

L'identità scritta in ( cfr. [van de Bult] pag 30) è :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{12r\omega_1\omega_2}(2z-\omega_1-\omega_2)} = \quad (1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2irz}; e^{ir\omega_1}, e^{ir\omega_2}) e^{\frac{i\pi^2}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} = \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2) \quad (2)$$

con  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ . Si possono riscalar le variabili in modo da sistemare il fattore di  $\pi$  all'esponente:

$$z \rightarrow \pi z \quad \omega_1 \rightarrow \pi\omega_1 \quad \omega_2 \rightarrow \pi\omega_2$$

Si ottiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi rz}; e^{i\pi r\omega_1}, e^{i\pi r\omega_2}) = e^{\frac{-i\pi^2}{6r(\pi\omega_1)(\pi\omega_2)}((\pi z) - (\pi\omega))} \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) = e^{\frac{-i\pi}{6r\omega_1\omega_2}(z-\omega)} \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$$

Considerando la proprietà di rescaling di  $\Gamma_h$ : la sua definizione infatti è ( cft [van de Bult] 2.2.4):

$$\Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2) = \exp \left( \pi i \frac{(2z - \omega_1 - \omega_2)^2}{8\omega_1\omega_2} - \pi i \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{24\omega_1\omega_2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{(\exp(-2\pi i(z - \omega_2)/\omega_1); \exp(2\pi i\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\exp(-2\pi i z/\omega_2); \exp(-2\pi i\omega_1/\omega_2))_\infty} \quad (4)$$

$$= \Gamma_h(\pi z; \pi\omega_1, \pi\omega_2) \quad (5)$$

L'identità utilizzata nel tuo articolo ( [Amariti and Klare, 2014]) e in [Aharony et al., 2013] invece ha un fattore 2 di differenza sulle  $\omega_i$  nell'argomento della  $\Gamma_e$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Gamma_e(e^{2i\pi rz}; e^{i2\pi r\omega_1}, e^{i2\pi r\omega_2}) = e^{-\frac{i\pi}{6\omega_1\omega_2 r}(z-\omega)} \Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$$

La  $\Gamma_h$  non mi sembra essere invariante rispetto a un rescaling delle  $\omega_i$ , lasciando invariata  $z$ .

Inoltre la struttura dell'esponente  $\sim (z - \omega)$  deve rimanere tale, altrimenti il coefficiente di fronte alla parte divergente (generato da  $(z - \omega)$ ), proporzionale alle anomalie) non si annulla.

Per questo sono portato a pensare che la formula di van de Bult sia sbagliata di un fattore 2. Puoi confermare?

# Bibliografia

Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, and Brian Willett. 3d dualities from 4d dualities. *JHEP*, 1307:149, 2013. doi: 10.1007/JHEP07(2013)149.

Antonio Amariti and Claudius Klare. A journey to 3d: exact relations for adjoint SQCD from dimensional reduction. 2014.

Fokko van de Bult.