ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© Гулынина Е.В.[♣]
Северо-Кавказский филиал Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова, г. Минеральные Воды

В качестве примера приложения метода частных решений к решению краевых задач в работе рассматривается внутренняя задача Дирихле для сферы. В постановке задачи рассматривается случай симметрии вращения с расположение начала координат в центре сферы. Результат решения задачи достигается при исследовании совокупности частных решений, найденных использованием свойств полиномов Лежандра.

Ключевые слова: задача Дирихле, сферические функции, полиномы Лежандра, уравнение Лапласа, гармоническая функция.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для сферы. Чтобы избежать излишних условий, ограничимся случаем симметрии вращения, когда значения граничной функции f и искомой функции не зависят от угла φ.

Полагая, что начало координат выбрано в центре сферы и ось z совпадает с осью симметрии, мы можем сформулировать рассматриваемую задачу следующим образом:

Найти функцию $u = u(r, \theta)$ гармоническую в области $R < a$ $r < a$ (a – радиус сферы), непрерывную в замкнутой области $r \le a$ и удовлетворяющую условию $u|_{r=a} = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – заданная функция, непрерывная в замкнутом промежутке $0 \le \theta \le \pi$.

В случае симметрии вращения множитель Ф в формуле

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{1}$$

надлежит выбрать равным единице, в соответствии с чем, следует принять $\mu = 0$. Уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[\upsilon(\upsilon+1)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0, \tag{2}$$

(где $\upsilon(\upsilon + 1)$ – некоторая постоянная, которой равны стороны равенства

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right),$$

♣ Заместитель директора по ученой работе, доцент кафедры Экономических и естественно-научных дисциплин, кандидат физико-математических наук.

полученного в результате разделения переменных в уравнении Лапласа) переходит при этом в уравнение для сферических функций Лежандра

$$(1-z^2)u''-2zu'+\upsilon(\upsilon+1)u=0 \qquad (3)$$

от аргумента $x = \cos\theta$. Общий интеграл последнего уравнения для произвольных υ, принадлежащих области $R(\upsilon) > -1$, может быть записан в виде

$$\Theta = AP_\upsilon(\cos\theta)+BQ_\upsilon(\cos\theta), \qquad (4)$$

где $P_\upsilon(x)$, $Q_\upsilon(x)$ – сферические функции первого и второго рода.

Так как примененное $x = \cos\theta$ изменяется в замкнутом промежутке (-1; 1), а $Q_\upsilon(x) \to \infty$ при $x \to 1$, в то время как $P_\upsilon(x)$ остается конечным, то для того, чтобы получить решение, ограниченное внутри сферы, необходимо прежде всего положить $B = 0$. Далее, так как при всяком υ, отличном от целого положительного числа, $P_\upsilon(x) \to \infty$, когда $x \to -1$, из тех же соображений следует принять $\upsilon = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, единственный решения уравнения (2) при $\mu = 0$, остающиеся ограниченными в замкнутом промежутке $0 \le \theta \le \pi$, соответствуют целым положительным значениям параметра υ и имеют вид

$$\Theta = AP_n(\cos\theta),\;\; n=0,1,2,..., \qquad (5)$$

где $P_n(x)$ – полином Лежандра порядка n.

Уравнение

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}-\upsilon(\upsilon+1)R=0$$

представляет собой уравнение Эйлера и его общий интеграл при $\upsilon \ne -\dfrac{1}{2}$ будет

$$R = Cr^\upsilon + Dr^{-\upsilon-1} \qquad (6)$$

В рассматриваемом случае $\upsilon = n$ и из требования конечности решения в центре сферы вытекает, что надлежит выбрать $D = 0$; поэтому

$$R = Cr^n,\;\; n=0,1,2,... \qquad (7)$$

Таким образом мы получаем следующую совокупность часных решений уравнения Лапласа:

$$u=u_n=M_n r^n P_n(\cos\theta),\;\; n=0,1,2,... \qquad (8)$$

каждое из которых представляет гармоническую функцию внутри сферы $r \le a$. Постоянная совокупность позволяет дать решение задачи, поставленной в начале. Действительно, предположим, что функция $f(\theta)$ может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$\left.\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi) \\ f_n &= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и ряд сходится равномерно в замкнутом промежутке $(0, \pi)$. Тогда, выбирая $M_n = f_n a^{-n}$ и суммируя решения (8), мы получим ряд:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{10}$$

который на основании известной теоремы о последовательностях гармонических функций [1] сходится равномерно в замкнутой области $r \le a$ и представляет собой гармоническую в этой области функцию, принимающую краевое значение $f(\theta)$ при $r \to a$. Таким образом, формула (10) дает решение задачи Дирихле для сферы. Следует заметить, что окончательный результат остается справедливым также в том случае, когда $f(\theta)$ – кусочно-гладкая функция в интервале $(0, \pi)$ и условие равномерной сходимости нарушается в отдельных точках промежутка.

Решение других краевых задач для сферы, соответствующих условиям вида

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_{\sigma} = f; \ \left.\frac{du}{dn}\right|_{\sigma} + hu\Big|_{\sigma} = f.$$

(где f – заданная на поверхности (σ) функция точки, n – внешняя нормаль к этой поверхности, h – некоторое постоянное положительное число), получается из (8) совершенно аналогичным образом.

Исследование общего случая, когда f зависит от двух переменных, $f = f(\theta, \varphi)$, может быть проведено сходным методом, причем подходящая совокупность частных решений уравнения Лапласа [2], гармонических внутри сферы, имеет в этом случае вид:

$$u = u_{m,n} = \left[M_{mn}\cos m\varphi + N_{mn}\sin m\varphi\right] r^n P_n^m(\cos\theta), \tag{11}$$

где $P_n^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра [3], $n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Если заменить в (8) и в (11) множитель r^n линейной комбинацией $(Cr^n + Dr^{-n-1})$, то полученные системы могут быть использованы при решении краевых задач для сферического слоя и области, внешней к сфере, причем в последнем случае надлежит положить $C = 0$.

Список литературы:

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. – М.: Наука, 1974. – 547 с.

2. Араманович И.Г., Левин. В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

© Кушкумбаева А.С.[♣]

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск

В статье описывается решение уравнения Дуффинга. Рассматриваются все виды особых точек, полученные при разных условиях. С помощью определено заданных начальных значений амплитуды, коэффициента, характеризующего восстанавливающую силу и коэффициента вязкого сопротивления решается уравнение осциллятора.

Ключевые слова: осциллятор, уравнение Дуффинга, фазовая плоскость, фазовый портрет, особые точки, сепаратрисы.

Для описания физических процессов в теории колебаний применяются математические модели. Осциллятор Дуффинга или осциллятор с кубической нелинейностью является одной из наиболее распространенных моделей теории колебаний. Осциллятором Дуффинга (англ. *Duffing oscillator*) считается простейшая одномерная нелинейная система. Особенностью осциллятора Дуффинга является возможность получения хаотической динамики. Уравнение впервые было изучено немецким инженером Георгом Дуффингом в 1918 году. Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \tag{1}$$

Это уравнение можно получить, если рассматривать колебания математического маятника при небольших углах отклонения, колебания груза на

[♣] Преподаватель кафедры Прикладной математики и информатики.