Prepared for submission to JHEP

Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer 4d $\rightarrow$ 3d

Carlo Sana

Indice

0.1 Teoria Elettrica

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer ($SU(N_C) \times SU(N_f)_L) \times SU(N_f)_R) \times U(1)_B)$ è dato da (vedi [**?**])

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{N_c}(z)\,p_{N_c}(z^{-1})-1\big) \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(y)\,p_{N_c}(z)-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{N_c}(z^{-1}) \\
&\qquad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{N_c}(z^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{N_c}(z)\bigg)
\end{aligned} \tag{0.1.1}
$$

I polinomi sono definiti come

$$
p_{N_c}(x)=\sum_i^{N_c}x_i \qquad p_{N_c}(x^{-1})=\sum_i^{N_c}\frac{1}{x_i}
$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}-1\Big) \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,y_i\,z_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,y_i^{-1}\,z_j^{-1}) \\
&\qquad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,\tilde{y}_i\,z_j^{-1}-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,\tilde{y}_i^{-1}\,z_j\bigg)
\end{aligned}
$$

riscalando $(pq)^{\frac{1}{2}r}vy \to y$ e $(pq)^{-\frac{1}{2}r}v\tilde{y} \to \tilde{y}$:

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,y,\tilde{y},y) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\right)\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}z_i/z_j-1\right)
\end{aligned} \tag{0.1.2}
$$

$$
+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Big(\big(y_i-p\,q\,\tilde{y}_i\big)z_j+\big(\tilde{y}_i^{-1}-p\,q\,y_i^{-1}\big)z_j^{-1}\Big)
$$

dove R_q e R_X sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$
R_Q = 1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}\,, \qquad s=\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}R_X \tag{0.1.3}
$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).
L'indice superconforme è definito come:

$$I_E(p,q,v,y,\tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z)\, \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E(p^n, q^n, v^n, y^n, \tilde{y}^n, z^n)\right)$$

L'integral sul gruppo $SU(N_c)$ può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$\int_{SU(N_c)} d\mu(z)\, f(z) = \frac{1}{N_c!} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \Delta(z)\Delta(z^{-1}) f(z)\Big|_{\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1} \tag{0.1.4}$$

e dove $\Delta(z)$ è il determinante di Vandermonde:

$$\Delta(z) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c \\ i\neq j}}^{N_c} (z_i - z_j) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c \\ i\neq j}}^{N_c} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right) z_j = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c \\ i\neq j}}^{N_c} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right)$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$.
Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella i_E si fattorizza nell'indice "completo" I_E essendo all'interno di un esponenziale.
s

Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^{Vett}(p^n,q^n,z^n)\right)\overset{def}{=}$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{1\leq i,j\leq N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)-1\right)\right)=$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N_c}1\right)-1\right)\right)=$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)+\left(N_c\right)-1\right)\right)=$$

$$=\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right)\right]\right.$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(N_c-1\right)\right)=$$

$$=\left[\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\right)\right]^{N_c-1}$$

$$\left[\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)\right]^{N_c-1}\qquad(0.1.5)$$

Da questi termini si ottengono le funzioni Γ_e attraverso le seguenti identità non banali:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)\left(z^n+z^{-n}\right)=\frac{\theta(z;p)\theta(z;q)}{1-z^2}\qquad(0.1.6)$$

$$=\frac{1}{(1-z)(1-z^{-1})\Gamma_e(z;p,q)\Gamma_e(z^{-1};p,q)}\qquad(0.1.7)$$

$$(0.1.8)$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)=(p;p)(q;q)\qquad(0.1.9)$$

$$\text{dove}\quad i_E^V(p^n,q^n)=-\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\qquad(0.1.10)$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\Gamma_e(z;p,q) = \prod_{i,j\geq 0} \frac{1-y^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-yp^jq^k}$$
$$\theta(z;p) = \prod_{j\geq 0}(1-zp^j)(1-z^{-1}p^{j+1})$$
$$(x;p) = \prod_{j\geq 0}(1-xp^j)$$

L'identità 0.1.9 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 0.1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n} = \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

A questo punto identificando $\frac{z_i}{z_j} = z$ si applica l'identità 0.1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right) =$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\, i_E^V(p^n,q^n)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right)$$
$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1} \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{(1-\frac{z_i}{z_j})(1-\frac{z_j}{z_i})\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$
$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1} \frac{1}{\Delta(z)\Delta(z^{-1})} \prod_{1\leq i<j\leq N_c} \frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z;p,q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n - \left(\frac{pq}{z}\right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$\imath_E^{Adj}(p,q,z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\right)\left(\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}\right)-1\right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\imath_E^{Adj}(p^n,q^n,z^n)\right) \tag{0.1.11}$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)-1 =$$
$$\left(\sum_{1\le i<j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+N_c-1$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left((p\,q)^{sn} - (p\,q)^{(1-s)n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+N_c-1\right)\right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da z da quelli che non ne dipendono.
Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da $\frac{z_i}{z_j}$ è dato da:

$$\exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(pq)^{sn}-(pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)}\right) = \exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(y)^n-(\frac{pq}{y})^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

Avendo posto $(pq)^s = y$

L'identità 0.1 si applica immediatamente ai termini indipendenti da z_i e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da z_i consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$((pq)^{sn}-(pq)^{(1-s)n})\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left((pq)^{sn}\frac{z_i^n}{z_j^n}-(pq)^{(1-s)n}\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+\left((pq)^{sn}\frac{z_j^n}{z_i^n}-(pq)^{(1-s)n}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)$$

il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s \frac{z_i}{z_j} \quad y' = (pq)^s \frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 0.1 utilizzando le variabili y, y' e il contributo è pari a

$$\prod_{1 \le i < j \le N_c} \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

Riassumento il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c - 1} \prod_{1 \le i < j \le N_c} \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_i}{z_j} \right) \Gamma_e \left((pq)^s \frac{z_j}{z_i} \right)$$

Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscalamento di y e $\tilde{y}$):

$$\prod_{\substack{1 \le j \le N_c \\ 1 \le i \le N_f}} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left[\left((y_i z_j)^n - (\frac{pq}{y_i z_j})^n \right) + \left(\frac{1}{(\tilde{y}_i z_j)^n} - (pq \tilde{y}_i z_j)^n \right) \right] \right]$$

Identificando $t = y_i z_j$ e $t' = (\tilde{y}_i z_j)^{-1}$ con gli argomenti delle Γ_e nell'identità 0.1 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1 \le j \le N_c \\ 1 \le i \le N_f}} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})$$

0.1.1 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$\begin{aligned}
& I_{El}(p, q, y, \tilde{y}, v) = \\
& \frac{1}{N_c!} (p;p)^{N_c - 1} (q;q)^{N_c - 1} \Gamma_e((pq)^s; p, q)^{N_c - 1} \\
& \int_{T^{N_c - 1}} \left(\prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta \left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1 \right) \prod_{1 \le i < j \le N_c} \frac{\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\big) \Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q) \Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)} \\
& \prod_{1 \le j \le N_c} \prod_{1 \le i \le N_f} \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v y_i z_j) \Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}} v^{-1} \tilde{y}_i^{-1} z_j^{-1})
\end{aligned}$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

0.1.2 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari "potenziali chimici" si può calcolare la funzione di partizione, nel limite $r \to 0$.

$$p = e^{2\pi i r\omega_1} \quad q = e^{2\pi i r\omega_2} \quad z_i = e^{2\pi i r\sigma_i}$$
$$y_a = e^{2\pi i r m_a} \quad y_a = e^{2\pi i r\tilde{m}_a} \quad v = e^{2\pi i r m_B}$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [?] pag 30)

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} =$$
$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

con $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Si possono riscalare le variabili in modo da sistemare il fattore di π all'esponente:

$$z \to \pi z \quad \omega_1 \to \pi\omega_1 \quad \omega_2 \to \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi rz}; e^{i\pi r\omega_1}, e^{i\pi r\omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z)-(\pi\omega))}\Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)}\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di Γ_h: la sua definizione infatti è (cft [?] 2.2.4):

$$\begin{aligned}\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2) = &\exp\left(\pi i\frac{(2z-\omega_1-\omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2}\right)\\ &\frac{(\exp(-2\pi i(z-\omega_2)/\omega_1);\exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi z/\omega_2);\exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty}\\ &= \Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2)\end{aligned}$$

Funzione di partizione

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per $r \to 0$ utilizzando le ridefinizioni delle fugacità in 0.1.2. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che $s = \frac{\Delta_X}{2}$

$$\lim_{r\to 0^+} \Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} = \lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1} = \lim_{r\to 0^+} \Gamma_e(e^{2\pi i r\Delta_X\omega})^{N_c-1} =$$
$$= \left[e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_x-\omega)}\right]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}$$

$$\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big) =$$

$$= \Gamma_e\Big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_i-\sigma j)}\Big)\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_j-\sigma_i)}\Big) =$$

$$= \Gamma_e\Big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\Big)\Gamma_e\Big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\Big)$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_x+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_x-1)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)$$

$$\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big) = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i) =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)$$

$$\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}by_iz_j})\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}b^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1}}) =$$

$$= \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2\pi i r\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(m_i+m_B+\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi i r\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j)}) =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j-\omega)+(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j-\omega))}$$

$$\Gamma_h(\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j)\Gamma_h(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j) =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i)}\ \Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i-\sigma_j)$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$\mu_i = \omega\Delta+m_i+m_B \quad \nu_i = \omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B$$

Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):

$$\omega(\Delta_X-1)(N_c-1)+\frac{N_c(N_c-1)}{2}2\omega(\Delta_x-1)-\frac{N_c(N_c-1)}{2}(-2\omega)+$$

$$+ (N_c-1\ \text{(qualcosa)})+N_c(\sum_i^{N_f}2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i =$$

$$=\omega(\Delta_X-1)(N_c^2-1)+(N_c^2-1)\omega+N_cN_f2\omega(\Delta-1)+N_c(\sum_i^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate $z_i = e^{2\pi i r\sigma_i}$:

$$\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\ \delta(\prod_{i=1}^{N_c}z_i-1)$$

Il determinante della trasformazione è

$$\det\left(\frac{\partial z_i}{\partial \sigma_j}\right) = (2\pi i r)^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} z_i \quad \longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N_c} \frac{dz_i}{2\pi i} = r^{N_c} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i$$

La *delta function* diventa:

$$\delta\Big(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\Big) = \delta\big(e^{2\pi i r \sum \sigma_i} - 1\big) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{((2\pi i r)e^{2\pi i r(\sum \sigma_i)}}\right)^{N_c} \delta(\sum \sigma_i) \quad (0.1.12)$$

Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer)

$$\begin{aligned} Z_{el}(\mu_i, \nu_i) = & \frac{1}{(2\ \pi i)^{N_c}} \frac{1}{N_c!} \Gamma_h(\Delta_X \omega; \omega_1, \omega_2)^{N_c - 1} \int_{T^{N_c-1}} \prod_{i=1}^{N_c} d\sigma_i \, \delta(\sum_i \sigma_i) \\ & e^{-2\pi i r N_c \sum \sigma_i} \prod_{1 \le i < j \le N_c} \frac{\Gamma_h(\Delta_X \omega \pm (\sigma_i - \sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i - \sigma_j))} \prod_{i=1}^{N_f} \prod_{j=1}^{N_c} \Gamma_h(\mu_i + \sigma_j) \Gamma_h(\nu_i - \sigma_j) \end{aligned}$$

usando la convenzione $\Gamma_h(\pm x) = \Gamma_h(x)\Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale η impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$\frac{1}{2} \sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(N_c \Delta_X + (N_f + 1)) \quad (0.1.13)$$

Masse reali e flow senza η

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di $SU(N_f+1)^2 \times U(1)_B \to SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$:

$$\mu = \left(\begin{array}{cccc|c} m_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m - m_A N_f \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cccc|c} m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B + \omega\Delta_m \end{array}\right)$$

dove valgono le condizioni:

$$m_A N_f + \sum m_a = 0$$

La stessa cosa si fa per $SU(N_f)_R$

$$\nu = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f \end{array}\right)$$
$$+ \left(\begin{array}{cccc|c} -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega\Delta_m \end{array}\right)$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).
Il valore di m_A è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un $U(1)$ "diagonale".
NB: $U(1)_A$ mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi N_f sapori e l'ultimo (Δ e Δ_m).

NB: da [**?**] (5.28): Date masse m_a e $\tilde{m}_a$ per Q e $\tilde{Q}$, abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - m_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + m_a)$$

Limite per $m \to \infty$

Per fare il limite $m \to \infty$ utilizziamo la seguente identità [**?**] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\lim_{m\to\infty} \Gamma_h(\omega\Delta + \sigma_i + M + m) =$$
$$\exp\left(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left([\omega(\Delta-1) + \sigma_i + (m+M)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}\right)\right)$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp\Bigg(\text{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \\
&\quad +(m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}]\Bigg) \\
\Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp\Bigg(\text{sign}(-m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \\
&\quad (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{12}]\Bigg)
\end{aligned}$$

Per via del fattore $\text{sign}(\pm m)$ i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4\,\omega(\Delta_M - 1)(m + \sigma_i + m_B) - 4(m_a N_f)(\sigma_i + m + m_B)\right]\right] = \\
&= \exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\right]\right]
\end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{N_c} \exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\right]\right] = \\
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f\big)\right]\right]
\end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a $\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i$ può essere inglobato nella $\delta(\sum\sigma_i)$.
Definendo la funzione $c(x) = e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1\omega_2}}$ i contributi diventano:

$$c(4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\, c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f\big)$$

Utilizziamo la condizione 0.1.13 utilizzando questa assegnazione delle masse, ossia:

$$\frac{1}{2}\sum_a \mu_a + \nu_a = \omega(N_c\Delta_X + N_f + 1) \;=\; N_f\omega\Delta + \omega\Delta_M \tag{0.1.14}$$

Utilizziamo questa relazione nell'esponenziale precedente (in modo da non avere termini che dipendono dal campo che ha massa che tende a infinito):

$$c(4N_c(m+m_B)(\omega(1-\Delta)-N_c\Delta_X-m_aN_f)\,c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega((1-\Delta)-N_c\Delta_X-m_aN_f)\big)$$

$$c(4N_c(m+m_B)(-\omega(\Delta-1)+N_c\Delta_X+m_aN_f)\,c(4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(-\omega((\Delta-1)+N_c\Delta_X+m_aN_f)\big)$$

0.2 Teoria Magnetica

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$): È DIVERSO DA DOLAN-OSBORN–¿ FLAVOR DEI QUARK SBAGLIATO: $y- > y^{-}1$ per il primo quark
E MESONI SBAGLIATI (riscritto l'indice dalla definizione)

$$\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&\quad -\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^{s}-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-1\big)+ \\
&\quad +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(y)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})+ \\
&\quad +(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\Bigg)+ \\
&\quad \sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{\frac{1}{2}2(r+ls)}p_{N_f}(y)p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})-(pq)^{1-\frac{1}{2}2(r+sl)}p_{N_f}(y^{-1}p_{N_f}\tilde{y}\right)
\end{aligned}$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&i_M(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{i,j}^{\tilde{N}_c}\tilde{z}_i\tilde{z}_j^{-1}-1\Big)+ \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg[\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i\,\tilde{z}_j^{-1}+ \\
&+(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Bigg)+ \\
&\sum_i^{N_f}\sum_j^{N_f}\sum_{l=0}^{k-1}\Bigg((pq)^{r+sl}y_i\tilde{y}_j^{-1}-(pq)^{1-(r+sl)}y_i^{-1}\tilde{y}_i\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni (solo flavour nessun colore).

Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$
\alpha = \frac{1}{2}r
$$

L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$
\begin{aligned}
i_M^{Chiral}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = +\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\Bigg(&(p\,q)^{\alpha}\,\tilde{v}\,y_i\,\tilde{z}_j-(p\,q)^{1-\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,y_i^{-1}\,\tilde{z}_j^{-1}+ \\
&+(p\,q)^{\alpha}\,\frac{1}{\tilde{v}}\,(\tilde{y}_i\,)\,(\tilde{z}_j^{-1})-(p\,q)^{1-\alpha}\,\tilde{v}\,\tilde{y}_i^{-1}\,\tilde{z}_j\Bigg)+
\end{aligned}
$$

Esponenziamo separatemente i primi due termini dagli ultimi due:

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}i_M^{Chiral}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n,\tilde{z}^n)\right) = \\
&\exp\left(\sum_n^{\infty}\sum_i^{N_f}\sum_j^{\tilde{N}_c}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big((p\,q)^{\alpha n}\,\tilde{v}^n\,y_i^n\,\tilde{z}_j^n-(p\,q)^{(1-\alpha)n}\,\tilde{v}^{-n}\,y_i^{-n}\,\tilde{z}_j^{-n}\big)\right)
\end{aligned}
$$

facciamo il cambio di variabile $(pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j = t$

$$
=\prod_i^{N_f}\prod_j^{\tilde{N}_c}\exp\left(\sum_n^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\big(t^n-(\frac{pq}{t})^n\big)\right)
$$

A questo punto si utilizza l'identità 0.1 e otteniamo così:

$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{\tilde{N}_c}\Gamma_e(t;p,q)=\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q) \tag{0.2.1}$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}}\tilde{y}_i z_j^{-1}(pq)^{\alpha}=t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di α):

$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{\tilde{N}_c}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z}_j^{-1};p,q) \tag{0.2.2}$$

Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolto come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è $R_M = 2R_Q + R_X j$ dove j indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone. Utilizzo $m_{ij} = y_i\tilde{y}_j$ (Seconda formula è da Dolan Osborn, inutilmente complicata, equivale alla mia (la prima))

$$\begin{aligned} i_M^{Mesons}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) &= \frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{N_f}\sum_{l=0}^{k-1}\left((pq)^{(r+ls)}m_{ij}-(pq)^{1-(r+ls)}m_{ij}^{-1}\right)= \\ &= \frac{1}{(1-p)(1-q)}\frac{1-(pq)^{1-s}}{1-(pq)^{s}}\sum_{i}^{N_f}\sum_{j}^{N_f}\left((pq)^{r}m_{ij}-(pq)^{2s-r}m_{ij}^{-1}\right) \end{aligned}$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\exp\left(\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n}i_M^{Meson}(p^n,q^n,\tilde{v}^n,y^n,\tilde{y}^n)\right)=$$
$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\sum_{n}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left((pq)^{(r+ls)n}m_{ij}^{n}-(pq)^{(1-(r+ls)n}m_{ij}^{-n}\right)\right)$$

Ponendo ora $(pq)^{r+sl} m_{ij} = y$:

$$\exp\left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n)\right) =$$

$$\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left(y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n}\right)\right)$$

$$= \prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls}; p, q)$$

0.2.1 Indice e funzione di partizione

Espressione dell'indice

L'indice superconforme per la teoria magnetica è dato da ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$I_{Mag}(p, q, y, \tilde{y}, \tilde{v}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{N}_c!}(p;p)^{\tilde{N}_c - 1}(q;q)^{\tilde{N}_c - 1}\,\Gamma_e((pq)^s; p, q)^{\tilde{N}_c - 1}\left(\prod_i^{N_f}\prod_j^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls} y_i \tilde{y_j}^{-1}; p, q)\right)$$

$$\int_{T^{\tilde{N_c}-1}}\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\right)\delta\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} z_i - 1\right)\prod_{1\le i<j\le \tilde{N}_c}\frac{\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j}; p, q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i}; p, q)}$$

$$\prod_{1\le j\le \tilde{N}_c}\ \prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v} y_i^{-1}\tilde{z}_j; p, q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i \tilde{z_j}^{-1}; p, q)$$

dove r è la R-Carica del quark duale e $s = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\Delta$.

Funzione di partizione

Come fatto per la teoria elettrica si riduce l'indice superconforme alla funzione di partizione della teoria. I contributi del campo vettoriale e del campo chirale nell'aggiunta sono espressioni identiche (in funzione del nuovo numero di colori ($\tilde{N}_c$).

Mesoni

Il contributo dei mesoni è dato da:

$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e((pq)^{r+ls}y_i\tilde{y_j}^{-1};p,q) =$$

$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_e\big(\exp(2\pi ir[(2\omega)(r+ls)+(m_i-\tilde{m}_j)]);p,q\big) =$$

$$\stackrel{r\to 0}{\sim}\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2\omega(r+ls)+m_i-\tilde{m}_j-\omega\big)\right)\Gamma_h\big(\omega(2\Delta+\Delta_X)+m_i+\tilde{m}_j\big) =$$

$$=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(N_f^2\Big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(r+ls-1)\Big)+N_f\big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\big)\big)\right)$$

$$\prod_{i}^{N_f}\prod_{j}^{N_f}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma_h\big(\omega(2\Delta+\Delta_X)+m_i+\tilde{m}_j\big)$$

Chirali fondamentali

Per i chirali nella fondamentale abbiamo ($r=\Delta$):

$$\prod_{1\le j\le\tilde{N}_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}y_i^{-1}\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z_j}^{-1};p,q) =$$

$$=\prod_{1\le j\le\tilde{N}_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}r)+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big);p,q)$$

$$\Gamma_e(\exp\big(2\omega(\frac{1}{2}r)-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big);p,q) =$$

$$\stackrel{r\to 0}{\sim}\prod_{1\le j\le\tilde{N}_c}\prod_{1\le i\le N_f}\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\Big(\big(\omega(\Delta-1)+\tilde{m_B}-m_i+\tilde{\sigma_j}\big)+\big(\omega(\Delta-1)-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big)\Big)\right)$$

$$\Gamma_h\big(\omega\Delta+\tilde{m_B}+m_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\omega\Delta-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i-\tilde{\sigma_j}\big) =$$

$$=\exp\left(\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}\big(2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta-1)+\tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)\big)\right)\Gamma_h\big(\mu_i+\tilde{\sigma_j}\big)\Gamma_h\big(\nu_i-\tilde{\sigma_j}\big)$$

Dove abbiamo definito le masse reali

$$\mu_i=\omega\Delta+\tilde{m_B}+m_i \qquad \nu_i=\omega\Delta-\tilde{m_B}+\tilde{m}_i$$

Campo di gauge e materia nell'aggiunta

Come detto precedentemente i contributi sono come nel caso elettrico:

$$\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big)^{N_c-1}=\Gamma_e\big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}\big)^{N_c-1}=\Gamma_e\big(e^{2\pi ir\Delta_X\omega}\big)^{N_c-1}=$$

$$=\big[e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_x-\omega)}\big]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big) = \\
&= \Gamma_e\big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_i - \sigma j)}\big)\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi i r\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi i r(\sigma_j-\sigma_i)}\big) = \\
&= \Gamma_e\big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi i r(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\big) \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_x+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i) \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_x-1)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big) &= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i) = \\
&= e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)
\end{aligned}
$$

Attenzione che l'ultimo termine entra nella funzione di partizione al denominatore.

0.2.2 Contributi divergenti

Cerchiamo ora di mettere insieme tutti i contributi divergenti ottenuti dal limite per $r \to 0$. Essendo le 't Hooft anomalies per anomalie gravitazionali, devono matchare con il corrispettivo elettrico.
Scriviamo solo l'esponente (a meno di $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):
C'E' DA FARE ANCORA IL CONTRIBUTO DEI POCHHAMMER!!

$$
\overbrace{(\tilde{N}_c-1)\text{Q-pochhammer}+(2\omega)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2}}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_x-1)(\tilde{N}_c-1)+(2\omega(\Delta_x-1)\frac{\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}{2}}^{\text{Adj Chiral}})+
$$

$$
\overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta-1)+\tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}}+\overbrace{N_f^2\big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(\Delta+l\frac{\Delta_X}{2}-1)\big)+N_f\big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\big)}^{\text{Mesons}}=
$$

$$
=\overbrace{(\tilde{N}_c-1)\text{Q-pochhammer}+\omega\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_x-1)(\tilde{N}_c^2-1)}^{\text{Adj Chiral}}+
$$

$$
\overbrace{2N_f\tilde{N}_c\omega(\Delta-1)+\tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}}+\overbrace{N_f^2\big(\sum_{l=0}^{k-1}2\omega(\Delta+l\frac{\Delta_X}{2}-1)\big)+N_f\big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\big)}^{\text{Mesons}}
$$

Per calcolare il contributo dato dai mesoni è sufficiente notare che:

$$
\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Nel caso del mesone, la somma va fino a $k-1$:

$$
N_f^2 2\omega(\Delta-1)k+\omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}+N_f\big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\big)
$$

$$
\begin{aligned}
= &\overbrace{(\tilde{N}_c-1)\text{Q-pochhammer}+\omega\tilde{N}_c(\tilde{N}_c-1)}^{\text{Adj Vector}}+\overbrace{(\omega(\Delta_x-1)(\tilde{N}_c^2-1)}^{\text{Adj Chiral}}+\\
&\overbrace{2\tilde{N}_f N_c\omega(\Delta-1)+\tilde{N}_c\big(\sum_{i=1}^{N_f}-m_i+\tilde{m}_i\big)}^{\text{Fond Chirals}}+\overbrace{N_f^2 2\omega(\Delta-1)k+\omega\Delta_X\frac{(k-1)k}{2}+N_f\big(\sum_{i}^{N_f}m_i-\tilde{m}_i\big)}^{\text{Mesons}}
\end{aligned}
$$