Seminar *Logik, Komplexität, Spiele: Fixpunktlogiken*

Fixpunktlogik mit Zählquantoren

Florian Weingarten

Betreuer:
Dipl.-Inform.
Roman Rabinovich

Lehr und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Erich Grädel
RWTH Aachen

Aachen, 17. Juli 2009

Fixpunktlogik mit Zählquantoren
Inhalt

1. Einführung
   - Motivation: Logiken für Komplexitätsklassen
   - Wiederholung
   - Logiken mit Zählquantoren
2. IFP+C und PTIME
   - Die Logik $\mathcal{C}_k$
   - Das $\mathcal{C}_k$-Spiel
   - Konstruktion von Cai-Fürer-Immerman
   - Folgerungen: IFP+C erfasst PTIME nicht
3. Zusammenfassung und Ausblick

Motivation

Definition

Logik L *erfasst* Komplexitätsklasse C, wenn

- für alle $\psi \in L$, das Model-Checking-Problem für ψ in C ist und
- für alle $\mathcal{K} \in C$, ein $\psi \in L$ existiert mit Mod$(\psi) = \mathcal{K}$.

Motivation

Definition

Logik L *erfasst* Komplexitätsklasse C, wenn

- für alle $\psi \in L$, das Model-Checking-Problem für ψ in C ist und
- für alle $\mathcal{K} \in C$, ein $\psi \in L$ existiert mit $\mathrm{Mod}(\psi) = \mathcal{K}$.

Beispiel

- MSO erfasst über Wortstrukturen die regulären Sprachen (Satz von Büchi, Elgot, Trahktenbrot).
- ESO erfasst über endlichen Strukturen NP (Satz von Fagin).

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst PTIME auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst PTIME auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Frage

Gibt es eine Logik, die PTIME auf **allen** (endlichen) Strukturen erfasst?

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst $\textsc{Ptime}$ auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Frage

Gibt es eine Logik, die $\textsc{Ptime}$ auf **allen** (endlichen) Strukturen erfasst?

Falls...

- ja, dann kann diese nicht stärker als ESO sein.
- nein, dann ist $\textsc{Ptime} \neq \mathrm{NP}$.

Motivation

FO ist zu schwach, um PTIME zu erfassen.

Motivation

FO ist zu schwach, um PTIME zu erfassen.

Beispiel

Zwei in Polynomialzeit entscheidbare Eigenschaften:

(1) Ist ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ zusammenhängend? (Tiefensuche)

(2) Hat das Universum A einer Struktur $\mathfrak{A}$ eine gerade Anzahl von Elementen?

Beide sind nicht in FO ausdrückbar (Beweis z.B. über Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele).

Motivation

FO ist zu schwach, um PTIME zu erfassen.

Beispiel

Zwei in Polynomialzeit entscheidbare Eigenschaften:

(1) Ist ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ zusammenhängend? (Tiefensuche)

(2) Hat das Universum A einer Struktur $\mathfrak{A}$ eine gerade Anzahl von Elementen?

Beide sind nicht in FO ausdrückbar (Beweis z.B. über Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele).

Idee

Erweitere FO um

(1) Rekursion (IFP) und

(2) Zählkonstrukte (FO+C, IFP+C).

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \overline{x})$ induziert inflationären Operator:

$$\begin{array}{rcl} F_\psi : \mathcal{P}(A^k) & \rightarrow & \mathcal{P}(A^k) \\ R & \mapsto & R \cup \{\overline{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \overline{a})\}. \end{array}$$

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \overline{x})$ induziert inflationären Operator:

$$\begin{aligned} F_\psi : \mathcal{P}(A^k) &\rightarrow \mathcal{P}(A^k) \\ R &\mapsto R \cup \{\overline{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \overline{a})\}. \end{aligned}$$

- Folge $(F_\psi^k(\emptyset))_{k \in \mathbb{N}}$ wird stationär, d.h. Fixpunkt existiert (IFP)
- $\mathfrak{A} \models [\text{ifp } R\overline{x}.\psi](\overline{t}) :\Leftrightarrow \overline{t}^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{IFP}(F_\psi)$.

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \overline{x})$ induziert inflationären Operator:

$$\begin{array}{rcl} F_\psi : \mathcal{P}(A^k) & \rightarrow & \mathcal{P}(A^k) \\ R & \mapsto & R \cup \{\overline{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \overline{a})\}. \end{array}$$

- Folge $(F_\psi^k(\emptyset))_{k \in \mathbb{N}}$ wird stationär, d.h. Fixpunkt existiert (IFP)
- $\mathfrak{A} \models [\text{ifp } R\overline{x}.\psi](\overline{t}) :\Leftrightarrow \overline{t}^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{IFP}(F_\psi)$.

Beispiel

$$\psi(u, v) := [\text{ifp } Txy.((x = y) \vee \exists z(Exz \wedge Tzy))](u, v)$$

Zählen

Erweitere Strukturen um *Zahlen*.

Zählen

Erweitere Strukturen um *Zahlen*.

Definition

Sei $\mathfrak{A} = (A, (R_i)^{\mathfrak{A}}_{i \in I})$, $|A| = n$.

$$\mathfrak{A}^* := (\underbrace{A, (R_i)^{\mathfrak{A}}_{i \in I}}_{\text{Punkte}}) \mathbin{\dot\cup} (\underbrace{\{0, 1, ..., n\}, \leq, \min, \max}_{\text{Zahlen}}).$$

Inflationäre Fixpunktlogik mit Zählquantoren (IFP+C)

- Terme über τ (mit Variablen $x, y, z, ...$).
- Terme über $\{\leq, \min, \max\}$ (mit Variablen $\mu, \lambda, \nu, ...$).
- Atomare τ-Formeln und atomare $\{\leq, \min, \max\}$-Formeln.
- $Xt_1...t_k\rho_1...\rho_l$, wobei X Relationsvariable der Stelligkeit (k, l).
- φ, ψ Formeln, dann sind $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$ Formeln.
- φ Formel, dann sind $\exists x\varphi$ und $\exists\mu\varphi$ Formeln.
- φ Formel, μ Variable, dann ist $\exists^{\geq\mu} x\varphi(x)$ Formel.
- $\varphi(X, \overline{x}, \overline{\mu})$ Formel, dann auch $[\text{ifp } \overline{x}\overline{\mu}.\varphi](\bar{t}, \overline{\rho})$.

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\mathsf{ifp}\ X\mu.\underbrace{((\mu = \min) \vee \exists\nu(X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X,\mu)}](\max)$$

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\mathsf{ifp}\ X\mu.\underbrace{((\mu = \min) \vee \exists\nu(X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X,\mu)}](\max)$$

Fixpunktiteration:

- $F_\varphi(R) = \{\ i \mid i = 0$ oder $i = j + 2$ für ein $j \in R\ \}$
- $F_\varphi^1(\emptyset) = \{0\}$
- $F_\varphi^2(\emptyset) = \{0, 2\}$
- $F_\varphi^3(\emptyset) = \{0, 2, 4\}$
- ...
- $F_\varphi^k(\emptyset) = \{\ i \mid i \leq 2k$ und i ist gerade $\}$

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\text{ifp } X\mu.\underbrace{((\mu = \min) \vee \exists\nu(X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X,\mu)}](\max)$$

Fixpunktiteration:

- $F_\varphi(R) = \{\ i \mid i = 0 \text{ oder } i = j + 2 \text{ für ein } j \in R\ \}$
- $F_\varphi^1(\emptyset) = \{0\}$
- $F_\varphi^2(\emptyset) = \{0, 2\}$
- $F_\varphi^3(\emptyset) = \{0, 2, 4\}$
- ...
- $F_\varphi^k(\emptyset) = \{\ i \mid i \leq 2k \text{ und } i \text{ ist gerade}\ \}$

Insgesamt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \max^{\mathfrak{A}^*} \in \mathrm{IFP}(F_\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad |A| \text{ gerade}$$

Ziel

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

IFP+C erfasst PTIME nicht.

Ziel

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

IFP+C erfasst PTIME nicht.

Beweisüberblick

- Neue Logik $\mathcal{C}_k$.
- Spieltheoretische Semantik für $\mathcal{C}_k$.
- Konstruiere Graphen $\mathcal{G}_k$ und $\mathcal{H}_k$, so dass
  - $\mathcal{G}_k$ und $\mathcal{H}_k$ sich in Polynomialzeit unterscheiden lassen und
  - $\mathcal{G}_k$ und $\mathcal{H}_k$ sich durch $\mathcal{C}_k$-Formeln **nicht** unterscheiden lassen.
- Folgerung: IFP+C erfasst PTIME nicht.

Logik $\mathcal{C}_k$

Definition

Wie FO, nur

- maximal k Variablen.
- neue Quantoren: $\exists^{\geq i} x \varphi(x)$ (für jedes $i \in \mathbb{N}$).

Logik $\mathcal{C}_k$

Definition

Wie FO, nur

- maximal k Variablen.
- neue Quantoren: $\exists^{\geq i} x \varphi(x)$ (für jedes $i \in \mathbb{N}$).

Beobachtung

- $\mathcal{C}_k < \mathrm{FO}$.
- Aber: Man braucht mehr Variablen!
- Beispiel: $\exists^{\geq 2} x \varphi(x)$ äquivalent zu $\exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2))$.

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$ und $\mathcal{H} = (V_\mathcal{H}, E_\mathcal{H})$ (mit $V_\mathcal{G} \cap V_\mathcal{H} = \emptyset$).

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$ und $\mathcal{H} = (V_\mathcal{H}, E_\mathcal{H})$ (mit $V_\mathcal{G} \cap V_\mathcal{H} = \emptyset$).

Definition ($\mathcal{C}_k$-Spiel)

Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i.

- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_\mathcal{G}$ oder $V_\mathcal{H}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B.
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A.

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$ und $\mathcal{H} = (V_\mathcal{H}, E_\mathcal{H})$ (mit $V_\mathcal{G} \cap V_\mathcal{H} = \emptyset$).

Definition ($\mathcal{C}_k$-Spiel)

Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i.

- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_\mathcal{G}$ oder $V_\mathcal{H}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B.
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A.

Definition (Spielkonfiguraion, Gewinnbedingung)

- Zwei partielle Funktionen u, v.
- $u(x_i) = g$: Auf dem Knoten g im Graphen $\mathcal{G}$ liegt ein Stein x_i.

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$ und $\mathcal{H} = (V_\mathcal{H}, E_\mathcal{H})$ (mit $V_\mathcal{G} \cap V_\mathcal{H} = \emptyset$).

Definition ($\mathcal{C}_k$-Spiel)

Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i.

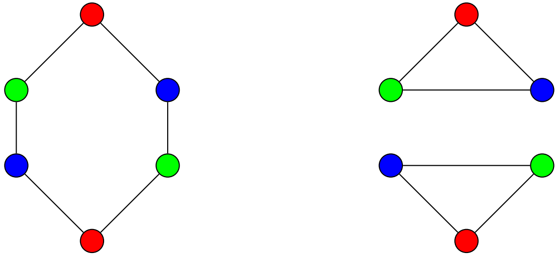
- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_\mathcal{G}$ oder $V_\mathcal{H}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B.
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A.

Definition (Spielkonfiguraion, Gewinnbedingung)

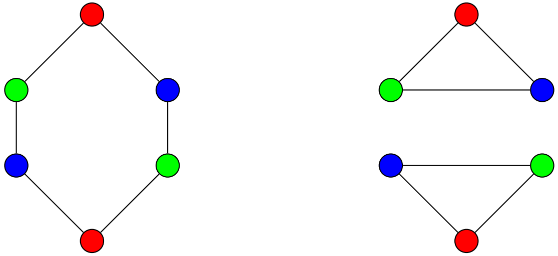
- Zwei partielle Funktionen u, v.
- $u(x_i) = g$: Auf dem Knoten g im Graphen $\mathcal{G}$ liegt ein Stein x_i.

- I gewinnt, wenn $u(x_i) \mapsto v(x_i)$ kein Isomorphismus ist (oder wenn II kein B findet).
- „Spieler I will die Graphen unterscheiden, Spieler II will sie gleich aussehen lassen.“

Beispiel zum C_k-Spiel



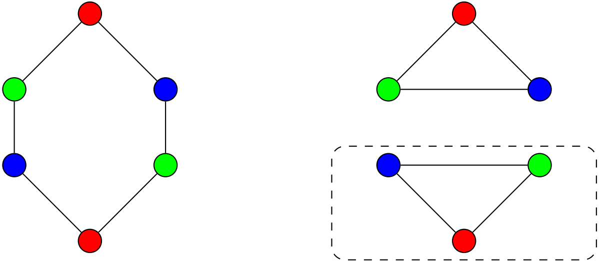
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.

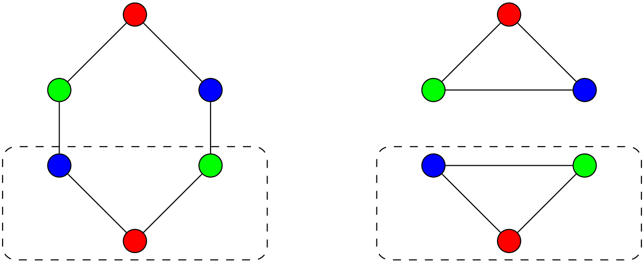
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.

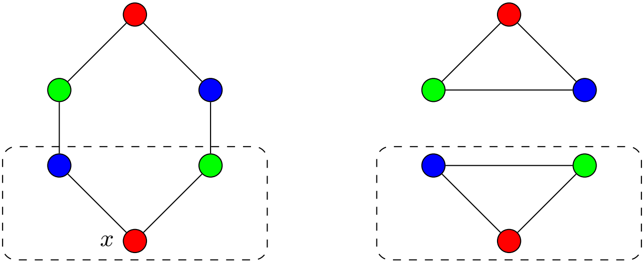
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

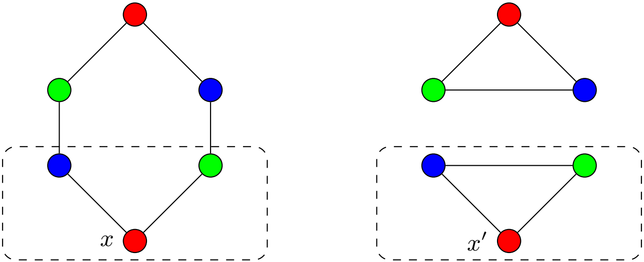
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

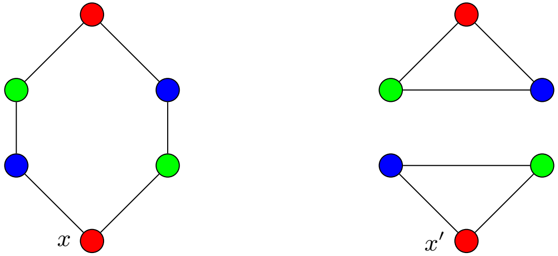
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

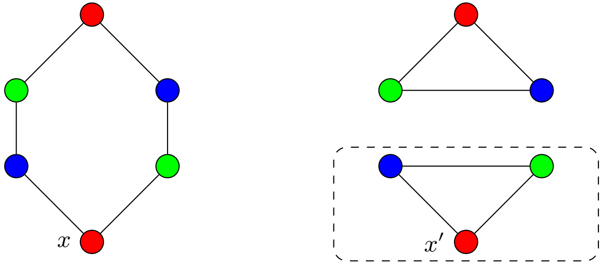
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \land Eyz \land Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

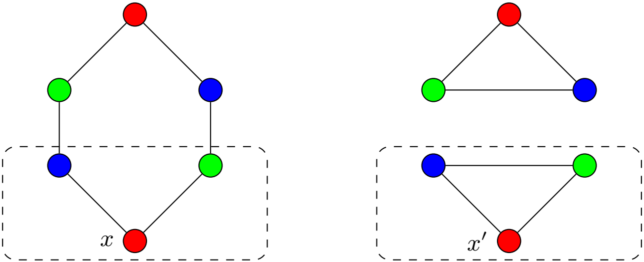
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

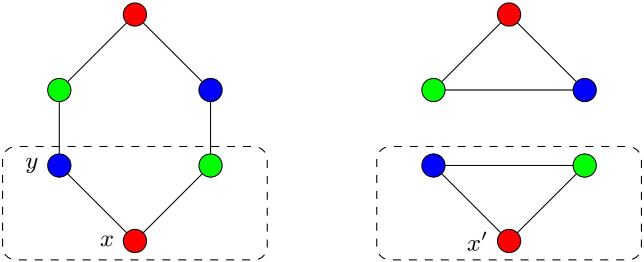
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

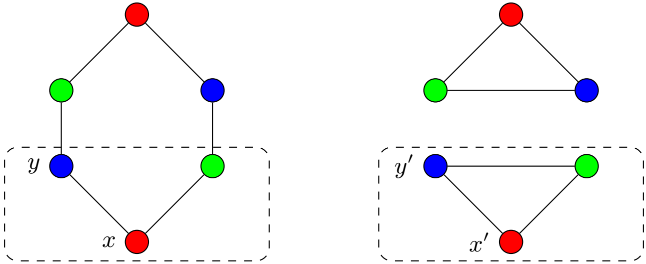
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

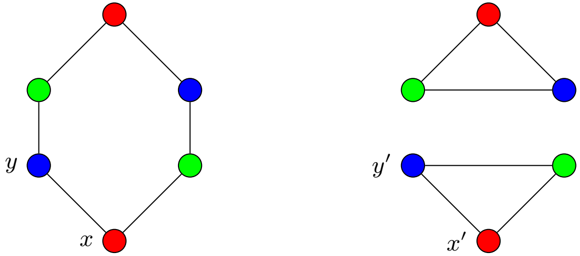
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

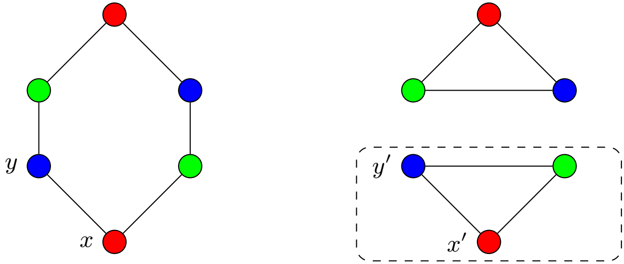
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

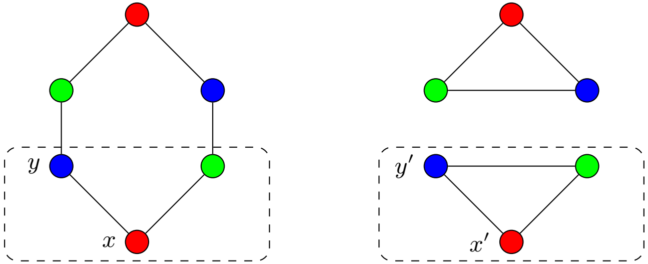
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z(Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

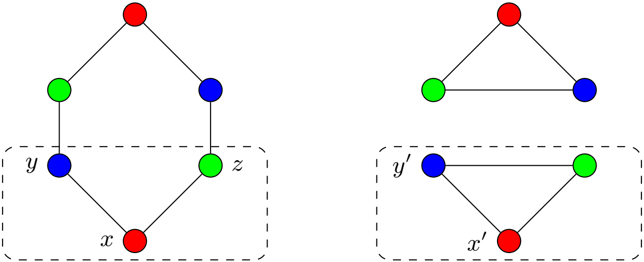
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

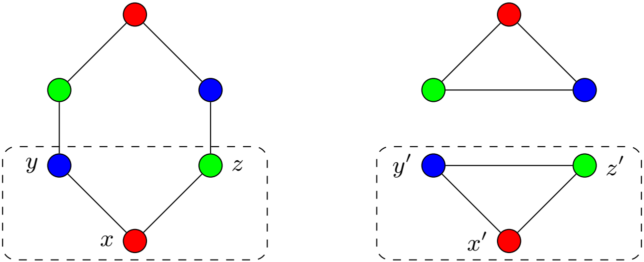
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

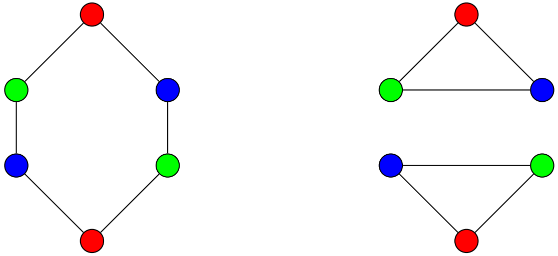
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler I gewinnt das $\mathcal{C}_3$-Spiel:

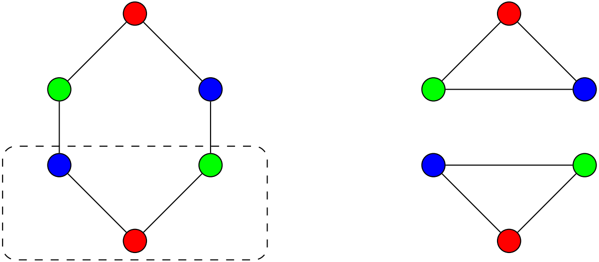
- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A.
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.
- Kein Isomorphismus!

Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

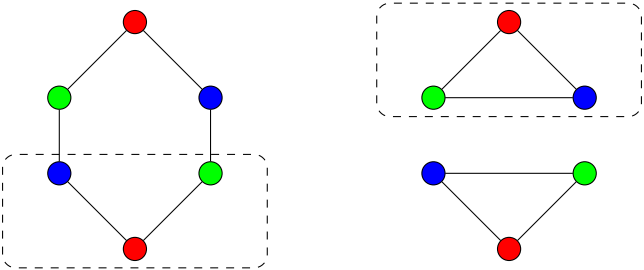
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.

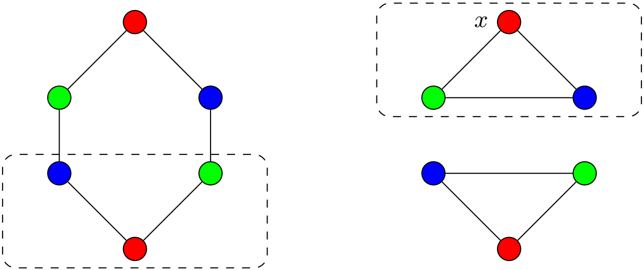
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.

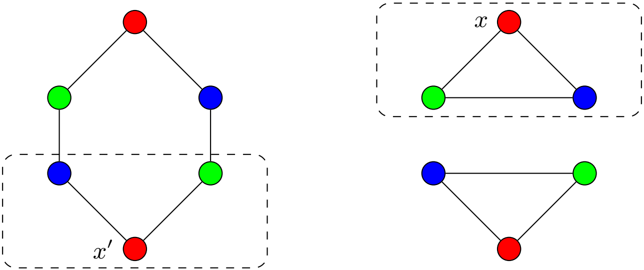
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.

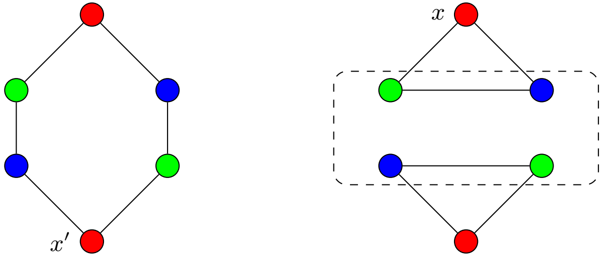
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

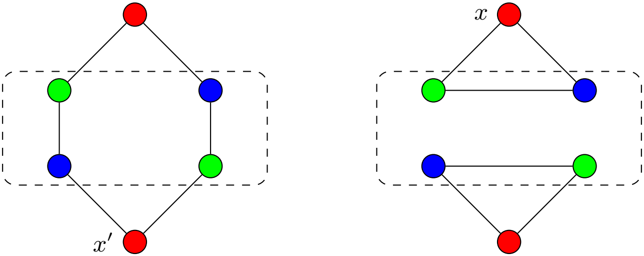
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

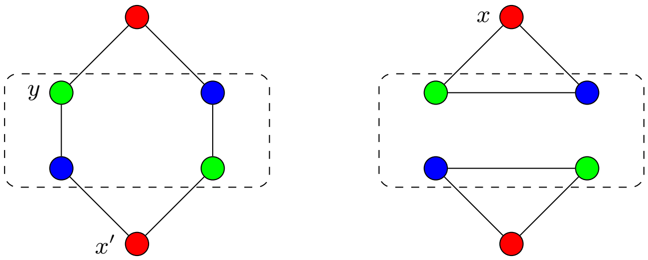
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

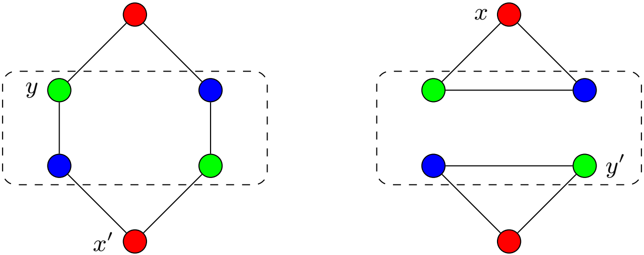
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

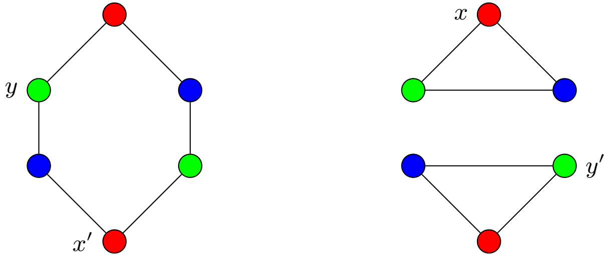
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

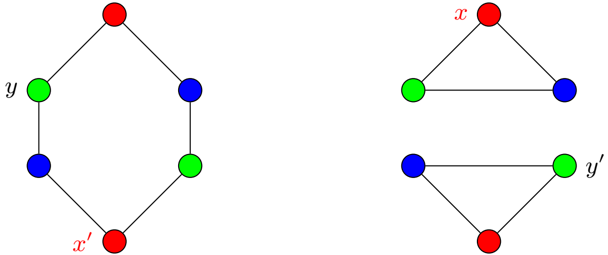
- Spieler I wählt A, II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x.
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.
- Spieler II kann immer antworten, egal ob Exy oder nicht.

Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

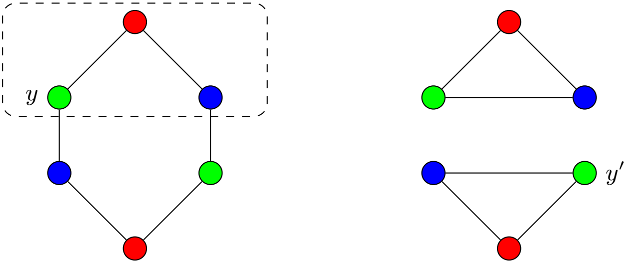
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.

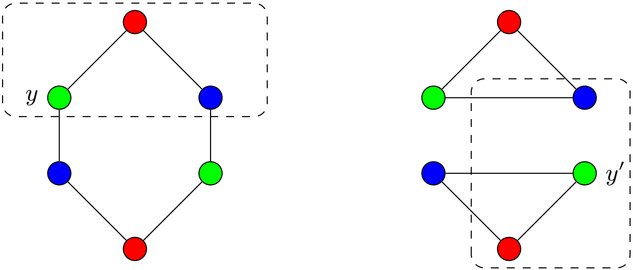
Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.
- **Danach** wird erst das neue A gewählt.

Beispiel zum C_k-Spiel



Spieler II gewinnt das $\mathcal{C}_2$-Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.
- **Danach** wird erst das neue A gewählt.
- Spieler II kann B so wählen, dass Spieler I die Graphen nicht unterscheiden kann.

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Satz

Spieler II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das $\mathcal{C}_k$-Spiel auf $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$, wenn sich $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ durch $\mathcal{C}_k$-Formeln **nicht** unterscheiden lassen.

Das $\mathcal{C}_k$-Spiel

Satz

Spieler II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das $\mathcal{C}_k$-Spiel auf $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$, wenn sich $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ durch $\mathcal{C}_k$-Formeln **nicht** unterscheiden lassen.

Beweis („⇒“)

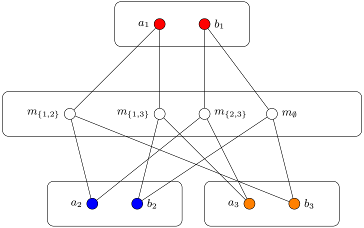
- Angenommen $\varphi \in \mathcal{C}_k$ unterscheidet $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$.
- $m :=$ Quantorenrang von φ.
- Interessanter Fall: $\varphi = \exists^{\geq N} x_i \psi$.
- Spieler I wählt x_i und $|A| = N$ in $\mathcal{G}$, so dass ψ für alle $v \in A$ gilt.
- Spieler II wählt $|B| = N$.
- In $\mathcal{H}$ gilt ψ für $\leq N - 1$ viele Knoten.
- Spieler I legt Stein auf ein Element aus B, für dass ψ nicht gilt.
- $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ unterscheiden sich nun schon durch ψ.
- Quantorenrang von ψ ist $m - 1$.
- Per Induktion: Spieler II verliert!

$\mathcal{X}_k$

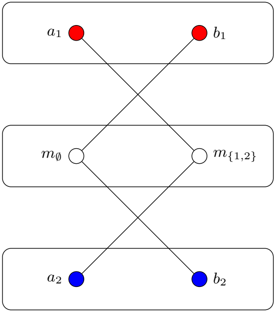
Definition

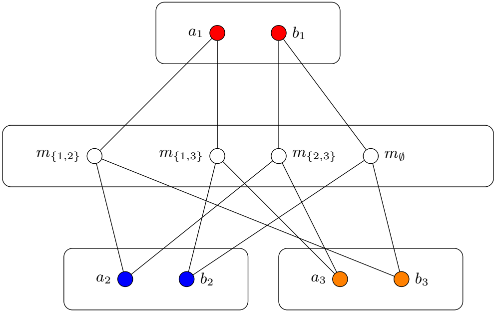
Sei $\mathcal{X}_k := (V_k, E_k)$ mit

- $V_k := A_k \cup B_k \cup M_k$
- $A_k := \{a_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
- $B_k := \{b_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
- $M_k := \{m_S \mid S \subseteq \{1, ..., k\}, |S| \text{ gerade}\}$
- $E_k := \{(m_S, a_i) \mid m_S \in M_k, i \in S\}$
  $\cup \{(m_S, b_i) \mid m_S \in M_k, i \notin S\}$
- a_i und b_i seien mit der Farbe i gefärbt.
- Knoten in M_k haben alle die gleiche Farbe.

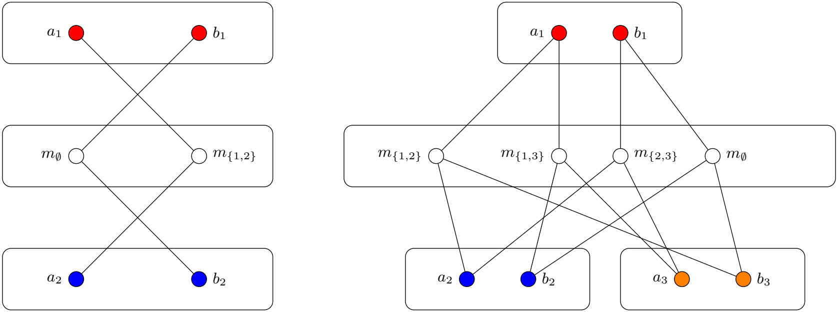


Beispiel: $\mathcal{X}_2$ und $\mathcal{X}_3$





Beispiel: $\mathcal{X}_2$ und $\mathcal{X}_3$



Beobachtung

- $|M_k| = 2^{k-1}$.
- m_S sind für jedes $1 \leq i \leq k$ entweder mit a_i oder mit b_i verbunden.
- m_S haben alle Grad k.

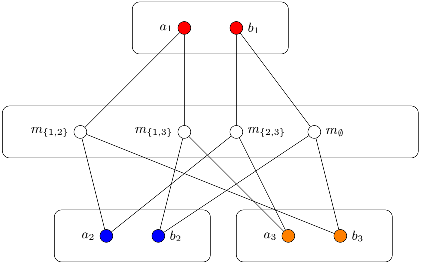
Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

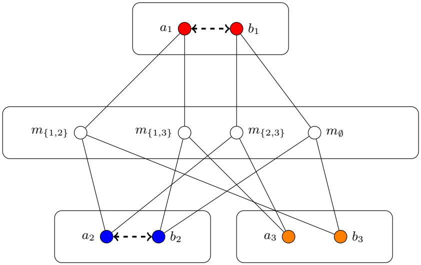


Dann **muss** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_\emptyset$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

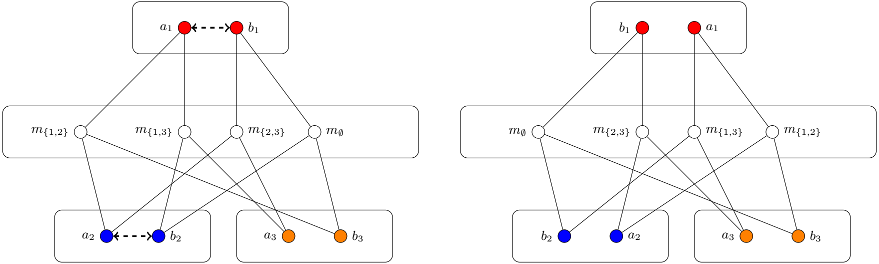


Dann **muss** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_\emptyset$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

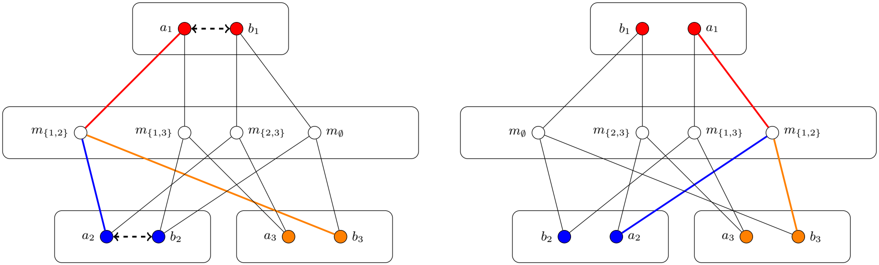


Dann **muss** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_\emptyset$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)



Dann **muss** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_\emptyset$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

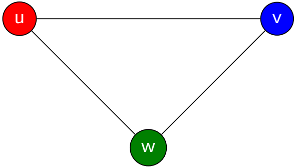
Automorphismen von $\mathcal{X}_k$

Also:

- Jeder Automorphismus *entspricht* einer Permutation auf $A_k \cup B_k$, die alle $\{a_i, b_i\}$ fest lässt und geradzahlig viele a_i mit b_i tauscht.
- Jeder Automorphismus kann durch ein $m_S \in M_k$ *kodiert* werden.

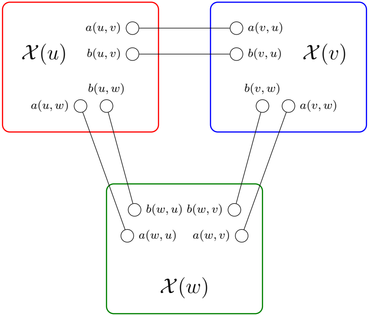
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

Sei $\mathcal{G}$ ein endlicher, zusammenhängender ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten mindestens Grad 2 hat.



$\mathcal{G}$

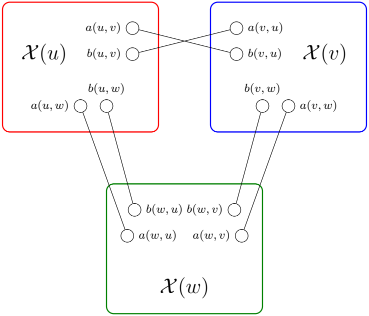
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



$$\mathcal{X}(\mathcal{G})$$

- Ersetze jeden Knoten v mit Grad k durch eine Kopie von $\mathcal{X}_k$ (genannt $\mathcal{X}(v)$).
- Ordne jeder Kante (v, w) in $\mathcal{G}$ ein Paar $\{a_i, b_i\} =: \{a(v, w), b(v, w)\}$ zu.
- Knoten in $\mathcal{X}(v)$ bekommen Farbe von v.

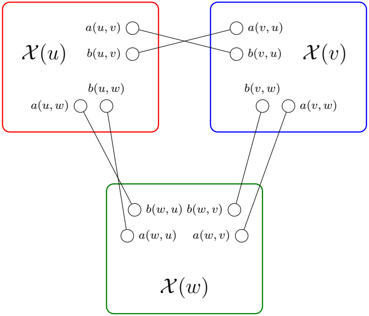
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



$$\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$$

- Verdrehe genau eine Kante in $\mathcal{X}(\mathcal{G})$.

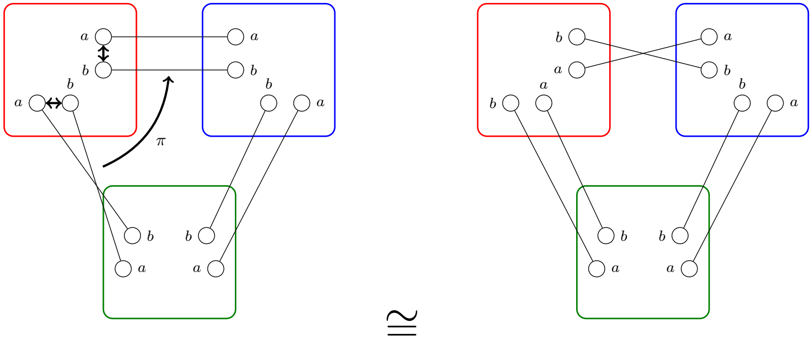
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



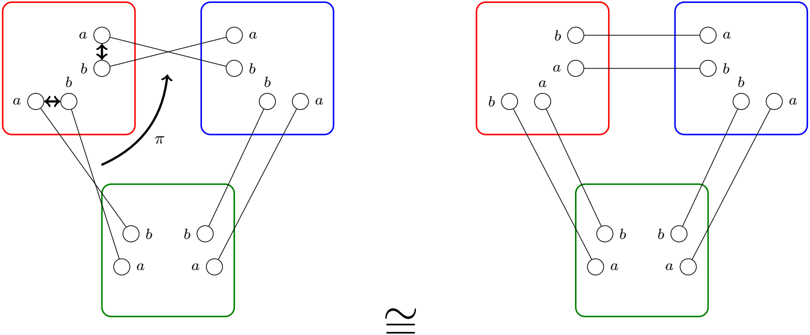
$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$$

- Verdrehe mehrere Kanten in $\mathcal{X}(\mathcal{G})$.

Verschieben der Verdrehungen

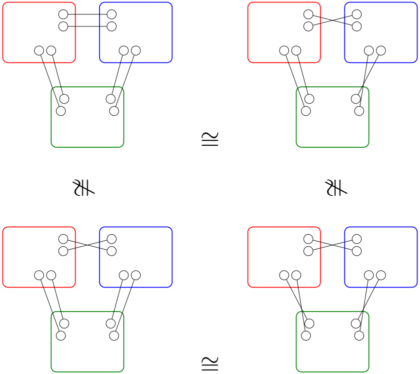


Verschieben der Verdrehungen



Isomorphieklassen von $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G}) \cong \begin{cases} \mathcal{X}(\mathcal{G}) & t \text{ gerade} \\ \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G}) & t \text{ ungerade} \end{cases}$$



Position unwichtig, da Verdrehungen „verschoben“ werden können. Nur Parität relevant.

Graphseparatoren

Definition

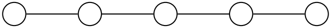
Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

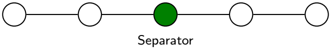


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

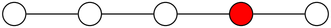


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

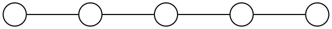


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel



Ununterscheidbarkeit durch $\mathcal{C}_k$

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

Sei $\mathcal{T}$ ein Graph, so dass jeder Separator mindestens $s+1$ Knoten hat, dann gilt

$$\mathcal{X}(\mathcal{T}) \equiv_{\mathcal{C}_s} \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T}).$$

D.h. es gibt keine $\mathcal{C}_s$-Formel, die die beiden Graphen unterscheidet.

Gewinnstrategie für Spieler II im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

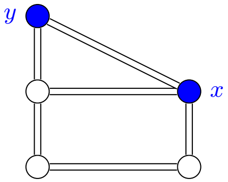
- $P_r := \{\, g \in V_{\mathcal{T}} \mid$ in $\mathcal{X}(g)$ liegt nach r Zügen ein Stein $\}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

Gewinnstrategie für Spieler II im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{\, g \in V_{\mathcal{T}} \mid$ in $\mathcal{X}(g)$ liegt nach r Zügen ein Stein $\}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

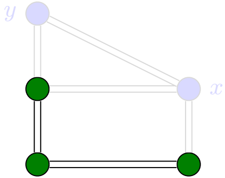


Gewinnstrategie für Spieler II im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{\, g \in V_{\mathcal{T}} \mid$ in $\mathcal{X}(g)$ liegt nach r Zügen ein Stein $\}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

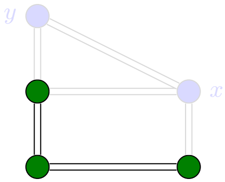


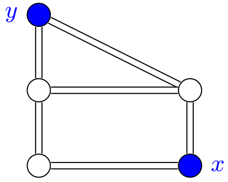
Gewinnstrategie für Spieler II im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{\ g \in V_{\mathcal{T}} \mid$ in $\mathcal{X}(g)$ liegt nach r Zügen ein Stein $\}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.



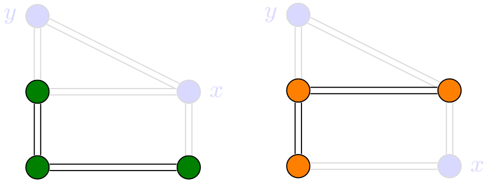


Gewinnstrategie für Spieler II im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{\ g \in V_{\mathcal{T}} \mid$ in $\mathcal{X}(g)$ liegt nach r Zügen ein Stein $\}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.



Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

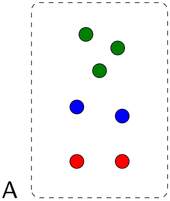
Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.

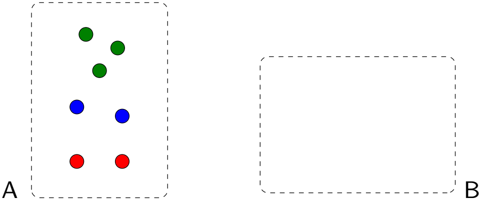


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

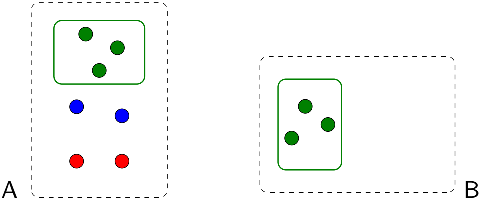


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

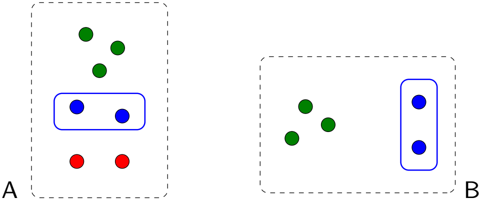


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

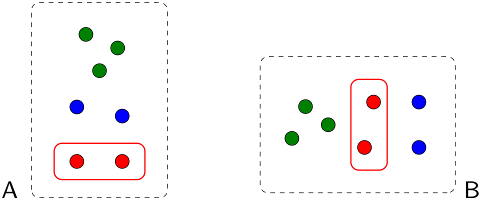


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

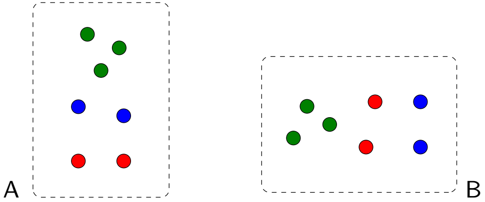


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

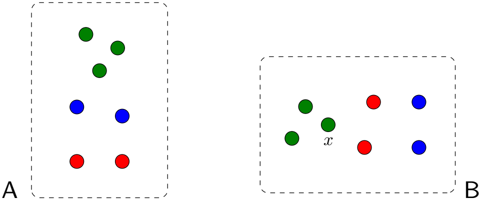


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

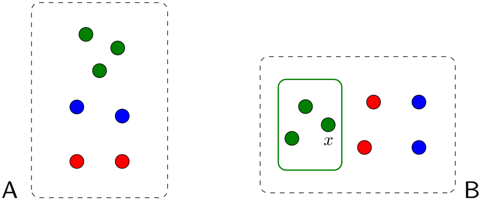


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

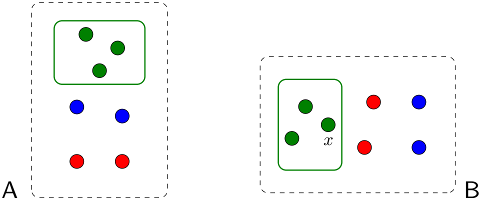


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

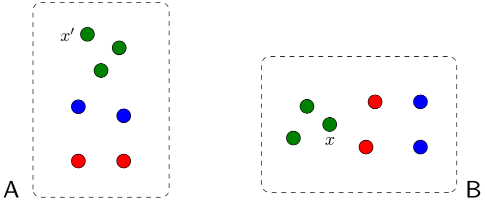


Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig $\Rightarrow$ I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.



Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Erinnerung:

- In $\mathcal{X}(v)$: a_i und b_i haben Farbe i, Knoten in $M(v)$ alle gleich gefärbt.
- Jedes v hat in $\mathcal{T}$ eine eindeutige Farbe.
- Jeder Knoten von $\mathcal{X}(v)$ hat zweite Farbe (die von v).

Also: Spieler I wählt nur $A \subseteq \{a_i, b_i\}$ oder $A \subseteq M(v)$ in einem $\mathcal{X}(v)$.

Züge von Spieler I im $\mathcal{C}_s$-Spiel

Erinnerung:

- In $\mathcal{X}(v)$: a_i und b_i haben Farbe i, Knoten in $M(v)$ alle gleich gefärbt.
- Jedes v hat in $\mathcal{T}$ eine eindeutige Farbe.
- Jeder Knoten von $\mathcal{X}(v)$ hat zweite Farbe (die von v).

Also: Spieler I wählt nur $A \subseteq \{a_i, b_i\}$ oder $A \subseteq M(v)$ in einem $\mathcal{X}(v)$.

Ausserdem:

Element aus der Mitte $M(v)$ eines $\mathcal{X}(v)$ legt bereits alle anderen fest. Daher:

- Spieler I wählt in jedem Zug nur in der Mitte ($A \subseteq M(v)$).
- Spieler I wählt in jedem Zug nur *ein einziges Element* ($A = \{m_S\}$) (d.h. **Zählen hilft Spieler I nicht**!).

Gewinnbedingung

Spieler II gewinnt, falls er folgende Bedingung aufrechterhalten kann:

(*) Für alle $g \in Q_r$ gibt es (nach r Zügen) ein

$$\alpha_{r,g} : \tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$$

welches die Platzierung der Steine respektiert.

Gewinnbedingung

Spieler II gewinnt, falls er folgende Bedingung aufrechterhalten kann:

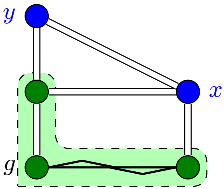
(*) Für alle $g \in Q_r$ gibt es (nach r Zügen) ein

$$\alpha_{r,g} : \tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$$

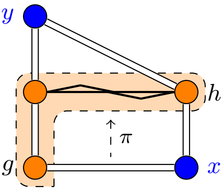
welches die Platzierung der Steine respektiert.

Anschaulich

Spieler II gewinnt, weil er die verdrehte Kante in Q_r *verstecken* kann. Funktioniert, weil die „steinfreien Komponenten" Q_r und Q_{r+1} sich überschneiden.



nach r Zügen

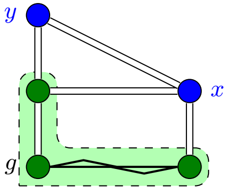


nach $r+1$ Zügen

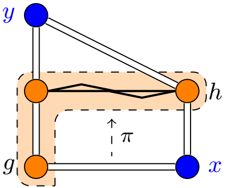
Induktion

Induktion über Anzahl der Züge

- Nach $r = 0$ Zügen
  - Noch keine Steine platziert.
  - Also $Q_0 = \mathcal{T}$.
  - $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) \cong \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.



nach r Zügen

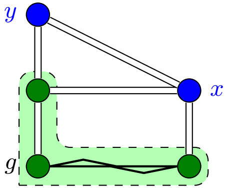


nach $r+1$ Zügen

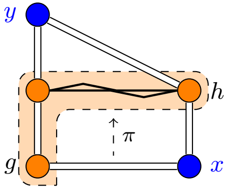
Induktion

Angenommen (*) gilt nach r Zügen.

- Spieler I legt in Zug $r+1$ einen Stein auf Knoten in $M(w)$.
- Sei $g \in Q_r \cap Q_{r+1}$.
- Q_{r+1} ist zusammenhängend: Es gibt Pfad von g zu jedem $h \in Q_{r+1}$.
- $\alpha_{r+1,h} := \pi \circ \alpha_{r,g}$.
- Pfad von g nach h ist „steinfrei“.
- Also: π lässt Knoten fest, auf denen Steine liegen.
- $\alpha_{r+1,h}$ erfüllt Bedingung (*) $\Rightarrow$ Spieler II gewinnt.



nach r Zügen



nach $r+1$ Zügen

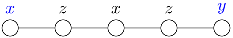
Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

- Angenommen $\varphi \in$ IFP+C (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \mathrm{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

- Angenommen $\varphi \in$ IFP+C (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \mathrm{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Beispiel zum „Abwickeln“

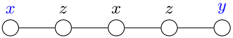


- $[\mathsf{ifp}Xxy.(x = y \vee \exists z(Exz \wedge Xzy))](x, y)]$
- $\rightsquigarrow x = y \vee \exists z(Exz \wedge (Ezy \vee \exists x(Ezx \wedge (Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezy)))))$
- Beide Formeln für $|\mathcal{G}| \leq 5$ äquivalent.

Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

- Angenommen $\varphi \in$ IFP+C (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \mathrm{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Beispiel zum „Abwickeln“



- $[\mathrm{ifp} Xxy.(x = y \vee \exists z(Exz \wedge Xzy))](x, y)]$
- $\rightsquigarrow\ x = y \vee \exists z(Exz \wedge (Ezy \vee \exists x(Ezx \wedge (Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezy)))))$
- Beide Formeln für $|\mathcal{G}| \leq 5$ äquivalent.

- $\exists\mu$ durch $\bigvee_{i=0}^{n}$ ausdrücken, z.B.

$$\exists\mu\exists^{\geq\mu} x\varphi(x) \ \rightsquigarrow\ \bigvee_{i=0}^{n} \exists^{\geq i} x\varphi(x)$$

- Keine neuen Variablen dazu gekommen.
- Also: $\varphi_n \in \mathcal{C}_k$ unterscheidet die Graphen auch. Widerspruch.

Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um PTIME zu erfassen.

Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um PTIME zu erfassen.

Offene Fragen

- Welche Logik erfasst PTIME (auf der Klasse aller endlichen Strukturen)?
- Gibt es so eine Logik überhaupt?

Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um PTIME zu erfassen.

Offene Fragen

- Welche Logik erfasst PTIME (auf der Klasse aller endlichen Strukturen)?
- Gibt es so eine Logik überhaupt?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!