Prepared for submission to JHEP

Note per riduzione dualità Kutasov-Schwimmer 4d $\rightarrow$ 3d

Carlo Sana

Indice

Capitolo 1

Indici superconformi e funzioni di partizione

1.1 Teoria Elettrica

L'indice superconforme della teoria elettrica di Kutasov-Schwimmer ($SU(N_C) \times SU(N_f)_L) \times SU(N_f)_R) \times U(1)_B)$ è dato da (vedi [2])

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\big(p_{N_c}(z)\,p_{N_c}(z^{-1})-1\big) \\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(y)\,p_{N_c}(z)-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(y^{-1})\,p_{N_c}(z^{-1}) \\
&\qquad\qquad+(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,p_{N_f}(\tilde{y}\,)\,p_{N_c}(z^{-1})-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\,p_{N_c}(z)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

I polinomi sono definiti come

$$
p_{N_c}(x)=\sum_i^{N_c} x_i \qquad p_{N_c}(x^{-1})=\sum_i^{N_c}\frac{1}{x_i}
$$

Esplicitando i polinomi si ottiene

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,v,y,\tilde{y},z) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\Big(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}-1\Big)\\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Bigg((p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,v\,y_i\,z_j-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,y_i^{-1}\,z_j^{-1}\Big)\\
&\qquad\qquad+(p\,q)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{1}{v}\,\tilde{y}_i\,z_j^{-1}-(p\,q)^{1-\frac{1}{2}r}\,v\,\tilde{y}_i^{-1}\,z_j\Bigg)
\end{aligned}
$$

riscalando $(pq)^{\frac{1}{2}r}vy\to y$ e $(pq)^{-\frac{1}{2}r}v\tilde{y}\to\tilde{y}$:

$$
\begin{aligned}
&i_E(p,q,y,\tilde{y},y) = \\
&-\left(\frac{p}{1-p}+\frac{q}{1-q}-\frac{1}{(1-p)(1-q)}\big((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\big)\right)\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}z_i/z_j-1\right)\\
&+\frac{1}{(1-p)(1-q)}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_c}\Big(\big(y_i-p\,q\,\tilde{y}_i\big)z_j+\big(\tilde{y}_i^{-1}-p\,q\,y_i^{-1}\big)z_j^{-1}\Big)
\end{aligned}
\tag{1.1.2}
$$

dove R_q e R_X sono le R-cariche della materia (nella fondamentale e nell'aggiunta).

$$
R_Q = 1-\frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}\,,\qquad s=\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}R_X \tag{1.1.3}
$$

Si nota che questa scelta di R-Carica è stata fatta imponendo che la R-simmetria sia non anomala in 4D. In 3D la R-simmetria si può mixare con le altre simmetrie e le cariche non sono più vincolate in questo modo (ok?).
L'indice superconforme è definito come:

$$
I_E(p,q,v,y,\tilde{y}) = \int_{SU(N_c)} d\mu(z)\,\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E(p^n,q^n,v^n,y^n,\tilde{y}^n,z^n)\right)
$$

L'integral sul gruppo $SU(N_c)$ può essere scritto come integrale sulla Cartan del gruppo attraverso:

$$
\int_{SU(N_c)} d\mu(z)\,f(z) = \frac{1}{N_c!}\int_{T^{N_c-1}}\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\Delta(z)\Delta(z^{-1})f(z)\Big|_{\prod_{i=1}^{N_c}z_i=1} \tag{1.1.4}
$$

e dove $\Delta(z)$ è il determinante di Vandermonde:

$$
\Delta(z) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\ne j}}(z_i-z_j) = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\ne j}}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)z_j = \prod_{\substack{1\le i,j<\le N_c\\ i\ne j}}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)
$$

L'ultima equivalenza è dovuta al vincolo $\prod_{i=1}^{N_c} z_i = 1$.
Ogni termine dell'indice superconforme a singola particella i_E si fattorizza nell'indice "completo" I_E essendo all'interno di un esponenziale.
s

Contributo dalla parte vettoriale

Abbiamo per la parte vettoriale (nell'aggiunta):

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^{Vett}(p^n, q^n, z^n)\right) \stackrel{def}{=}$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{1\leq i,j\leq N_c} \frac{z_i^n}{z_j^n}\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n}\right) + \left(\sum_{i=1}^{N_c} 1\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n}\right) + \left(N_c\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right)\right]\right.$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(N_c - 1\right)\right) =$$

$$= \left[\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n} + \frac{q^n}{1-q^n}\right)\right)\right]^{N_c - 1}$$

$$\left[\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\, i_E^V(p^n, q^n)\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)\right]\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\, i_E^V(p^n, q^n)\right)\right]^{N_c - 1} \tag{1.1.5}$$

Da questi termini si ottengono le funzioni Γ_e attraverso le seguenti identità non banali:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} i_E^V(p^n, q^n)\right)\left(z^n + z^{-n}\right) = \frac{\theta(z;p)\theta(z;q)}{1-z^2} \tag{1.1.6}$$

$$= \frac{1}{(1-z)(1-z^{-1})\Gamma_e(z;p,q)\Gamma_e(z^{-1};p,q)} \tag{1.1.7}$$

$$\tag{1.1.8}$$

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}i_E^V(p^n,q^n)\right)=(p;p)(q;q) \tag{1.1.9}$$

$$\text{dove}\quad i_E^V(p^n,q^n)\;=\;-\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right) \tag{1.1.10}$$

Le funzioni ipergeometriche sono definite attraverso:

$$\begin{aligned}\Gamma_e(z;p,q)&=\prod_{i,j\geq 0}\frac{1-y^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-yp^jq^k}\\ \theta(z;p)&=\prod_{j\geq 0}(1-zp^j)(1-z^{-1}p^{j+1})\\ (x;p)&=\prod_{j\geq 0}(1-xp^j)\end{aligned}$$

L'identità 1.1.9 si utilizza per l'ultimo termine dell'indice e applicandola direttamente si trova:

$$(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}$$

Prima di utilizzare l'identità 1.1.7 è necessario considerare che:

$$\prod_{\substack{1\leq i,j\leq N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}\;=\;\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

A questo punto identificando $\frac{z_i}{z_j}=z$ si applica l'identità 1.1.7 per ogni termine della produttoria e si ottiene:

$$\begin{aligned}&\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{p^n}{1-p^n}+\frac{q^n}{1-q^n}\right)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right)=\\ &\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,i_E^V(p^n,q^n)\left(\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)\right)\\ &\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\frac{1}{\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)\left(1-\frac{z_j}{z_i}\right)\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}\end{aligned}$$

Mettendo insieme i contributi per la parte vettoriali otteniamo:

$$\begin{aligned}&(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\frac{1}{\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)\left(1-\frac{z_j}{z_i}\right)\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}\\ &(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\frac{1}{\Delta(z)\Delta(z^{-1})}\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\frac{1}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}\end{aligned}$$

Contributo della materia nell'aggiunta

Per il calcolo del contributo dato dalla materia nella rappresentazione aggiunta è necessario utilizzare l'identità matematica:

$$\Gamma_e(z;p,q) \;=\; \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n-\left(\frac{pq}{z}\right)^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

L'indice a singola particella dato da questo campo è dato da:

$$\imath_E^{Adj}(p,q,z) = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left((p\,q)^s-(p\,q)^{1-s}\right)\left(\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i}{z_j}\right)-1\right)$$

L'espressione da calcolare è

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\imath_E^{Adj}(p^n,q^n,z^n)\right) \tag{1.1.11}$$

Come è stato fatto per la parte vettoriale, si spezza la serie, sommando solo sulle coppie:

$$\begin{gathered}\left(\sum_{1\le i,j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)-1 = \\ \left(\sum_{1\le i<j\le N_c}\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+N_c-1\end{gathered}$$

Si arriva quindi a

$$I_E^{Adj}(p,q,z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left((p\,q)^{sn}-(p\,q)^{(1-s)n}\right)\left(\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le N_c\\ i\neq j}}\frac{z_i^n}{z_j^n}+\frac{z_j^n}{z_i^n}\right)+N_c-1\right)\right]$$

Come fatto precedentemente, si calcolano separatamente i termini che dipendono da z da quelli che non ne dipendono.
Per calcolare l'indice superconforme è necessario calcolare il *plethystic exponential* come negli altri casi. Per i termini non dipendenti da $\frac{z_i}{z_j}$ è dato da:

$$\exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(pq)^{sn}-(pq)^{(1-s)n}}{(1-p^n)(1-q^n)}\right) = \exp\left((N_c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(y)^n-(\frac{pq}{y})^n}{(1-p^n)(1-q^n)}\right)$$

Avendo posto $\quad (pq)^s = y$

L'identità 1.1 si applica immediatamente ai termini indipendenti da z_i e si ottiene un contributo pari a:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}$$

Per i termini dipendenti da z_i consideriamo il numeratore dell'esponente (il denominatore non viene alterato)

$$((pq)^{sn} - (pq)^{(1-s)n})\left(\frac{z_i^n}{z_j^n} + \frac{z_j^n}{z_i^n}\right)$$

Riarrangiando i 4 termini

$$\left((pq)^{sn}\frac{z_i^n}{z_j^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_j^n}{z_i^n}\right) + \left((pq)^{sn}\frac{z_j^n}{z_i^n} - (pq)^{(1-s)n}\frac{z_i^n}{z_j^n}\right)$$

il cambio di variabile da effettuare è

$$y = (pq)^s\frac{z_i}{z_j} \quad y' = (pq)^s\frac{z_j}{z_i}$$

per i termini nella prima e seconda parentesi rispettivamente. A questo punto si applica l'identità 1.1 utilizzando le variabili y, y' e il contributo è pari a

$$\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\right)$$

Riassumento il contributo dato dalla materia nell'aggiunta è:

$$\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1}\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\right)\Gamma_e\left((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\right)$$

Contributo materia nella fondamentale

Per questo campo è necessario calcolare (dopo il riscalamento di y e $\tilde{y}$):

$$\prod_{\substack{1\leq j\leq N_c\\1\leq i\leq N_f}}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)}\left[\left((y_iz_j)^n - (\frac{pq}{y_iz_j})^n\right) + \left(\frac{1}{\tilde{(}y_iz_j)^n} - \left(pq\tilde{y}_iz_j\right)^n\right)\right]\right]$$

Identificando $t = y_iz_j$ e $t' = (\tilde{y}_iz_j)^{-1}$ con gli argomenti delle Γ_e nell'identità 1.1 si può scrivere il contributo della materia nella fondamentale applicando direttamente l'identità (separatamente per i due termini nelle parentesi) (ricordando il rescaling iniziale):

$$\prod_{\substack{1\leq j\leq N_c\\1\leq i\leq N_f}}\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}}vy_iz_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}}v^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1})$$

1.1.1 Formula per Indice superconforme Kutasov-Schwimmer 4d

Mettendo insieme tutti i contributi e aggiungendo anche l'integrazione sul gruppo di gauge si ottiene l'espressione finale per l'indice superconforme

$$
\begin{aligned}
&I_{El}(p,q,y,\tilde{y},v) = \\
&\frac{1}{N_c!}(p;p)^{N_c-1}(q;q)^{N_c-1}\,\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{N_c-1} \\
&\int_{T^{N_c-1}}\left(\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i z_i}\right)\delta\left(\prod_{i=1}^{N_c} z_i - 1\right)\prod_{1\le i<j\le N_c}\frac{\Gamma_e\big((pq)^s\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big((pq)^s\frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)} \\
&\prod_{1\le j\le N_c}\prod_{1\le i\le N_f}\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}}vy_iz_j)\Gamma_e((pq)^{\frac{R_Q}{2}}v^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1})
\end{aligned}
$$

Il determinante di Vandermonde dovuto alla riduzione dell'integrazione alla Cartan si è cancellato con il contributo dato dalla parte vettoriale.

1.2 Riduzione dell'indice alla funzione di partizione

Parametrizzando i vari "potenziali chimici" si può calcolare la funzione di partizione, nel limite $r \to 0$.

$$
\begin{gathered}
p = e^{2\pi i r\omega_1} \quad q = e^{2\pi i r\omega_2} \quad z_i = e^{2\pi i r\sigma_i} \\
y_a = e^{2\pi i r m_a} \quad y_a = e^{2\pi i r\tilde{m}_a} \quad v = e^{2\pi i r m_B}
\end{gathered}
$$

Identità fondamentale per calcolare questo limite è la seguente (cfr [**?**] pag 30)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2irz};e^{ir\omega_1},e^{ir\omega_2})e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} = \\
&\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2irz};e^{ir\omega_1},e^{ir\omega_2})e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)
\end{aligned}
$$

con $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Si possono riscalare le variabili in modo da sistemare il fattore di π all'esponente:

$$
z \to \pi z \quad \omega_1 \to \pi\omega_1 \quad \omega_2 \to \pi\omega_2
$$

Si ottiene:

$$
\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2i\pi rz};e^{i\pi r\omega_1},e^{i\pi r\omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z)-(\pi\omega))}\Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)}\,\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2)
$$

Considerando la proprietà di rescaling di Γ_h: la sua definizione infatti è (cft [**?**] 2.2.4):

$$
\begin{aligned}
\Gamma_h(z;\omega_1,\omega_2) = & \exp\left(\pi i\frac{(2z-\omega_1-\omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2}\right) \\
& \frac{(\exp(-2\pi i(z-\omega_2)/\omega_1);\exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi z/\omega_2);\exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty} \\
& = \Gamma_h(\pi z;\pi\omega_1,\pi\omega_2)
\end{aligned}
$$

Funzione di partizione

Intanto scrivo le parti non divergenti date dal limite per $r \to 0$ utilizzando le ridefinizioni delle fugacità in 1.2. Di seguito il calcolo dei vari limiti (ricordare che $s = \frac{\Delta_X}{2}$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}})^{N_c-1} = \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)})^{N_c-1} = \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2\pi ir\Delta_X\omega})^{N_c-1} = \\
& = \left[e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(\omega\Delta_x-\omega)}\right]^{N_c-1}\Gamma_h(\omega\Delta_X;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\big)\Gamma_e\big((pq)^{\frac{\Delta_X}{2}}\big(\frac{z_j}{z_i}\big)\big) = \\
& \quad = \Gamma_e\big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_i-\sigma j)}\big)\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi ir\frac{\Delta_X}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(\sigma_j-\sigma_i)}\big) = \\
& \quad = \Gamma_e\big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j}\big)\Gamma_e\big(e^{2\pi ir(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma_i}\big) \\
& \quad = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega\Delta_x+(\sigma_i-\sigma_j)+(\sigma_j-\sigma_i)-2\omega)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i) \\
& \quad = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta_x-1)}\ \Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_i-\sigma j)\Gamma_h(\Delta_X\omega+\sigma_j-\sigma i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+}\Gamma_e\big(\frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big(\frac{z_j}{z_i}\big) = & e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\sigma_j-\sigma_i)+(\sigma_i-\sigma_j)-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i) = \\
& = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(-2\omega)}\ \Gamma_h(\sigma_i-\sigma_j)\Gamma_h(\sigma_j-\sigma_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}by_iz_j})\Gamma_e((pq)^{\frac{\Delta}{2}b^{-1}\tilde{y}_i^{-1}z_j^{-1}}) = \\
& = \lim_{r\to 0^+}\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(m_i+m_B+\sigma_j)})\Gamma_e(e^{2\pi ir\frac{\Delta}{2}(\omega_1+\omega_2)}e^{2\pi ir(-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j)}) = \\
& = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}((\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j-\omega)+(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j-\omega))} \\
& \quad \Gamma_h(\omega\Delta+m_i+m_B+\sigma_j)\Gamma_h(\omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B-\sigma_j) = \\
& = e^{-\frac{i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i)}\ \Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i-\sigma_j)
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo definito le masse reali come

$$\mu_i = \omega\Delta+m_i+m_B \quad \nu_i = \omega\Delta-\tilde{m}_i-m_B$$

Contributo divergente

Il contributo divergente degli esponenziali è uguale a (non scrivo $\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}$):

$$\omega(\Delta_X-1)(N_c-1)+\frac{N_c(N_c-1)}{2}2\omega(\Delta_x-1)-\frac{N_c(N_c-1)}{2}(-2\omega)+$$

$$+(N_c-1 \text{ (da (p;p)..)}+N_c(\sum_i^{N_f}2\omega(\Delta-1)+m_i-\tilde{m}_i=$$

$$=\omega(\Delta_X-1)(N_c^2-1)+(N_c^2-1)\omega+N_cN_f2\omega(\Delta-1)+N_c(\sum_i^{N_f}m_i-\tilde{m}_i)$$

Inoltre c'è da considerare anche la misura e la *delta function* nelle nuove coordinate $z_i=e^{2\pi ir\sigma_i}$:

$$\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi iz_i}\;\delta\big(\prod_{i=1}^{N_c}z_i-1\big)$$

Il determinante della trasformazione è

$$\det\big(\frac{\partial z_i}{\partial\sigma_j}\big)=(2\pi ir)^{N_c}\prod_{i=1}^{N_c}z_i\quad\longrightarrow\quad\prod_{i=1}^{N_c}\frac{dz_i}{2\pi i}\;=\;r^{N_c}\prod_{i=1}^{N_c}d\sigma_i$$

La *delta function* diventa:

$$\delta\big(\prod_{i=1}^{N_c}z_i-1\big)\;=\;\delta\big(e^{2\pi ir\sum\sigma_i}-1\big)\quad\longrightarrow\quad\frac{1}{(2\pi ir)e^{2\pi ir(\sum\sigma_i)}}\,\delta(\sum\sigma_i)\qquad(1.2.1)$$

Funzione di partizione

Considerando le parti finite, la funzione di partizione diventa (Manca il limite dei pochhammer)

$$Z_{el}(\mu_i,\nu_i)=\frac{r^{N_c-1}}{2\;\pi i}\frac{1}{N_c!}\Gamma_h(\Delta_X\omega;\omega_1,\omega_2)^{N_c-1}\int_{T^{N_c-1}}\prod_{i=1}^{N_c}d\sigma_i\,\delta(\sum_i\sigma_i)$$

$$e^{-2\pi ir\sum\sigma_i}\prod_{1\leq i<j\leq N_c}\frac{\Gamma_h(\Delta_X\omega\pm(\sigma_i-\sigma_j))}{\Gamma_h(\pm(\sigma_i-\sigma_j))}\prod_{i=1}^{N_f}\prod_{j=1}^{N_c}\Gamma_h(\mu_i+\sigma_j)\Gamma_h(\nu_i+\sigma_j)$$

usando la convenzione $\Gamma_h(\pm x)=\Gamma_h(x)\Gamma_h(-x)$

Avendo compattificato una direzione, il superpotenziale η impone la seguente condizione sulle masse reali (in 4D, viene portata anche in 3D):

$$\sum_a\mu_a+\nu_a=\omega(N_c\Delta_X+(N_f+1)(1-\Delta))$$

Masse reali e flow senza η

Assegnano le masse reali come segue si ottiene una rottura di $SU(N_f+1)^2 \times U(1)_B \to SU(N_f)^2 \times U(1)_A \times U(1)_B$:

$$\mu = \left(\begin{array}{cccc|c} m_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m - m_A N_f \end{array}\right)$$

$$+ \left(\begin{array}{cccc|c} m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_B + \omega\Delta_m \end{array}\right)$$

dove valgono le condizioni:

$$m_A N_f + \sum m_a = 0$$

La stessa cosa si fa per $SU(N_f)_R$

$$\nu = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{m}_a + m_A & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m - m_A N_f \end{array}\right)$$

$$+ \left(\begin{array}{cccc|c} -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_B + \omega\Delta & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & -m_B + \omega\Delta_m \end{array}\right)$$

le stesse condizioni valgono in questo caso (tildate).
Il valore di m_A è uguale sia per particelle *left* e *right*, e genera per questo motivo un $U(1)$ "diagonale".
NB: $U(1)_A$ mixa con la R-Symmetry e quindi le R-Cariche vanno modificate e sono diverse fra i primi N_f sapori e l'ultimo (Δ e Δ_m).

NB: da [1] (5.28): Date masse m_a e $\tilde{m}_a$ per Q e $\tilde{Q}$, abbiamo:

$$m_V = \frac{1}{2}(m_a - m_a) \quad m_A = \frac{1}{2}(m_a + m_a)$$

Limite per $m \to \infty$

Per fare il limite $m \to \infty$ utilizziamo la seguente identità [1] (formula 5.25 pag 53 vedi def. 5.14)

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \Gamma_h(\omega\Delta + \sigma_i + M + m) = \\
&\exp\left(\operatorname{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left([\omega(\Delta-1) + \sigma_i + (m+M)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\right)\right)
\end{aligned}$$

Applicandola ai due termini che hanno il termine di massa che andrà all'infinito otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_h(\sigma_i + \mu_{N_f+1}(m)) &= \exp\Bigg(\operatorname{sign}(m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) + \sigma_i + \\
&\qquad + (m + m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\big]\Bigg) \\
\Gamma_h(-\sigma_i + \nu_{N_f+1}(m)) &= \exp\Bigg(\operatorname{sign}(-m)\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\big[[\omega(\Delta_M - 1) - \sigma_i + \\
&\qquad (-m - m_B - N_f m_A)]^2 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{12}\big]\Bigg)
\end{aligned}$$

Per via del fattore $\operatorname{sign}(\pm m)$ i quadrati dei vari termini si cancellano (termini che darebbero vita a termini *Chern-Simons*) [Se si integrasse un numero diverso di fermioni L o R, avremmo per l'appunto questi termini]. Rimangono solo *alcuni* doppi prodotti. I termini rimanenti sono:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4\,\omega(\Delta_M - 1)(m + \sigma_i + m_B) - 4(m_a N_f)(\sigma_i + m + m_B)\right]\right] = \\
&= \exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\right]\right]
\end{aligned}$$

Inserendoli all'interno della funzione di partizione si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{N_c}\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\sigma_i(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\right]\right] = \\
&\exp\left[\frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}\left[4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f) + 4\big(\sum_{i=1}^{N_c}\sigma_i\big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f\big)\right]\right]
\end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine possono esser portati fuori dall'integrale, mentre il termine proporzionale a $\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i$ può essere inglobato nella $\delta(\sum \sigma_i)$.
Definendo la funzione $c(x) = e^{\frac{i\pi x}{2\omega_1\omega_2}}$ i contributi diventano:

$$c(4N_c(m + m_B)(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f)\, c(4\Big(\sum_{i=1}^{N_c} \sigma_i\Big)\big(\omega(\Delta_M - 1) - m_a N_f\big)$$

1.3 Indice superconforme per Kutasov-Schwimmer (4d) (Teoria Magnetica)

L'indice superconforme a singolo stato per la teoria magnetica è dato dalla seguente espressione ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$\begin{aligned}
&i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = \\
&\quad - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} \big((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\big) \right) \big(p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z})\, p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - 1\big) + \\
&\quad + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \bigg((p\,q)^{s-\frac{1}{2}r}\, \tilde{v}\, p_{N_f}(y)\, p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) - (p\,q)^{1-s+\frac{1}{2}r}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, p_{N_f}(y^{-1})\, p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) + \\
&\quad + (p\,q)^{s-\frac{1}{2}r}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, p_{N_f}(\tilde{y}\,)\, p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}^{-1}) - (p\,q)^{1-s+\frac{1}{2}r}\, \tilde{v}\, p_{N_f}(\tilde{y}^{-1})\, p_{\tilde{N}_c}(\tilde{z}) \bigg) \\
&\quad \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{\frac{1}{2}2(s+r)} p_{N_f}(y) p_{N_f}(\tilde{y}^{-1}) - (pq)^{1-\frac{1}{2}2(s+r)} p_{N_f}(y^{-1} p_{N_f} \tilde{y} \right)
\end{aligned}$$

Esplicitando i polinomi otteniamo:

$$\begin{aligned}
&i_M(p, q, \tilde{v}, y, \tilde{y}, \tilde{z}) = \\
&\quad - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} - \frac{1}{(1-p)(1-q)} \big((p\,q)^s - (p\,q)^{1-s}\big) \right) \Big(\sum_{i,j}^{\tilde{N}_c} \tilde{z}_i \tilde{z}_j^{-1} - 1\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \left[\sum_{i}^{N_f} \sum_{j}^{\tilde{N}_c} \bigg((p\,q)^{s-\frac{1}{2}r}\, \tilde{v}\, y_i\, \tilde{z}_j - (p\,q)^{1-s+\frac{1}{2}r}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, y_i^{-1}\, \tilde{z}_j^{-1} + \right. \\
&\quad + (p\,q)^{s-\frac{1}{2}r}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, (\tilde{y}_i\,)\, (\tilde{z}_j^{-1}) - (p\,q)^{1-s+\frac{1}{2}r}\, \tilde{v}\, \tilde{y}_i^{-1}\, \tilde{z}_j \bigg) + \\
&\quad \left. \sum_{i}^{N_f} \sum_{j}^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{s+r} y_i \tilde{y}_j^{-1} - (pq)^{1-(s+r)} y_i^{-1} \tilde{y}_i \right) \right]
\end{aligned}$$

La prima riga è identica alla teoria elettrica (eccetto per il numero di colori). Il contributo dai cambi chirali è diverso, essendo le cariche nella nuova teoria diverse. L'ultima riga come è diversa come struttura dalla teoria elettrica, infatti è il contributo all'indice dai mesoni (solo flavour nessun colore).

Contributo dei campi chirali

Definiamo i seguenti cambi di variabile per calcolare più facilmente l'indice.

$$\alpha = s - \frac{1}{2}r \qquad m_{ij} = y_i \tilde{y}_j$$

L'indice superconforme può essere così riscritto come:

$$i_M^{Chiral}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = + \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \Bigg((p\,q)^{\alpha}\, \tilde{v}\, y_i\, \tilde{z}_j - (p\,q)^{1-\alpha}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, y_i^{-1}\, \tilde{z}_j^{-1} + + (p\,q)^{\alpha}\, \frac{1}{\tilde{v}}\, (\tilde{y}_i\,)\, (\tilde{z}_j^{-1}) - (p\,q)^{1-\alpha}\, \tilde{v}\, \tilde{y}_i^{-1}\, \tilde{z}_j \Bigg) +$$

Esponenziamo separatemente i primi due termini dagli ultimi due:

$$\exp\left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} i_M^{Chiral}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n, \tilde{z}^n) \right) =$$

$$\exp\left(\sum_n^{\infty} \sum_i^{N_f} \sum_j^{\tilde{N}_c} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left((p\,q)^{\alpha n}\, \tilde{v}^n\, y_i^n\, \tilde{z}_j^n - (p\,q)^{(1-\alpha)n}\, \tilde{v}^{-n}\, y_i^{-n}\, \tilde{z}_j^{-n} \right) \right)$$

facciamo il cambio di variabile $(pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i\tilde{z}_j = t$

$$= \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \exp\left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left(t^n - \left(\frac{pq}{t}\right)^n \right) \right)$$

A questo punto si utilizza l'identità 1.1 e otteniamo così:

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e(t;p,q) = \prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^{\alpha}\tilde{v}y_i\tilde{z}_j;p,q) \tag{1.3.1}$$

Gli altri due termini si ottengono nello stesso modo, ma facendo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{\tilde{v}}\tilde{y}_i z_j^{-1}(pq)^{\alpha} = t'$$

Ottenendo così il contributo completo dei campi chirali (ripristinando le R-cariche al posto di α):

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{\tilde{N}_c} \Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r}\tilde{v}y_i\tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i\tilde{z}_j{}^{-1};p,q) \tag{1.3.2}$$

Contributo dei mesoni

L'indice di singolo stato dei mesoni è calcolto come i campi chirali, tenendo conto che la loro R-carica è $R_M = 2R_Q + R_X j$ dove j indica l'esponente dell'aggiunta nel mesone. (Seconda formula è da Dolan Osborn, inutilmente complicata, equivale alla mia (la prima))

$$i_M^{Mesons}(p,q,\tilde{v},y,\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{1}{(1-p)(1-q)} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \sum_{l=0}^{k-1} \left((pq)^{(r+ls)} m_{ij} - (pq)^{1-(r+ls)} m_{ij}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)} \frac{1-(pq)^{1-s}}{1-(pq)^s} \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_f} \left((pq)^r m_{ij} - (pq)^{2s-r} m_{ij}^{-1} \right)$$

L'esponenziale da calcolare è:

$$\exp\left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n^{\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left((pq)^{(r+ls)n} m_{ij}^n - (pq)^{(1-(r+ls)n} m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

Ponendo ora $(pq)^{r+sl} = y$:

$$\exp\left(\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} i_M^{Meson}(p^n, q^n, \tilde{v}^n, y^n, \tilde{y}^n) \right) =$$

$$\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \exp \sum_n^{\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{1}{(1-p^n)(1-q^n)} \left(y^n m_{ij}^n - (pq/y)^n m_{ij}^{-n} \right) \right)$$

$$= \prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{r+ls}; p, q)$$

1.3.1 Teoria magnetica

L'indice superconforme per la teoria magnetica è dato da ($\tilde{N}_c = kN_f - N_c$):

$$I_{Mag}(p,q,y,\tilde{y},\tilde{v}) =$$

$$\frac{1}{\tilde{N}_c!}(p;p)^{\tilde{N}_c-1}(q;q)^{\tilde{N}_c-1}\,\Gamma_e((pq)^s;p,q)^{\tilde{N}_c-1}\left(\prod_i^{N_f} \prod_j^{N_f} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma_e((pq)^{R_Q+ls};p,q) \right)$$

$$\int_{T^{\tilde{N_c}-1}} \left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \delta\left(\prod_{i=1}^{\tilde{N}_c} z_i - 1 \right) \prod_{1\le i<j\le \tilde{N}_c} \frac{\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_i}{z_j}\big)\Gamma_e\big((pq)^s \frac{z_j}{z_i}\big)}{\Gamma_e(\frac{z_i}{z_j};p,q)\Gamma_e(\frac{z_j}{z_i};p,q)}$$

$$\prod_{1\le j\le \tilde{N}_c} \prod_{1\le i\le N_f} \Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r}\tilde{v} y_i \tilde{z}_j;p,q)\Gamma_e((pq)^{s-\frac{1}{2}r}\tilde{v}^{-1}\tilde{y}_i \tilde{z}_j{}^{-1};p,q)$$

Bibliografia

[1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.

[2] F.A. Dolan and H. Osborn. Applications of the Superconformal Index for Protected Operators and q-Hypergeometric Identities to N=1 Dual Theories. *Nucl.Phys.*, B818: 137–178, 2009. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2009.01.028.