

4D TO 3D REDUCTION OF SEIBERG DUALITY FOR $SU(N)$ SUSY GAUGE THEORIES WITH ADJOINT MATTER: A PARTITION FUNCTION APPROACH

CARLO SANA

29 GIUGNO 2015

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA
SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA "G. OCCHIALINI"

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg

Riduzione dimensionale $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

DUALITÀ STRONG/WEAK COUPLING

Relatività speciale
+
Meccanica Quantistica = Teoria quantistica dei campi (QFT)

Metodi **perturbativi** utilizzabili a **weak coupling**:
sviluppi in serie nella costante di accoppiamento (e.g. **carica elettrica**)

RG flow

Le costanti di accoppiamento variano in funzione della scala di energia:
la teoria a bassa energia può fluire a **strong coupling**
(e.g. confinamento in QCD)

Nessuno strumento teorico per studiarne la dinamica. → QCD su reticolo

ESISTE UNO STRUMENTO TEORICO PER TRATTARE
TEORIE A STRONG COUPLING?

Dualità strong/weak coupling

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

Dualità strong/weak coupling

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg
- AdS/CFT \rightarrow gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** per teorie di campo **supersimmetriche non-abeliane** della dualità di Dirac.

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg
- AdS/CFT \rightarrow gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** per teorie di campo **supersimmetriche non-abeliane** della dualità di Dirac.

Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico J_{mag}^μ ottengo una invarianza \mathbb{Z}_2 delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$\left(E^i, B^i\right) \longrightarrow \left(B^i, -E^i\right) \quad \left(J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu\right) \longrightarrow \left(J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu\right) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla Meccanica Quantistica si ottiene una condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

dualità strong/weak coupling

Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico J_{mag}^μ ottengo una invarianza \mathbb{Z}_2 delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$\left(E^i, B^i\right) \longrightarrow \left(B^i, -E^i\right) \quad \left(J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu\right) \longrightarrow \left(J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu\right) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Unendo la dualità EM alla Meccanica Quantistica si ottiene una condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

dualità strong/weak coupling

DUALITÀ DI SEIBERG

Seiberg duality \sim dualità EM

Teoria elettrica \longleftrightarrow Teoria magnetica

Uguali

Funzioni di correlazione

Matrice S

Simmetrie Globali (**fisiche**)

Diverse

Particelle

Costanti di accoppiamento

Dinamica

Simmetrie locali (**non fisiche**)

Dualità a **basse energie**, ad alte energie
le due teorie sono fisicamente **distinguibili**

Primo caso di dualità scoperto nel '94 fra due teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD) in 4D con $\mathcal{N} = 1$

$$\begin{array}{ll} \text{quark (spin } \frac{1}{2}) & \longrightarrow \text{ squark (spin 0)} \\ \text{gluone (spin 1)} & \longrightarrow \text{ gaugino (spin } \frac{1}{2}) \end{array}$$

Perchè la supersimmetria?

Ci sono più strumenti teorici a disposizione per studiare teorie di campo supersimmetriche, soprattutto in regime **non perturbativo**.

Sono il terreno ideale per fare nuove scoperte, che possono essere **estese** anche a sistemi fisici non supersimmetrici.

Primo caso di dualità scoperto nel '94 fra due teorie di *Supersymmetric QCD* (SQCD) in 4D con $\mathcal{N} = 1$

$$\begin{array}{ll} \text{quark (spin } \frac{1}{2}) & \longrightarrow \text{ squark (spin 0)} \\ \text{gluone (spin 1)} & \longrightarrow \text{ gaugino (spin } \frac{1}{2}) \end{array}$$

Perchè la supersimmetria?

Ci sono più strumenti teorici a disposizione per studiare teorie di campo supersimmetriche, soprattutto in regime **non perturbativo**.

Sono il terreno ideale per fare nuove scoperte, che possono essere **estese** anche a sistemi fisici non supersimmetrici.

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica SQCD con N_c colori e N_f sapori

Teoria magnetica SQCD con $N_f - N_c$ colori e N_f sapori e N_f^2 mesoni,
costruiti con i **quark elettrici**

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica SQCD con N_c colori e N_f sapori e materia
nell'aggiunta del gruppo di gauge

Teoria magnetica SQCD con $kN_f - N_c$ colori e N_f sapori, materia
nell'aggiunta del gruppo di gauge e kN_f^2 mesoni,
costruiti con i campi della **teoria elettrica**.

Dualità di Seiberg con gruppo $SU(N_c)$ - [Seiberg '94]

Teoria elettrica $SQCD$ con N_c colori e N_f sapori

Teoria magnetica $SQCD$ con $N_f - N_c$ colori e N_f sapori e N_f^2 mesoni,
costruiti con i **quark elettrici**

Dualità KSS con gruppo $SU(N_c)$ - [Kutasov-Schwimmer-Seiberg '95]

Teoria elettrica $SQCD$ con N_c colori e N_f sapori e materia
nell'aggiunta del gruppo di gauge

Teoria magnetica $SQCD$ con $kN_f - N_c$ colori e N_f sapori, materia
nell'aggiunta del gruppo di gauge e kN_f^2 mesoni,
costruiti con i campi della **teoria elettrica**.

Differenze delle teorie di campo 3D $\mathcal{N} = 2$

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica \rightarrow **singoletti** nella teoria magnetica

Differenze delle teorie di campo 3D $\mathcal{N} = 2$

- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo
- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**

La teoria magnetica 3D contiene, oltre ai mesoni, un insieme aggiuntivo di singoletti.

Monopoli della teoria elettrica \rightarrow **singoletti** nella teoria magnetica

RIDUZIONE DIMENSIONALE $4D \rightarrow 3D$

Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio r :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda $r \rightarrow 0$.

Con questo procedimento non si ottengono
due teorie duali in 3D

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

Riduzione naturale: $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio r :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignorano tutti i modi di Kaluza-Klein dei campi sul cerchio.

Infine, si manda $r \rightarrow 0$.

**Con questo procedimento non si ottengono
due teorie duali in 3D**

Limite a bassa energia incompatibile con la relazione di dualità.

Riduzione corretta: r finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale (η) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale η impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).
In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:
per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale η rimane anche scendendo a basse energie.

Riduzione corretta: r finito

La finitezza del cerchio genera un termine di superpotenziale (η) dovuto a un modo istantonico di Kaluza-Klein.

Il superpotenziale η impone vincoli tipici delle 4D (**anomalie**).

In 3D questi vincoli non ci sono e dovranno essere rimossi.

Si ottengono teorie in 3D considerandone il limite a basse energie:
per energie $\ll \frac{1}{r}$ la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Il superpotenziale η rimane anche scendendo a basse energie.

SI PUÒ ARRIVARE A UNA DUALITÀ 3D SENZA IL
SUPERPOTENZIALE η CAUSATO DALLA PRESENZA DEL
CERCHIO?

Dualità di Seiberg & KSS

Facendo un RG flow con masse reali si ottengono teorie senza il vincolo imposto dal superpotenziale η .

Si riesce a generare la simmetria assiale che è **anomala in 4D**, ma che è permessa in 3D. Anche gli altri vincoli vengono rimossi.

4D \longrightarrow 3D IN TEORIA DI CAMPO: DUALITÀ KSS

Nel caso della dualità KSS è necessario deformare la teoria aggiungendo una **perturbazione** nel superpotenziale.
Con la deformazione si riescono a trovare i singoletti necessari per la dualità in 3D.

Rimuovendo la deformazione non si sa come ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione il risultato non cambia.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

4D \longrightarrow 3D IN TEORIA DI CAMPO: DUALITÀ KSS

Nel caso della dualità KSS è necessario deformare la teoria aggiungendo una **perturbazione** nel superpotenziale.
Con la deformazione si riescono a trovare i singoletti necessari per la dualità in 3D.

Rimuovendo la deformazione non si sa come ottenere i singoletti della teoria magnetica.



Devo assumere che rimuovendo la deformazione il risultato non cambia.

Non è chiaro come si può giustificare questa affermazione.

HO MODO DI VERIFICARE SE QUESTA INTUIZIONE È
CORRETTA?

RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

Si calcola l'indice superconforme I_{el} & I_{mag} : conta i multipletti BPS corti della teoria su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Nel limite $r \rightarrow 0$ l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D **con superpotenziale η** .

Indice superconf. integrale sul gruppo di gauge di Γ_e ellittiche
Funz. di partiz. integrale sul gruppo di gauge di Γ_h iperboliche

$$\begin{array}{rclcl} 4D: & I_{el} & = & I_{mag} & \Gamma_e \\ r \rightarrow 0 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 3D: & Z_{el}^{\eta} & = & Z_{mag}^{\eta} & \Gamma_h \end{array}$$

La dualità in 4D (**fisicamente**) e identità integrali (**matematicamente**) dimostrano l'identità fra gli indici in 4D.



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale η sono uguali grazie all'identità degli indici in 4D

La dualità in 4D (**fisicamente**) e identità integrali (**matematicamente**) dimostrano l'identità fra gli indici in 4D.



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale η sono uguali grazie all'identità degli indici in 4D

Con questo metodo **non è necessario** introdurre una deformazione , a differenza che in teoria di campo.

Utilizzando una identità **matematica** fra gamma iperboliche Γ_h si ottengono gli **stessi singoletti** trovati in teoria di campo con la deformazione.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso $SU(N)$.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso $SU(N)$.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

Il nostro lavoro è una **verifica indipendente** dei risultati ottenuti in teoria di campo, senza fare **assunzioni** che non si è in grado di giustificare.

La riduzione attraverso la funzione di partizione non era presente in letteratura per il caso $SU(N)$.

L'identità fra le due funzioni di partizione $Z_{el} = Z_{mag}$ porta a una **nuova identità** integrale tra funzioni iperboliche Γ_h **non ancora dimostrate** matematicamente.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, *Nucl.Phys.* **B435** (1995) 129–146, [[hep-th/9411149](#)].

D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, *Phys.Lett.* **B354** (1995) 315–321, [[hep-th/9505004](#)].

O. Aharony, *IR duality in $d = 3$ $N=2$ supersymmetric $USp(2N(c))$ and $U(N(c))$ gauge theories*, *Phys.Lett.* **B404** (1997) 71–76, [[hep-th/9703215](#)].

P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, *JHEP* **1308** (2013) 011, [[arXiv:1211.2808](#)].

H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, *JHEP* **1306** (2013) 106, [[arXiv:1302.3645](#)].

O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, *JHEP* **1307** (2013) 149, [[arXiv:1305.3924](#)].

K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, *JHEP* **1502** (2015) 024, [[arXiv:1409.3230](#)].

A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, [arXiv:1409.8623](#).