# Интуиционистское исчисление второго порядка. Система F

2 ноября 2019 г.

## 1 Импликацонный фрагмент ИИП второго порядка

Назовем *граммаикой ИИП второго порядка* конструкцию вида:

$\mathbf{A} ::= (\mathbf{A}) \mid \mathbf{p} \mid \mathbf{A} \to \mathbf{A} \mid \forall \mathbf{p}.\mathbf{A} \mid \exists \mathbf{p}.\mathbf{A} \mid \perp \mid \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \mid \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$

Стоит отетить, что последние четыре свзки нам не очень важны, так как могут быть выражены через первые четыре.Например $\perp$ это ни что иное как:

$$\forall \mathbf{p}.\mathbf{p}$$

Также добавим два новых правила вывода для кваторов существования и два для всеобщности к уже существующим в ИИВ:

*Для квантора всеобщности:*

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall p.\phi}\ (p \notin FV(\Gamma)) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall p.\phi}{\Gamma \vdash \phi[p:=\Theta]}$$

*И две для квантора существования:*

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[p := \psi]}{\Gamma \vdash \exists p.\phi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \exists p.\phi \qquad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Грамматику ИИП второго порядка с переведенными выше правилами вывода назовем Импликационным фрагментом ИИВ второго порядка

С помощью этих правил вывода можно доказать что $\bot = \forall p.p$ Действительно, воспользовавшись вторым правилом вывода квантора всеобщности для этого выражения мы можем вывести любое другое

С помощью правил вывода также можно доказать, что
$\phi \& \psi \equiv \forall a((\phi \to \psi \to a) \to a)$
$\phi \vee \psi \equiv \forall a((\phi \to a) \to (\psi \to a) \to a)$

## 2 Теория Моделей

∀p.p→p

①

$[\![p]\!] = p$, т. е. $[\![p]\!]^{p=x} = x$

②

$$[\![p \to Q]\!] = \begin{cases} \text{Л}, [\![p]\!] = \text{И}, Q = \text{Л} \\ \text{И}, \text{иначе} \end{cases}$$

③

$$[\![\forall p.Q]\!] = \begin{cases} \text{И}, [\![Q]\!]^{p=\text{л, и}} = \text{И} \\ \text{Л}, \text{иначе} \end{cases}$$

Эта модель корректна, но не полна.

## 3 Система F

Введем определение грамматики в системе F:

$$\Lambda ::= \text{x} \mid \lambda x^{\tau}.\Lambda \mid \Lambda\Lambda \mid (\Lambda) \mid \Lambda\alpha.\Lambda \mid \Lambda\tau$$

где $\Lambda\alpha.\Lambda$ - типовая абстракция, явное указание того, что вместо каких-то типов мы можем подставить любые выражения, а $\Lambda\tau$ это применение типа. Собственно под типом в системе F подразумевается следуующее:

$$\tau = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma ... & (\text{атомарные типы}) \\ \tau \to \tau \\ \forall \alpha.\tau & (\alpha \text{ - переменная}) \end{cases}$$

В системе F определены следующие правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x:\tau \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^{\tau}.M:\tau\to\sigma} \quad (x\notin FV(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.M:\forall\alpha.\sigma} \quad (\alpha\notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M\tau:\sigma[\alpha:=\tau]}$$

*Привидем пример.* Покажем как выглядит в системе F левая проекция. В простом типизированом $\lambda$ - исчислении $\pi_1$ имеет тип $\alpha\&\beta \to \alpha$. В системе F явно указывается, что элементы пары могут быть любыми и пишется сответственно $\forall\alpha.\forall\beta.\alpha\&\beta \to \alpha$. Само выражение для проекции также изменится и будет иметь вид $\pi_1 = \Lambda\alpha.\Lambda\beta.\lambda p^{\alpha\&\beta}.p\alpha\mathrm{T}$

Давайте определим еще несколько понятий из простого $\lambda$-исчисления.
*Начнем с $\beta$-редукции:*

1. Типовая $\beta$-редукция: $(\Lambda\alpha.M^{\sigma})\tau \to_{\beta} M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$
2. Классическая $\beta$-редукция: $(\lambda x^{\sigma}.M)^{\sigma\to\tau}X \to_{\beta} M[x := X] : \tau$

*Выразим еще несколько функций*

1. Не бывваает M:$\perp$
2. Рассмотрим пару <P, Q> ::= $\Lambda\alpha.\lambda z^{\tau\to\sigma\to\alpha}.zPQ$
Проекторы мы рассмотрели ранее.
3. $in_L(M^{\tau}) ::= \Lambda\alpha.\lambda u^{\tau\to\alpha}.\lambda\omega^{\sigma\to\alpha}.uM$
$in_R(M^{\sigma}) ::= \Lambda\alpha.\lambda u^{\tau\to\alpha}.\lambda\omega^{\sigma\to\alpha}.uM$

В системе F задачи о реконструкции, проверке и общезначности типа неразрешимы

Основные теоремы к доказательству:
(1) Чёрч Россер
(2) $\lambda_{(\forall,\to)}$ силно нормализуема
(3) Y комбинатор не типизируем