Delta_Q(2N_fN_c) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big) = \\ =&\omega\Delta_x(N_c^2-1) + (+\omega-\omega)(N_c^2-1) + 2N_fN_c\omega(\Delta_Q-1) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big) = \\ =&\omega(N_c^2-1) + (N_c^2-1)\omega(\Delta_x-1) + 2N_fN_c\omega(\Delta_Q-1) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)\end{aligned}$$

Come si può vedere combacia con il contributo divergente della teoria elettrica.

## 2.4 Formula per la funzione di partizione

Dopo aver controllato le anomalie gravitazionali, possiamo scrivere la la funzione di partizione.
MANCANO I POCHHAMMERRRRRR

$$\begin{aligned}Z_{mag}(\mu_i,\nu_j,\tilde{\mu_i},\tilde{\nu_j}) =& \frac{1}{\tilde{N}_c!(2\pi i)^{\tilde{N}_c}}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{\tilde{N}_c-1}\Bigg(\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_i+\nu_i+l\omega\Delta_X)\big)\Bigg) \\ &\int_{T^{\tilde{N}_c-1}}\prod_{i=1}^{kN_f-N_c} d\sigma_i\,\delta(\sum_i\sigma_i)\,e^{-2\pi i r\tilde{N}_c\sum\sigma_i}\prod_{1\le i<j\le kN_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))} \\ &\prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{kN_f-N_c}\Gamma_h\big(\tilde{\mu_i}+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu_i}-\tilde{\sigma_j}\big)\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le definizioni:

$$\begin{aligned}\mu_i = \omega\Delta_Q + m_i \qquad & \nu_i = \omega\Delta_Q - \tilde{m}_i \\ \tilde{\mu_i} = \omega(\Delta_X-\Delta_Q) + \tilde{m_B} - m_i \qquad & \tilde{\nu_i} = \omega(\Delta_X-\Delta_Q) - \tilde{m_B} + \tilde{m}_i\end{aligned}$$

## 2.5 Vuoti e rotture di simmetria per il limite a massa infinita

Come prima cosa è necessario mappare le masse reali fra le due teorie. Sappiamo che i barioni costruiti con i quark nelle due teorie coincidono. Ciò mappa le masse reali barioniche delle due teorie.: $B = Q^{N_c} = q^{kN_f - N_c}$. ciò fissa le cariche barioniche in 1 e 2:

$$\tilde{m}_B = \frac{N_C}{kN_f - N_C} m_B$$

Le cariche di flavour rimangono invariate a meno di un segno ( sono infatti opposte), non essendo legate al gruppo di gauge (come la simmetria barionica). Possiamo scrivere quindi:

$$\tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) + \tilde{m}_B - m_a \qquad \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) - \tilde{m}_B + \tilde{m}_a$$

dove $m_a$ e $\tilde{m}_a$ sono le masse reali di flavour elettriche.
A questo punto è necessario rompere la simmetria in modo consistente con quanto fatto nella teoria elettrica

$$\tilde{\mu}_a = \begin{cases} \tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} - m_a - m_A + m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\mu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_x - \Delta_M) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} + m_A N_f + m_2 \end{cases}$$

$$\tilde{\nu}_a = \begin{cases} \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} + \tilde{m}_a + m_A - m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\nu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_x - \Delta_M) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} - m_A N_f - m_2 \end{cases}$$

dove ( $m$ è quella che viene mandata a $\infty$ nella teoria elettrica)

$$m_1 = \frac{k}{k(N_f+1) - N_c} m \qquad m_2 = -\frac{kN_f - N_c}{k(N_f+1) - N_c} m$$

Per ottenere la teoria duale con $N_f$ sapori è necessario anche rompere la simmetria di gauge: $SU(k(N_f+1) - N_c) \to U(kN_F - N_C) \times (qualcosa)$. Inoltre bisogna fare in modo che i primi $N_f$ flavour rimangano leggeri nel limite a massa infinita. Come si vede dalle masse reali, è necessario bilanciare i fattori pari a $m_1$ ed $m_2$ (che sono proporzionali a $m$) dando un contributo opposto con la massa reale data da $\tilde{\sigma}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -m_1 \mathbf{1}_{kN_f - N_c} & 0 \\ 0 & -m_2 \mathbf{1}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{(k(N_f+1)-N_c)(kN_f-N_c)} \mathbf{1}_{kN_f-N_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k(N_f+1)-N_c} \mathbf{1}_k \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Si può vedere che questa scelta per il vev rispetta la condizione tr $\tilde{\sigma} = 0$.

Con questa scelta l'ultimo quark rimane leggero e carico sotto $U(k)$ (dovrebbe esser giusto)
Nota che non riesco a trovare $SU(kN_f - N_c)$ perchè dovendo andare all'infinito è dura soddisfare il constraint tr$\sigma = 0$ (avendo anche l'ultimo flavour leggero) ..

## 2.6 Limite sulla funzione di partizione

Riscriviamo ora la funzione di partizione per $N_f+1$ flavours per collegarci al flow $m_{N_f+1}\to\infty$ che abbiamo fatto nella parte elettrica.

$$
\begin{aligned}
Z_{mag}(\mu_i,\nu_j,\tilde{\mu_i},\tilde{\nu_j}) =& \frac{1}{((k+1)N_f-N_c)!(2\pi i)^{(k+1)N_f-N_c}}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{((k+1)N_f-N_c)-1}\\
&\Big(\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_i+\nu_i+l\omega\Delta_X)\big)\Big)\\
&\int_{T^{(k+1)N_f-N_c-1}}\prod_{i=1}^{(k+1)N_f-N_c} d\sigma_i\,\delta(\sum_i\sigma_i)\,e^{-2\pi i r\tilde{N}_c\sum\sigma_i}\\
&\prod_{1\le i<j\le(k+1)N_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))}\\
&\prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{(k+1)N_f-N_c}\Gamma_h\big(\tilde{\mu}_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_i-\tilde{\sigma_j}\big)
\end{aligned}
$$

A differenza del caso elettrico, tutte le masse reali e tutte le componenti di $\tilde{\sigma}$ divergono. Utilizziamo anche in questo caso la formula

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_h(a+m) = \tag{2.4}$$

$$\exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left((a-\omega+m)^2-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\right)\right) \tag{2.5}$$

### 2.6.1 Mesoni

Dobbiamo calcolare il contributo dei mesoni. Notare che siccome la simmetria di sapore è rotta solo parzialmente, solo i contributi con il flavour $N_f+1$-esimo divergeranno. Inoltre ricordiamo che le masse reali per i mesoni non sono uguali a quelle dei quark che sono scritte sopra, differiscono per R-Carica e per il fatto che sono scarichi sotto l'$U(1)_B$. Inoltre sono in rappresentazioni di flavour opposte rispetto ai quark.

$$\mu_a = \begin{cases} m_a+m_A-m_1+\omega\Delta \\ -m_2-m_aN_f+\omega\Delta_M \end{cases}$$

$$\nu_a = \begin{cases} -\tilde{m}_a+m_A+m_1+\omega\Delta \\ +m_2-m_AN_f+\omega\Delta_M \end{cases}$$

$$\prod_{i}^{N_f+1}\prod_{j}^{N_f+1}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_i+\nu_i+l\omega\Delta_X)\big)=$$
$$\Big(\prod_{a}^{N_f}\prod_{b}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_a+\nu_b+l\omega\Delta_X\big)\Big)\Big(\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_{N_f+1}\nu_{N_f+1}l\Delta_X\big)\Big)$$
$$\Big(\prod_{l=0}^{k-1}\prod_{a}^{N_f}\Gamma_h(\mu_a+\nu_{N_f+1}+\omega l\Delta_X)\Gamma_h(\mu_{N_f+1}+\nu_a+\omega l\Delta_X)\Big)$$

I primi due termini non dipendono da $m$ e quindi non danno luogo ad una fase. Si può riscrivere il risultato come:

$$\prod_{i}^{N_f+1}\prod_{j}^{N_f+1}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_i+\nu_i+l\omega\Delta_X)\big)=$$
$$\Big(\prod_{l=0}^{k-1}\Big(\prod_{a}^{N_f}\prod_{b}^{N_f}\Gamma_h\big(\mu_a+\nu_b+l\omega\Delta_X)\big)\Big)\Gamma_h(-2m_AN_f+\omega(2\Delta_M+l\Delta_X)\Big)$$
$$\Big(\prod_{l=0}^{k-1}\prod_{a}^{N_f}\Gamma_h(m_a-m_A(1-N_f)+(m_1-m_2)+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X))$$
$$\Gamma_h(-\tilde{m}_a-m_1+m_2-m_A(1-N_f)+\omega(\Delta_Q+\Delta_X+l\Delta_X))\Big)$$

Utilizziamo ora 2.5 per le $\Gamma_h$ divergenti:

Primo termine:

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_h(m_a-m_A(1-N_f)+(m_1-m_2)+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X))=$$
$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_h(m_a-m_A(1-N_f)+\underbrace{m}_{m_1-m_2}+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X))=$$
$$\sim\exp\left(\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\Big((m_a-m_A(1-N_f)+m+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X-1))^2-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\Big)\right)$$

Secondo termine:

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_h(-\tilde{m}_a-m_1+m_2-m_A(1-N_f)+\omega(\Delta_Q+l\Delta_X))=$$
$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_h(-\tilde{m}_a-\underbrace{m}_{-m_1+m_2}-m_A(1-N_f)+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X))=$$
$$\sim\exp\left(-\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\Big((-\tilde{m}_a-m_A(1-N_f)-m+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+l\Delta_X-1))^2-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\Big)\right)-$$

Moltiplicandoli fra di loro ( tenendo conto del segno opposto) otteniamo:

$$\exp\left(\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\Big((m_a^2-\tilde{m}_a^2)+4m\big(\omega(\Delta_Q+\Delta_X+l\Delta_X-1)+(m_A(1-N_f)\big)\right.$$
$$+2(m_a-\tilde{m}_a)(m)+2(m_a+\tilde{m}_a)(-m_A(1-N_f)+\omega(\Delta_Q+\Delta_X+l\Delta_X-1)$$

## Riferimenti bibliografici


[1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.

[2] Antonio Amariti and Claudius Klare. A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction. 2014.

[3] F.A. Dolan and H. Osborn. Applications of the Superconformal Index for Protected Operators and q-Hypergeometric Identities to N=1 Dual Theories. *Nucl.Phys.*, B818: 137–178, 2009. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2009.01.028.

[4] Fokko van de Bult. Hyperbolic hypergeometric functions. *Master thesis*, 2007.