Algebraische Zahlentheorie II

Gedächtnisprotokoll zur mündlichen Prüfung

21. August 2009 (SS09, RWTH-Aachen)

Florian Weingarten

Prüfer: Prof. Dr. Aloys Krieg (Lehrstuhl A für Mathematik)

Beisitzer: Dipl.-Math. Martin Raum

Prüfungsdauer: 15 Minuten

Prüfungsnote: 1.0

Achtung: Hierbei handelt es sich *nicht* um ein offizielles Prüfungsprotokoll der RWTH sondern um ein privates Gedächtnisprotokoll, das ca. eine Stunde nach der Prüfung angefertigt wurde. Ich habe mit Sicherheit einige Sachen vergessen und gebe natürlich keine Garantie auf Korrektheit.

AK: Fangen wir mal mit Kapitel I aus dem Skript an. Dirichlet Charaktere. Was ist das?
FW: Also, da haben wir zuerst mit abelschen Charakteren angefangen. Das sind einfach nur Gruppenhomomorphismen einer Gruppe G in die Gruppe $\mathbb{C}^*$. Ein Dirichlet Charakter modulo N ist jetzt quasi so etwas wie eine Fortsetzung eines abelschen Charakters auf $\mathbb{Z}_n^*$ auf ganz $\mathbb{Z}$. Man setzt dann $\chi(z) = \chi'(z)$, falls $\mathrm{ggT}(z, N) = 1$ und 0 sonst.
AK: $\mathrm{ggT}(z, N) = 1$. Was heisst das? Für welche z gilt das denn?
FW: Öhh.. Naja, das sind die Einheiten in $\mathbb{Z}_n$.
AK: Genau. Wieviele Dirichlet Charaktere gibt es?
FW: Naja, wir haben gezeigt, dass falls G endlich und abelsch ist, dass dann die Charaktergruppe $\hat{G}$ isomorph ist zu G. In diesem Fall gibt es also genausoviele Charaktere wie Einheiten.
AK: Also?
FW: $\varphi(N)$ viele
AK: Erzählen Sie mal noch etwas mehr über Dirichlet Charaktere.
FW: Hmm. Wir hatten noch eine äquivalente Definition: Dirichlet Charaktere sind genau die periodischen streng multiplikativen Funktionen $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, die diese Eigenschaft mit dem ggT erfüllen, d.h. die gleich 0 sind für z, die nicht teilerfremd zu N sind. Und... Ich glaube in der Übung hatten wir noch gesehen, dass man die Forderung mit dem ggT auch weglassen kann, d.h. dass jede streng multiplikative N-periodische Funktion bereits ein Dirichlet Charakter ist oder die Nullabbildung.
AK: Ööökh.. *Hier war wohl irgendwas nicht ganz richtig. Weiss aber nicht was genau. Er hat dann einfach weiter gemacht.* Erzählen Sie mal noch mehr.
FW: Es gibt da solche Orthogonalitätsrelationen.
AK: Wie sehen die aus?
FW: Das gab es schon für abelsche Charaktere. Wenn wir einen Charakter χ fixieren, und über alle $\chi(g)$ summieren mit $g \in G$, dann ist das immer gleich 0 (ausser für den trivialen Charakter). Wenn man das jetzt auf die Charaktergruppe anwendet, dann bekommt man, dass das gleiche auch funktioniert, wenn man nicht das χ sondern das g fixiert (ausser für $g = 1$).
AK: Und was ist wenn es der triviale Charakter ist?
FW: Dann kommt N raus. Bzw. $\varphi(N)$ bei Dirichlet Charakteren.
AK: Genau. Nennen Sie mal einen nicht-trivialen Dirichlet Charakter modulo 4.
FW: Öööh.. Da würde ich jetzt einen modulo 2 nehmen und den fortsetzen.
AK: Hehe, das geht nicht. Wieviele gibt es modulo 2?
FW: Ach, mist, nur den trivialen.
AK: Was müssen Sie alles festlegen für einen Dirichlet Charakter mod 4?
FW: Die Bilder von 1 und 3.
AK: Warum nicht 2 und 4?
FW: Weil die nicht teilerfremd zu 4 sind.
AK: Okay, also was wählen Sie?
FW: 1 muss auf 1 abgebildet werden. Also muss 3 auf -1, sonst wär der Charakter trivial.
AK: Genau. Ist der jetzt primitiv?
FW: Öööh. Primitiv heißt ja, dass der Führer gleich 4 ist. Ähh...
AK: Erzählen Sie mal etwas über die reellen Dirichlet Charaktere.
FW: Öh. Reell heisst, dass das Bild reell ist?
AK: Genau.
FW: Dann kann es nur 0, 1 oder -1 sein, denn die Bilder sind alles Einheitswurzeln. Hmm. Weiss nicht worauf Sie hinaus wollen.
AK: Denken Sie an Algebraische Zahlentheorie I. An Zahlkörper.
FW: Ah! Ja, man kann jedem algebraischen Zahlkörper einen reellen Dirichlet Charakter zuordnen über die Diskriminante. Das ist dann im wesentlichen das Jacobi-Symbol. Und, äh, man kann dann glaub ich zeigen, dass *alle* primitiven reellen

von dieser Form sind.
AK: Genau. Okay, gehen wir mal zu den Quaternionen. Was ist die Hurwitz-Ordnung?
FW: Das ist eine Art Verallgemeinerung von $\mathbb{Z}$ in den Quaternionen. Die bilden einen Unterring von $\mathbb{H}$. Die Einheitengruppe ist endlich (24). Und, ja, das sind genau die Quaternionen, für die alle vier Komponenten ganz sind oder ganz $+\frac{1}{2}$.
AK: In Algebraische Zahlentheorie I haben wir die ganzen Zahlen definiert über das Minimalpolynom. Geht das hier auch?
FW: Hmmm.
AK: Wie sieht das Minimalpolynom aus?
FW: Also, wir haben gesehen, dass jedes Quaternion Nullstelle eines quadratischen Polynoms ist, nämlich $X^2 - \mathrm{Spur}(z)X + \mathrm{Norm}(z)$.
AK: Was ist Spur und Norm?
FW: Das ist über die Matrixdarstellung definiert. Dann ist Spur gleich $2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ und Norm ist gleich $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Hm, wir haben gezeigt, dass Spur und Norm von Hurwitz-Quaternionen immer ganz sind. Aber ich weiss nicht ob die Umkehrung gilt.
AK: Die gilt nicht. Sie können ganz leicht Elemente angeben, die Norm 1 und Spur 0 haben.
FW: Achja. Klar. Dann nehme ich ein z, dass im Imaginärraum liegt und auf dem Einheitskreis.
AK: Genau. Das mit dem Minimalpolynom klappt also nicht.
FW: Die Hurwitz Quaternionen sind übrigens euklidisch.
AK: Was heisst das denn?
FW: Das heißt im Grunde das gleiche wie im kommutativen Fall, nur dass man so ein q von beiden Seiten braucht. Also, wenn a und b Hurwitz Quaternionen sind, dann gibt es immer q, q', r, r' mit $a = qb + r = bq' + r'$. Und die Norm von r ist dann kleiner als die von b.
Prof. Krieg wollte jetzt noch wissen, warum man die Hurwitz-Quaternionen auch „Hurwitz-Ordnung" nennt. Ich wusste aber nicht genau was eine Ordnung ist (kam auch in der Vorlesung nicht dran). Er hat dann erzählt, dass das sogar eine „Maximal-Ordnung" ist und wollte wissen, was das wohl bedeuten könnte. Habe gesagt, dass damit vermutlich gemeint ist, dass es keine Ordnung gibt die echt größer ist, d.h. für jede andere Ordnung, die die Hurwitz-Quaternionen enthält, gilt bereits, dass sie gleich zu diesen ist. Damit war er dann zufrieden.
AK: Okay, kommen wir mal zu den p-adischen Zahlen. Was ist das?
FW: Also dazu definiert man erstmal den p-Betrag. Wenn wir ein $x \in \mathbb{Q}$ haben, dann kann man das eindeutig schreiben als $x = p^r \frac{a}{b}$, also soviele p's ausklammern wie möglich quasi. Dann definiert man einfach $|0|_p = 0$ und $|x|_p = p^{-r}$. So, jetzt hat man schonmal einen Betrag, der induziert dann eine Metrik und damit definiert man sich dann die ganzen Begriffe aus der Analysis I. Cauchyfolgen, Nullfolgen, etc.. Dann kann man zeigen, dass die Cauchyfolge eine $\mathbb{Q}$-Algebra sind und die Nullfolgen ein Ideal in dem zugehörigen Ring. $\mathbb{Q}_p$ definiert man dann als den Restklassenring nach diesem Ideal. Dann setzt man den p-Betrag fort auf $\mathbb{Q}_p$ indem man den einfach als den Grenzwert der p-Beträge der Folgenglieder eines Elementes aus $\mathbb{Q}_p$ definiert. Und dann kann man zeigen, dass $\mathbb{Q}_p$ bezüglich dieser Norm vollständig ist und dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt und alles ist schön.
AK: Okay, gut. Wie kann man die p-adischen Zahlen denn darstellen?
FW: Das geht ganz ähnlich wie in den reellen Zahlen. Da hat man ja eine Darstellung als Potenzreihe mit unendlich vielen negativen Indizes. Hier macht man das quasi genau andersherum. Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ kann dargestellt werden als $x = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n$, wobei $a_k \in \{0, ..., p-1\}$ ist. Jedes x hat jetzt genau eine Darstellung dieser Form und umgekehrt konvergiert jede Darstellung dieser Form gegen ein Element aus $\mathbb{Q}_p$.
AK: Aha! Machen wir mal ein Beispiel. $N = 0$ und $a_k = 1$. Was ist jetzt?
FW: Dann haben wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$. Wir hatten einen Satz nachdem, anders als in der reellen Analysis, jede Reihe über eine Nullfolge immer konvergiert. p^n ist eine Nullfolge (bzgl. der p-Norm), also konvergiert die.
AK: Wogegen denn?
FW: Hm. Ich glaube das ging über die geometrische Reihe. Das müsste dann $\frac{1}{1-p}$ sein.
AK: Genau. Okay, das soll dann auch reichen. Da brauchen wir auch garnicht lange diskutieren, sie bekommen eine 1,0.

Fazit

Waren wohl im Nachhinein doch recht viele Fragen, die Zeit ging aber sehr sehr schnell rum (und war ja auch sehr kurz). Die Prüfung war, wie nicht anders erwartet, sehr angenehm. Herr Krieg ist ein sehr netter Prüfer und wird nicht böse, wenn man ein paar Kleinigkeiten nicht weiss oder überhört schonmal ein paar kleine Fehler. Mich hat etwas gewundert, dass keine Fragen zu Kettenbrüchen und Farey-Brüchen kamen. Die Fragen zu den Hurwitz-Quaternionen fand ich etwas unerwartet. Insgesamt eine sehr positive Prüfung! :-)