Prepared for submission to JHEP

Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer 4d $\to$ 3d

Carlo Sana

Indice

KS duality: rappresentazioni e cariche

Teoria in quattro dimensioni.

Teoria Elettrica

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
Q	N_F	1	1	$1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}$
$\tilde{Q}$	1	$\overline{N_F}$	-1	$1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}$
X	1	1	0	$\frac{2}{k+1}$

Tabella 1. Tabella delle cariche per teoria elettrica

La materia nell'aggiunta ha un superpotenziale dato da $W = \mathrm{tr}Y^{k+1}$ che ne fissa la R-Carica.
Le R-cariche sono fissate in modo che la R-simmetria sia non anomala (queste vale solo in 4D). Il contributo dai diagrammi triangolare è dato da:

$$R_{gaugino}T(\mathrm{Ad}) + \sum_{Repr R}(R_{ferm}-1)T(R)\dim(\mathrm{global}) = 0$$

$$N_c + (R_Q-1)\frac{1}{2}2N_f + (R_X-1)N_c = 0 \quad\rightarrow\quad (R_Q-1)N_f = -R_X N_c \rightarrow R_Q = 1 - R_X\frac{N_c}{N_f}$$

È stato usato il fatto che il gaugino ha R carica 1.
Questa condizione non è presente in 3D. (Il grafico non è anomalo)

Teoria Magnetica

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
q	$\overline{N_F}$	1	$\frac{N_c}{kN_f-N_c}$	$1-\frac{2}{k+1}\frac{kN_f-N_c}{N_f}$
$\tilde{q}$	1	N_F	$-\frac{N_c}{kN_f-N_c}$	$1-\frac{2}{k+1}\frac{kN_f-N_c}{N_f}$
Y	1	1	0	$\frac{2}{k+1}$
M_j	N_f	$\overline{N_f}$	0	$2-\frac{4}{k+1}\frac{N_c}{N_f}+j\frac{2}{k+1}$

Tabella 2. Tabella delle cariche per teoria magnetica

Il superpotenziale per questa teoria è dato da

$$W = \mathrm{tr}X^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} M_j q Y^{k-j-1}\tilde{q} \qquad \text{dove } M_j = QY^j\tilde{Q}$$

I mesoni sono costruiti dai quark ELETTRICI.
Questo superpotenziale oltre a fissare $R_X = R_Y$ fissa le R-cariche di mesoni e quark duali.

$$\begin{aligned}
&2 = R(M_j q Y^{k-j-1}\tilde{q}) = 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k-j-1)R_Y = \\
&2 = 2R_Q + jR_Y + 2R_q + (k+1)R_X - 2R_X \\
&2 = 2R_Q + jR_Y + 2R_q + 2 - 2R_X \;\rightarrow\; R_q = R_X - R_Q
\end{aligned}$$

1 Teoria Elettrica

Si seguiranno le convenzioni di [2].

1.1 Calcolo indice superconforme

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer ($SU(N_C) \times SU(N_f)_L) \times SU(N_f)_R) \times U(1)_B)$ è dato da (vedi [3])

$$\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{N_c}(z)\,p_{N_c}(z^{-1}) - 1\big) \\
&+ \frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(y)\,p_{N_c}(z) - (p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{N_c}(z^{-1}) \\
&\qquad + (p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{N_c}(z^{-1}) - (p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{N_c}(z)\Bigg)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

I polinomi sono definiti come

$$p_{N_c}(x) = \sum_i^{N_c} x_i \qquad p_{N_c}(x^{-1}) = \sum_i^{N_c} \frac{1}{x_i}$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{1\le i,j\le N_c} \frac{z_i}{z_j} - 1\Big) \\
&+ \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,y_i\,z_j - (p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,y_i^{-1}\,z_j^{-1}) \\
&\qquad + (p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,\tilde{y}_i\,z_j^{-1} - (p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,\tilde{y}_i^{-1}\,z_j\Bigg)
\end{aligned}$$

riscalando $(pq)^{\frac{1}{2}r}vy \to y$ e $(pq)^{-\frac{1}{2}r}v\tilde{y} \to \tilde{y}$:

$$
\begin{aligned}
& i_E(p,q,y,\tilde{y},y) = \\
& -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\left(\sum_{1\le i,j\le N_c} z_i/z_j-1\right) \\
& +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Big(\big(y_i-p\,q\,\tilde{y}_i\big)z_j+\big(\tilde{y}_i^{-1}-p\,q\,y_i^{-1}\big)z_j^{-1}\Big)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

dove R_q e R_X sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$
R_Q = 1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}, \qquad s=\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}R_X \tag{1.3}
$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).
L'indice superconforme è definito come:

$$
I_E(p,q,v,y,\tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z)\,\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E(p^n,q^n,v^n,y^n,\tilde{y}^n,z^n)\right)
$$

L'integral sul gruppo $SU(N_c)$ può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$
\int_{SU(N_c)} d\mu(z)\,f(z) = \frac{1}{N_c!}\int_{T^{N_c-1}}\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\Delta(z)\Delta(z^{-1})f(z)\Big|_{\prod_{i=1}^{N_c} z_i=1} \tag{1.4}
$$

e dove $\Delta(z)$ è il determinante di Vandermonde:

$$
\Delta(z) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}(z_i-z_j) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)z_j = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\neq j}}^{N_c}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)
$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$.
Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella i_E si fattorizza nell'indice "completo" I_E essendo all'interno di un esponenziale.
s

1.1.1 Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^{Vett}(p^n,q^n,z^n)\right) \stackrel{def}{=} \\
&\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\Big(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\Big)-1\right)\right) = \\
=&\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\Big(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{N_c}1\Big)-1\right)\right) = \\
=&\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\Big(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\Big)+\Big(N_c\Big)-1\right)\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\Big(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\Big)\right)\right]\right. \\
&\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\Big(N_c-1\Big)\right) = \\
=&\left[\prod_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n})\right)\right]^{N_c-1}
\end{aligned}
$$

$$
\left[\prod_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,i_E^V(p^n,q^n)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,i_E^V(p^n,q^n)\right)\right]^{N_c-1} \tag{1.5}
$$

Da questi termini si ottengono le funzioni Γ_e attraverso le seguenti identità non banali:

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)\Big(z^n+z^{-n}\Big) &= \frac{\theta(z;p)\theta(z;q)}{1-z^2} \qquad (1.6)\\
&= \frac{1}{(1-z)(1-z^{-1})\Gamma_e(z;p,q)\Gamma_e(z^{-1};p,q)} \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

$$
\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right) = (p;p)(q;q) \tag{1.8}
$$

$$
\text{dove}\quad i_E^V(p^n,q^n) = -\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right) \tag{1.9}
$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\Gamma_e(y;p,q) = \prod_{j,k\geq 0} \frac{1-y^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-yp^jq^k}$$
$$\theta(z;p) = \prod_{j\geq 0}(1-zp^j)(1-z^{-1}p^{j+1})$$
$$(x;p) = \prod_{j\geq 0}(1-xp^j)$$

L'identità 1.8 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c \\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} = \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

A questo punto identificando $\frac{z_i}{z_j} = z$ si applica l'identità 1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right) =$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\, i_E^V(p^n,q^n)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right)$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1} \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$
$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1} \frac{1}{\Delta(z)\Delta(z^{-1})} \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

1.1.2 Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z;p,q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n - \left(\frac{pq}{z}\right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$\imath_E^{Adj}(p,q,z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\right)\left(\left(\sum_{1\le i,j\le N_c} \frac{z_i}{z_j}\right) - 1\right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\imath_E^{Adj}(p^n,q^n,z^n)\right) \tag{1.10}$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\left(\sum_{1\le i,j\le N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n}\right) - 1 =$$
$$\left(\sum_{1\le i<j\le N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + N_c - 1$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left((p\,q)^{sn} - (p\,q)^{(1-s)n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c \\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + N_c - 1\right)\right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da z da quelli che non ne dipendono.
Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da $\frac{z_i}{z_j}$ è dato da:

$$\exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)}\right) = \exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(y)^n - (\frac{pq}{y})^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

Avendo posto $\quad (pq)^s = y$

L'identità 1.1.2 si applica immediatamente ai termini indipendenti da z_i e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da z_i consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n})\left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left((pq)^{sn}\frac{z_i^n}{z_j^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + \left((pq)^{sn}\frac{z_j^n}{z_i^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)$$

il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \quad y' = (pq)^s \frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 1.1.2 utilizzando le variabili y, y' e il contributo è pari a

$$\prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\right)$$

Riassumento il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c - 1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\right)$$

1.1.3 Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscalamento di y e $\tilde{y}$):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left[\left((y_i z_j)^n - (\frac{pq}{y_i z_j})^n\right) + \left(\frac{1}{(\tilde{y}_i z_j)^n} - (pq\tilde{y}_i z_j)^n\right)\right]\right]$$

Identificando $t = y_i z_j$ e $t' = (\tilde{y}_i z_j)^{-1}$ con gli argomenti delle Γ_e nell'identità 1.1.2 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})$$

1.2 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$\begin{aligned}
&I_{El}(p, q, y, \tilde{y}, v) = \\
&\frac{1}{N_c!}(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\,\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1} \\
&\int_{T^{N_c-1}} \left(\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i}\right)\delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\right)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\
&\prod_{1 \leq j \leq N_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})
\end{aligned}$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

1.3 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari potenziali chimici si può calcolare la funzione di partizione, nel limite $r \to 0$.

$$p = e^{2\pi i r\omega_1} \quad q = e^{2\pi i r\omega_2} \quad z_i = e^{2\pi i r\sigma_i}$$
$$y_a = e^{2\pi i r m_a} \quad y_a = e^{2\pi i r\tilde{m}_a} \quad v = e^{2\pi i r m_B}$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [7] pag 30)

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} =$$
$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

con $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Si possono riscalare le variabili in modo da sistemare il fattore di π all'esponente:

$$z \to \pi z \quad \omega_1 \to \pi\omega_1 \quad \omega_2 \to \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi rz}; e^{i\pi r\omega_1}, e^{i\pi r\omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z)-(\pi\omega))}\Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)}\,\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di Γ_h: la sua definizione infatti è (cfr [7] 2.2.4):

$$\begin{aligned}\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2) = &\exp\left(\pi i\frac{(2z-\omega_1-\omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2}\right)\\ &\frac{(\exp(-2\pi i(z-\omega_2)/\omega_1);\exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi z/\omega_2);\exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty}\\ &= \Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2)\end{aligned}$$

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per $r \to 0$ utilizzando le ridefinizioni delle fugacità in 1.3. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che $s = \frac{\Delta_X}{2}$

$$\begin{aligned}\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} &= \Gamma_e(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1} = \Gamma_e(e^{2\pi i r\Delta_X\omega})^{N_c-1} =\\ &= \left[\exp - \frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_X-\omega)\right]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big) = \\
&= \Gamma_e\Big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_i-\sigma j)}\Big)\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_j-\sigma_i)}\Big) = \\
&= \Gamma_e\Big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\Big) \\
&= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_X+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i) \\
&= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_X-1)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big) =& e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i) = \\
&= \exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)\right),\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to0^+}\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}by_iz_j})\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}b^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1}}) = \\
=&\lim_{r\to0^+}\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(m_i+m_B+\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j)}) = \\
=&e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j-\omega)+(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j-\omega))} \\
&\Gamma_h(\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j)\Gamma_h(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j) = \\
=&e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i)}\ \Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i-\sigma_j)
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$
\mu_i=\omega\Delta+m_i+m_B \quad \nu_i=\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B
$$

1.3.1 Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):

$$
\begin{aligned}
&\omega(\Delta_X-1)(N_c-1)+\frac{N_c(N_c-1)}{2}2\omega(\Delta_x-1)-\frac{N_c(N_c-1)}{2}(-2\omega)+ \\
&+(N_c-1\ (\text{qualcosa}))+N_c(\sum_i^{N_f}2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i) = \\
=&\omega(\Delta_X-1)(N_c^2-1)+(N_c^2-1)\omega+N_cN_f2\omega(\Delta-1)+N_c(\sum_i^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)
\end{aligned}
$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate $z_i=e^{2\pi ir\sigma_i}$:

$$
\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi iz_i}\ \delta(\prod_{i=1}^{N_c}z_i-1)
$$

Il determinante della trasformazione è

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial \sigma_j}\right) = (2\pi i r)^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} z_i \quad \longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i} = r^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i$$

La *delta function* diventa:

$$\delta\Big(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\Big) = \delta\big(e^{2\pi i r \sum \sigma_i} - 1\big) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{((2\pi i r) e^{2\pi i r (\sum \sigma_i)}}\right)^{N_c} \delta(\sum \sigma_i) \tag{1.11}$$

1.4 Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer, vedi [6])

$$Z_{el}(\mu_i, \nu_i) = \frac{1}{(2\ \pi i)^{N_c}} \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{N_c - 1} \int_{T^{N_c - 1}} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i\, \delta(\sum_i \sigma_i)$$
$$\prod_{1 \le i < j \le N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(\mu_a + \sigma_j) \Gamma_h(\nu_b - \sigma_j)$$

usando la convenzione $\Gamma_h(\pm x) = \Gamma_h(x)\Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale η impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$\frac{1}{2} \sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(-N_c \Delta_X + (N_f + 1)) \tag{1.12}$$

1.4.1 Masse reali e flow senza η

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di $SU(N_f+1)^2 \times U(1)_B \to SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$. Vediamo come si implementa tale rottura per il gruppo $SU(N_f+1) \times U(1)_B$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B, \ldots, m_B - \sum_a m_a) \qquad \text{compatibile con } SU(N_f+1) \times U(1)_B$$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B + m_A, \ldots, m_B - N_f m_A - \sum_a m_a) \qquad \text{shift di } m_a \to m_a + m_A$$

$$\mu = \text{diag}(m_a + m_B + m_A, \ldots, m_B - N_f m_A) \qquad \text{imponendo } \sum_a m_a = 0 : SU(N_f+1) \to SU(N_f)$$

A questo punto si può aggiungere una massa $\hat{m}$ che sarà poi quella che manderemo ad infinito mischiando $SU(N) \times U(1)_B$:

$$\text{diag}(0, \ldots, m) = \text{diag}(m_B - M, \ldots, m_B + N_f M) \quad \text{con } M = m_B \text{ e dove } M \text{ sta in } SU(N_f+1)$$

Abbiamo quindi $m = (N_f + 1)M$. NOTA BENE m_B non è tutta la massa barionica, ma un altro shift..
A questo punto mettendo tutto insieme otteniamo:

$$
\mu = \left(\begin{array}{cccc|c}
m_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & m_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & m_a + m_A & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & m - m_A N_f
\end{array}\right)
+ \left(\begin{array}{cccc|c}
m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & m_B + \omega\Delta & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B + \omega\Delta_m
\end{array}\right)
$$

dove valgono le condizioni:

$$
\sum_a^{N_f} m_a = 0 \qquad m = m'_B + N_f M
$$

La stessa cosa si fa per $SU(N_f)_R$

$$
\nu = \left(\begin{array}{cccc|c}
\tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f
\end{array}\right)
+ \left(\begin{array}{cccc|c}
-m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega\Delta_m
\end{array}\right)
$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).
Il valore di m_A è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un $U(1)$ diagonale.
NB: $U(1)_A$ mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi N_f sapori e l'ultimo (Δ e Δ_m).

NB: da [1] (5.28): Date masse m_a e $\tilde{m}_a$ per Q e $\tilde{Q}$, abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - m_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + m_a)$$

1.4.2 Limite per $m \to \infty$

Per fare il limite $m \to \infty$ utilizziamo la seguente identità [1] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \Gamma_h(\omega\Delta + \sigma_i + M + m) = \\
&\exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left([\omega(\Delta-1) + \sigma_i + (m+M)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\right)\right)
\end{aligned}$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \right. \\
&\left. +(m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\big]\right) \\
\Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp\left(\text{sign}(-m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \right. \\
&\left. (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\big]\right)
\end{aligned}$$

Per via del fattore sign($\pm m$) i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4\,\omega(\Delta_M - 1)(m + \sigma_i + m_B) - 4(m_A N_f)(\sigma_i + m + m_B)\right]\right] = \\
&= \exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f)\right]\right]
\end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{N_c} \exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f)\right]\right] = \\
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f) + 4\Big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\Big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f\big)\right]\right]
\end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a $\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i$ può essere inglobato nella $\delta(\sum \sigma_i)$.
Definendo la funzione $c(x) = e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1 \omega_2}}$ i contributi diventano:

$$c(4N_c(m+m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f)\, c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_A N_f\big)$$

Utilizziamo la condizione 1.12 utilizzando questa assegnazione delle masse, ossia:

$$\frac{1}{2} \sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(-N_c \Delta_X + N_f + 1) \; = \omega(\, N_f \Delta + \Delta_M) \tag{1.13}$$

Utilizziamo questa relazione nell'esponenziale precedente (in modo da non avere termini che dipendono dal campo che ha massa che tende a infinito):

$$c(4N_c(m+m_B)(\omega(N_f(1-\Delta) - N_c \Delta_X) - m_A N_f)\, c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i\big)\big(\omega(N_f(1-\Delta) - N_c \Delta_X) - m_A N_f\big)$$

2 Teoria Magnetica

2.1 Calcolo dell'indice superconforme

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$) (NB: Corretto rispetto a [3]):

$$
\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&\quad -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-1\big)+\\
&\quad +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(y)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})+\\
&\quad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\Bigg)+\\
&\quad \sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{\frac{1}{2}2(r+ls)}p_{N_f}(y)p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})-(pq)^{1-\frac{1}{2}2(r+sl)}p_{N_f}(y^{-1}p_{N_f}\tilde{y}\right)
\end{aligned}
$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&\quad -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(\sum_{i,j}^{\tilde{N}_c}\tilde{z}_i\tilde{z}_j^{-1}-1\big)+\\
&\quad +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg[\sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{\tilde{N}_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i\,\tilde{z}_j^{-1}+\\
&\quad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Bigg)+\\
&\quad \sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{N_f}\sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{r+sl}y_i\tilde{y}_j^{-1}-(pq)^{1-(r+sl)}y_i^{-1}\tilde{y}_i\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni (solo flavour nessun colore).

2.1.1 Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$\alpha = \frac{1}{2}r$$

L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$i_M^{Chiral}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\Big((p\,q)^{\alpha}\,\tilde{v}\,y_i\,\tilde{z}_j - (p\,q)^{1-\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j^{-1} +$$
$$+ (p\,q)^{\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1}) - (p\,q)^{1-\alpha}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Big)+$$

Esponenziamo separatemente i primi due termini dagli ultimi due:

$$\exp\Bigg(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}i_M^{Chiral}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n,\tilde{z^n})\Bigg) =$$
$$\exp\Bigg(\sum_n^{\infty}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big((p\,q)^{\alpha n}\,\tilde{v}^n\,y_i^n\,\tilde{z}_j^n - (p\,q)^{(1-\alpha)n}\,\tilde{v}^{-n}\,y_i^{-n}\,\tilde{z}_j^{-n}\big)\Bigg)$$

facciamo il cambio di variabile $(pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j = t$

$$=\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\exp\Bigg(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big(t^n - (\frac{pq}{t})^n)\Big)\Bigg)$$

A questo punto si utilizza l'identità 1.1.2 e otteniamo così:

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e(t;p,q) = \prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q) \tag{2.1}$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}}\tilde{y}_i z_j^{-1}(pq)^{\alpha} = t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di α):

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z}_j^{-1};p,q) \tag{2.2}$$

2.1.2 Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolto come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è $R_M = 2R_Q + R_X j$ dove j indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone. R_Q è la carica del quark della teoria $ELETTRICA$. Utilizzo $m_{ij} = y_i\tilde{y}_j$

(Seconda formula è da [3], inutilmente complicata, equivale alla mia (la prima))

$$i_M^{Mesons}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{(r+ls)} m_{ij} - (pq)^{1-(r+ls)} m_{ij}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)} \frac{1-(pq)^{1-s}}{1-(pq)^s} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \left((pq)^r m_{ij} - (pq)^{2s-r} m_{ij}^{-1} \right)$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\exp\left(\sum_n^\infty \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n^\infty \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left((pq)^{(r+ls)n} m_{ij}^n - (pq)^{(1-(r+ls)n} m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

Ponendo ora $(pq)^{r+sl} m_{ij} = y$:

$$\exp\left(\sum_n^\infty \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n^\infty \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left(y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

$$= \prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls}; p, q)$$

2.2 Indice e funzione di partizione

2.2.1 Espressione dell'indice

L'indice superconforme per la teoria magnetica è dato da ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$I_{Mag}(p,q,y,\tilde{y},\tilde{v}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{N}_c!} (p;p)^{\tilde{N}_c-1} (q;q)^{\tilde{N}_c-1} \, \Gamma_e((pq)^s;p,q)^{\tilde{N}_c-1} \left(\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls} y_i \tilde{y}_j{}^{-1}; p,q) \right)$$

$$\int_{T^{\tilde{N_c}-1}} \left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} z_i - 1 \right) \prod_{1 \le i < j \le \tilde{N}_c} \frac{\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\big) \Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

$$\prod_{1 \le j \le \tilde{N}_c} \prod_{1 \le i \le N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v} y_i^{-1} \tilde{z}_j; p,q) \Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'} \tilde{v}^{-1} \tilde{y}_i \tilde{z}_j{}^{-1}; p,q)$$

dove r è la R-Carica del quark NON duale , Δ' la R-Carica del quark DUALE e $s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_X$. La presenza delle cariche dei quark NON duali è dovuto al fatto che i mesoni nella teoria magnetica sono i mesono costruibili nella teoria elettrica.

2.2.2 Funzione di partizione

Come fatto per la teoria elettrica si riduce l'indice superconforme alla funzione di partizione della teoria. I contributi del campo vettoriale e del campo chirale nell'aggiunta sono espressioni identiche (in funzione del nuovo numero di colori ($\tilde{N}_c$).

Mesoni

Il contributo dei mesoni è dato da:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls}y_i\tilde{y}_j{}^{-1};p,q) = \\
&\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e\big(\exp(2\pi ir[(2\omega)(r+ls)+(m_i-\tilde{m}_j)]);p,q\big) = \\
\overset{r\to 0}{\sim}&\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2\omega(r+ls)+m_i-\tilde{m}_j-\omega\big)\right)\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big) = \\
=&\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(r+ls-\frac{1}{2})\Big)+N_f\big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)\big)\right) \\
&\qquad\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big) \\
=&\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(\Delta_Q-\frac{1}{2})+\omega l\Delta_X\Big)+N_f\big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)\big)\right) \\
&\qquad\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\omega(2\Delta_Q+l\Delta_X)+m_i-\tilde{m}_j\big)
\end{aligned}
$$

Chirali fondamentali

Per i chirali nella fondamentale abbiamo ($r=\Delta'$):

$$\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde v y_i^{-1}\tilde z_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}\Delta'}\tilde v^{-1}\tilde y_i\tilde z_j^{-1};p,q)=$$

$$=\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}\Delta')+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big);p,q)$$

$$\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}\Delta')-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big);p,q)=$$

$$\overset{r\to 0}{\sim}\prod_{1\le j\le \tilde N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\bigg(\big(\omega(\Delta'-1)+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big)+\big(\omega(\Delta'-1)-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big)\bigg)\right.$$

$$\Gamma_h\big(\omega\Delta'+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\omega\Delta'-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big)=$$

$$=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2N_f\tilde N_c\omega(\Delta'-1)+\tilde N_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)\big)\right)\Gamma_h\big(\mu_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\nu_i-\tilde{\sigma_j}\big)$$

Dove abbiamo definito le masse reali

$$\mu_i=\omega\Delta'+\tilde{m_B}-m_i\qquad \nu_i=\omega\Delta'-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i$$

Campo di gauge e materia nell'aggiunta

Come detto precedentemente i contributi sono come nel caso elettrico:

$$\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1}=\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{\tilde N_c-1}=\Gamma_e(e^{2\pi ir\Delta_X\omega})^{\tilde N_c-1}=$$
$$=\big[\exp-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_X-\omega)\big]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{\tilde N_c-1}$$

$$\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big)=$$
$$=\Gamma_e\big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_i-\sigma j)}\big)\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_j-\sigma_i)}\big)=$$
$$=\Gamma_e\big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\big)$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_X+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_X-1)\right)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$

$$\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big)=e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\;\Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)=$$
$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)\right),\;\Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)$$

Attenzione che l'ultimo termine entra nella funzione di partizione al denominatore.

2.3 Contributi divergenti

Cerchiamo ora di mettere insieme tutti i contributi divergenti ottenuti dal limite per $r \to 0$. Essendo le 't Hooft anomalies per anomalie gravitazionali, devono matchare con il corrispettivo elettrico.
Scriviamo solo l'esponente (a meno di $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):
C'E' DA FARE ANCORA IL CONTRIBUTO DEI POCHHAMMER!!

$$\overbrace{(\tilde{N}_c-1)\text{Q-pochhammer}+(2\omega)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2}}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_x-1)(\tilde{N}_c-1)+(2\omega(\Delta_x-1)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2})}^{\text{Adj Chiral}}+$$
$$\overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta'-1)+\tilde{N}_c\Big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Fond Chirals}}+\overbrace{N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(\Delta_Q+l\frac{\Delta_X}{2}-\frac{1}{2})\Big)+N_f\Big(\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Mesons}}=$$

Per calcolare il contributo dato dai mesoni è sufficiente notare che:

$$\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\qquad\longrightarrow\qquad\sum_{i=0}^{k-1}i=\frac{(k-1)k}{2}$$

Nel caso del mesone, la somma va fino a $k-1$:

$$N_f^2\omega(2\Delta_Q-1)k+\omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}+kN_f\Big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\Big)$$

$$=\overbrace{(\tilde{N}_c-1)\mathrm{Q}+\omega\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_X-1)(\tilde{N}_c^2-1)}^{\text{Adj Chiral}}+\overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta'-1)+\tilde{N}_c\Big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Fond Chirals}}+$$
$$\overbrace{N_f^2\Big(\omega(2\Delta_Q-1)k+\omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\Big)+kN_f\Big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Mesons}}=$$
$$=\overbrace{(kN_f-N_c-1)\mathrm{Q}+\omega(kN_f-N_c)(kN_f-N_c-1)}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_X-1)((kN_f-N_c)^2-1)}^{\text{Adj Chiral}}+$$
$$\overbrace{2N_f(kN_f-N_c)\omega(\Delta'-1)+(kN_f-N_c)\Big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Fond Chirals}}+$$
$$+\overbrace{N_f^2\Big(\omega(2\Delta_Q-1)k+\omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\Big)+kN_f\Big(\textstyle\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\Big)}^{\text{Mesons}}$$

I termini in blu si cancellano grazie al fatto che quark e mesoni sono in rappresentazioni opposte di flavour.
Ora poniamo $Q = 1$ DA VERIFICARE , MA DOVREBBE ESSERE OK! (LO ERA NEL CASO ELETTRICO).

$$
\begin{aligned}
=&\overbrace{(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)\omega}^{\text{Adj Vector}} + \overbrace{(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)\omega(\Delta_X - 1)}^{\text{Adj Chiral}} + \\
&\overbrace{(2kN_f^2 - 2N_fN_c)\omega(\Delta' - 1) + N_c\big(\textstyle\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}} + \\
&\overbrace{+ N_f^2\big(\omega(2\Delta_Q - 1)k + \omega\Delta_X \frac{(k-1)k}{2}\big)}^{\text{Mesons}}
\end{aligned}
$$

Il termine sottolineato in verde matcha già con la teoria elettrica con il segno corretto. D'ora in poi verrà tralasciato e inserito solo alla fine.
A questo punto è necessario esplicitare la R-Carica del quark duale per poter confrontare il risultato con la teoria elettrica.
Ricordare che la carica dei mesoni è data dai quark *ELETTRICI* e l'aggiunta. Abbiamo da **??** che

$$\Delta' = \Delta_X - \Delta_Q$$

Utilizziamo questa relazione per andare avanti:

$$
\begin{aligned}
=&(k^2N_f^2 + N_c^2 - 2kN_fN_c - 1)\omega\Delta_X + (2kN_f^2 - 2N_fN_c)\omega(\Delta_X - \Delta_Q - 1) + \\
&+N_f^2\left(k\omega(2\Delta_Q - 1) + \omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}\right) = \\
=&\,\omega\Delta_X\big(k^2N_f^2 - 2kN_fN_c + 2kN_f^2 - 2N_fN_c + N_f^2\frac{k(k-1)}{2} + N_c^2 - 1\big) + \\
&+\omega\Delta_Q\big(-2kN_f^2 + 2N_fN_c + 2kN_f^2\big) + \omega\big(-2kN_f^2 + 2N_fN_c - kN_f^2\big)
\end{aligned}
$$

Ora manipoliamo separatamente i termini a seconda della R-Carica. Sarà necessario utilizzare il valore esplicito di $\Delta_X = \frac{2}{k+1}$ per matchare le anomalie tra i due modelli.

$$
\begin{aligned}
&\omega\frac{2}{k+1}\left(-2N_fN_c(k+1) + kN_f^2(k+1) + kN_f^2 + kN_f^2\frac{k(k+1-2)}{2} + N_c^2 - 1\right) = \\
=&\,\omega\big(-4N_fN_c + 2kN_f^2 + kN_f^2 + 2N_f^2\frac{k}{2} - kN_f^2\big) + \omega\Delta_x(N_c^2 - 1)
\end{aligned}
$$

A questo punto abbiamo ottenuto dei termini spogli di R-cariche che possiamo combinare con l'altro termine senza R-cariche :

$$\begin{aligned}\longrightarrow \omega\big(\overbrace{-4N_fN_c + 2kN_f^2 + kN_f^2}^{\text{termini da } \omega\Delta_X}\overbrace{-2kN_f^2 + 2N_fN_c - 2kN_f^2}^{\text{termini da } \omega}\big) = \\ = \omega\big(-2N_fN_c\big)\end{aligned}$$

A questo punto possiamo mettere insieme tutti i pezzi che abbiamo calcolato separatamente:

$$\omega\Delta_x(N_c^2-1) + \omega(-2N_fN_c) + \omega\Delta_Q(2N_fN_c) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big) =$$

$$=\omega\Delta_x(N_c^2-1) + (+\omega-\omega)(N_c^2-1) + 2N_fN_c\omega(\Delta_Q-1) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big) =$$

$$=\omega(N_c^2-1) + (N_c^2-1)\omega(\Delta_x-1) + 2N_fN_c\omega(\Delta_Q-1) + N_c\big(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i\big)$$

Come si può vedere combacia con il contributo divergente della teoria elettrica.

2.4 Formula per la funzione di partizione

Dopo aver controllato le anomalie gravitazionali, possiamo scrivere la la funzione di partizione.
MANCANO I POCHHAMMERRRRRR

$$\begin{aligned}Z_{mag}(\mu_a,\nu_b,\tilde{\mu_a},\tilde{\nu_b}) &= \frac{1}{\tilde{N}_c!(2\pi i)^{\tilde{N}_c}}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{\tilde{N}_c-1}\Bigg(\prod_{a,b=1}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\mu_a+\nu_b+l\omega\Delta_X)\big)\Bigg) \\ &\int_{T^{\tilde{N}_c-1}}\prod_{i=1}^{kN_f-N_c} d\sigma_i\,\delta(\sum_i\sigma_i)\prod_{1\le i<j\le kN_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))} \\ &\prod_{a,b=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{kN_f-N_c}\Gamma_h\big(\tilde{\mu}_a+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_b-\tilde{\sigma_j}\big)\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le definizioni:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \omega\Delta_Q + m_i & \nu_i &= \omega\Delta_Q - \tilde{m}_i \\ \tilde{\mu}_i &= \omega(\Delta_X-\Delta_Q) + \tilde{m_B} - m_i & \tilde{\nu}_i &= \omega(\Delta_X-\Delta_Q) - \tilde{m_B} + \tilde{m}_i\end{aligned}$$

2.5 Vuoti e rotture di simmetria per il limite a massa infinita

Come prima cosa è necessario mappare le masse reali fra le due teorie. Sappiamo che i barioni costruiti con i quark nelle due teorie coincidono. Ciò mappa le masse reali barioniche delle due teorie.: $B = Q^{N_c} = q^{kN_f - N_c}$. ciò fissa le cariche barioniche in 1 e 2:

$$\tilde{m}_B = \frac{N_C}{kN_f - N_C} m_B$$

Le cariche di flavour rimangono invariate a meno di un segno (sono infatti opposte), non essendo legate al gruppo di gauge (come la simmetria barionica). Possiamo scrivere quindi:

$$\tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) + \tilde{m_B} - m_a \qquad \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_x - \Delta_Q) - \tilde{m_B} + \tilde{m}_a$$

dove m_a e $\tilde{m}_a$ sono le masse reali di flavour elettriche.
A questo punto è necessario rompere la simmetria in modo consistente con quanto fatto nella teoria elettrica. Considero per il gruppo $SU(N_f + 1)L \times U(1)_B$ per il contributo divergente nella teoria elettrica. Gli altri contributi vengono mappati in maniera *banale*.

$$\begin{aligned} \text{Teoria elettrica:} \quad & \mu = \text{diag}(m_b - M, \ldots, m_B + N_f M) \qquad \text{con } m_B = M \\ \longrightarrow \quad & \mu = \text{diag}(0, \ldots, \hat{m}) \qquad \text{con } M(N_f + 1) = \hat{m} \end{aligned}$$

È importante ricordare che le cariche barioniche e di sapore nella dualità si mappano in modo diverso, cfr 1 con 2. Per questo motivo le masse nella teoria magnetica non sono mappate *banalmente* ed è per questo motivo che tutti i quark ricevono un contributo nella teoria magnetica.
Ricordiamo innanzitutto la mappa:

$$\begin{aligned} m_B \quad &\longrightarrow \quad \tilde{m}_B = \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B \\ M \quad &\longrightarrow \quad \tilde{M} = -M \end{aligned}$$

A questo punto le masse reali saranno della forma $\tilde{\mu} = \text{diag}(m_1, \ldots, m_2)$. Calcoliamo ora questi due valori.

$$\begin{aligned} m_1 &= \tilde{m}_B - \tilde{M} = \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B + M = \frac{N_c + k(N_f + 1) - N_c}{k(N_f + 1) - N_c} M \\ &= \frac{k(N_f + 1)}{k(N_f + 1) - N_c} M = \frac{k}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m} \\ m_2 &= \tilde{m}_B + N_f \tilde{M} = \frac{N_c}{k(N_f + 1) - N_c} m_B - N_f M = \frac{N_c - N_f(k(N_f + 1) - N_c)}{k(N_f + 1) - N_c} m_B = \\ &= \frac{N_c(N_f + 1) - N_f k(N_f + 1)}{k(N_f + 1) - N_c} m_B = \frac{N_c - kN_f}{k(N_f + 1) - N_c} \hat{m} \end{aligned}$$

Il resto delle masse viene mappato in maniera banale, seguendo la tabella delle cariche della teoria magnetica.

Per il gruppo $SU(N_f+1)_R$ avviene in maniera identica, ma le cariche hanno segno opposto (sia quelle barioniche che di flavour), quindi c'è un segno overall e i calcoli sono identici.

$$\tilde{\mu}_a = \begin{cases} \tilde{\mu}_a = \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} - m_a - m_A + m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\mu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_X - \Delta_M) + m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} + m_A N_f + m_2 & \end{cases}$$
$$\tilde{\nu}_a = \begin{cases} \tilde{\nu}_a = \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} + \tilde{m}_a - m_A - m_1 & a = 1 \dots N_f \\ \tilde{\nu}_{N_f+1} = \omega(\Delta_X - \Delta_M) - m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c} + m_A N_f - m_2 & \end{cases}$$

dove ($\hat{m}$ è quella che viene mandata a ∞ nella teoria elettrica)

$$m_1 = \frac{k}{k(N_f+1)-N_c}\hat{m} \qquad m_2 = -\frac{kN_f - N_c}{k(N_f+1)-N_c}\hat{m}$$

Per ottenere la teoria duale con N_f sapori è necessario anche rompere la simmetria di gauge: $SU(k(N_f+1)-N_c) \to U(kN_F - N_C) \times (qualcosa)$. Inoltre bisogna fare in modo che i primi N_f flavour rimangano leggeri nel limite a massa infinita. Come si vede dalle masse reali, è necessario bilanciare i fattori pari a m_1 ed m_2 (che sono proporzionali a m) dando un contributo opposto con la massa reale data da $\tilde{\sigma}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -m_1 \mathbf{1}_{kN_f-N_c} & 0 \\ 0 & -m_2 \mathbf{1}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{(k(N_f+1)-N_c)(kN_f-N_c)} \mathbf{1}_{kN_f-N_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k(N_f+1)-N_c} \mathbf{1}_k \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Si può vedere che questa scelta per il vev rispetta la condizione tr $\tilde{\sigma} = 0$. Con questa scelta l'ultimo quark rimane leggero e carico sotto $U(k)$ (dovrebbe esser giusto)
Nota che non riesco a trovare $SU(kN_f - N_c)$ perchè dovendo andare all'infinito è dura soddisfare il constraint tr$\sigma = 0$ (avendo anche l'ultimo flavour leggero) ..

2.6 Calcoli per limite a massa divergente

A differenza del caso elettrico, tutte le masse reali e tutte le componenti di $\tilde{\sigma}$ divergono. Utilizziamo anche in questo caso la formula

$$\lim_{m\to\infty} \Gamma_h(a+m) = \tag{2.4}$$
$$\exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left((a-\omega+m)^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\right)\right) \tag{2.5}$$

2.6.1 Mesoni

Dobbiamo calcolare il contributo dei mesoni. Notare che siccome la simmetria di sapore è rotta solo parzialmente, solo i contributi con il flavour N_f+1-esimo divergeranno. Inoltre ricordiamo che le masse reali per i mesoni non sono uguali a quelle dei quark che sono scritte sopra, differiscono per R-Carica e per il fatto che sono scarichi sotto l'$U(1)_B$. Inoltre sono in rappresentazioni di flavour opposte rispetto ai quark.

$$\mu_a = \begin{cases} m_a + m_A - M + \omega\Delta \\ MN_f - m_A N_f + \omega\Delta_M \end{cases}$$

$$\nu_a = \begin{cases} -\tilde{m}_a + m_A + M + \omega\Delta \\ -MN_f - m_A N_f + \omega\Delta_M \end{cases}$$

NOTA BENE: non ci sono m_1 e m_2 come per i quark dato che esse sono costruite anche da una parte barionica divergente. M è lo stesso della teoria elettrica (ricordo che $\hat{m} = (N_f + 1)M$).

$$\prod_i^{N_f+1} \prod_j^{N_f+1} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h\big(\mu_i + \nu_i + l\omega\Delta_X)\big) =$$
$$\left(\prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h\big(\mu_a + \nu_b + l\omega\Delta_X)\right)\left(\prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h(\mu_{N_f+1}\nu_{N_f+1} l\Delta_X)\right)$$
$$\left(\prod_{l=0}^{k-1} \prod_a^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_{N_f+1} + \omega l\Delta_X)\Gamma_h(\mu_{N_f+1} + \nu_a + \omega l\Delta_X)\right)$$

I primi due termini non dipendono da m e quindi non danno luogo ad una fase. Si può riscrivere il risultato come:

$$\prod_i^{N_f+1} \prod_j^{N_f+1} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_h\big(\mu_i + \nu_i + l\omega\Delta_X)\big) =$$
$$\left(\prod_{l=0}^{k-1} \left(\prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \Gamma_h\big(\mu_a + \nu_b + l\omega\Delta_X)\big)\right)\Gamma_h(-2m_A N_f + \omega(2\Delta_M + l\Delta_X)\right)$$
$$\left(\prod_{l=0}^{k-1} \prod_a^{N_f} \Gamma_h(m_a - m_A(N_f - 1) - \underbrace{M(N_f + 1)}_{m} + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X))\right.$$
$$\left.\Gamma_h(-\tilde{m}_a + \underbrace{M(N_f + 1)}_{m} - m_A(N_f - 1) + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X))\right)$$

Utilizziamo ora 2.5 per le Γ_h divergenti.
Ottengo (strippo i fattori banali e quello che si cancella e con un po' di occhio sulla parità dei termini):

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_a^{N_f} -m_a^2 + \tilde{m}_a^2 - m_a(\dots) + \tilde{m}_a(\dots) + 4m(m_A(N_f - 1) + \omega(\Delta_Q + \Delta_M + l\Delta_X - 1)) \tag{2.6}$$

2.6.2 Chirali

Per i campi chirali bisogna sviluppare questi termini. Ricordiamo che μ_i e σ_j hanno vev tali che le prime N_f componenti e il singoletto rimangono leggere, solo i termini misti saranno da sviluppare.

$$\prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{(k+1)N_f - N_c} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_i + \tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_i - \tilde{\sigma_j}\big) \tag{2.7}$$

D'ora in poi chiameremo ρ_j con $j = 1 \dots k$ le componenti di σ_j per $j = kN_f - N_c + 1 \dots k(N_f + 1) - N_c$:

$$\Big(\prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_i + \tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_i - \tilde{\sigma_j}\big)\Big)\Big(\prod_{j=1}^{k} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \rho_j\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \rho_j\big)\Big)$$
$$\Big(\prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \tilde{\sigma_j}\big)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{k} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_i + \rho_j\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_i - \rho_j\big)\Big)$$

I termini della prima riga non hanno divergenze, mentre quelli nella seconda riga sono da sistemare.
Primo termine:

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h\big(\tilde{\mu}_{N_f+1} + \tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\tilde{\nu}_{N_f+1} - \tilde{\sigma_j}\big) = \\
&\lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h\big(m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + m_A N_f + m_2 + \omega(\Delta_X - \Delta_M) + \\
&\qquad\qquad - m_1 + \frac{k}{(k(N_f+1) - N_c)(kN_f - N_c)} + \sigma'_j\big) \\
&\qquad \Gamma_h\big(- m_B \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} + m_A N_f - m_2 + \omega(\Delta_X - \Delta_M) \\
&\qquad\qquad + m_1 - \frac{k}{(k(N_f+1) - N_c)(kN_f - N_c)} - \sigma'_j\big)
\end{aligned}$$

dove σ' è l'espansione di $\tilde{\sigma}$ intorno al suo *vev*. Come prima $m_1 - m_2 = m$ Ora utilizziamo la formula per il limite della Γ_h. I due termini si beccano un segno opposto davanti che contribuisce a cancellare i termini che non cambiano segno dopo aver fatto i quadrati. Nessun quadrato sopravvive e solo alcuni termini misti.
Semplificando i prefattori e il secondo termine della formula (che si cancella per via della differenza di segno) ottengo dopo aver posto

$$A = \frac{N_c}{k(N_f+1) - N_c} \qquad B = \frac{k}{(k(N_f + 1 - N_c)(kN_f - N_c)}$$

$$\sum_{j}^{kN_f-N_c} -\big(m_B A + m_A N_f + \underbrace{(m_2-m_1)}_{-m} + \omega(\Delta_X-\Delta_M-1)+B+\sigma'_j\big)^2 +$$

$$\big(-m_B A + m_A N_f \underbrace{-(m_2-m_1)}_{m} + \omega(\Delta_X-\Delta_M-1)-B-\sigma'_j\big)^2 =$$

$$\sum_{j}^{kN_f-N_c} 4\big[m_B A\,(-m_A N_f - \omega(\Delta_X-\Delta_M-1)) + m_A N_f(m-B-\sigma'_j)+$$

$$+\,m\,\omega(\Delta_X-\Delta_M-1) + \omega(\Delta_X-\Delta_M-1)(-B-\sigma'_j)\big]$$

Isoliamo ora i termini che dipendono da j (che dovranno comunque rimanere sotto il segno di integrale):

$$\sum_{j}^{kN_f-N_c} 4\sigma'_j\big(-m_A N_f - \omega(\Delta_X-\Delta_M-1)\big)$$

Per gli altri termini invece avremo:

$$\begin{aligned}4(kN_f-N_c)\big(&m_B A(-m_A N_f-\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))+\\&+m(m_A N_f+\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))+\\&-B(m_A N_f+\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))\big)\end{aligned}$$

Secondo termine:

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{k}\Gamma_h\big(-m_a+m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}-m_A+m_1+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)+$$

$$-m_2-\frac{1}{k(N_f+1)-N_c}+\rho'_j\big)$$

$$\Gamma_h\big(\tilde{m}_a-m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}-m_A-m_1+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)+$$

$$+m_2+\frac{1}{k(N_f+1)-N_c}-\rho'_j\big)$$

Usando le stesse convenzioni di prima abbiamo e usando $C=\frac{1}{k(N_f+1)-N_c}$ abbiamo:

$$\sum_{a}^{N_f}\sum_{j}^{k}\big(-m_a+m_B A-m_A+\underbrace{(m_1-m_2)}_{m}+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)-C+\rho'_j\big)^2+$$

$$-\big(+\tilde{m}_a-m_B A-m_A-\underbrace{(m_1-m_2)}_{m}+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)+C-\rho'_j\big)^2=$$

Notiamo che rispetto al caso precedente qui abbiamo le masse reali, che sono diverse fra *left* e *right*, quindi sopravvivono i loro termini.

$$\sum_a^{N_f}\sum_j^k\Big[m_a^2-\tilde{m}_a^2+2m_a(\dots)-2\tilde{m}_a(\dots)+$$
$$+4\big(m_BA(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))-m_A(m-C+\rho'_j)+$$
$$+m\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)(-C+\rho'_j)\big)\Big]$$

Come fatto prima, esplicitiamo i termini con ρ'_j (i termini lineari in m_a e $\tilde{m}_a$ non li considero perchè vanno a zero per la condizione tr $m=0$)

$$4N_f\sum_{j=1}^k\rho'_j(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))$$

Gli altri termini invece sono dati da:

$$4kN_f\big(m_BA(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))+m(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)+$$
$$+C(m_A-\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)\big)+k\sum_a^{N_f}m_a^2-\tilde{m}_a^2$$

2.6.3 Contributo della materia nell'aggiunta e campo vettoriale

Per la materia nell'aggiunta abbiamo:

$$\prod_{1\le i<j\le k(N_f+1)-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))}=$$
$$\prod_{1\le i<j\le kN_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\rho_i-\rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\rho_i-\rho_j))}\prod_{\substack{1\le i\le kN_f-N_c\\1\le j\le k}}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\rho_j))}$$

I primi due termini rimangono così come sono perchè le parti divergenti si cancellano a vicenda. L'esponente dell'ultimo sarà dato da (a meno dei soliti prefattori..):

$$\sum_{1\le i\le kN_f-N_c}\sum_{1\le j\le k}\Bigg(-\big(\omega(\Delta_X-1)+(-m_1+m_2)+B+C+\sigma'_i-\rho'_j\big)^2$$
$$+\big(\omega(\Delta_X-1)+(m_1-m_2)-B-C-\sigma'_i+\rho'_j\big)^2$$
$$+\big(-\omega-m_1+m_2+B+C+\sigma'_i-\rho'_j\big)^2+$$
$$-\big(-\omega+m_1-m_2-B-C-\sigma'_i+\rho'_j\big)^2\Bigg)$$

dove vale $m_1-m_2=m$ e $B+C=\frac{1}{kN_f-N_c}=D$.
Le ultime due righe hanno segno opposto perchè sono a denominatore nella formula.

Quindi abbiamo:

$$\sum_{1\le i\le kN_f-N_c}\sum_{1\le j\le k}\Big(-\big(\omega(\Delta_X-1)-m+D+\sigma_i'-\rho_j'\big)^2+\big(\omega(\Delta_X-1)+m-D-\sigma_i'+\rho_j'\big)^2$$
$$-\big(-m+D+\sigma_i'-\rho_j'\big)^2+\big(m-D-\sigma_i'+\rho_j'\big)^2\Big)$$

Per la prima riga invece abbiamo:

$$\sum_{\substack{1\le i\le kN_f-N_c\\1\le j\le k}}4\omega(\Delta_X-1)(m-D-\sigma_i'+\rho_j')$$

Per la seconda riga abbiamo:

$$-4\omega\left(k(kN_f-N_c)(-m+B+C)+\sum_i^{kN_f-N_c}\sum_j^k(\sigma_i-\rho_j)\right)$$

Sommando i due contributi otteniamo:

$$4\omega\Delta_X\left(k(kN_f-N_c)(m-D)+\sum_i^{kN_f-N_c}\sum_k^k(\sigma_i'+\rho_j')\right)$$

2.6.4 Somma dei contributi

I termini quadratici nelle masse reali si cancellano con il contributo dato dai mesoni di 2.6. Ora mettiamo insieme tutti i contributi (lascio stare ρ_i e σ_i:

$$\begin{aligned}
&\text{Mesons}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}4N_f m(-m_A(N_f-1)+\omega(\Delta_Q+\Delta_M+j\Delta_X-1))+\right.\\
&\text{Chiral 1}\begin{cases}+4(kN_f-N_c)\big(m_BA(-m_AN_f-\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))+\\ +m(m_AN_f+\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))+\\ -B(m_AN_f+\omega(\Delta_X-\Delta_M-1))\big)+\\ +4\sum_j^{kN_f-N_c}\sigma_j'\big(-m_AN_f-\omega(\Delta_X-\Delta_M-1)\big)\end{cases}\\
&\text{Chiral 2}\begin{cases}+4kN_f\big(m_BA(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))+\\ +m(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)+\\ +C(m_A-\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))\big)+\\ +4N_f\sum_{j=1}^k\rho_j'(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))\end{cases}\\
&\text{Adj matter}\begin{cases}+m(4\omega\Delta_Xk(kN_f-N_C)+\\ -D(4\omega\Delta_Xk(kN_f-N_C)+\\ -4k\sum_i\sigma_i'(\omega\Delta_X)+\\ +4(kN_f-N_c)\sum_i\rho_i'(\omega\Delta_X)\end{cases}
\end{aligned}$$

2.6.5 Contributi proporzionali a m

I contributi proporzionali ad m sono:

$$m\Big(-4kN_fm_A(N_f-1) - 4N_fN_cm_A + 4kN_fmm_A(N_f-1)\Big)+$$
$$4m\omega\Big(kN_f(\Delta_Q+\Delta_M-1+\frac{(k-1)}{2}\Delta_X)+(kN_f-N_c)(\Delta_X-\Delta_M-1)+kN_f(\Delta_X-\Delta_Q-1)+$$
$$+\Delta_Xk(kN_f-N_C)\Big)$$

Ora usiamo la condizione sulle masse reali:

$$\omega(-N_c\Delta_X+N_f+1)=\omega(N_f\Delta_Q+\Delta_M) \tag{2.8}$$

da cui:

$$\Delta_M=-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)+1 \tag{2.9}$$

Otteniamo usando il valore esplicito di Δ_X e scrivendo $\frac{k-1}{2}=\frac{k+1}{2}-1$

$$4m\Big(-N_fN_cm_A+\omega\big(kN_f(\Delta_Q-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)+1+\overbrace{\frac{k+1}{2}\Delta_X}^{=1}-\Delta_X-1\big)+$$
$$+(kN_f-N_c)(\Delta_X-(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)+1)-1)+kN_f(\Delta_X-\Delta_Q-1)\big)+$$
$$+\Delta_Xk(kN_f-N_c)\Big)$$

Semplificando (utilizzando il valore esplicito di Δ_X primi termini otteniamo:

$$\begin{aligned}
&4m\omega N_c\Big(-N_fm_A-\Delta_XN_c-(\Delta_Q-1)N_f\Big)+\\
&+4m\omega(kN_f-N_c)\Big((\Delta_X-2+k\Delta_X)\Big)=\\
&=4m\omega N_c\Big(-N_fm_A-\Delta_XN_c-(\Delta_Q-1)N_f\Big)+\\
&+4m\omega(kN_f-N_c)\Big(\Delta_X(k+1)-2)\Big)=\\
&=4m\omega N_c\Big(-N_fm_A-\Delta_XN_c-(\Delta_Q-1)N_f\Big)+
\end{aligned}$$

2.6.6 Contribui proporzionali a m_B

Il contributo proporzionale a m_B invece è:

$$
\begin{aligned}
&4m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg((kN_f-N_c)(-m_AN_f-\omega(\Delta_X-\Delta_M-1)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + kN_f(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1)\Bigg)=\\
&=4m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg(kN_f(-m_A(N_f+1)+\omega(\Delta_M-\Delta_Q))+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - N_c(-m_AN_f-\omega(\Delta_X-\Delta_M-1)\Bigg)=\\
&=4m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg(kN_f(-m_A(N_f+1)+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)+1-\Delta_Q))+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + N_c(m_AN_f+\omega(\Delta_X-(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)+1)-1))\Bigg)=\\
&=4m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg(kN_f(-m_A(N_f+1)+\omega(-N_c\Delta_X+N_f-(N_f+1)\Delta_Q)+1))+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + m_AN_fN_c+N_c\omega(\Delta_X(N_c+1)+N_f(\Delta_Q-1)-2)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Semplificando le frazioni ove possibile si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&4m_BN_cN_f(-m_A)+4m_BN_cN_f(-\omega\Delta_Q)+4m_BN_c^2\omega\Delta_X\Bigg(-1+\frac{k+1}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg)\\
&+4m_BN_cN_f-8m_BN_c^2\omega\frac{1}{k(N_f+1)-N_c}\Bigg)
\end{aligned}
$$

A questo punto esplicitando la R-Carica Δ_X otteniamo:

$$
4m_BN_C(-m_AN_f+\omega(N_f(1-\Delta_Q)-N_c\Delta_X))+4m_BN_c^2\omega\frac{1}{k(N_f+1)-N_c}\left(\overbrace{\frac{2}{k+1}}^{\Delta_X}(k+1)-2\right) \tag{2.10}
$$

Come si può vedere matcha esattamente con la fase ottenuta dalla teoria elettrica.

$$
4m_BN_C(-m_AN_f+\omega(N_f(1-\Delta_Q)-N_c\Delta_X)) \tag{2.11}
$$

2.6.7 Contributo dei termini misti

I termini rimanenti da calcolare sono dati da:

$$
m_A(-BN_f+C)+\omega((C+B)(-\Delta_X+1)+(-k(kN_f-N_C)\Delta_X+B\Delta_M+C\Delta_Q)=
$$

Non c'è modo di farli andare via se non con $B=C=0$

2.6.8 Contributi con σ e ρ

Ho anche contributi proporzionali a ρ e a σ:

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{j}^{kN_f-N_c}\sigma'_j\big(-m_AN_f-\omega(\Delta_X(1+k)-\Delta_M-1)\big)+4N_f\sum_{j=1}^{k}\rho'_j(-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q-1))+\\
&+4(kN_f-N_c)\sum_i\rho'_i(\omega\Delta_X)=\\
=&4\sum_{j}^{kN_f-N_c}\sigma'_j\big(-m_AN_f-\omega(1-\Delta_M)\big)+4\sum_{j=1}^{k}\rho'_j(-m_AN_f+\omega(\Delta_X(N_f+(kN_f-N_c))-N_f\Delta_Q-N_f)\\
=&4\sum_{j}^{kN_f-N_c}\sigma'_j\big(-m_AN_f+\omega(\Delta_M-1)\big)+4\sum_{j=1}^{k}\rho'_j(-m_AN_f+\omega(\Delta_XN_f(k+1)-N_c\Delta_X)-N_f\Delta_Q-N_f\\
=&4\sum_{j}^{kN_f-N_c}\sigma'_j\big(-m_AN_f+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q))\big)+4\sum_{j=1}^{k}\rho'_j(-m_AN_f+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q))\\
&=4(\sum_{i}^{kN_f-N_c}\sigma_i+\sum_j^k\rho_j)(-m_AN_f+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q))
\end{aligned}
$$

2.7 Funzione di partizione nel limite (riassumendo)

Vediamo ora di tirare le somme su quanto trovato dopo aver fatto il limite nella parte magnetica.

$$\begin{aligned}
Z_{mag}(\mu_i,\nu_j,\tilde{\mu_i},\tilde{\nu_j}) =& \frac{1}{(k(N_f+1)-N_c)!(2\pi i)^{k(N_f+1)-N_c}}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{(k(N_f+1)-N_c)-1} \\
& c\,(4N_c(m+m_B)(-m_AN_f+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q)))) \\
& \left(\prod_{j=0}^{k-1}\Big(\prod_a^{N_f}\prod_b^{N_f}\Gamma_h\big(\mu_a+\nu_b+j\omega\Delta_X\big)\Big)\Gamma_h\big(-2m_AN_f+\omega(2\Delta_M+j\Delta_X)\big)\right) \\
& \int_{T^{\tilde{N}_c}}\prod_{i=1}^{kN_f-N_c}d\sigma_i\prod_{i=1}^{k}d\rho_i\,d\xi\,e^{2\pi i\xi(\sum\sigma_i+\sum\rho_i)} \\
& \prod_{1\le i<j\le kN_f-N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))}\prod_{1\le i<j\le k}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\rho_i-\rho_j))}{\Gamma_h(\pm(\rho_i-\rho_j))} \\
& \Bigg(\prod_{a,b=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{kN_f-N_c}\Gamma_h\big(m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}-m_a-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)+\tilde{\sigma}_j\big) \\
& \Gamma_h\big(-m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}+\tilde{m}_b-m_A+\omega(\Delta_X-\Delta_Q)-\tilde{\sigma}_j\big)\Bigg) \\
& \left(\prod_{i=1}^{k}\Gamma_h\big(\pm(\rho_i+m_B\frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c})+m_AN_f+\omega(\Delta_X-\Delta_M)\big)\right) \\
& c\big(4(\sum_i^{kN_f-N_c}\sigma_i+\sum_j^{k}\rho_j)(-m_AN_f+\omega(-N_c\Delta_X+N_f(1-\Delta_Q))\big)
\end{aligned}$$

3 Analisi dualità

A questo punto possiamo capire il rapporto fra le due teorie in questo limite. Utilizziamo la seguente identità integrale.
Definendo prima:

$$\begin{aligned}
W_{N_c,K}\left(\mu_a,\nu_b,\tau,\lambda\right) =& \frac{\Gamma_h(\tau)^{N_c}}{N_c!}\int\prod_{i=1}^{N_c}d\sigma_i\,e^{\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_2}(2\lambda\,\mathrm{tr}\ \sigma-2K\ \mathrm{tr}\ \sigma^2)}\prod_{1\le i<\le N_c}\frac{\Gamma_h(\tau\pm(\sigma_i-\sigma_j)}{\pm(\sigma_i-\sigma_j)} \\
& \prod_{i=1}^{N_c}\prod_{a,b=1}^{N_f}\Gamma_h(\mu_a+\sigma_i)\Gamma_h(\nu_b-\sigma_i)
\end{aligned}$$

Abbiamo (da [7](5.3.15) & [2](3.18)):

$$W_{N_c,0}\left(\mu_a,\nu_b,\omega\Delta_X,\lambda\right) = \prod_{j=0}^{k-1}\Gamma_h\left(\omega-j\omega\Delta_X-\frac{\mu+\nu}{2}\pm\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma_h\left(\mu+\nu+j\omega\Delta_X\right)$$

Possiamo utilizzare questa identità integrale sul settore $U(k)$ (attenzione al fattore $k!$ da considerare) e utilizzando:

$$\begin{aligned}
\mu_a &= m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}) + m_A N_f + \omega(\Delta_X \Delta_M) \\
\nu_a &= -m_B \frac{N_c}{k(N_f+1)-N_c}) + m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M) \\
\tau &= \omega \Delta_X \\
\lambda &= \text{da vedere con Antonio}
\end{aligned}$$

Ottengo l'espressione:

$$\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(\omega - j\omega\Delta_X - (m_A N_f + \omega(\Delta_X - \Delta_M)) \pm \frac{\lambda}{2} \right) \Gamma_h \left(2m_A N_f + 2\omega(\Delta_X - \Delta_M) + j\omega\Delta_X \right)$$

Il primo termine può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(\omega - j\omega\Delta_X - (m_A N_f + \omega((N_c+1)\Delta_X - N_f(1-\Delta_Q) - 1) \pm \frac{\lambda}{2} \right) = \\
=&\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(\pm\frac{\lambda}{2} + \omega \left(2 + N_f(1-\Delta_Q) - \Delta_X(N_c+1+j)\right) - m_A N_f \right) = \\
=&\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(\pm\frac{\lambda}{2} + \omega \left(2 + N_f(1-\Delta_Q) - \Delta_X(N_c+1+(k-1-j)\right) - m_A N_f \right)
\end{aligned}$$

Shift di j: $j' = j+1$

$$\begin{aligned}
&\prod_{j'=1}^{k} \Gamma_h \left(\pm\frac{\lambda}{2} + \omega \left(2 + N_f(1-\Delta_Q) - \Delta_X(N_c+k+1-j')\right) - m_A N_f \right) = \\
&\prod_{j'=1}^{k} \Gamma_h \left(\pm\frac{\lambda}{2} + \omega \left(N_f(1-\Delta_Q) - \Delta_X(N_c-j')\right) - m_A N_f \right)
\end{aligned}$$

dove nell'ultima riga ho usato il valore esplicito di Δ_X.
Questi termini sono associati a dei singoletti che hanno le seguenti cariche (si leggono dagli argomenti delle Γ_h): Confrontando con la tabella 6 di [5] (vedi anche [4])

	$U(kN_f - N_c) \times U(1)_{mirror}$	$U(1)_B$	$U(1)_A$	$U(1)_R$	
b_i	1_1	0	$-m_A N_f$	$N_f(1-\Delta_Q) + \Delta_X(i - N_c)$	$i = 1, \ldots, k$
$\tilde{b}_i$	1_{-1}	0	$-m_A N_f$	$N_f(1-\Delta_Q) + \Delta_X(i - N_c)$	$i = 1, \ldots, k$

(ricordare che $\Delta_X = \frac{2}{k+1}$).

Posso fare la stessa cosa anche per il secondo termine:

$$\prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(2m_A N_f + 2\omega(\Delta_X - \Delta_M) + j\omega\Delta_X\right) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(2m_A N_f + \omega(\Delta_X(2+j) - 2\Delta_M)\right) =$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(2m_A N_f + \omega(\Delta_X(2 + (k-1-j) - 2\Delta_M)\right) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma_h \left(2m_A N_f + \omega(2 - j\Delta_X - 2\Delta_M)\right) =$$

Utilizzando ora l'identità matematica $\Gamma_h(2\omega - x)\Gamma_h(x) = 1$ otteniamo che questo termine e il singoletto generato dall'$N_f + 1$-esima componente dei mesoni si cancellano a vicenda.
Ciò deriva dal fatto che dualizzando il settore $U(k)$ viene generata una massa olomorfa per il singoletto.

$$W = mM^\dagger M \quad \longrightarrow \quad R(M^\dagger) = 2 - R(M) \tag{3.1}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.

[2] Antonio Amariti and Claudius Klare. A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction. 2014.

[3] F.A. Dolan and H. Osborn. Applications of the Superconformal Index for Protected Operators and q-Hypergeometric Identities to N=1 Dual Theories. *Nucl.Phys.*, B818: 137–178, 2009. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2009.01.028.

[4] Hyungchul Kim and Jaemo Park. Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter. *JHEP*, 1306:106, 2013. doi: 10.1007/JHEP06(2013)106.

[5] Keita Nii. 3d duality with adjoint matter from 4d duality. *JHEP*, 1502:024, 2015. doi: 10.1007/JHEP02(2015)024.

[6] V.P. Spiridonov and G.S. Vartanov. Elliptic Hypergeometry of Supersymmetric Dualities. *Commun.Math.Phys.*, 304:797–874, 2011. doi: 10.1007/s00220-011-1218-9.

[7] Fokko van de Bult. Hyperbolic hypergeometric functions. *Master thesis*, 2007.