

PREPARED FOR SUBMISSION TO JHEP

Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer 4d \rightarrow 3d

Carlo Sana

Indice

0.1	Indice superconforme per Kutasov-Schwimmer (4d) (Teoria Elettrica)	2
0.1.1	Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d	7
0.2	Riduzione dell'indice alla funzione di partizione	8
0.3	Indice superconforme per Kutasov-Schwimmer (4d) (Teoria Magnetica)	13

0.1 Indice superconforme per Kutasov-Schwimmer (4d) (Teoria Elettrica)

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer ($SU(N_C) \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B$) è dato da (vedi [2])

$$\begin{aligned}
i_E(p, q, v, y, \tilde{y}, z) = & \\
& - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) (p_{N_c}(z) p_{N_c}(z^{-1}) - 1) \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left((pq)^{\frac{1}{2}r} v p_{N_f}(y) p_{N_c}(z) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} p_{N_f}(y^{-1}) p_{N_c}(z^{-1}) \right. \\
& \quad \left. + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} p_{N_f}(\tilde{y}) p_{N_c}(z^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} v p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) p_{N_c}(z) \right)
\end{aligned} \tag{0.1.1}$$

I polinomi sono definiti come

$$p_{N_c}(x) = \sum_i^{N_c} x_i \quad p_{N_c}(x^{-1}) = \sum_i^{N_c} \frac{1}{x_i}$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}
i_E(p, q, v, y, \tilde{y}, z) = & \\
& - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i}{z_j} - 1 \right) \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_c} \left((pq)^{\frac{1}{2}r} v y_i z_j - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} y_i^{-1} z_j^{-1} \right. \\
& \quad \left. + (pq)^{\frac{1}{2}r} \frac{1}{v} \tilde{y}_i z_j^{-1} - (pq)^{1-\frac{1}{2}r} v \tilde{y}_i^{-1} z_j \right)
\end{aligned}$$

riscalando $(pq)^{\frac{1}{2}r} v y \rightarrow y$ e $(pq)^{-\frac{1}{2}r} v \tilde{y} \rightarrow \tilde{y}$:

$$\begin{aligned}
i_E(p, q, y, \tilde{y}, y) = & \\
& - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N_c} z_i / z_j - 1 \right)
\end{aligned} \tag{0.1.2}$$

$$+ \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_c} \left((y_i - pq \tilde{y}_i) z_j + (\tilde{y}_i^{-1} - pq y_i^{-1}) z_j^{-1} \right)$$

dove R_q e R_X sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$R_Q = 1 - \frac{2}{k+1} \frac{N_c}{N_f}, \quad s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} R_X \tag{0.1.3}$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).

L'indice superconforme è definito come:

$$I_E(p, q, v, y, \tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E(p^n, q^n, v^n, y^n, \tilde{y}^n, z^n) \right)$$

L'integral sul gruppo $SU(N_c)$ può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$\int_{SU(N_c)} d\mu(z) f(z) = \frac{1}{N_c!} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \Delta(z) \Delta(z^{-1}) f(z) \Big|_{\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1} \quad (0.1.4)$$

e dove $\Delta(z)$ è il determinante di Vandermonde:

$$\Delta(z) = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} (z_i - z_j) = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} \left(1 - \frac{z_i}{z_j} \right) z_j = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}}^{N_c} \left(1 - \frac{z_i}{z_j} \right)$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$.

Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella i_E si fattorizza nell'indice "completo" I_E essendo all'interno di un esponenziale.

s

Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$\begin{aligned}
& \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^{Vett}(p^n, q^n, z^n) \right) \stackrel{def}{=} \\
& \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(\left(\sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) - 1 \right) \right) = \\
& = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(\left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_c} 1 \right) - 1 \right) \right) = \\
& = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(\left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) + \left(N_c \right) - 1 \right) \right) = \\
& = \left[\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(\left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right) \right] \right. \\
& \quad \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(N_c - 1 \right) \right) = \\
& = \left[\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right] \left[\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \right) \right]^{N_c-1} \\
& \quad \left[\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) \right] \left[\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) \right]^{N_c-1} \quad (0.1.5)
\end{aligned}$$

Da questi termini si ottengono le funzioni Γ_e attraverso le seguenti identità non banali:

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) (z^n + z^{-n}) = \frac{\theta(z; p) \theta(z; q)}{1 - z^2} \quad (0.1.6)$$

$$= \frac{1}{(1-z)(1-z^{-1})\Gamma_e(z; p, q)\Gamma_e(z^{-1}; p, q)} \quad (0.1.7)$$

$$(0.1.8)$$

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \right) = (p; p)(q; q) \quad (0.1.9)$$

$$\text{dove } i_E^V(p^n, q^n) = - \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \quad (0.1.10)$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\begin{aligned}\Gamma_e(z; p, q) &= \prod_{i, j \geq 0} \frac{1 - y^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - y p^j q^k} \\ \theta(z; p) &= \prod_{j \geq 0} (1 - z p^j)(1 - z^{-1} p^{j+1}) \\ (x; p) &= \prod_{j \geq 0} (1 - x p^j)\end{aligned}$$

L'identità 0.1.9 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 0.1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} = \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right)$$

A questo punto identificando $\frac{z_i}{z_j} = z$ si applica l'identità 0.1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) \right) = \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n) \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) \right) \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{(1 - \frac{z_i}{z_j})(1 - \frac{z_j}{z_i}) \Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}\end{aligned}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$\begin{aligned}(p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{(1 - \frac{z_i}{z_j})(1 - \frac{z_j}{z_i}) \Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\ (p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \frac{1}{\Delta(z) \Delta(z^{-1})} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}\end{aligned}$$

Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z; p, q) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n - \left(\frac{pq}{z} \right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)} \right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$1_E^{Adj}(p, q, z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \left(\left(\sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i}{z_j} \right) - 1 \right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p, q, z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_E^{Adj}(p^n, q^n, z^n) \right) \quad (0.1.11)$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right) - 1 = \\ & \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + N_c - 1 \end{aligned}$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p, q, z) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} ((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}) \left(\left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N_c \\ i \neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + N_c - 1 \right) \right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da z da quelli che non ne dipendono.

Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da $\frac{z_i}{z_j}$ è dato da:

$$\exp \left((N_c - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)} \right) = \exp \left((N_c - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(y)^n - (\frac{pq}{y})^n}{(1-p^n)(1-q^n)} \right)$$

Avendo posto $(pq)^s = y$

L'identità 0.1 si applica immediatamente ai termini indipendenti da z_i e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da z_i consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n}) \left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n} \right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left((pq)^{sn} \frac{z_i^n}{z_j^n} - (pq)^{(1-s)n} \frac{z_j^n}{z_i^n} \right) + \left((pq)^{sn} \frac{z_j^n}{z_i^n} - (pq)^{(1-s)n} \frac{z_i^n}{z_j^n} \right)$$

il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \quad y' = (pq)^s \frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 0.1 utilizzando le variabili y, y' e il contributo è pari a

$$\prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

Riassumendo il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscaldamento di y e \tilde{y}):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left[\left((y_i z_j)^n - \left(\frac{pq}{y_i z_j} \right)^n \right) + \left(\frac{1}{(\tilde{y}_i z_j)^n} - (pq \tilde{y}_i z_j)^n \right) \right] \right]$$

Identificando $t = y_i z_j$ e $t' = (\tilde{y}_i z_j)^{-1}$ con gli argomenti delle Γ_e nell'identità 0.1 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq N_c \\ 1 \leq i \leq N_f}} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})$$

0.1.1 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$\begin{aligned} I_{El}(p, q, y, \tilde{y}) = & \frac{1}{N_c!} (p; p)^{N_c-1} (q; q)^{N_c-1} \Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c-1} \\ & \int_{T^{N_c-1}} \left(\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta \left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_e((pq)^s \frac{z_i}{z_j}) \Gamma_e((pq)^s \frac{z_j}{z_i})}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\ & \prod_{1 \leq j \leq N_c} \prod_{1 \leq i \leq N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1}) \end{aligned}$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

0.2 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari potenziali chimici si può calcolare la funzione di partizione, nel limite $r \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} p &= e^{2\pi i r \omega_1} & q &= e^{2\pi i r \omega_2} & z_i &= e^{2\pi i r \sigma_i} \\ y_a &= e^{2\pi i r m_a} & y_{\tilde{a}} &= e^{2\pi i r \tilde{m}_a} & v &= e^{2\pi i r m_B} \end{aligned}$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [?] pag 30)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} = \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

con $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Si possono riscrivere le variabili in modo da sistemare il fattore di π all'esponente:

$$z \rightarrow \pi z \quad \omega_1 \rightarrow \pi\omega_1 \quad \omega_2 \rightarrow \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi r z}; e^{i\pi r \omega_1}, e^{i\pi r \omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z) - (\pi\omega))} \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di Γ_h : la sua definizione infatti è (cft [?] 2.2.4):

$$\begin{aligned} \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2) &= \exp \left(\pi i \frac{(2z - \omega_1 - \omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2} \right) \\ &\quad \frac{(\exp(-2\pi i(z - \omega_2)/\omega_1); \exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi i z/\omega_2); \exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty} \\ &= \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) \end{aligned}$$

Funzione di partizione

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per $r \rightarrow 0$ utilizzando le ri-definizioni delle fugacità in 0.2. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che $s = \frac{\Delta_X}{2}$)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)})^{N_c-1} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi i r \Delta_X \omega})^{N_c-1} = \\ &= \left[e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_X - \omega)} \right]^{N_c-1} \Gamma_h(\omega\Delta_X; \omega_1, \omega_2)^{N_c-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}} \left(\frac{z_i}{z_j}\right)) \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}} \left(\frac{z_j}{z_i}\right)) &= \\
&= \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(\sigma_i - \sigma_j)}) \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta_X}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(\sigma_j - \sigma_i)}) = \\
&= \Gamma_e(e^{2\pi i r(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j)}) \Gamma_e(e^{2\pi i r(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i)}) \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_x + (\sigma_i - \sigma_j) + (\sigma_j - \sigma_i) - 2\omega)} \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i) \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_x - 1))} \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\Delta_X \omega + \sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e\left(\frac{z_i}{z_j}\right) \Gamma_e\left(\frac{z_j}{z_i}\right) &= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j - \sigma_i) + (\sigma_i - \sigma_j) - 2\omega)} \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i) = \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)} \Gamma_h(\sigma_i - \sigma_j) \Gamma_h(\sigma_j - \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2} b y_i z_j}) \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2} b^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1}}) &= \\
&= \lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(m_i + m_B + \sigma_j)}) \Gamma_e(e^{2\pi i r \frac{\Delta}{2}(\omega_1 + \omega_2)} e^{2\pi i r(-\tilde{m}_i - m_B - \sigma_j)}) = \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta + m_i + m_B + \sigma_j - \omega) + (\omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B - \sigma_j - \omega))} \\
&\Gamma_h(\omega\Delta + m_i + m_B + \sigma_j) \Gamma_h(\omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B - \sigma_j) = \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta - 1) + m_i - \tilde{m}_i)} \Gamma_h(\mu_i + \sigma_j) \Gamma_h(\nu_i - \sigma_j)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$\mu_i = \omega\Delta + m_i + m_B \quad \nu_i = \omega\Delta - \tilde{m}_i - m_B$$

Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):

$$\begin{aligned}
&\omega(\Delta_X - 1)(N_c - 1) + \frac{N_c(N_c - 1)}{2} 2\omega(\Delta_x - 1) - \frac{N_c(N_c - 1)}{2}(-2\omega) + \\
&+ (N_c - 1 \text{ (da (p;p)...)}) + N_c \left(\sum_i^{N_f} 2\omega(\Delta - 1) + m_i - \tilde{m}_i \right) = \\
&= \omega(\Delta_X - 1)(N_c^2 - 1) + (N_c^2 - 1)\omega + N_c N_f 2\omega(\Delta - 1) + N_c \left(\sum_i^{N_f} m_i - \tilde{m}_i \right)
\end{aligned}$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate $z_i = e^{2\pi i r \sigma_i}$:

$$\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right)$$

Il determinante della trasformazione è

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial \sigma_j}\right) = (2\pi i r)^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} z_i \quad \longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i} = r^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i$$

La *delta function* diventa:

$$\delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right) = \delta\left(e^{2\pi i r \sum \sigma_i} - 1\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi i r) e^{2\pi i r (\sum \sigma_i)}} \delta\left(\sum \sigma_i\right) \quad (0.2.1)$$

Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer)

$$Z_{el}(\mu_i, \nu_i) = \frac{r^{N_c-1}}{2\pi i} \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{N_c-1} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i \delta\left(\sum_i \sigma_i\right) \\ e^{-2\pi i r \sum \sigma_i} \prod_{1 \leq i < j \leq N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(\mu_i + \sigma_j) \Gamma_h(\nu_i + \sigma_j)$$

usando la convenzione $\Gamma_h(\pm x) = \Gamma_h(x) \Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale η impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$\sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(N_c \Delta_X + (N_f + 1)(1 - \Delta))$$

Masse reali e flow senza η

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di $SU(N_f+1)^2 \times U(1)_B \rightarrow SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$:

$$\mu = \left(\begin{array}{cccc|c} m_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m - m_A N_f \end{array} \right) \\ + \left(\begin{array}{cccc|c} m_B + \omega \Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_B + \omega \Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_B + \omega \Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B + \omega \Delta_m \end{array} \right)$$

dove valgono le condizioni:

$$m_A N_f + \sum m_a = 0$$

La stessa cosa si fa per $SU(N_f)_R$

$$\nu = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc|c} -m_B + \omega \Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -m_B + \omega \Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega \Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega \Delta_m \end{array} \right)$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).

Il valore di m_A è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un $U(1)$ diagonale.

NB: $U(1)_A$ mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi N_f sapori e l'ultimo (Δ e Δ_m).

NB: da [1] (5.28): Date masse m_a e \tilde{m}_a per Q e \tilde{Q} , abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - \tilde{m}_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + \tilde{m}_a)$$

Limite per $m \rightarrow \infty$

Per fare il limite $m \rightarrow \infty$ utilizziamo la seguente identità [1] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_h(\omega \Delta + \sigma_i + M + m) = \exp \left(\text{sign}(m) \frac{\pi i}{2\omega_1 \omega_2} \left([\omega(\Delta - 1) + \sigma_i + (m + M)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right) \right)$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned}\Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp \left(\text{sign}(m) \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[[\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right] \right) \\ \Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp \left(\text{sign}(-m) \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[[\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12} \right] \right)\end{aligned}$$

Per via del fattore $\text{sign}(\pm m)$ i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned}&\exp \left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[4\omega(\Delta_M - 1)(m + \sigma_i + m_B) - 4(m_a N_f)(\sigma_i + m + m_B) \right] \right] = \\ &= \exp \left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) \right] \right]\end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{N_c} \exp \left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) \right] \right] = \\ &\exp \left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2} \left[4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\left(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i \right)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) \right] \right]\end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a $\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i$ può essere inglobato nella $\delta(\sum \sigma_i)$.

Definendo la funzione $c(x) = e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1\omega_2}}$ i contributi diventano:

$$c(4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)) c\left(4\left(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i\right)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\right)$$

0.3 Indice superconforme per Kutasov-Schwimmer (4d) (Teoria Magnetica)

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$\begin{aligned}
i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \\
& - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) (p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - 1) + \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left((pq)^{s-\frac{1}{2}r} \tilde{v} p_{N_f}(y) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) - (pq)^{1-s+\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} p_{N_f}(y^{-1}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) + \right. \\
& + (pq)^{s-\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} p_{N_f}(\tilde{y}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - (pq)^{1-s+\frac{1}{2}r} \tilde{v} p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) \Big) \\
& \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{\frac{1}{2}2(s+r)} p_{N_f}(y) p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}2(s+r)} p_{N_f}(y^{-1}) p_{N_f}(\tilde{y}) \right)
\end{aligned}$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$\begin{aligned}
i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \\
& - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} ((pq)^s - (pq)^{1-s}) \right) \left(\sum_{i,j}^{\tilde{N}_c} \tilde{z}_i \tilde{z}_j^{-1} - 1 \right) + \\
& + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left[\sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \left((pq)^{s-\frac{1}{2}r} \tilde{v} y_i \tilde{z}_j - (pq)^{1-s+\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} y_i^{-1} \tilde{z}_j^{-1} + \right. \right. \\
& + (pq)^{s-\frac{1}{2}r} \frac{1}{\tilde{v}} (\tilde{y}_i) (\tilde{z}_j^{-1}) - (pq)^{1-s+\frac{1}{2}r} \tilde{v} \tilde{y}_i^{-1} \tilde{z}_j \Big) + \\
& \left. \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{s+r} y_i \tilde{y}_j^{-1} - (pq)^{1-(s+r)} y_i^{-1} \tilde{y}_j \right) \right]
\end{aligned}$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni (solo flavour nessun colore).

Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$\alpha = s - \frac{1}{2}r \quad m_{ij} = y_i \tilde{y}_j$$

L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$i_M^{Chiral}(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \left((pq)^\alpha \tilde{v} y_i \tilde{z}_j - (pq)^{1-\alpha} \frac{1}{\tilde{v}} y_i^{-1} \tilde{z}_j^{-1} + \right. \\ \left. + (pq)^\alpha \frac{1}{\tilde{v}} (\tilde{y}_i) (\tilde{z}_j^{-1}) - (pq)^{1-\alpha} \tilde{v} \tilde{y}_i^{-1} \tilde{z}_j \right) +$$

Esponenziamo separatamente i primi due termini dagli ultimi due:

$$\exp \left(\sum_n \frac{1}{n} i_M^{Chiral}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n, \tilde{z}^n) \right) = \\ \exp \left(\sum_n \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left((pq)^{\alpha n} \tilde{v}^n y_i^n \tilde{z}_j^n - (pq)^{(1-\alpha)n} \tilde{v}^{-n} y_i^{-n} \tilde{z}_j^{-n} \right) \right) \\ \text{facciamo il cambio di variabile } (pq)^\alpha \tilde{v} y_i \tilde{z}_j = t \\ = \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \exp \left(\sum_n \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left(t^n - \left(\frac{pq}{t} \right)^n \right) \right)$$

A questo punto si utilizza l'identità 0.1 e otteniamo così:

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e(t; p, q) = \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^\alpha \tilde{v} y_i \tilde{z}_j; p, q) \quad (0.3.1)$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1} (pq)^\alpha = t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di α):

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r} \tilde{v} y_i \tilde{z}_j; p, q) \Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r} \tilde{v}^{-1} \tilde{y}_i \tilde{z}_j^{-1}; p, q) \quad (0.3.2)$$

Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolato come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è $R_M = 2R_Q + R_X j$ dove j indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone. (Seconda formula è da Dolan Osborn, inutilmente complicata, equivale alla

mia (la prima))

$$\begin{aligned}
i_M^{Mesons}(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{(s+r)} m_{ij} - (pq)^{1-(s+r)} m_{ij}^{-1} \right) = \\
&= \frac{1}{(1-p)(1-q)} \frac{1 - (pq)^{1-s}}{1 - (pq)^s} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \left((pq)^r m_{ij} - (pq)^{2s-r} m_{ij}^{-1} \right)
\end{aligned}$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
&\exp \left(\sum_n \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) = \\
&\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left((pq)^{(r+s)n} m_{ij}^n - (pq)^{(1-(r+s)n} m_{ij}^{-n} \right) \right)
\end{aligned}$$

Ponendo ora $(pq)^{r+s} = t$:

$$\begin{aligned}
&\exp \left(\sum_n \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) = \\
&\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left(y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n} \right) \right)
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.
- [2] F.A. Dolan and H. Osborn. Applications of the Superconformal Index for Protected Operators and q-Hypergeometric Identities to N=1 Dual Theories. *Nucl.Phys.*, B818: 137–178, 2009. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2009.01.028.