

# **4D TO 3D REDUCTION OF SEIBERG DUALITY FOR SU(N) SUSY GAUGE THEORIES WITH ADJOINT MATTER: A PARTITION FUNCTION APPROACH**

---

**CARLO SANA**

RELATORE: SILVIA PENATI

CORRELATORE ESTERNO: ANTONIO AMARITI

CORRELATORE: ALBERTO ZAFFARONI

29 GIUGNO 2015

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SCUOLA DI SCIENZE

DIPARTIMENTO DI FISICA "G. OCCHIALINI"

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

Dualità strong/weak coupling

Dualità di Seiberg e di Kutasov-Schwimmer-Seiberg

Riduzione dimensionale  $4D \rightarrow 3D$

Riduzione della dualità sulla funzione di partizione

## DUALITÀ STRONG/WEAK COUPLING

---

Relatività speciale  
+  
Meccanica Quantistica = Teoria quantistica dei campi (QFT)

Metodi **perturbativi** utilizzabili a **weak coupling**:  
sviluppi in serie nella costante di accoppiamento (e.g. **carica elettrica**)

## Gruppo di rinormalizzazione

Le costanti di accoppiamento variano in funzione della scala di energia:  
la teoria a bassa energia può fluire a **strong coupling**  
(e.g. confinamento in QCD)

**Nessuno strumento teorico per studiarne la dinamica.** → QCD su reticolo

ESISTE UNO STRUMENTO TEORICO PER TRATTARE  
TEORIE A STRONG COUPLING?



## Dualità strong/weak coupling

**Dualità:** le due teorie sono fisicamente equivalenti

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

## Dualità strong/weak coupling

**Dualità:** le due teorie sono fisicamente equivalenti

Legame fra le costanti di accoppiamento tra teorie duali:

$$g \sim \frac{1}{\tilde{g}} \longrightarrow \text{strong-weak coupling}$$

Si può calcolare una osservabile nella teoria **fortemente accoppiata** con **tecniche perturbative** ben note nella teoria duale.

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg e generalizzazioni
- AdS/CFT  $\rightarrow$  gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** della dualità di Dirac per teorie di gauge **non-abeliane** con supersimmetria.

- Dualità EM di Dirac
- Dualità di Montonen-Olive
- Dualità di Seiberg e generalizzazioni
- AdS/CFT  $\rightarrow$  gauge/gravity duality
- S-duality in teorie di stringa

Le dualità di Seiberg sono una **generalizzazione** della dualità di Dirac per teorie di gauge **non-abeliane** con supersimmetria.

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico  $J_{mag}^\mu$  si ottiene una invarianza  $\mathbb{Z}_2$  delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$(E^i, B^i) \longrightarrow (B^i, -E^i) \quad (J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu) \longrightarrow (J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Dualità EM + Meccanica Quantistica: condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

**primo esempio di dualità strong/weak coupling**

## Dualità di Dirac

Aggiungendo sorgenti per il campo magnetico  $J_{mag}^\mu$  si ottiene una invarianza  $\mathbb{Z}_2$  delle equazioni di maxwell sotto la trasformazione

$$(E^i, B^i) \longrightarrow (B^i, -E^i) \quad (J_{el}^\mu, J_{mag}^\mu) \longrightarrow (J_{mag}^\mu, -J_{el}^\mu) \quad J^\mu = (\rho, J^i)$$

Dualità EM + Meccanica Quantistica: condizione di **quantizzazione** della carica elettrica

$$eg = 2\pi\hbar n$$

Carica elettrica e magnetica sono **inversamente** proporzionali.

**primo esempio di dualità strong/weak coupling**

# DUALITÀ DI SEIBERG E DI KUTASOV- SCHWIMMER-SEIBERG

---

## Dualità di Seiberg e Kutasov-Schwimmer-Seiberg (KSS)

Teoria elettrica  $\longleftrightarrow$  Teoria magnetica

QCD con supersimmetria minimale ( $\mathcal{N} = 1$ ) con gruppo  $SU(N)$ .

Dualità KSS ha un ulteriore campo di materia nell'aggiunta.

### Uguali

Funzioni di correlazione

Simmetrie Globali (**fisiche**)

Struttura dei vuoti (**susy**)

### Diverse

Particelle (**mesoni**)

Costanti di accoppiamento

Dinamica (**numero di colori**)

Dualità a **basse energie**  $\longrightarrow$  **punto fisso superconforme**

Ad alte energie descrivono sistemi diversi



## Dualità di Seiberg e Kutasov-Schwimmer-Seiberg (KSS)

Teoria elettrica  $\longleftrightarrow$  Teoria magnetica

QCD con supersimmetria minimale ( $\mathcal{N} = 1$ ) con gruppo  $SU(N)$ .

Dualità KSS ha un ulteriore campo di materia nell'aggiunta.

### Uguali

Funzioni di correlazione

Simmetrie Globali (**fisiche**)

Struttura dei vuoti (**susy**)

### Diverse

Particelle (**mesoni**)

Costanti di accoppiamento

Dinamica (**numero di colori**)

Dualità a **basse energie**  $\longrightarrow$  **punto fisso superconforme**

Ad alte energie descrivono sistemi diversi

Simili a teorie 4D  $\mathcal{N} = 1$  ma con alcune differenze

Differenze delle teorie di campo 3D  $\mathcal{N} = 2$

- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**
- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo

È necessario far combaciare questi nuovi *branch* fra le due teorie

**Insieme aggiuntivo di singoletti nella teoria magnetica**

Simili a teorie 4D  $\mathcal{N} = 1$  ma con alcune differenze

Differenze delle teorie di campo 3D  $\mathcal{N} = 2$

- ulteriori simmetrie: in 4D no simmetria **assiale** e **topologica**
- diverso contenuto di materia: in 3D i gluoni hanno anche una partner **scalare**
- uno spazio dei moduli (**vuoti supersimmetrici**) con un *branch* aggiuntivo

È necessario far combaciare questi nuovi *branch* fra le due teorie

**Insieme aggiuntivo di singoletti nella teoria magnetica**

## RIDUZIONE DIMENSIONALE $4D \rightarrow 3D$

---

Riduzione naturale:  $r \rightarrow 0$

Si compattificano le teorie su un cerchio di raggio  $r$ :

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$$

Si ignora la dinamica sul cerchio e si manda  $r \rightarrow 0$ .

**Si ottengono due teorie che non sono duali fra loro**

Riduzione corretta:  $r$  finito

La finitezza del cerchio modifica la dinamica e impone vincoli tipici della teorie 4D (**anomalie**), generati da un termine di superpotenziale  $\eta$ .

Si scende a energie  $\ll \frac{1}{r}$ : la dinamica sul cerchio si disaccoppia.

Si possono rimuovere questi vincoli con un particolare RG flow.  
Inoltre, si riesce a generare la simmetria assiale (**assente in 4D**).

Si è in grado di ridurre la **dualità KSS** come fatto in letteratura solo se si introduce una **perturbazione** al superpotenziale.

Con essa, si riesce a generare i **singoletti** necessari per far coincidere i vuoti.

Per ottenere la dualità 3D standard si rimuove la deformazione. L'unico problema di questo passaggio è che non si ha modo di generare i singoletti.

Devo assumere che rimuovendo la deformazione ottengo comunque i singoletti corretti.

Non ci sono però giustificazioni teoriche a riguardo.

HO MODO DI VERIFICARE SE QUESTA INTUIZIONE È  
CORRETTA?



# RIDUZIONE DELLA DUALITÀ SULLA FUNZIONE DI PARTIZIONE

---

# INDICE SUPERCONFORME IN 4D E FUNZIONI DI PARTIZIONE IN 3D

Si calcola l'indice superconforme  $I_{el}$  &  $I_{mag}$ : è **uguale** per teorie duali. Esso conta i multipletti BPS corti su  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ , che una volta integrati i modi sul cerchio si riducono a stati sulla sfera 3D.

Infatti nel limite  $r \rightarrow 0$  l'indice si riduce alla funzione di partizione della teoria in 3D **con superpotenziale  $\eta$** .

<b>Indice superconf.</b>	funzioni gamma ellittiche $\Gamma_e$
<b>Funz. di partiz.</b>	funzioni gamma iperboliche $\Gamma_h$

Identità matematiche:  $\Gamma_e \xrightarrow{r \rightarrow 0} \Gamma_h$

$$4D: \quad I_{el} = I_{mag}$$

$$r \rightarrow 0 \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$3D: \quad Z_{el}^{\eta} = Z_{mag}^{\eta}$$

La dualità in 4D impone che gli indici superconformi  
siano uguali



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale  $\eta$   
sono uguali

Per rimuovere i vincoli, si fa un RG flow simile a quanto fatto precedentemente, ma direttamente **sulla funzione di partizione**.

Si genera anche la simmetria **assiale**, richiesta per la dualità.

La dualità in 4D impone che gli indici superconformi  
siano uguali



Le funzioni di partizione in 3D con superpotenziale  $\eta$   
sono uguali

Per rimuovere i vincoli, si fa un RG flow simile a quanto fatto precedentemente, ma direttamente **sulla funzione di partizione**.

Si genera anche la simmetria **assiale**, richiesta per la dualità.

Lavorando direttamente sulla funzione di partizione **non è necessario** introdurre una deformazione, come è stato fatto precedentemente.

### Singoletti

Utilizzando una identità **matematica** fra gamma iperboliche  $\Gamma_h$  si ottengono i **singoletti** corretti per la dualità. Coincidono con quelli trovati in teoria di campo con la deformazione.

È stato **verificato** che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione **non giustificata**, è **corretta**, confermando così il legame fra la dualità KSS  $SU(N)$  in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.

È stato **verificato** che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione **non giustificata**, è **corretta**, confermando così il legame fra la dualità KSS  $SU(N)$  in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.

È stato **verificato** che la riduzione fatta precedentemente in letteratura, basata su un'assunzione **non giustificata**, è **corretta**, confermando così il legame fra la dualità KSS  $SU(N)$  in 4D e 3D in riduzione dimensionale.

Infine, l'identità fra le due funzioni di partizione  $Z_{el} = Z_{mag}$  porta a una **identità** integrale tra funzioni iperboliche  $\Gamma_h$  **non ancora dimostrate** matematicamente.



GRAZIE PER L'ATTENZIONE

N. Seiberg, *Electric - magnetic duality in supersymmetric non Abelian gauge theories*, *Nucl.Phys.* **B435** (1995) 129–146, [[hep-th/9411149](#)].

D. Kutasov and A. Schwimmer, *On duality in supersymmetric Yang-Mills theory*, *Phys.Lett.* **B354** (1995) 315–321, [[hep-th/9505004](#)].

O. Aharony, *IR duality in  $d = 3$   $N=2$  supersymmetric  $USp(2N(c))$  and  $U(N(c))$  gauge theories*, *Phys.Lett.* **B404** (1997) 71–76, [[hep-th/9703215](#)].

P. Agarwal, A. Amariti, A. Mariotti, and M. Siani, *BPS states and their reductions*, *JHEP* **1308** (2013) 011, [[arXiv:1211.2808](#)].

H. Kim and J. Park, *Aharony Dualities for 3d Theories with Adjoint Matter*, *JHEP* **1306** (2013) 106, [[arXiv:1302.3645](#)].

O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, and B. Willett, *3d dualities from 4d dualities*, *JHEP* **1307** (2013) 149, [[arXiv:1305.3924](#)].

K. Nii, *3d duality with adjoint matter from 4d duality*, *JHEP* **1502** (2015) 024, [[arXiv:1409.3230](#)].

A. Amariti and C. Klare, *A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction*, [arXiv:1409.8623](#).

$$\begin{aligned}
 Z_{el}(\mu_i, \nu_i) &= \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X \omega)^{N_c-1} \\
 &\int \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\sigma_i}{\sqrt{-\omega_1 \omega_2}} \delta\left(\sum_i \sigma_i\right) \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \\
 &\prod_{a,b=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(m_a + m_B + m_A + \sigma_j) \Gamma_h(-\tilde{m}_a - m_B + m_A - \sigma_j)
 \end{aligned}$$

# FUNZIONE DI PARTIZIONE MAGNETICA

$$\begin{aligned}
 Z_{mag} = & \frac{1}{(kN_f - N_c)!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{kN_f - N_c - 1} \\
 & \left( \prod_{j=0}^{k-1} \prod_a^{N_f} \prod_b^{N_f} \Gamma_h(\mu_a + \nu_b + j\omega \Delta_X) \right) \\
 & \int \prod_{i=1}^{kN_f - N_c} \frac{d\sigma_i}{\omega_1 \omega_2} \int d\xi e^{\frac{\pi i}{\omega_1 \omega_2} 2\xi (m_B N_c + \sum \sigma_i)} \prod_{i < j}^{kN_f - N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \\
 & \left( \prod_{a,b}^{N_f} \prod_{j=1}^{kN_f - N_c} \Gamma_h(-m_a - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) + \tilde{\sigma}_j) \right. \\
 & \quad \left. \Gamma_h(+\tilde{m}_b - m_A + \omega(\Delta_X - \Delta_Q) - \tilde{\sigma}_j) \right) \\
 & \prod_{j'=0}^{k-1} \Gamma_h(\pm \xi + \omega(N_f(1 - \Delta_Q) - \Delta_X(N_c - j')) - m_A N_f)
 \end{aligned}$$