UMA INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Roy Wilhelm Probst
rwprobst@gmail.com
Andrés David Báez Sánchez
adavidbaez@gmail.com
Simone Venturi
si_venturi@yahoo.com

Departamento Acadêmico de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Conteúdo

Prefácio

Uma introdução informal ao conceito de transformada de $\mathcal{Z}$ poderia ser feita, comparando a transformada $\mathcal{Z}$ à uma versão discreta da transforma de Laplace. Poderia ser dito também, que a transformada $\mathcal{Z}$ é equivalente, para equações de diferenças, à transformada de Laplace para equações diferenciais.

De um ponto de vista estritamente matemático, a transformada $\mathcal{Z}$ pode ser definida como uma aplicação que leva sequências numéricas em funções de variável complexa através de uma série de Laurent. No entanto, é pouco provável que essa definição seja adequada para descrever a transformada $\mathcal{Z}$ na área de análise de sinais, onde a transformada $\mathcal{Z}$ pode ser definida como uma aplicação que converte um sinal digital discreto em uma representação complexa do sinal no domínio da frequência.

Essa aparente dicotomia entre a definição do objeto matemático e sua aplicação não é um fenômeno exclusivo da transformada $\mathcal{Z}$. Conceitos relacionados, como a transformada de Laplace ou a transformada de Fourier, são com frequência estudados em cursos de engenharia sem considerar a fundamentação matemática em profundidade, ou são abordados em cursos de matemática com um olhar estritamente teórico sem preocupar-se com as aplicações. Uma abordagem intermediária, apresentando diversos aspectos da teoria e da prática pode ser considerada mais enriquecedora, mas em qualquer caso, atingir a proporção desejada entre teoria e aplicação na apresentação de um conceito, certamente será facilitado pela escolha de referências bibliograficas adequadas.

No caso da transformada $\mathcal{Z}$, comprovamos a partir de nossa experiência em cursos de matemática para engenharias e ciências exatas, a quase inexistência de material em Língua Portuguesa que abordasse adequadamente os aspectos matemáticos da transformada $\mathcal{Z}$ e que incluisse aplicações, sem precisar conhecimentos específicos sobre análise de sinais. Estas notas são consequência dessa comprovação.

O objetivo dessas notas é apresentar o conceito e propriedades da transformada $\mathcal{Z}$, considerando adequadamente seus aspectos matemáticos e incluindo aplicações da transformada $\mathcal{Z}$ na resolução de problemas de equações de diferenças presentes em diversas áreas. Além do seu valor como referência bibliográfica em Língua Portuguesa para cursos superiores de matemática para engenharia, esse material também pode ser usado em disciplinas de matemática que considerem a formulação e resolução de problemas em termos de fórmulas de recursão ou equações de diferenças. Pela simplicidade nos conceitos necessários para tal tipo de formulação, parte destas notas podem servir de complemento para um curso de introdução à modelagem matemática.

No primeiro capítulo são estabelecidas as definições necessárias e as propriedades fundamentais da transformada $\mathcal{Z}$. A seguir, no segundo capítulo, é introduzida a noção de transformada $\mathcal{Z}$ inversa e são considerados três métodos para seu cálculo. No terceiro capítulo, são consideradas as aplicações da transformada $\mathcal{Z}$ para a resolução de equações de diferenças. São apresentados diversos exemplos, incluindo problemas aritméticos, geométricos, de probabilidade, de matemática financeira, entre outros. No final de cada capítulo é sempre incluída uma lista de exercícios resolvidos e uma lista de exercícios propostos com solução.

Essas notas foram baseadas na dissertação de Simone Venturi [19].

Curitiba, 19 de Outubro de 2017.

Roy Wilhelm Probst
Andrés David Báez Sánchez
Simone Venturi

Capítulo 1

Transformada $\mathcal{Z}$

Algumas das ideias matemáticas associadas com a transformada $\mathcal{Z}$ são conhecidas desde o século XVIII [9]. A ideia de construir uma série de potências usando como coeficientes os termos de uma sequência dada é justamente o conceito de função geratriz, que foi introduzido por DeMoivre em 1730 e utilizado amplamente por Laplace e outros no contexto de teoria da probabilidade durante o século XIX [14].

No entanto, a forma em que a transformada $\mathcal{Z}$ é utilizada atualmente no contexto de análise de sinais discretos pode ter sua origem traçada até o trabalho de Hurewicz [8]. Os trabalhos de Barker [2] e Ragazzini e Zadeh [16] contribuiram para consolidar e difundir as ideias apresentadas por Hurewicz, sendo Barker o primeiro a apresentar uma tabela de transformadas e Ragazzini e Zadeh os primeiros a usar o termo *transformada $\mathcal{Z}$* para referir-se a essa transformação [11]. Após sua popularização na área de sinais, outras generalizações foram introduzidas e hoje faz parte fundamental das ferramentas da análise de sinais em engenharia e outra áreas [6, 9].

Neste capítulo será apresentada a definição da transformada $\mathcal{Z}$ e suas propriedades, com alguns exemplos e considerações básicas. Os exemplos e notações consideradas ao longo destas notas seguem principalmente as seguintes referências: [1, 4, 15, 17].

1.1 Definição

A transformada $\mathcal{Z}$ pode ser vista como um operador que converte uma sequência x_n em uma função $X(z)$, onde z é uma variável complexa. Será usada também a notação $\mathcal{Z}\{x_n\}$ para referir-se a esta função.

Definição 1.1. *A transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência $x_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é definida por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x_n\} &= X(z)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \qquad (1.1.1)\\ &= x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \cdots .\end{aligned}$$

É importante ressaltar que $X(z)$ existe apenas para regiões do plano complexo em que o somatório (1.1.1) converge. A transformada acima é as vezes chamada também de transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, em referência ao fato de considerar sequências da forma $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, em contraste com as denominadas sequências bilaterais da forma $\{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Para este tipo de sequências é possível considerar de forma análoga uma transformada $\mathcal{Z}$ bilateral [13]. Nessas notas são consideradas apenas sequências unilaterais.

Uma sequência x_n admite a transformada $\mathcal{Z}$ se a série (1.1.1) é convergente para pelo menos um complexo z, definindo assím uma função de variável complexa com domínio não vazio.

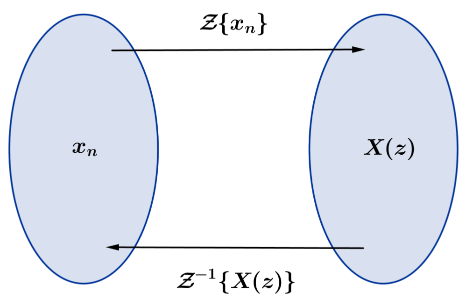

Figura 1.1: Diagrama da Transformada $\mathcal{Z}$ e sua Inversa

A seguir alguns exemplos simples de sequências e suas transformadas.

Exemplo 1.1. *Seja y_n a sequência $\{2, 4, 6, 4, 2, 0, 0, 0, \ldots\}$. A transformda de y_n, detonada por $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, é:*

$$\begin{aligned}Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}\\ &= 2 + \frac{4}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \frac{0}{z^5} + \frac{0}{z^6} + \ldots\\ &= 2 + \frac{4}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^4},\end{aligned}$$

definida para todo $z \neq 0$.

Exemplo 1.2. *Seja a sequência delta dada por:*

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1, \ se\ n = k \\ 0, \ se\ n \neq k, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Calculando $\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\}$ *tem-se:*

$$\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-k) z^{-n} = z^{-k}.$$

Assim, $\mathcal{Z}\{\delta(n-k)\} = z^{-k}$, *para todo* $z \neq 0$.

Exemplo 1.3. *Como um caso particular da sequência delta, para* $k = 0$, *tem-se:*

$$x_n = \begin{cases} 1, \ se\ n = 0 \\ 0, \ se\ n \neq 0, \end{cases}$$

isto é, $x_n = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$, *cuja transformada* $\mathcal{Z}\{x_n\}$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= 1 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \dots \\ &= 1, \end{aligned}$$

definida para todo z *complexo. Assim,* $\mathcal{Z}\{x_n\} = 1$.

Nos exemplos anteriores as sequências consideradas tinham um número finito de termos diferentes de zero, e como consequência, a transformada $\mathcal{Z}$ foi expressa em cada caso como uma soma finita. Nos exemplos a seguir serão consideradas sequências que tem infinitos termos não nulos, e assim, o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ será feito através de séries, em particular através da série geométrica. A série geométrica e sua relação com a transformada $\mathcal{Z}$ será discutida com mais detalhe na próxima seção, mas será usado por enquanto o seguinte resultado sobre a série geométrica de razão x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \text{ se e somente se } |x| < 1.$$

Exemplo 1.4. *Seja a sequência de Heaviside dada por:*

$$H_{n-k} = \begin{cases} 0, \ se\ n < k \\ 1, \ se\ n \geq k, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Calculando a transformada $\mathcal{Z}$ *da sequência dada, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{H_{n-k}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-k} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} H_{n-k} z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} H_{n-k} z^{-n} \\
&= 0 + \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{k+2}} + \ldots \\
&= \frac{1}{z^k}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right),
\end{aligned}$$

sempre que a série em parênteses for convergente. Essa série é uma série geométrica de razão $1/z$ *e portanto converge para*

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \ \textit{se} \ \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{H_{n-k}\} &= \frac{\frac{1}{z^k}}{1 - \frac{1}{z}} \\
&= \frac{z}{z^k(z-1)},
\end{aligned}$$

definida para $|z| > 1$.

Exemplo 1.5. *Como um caso particular da sequência de Heaviside, para* $k = 0$, *tem-se a sequência* $f_n = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$. *Sua transformada* $\mathcal{Z}\{f_n\}$ *é dada por:*

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots
\end{aligned}$$

que corresponde a uma série geométrica de razão $1/z$. *Assim:*

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\
&= \frac{z}{z-1},
\end{aligned}$$

definida para $|z| > 1$.

Exemplo 1.6. *Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a sequência constante $y_n = \{a, a, a, a, \ldots\}$. A transformada $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$ é dada por:*

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\ &= a + \frac{a}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^3} + \ldots \\ &= a\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Novamente, pelo critério de convergência da série geométrica, tem-se que:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{a}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \frac{az}{z-1}, \end{aligned}$$

definida para $|z| > 1$.

1.2 Região de Convergência

Na seção anterior, vários exemplos ilustraram o fato de que a transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência f_n, pode não estar definida para todo complexo z. Em geral, a região do plano complexo para a qual a transformada $F(z)$ existe é definida como a região de convergência (RDC) da transformada $F(z)$.

Para estabelecer a RDC de algumas transformadas é importante considerar a série geométrica e sua região de convergência.

1.2.1 Série Geométrica

Considere uma progressão geométrica (PG) de razão $r \in \mathbb{C}$ e primeiro termo $a \in \mathbb{C}$, ou seja, uma sequência da forma:

$$\{a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n \ldots\}.$$

A série geométrica S correspondente a essa progressão, é definida como a soma dos termos da PG, isto é:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

Dependendo dos valores de a e r essa soma pode ou não convergir. Para determinar os possíveis valores que essa soma pode tomar, será considerada a soma parcial até o $n-$ésimo termo e depois será analizado o que ocorre com a soma parcial quando n tende ao infinito.

A soma dos n primeiros termos da PG é dada por:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}.$$

Se $r = 1$ está expressão torna-se igual a na. Se $r \neq 1$, é possivel obter uma expressão simplificada para esta soma. Multiplicando por r em ambos os lados da igualdade, tem-se que:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

e subtraindo $S_n - rS_n$:

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 ... + ar^{n-1} - (ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n) \\ &= a - ar^n, \end{aligned}$$

isto é,

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

e assim

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},$$

se $r \neq 1$.

Porém, o objetivo é notar o que ocorre com a soma S_n quando n tende ao infinito. Tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

quando $|r| < 1$, pois:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ se e somente se } |r| < 1.$$

Conclui-se que a soma de uma progressão geométrica, dado primeiro termo $a \in \mathbb{C}$ e razão $r \in \mathbb{C}$, converge quando $|r| < 1$. A desigualdade $|r| < 1$ representa uma região do plano complexo, conforme Figura 1.2.

Utilizando o conceito de convergência para séries geométricas, serão considerados alguns exemplos relacionados à sequência dada pelas potências de um número.

Exemplo 1.7. *Para $a \in \mathbb{C}$, seja $x_n = a^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ é dada por:*

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

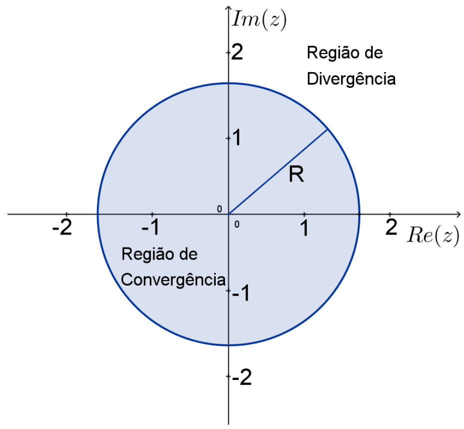

Figura 1.2: Região correspondente a $|r| < R$.

Logo, se $|a/z| < 1$, *então:*

$$X(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

Assim, a região de convergência de $X(z)$ *é dada por* $|a/z| < 1$, *ou seja,* $|z| > |a|$. *Diferentes possibilidades para a região de convergência são ilustradas na Figura 1.3 para* $a \in \mathbb{R}$.

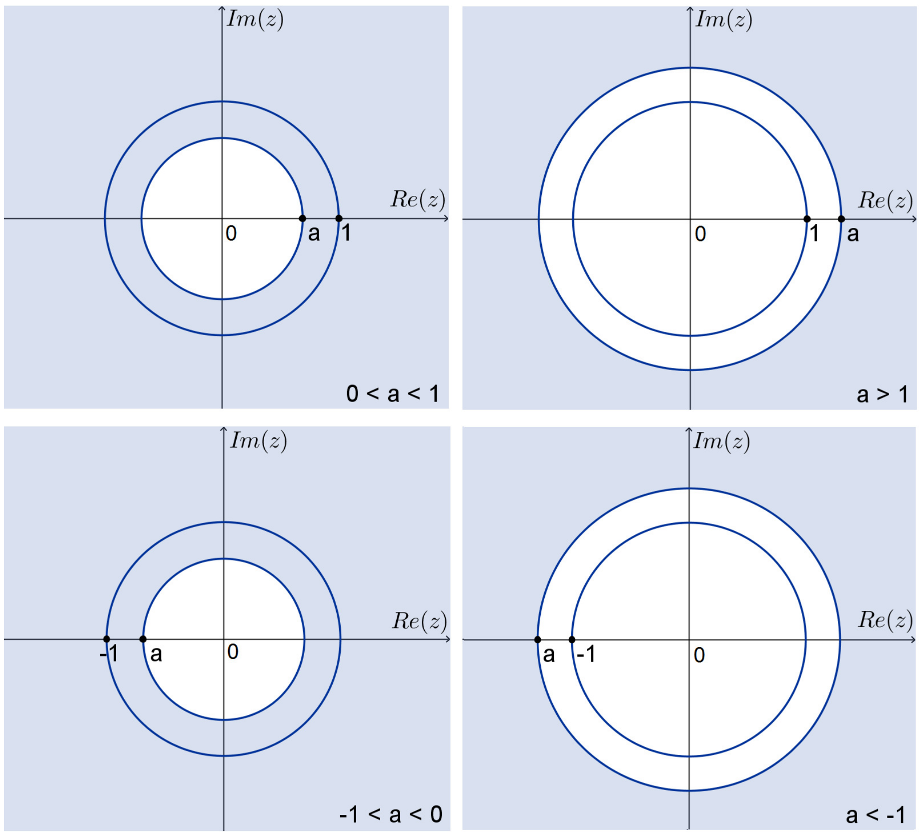

Figura 1.3: RDC da forma $|z| > |a|$.

Exemplo 1.8. *Para $x_n = e^{an}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{C}$, tem-se que $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ é dada por:*

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} z^{-n} \\ &= 1 + \frac{e^a}{z} + \left(\frac{e^a}{z}\right)^2 + \left(\frac{e^a}{z}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \dfrac{e^a}{z}} \\ &= \frac{z}{z - e^a}. \end{aligned}$$

Assim, tem-se uma série geométrica de razão $r = e^a/z$, cuja RDC é dada *por* $|e^a/z| < 1$, *isto é,* $|z| > |e^a|$.

1.3 Propriedades

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades básicas da transformada $\mathcal{Z}$, seguidas de suas demonstrações e exemplos.

1.3.1 Linearidade

Teorema 1.1. *Sejam* a *e* b *números complexos dados,* x_n *e* y_n *sequências, e* $X(z)$ *a transformada* $\mathcal{Z}$ *de* x_n*, para* $|z| > R_1$ *e* $Y(z)$ *a transformada* $\mathcal{Z}$ *de* y_n*, para* $|z| > R_2$*. Então* $\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z)$*, para* $|z| > max\{R_1, R_2\}$*.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (ax_n + by_n)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ax_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} by_n z^{-n} \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\
&= aX(z) + bY(z)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 1.9. *Seja* $y_n = \operatorname{sen}(\theta n)$*, para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$*. Pela fórmula de Euler tem-se que*

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e portanto:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Assim é possível calcular a transformada $\mathcal{Z}$ *de* $\operatorname{sen}(\theta n)$ *usando a propriedade de linearidade da seguinte forma:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\theta n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{i\theta n}-e^{-i\theta n}}{2i}\right\}\\
&= \frac{1}{2i}(\mathcal{Z}\{e^{i\theta n}\}-\mathcal{Z}\{e^{-i\theta n}\})\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\theta}}-\frac{z}{z-e^{-i\theta}}\right)\\
&= \frac{z(z-e^{-i\theta})-z(z-e^{i\theta})}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})2i}\\
&= \frac{z(z-e^{-i\theta}-z+e^{i\theta})}{2i(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}\\
&= \frac{z(-e^{-i\theta}+e^{i\theta})}{2i(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}\\
&= \frac{z\operatorname{sen}\theta}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}\\
&= \frac{z\operatorname{sen}\theta}{z^2-ze^{-i\theta}-ze^{i\theta}+1}\\
&= \frac{z\operatorname{sen}\theta}{z^2-z(e^{-i\theta}+e^{i\theta})+1}\\
&= \frac{z\operatorname{sen}\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}.
\end{aligned}
\tag{1.3.2}
$$

Na dedução anterior, foram usadas as transformadas de $e^{i\theta n}$ e de $e^{-i\theta n}$. Do Exemplo 1.8, para $x_n = e^{an}$, tem-se que a RDC é dada por $|z| > |e^a|$. Assim, como $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = 1$ para $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se que $\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\theta n)\}$ converge quando $|z| > 1$.

Exemplo 1.10. *Seja $f_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$, para $n \in \mathbb{N}$, o que gera a sequência $f_n = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$.*

Pode-se encontrar $\mathcal{Z}\{f_n\}$ através da definição (1.1.1):

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{0}{z^0}+\frac{1}{z^1}+\frac{0}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{0}{z^4}+\ldots\\
&= \frac{1}{z}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^7}+\ldots.
\end{aligned}
\tag{1.3.3}
$$

Tem-se então em (1.3.3) uma PG de primeiro termo $a = 1/z$ e razão $r =$

$-1/z^2$. *Utilizando a fórmula da soma de uma PG:*

$$F(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{z}{z^2+1}.$$

Alternativamente, pode-se substituir $\theta = \pi/2$ *em (1.3.2):*

$$\mathcal{Z}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \frac{z \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z}{z^2+1}.$$

A RDC é dada por $|z| > 1$, *conforme exemplo 1.9.*

1.3.2 Diferenciação

Teorema 1.2. *Se a transformada* $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ *existe para* $|z| > R$ *então a transformada* $\mathcal{Z}\{nx_n\}$ *também existe para* $|z| > R$ *e tem-se:*

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

<u>Demonstração:</u>

Se a transformada $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ existe para $|z| > R$, tem-se pela convergência uniforme da série dentro de sua RDC que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}X(z) &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -n x_n z^{-n-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} n x_n \frac{z^{-n}}{z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n} \\
&= -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{nx_n\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dz}X(z) = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{nx_n\},$$

ou seja:

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z).$$

■

Generalizando o teorema anterior para $k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\mathcal{Z}\{n^k x_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{x_n\}. \qquad (1.3.4)$$

Exemplo 1.11. *Seja $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência $x_n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Sua transformada $\mathcal{Z}\{x_n\}$ pode ser obtida utilizando a propriedade de diferenciação da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n\} &= \mathcal{Z}\{n.1\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{1\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
&= -z\left[\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right] \\
&= \frac{-z(z-1)+z^2}{(z-1)^2} \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}.
\end{aligned} \qquad (1.3.5)$$

Assim $\mathcal{Z}\{n\} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, com RDC $|z| > 1$.

Exemplo 1.12. *Seja $y_n = n^2$. A transformada $\mathcal{Z}\{n^2\}$, pode ser obtida utilizando a propriedade de diferenciação da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n^2\} &= \mathcal{Z}\{n.n\} \\
&= -z\frac{d}{dz}(\mathcal{Z}\{n\}) \\
&= -z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} \\
&= -z\left(\frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4}\right) \\
&= \frac{z(z^2-1)}{(z-1)^4} \\
&= \frac{z(z+1)(z-1)}{(z-1)^4} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.
\end{aligned}$$

Logo, tem-se que $\mathcal{Z}\{n^2\} = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$*, com RDC* $|z| > 1$*.*

Exemplo 1.13. *Seja* $f_n = na^n$*, para* $a \in \mathbb{C}$*. A transformada* $\mathcal{Z}\{f_n\}$ *pode ser encontrada utilizando a propriedade de diferenciação.*

Lembrando que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$*, a transformada* $\mathcal{Z}\{na^n\}$ *é dada por:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{na^n\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{a^n\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) \\
&= \frac{az}{(z-a)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{Z}\{na^n\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$*, com RDC* $|z| > |a|$*.*

1.3.3 Similaridade

Teorema 1.3. *Seja* $a \in \mathbb{C}$*,* $a \neq 0$ *e* $X(z)$ *a transformada* $\mathcal{Z}$ *de* x_n*, para* $|z| > R$*. Tem-se que* $\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X(z/a)$*, para* $|z| > |a|R$*.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^n x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{z^{-n}}{a^{-n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right).
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ para $X(z)$ é $|z| > R$, então a RDC de $X(z/a)$ é dada por $|z/a| > R$, ou ainda $|z| > |a|R$. ■

Exemplo 1.14. *Seja $\mathcal{Z}\{na^n\}$ a transformada $\mathcal{Z}$ de na^n. Como $\mathcal{Z}\{n\} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ pela propriedade de similaridade, tem-se:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{na^n\} &= \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a} - 1\right)^2} \\
&= \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z-a}{a}\right)^2} \\
&= \frac{z}{a}\frac{a^2}{(z-a)^2} \\
&= \frac{az}{(z-a)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{Z}\{na^n\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$, com RDC $|z| > |a|$, conforme Exemplo 1.13 visto na seção anterior.

Exemplo 1.15. *Seja $\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\}$ a transformada $\mathcal{Z}$ de $e^{\alpha n}$. Como $\mathcal{Z}\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$ e utilizando a propriedade de similaridade:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} &= \mathcal{Z}\{(e^{\alpha})^n\} \\
&= \frac{\dfrac{z}{e^{\alpha}}}{\dfrac{z}{e^{\alpha}} - 1} \\
&= \frac{\dfrac{z}{e^{\alpha}}}{\dfrac{z - e^{\alpha}}{e^{\alpha}}} \\
&= \frac{z}{z - e^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Logo $\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = \dfrac{z}{z - e^{\alpha}}$*, com RDC* $|z| > e^{\alpha}$*, conforme Exemplo 1.8.*

O exemplo a seguir mostra como é possível combinar várias propriedades para determinar a transformada de sequências mais complexas.

Exemplo 1.16. *A transformada* $\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\}$ *pode ser determinada utilizando as propriedades de linearidade e similaridade.*

Calculando inicialmente $\mathcal{Z}\{n^2 - n\}$ *tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{n^2 - n\} &= \mathcal{Z}\{n^2\} - \mathcal{Z}\{n\} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} \\
&= \frac{2z}{(z-1)^3},
\end{aligned}$$

para $|z| > 1$*. Portanto,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{2^n(n^2 - n)\} &= \frac{2\dfrac{z}{2}}{\left(\dfrac{z}{2} - 1\right)^3} \\
&= \frac{8z}{(z-2)^3},
\end{aligned}$$

para $|z/2| > 1$*. Assim,* $\mathcal{Z}\{2^n(n^2 - n)\} = \dfrac{8z}{(z-2)^3}$*, definida para* $|z| > 2$*.*

1.3.4 Translação

Nesta seção serão apresentadas as propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ relacionadas à translação (ou deslocamento) dos termos de uma sequência. Considere inicialmente as seguintes sequências descritas explicitamente:

$$\{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$$

e

$$\{3, 9, 27, 81, 243, \ldots\}.$$

Claramente as duas sequências estão relacionadas com as potências de 3, mas o termo inicial da primeira sequência é $1 = 3^0$, enquanto que o termo inicial da segunda sequência é $3 = 3^1$.

Para a primeira sequência, o termo geral pode ser escrito como 3^n para $n \in \mathbb{N}$. Esta mesma expressão poderia ser usada para descrever a segunda sequência se o índice n iniciasse a partir de 1, mas para usar os mesmos valores de $n = 0, 1, 2, \ldots$, a expressão adequada para a segunda sequência é 3^{n+1}, isto é:

$$3^n = \{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$$

e

$$3^{n+1} = \{3, 9, 27, 81, 243, \ldots\}.$$

Assim, a relação entre as duas sequências é que a sequência 3^{n+1} corresponde a um deslocamento à esquerda da sequência 3^n. No mesmo sentido, a sequência

$$\{9, 27, 81, 243, 729, \ldots\},$$

que corresponde a dois deslocamentos à esquerda a partir da sequência 3^n, pode ser descrita com o termo geral 3^{n+2}, isto é,

$$3^{n+2} = \{9, 27, 81, 243, 729, \ldots\}.$$

Em geral, dada uma sequência x_n, as notações x_{n+1}, x_{n+2} ou x_{n+k}, correspondem às sequências obtidas por 1, 2 ou k deslocamentos à esquerda, respectivamente. Assim, dada uma sequência

$$x_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

a sequência x_{n+k}, $k \in \mathbb{N}$, é dada por

$$x_{n+k} = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots\}.$$

Exemplo 1.17. *Seja a sequência $x_n = 4 + 3n$. Descreva explicitamente os termos das sequências x_{n+1}, x_{n+2}, e x_{n+5} e determine os termos gerais dessas sequências.*

Considerando x_n e os deslocamentos correspondentes à esquerda, tem-se:

$$x_n = \{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\},$$

$$x_{n+1} = \{7, 10, 13, 16, 19, \ldots\},$$

$$x_{n+2} = \{10, 13, 16, 19, 22, \ldots\}$$

e

$$x_{n+5} = \{19, 22, 25, 28, 31, \ldots\}.$$

Como $x_n = 4 + 3n$*, pode-se verificar que os termos gerais das sequências* x_{n+1}, x_{n+2}*, e* x_{n+5} *correspondem a*

$$x_{n+1} = 4 + 3(n + 1) = 7 + 3n,$$

$$x_{n+2} = 4 + 3(n + 2) = 10 + 3n,$$

e

$$x_{n+5} = 4 + 3(n + 5) = 19 + 3n.$$

Assim como foi considerado o deslocamento à esquerda dos termos de uma sequência, é possivel considerar também o deslocamento a direita. No entanto, este deslocamento implica que novos termos precisam ser acrescentados no início da sequência. Estas posições terão o valor zero, pois uma sequência unilateral pode ser interpretada como uma sequência bilateral cujos termos associados a índices negativos são todos iguais a zero.

Será usada a notação x_{n-k} para denotar a sequência obtida a partir de k deslocamentos à direita dos termos da sequência x_n. Assim, dada uma sequência

$$x_n = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

a sequência x_{n-k}, $k \in \mathbb{N}$, é dada por

$$x_{n-k} = \{\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0,}_{k \text{ posições}} x_0, x_1, x_2, \ldots\}.$$

Exemplo 1.18. *Seja a sequência* $x_n = a^n$ *para* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$*. Descreva explicitamente os termos das sequências* x_{n-1}, x_{n-2} *e* x_{n-4} *e determine os termos gerais dessas sequências.*

Considerando x_n *e os deslocamentos correspondentes à direita, tem-se:*

$$x_n = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\},$$

$$x_{n-1} = \{0, 1, a, a^2, a^3, \ldots\},$$

$$x_{n-2} = \{0, 0, 1, a, a^2, \ldots\}$$

e

$$x_{n-4} = \{0, 0, 0, 0, 1, a, a^2, \ldots\}.$$

Note que, embora $x_n = a^n$*, o termo geral da sequência* x_{n-1} *não é* a^{n-1}*, pois a posição correspondente a* $n = 0$ *não satisfaz a igualdade, isto é,* $0 \neq a^{0-1}$*. Contudo, o termo geral da sequência* x_{n-1} *pode ser descrito como:*

$$x_{n-1} = \begin{cases} 0 & se\ n = 0 \\ a^{n-1} & se\ n \geq 1. \end{cases}$$

De forma análoga, os termos gerais das sequências x_{n-2} e x_{n-4} são:

$$x_{n-2} = \begin{cases} 0 & se\ n = 0, 1 \\ a^{n-2} & se\ n \geq 2 \end{cases}$$

e

$$x_{n-4} = \begin{cases} 0 & se\ n = 0, 1, 2, 3 \\ a^{n-4} & se\ n \geq 4. \end{cases}$$

Agora que estão estabelecidas as notações para os deslocamentos à direita e à esquerda, serão consideradas as transformadas $\mathcal{Z}$ destas sequências e sua relação com a transformada da sequência original sem deslocamentos.

Teorema 1.4. *Seja $X(z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n, para $|z| > R$. Então:*

(i) Translação para Direita
$\mathcal{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k}X(z)$, *para* $|z| > R$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Translação para Esquerda
$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}, \text{ para } |z| > R \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

(i) Para $k \in \mathbb{N}$ e $|z| > R$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n-k}\} &= \frac{0}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \cdots \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{x_0}{z^k} + \frac{x_1}{z^{k+1}} + \frac{x_2}{z^{k+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{z^k}\left(\frac{x_0}{z^0} + \frac{x_1}{z^1} + \frac{x_2}{z^2} + \cdots\right) \\ &= z^{-k}X(z). \end{aligned}$$

(ii) Para $k \in \mathbb{N}$ e $|z| > R$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} x_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de índice considerando $n = m + k$ no segundo somatório:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + \sum_{m+k=k}^{\infty} x_{m+k} z^{-(m+k)} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x_{m+k} z^{-m} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \mathcal{Z}\{x_{m+k}\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} + z^{-k} \mathcal{Z}\{x_{n+k}\}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k \left[\mathcal{Z}\{x_n\} - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right] = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}.$$

■

Em particular para $k = 1, 2, 3$, o Teorema 1.4 assume o seguinte formato:

(i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_{n-1}\} &= z^{-1} X(z) \\
\mathcal{Z}\{x_{n-2}\} &= z^{-2} X(z) \\
\mathcal{Z}\{x_{n-3}\} &= z^{-3} X(z)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} &= zX(z) - x_0 z \\
\mathcal{Z}\{x_{n+2}\} &= z^2 X(z) - x_0 z^2 - x_1 z \\
\mathcal{Z}\{x_{n+3}\} &= z^3 X(z) - x_0 z^3 - x_1 z^2 - x_2 z
\end{aligned}$$

Exemplo 1.19. *Seja $x_n = 2^n$, ou seja, $x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Encontre as transformadas de x_{n-2} e x_{n+1}.*

Conforme estabelecido no Exemplo 1.7:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \frac{z}{z-2},$$

para $|z| > 2$.

Do Teorema 1.4, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x_{n-2}\} &= z^{-2}X(z)\\ &= z^{-2}\frac{z}{z-2}\\ &= \frac{1}{z(z-2)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} &= z^{1}X(z) - x_0 z^1\\ &= z\frac{z}{z-2} - 1z\\ &= \frac{2z}{z-2}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.20. *Seja $y_n = e^{\alpha n}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se que:*

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = Y(z) = \frac{z}{z-e^{\alpha}},$$

para $|z| > e^{\alpha}$.

Pode-se encontrar a transformada de y_{n+2}, utilizando a propriedade de translação à esquerda:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} &= \mathcal{Z}\{e^{\alpha(n+2)}\}\\ &= z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z\\ &= z^2\frac{z}{z-e^{\alpha}} - z^2 - e^{\alpha}z\\ &= \frac{e^{2\alpha}z}{z-e^{\alpha}},\end{aligned}$$

para $|z| > e^{\alpha}$.

Ou ainda, encontrar a transformada de y_{n-2}, utilizando a propriedade de translação à direita:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} &= \mathcal{Z}\{e^{\alpha(n-2)}\}\\ &= z^{-2}Y(z)\\ &= z^{-2}\frac{z}{z-e^{\alpha}}\\ &= \frac{1}{z(z-e^{\alpha})},\end{aligned}$$

para $|z| > e^{\alpha}$.

1.3.5 Convolução

A convolução de duas sequências x_n e y_n, denotada por $x_n * y_n$, é uma nova sequência w_n, cujo n-ésimo termo é dado por:

$$w_n = x_n * y_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Mais infomações sobre convolução podem ser encontradas em [20]. A propriedade a seguir mostra que a transformada da convolução é o produto das transformadas.

Teorema 1.5. *Se $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$, para $|z| > R_1$ e $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, para $|z| > R_2$, então $\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} = X(z)Y(z)$, para $|z| > max\{R_1, R_2\}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \right] z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{n=0}^{\infty} x_k y_{n-k} z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{n=k}^{\infty} y_{n-k} z^{-n}.
\end{aligned}$$

Tomando $r = n - k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_n * y_n\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{r=0}^{\infty} y_r z^{-k} z^{-r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{r=0}^{\infty} y_r z^{-r} \\
&= X(z)Y(z).
\end{aligned}$$

■

Esta propriedade da transformada $\mathcal{Z}$ é considerada uma das mais importantes [1]. Nos exemplos a seguir, esta propriedade será usada para determinar a sequência correspondente a uma certa função na variável z. Esta situação corresponde à determinação da transformada $\mathcal{Z}$ inversa da função. Este conceito será explorado com maior profundidade no próximo capítulo.

Exemplo 1.21. *Seja*

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Quer-se encontrar f_n tal que

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{z^2}{(z-1)^3},$$

utilizando a propriedade de convolução.

Conforme Exemplos 1.5 e 1.11, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}$$

e

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^2}{(z-1)^3} \\ &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \mathcal{Z}\{1\}\mathcal{Z}\{n\}. \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de convolução:

$$\mathcal{Z}\{1 * n\} = \mathcal{Z}\{1\}\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Utilizando a definição de convolução,

$$\begin{aligned} 1 * n &= \sum_{k=0}^{n} 1.k \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Exemplo 1.22. *Seja*

$$Y(z) = \frac{az^2}{(z-1)(z-a)}.$$

Quer-se encontrar y_n tal que

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{az^2}{(z-1)(z-a)}.$$

Como visto anteriormente nos exemplos 1.6 e 1.7, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{a\} = \frac{az}{z-1}$$

e

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{(z-a)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{az^2}{(z-1)(z-a)} \\ &= \frac{az}{z-1} \cdot \frac{z}{z-a} \\ &= \mathcal{Z}\{a\}\mathcal{Z}\{a^n\}. \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de convolução, $\mathcal{Z}\{a * a^n\} = \mathcal{Z}\{a\}\mathcal{Z}\{a^n\} = Y(z)$. *Utilizando a definição de convolução:*

$$\begin{aligned} a * a^n &= \sum_{k=0}^{n} a.a^k \\ &= a\sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= a\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{a(1-a^{n+1})}{1-a}\right\} = \frac{az^2}{(z-1)(z-a)}.$$

1.3.6 Valor Inicial

A propriedade seguinte está relacionada com o comportamento assintótico da transformada $\mathcal{Z}$.

Teorema 1.6. *Se a transformada* $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ *existe para* $|z| > R$ *então:*

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0 = \lim_{n\to 0} x_n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} X(z) &= \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\
&= \lim_{z\to\infty} \left(x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \dots \right) \\
&= \lim_{z\to\infty} x_0 + \lim_{z\to\infty} \frac{x_1}{z} + \lim_{z\to\infty} \frac{x_2}{z^2} + \lim_{z\to\infty} \frac{x_3}{z^3} + \dots \\
&= x_0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
&= x_0 \\
&= \lim_{n\to 0} x_n.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.23. *Seja $f_n = 1$ uma sequência dada por $f_n = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$. Como visto no Exemplo 1.5, sua transformada é dada por:*

$$F(z) = \frac{z}{z-1}.$$

A propriedade do Valor Inicial pode ser verificada notando que o primeiro termo da sequência é :

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-1} = 1$$

ou,

$$f_0 = \lim_{n\to 0} f_n = \lim_{n\to 0} 1 = 1.$$

Exemplo 1.24. *Seja $x_n = n$ a sequência vista no Exemplo 1.11, cuja transformada é dada por:*

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Pode-se verificar a propriedade do Valor Inicial, notando que seu termo inicial é dado por:

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z-1)^2} = 0$$

ou,

$$x_0 = \lim_{n\to 0} x_n = \lim_{n\to 0} n = 0.$$

1.3.7 Valor Final

A seguinte propriedade estabelece uma relação entre o limite da sequência e sua transformada $\mathcal{Z}$.

Teorema 1.7. *Se a transformada $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ existe para $|z| > R$, e se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, então:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

<u>Demonstração</u>:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = X(z).$$

Pela propriedade de Translação para Esquerda vista anteriormente:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - zx_0.$$

E pela propriedade de Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1} - x_n\} = zX(z) - zx_0 - X(z).$$

Assim, aplicando o conceito de limite em ambas as partes da igualdade:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}[\mathcal{Z}\{x_{n+1} - x_n\}] &= \lim_{z\to 1}[zX(z) - zx_0 - X(z)] \\
\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)z^{-n} &= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - \lim_{z\to 1} zx_0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} - x_n &= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x_0 \\
-x_0 + \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x_0,
\end{aligned}$$

pois:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} - x_n &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \\
&= -x_0 + \lim_{n\to\infty} x_n.
\end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$. ■

Exemplo 1.25. *Seja $f_n = (1/2)^n$ e sua transformada dada por:*

$$F(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}.$$

Pode-se verificar que:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-\frac{1}{2}} = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Para facilitar a consulta, encontra-se no Apêndice A um resumo das propriedades vistas e no Apêndice B alguns pares de transformadas.

1.4 Exercícios Resolvidos

A seguir exemplos da aplicação da transformada $\mathcal{Z}$ utilizando sua definição e propriedades para determinar a transformada $\mathcal{Z}$ de algumas sequências.

Exemplo 1.26. *Seja* $x_n = (n-1)a^{n-2}$*,* $a \in \mathbb{R}$*, calcule* $\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\}$ *e determine sua região de convergência.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} = a^{-2}(\mathcal{Z}\{na^n\} - \mathcal{Z}\{a^n\}).$$

Pela propriedade de Similaridade,

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \mathcal{Z}\{a^n.1\} = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1} = \frac{z}{z-a},$$

para $|z| > |a|$*.*

Pela propriedade de Diferenciação,

$$\mathcal{Z}\{na^n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\left(\frac{z-a-z}{(z-a)^2}\right) = \frac{az}{(z-a)^2},$$

para $|z| > |a|$*.*

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(n-1)a^{n-2}\} &= a^{-2}(\mathcal{Z}\{na^n\} - \mathcal{Z}\{a^n\}) \\
&= a^{-2}\left(\frac{az}{(z-a)^2} - \frac{z}{z-a}\right) \\
&= \frac{az - z(z-a)}{a^2(z-a)^2} \\
&= \frac{az - z^2 + az}{a^2(z-a)^2} \\
&= \frac{2az - z^2}{a^2(z-a)^2},
\end{aligned}$$

para $|z| > |a|$*.*

Exemplo 1.27. *Seja* $y_n = a^n \operatorname{sen}\theta n$, $\theta \in \mathbb{R}$, *calcule* $\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\}$.

Como visto anteriormente,

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}\theta n\} = \frac{z \operatorname{sen}\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}.$$

Pela propriedade da Similaridade,

$$\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\} = \frac{\frac{z}{a}\operatorname{sen}\theta}{(\frac{z}{a})^2 - 2\frac{z}{a}\cos\theta + 1}.$$

Multiplicando denominador e numerador por a^2,

$$\mathcal{Z}\{a^n \operatorname{sen}\theta n\} = \frac{az \operatorname{sen}\theta}{z^2 - 2az\cos\theta + a^2}.$$

Nos exemplos anteriores, as regiões de convergência das transformadas envolvidas no processo de cálculo eram iguais e portanto a região de convergência resultante permaneceu igual. Em situações mais complexas, a região de convergência resultante pode ser a interseção das regiões de convergência das transformadas consideradas.

Exemplo 1.28. *Calcule* $\mathcal{Z}\{f_n\}$ *onde* $f_n = \cosh(\beta n)$, *com* $\beta \in \mathbb{R}$.

Lembrando que

$$\cosh\beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2},$$

tem-se:

$$\mathcal{Z}\{\cosh\beta n\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta n} + e^{-\beta n}}{2}\right\}.$$

Pela propriedade da Linearidade,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta n} + e^{-\beta n}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\} + \mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}).$$

Conforme Exemplo 1.8 (ou 1.15), tem-se:

$$\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\} = \frac{1}{1 - \frac{e^\beta}{z}} = \frac{z}{z - e^\beta},$$

para $|z| > e^\beta$.

E do mesmo modo, para $\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}$, *tem-se:*

$$\mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\} = \frac{z}{z - e^{-\beta}},$$

para $|z| > e^{-\beta}$.

Logo, se $|z| > max\{e^{\beta}, e^{-\beta}\}$*, então:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cosh\beta n\} &= \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\{e^{\beta n}\} + \mathcal{Z}\{e^{-\beta n}\}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{\beta}} + \frac{z}{z-e^{-\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z-e^{-\beta}) + z(z-e^{\beta})}{(z-e^{\beta})(z-e^{-\beta})}\right) \\
&= \frac{z^2 - z\left(\dfrac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}\right)}{z^2 - 2z\left(\dfrac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}\right) + 1} \\
&= \frac{z^2 - z\cosh\beta}{z^2 - 2z\cosh\beta + 1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{Z}\{\cosh\beta n\} = \frac{z^2 - z\cosh\beta}{z^2 - 2z\cosh\beta + 1},$$

para $|z| > max\{e^{\beta}, e^{-\beta}\}$*.*

Nos exemplos a seguir, serão aplicadas às propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ para sequências que estão escritas em termos de uma ou várias sequências não definidas explicitamente. Assim, a transformada resultante também dependerá das transformadas $\mathcal{Z}$ das sequências desconhecidas. Este tipo de situação será utilizada na solução de equações de diferenças (Capítulo 4).

Exemplo 1.29. *Considere uma sequência* y_n *com transformada* $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$*. Calcule* $\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\}$*.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\} = \mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\}.$$

Pela definição e propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = Y(z) - 4z^{-1}Y(z) = Y(z)[1 - 4z^{-1}].$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1}\} = Y(z)[1 - 4z^{-1}].$$

Exemplo 1.30. *Seja* x_n *uma sequência com transformada* $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$*. Calcule* $\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\}$*.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} = e^4\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\}.$$

Pela propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{x_{n-2}\} = z^{-2}X(z).$$

Chamando $z^{-2}X(z) = A(z)$ *e pela propriedade de Similaridade,*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\} &= A\left(\frac{z}{e^{-2}}\right)\\ &= A(ze^2)\\ &= (ze^2)^{-2}X(ze^2)\\ &= \frac{X(ze^2)}{z^2e^4}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} &= e^4\mathcal{Z}\{e^{-2n}x_{n-2}\}\\ &= e^4\frac{X(ze^2)}{z^2e^4}\\ &= \frac{X(ze^2)}{z^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{e^{-2(n-2)}x_{n-2}\} = \frac{X(ze^2)}{z^2}.$$

Exemplo 1.31. *Seja* f_n *uma sequência com transformada* $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$*. Calcule* $\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\}$*.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} &= 3\mathcal{Z}\{(n-1)f_{n-1}\}\\ &= 3(\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\} - \mathcal{Z}\{f_{n-1}\}).\end{aligned}$$

Pela propriedade de Translação para Direita,

$$\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} = z^{-1}F(z).$$

Pela propriedade de Diferenciação,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} \\
&= -z\frac{d}{dz}[z^{-1}F(z)] \\
&= -z\left[-\frac{F(z)}{z^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}F(z)\right] \\
&= \frac{F(z)}{z}-\frac{d}{dz}F(z).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} &= 3(\mathcal{Z}\{nf_{n-1}\}-\mathcal{Z}\{f_{n-1}\}) \\
&= 3\left(\frac{F(z)}{z}-\frac{d}{dz}F(z)-\frac{F(z)}{z}\right) \\
&= -3\frac{d}{dz}F(z).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{3(n-1)f_{n-1}\} = -3\frac{d}{dz}F(z).$$

Exemplo 1.32. *Seja x_n uma sequência com transformada $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ e $x_0 = 1$. Calcule $\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\}$, com $a \in \mathbb{R}$.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\} = a^2\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\}.$$

Pela propriedade de Translação para Esquerda,

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - \sum_{r=0}^{1-1} x_r z^{1-r} = zX(z) - x_0 z^1.$$

Chamando $A(z) = zX(z) - x_0 z^1$ e pela propriedade de Similaridade,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\} &= A\left(\frac{z}{a}\right) \\
&= \frac{z}{a}X\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{z}{a}x_0 \\
&= \frac{z}{a}\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - x_0\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\} &= a^2\mathcal{Z}\{a^n x_{n+1}\} \\ &= a^2\left\{\frac{z}{a}\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - x_0\right]\right\}.\end{aligned}$$

Substituíndo $x_0 = 1$ e simplificando,

$$\mathcal{Z}\{a^{n+2}x_{n+1}\} = az\left[X\left(\frac{z}{a}\right) - 1\right].$$

Exemplo 1.33. *Seja y_n uma sequência com transformada $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$. Calcule $\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\}$.*

Pela propriedade de Linearidade,

$$\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\} = 2\mathcal{Z}\{n\} - \mathcal{Z}\{y_n\} + 3\mathcal{Z}\{e^{-n}\}.$$

Pela propriedade de Diferenciação,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{n\} &= \mathcal{Z}\{n.1\} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}.\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{Z}\{1\} = \dfrac{z}{z-1} = A(z)$ e pela propriedade de Similaridade,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{-n}\} &= A\left(\frac{z}{e^{-1}}\right) \\ &= A(ze) \\ &= \frac{ze}{ze-1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\} &= 2\mathcal{Z}\{n\} - \mathcal{Z}\{y_n\} + 3\mathcal{Z}\{e^{-n}\} \\ &= 2\frac{z}{(z-1)^2} - Y(z) + 3\frac{ze}{ze-1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\{2n - y_n + 3e^{-n}\} = \frac{2z}{(z-1)^2} - Y(z) + \frac{3ze}{ze-1}.$$

1.5 Exercícios Propostos

A seguir exercícios propostos em relação à definição e propriedades da Transformada $\mathcal{Z}$, e região de convergência. Pode-se utilizar a lista de transformadas elementares (Apêndice B), como auxílio.

1. Calcule as transformadas, identificando a Região de Convergência:

   (a) $\mathcal{Z}\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$.

   (b) $\mathcal{Z}\{ne^{-4n}\}$.

   (c) $\mathcal{Z}\{1-(-5)^n\}$.

   (d) $\mathcal{Z}\{2+3e^{-2n}\}$.

   (e) $\mathcal{Z}\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$.

   (f) $\mathcal{Z}\{e^{-an}\operatorname{sen}(\alpha n)\}$.

   (g) $\mathcal{Z}\{3^n\operatorname{sen}(2n)\}$.

2. Mostre que:

   (a) $\mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\} = \dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$, para $|z|>1$.

   (b) $\mathcal{Z}\{\operatorname{senh}(\alpha n)\} = \dfrac{z\operatorname{senh}\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$, para $|z|>\max\{e^\alpha, e^{-\alpha}\}$.

3. Calcule:

   (a) $\mathcal{Z}\{2e^{-n}+3e^{-0,5n}\}$.

   (b) $\mathcal{Z}\{5(0,8)^n-4(1,1)^n\}$.

   (c) $\mathcal{Z}\{n\operatorname{sen}(2n)\}$.

   (d) $\mathcal{Z}\{2^n(n^2-n)\}$.

   (e) $\mathcal{Z}\{2n-3(n-1)x_{n-1}\}$.

1.5.1 Respostas

1. (a) $\dfrac{z}{z+\frac{2}{3}}$, para $|z|>\dfrac{2}{3}$.

   (b) $\dfrac{e^4z}{(e^4z-1)^2}$, para $|z|>|e^{-4}|$.

   (c) $\dfrac{6z}{(z-1)(z+5)}$, para $|z|>1$.

   (d) $z\left(\dfrac{3e^2}{e^2z-1}+\dfrac{2}{z-1}\right)$, para $|z|>1$.

(e) $\dfrac{z^2}{z^2+1}$, para $|z| > 1$.

(f) $\dfrac{e^a z \operatorname{sen}\alpha}{e^{2a}z^2 - 2e^a z\cos\alpha + 1}$, para $|z| > |e^{-a}|$.

(g) $\dfrac{3z \operatorname{sen} 2}{z^2 - 6z\cos 2 + 9}$, para $|z| > 3$.

2. Utilizar a fórmula de Euler.

3. (a) $\dfrac{3\sqrt{e}z}{\sqrt{e}z - 1} + \dfrac{2ez}{ez-1}$.

   (b) $\dfrac{5z(10z-23)}{50z^2 - 95z + 44}$.

   (c) $\dfrac{z(z^2-1)\operatorname{sen} 2}{(z^2 - 2z\cos 2 + 1)^2}$.

   (d) $\dfrac{8z}{(z-2)^3}$.

   (e) $\dfrac{2z}{(z-1)^2} + 3\dfrac{d}{dz}X(z)$.

Capítulo 2

Transformada $\mathcal{Z}$ Inversa

Neste capítulo será considerada a seguinte situação: dada uma função $X(z)$, é possível determinar uma sequência x_n tal que $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$? A resposta nem sempre é afirmativa para uma função arbitrária $X(z)$, mas quando existe tal sequência x_n, ela é chamada de transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$ e denotada por $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Exemplo 2.1. *Dada a função*

$$X(z) = \frac{z}{z-2},$$

determine a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

No capítulo anterior foram calculadas as transformadas de várias sequências (resumidas no Apêndice B), entre elas a transformada da sequência a^n, *com* $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}, \text{ se } |z| > |a|.$$

A função

$$X(z) = \frac{z}{z-2}$$

corresponde a esta expressão justamente quando a *toma o valor* 2, *e assim, parece natural considerar a sequência* 2^n *como a transformada* $\mathcal{Z}$ *inversa da função* $X(z)$. *Estritamente falando, seria preciso destacar adicionalmente que esta relação só é válida na região de convergência da transformada* $\mathcal{Z}\{2^n\}$, *ou seja:*

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = 2^n, \text{ para } |z| > |2|.$$

Mas, como nessa situação não há motivo para confusão, é possível simplesmente escrever:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = 2^n,$$

ficando subentendido que a igualdade é válida somente na região de convergência da transformada $\mathcal{Z}$ *da sequência.*

Exemplo 2.2. *Determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de*

$$X(z) = \frac{z}{z+2} + \frac{z}{(z-3)^2}.$$

Usando os resultados do capítulo anterior, resumidos nos apêndices A e B, é possível estabelecer que:

$$\mathcal{Z}\left\{(-2)^n\right\} = \frac{z}{z+2}$$

e

$$\mathcal{Z}\left\{n3^n\right\} = \frac{3z}{(z-3)^2}.$$

Pela linearidade da transformada $\mathcal{Z}$ tem-se que:

$$\mathcal{Z}\left\{(-2)^n + \frac{1}{3}n3^n\right\} = \frac{z}{z+2} + \frac{z}{(z-3)^2},$$

e portanto, a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$ é dada pela sequência

$$(-2)^n + \frac{1}{3}n3^n,$$

isto é:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2} + \frac{z}{(z-3)^2}\right\} = (-2)^n + \frac{1}{3}n3^n = (-2)^n + n3^{n-1}.$$

Nas situações simples consideradas nos exemplos anteriores, a função $X(z)$ pode ser identificada imediatamente ou com ajuda de uma tabela de transformadas, como a transformada de uma certa sequência. Em outros casos, será preciso decompor a função dada em termos de funções mais simples ou ainda utilizar a própria definição da transformada $\mathcal{Z}$ para determinar termo a termo a sequência $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$. Nessas notas serão considerados os seguintes três métodos para obter a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de uma função:

- Série de Potências,
- Frações Parciais,
- Resíduos.

O primeiro método baseia-se na própria definição da transformada $\mathcal{Z}$, o segundo método utiliza manipulações algébricas para decompor a função dada em funções mais simples e o terceiro método utiliza uma técnica geral baseada em resultados fundamentais da teoria de integração de funções de variável complexa.

2.1 Método de Série de Potências

Neste método, o objetivo é obter a transformada $\mathcal{Z}$ inversa a partir de uma expansão de $X(z)$ em séries de potências de z^{-1}. Assim, ao obter uma expressão da forma

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n},$$

para $|z| > R$, a transformada $\mathcal{Z}$ inversa é determinada como a sequência dos coeficientes x_n.

Se $X(z)$ está na forma de uma função racional

$$X(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

onde $g(z)$ e $h(z)$ são polinômios em z, é possível usar o processo de divisão de $g(z)$ por $h(z)$ para obter termo a termo a série de potências de z^{-1} correspondente a $X(z)$.

Com esta técnica é possível, em teoria, determinar quantos termos da sequência forem necessários, mas nem sempre é fácil determinar uma fórmula geral fechada para os termos da sequência inversa.

Exemplo 2.3. *Seja*

$$X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}.$$

Determine a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Dividindo o polinômio $z^2 + z$ *por* $z^2 - 2z + 1$*, tem-se:*

$$\begin{array}{rl} z^2 + z & \big| \, z^2 - 2z + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-z^2 + 2z - 1} & \; 1 \\ 3z - 1 & \end{array}$$

Usualmente, o processo de divisão terminaria neste estágio. Porém, é possível continuar a divisão para eliminar termos no resto e gerar novos termos no quociente. Por exemplo, para eliminar o termo $3z$ *no resto é possível multiplicar o polinômio* $z^2 - 2z + 1$ *por* $3z^{-1}$ *e subtrair, isto é:*

$$\begin{array}{rl} z^2 + z & \big| \, z^2 - 2z + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-z^2 + 2z - 1} & \; 1 + 3z^{-1} \\ 3z - 1 & \\ \underline{-3z + 6 - 3z^{-1}} & \\ 5 - 3z^{-1} & \end{array}$$

De forma análoga, é possível eliminar o termo 5 *no resto, multiplicando o polinômio* $z^2 - 2z + 1$ *por* $5z^{-2}$ *e subtraindo. Este processo pode ser realizado de forma sucessiva:*

$$
\begin{array}{l|l}
z^2+z & z^2-2z+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z^2+2z-1} & 1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+\ldots \\
\quad 3z-1 & \\
\quad \underline{-3z+6-3z^{-1}} & \\
\qquad 5-3z^{-1} & \\
\qquad \underline{-5+10z^{-1}-5z^{-2}} & \\
\qquad\quad 7z^{-1}-5z^{-2} & \\
\qquad\quad \underline{-7z^{-1}+14z^{-2}-7z^{-3}} & \\
\qquad\qquad 9z^{-2}-7z^{-3} &
\end{array}
$$

O quociente da divisão é uma série de potências de z^-1*:*

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 9z^{-4} \ldots .$$

Assim, $x_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$*, o que sugere que a sequência procurada é dada por* $x_n = 2n + 1$*.*

Para mostrar que $x_n = 2n + 1$ *é a expressão correta, basta provar que*

$$\mathcal{Z}\{2n + 1\} = X(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^2}.$$

De fato, $\mathcal{Z}\{2n + 1\} = 2\mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}$ *pela propriedade de linearidade e observando os itens 1 e 5 na lista de transformadas:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{2n + 1\} &= 2\mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\} \\
&= \frac{2z}{(z - 1)^2} + \frac{z}{z - 1} \\
&= \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^2} \\
&= X(z).
\end{aligned}
$$

Logo, $x_n = 2n + 1$ *é a transformada* $\mathcal{Z}$ *inversa de* $X(z)$*.*

Exemplo 2.4. *Considere*

$$X(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^2}$$

e determine x_n *tal que* $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$*, isto é, determine a transformada* $\mathcal{Z}$ *inversa de* $X(z)$*.*

Tem-se que

$$\frac{z^2}{(z + 1)^2} = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 1}$$

e assim é possível determinar x_n *fazendo a divisão correspondente da seguinte forma:*

$$
\begin{array}{ll}
z^2 & \underline{|z^2+2z+1} \\
\underline{-z^2-2z-1} & 1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4}\dots \\
\quad -2z-1 & \\
\quad \underline{2z+4+2z^{-1}} & \\
\qquad 3+2z^{-1} & \\
\qquad \underline{-3-6z^{-1}-3z^{-2}} & \\
\qquad\quad -4z^{-1}-3z^{-2} & \\
\qquad\quad \underline{4z^{-1}+8z^{-2}+4z^{-3}} & \\
\qquad\qquad 5z^{-2}+4z^{-3} & \\
\qquad\qquad \underline{-5z^{-2}-10z^{-3}-5z^{-4}} & \\
\qquad\qquad\quad -6z^{-3}-5z^{-4} & \\
\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

Logo tem-se como quociente da divisão a série dada por

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4} \dots$$

Observando os termos da sequência $\{1, -2, 3, -4, 5, ...\}$ *pode-se conjecturar que* $x_n = (-1)^n(n+1)$. *Para mostrar que de fato*

$$\mathcal{Z}\{(-1)^n(n+1)\} = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

basta observar que $(-1)^n(n+1) = n(-1)^n + (-1)^n$ *e ao considerar a linearidade e as transformadas anteriormente estabelecidas tem-se:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(-1)^n(n+1)\} &= \mathcal{Z}\{n(-1)^n\} + \mathcal{Z}\{(-1)^n\} \\
&= \frac{(-1)z}{(z+1)^2} + \frac{z}{z+1} \\
&= \frac{-z + z(z+1)}{(z+1)^2} \\
&= \frac{-z + z^2 + z}{(z+1)^2} \\
&= \frac{z^2}{(z+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Logo $x_n = (-1)^n(n+1)$ *é a a transformada* $\mathcal{Z}$ *inversa de* $X(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

O exemplo seguinte mostra que embora seja possível usar a divisão de polinômios para achar a série de potências de z^{-1} e assim determinar quantos termos da sequência inversa forem necessários, nem sempre é óbvio como determinar uma fórmula para o termo geral.

Exemplo 2.5. *Seja*

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 + z + 1}.$$

Determine $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Usando a divisão de polinômios, tem-se:

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^2 + z + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-z^2 - z - 1} & 1 - z^{-1} + z^{-3} - z^{-4} + z^{-6} - z^{-7}\ldots \\
\qquad -z - 1 & \\
\qquad \underline{z + 1 + z^{-1}} & \\
\qquad\quad z^{-1} & \\
\qquad\quad \underline{-z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}} & \\
\qquad\qquad -z^{-2} - z^{-3} & \\
\qquad\qquad \underline{z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}} & \\
\qquad\qquad\qquad z^{-4} & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-z^{-4} - z^{-5} - z^{-6}} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -z^{-5} - z^{-6} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{z^{-5} + z^{-6} + z^{-7}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z^{-7} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

Ao analizar cuidadosamente o resíduo

$$1 - z^{-1} + z^{-3} - z^{-4} + z^{-6} + z^{-7}\ldots$$

nota-se que algumas potências de z^{-1} *não aparecem* $(z^{-2}, z^{-5}, z^{-8}, \ldots)$, *ou seja, os coeficientes destes termos são iguais a zero. Assim, pode-se conjecturar que a sequência* x_n *inversa de* $X(z)$ *é da forma:*

$$x_n = \{1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots\}.$$

Embora esta sequência seja aparentemente simples, seria surpreendente conseguir conjecturar a partir dela que seu termo geral é dado por:

$$x_n = \frac{2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(n+1)}{3}\right]}{\sqrt{3}}.$$

Esta sequência será considerada novamente no Exemplo 2.12 da próxima seção e será mostrado como é possível deduzir a fórmula para o termo geral utilizando números complexos.

2.2 Método de Frações Parciais

A ideia fundamental deste método é decompor uma função $X(z)$ em soma de expressões mais simples cuja transformada $\mathcal{Z}$ inversa seja mais fácil de determinar.

Usualmente o método é aplicado a expressões da forma

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

onde $A(z)$ e $B(z)$ são polinômios em z e o objetivo então é reescrever esta expressão como uma soma de frações mais simples, chamadas de frações parciais. A ideia de decomposição em frações parciais é usada também na integração de funções racionais como pode ser visto em diversos livros de Cálculo [5, 7, 18].

A forma particular em que as técnicas de frações parciais são usadas no contexto da transformada $\mathcal{Z}$, levam em consideração o tipo de frações que podem ser reconhecidas como transformada $\mathcal{Z}$ de alguma sequência. É comum que as frações correspondentes a transformadas $\mathcal{Z}$ tenham pelo menos um termo z no numerador e este fato pode ser aproveitado para obter frações parciais fáceis de identificar. Isto é ilustrado nos próximos exemplos.

Exemplo 2.6. *Seja*

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}.$$

Determine a transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $X(z)$.

Se fosse possível expressar $X(z)$ na forma

$$\frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha z}{z-2} + \frac{\beta z}{z-3},$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então seria possível determinar a inversa de $X(z)$ imediatamente, pois os termos na soma correspondem às transformadas $\mathcal{Z}$ de sequências da forma a^n. Mais precisamente, se

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha z}{z-2} + \frac{\beta z}{z-3},$$

então

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \alpha 2^n + \beta 3^n.$$

Uma forma de facilitar a determinação dessa decomposição em frações parciais para $X(z)$ é considerar inicialmente

$$\frac{X(z)}{z},$$

determinar uma decomposição simples para esta expressão e finalmente obter a decomposição para $X(z)$ multiplicando por z. Este procedimento é ilustrado a seguir.

Considere

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{z-2} + \frac{\beta}{z-3}. \tag{2.2.1}$$

Note que:

$$\frac{\alpha}{z-2} + \frac{\beta}{z-3} = \frac{\alpha(z-3) + \beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha+\beta)z - (3\alpha + 2\beta)}{(z-2)(z-3)}. \tag{2.2.2}$$

Assim, ao analisar o numerador de (2.2.2) e comparar com o numerador da primeira fração em (2.2.1), pode-se concluir que para obter a igualdade os coeficientes α e β devem satisfazer

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = 0 \qquad & \textit{(coeficiente de } z\textit{)} \\ -(3\alpha + 2\beta) = 1 \qquad & \textit{(termo independente).} \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema linear por qualquer método, é possível obter os coeficientes α e β da decomposição. Tem-se assim que $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ e portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$$

Multiplicando por z, obtêm-se uma decomposição em frações parciais para $X(z)$ da forma

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{z-2} + \frac{z}{z-3},$$

e pode-se concluir finalmente que a inversa de $X(z)$ é

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Exemplo 2.7. *Seja*

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq b$. Determine $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Aplicando a decomposição em frações parciais em $X(z)/z$:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{z}{(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} \\ &= \frac{\alpha(z-b) + \beta(z-a)}{(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)z - (b\alpha + a\beta)}{(z-a)(z-b)}. \end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, $z = (\alpha+\beta)z - (b\alpha + a\beta)$, tem-se o sistema linear a seguir:

$$\begin{array}{rl} \alpha+\beta = 1 & \textit{(coeficiente de } z\textit{)} \\ -(b\alpha + a\beta) = 0 & \textit{(termo independente),} \end{array}$$

cuja solução é

$$\alpha = \frac{-a}{b-a} \quad e \quad \beta = \frac{b}{b-a}.$$

Assim,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{-a}{b-a}}{z-a} + \frac{\frac{b}{b-a}}{z-b}$$

e portanto

$$X(z) = \left(\frac{-a}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{b}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-b}\right).$$

Logo

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(\frac{-a}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-a}\right) + \left(\frac{b}{b-a}\right)\left(\frac{z}{z-b}\right)\right\} \\ &= \frac{-a}{b-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} + \frac{b}{b-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-b}\right\} \\ &= \frac{-a}{b-a}a^n + \frac{b}{b-a}b^n \\ &= \frac{-a^{n+1} + b^{n+1}}{b-a} \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}\right\} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}.$$

Os exemplos a seguir consideram expressões da forma

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

onde o polinômio $B(z)$ tem uma raiz de multiplicidade dois.

Exemplo 2.8. *Seja*

$$X(z) = \frac{z^2}{(z+5)^2},$$

Determine $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Aplicando a decomposição em frações parciais em $X(z)/z$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{z}{(z+5)^2} \\
&= \frac{A}{z+5} + \frac{B}{(z+5)^2} \\
&= \frac{A(z+5)+B}{(z+5)^2} \\
&= \frac{Az+5A+B}{(z+5)^2}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z *nos numeradores,* $z = Az + 5A + B$ *e tem-se o sistema linear:*

$$\begin{aligned}
A &= 1 \qquad \textit{(coeficiente de } z\textit{)} \\
5A + B &= 0 \qquad \textit{(termo independente)},
\end{aligned}$$

cuja solução é $A = 1$ *e* $B = -5$.

Assim,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z+5} - \frac{5}{(z+5)^2}$$

e portanto

$$X(z) = \frac{z}{z+5} - \frac{5z}{(z+5)^2}.$$

Analisando os itens 2 e 9 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{(-5)^n\} = \frac{z}{z+5} \quad e \quad \mathcal{Z}\{n(-5)^n\} = -\frac{5z}{(z+5)^2},$$

logo

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+5} - \frac{5z}{(z+5)^2}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+5}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5z}{(z+5)^2}\right\} \\
&= (-5)^n + n(-5)^n.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{(z+5)^2}\right\} = (-5)^n(1+n)$.

Exemplo 2.9. *Determine a transformada inversa* $\mathcal{Z}^{-1}$ *de*

$$X(z) = \frac{z}{(z-3)(z-2)^2}.$$

Seja

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z(z-3)(z-2)^2} = \frac{1}{(z-3)(z-2)^2}.$$

Usando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-3)(z-2)^2} \\
&= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} \\
&= \frac{A(z-2)^2 + B(z-2)(z-3) + C(z-3)}{(z-3)(z-2)^2} \\
&= \frac{(A+B)z + (-4A-5B+C)z^2 + (4A+6B-3C)}{(z-3)(z-2)^2}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z *nos numeradores:*

$$1 = (A+B)z + (-4A-5B+C)z^2 + (4A+6B-3C),$$

tem-se o sistema linear:

$$\begin{aligned}
-4A - 5B + C &= 0 \qquad \text{(coeficiente de } z^2\text{)} \\
A + B &= 0 \qquad \text{(coeficiente de } z\text{)} \\
4A + 6B - 3C &= 1 \qquad \text{(termo independente)},
\end{aligned}$$

cuja solução é $A = 1$, $B = -1$ *e* $C = -1$.

Assim,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2}$$

e portanto

$$X(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-2)^2}.$$

Considerando novamente os resultados anteriores sobre transformada resumidos no Apêndice B, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{2(z-2)^2}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{2(z-2)^2}\right\} \\
&= 3^n - 2^n - \frac{n2^n}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-3)(z-2)^2}\right\} = 3^n - 2^n\frac{2+n}{2}.$$

No exemplo a seguir é apresentada uma decomposição em frações parciais para $X(z)$ sem a divisão prévia por z.

Exemplo 2.10. *Determine a transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}$ de*

$$X(z) = \frac{z+3}{(z+1)(z+2)}.$$

Usando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} \\ &= \frac{A(z+2)+B(z+1)}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{(A+B)z+(2A+B)}{(z+1)(z+2)}. \end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{array}{rl} A+B=1 & \textit{(coeficiente de } z\textit{)} \\ 2A+B=3 & \textit{(termo independente)}, \end{array}$$

cuja solução é $A=2$ e $B=-1$.

Assim,

$$X(z) = \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}.$$

Analisando o item 3 na lista de transformadas:

$$\mathcal{Z}\{(-1)^{n-1}\} = \frac{1}{z+1} \quad e \quad \mathcal{Z}\{(-2)^{n-1}\} = \frac{1}{z+2},$$

logo

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right\} \\ &= 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+2}\right\} \\ &= 2(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = 2(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}$.

A vantagem de utilizar a decomposição em frações parciais é que muitas vezes os termos resultantes são funções de z muito simples de inverter. Pode-se observar, entretanto, que na aplicação da técnica de frações parciais para a obtenção da transformada $\mathcal{Z}$ inversa de

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

nos exemplos considerados até aqui, o polinômio $B(z)$ sempre aparece fatorado em termos das suas raízes. Caso contrário, é preciso fatorar o polinômio antes de utilizar o método de frações parciais. Embora em teoria sempre seja possível realizar esta fatoração, no caso de polinômios de grau 2 com raízes complexas ou de polinômios de grau maior que 2, este processo de fatoração pode não ser imediato.

Exemplo 2.11. *Seja*

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 + 10z + 25} + \frac{z^2}{z^2 - z - 6}.$$

O denominador da primeira fração

$$\frac{z^2}{z^2 + 10z + 25}$$

pode ser fatorado imediatamente notando que $z^2 + 10z + 25 = (z+5)^2$ *e portanto*

$$\frac{z^2}{z^2 + 10z + 25} = \frac{z^2}{(z+5)^2},$$

cuja inversa ja foi calculada no exemplo 2.8.

O denominador da segunda fração

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 6}$$

também pode ser fatorado e tem-se

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 6} = \frac{z^2}{(z-3)(z+2)},$$

cuja expressão já foi considerada de forma geral no exemplo 2.7. Assim, aplicando os resultados obtidos nos exemplos 2.7 e 2.8, pode-se calcular a transfor-

mada inversa de $X(z)$ como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2+10z+25}+\frac{z^2}{z^2-z-6}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2+10z+25}\right\}+\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2-z-6}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z+5)^2}\right\}+\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-3)(z+2)}\right\} \\
&= (-5)^n(1+n)+\frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}}{3-(-2)} \\
&= (-5)^n(1+n)+\frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}}{5}
\end{aligned}$$

O exemplo seguinte considera um caso em que o polinômio no denominador tem raízes complexas. Mesmo neste caso é possível utilizar o método de frações parciais, mas há complicações inerentes ao fato de lidar com números complexos. Caso o objetivo seja determinar os coeficientes da sequência inversa sem necessariamente obter uma forma fechada para o termo geral, o método da série de potência pode ser mais conveniente. Caso seja necessário uma fórmula fechada para o termo geral e o método da série de potências não fornece uma conjectura sobre ela (vide Exemplo 2.5), então o método das frações parciais ou o método dos resíduos são mais apropriados.

Exemplo 2.12. *Seja*

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2+z+1}.$$

Determine $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Este mesmo problema foi considerado no Exemplo 2.5 da seção anterior, cuja conclusão é que $x_n=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ deve ser da forma:

$$x_n=\{1,-1,0,1,-1,0,\ldots\}.$$

Além disso, apresenta sem demonstrar uma fórmula geral para x_n:

$$x_n=\frac{2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(n+1)}{3}\right]}{\sqrt{3}}. \tag{2.2.3}$$

Este problema será considerado agora utilizando o método das frações parciais. Note que o denominador da fração

$$\frac{z^2}{z^2+z+1}$$

não pode ser fatorado da forma usual, pois as raízes de $z^2 + z + 1$ não são números reais. Aplicando a fórmula quadrática para $z^2 + z + 1$ é possível obter as raízes

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

e

$$b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Assim, a fatoração em termos das raízes é:

$$\frac{z^2}{z^2+z+1} = \frac{z^2}{\left[z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right]\left[z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right]} = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}.$$

Uma vez obtida esta fatoração, é possível usá-la para determinar a inversa, pois este tipo de função $X(z)$ já foi considerada de forma geral no exemplo 2.7. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2+z+1}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-a)(z-b).}\right\} \\
&= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1}}{-\sqrt{3}i},
\end{aligned}$$

logo

$$x_n = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1}}{i\sqrt{3}}. \tag{2.2.4}$$

A expressão (2.2.4) é uma fórmula geral, mas certamente parece muito mais complicada do que a fórmula geral anunciada anteriormente em (2.2.3) para a sequência $x_n = \{1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots\}$, obtida no exemplo 2.5.

É possível mostrar que (2.2.3) e (2.2.4) são equivalentes utilizando a identidade

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

e a forma polar dos números complexos

$$\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

e

$$\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1}}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{n+1}-\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^{n+1}}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}(n+1)}-e^{-i\frac{2\pi}{3}(n+1)}}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(n+1)}{3}\right]}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$x_n=\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{2\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi(n+1)}{3}\right]}{\sqrt{3}}=\{1,-1,0,1,-1,0,\ldots\}.$$

2.3 Método dos Resíduos

Nesta seção é considerado o método dos resíduos para o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ inversa. Este método é um procedimento geral que em teoria permite determinar a $\mathcal{Z}$ inversa para vários tipos de funções, mas neste texto o método será aplicado principalmente a funções racionais. O método dos resíduos está fundamentado em conceitos e resultados importante da análise complexa que serão considerados sem as respectivas demonstrações, que podem ser encontradas em [3, 10].

2.3.1 Pólos e Resíduos

Os conceitos desenvolvidos nesta subseção são independentes da transformada $\mathcal{Z}$ e podem ser estudados em textos de variáveis complexas. A aplicação destes conceitos para o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ inversa é considerada na Subseção 2.3.2.

Definição 2.1 (Pólo)**.** *Considere uma função $F(z)$ da forma:*

$$F(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_{-m}\neq 0. \tag{2.3.5}$$

Neste caso, z_0 é chamado de pólo de ordem m da função F.

Note que a definição de pólo só faz sentido se a função pode ser escrita na forma (2.3.5). Nem toda função pode ser escrita nesta forma para algum z_0, isto é, há funções que não possuem nenhum pólo (por exemplo, funções polinomiais e em geral funções analíticas em todo o plano $\mathbb{C}$).

Quando uma função $F(z)$ tem um pólo de ordem m em z_0 então o o produto $(z - z_0)^m F(z)$ tem limite finito e diferente de zero quando $z \to z_0$.

Exemplo 2.13. *Considere a função*

$$F(z) = \frac{z+2}{(z-5)^3}.$$

Mostre que $F(z)$ tem um pólo de ordem 3 em $z_0 = 5$.

Para poder concluir que $z_0 = 5$ é um pólo de ordem 3 de $F(z)$ a partir da Definição 2.1, é preciso reescrever $F(z)$ na forma (2.3.5), isto é, como uma soma de potências negativas e não negativas de de $(z-5)$. Note que o numerador $(z+2)$ pode ser reescrito como:

$$z + 2 = 7(z-5)^0 + (z-5)^1.$$

Esta forma de escrever a função $z+2$ pode parecer artificial, mas nada mais é do que a série de Taylor de $z+2$ ao redor de $z = 5$. Com isso, a função $F(z)$ pode ser escrita como:

$$F(z) = \frac{z+2}{(z-5)^3} = F(z) = \frac{7(z-5)^0 + (z-5)^1}{(z-5)^3} = \frac{7}{(z-5)^3} + \frac{1}{(z-5)^2}.$$

Esta expressão está na forma (2.3.5) considerando $z_0 = 5$, $m = 3$, $a_{-3} = 7$, $a_{-2} = 1$ e $a_n = 0$ para $n \geq -1$. Assim, pode-se concluir que 5 é um pólo de ordem 3 de $F(z)$.

Exemplo 2.14. *Considere*

$$F(z) = \frac{z^2+z}{z^2+2z+1}.$$

Mostre que $F(z)$ tem um pólo de ordem 1 (pólo simples) em $z = -1$.

Para facilitar a análise, é mais conveniente fatorar o numerador e denominador de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z^2+z}{z^2+2z+1} = \frac{z(z+1)}{(z+1)^2} = \frac{z}{z+1}.$$

Notando que o numerador z pode ser escrito em termos de $z+1$ como

$$z = -(z+1)^0 + (z+1)^1,$$

tem-se:

$$F(z) = \frac{z}{z+1} = \frac{-(z+1)^0 + (z+1)^1}{z+1} = \frac{-1}{(z+1)^1} + \frac{1}{(z+1)^0},$$

e assim, pode-se concluir que $z = -1$ é um pólo de ordem 1 de $F(z)$.

Os exemplos anteriores sugerem que os pólos de uma função racional estão relacionados com os zeros do denominador de $F(z)$. Note que no primeiro exemplo, $z = 5$ é um pólo de ordem 3 de $F(z)$ e $z = 5$ é também uma raiz de multiplicidade 3 do denominador de $F(z)$. No segundo exemplo, $z = -1$ é um pólo de ordem 1 de $F(z)$ e embora inicialmente $z = -1$ pode ser considerado uma raiz de multiplicidade 2 do denominador, após a fatoração e a simplificação do termo $(z+1)$, $z = -1$ tornou-se uma raiz de multiplicidade 1 do denominador resultante. Estes fatos podem ser formalizados no resultado a seguir.

Teorema 2.1. *Seja*

$$F(z) = \frac{H(z)}{G(z)},$$

onde $H(z)$ e $G(z)$ são funções polinomiais e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $H(z_0) \neq 0$. Então z_0 é um pólo de ordem m de $F(z)$ se e somente se z_0 é uma raiz de multiplicidade m de $G(z)$.

Do resultado anterior, é possível identificar os pólos de uma função racional. Inicialmente, identificar as raízes z_0 do denominador $G(z)$. Se z_0 também é uma raiz do numerador $H(z)$, considerar as possíveis simplificações do termo $(z - z_0)$. Se após simplificações z_0 ainda é uma raiz do denominador resultante e não é uma raiz do numerador, então z_0 é um pólo de $F(z)$ cuja ordem é dada pela multiplicidade de z_0 como raiz do denominador resultante.

Exemplo 2.15. *Determine os pólos da função*

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{z(z+3)^2}.$$

Ao analizar o denominador $z(z+3)^2$, note que $z = 0$ é uma raiz de multiplicidade 1 e $z = -3$ é uma raiz de multiplicidade 2. No entanto, o numerador $z^3 + 2z^2$ também se anula em $z = 0$. Assim, é preciso fatorar e simplificar este termo:

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{z(z+3)^2} = \frac{z^2(z+2)}{z(z+3)^2} = \frac{z(z+2)}{(z+3)^2}.$$

Com isso, $z_0 = -3$ é a única raiz do denominador e tem multiplicidade 2. Como o numerador $z(z+2)$ não se anula em $z = -3$, estão satisfeitas as condições do Teorema 2.1 e pode-se concluir que $z_0 = -3$ é o único pólo de $F(z)$ e é um pólo de ordem 2.

Exemplo 2.16. *Determine os pólos da função*

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^2(z-1)(z+2)^3}.$$

As raízes do denominador $z^2(z-1)(z+2)^3$ são:

$$\begin{aligned} z &= 0 \quad && \text{com multiplicidade 2,} \\ z &= 1 \quad && \text{com multiplicidade 1 e} \\ z &= -2 \quad && \text{com multiplicidade 3.} \end{aligned}$$

O numerador z^3+2z^2+1 não anula-se para nenhum desses valores. Assim, pelo Teorema 2.1, a função $F(z)$ tem pólo de ordem 2 em $z=0$, pólo simples em $z=1$ e pólo de ordem 3 em $z=-2$.

O exemplo seguinte mostra que os pólos de uma função também podem ser números complexos.

Exemplo 2.17. *Determine os pólos da função*

$$F(z)=\frac{z}{z^2+1}.$$

As raízes do denominador são $z=i$ e $z=-i$, logo $F(z)$ pode ser escrita como:

$$F(z)=\frac{z}{(z-i)(z+i)}.$$

Como o numerador não se anula em $z=i$, nem em $z=-i$, pode-se concluir que $z=i$ e $z=-i$ são pólos simples de $F(z)$.

Definição 2.2 (Resíduo)**.** *Seja*

$$F(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-m}\neq 0.$$

O coeficiente a_{-1} é chamado de resíduo de F no pólo z_0, e denotado $\underset{z=z_0}{Res}\,F(z)$.

Os resíduos podem ser calculados de forma simples. Quando z_0 é um pólo simples, tem-se:

$$F(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

logo

$$(z-z_0)F(z)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\ldots$$

e portanto o resíduo a_{-1} pode ser obtido como

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}F(z)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)F(z)]. \tag{2.3.6}$$

Considere agora que z_0 é um pólo duplo:

$$F(z)=\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

logo

$$(z-z_0)^2F(z)=a_{-2}+a_{-1}(z-z_0)+a_0(z-z_0)^2+\ldots$$

e

$$\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2F(z)]=a_{-1}+2a_0(z-z_0)+3a_1(z-z_0)^2+\ldots$$

e portanto o resíduo a_{-1} pode ser obtido como

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}F(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2F(z)]. \tag{2.3.7}$$

Generalizando o procedimento anterior, se z_0 é pólo de ordem m de uma função F, então o resíduo de F em z_0 pode ser calculado como:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m F(z)]. \tag{2.3.8}$$

A expressão (2.3.8) coincide com a expressão (2.3.6) quando $m = 1$ interpretando a $0-$*ésima* derivada de uma função simplesmente como a função sem derivar.

Exemplo 2.18. *A função*

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}$$

tem um pólo simples em $z = -3$ e um pólo duplo em $z = 1$. Assim, os resíduos correspondentes podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-3} F(z) &= \lim_{z\to -3}[(z+3)F(z)] \\
&= \lim_{z\to -3}[(z+3)\frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}] \\
&= \lim_{z\to -3} \frac{z^2}{(z-1)^2} \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} F(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 F(z)] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 \frac{z^2}{(z+3)(z-1)^2}] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{z+3}\right] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{(z+3)2z - z^2}{(z+3)^2} \\
&= \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.19. *Determine os resíduos de*

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

em cada um dos seus pólos.

No Exemplo 2.17 foi mostrado que $z = i$ e $z = -i$ são pólos simples de $F(z)$. Assim:

$$
\begin{aligned}
\underset{z=i}{Res}\, F(z) &= \lim_{z\to i}[(z-i)F(z)] \\
&= \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z}{(z-i)(z+i)}\right] \\
&= \lim_{z\to i}\frac{z}{(z+i)} \\
&= \frac{i}{2i} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\underset{z=-i}{Res}\, F(z) &= \lim_{z\to i}[(z+i)F(z)] \\
&= \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{z}{(z-i)(z+i)}\right] \\
&= \lim_{z\to -i}\frac{z}{(z-i)} \\
&= \frac{-i}{-2i} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2.3.2 Série de Laurent e Teorema dos Resíduos

A expressão (2.3.5) considerada na definição de pólo de uma função $F(z)$ na realidade é um caso particular de uma expressão chamada série de Laurent de uma função. A seguir é enunciada a definição e um resultado fundamental sobre a série de Laurent.

Teorema 2.2 (Série de Laurent)**.** *Se $F(z)$ é analítica em $r < |z - z_0| < R$, então $F(z)$ pode ser escrito como*

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{2.3.9}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{2.3.10}$$

e C é qualquer curva simples fechada que separe $|z - z_0| = r$ de $|z - z_0| = R$. A série definida por (2.3.9) e (2.3.10) é chamada Série de Laurent de $F(z)$ ao redor de z_0.

A seguir são estabelecidas algumas relações entre os conceitos de pólo, resíduos e série de Laurent com o problema do cálculo de transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

Dada uma sequência f_n, pela definição da transformada $\mathcal{Z}$, tem-se:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por z^{n-1}, tem-se:

$$\begin{aligned} z^{n-1}F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{n-k-1} \\ &= f_0 z^{n-1} + f_1 z^{n-2} + \ldots + f_n z^{-1} + f_{n+1} z^{-2} + \ldots, \end{aligned}$$

que pode ser considerada como um desenvolvimento em série de Laurent de $z^{n-1}F(z)$ em torno de $z_0 = 0$. Note que f_n é o coeficiente de z^{-1}. Pelo teorema da série de Laurent, o coeficiente do termo z^{-1} pode ser calculado como:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} F(z) dz. \tag{2.3.11}$$

Esta igualdade mostra que é possível calcular o termo f_n a partir da função $F(z)$, bastando calcular a integral de linha em (2.3.11). Embora do ponto de vista teórico isto significa que é possível calcular qualquer termo f_n, ainda seria preciso calcular em cada caso uma integral de linha para tal fim. O próximo teorema mostra que é possível calcular este tipo de integral de linha usando os resíduos de uma função.

Teorema 2.3 (Teorema do Resíduo)**.** *Se C é uma curva fechada simples orientada positivamente tal que $F(z)$ é analítica sobre C e no seu interior exceto nos pontos $z_1, \ldots, z_k$, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz = \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{Res}\, F(z). \tag{2.3.12}$$

O teorema do resíduo permite calcular integrais da forma

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz$$

como a soma dos resíduos de $F(z)$ nos pólos no interior da curva C. Note que a integral de linha em (2.3.11) é similar, mas com $z^{n-1}F(z)$ no lugar de $F(z)$. Assim, (2.3.11) pode ser calculada como a soma dos resíduos de $z^{n-1}F(z)$ em cada pólo no interior da curva C, considerando uma curva C que contenha todos os pólos.

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa via método dos resíduos. Seja f_n uma sequência e $F(z)$ sua transformada $\mathcal{Z}$. Para cada n, tem-se:

$$f_n = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} z^{n-1}F(z), \tag{2.3.13}$$

onde $z_1, \ldots, z_k$ são os pólos de $z^{n-1}F(z)$.

A fórmula (2.3.13) permite calcular o termo f_n, para cada n, somando os resíduos da função $z^{n-1}F(z)$ em seus pólos. Em alguns casos as funções $z^{n-1}F(z)$ tem sempre os mesmos pólos e da mesma ordem, sem importar o valor de n. Nesta situação os resíduos podem ser escritos em termos de n e é possível obter uma forma geral para o termo f_n imediatamente. Em outras situações as funções $z^{n-1}F(z)$ tem pólos diferentes ou de diferentes ordens dependendo do valor de n. Nesse caso, é preciso calcular os resíduos separadamente para cada valor de n que corresponda a um comportamento especial dos pólos de $z^{n-1}F(z)$.

Exemplo 2.20. *Seja*

$$F(z) = \frac{z-1}{z-2}.$$

Para determinar a transformada inversa de $F(z)$ pelo método dos resíduos multiplica-se $F(z)$ por z^{n-1}:

$$z^{n-1}F(z) = \frac{z^{n-1}(z-1)}{z-2}.$$

Esta função sempre tem um pólo simples em $z = 2$ para qualquer $n \geq 0$. Note também que a função tem um pólo simples em $z = 0$ só quando $n = 0$. Assim, os casos $n = 0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$\begin{aligned} f_0 &= \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-1}F(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} z^{-1}F(z) \\ &= \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z-1)}{z(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{(z-1)}{z(z-2)} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z(z-1)}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)(z-1)}{z(z-2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

e para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}F(z) \\ &= \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z^{n-1}(z-1)}{(z-2)} \\ &= \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)z^{n-1}(z-1)}{(z-2)} \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f_n = \begin{cases} 1 & para\ n = 0 \\ 2^{n-1} & para\ n \geq 1, \end{cases}$$

gerando a sequência $f_n = \{1, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$.

Exemplo 2.21. *Sendo* a *e* b *números complexos distintos, para determinar a transformada inversa de*

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

considera-se

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^n}{(z-a)(z-b)},$$

que tem dois pólos simples em $z = a$ *e* $z = b$ *para* $n \geq 0$. *Assim,*

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname*{Res}_{z=a} z^{n-1}X(z) + \operatorname*{Res}_{z=b} z^{n-1}X(z) \\ &= \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{z^n}{(z-a)(z-b)} + \operatorname*{Res}_{z=b} \frac{z^n}{(z-a)(z-b)} \\ &= \lim_{z\to a}(z-a)\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b}(z-b)\frac{z^n}{(z-a)(z-b)} \\ &= \lim_{z\to a} \frac{z^n}{z-b} + \lim_{z\to b} \frac{z^n}{z-a} \\ &= \frac{a^n}{a-b} + \frac{b^n}{b-a} \\ &= \frac{-a^n}{b-a} + \frac{b^n}{b-a} \\ &= \frac{b^n - a^n}{b-a}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$, *para* $n \geq 0$.

Exemplo 2.22. *Para determinar a transformada inversa de*

$$X(z) = \frac{1}{z-1}$$

considera-se

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z^{n-1}}{z-1},$$

que tem um pólo simples em $z = 1$ *para* $n \geq 0$ *e um pólo simples em* $z = 0$ *quando* $n = 0$. *Assim, se* $n = 0$ *tem-se:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= \underset{z=1}{Res}\, z^{0-1}X(z) + \underset{z=0}{Res}\, z^{0-1}X(z) \\
&= \underset{z=1}{Res}\, \frac{1}{z(z-1)} + \underset{z=0}{Res}\, \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z-1)} + \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-1)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z} + \lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

e para $n \geq 1$, *tem-se:*

$$\begin{aligned}
x_n &= \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1} z^n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n = \begin{cases} 0, \ \textit{para } n = 0 \\ 1, \ \textit{para } n \geq 1, \end{cases}$$

que corresponde à sequência $x_n = \{0, 1, 1, 1, \ldots\}$.

Exemplo 2.23. *Para determinar a transformada inversa de*

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+3)^2}$$

tem-se

$$z^{n-1}F(z) = \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2},$$

que tem um pólo de segunda ordem em $z = -3$ para todo $n \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
f_n &= \underset{z=-3}{Res}\, z^{n-1}F(z) \\
&= \underset{z=-3}{Res}\, \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2} \\
&= \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}(z+3)^2 \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2} \\
&= \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz} z^{n+1} \\
&= \lim_{z\to -3} (n+1)z^n \\
&= (n+1)(-3)^n.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f_n = (n+1)(-3)^n$, para $n \geq 0$.

Exemplo 2.24. *Para determinar a transformada inversa de*

$$Y(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

tem-se

$$z^{n-1}Y(z) = \frac{z^{n-1}}{(z+1)(z+2)},$$

que tem um pólo simples em $z = 0$ quando $n = 0$, mas não para $n \geq 1$. A função tem pólos simples em $z = -1$ e $z = -2$ para todo $n \geq 0$. Assim, os casos $n = 0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \underset{z=0}{Res}\, z^{-1}Y(z) + \underset{z=-1}{Res}\, z^{-1}Y(z) + \underset{z=-2}{Res}\, z^{-1}Y(z) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -2} \frac{z+2}{z(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
y_n &= \underset{z=-1}{Res}\, z^{n-1}Y(z) + \underset{z=-2}{Res}\, z^{n-1}Y(z) \\
&= \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -2} \frac{(z+2)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} \\
&= (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y_n = \begin{cases} 0 & \textit{para } n = 0 \\ (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1} & \textit{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.25. *Sendo a e b números complexos distintos, para determinar a transformada inversa de*

$$Y(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

tem-se

$$z^{n-1}Y(z) = \frac{z^{n-1}}{(z-a)(z-b)},$$

que tem um pólo simples em $z = 0$ quando $n = 0$, mas não para $n \geq 1$. A função $z^{n-1}Y(z)$ tem pólos simples em $z = a$ e $z = b$ para todo $n \geq 0$. Assim, os casos $n = 0$ e $n \geq 1$ precisam ser considerados separadamente:

$$\begin{aligned} y_0 &= \underset{z=0}{Res}\, z^{-1}Y(z) + \underset{z=a}{Res}\, z^{-1}Y(z) + \underset{z=b}{Res}\, z^{-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to a} \frac{z-a}{z(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b} \frac{z-b}{z(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} y_n &= \underset{z=a}{Res}\, z^{n-1}Y(z) + \underset{z=b}{Res}\, z^{n-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to a} \frac{(z-a)z^{n-1}}{(z-a)(z-b)} + \lim_{z\to b} \frac{(z-b)z^{n-1}}{(z-a)(z-b)} \\ &= \frac{a^{n-1}}{a-b} + \frac{b^{n-1}}{b-a}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y_n = \begin{cases} 0 & \textit{se } n = 0 \\ \dfrac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b-a} & \textit{se } n \geq 1. \end{cases}$$

2.4 Exercícios Propostos

1. Utilize o método de Série de Potências para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ tal que:

   (a) $X(z) = \dfrac{2z}{z^2+z+1}$.

   (b) $X(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

2. Utilize o método de Frações Parciais para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ tal que:

   (a) $Y(z) = \dfrac{2z^3}{(z-2)^3}$.

   (b) $Y(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$.

3. Utilize o método dos Resíduos para calcular $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ tal que:

   (a) $F(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}$.

   (b) $F(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)(z+3)}$.

   (c) $F(z) = \dfrac{2z^2-z}{(z+1)^2(z-2)}$.

4. Calcule:

   (a) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{6z^2-10z+2}{z^2-3z+2}\right\}$.

   (b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2-2z+4}\right\}$.

   (c) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{10z(z+5)}{(z-1)(z-2)(z+3)}\right\}$.

   (d) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{4z}{3z^2-2z-1}\right\}$.

   (e) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2+2z}{(z+3)(z-4)}\right\}$.

   (f) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{z^2+1}\right\}$.

   (g) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{z^2-z+1}\right\}$.

   (h) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2-4z+1}\right\}$.

   (i) $\mathcal{Z}^{-1}\{z(e^{\frac{1}{z}}-1)\}$

2.4.1 Respostas

1. (a) $x_n = \dfrac{4\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{3}} = \{0, 2, -2, 0, 2, -2, \ldots\}.$

   (b) $x_n = \text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}.$

2. (a) $y_n = 2^n(n+1)(n+2).$

   (b) $y_n = n3^{n-1}.$

3. (a) $f_n = 3(-2)^n - 2(-1)^n.$

   (b) $f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{5(-3)^n - 3}{12} & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$

   (c) $f_n = \dfrac{2^n - 3(-1)^n n - (-1)^n}{3}.$

4. (a) $x_n = \begin{cases} 6 & \text{se } n = 0 \\ 3 \cdot 2^n + 2 & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$

   (b) $x_n = \dfrac{2^n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}.$

   (c) $x_n = (-3)^n + 14 \cdot 2^n - 15.$

   (d) $x_n = 1 - (-3)^{-n}.$

   (e) $x_n = \dfrac{(-3)^n + 3 \cdot 2^{2n+1}}{7}.$

   (f) $x_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right).$

   (g) $x_n = \dfrac{2\,\text{sen}\left[\frac{\pi(n+1)}{3}\right]}{\sqrt{3}}.$

   (h) $x_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$

   (i) $x_n = \dfrac{1}{(n+1)!}.$

Capítulo 3

Equações de Diferenças

Uma importante aplicação da transformada $\mathcal{Z}$ é a resolução de equações de diferenças. As equações de diferenças podem ser estudadas de um ponto de vista estritamente matemático ou também como parte de problemas de modelagem matemática em diversas áreas (processamento digital de sinais, momentos de flexão, crescimento populacional, matemática financeira, computação, etc.).

3.1 Definição

A seguir é apresentada uma definição do conceito de equação de diferenças e alguns exemplos elementares.

Definição 3.1. *Uma equação de diferenças é uma equação descrevendo uma relação entre os termos de uma sequência de números. Uma sequência é chamada de solução da equação de diferenças quando os termos da sequência satisfazem a equação.*

Exemplo 3.1. *Considere a sequência*

$$x_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

É possível estabelecer várias relações entre os termos da sequência, por exemplo, é possível afirmar que cada termo da sequência somado ao número 2 é igual ao termo seguinte da sequência. Para descrever esta relação em linguagem matemática, é usada a notação x_n para representar tanto a sequência como o $n-$ésimo termo da sequência. Com isso a relação entre os termos pode ser escrita como:

$$x_n + 2 = x_{n+1} \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1.1}$$

Assim, a equação 3.1.1 é uma equação de diferenças e $x_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ é uma solução da equação.

Exemplo 3.2. *Mostre que a sequência*

$$x_n = 2^n$$

é uma solução da equação de diferenças

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

A equação de diferenças estabelece que um termo qualquer da sequência multiplicado por 2 é igual ao termo seguinte da sequência. Note que a sequência

$$x_n = 2^n = \{0, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

satisfaz esta relação e isto pode ser mostrado formalmente ao considerar que se $x_n = 2^n$ *então*

$$x_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2x_n.$$

Nos exemplos anteriores, é possível notar que as equações de diferenças consideradas não tem solução única. Por exemplo, as sequências

$$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

ou

$$\{-11, -9, -7, -5, \ldots\}$$

também são outras soluções da equação de diferenças

$$x_n + 2 = x_{n+1}.$$

Em geral, para determinar uma solução específica de uma equação de diferenças é necessário acrescentar uma condição inicial.

Exemplo 3.3. *Considere a equação de diferenças*

$$y_{n+1} = 3y_n + 1$$

com condição inicial $y_0 = 2$. *Determine o termo* y_4 *da sequência solução.*

A condição $y_0 = 2$ *indica que, além de satisfazer a equação de diferenças, a sequência procurada deve começar com o número* 2. *A partir desta condição, a sequência solução da equação de diferenças pode ser descrita termo a termo, aproveitando a forma especial em que esta definida a equação de diferenças como uma relação de recorrência. Assim:*

$$\begin{aligned} y_0 &= 2 \\ y_1 &= 3(y_0) + 1 = 3(2) + 1 = 7 \\ y_2 &= 3(y_1) + 1 = 3(7) + 1 = 22 \\ y_3 &= 3(y_2) + 1 = 3(22) + 1 = 67 \\ y_4 &= 3(y_3) + 1 = 3(67) + 1 = 202 \end{aligned}$$

No exemplo anterior, embora seja possível construir termo a termo os elementos da sequência solução

$$y_n = \{2, 7, 22, 67, 202, \ldots\},$$

não é simples determinar uma forma geral para o $n-$ésimo termo da sequência. Considere por exemplo a sequência conhecida como sequência de Fibonacci, isto é, a sequência

$$f_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}.$$

Não é difícil identificar uma relação entre os termos da sequência e considerar a seguinte equação de diferenças correspondente:

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ f_0 = 0,\ f_1 = 1. \end{cases}$$

Claramente a sequência

$$f_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

é a solução desta equação de diferenças, mas determinar uma fórmula fechada para o termo geral de f_n só a partir da sequência, não é um assunto trivial.

No restante deste capítulo, a transformada $\mathcal{Z}$ é usada para determinar a solução geral de equações de diferenças lineares. A transformada $\mathcal{Z}$ é definida como uma aplicação que transforma sequências em funções, assim é preciso fazer uma importante consideração para poder justificar o método de solução: em uma equação da diferenças, a notação x_n que representa o $n-$ésimo termo também é usada para denotar a própria sequência. Além disso, as notações x_{n+1}, x_{n+2} ou em geral x_{n+k} são usadas tanto para denotar o termo $n+1$, $n+2$ ou $n+k$ da sequência, quanto as sequências transladadas em 1, 2, ou k posições à esquerda, como definidas na Subseção 1.3.4. Isto não é realmente um abuso de notação, pois a sequência resultante de um deslocamento à esquerda é a sequência dos termos x_{n+1}, a resultante de dois deslocamentos à esquerda é a sequências dos termos x_{n+2} e assim por diante.

3.2 Resolução de Equações de Diferenças

A transformada $\mathcal{Z}$ pode ser utilizada para determinar a sequência x_n solução de uma equação de diferenças. A ideia é aplicar a transformada à equação e partir de propriedades e expressões conhecidas determinar uma expressão isolada para a transformada $X(z)$ de x_n. Para determinar a sequência x_n basta então aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ inversa à expressão encontrada para $X(z)$. A seguir é apresentado um exemplo elementar para ilustrar o método de solução descrito.

Exemplo 3.4. *Considere a seguinte equação de diferenças*

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

A sequência

$$\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$$

é uma solução da equação, como foi discutido no Exemplo 3.2.

De fato, dada a equação de diferenças

$$y_{n+1} = 2y_n$$

e aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade, tem-se:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{2y_n\}.$$

Utilizando as propriedades de translação (Teorema 1.4) no lado esquerdo da igualdade, a linearidade no lado direito e a notação $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, tem-se:

$$z[Y(z) - y_0] = 2Y(z).$$

Substituindo $y_0 = 1$:

$$z[Y(z) - 1] = 2Y(z).$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Mas já foi estabelecido que

$$\mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Logo, $y_n = 2^n$ é a solução da equação de diferenças.

O exemplo anterior, embora simples, ilustra as diferentes etapas necessárias para determinar a solução de uma equação de diferenças usando a transformada $\mathcal{Z}$: aplicar a transformada, usar propriedades e transformadas conhecidas, isolar a transformada da sequência procurada e aplicar a transformada inversa. Cada uma das etapas pode ser mais ou menos trabalhosa, como é ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.5. *Considere a equação de diferenças*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0 \\ y_0 = 1 \ \text{ e } y_1 = 4. \end{cases}$$

É possível usar a própria equação de diferenças e as condições iniciais para inferir que a solução da equação é a sequência

$$y_n = \{1, 4, 12, 32, 80, \ldots\},$$

mas será utilizada a transformada $\mathcal{Z}$ para determina o termo geral da sequência.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, tem-se:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

Como $\mathcal{Z}\{0\} = 0$, utilizando a propriedade da linearidade e translação no lado esquerdo da igualdade, tem-se:

$$z^2\left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] - 4z[Y(z) - y_0] + 4Y(z) = 0.$$

Substituindo $y_0 = 1$ e $y_1 = 4$:

$$z^2Y(z) - z^2 - 4z - 4zY(z) + 4z + 4Y(z) = 0.$$

Isolando $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2}.$$

Para determinar a transformada inversa de $Y(z)$ pode-se utilizar o método das frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-2)^2} \\
&= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2} \\
&= \frac{A(z-2) + B}{(z-2)^2} \\
&= \frac{Az - 2A + B}{(z-2)^2}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = 2$. Assim,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{(z-2)^2}$$

e portanto

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^2}.$$

Pelas fórmulas de transformadas desenvolvidas anteriormente tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}$$

e
$$\mathcal{Z}\{n2^n\} = \frac{2z}{(z-2)^2}.$$

Assim:
$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^2}\right\} \\ &= 2^n + n2^n \\ &= 2^n(n+1). \end{aligned}$$

Logo, $y_n = 2^n(n+1)$ *é a fórmula geral da sequência*
$$y_n = \{1, 4, 12, 32, 80, \ldots\},$$
solução da equação de diferenças.

Exemplo 3.6. *Considere a equação de diferenças*
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *em ambos os lados da equação:*
$$\mathcal{Z}\{a_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a_n + n\}.$$

Utilizando a propriedade de linearidade:
$$\mathcal{Z}\{a_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a_n\} + \mathcal{Z}\{n\}.$$

Pela propriedade de translação à esquerda e usando que $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$ *tem-se:*
$$zA(z) - za_0 = A(z) + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Substituindo $a_0 = 0$*:*
$$zA(z) = A(z) + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Isolando $A(z)$*:*
$$A(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Usando o métodos dos resíduos para determinar a transformada inversa de $A(z)$*, tem-se que*
$$z^{n-1}A(z) = \frac{z^n}{(z-1)^3}$$

tem um pólo de ordem 3 *em* $z = 1$*. Assim:*

$$\begin{aligned}
\underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}A(z) &= \underset{z=1}{Res}\, \frac{z^n}{(z-1)^3} \\
&= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z^n(z-1)^3}{(z-1)^3} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} n(n-1) z^{n-1} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

é a solução da equação de diferenças.

Exemplo 3.7. *Considere a equação de diferenças dada por*

$$\begin{cases} y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *em ambos os lados da equação de diferenças:*

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n\} = \mathcal{Z}\{3^n\},$$

e pela propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} + 3\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} + 2\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{3^n\}.$$

Utilizando a propriedade de translação à esquerda e o fato de que

$$\mathcal{Z}\{3^n\} = \frac{z}{z-3}$$

tem-se que:

$$(z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z) + 3(zY(z) - y_0z) + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Substituindo $y_0 = 1$ *e* $y_1 = 0$*:*

$$z^2Y(z) - 1z^2 - 0z + 3zY(z) - 3z + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Isolando $Y(z)$*:*

$$Y(z)(z^2 + 3z + 2) = \frac{z}{z-3} + z^2 + 3z.$$

$$Y(z) = \left(\frac{z}{z-3} + z^2 + 3z\right)\left(\frac{1}{z^2+3z+2}\right).$$

$$Y(z) = \frac{z(z^2-8)}{(z-3)(z+1)(z+2)}.$$

Para calcular a inversa utilizando o método das frações parciais em

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2-8}{(z-3)(z+1)(z+2)}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2} \\
&= \frac{A(z+1)(z+2) + B(z-3)(z+2) + C(z-3)(z+1)}{(z-3)(z+1)(z+2)} \\
&= \frac{(A+B+C)z^2 + (3A-B-2C)z + (2A-6B-3C)}{(z-3)(z+1)(z+2)}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z nos numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ 3A-B-2C = 0 \\ 2A-6B-3C = -8 \end{cases}$$

cuja solução é

$$A = \frac{1}{20}, B = \frac{7}{4} \text{ e } C = -\frac{4}{5}.$$

Assim:

$$Y(z) = \frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{20}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{7}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right)\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{20}(3)^n + \frac{7}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = \frac{1}{20}(3)^n + \frac{7}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n$$

é a solução procurada.

Exemplo 3.8. *Considere a equação de diferenças dada por*

$$\begin{cases} x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n \\ x_0 = 1,\ x_1 = -1. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Pela propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}\} - 4\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} + 4\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Utilizando a propriedade de translação à esquerda e o fato de que

$$\mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}$$

tem-se que:

$$(z^2X(z) - x_0z^2 - x_1z) - 4(zX(z) + x_0z) + 4X(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Substituindo $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$:

$$z^2X(z) - 1z^2 + 1z - 4zX(z) + 4z + 4X(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $X(z)$:

$$X(z)(z^2 - 4z + 4) = \frac{z}{z-2} + z^2 - 5z.$$

$$X(z) = \frac{z^3 + 11z - 7z}{(z-2)^3}.$$

Utilizando o método dos resíduos, tem-se que:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}z(z^2 - 7z + 11)}{(z-2)^3} = \frac{z^n(z^2 - 7z + 11)}{(z-2)^3}$$

o qual possui um pólo de terceira ordem em $z = 2$.

Calculando x_n:

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}X(z) \\
&= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-2)^3 z^n(z^2-7z+11)}{(z-2)^3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}[z^n(z^2-7z+11)] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}[nz^{n-1}(z^2-7z+11)+z^n(2z-7)] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\{z^{n-2}[(n-1)(11n-7nz+nz^2-7z+2z^2)+(-7nz+2nz^2-7z+4z^2)]\} \\
&= \frac{1}{2}2^{n-2}[(n-1)(n-6)+(-6n+2)] \\
&= 2^{n-3}(n^2-13n+8).
\end{aligned}$$

Logo, a solução procurada é $x_n = 2^{n-3}(n^2-13n+8)$.

Exemplo 3.9. *Considere a equação de diferenças*

$$y_n - 4y_{n-1} + 3y_{n-2} = 2^n,$$

cujas condições iniciais são dadas por $y_n = 0$ para $n < 0$.

Para determinar a solução da equação de diferenças, aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{y_n - 4y_{n-1} + 3y_{n-2}\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

Utilizando a propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{y_n\} - 4\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} + 3\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = \mathcal{Z}\{2^n\}.$$

E pela propriedade de translação com deslocamento à direita:

$$Y(z) - 4z^{-1}Y(z) + 3z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $Y(z)$:

$$\begin{aligned}
Y(z)\left(1-4z^{-1}+3z^{-2}\right) &= \frac{z}{z-2} \\
Y(z)\left(\frac{z^2-4z+3}{z^2}\right) &= \frac{z}{z-2} \\
Y(z)\frac{(z-1)(z-3)}{z^2} &= \frac{z}{z-2} \\
Y(z) &= \frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}.
\end{aligned}$$

Utilizando o método dos resíduos, tem-se que:

$$\begin{aligned} Y(z)z^{n-1} &= \frac{z^3 z^{n-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-2)(z-3)}, \end{aligned}$$

que possui três pólos simples, em $z = 1$*,* $z = 2$ *e* $z = 3$*. Calculando os resíduos:*

$$\begin{aligned} y_n &= \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}Y(z) + \underset{z=2}{Res}\, z^{n-1}Y(z) + \underset{z=3}{Res}\, z^{n-1}Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1}[(z-1)Y(z)z^{n-1}] + \lim_{z\to 2}[(z-2)Y(z)z^{n-1}] + \lim_{z\to 3}[(z-3)Y(z)z^{n-1}] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z^{n+2}}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z\to 2}\frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-3)} + \lim_{z\to 3}\frac{z^{n+2}}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^{n+2}}{-1} + \frac{3^{n+2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = \frac{1}{2} - 4\cdot 2^n + \frac{9}{2}\cdot 3^n.$$

Exemplo 3.10. *Considere a equação de diferenças*

$$y_{n+2} - 4y_n = 2^n$$

com as condições iniciais $y_0 = 0$ *e* $y_1 = 1$*.*

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *em ambos os lados da equação de diferenças:*

$$z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 - 4Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Substituindo $y_0 = 0$ *e* $y_1 = 1$*:*

$$z^2Y(z) - z - 4Y(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Isolando $Y(z)$*:*

$$\begin{aligned} Y(z)\left(z^2-4\right) &= z + \frac{z}{z-2} \\ Y(z)(z-2)(z+2) &= \frac{z^2-2z+z}{z-2} \\ Y(z) &= \frac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+2)}. \end{aligned}$$

Calculando a decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z-1}{(z-2)^2(z+2)} \\ &= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} \\ &= \frac{-\frac{3}{16}}{z+2} + \frac{\frac{3}{16}}{z-2} + \frac{\frac{1}{4}}{(z-2)^2}\end{aligned}$$

e portanto

$$Y(z) = -\frac{3}{16}\left(\frac{z}{z+2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{(z-2)^2}\right).$$

Assim, das fórmulas obtidas anteriormente:

$$\begin{aligned}y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{3}{16}\left(\frac{z}{z+2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{(z-2)^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{3}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\} + \frac{3}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\} \\ &= \left(-\frac{3}{16}\right)(-2)^n + \left(\frac{3}{16}\right)2^n + \left(\frac{1}{8}\right)n2^n.\end{aligned}$$

Logo, a solução é

$$y_n = -\frac{3}{16}(-2)^n + \frac{3}{16}2^n + \frac{1}{8}n2^n.$$

Exemplo 3.11. *Considere a equação de diferenças*

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

e as condições iniciais $x_0 = 1$ *e* $x_1 = -4$. *Aplicando a transformada* $\mathcal{Z}$*:*

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

Utilizando a propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+2}\} + 3\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} + 2\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{0\}.$$

E pela propriedade de translação:

$$(z^2X(z) - x_0z^2 - x_1z) + 3(zX(z) - x_0z) + 2X(z) = 0.$$

Substituindo $x_0 = 1$ *e* $x_1 = -4$*:*

$$z^2X(z) - 1.z^2 - (-4).z + 3zX(z) - 3.1z + 2X(z) = 0.$$

Isolando $X(z)$*:*

$$X(z)[z^2 + 3z + 2] - z^2 + 4z - 3z = 0.$$

$$X(z)[z^2 + 3z + 2] = z^2 - z.$$

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 3z + 2}.$$

$$X(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}.$$

Utilizando o método dos resíduos, tem-se que:

$$\begin{aligned} X(z)z^{n-1} &= \frac{z(z-1)z^{n-1}}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{z^n(z-1)}{(z+1)(z+2)}, \end{aligned}$$

que possui dois pólos simples, em $z = -1$ *e* $z = -2$*. Calculando os resíduos:*

$$\begin{aligned} x_n &= \underset{z=-1}{Res}\, z^{n-1}X(z) + \underset{z=-2}{Res}\, z^{n-1}X(z) \\ &= \lim_{z \to -1}[(z+1)X(z)z^{n-1}] + \lim_{z \to -2}[(z+2)X(z)z^{n-1}] \\ &= \lim_{z \to -1} \frac{z^n(z-1)}{z+2} + \lim_{z \to -1} \frac{z^n(z-1)}{z+1} \\ &= -2(-1)^n + 3(-2)^n. \end{aligned}$$

Logo, a solução é

$$x_n = -2(-1)^n + 3(-2)^n.$$

Exemplo 3.12 (Números de Fibonacci)**.** *Considere a equação de diferenças*

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ f_0 = 0,\ f_1 = 1, \end{cases}$$

cuja solução é a sequência

$$f_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}.$$

Começando por 0 *e* 1*, cada termo subsequente corresponde a soma dos dois anteriores. Esta é a conhecida sequência dos números de Fibonacci. Para obter uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci a partir da equação*

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

aplica-se a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{f_{n+2}\} = \mathcal{Z}\{f_{n+1} + f_n\}.$$

Utilizando a propriedade da Translação e da Linearidade:

$$z^2\left[F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z}\right] = z[F(z) - f_0] + F(z).$$

Substituindo $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$:

$$z^2F(z) - z = zF(z) + F(z).$$

Isolando $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

O polinômio no denominador possui duas raízes reais em:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

logo pode ser escrito como:

$$z^2 - z - 1 = \left[z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\left[z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Calculando a decomposição em frações parciais de $F(z)$ dividido por z, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{F(z)}{z} &= \frac{1}{z^2 - z - 1} \\
&= \frac{A}{z - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{z - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{z - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

e portanto

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{z}{z-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n. \end{aligned}$$

Pode-se reescrever a solução utilizando o número de ouro, pois uma das raízes de $z^2 - z - 1$ é o próprio número de ouro

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e a outra raíz é

$$1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Assim,

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

é a fórmula procurada para o n-ésimo número de Fibonacci.

Os próximos exemplos envolvem uma equação de diferenças com coeficientes não constantes, mas que também pode ser resolvida aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ e suas propriedades. São apresentadas duas formas de resolver a mesma equação de diferenças usando várias propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ desenvolvidas ao longo do texto.

Exemplo 3.13. *Considere a equação de diferenças*

$$\begin{cases} (n+1)x_{n+1} - nx_n = n+1 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{(n+1)x_{n+1} - nx_n\} = \mathcal{Z}\{n+1\}.$$

Pela propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\} + \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{nx_n\} = \mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}. \tag{3.2.2}$$

Pela propriedade de diferenciação, os termos $\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\}$ *e* $\mathcal{Z}\{nx_n\}$ *em (3.2.2) podem ser calculados fazendo:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{nx_{n+1}\} &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} \\
&= -z\frac{d}{dz}zX(z) \\
&= -z\left[X(z) + z\frac{d}{dz}X(z)\right] \\
&= -zX(z) - z^2\frac{d}{dz}X(z).
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

e

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z). \tag{3.2.4}$$

Lembrando as transformadas conhecidas:

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

e

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1},$$

combinadas com as expressões (3.2.3) e(3.2.4), tem-se que a expressão (3.2.2) pode ser esrita como:

$$-zX(z) - z^2\frac{d}{dz}X(z) + zX(z) + z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Isolando $X(z)$*:*

$$(-z^2 + z)\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z + z(z-1)}{(z-1)^2(-z^2+1)}.$$

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{z^2}{-z(z-1)^3}.$$

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{-z}{(z-1)^3}.$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dz}X(z)dz = \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz.$$

$$X(z) = \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz.$$

Utilizando frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{-z}{(z-1)^3} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3} \\
&= \frac{A(z-1)^2 + B(z-1) + C}{(z-1)^3} \\
&= \frac{Az^2 + (-2A+B)z + (A-B+C)}{(z-1)^3}.
\end{aligned}$$

Assim, $A = 0$ *e* $B = C = -1$*, logo:*

$$\begin{aligned}
X(z) &= \int \frac{-z}{(z-1)^3} dz \\
&= \int \frac{0}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} dz \\
&= -1 \int \frac{1}{(z-1)^2} dz - 1 \int \frac{1}{(z-1)^3} dz.
\end{aligned}$$

Substituindo $u = z - 1$*, e observando que* $du = 1dz$*:*

$$\begin{aligned}
X(z) &= -1 \int \frac{1}{u^2} du - 1 \int \frac{1}{u^3} du \\
&= -1 \frac{1}{-u} - 1 \frac{1}{-2u^2} + C \\
&= \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + C \\
&= \frac{2z-1}{2(z-1)^2} + C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$X(z) = \frac{2z-1}{2(z-1)^2} + C.$$

Porém $C = 0$*, pois pela propriedade do valor inicial*

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x_0 = 0.$$

Portanto,

$$X(z) = \frac{2z-1}{2(z-1)^2}.$$

Utilizando o método dos Resíduos, e multiplicando $X(z)$ por z^{n-1}:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{(2z-1)z^{n-1}}{2(z-1)^2}.$$

Para $n=0$ tem-se um pólo de segunda ordem em $z=1$ e um pólo de primeira ordem em $z=0$. Assim:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \underset{z=1}{Res}\, z^{-1}X(z) + \underset{z=0}{Res}\, z^{-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 z^{-1}X(z)] + \lim_{z\to 0}[(z-0)z^{-1}X(z)] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\frac{2z-1}{2z} + \lim_{z\to 0}\frac{2z-1}{2(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para $n>0$ tem-se um pólo de segunda ordem em $z=1$. Assim:

$$\begin{aligned}
x_n &= \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 z^{n-1}X(z)] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[\tfrac{(2z-1)z^{n-1}}{2}] \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{z^{n-1}}{2}[2n+(1-n)z^{-1}] \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, a solução procurada é:

$$x_n = \begin{cases} 0, & se\ n=0, \\ \dfrac{n+1}{2}, & se\ n>0. \end{cases}$$

Exemplo 3.14. *Considere novamente a equação de diferenças*

$$\begin{cases} (n+1)x_{n+1} - nx_n = n+1 \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

considerando a substituição $y_n = nx_n$*. Assim tem-se:*

$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = n+1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *e utilizando suas propriedades:*

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} - \mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{n+1\}$$

e

$$zY(z) - y_0 z - Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $y_0 = 0$ *e isolando* $Y(z)$*:*

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Utilizando o método dos resíduos, e multiplicando $Y(z)$ *por* z^{n-1}*:*

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{z^2 z^{n-1}}{(z-1)^3} = \frac{z^{n+1}}{(z-1)^3}$$

o qual possui um pólo de terceira ordem em $z = 1$*.*

Calculando y_n*:*

$$\begin{aligned} y_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}Y(z) \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-1)^3 z^{n+1}}{(z-1)^3}\right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}[z^{n+1}] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(n+1)z^n] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} n(n+1)z^{n-1} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para $n > 0$*. E voltando em* $y_n = nx_n$ *tem-se que*

$$x_n = \frac{n+1}{2}$$

para $n > 0$*.*

3.3 Problemas envolvendo Equações de Diferenças

Nesta seção são apresentados problemas de diversas áreas que podem ser modelados através de equações de diferenças e resolvidas utilizando a transformada $\mathcal{Z}$.

Exemplo 3.15 (Orçamento familiar)**.** *Uma família recebe mensalmente um valor fixo de \$3.000,00 em salários. Após receber os salários, a família gasta* 80% *do total de dinheiro acumulado e guarda os* 20% *restante. Se inicialmente tem \$1.000,00 guardados, qual é o valor acumulado após n meses? Qual é o valor acumulado pela família depois de um ano?*

Seja s_n o total acumulado da família no mês n. Tem-se então que para o mês zero, antes de receber o salário e haver gastos, o montante da família é de R\$1.000,00. Ou seja, $s_0 = 1000$.

Após 1 *mês, tem-se o montante inicial mais o salário fixo, porém com o gasto de* 80% *do mesmo. Logo, $s_1 = 0,2(s_0 + 3000)$.*

Para o mês 2*, o montante será o montante acumulado até o mês anterior mais o salário, porém novamente com o gasto de* 80% *do mesmo. Assim, $s_2 = 0,2(s_1 + 3000)$.*

Pode-se, recursivamente, dizer que o montante da família para o n-ésimo mês é dado pela equação de diferenças

$$\begin{cases} s_{n+1} = 0,2(s_n + 3000) \\ s_0 = 1000 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{s_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2(s_n + 3000)\}.$$

Pela propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{s_{n+1}\} = 0,2\mathcal{Z}\{s_n\} + 600\mathcal{Z}\{1\}.$$

Utilizando a propriedade de translação e a transformada de 1 tem-se:

$$zS(z) - s_0 z = 0,2S(z) + \frac{600z}{z-1}.$$

Substituindo $s_0 = 1000$ e isolando $S(z)$:

$$S(z) = \frac{z(1000z - 400)}{(z-0,2)(z-1)}.$$

Para encontrar a transformada inversa de $S(z)$ pelo método dos resíduos, pode-se considerar:

$$z^{n-1}S(z) = \frac{z^n(1000z - 400)}{(z-0,2)(z-1)}.$$

Esta função tem dois pólos simples em $z = 0,2$ e $z = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
s_n &= \underset{z=0,2}{Res}\, z^{n-1}S(z) + \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}S(z) \\
&= \lim_{z\to 0,2} \frac{z^n(1000z-400)}{z-1} + \lim_{z\to 1} \frac{z^n(1000z-400)}{z-0,2} \\
&= (0,2)^n \times 250 + 1^n \times 750 \\
&= 250(0,2)^n + 750.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$s_n = 250(0,2)^n + 750.$$

Para determinar o total acumulado após um ano basta substituir $n = 12$ na anterior expressão, assim:

$$s_{12} = 250(0,2)^{12} + 750 = 750,000001024,$$

ou seja, aproximadamente $R\$750,00$.

Exemplo 3.16 (Crescimento de bactérias)**.** *Suponha que o número de bactérias em uma colônia triplique a cada hora.*

(a) Encontre uma equação de diferenças para o número de bactérias depois que se passaram n horas.

(b) Se 100 bactérias são usadas para iniciar uma nova colônia, quantas bactérias haverá na colônia em 10 horas?

Considerando b_n o número de bactérias após n horas, observar-se que bactérias nas primeiras horas comportam-se da seguinte maneira:

- *Para $n = 0$ (hora zero) tem-se o número inicial de bactérias b_0;*
- *Na 1ª hora tem-se que o número de bactérias b_1 é dado por $b_1 = 3b_0$;*
- *Na 2ª hora o número de bactérias é dado por $b_2 = 3b_1$;*
- *Na 3ª hora tem-se $b_3 = 3b_2$.*

Recursivamente, em n horas o número de bactérias é dado por

$$b_{n+1} = 3b_n.$$

Para o número de bactérias após 10 horas basta resolver a equação de diferenças encontrada.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos o lados da equação:

$$\mathcal{Z}\{b_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{3b_n\}.$$

Pela propriedade de translação e a linearidade:

$$zB(z) - b_0 z = 3B(z).$$

Isolando $B(z)$:

$$B(z) = \frac{b_0 z}{z-3}.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa em ambos os lados:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{B(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b_0 z}{z-3}\right\}.$$

E pelas transformadas conhecidas:

$$b_n = b_0 3^n. \tag{3.3.5}$$

Para concluir o item (b) basta substituir $b_0 = 100$ e $n = 10$ na equação (3.3.5):

$$b_{10} = 100 \times 3^{10} = 100 \times 59049 = 5904900.$$

Portanto haverá 5.904.900 bactérias em 10 horas.

Exemplo 3.17 (Probabilidade)**.** *Dois jogadores disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade $0,6$ de ganhá-la e probabilidade $0,4$ de perdê-la. Se o jogador A iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida?*

Analisando as $(n+1)$ partidas realizadas e considerando x_n a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida, para que o jogador B ganhe a $(n+1)$-ésima partida tem-se duas possibilidades:

- *O jogador B ganha a n-ésima partida (com probabilidade x_n) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional $0,6$), com probabilidade igual a $0,6x_n$;*
- *O jogador B perde a n-ésima partida (com probabilidade $1 - x_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional $0,4$), com probabilidade igual a $0,4(1 - x_n)$.*

Portanto, a probabilidade x_{n+1} de vitória na $(n+1)$-ésima partida é dada por $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1 - x_n)$, ou seja,

$$x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4,$$

com $x_1 = 0,4$, pois o jogador B não inicia a primeira partida.

A transformada $\mathcal{Z}$ pode ser usada para determinar uma expressão geral para a probabilidade x_n a partir da equação de diferenças. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da equação de diferenças:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2x_n + 0,4\}.$$

Pela propriedade de linearidade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{0,2x_n\} + \mathcal{Z}\{0,4\}.$$

Utilizando a definição de transformada $\mathcal{Z}$, a propriedade de translação e substituindo $x_0 = 0$ tem-se:

$$zX(z) = 0,2X(z) + 0,4\frac{z}{z-1}.$$

Isolando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{0,4z}{(z-1)(z-0,2)}.$$

Multiplicando $X(z)$ por z^{n-1} para aplicar o método dos resíduos tem-se:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}$$

o qual possui dois pólos simples em $z = 1$ e $z = 0,2$.

Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}X(z) + \underset{z=0,2}{Res}\, z^{n-1}X(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}\right] + \lim_{z\to 0,2}\left[(z-0,2)\frac{0,4z^n}{(z-1)(z-0,2)}\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\left[\frac{0,4z^n}{(z-0,2)}\right] + \lim_{z\to 0,2}\left[\frac{0,4z^n}{(z-1)}\right] \\
&= \frac{0,4(1)^n}{1-0,2} + \frac{0,4(0,2)^n}{0,2-1} \\
&= \frac{0,4}{0,8} + \frac{0,4(0,2)^n}{-0,8} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0,2)^n.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade do jogador B ganhar a n-ésima partida é de

$$x_n = \frac{1}{2}[1-(0,2)^n],$$

ou seja, quando n tende ao infinito, a probabilidade x_n tende a 50%.

Exemplo 3.18 (Torre de Hanoi (texto adaptado de [12])). *A Torre de Hanói é um quebra-cabeças com uma base, na qual são fixadas três hastes. Em uma destas hastes são encaixados um certo número de discos, de diâmetros diferentes, de modo que um disco sempre repousa sobre outro de diâmetro maior, conforme figura (3.1). Qual é o número mínimo de movimentos para transferir todos os discos para outra haste, respeitando sempre a restrição de que um disco nunca seja colocado sobre um disco de diâmetro menor, e movendo um disco por vez?*

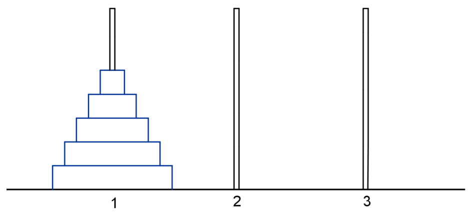

Figura 3.1: A Torre de Hanói com 5 discos.

A ideia fundamental é de que um problema com n discos ($n > 1$) pode ser reduzido a um problema com $n-1$ discos. Isto é, sabendo transferir $n-1$ discos de uma haste para outra, sabe-se também transferir n discos. De fato, para transferir n discos da haste 1 para a haste 3, será necessário, em algum momento, transferir o disco de maior diâmetro da haste 1 para a haste 3. A única forma em que isto pode ser feito é pela prévia remoção dos $n-1$ discos superiores para a haste 2. Observe que, nesta transferência, tudo se passa como se apenas estes $n-1$ discos estivessem presentes: como o n-ésimo disco é maior que todos os demais, ele não impõe qualquer restrição no processo. Após a passagem do maior disco para a haste 3, resta apenas transferir os $n-1$ discos da haste 2 para a 3 (novamente, tudo se passa como se o maior disco não estivesse lá). Assim, é preciso transferir primeiro $n-1$ discos, depois transferir em um único movimento o disco maior e finalmente transferir $n-1$ discos mais uma vez.

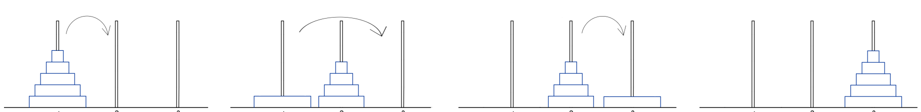

Figura 3.2: Passando de n para $n-1$.

Designando por x_n o número mínimo de movimentos necessários para transferir n discos de uma haste para outra, tem-se então que $x_n = x_{n-1}+1+x_{n-1}$, ou seja, $x_n = 2x_{n-1}+1$, para todo $n > 1$ ou de forma equivalente, $x_{n+1} = 2x_n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como não é preciso nenhum movimento para transferir 0 discos, pode-se considerar $x_0 = 0$ e assim o número mínimo para mover todos os discos é *determinado pela equação de diferenças*

$$x_{n+1} = 2x_n + 1,$$

com $x_0 = 0$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *na equação* $x_{n+1} = 2x_n + 1$*:*

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{2x_n + 1\}.$$

Utilizando as propriedades de linearidade, translação e transformadas conhecidas:

$$z(X(z) - x_0) = 2X(z) + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $x_0 = 0$ *e isolando* $X(z)$*:*

$$zX(z) = 2X(z) + \frac{z}{z-1}.$$

$$X(z)(z-2) = \frac{z}{z-1}.$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}.$$

Dividindo $X(z)$ *por* z *e aplicando o método de frações parciais:*

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-2)(z-1)} \\ &= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} \\ &= \frac{A(z-1) + B(z-2)}{(z-2)(z-1)} \\ &= \frac{(A+B)z + (-A-2B)}{(z-2)(z-1)}. \end{aligned}$$

Pela igualdade dos polinômios em z *nos numeradores, tem-se o sistema linear:*

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ *e* $B = -1$.

Assim,

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e analisando transformadas conhecidas:

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\ &= 2^n - 1^n. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = 2^n - 1$$

é a quantidade de movimentos necessários para mover n discos.

Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1.883 *e, para acrescentar um certo misticismo à sua criação, descreveu a seguinte lenda: Na origem do tempo, num templo Hindu, situado no centro do universo, o deus Brama supostamente havia criado uma torre com* 64 *discos perfurados de ouro puro ao redor de uma de três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos de uma coluna para outra, fazendo um movimento por segundo, respeitando as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os* 64 *discos fossem transferidos para uma outra coluna, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria. Deste modo, depois de* $2^{64} - 1$ *segundos, todos os discos teriam sido movidos. Por sorte, essa quantidade de tempo é de aproximadamente* 42 *vezes a idade do universo. Não é claro se Lucas inventou essa lenda ou a criação do jogo foi inspirado por ela.*

Exemplo 3.19 (Pizza de Steiner)**.** *Qual é o maior número de regiões em que se pode dividir o plano com n retas? Note por exemplo, que com uma única reta, o plano só pode ser dividido em duas regiões, mas com duas retas o plano pode ser divido em* 3 *regiões se as retas são paralelas ou* 4 *regiões se as retas são concorrentes.*

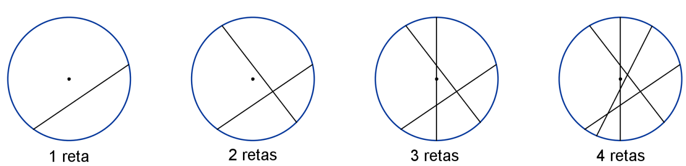

Figura 3.3: Retas cortando a pizza.

Este problema é equivalente a perguntar-se: qual é o número máximo de pedaços de pizza (não necessariamente iguais) que podem ser produzidos por n cortes retos (não necessariamente passando pelo centro da pizza)?

Considerando y_n *a quantidade máxima de regiões em que* n *retas dividem o plano, observa-se que se não há nenhuma reta então tem-se somente uma região (a pizza inteira), ou seja,* $y_0 = 1$*. Traçando-se uma reta no plano tem-se duas regiões, ou seja,* $y_1 = 2$*. Traçando-se mais uma reta no plano de modo a obter-se a quantidade máxima de regiões, tem-se que esta corta a primeira reta já existente em apenas um ponto, gerando assim duas novas regiões, ou seja,* $y_2 = y_1 + 2 = 4$*.*

Faz-se o traçado de mais uma reta de tal maneira que esta produza o máximo de regiões possíveis, assim esta nova reta deve cortar as duas retas já existentes em um ponto cada, gerando três novas regiões, ou seja, $y_3 = y_2 + 3 = 7$*.*

Tabela 3.1: Relação entre retas e regiões.

Cortes	Regiões	Regiões Acrescentadas
1	2	-
2	4	2
3	7	3
4	11	4

Fazendo a análise para $n+1$ *retas, se em um plano tem-se* n *retas gerando* y_n *regiões, respeitando as condições impostas pela questão, então traçando a reta* $n+1$ *de modo que esta produza uma quantidade máxima de regiões, tem-se que a reta* $n+1$ *corta as* n *retas em* n *pontos, gerando assim* $n+1$ *novas regiões, isto é,*

$$y_{n+1} = y_n + (n+1),$$

com $y_0 = 1$*.*

Resolvendo a equação de diferenças aplicando a transformada $\mathcal{Z}$*:*

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{y_n + (n+1)\}.$$

Pelas propriedades de linearidade e translação:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{y_n\} + \mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}.$$

$$z(Y(z) - y_0) = Y(z) + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

Substituindo $y_0 = 1$ *e isolando* $Y(z)$*:*

$$zY(z) - z = Y(z) + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

$$Y(z) = \frac{z(z^2 - z + 1)}{(z-1)^3}.$$

Pelo método dos resíduos, considera-se $Y(z)z^{n-1}$*:*

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{z^n(z^2 - z + 1)}{(z-1)^3}.$$

Tem-se que $Y(z)z^{n-1}$ *tem um pólo de ordem* 3 *em* $z = 1$*. Calculando os resíduos:*

$$\begin{aligned}
y_n &= \underset{z=1}{Res}\, z^{n-1}Y(z) \\
&= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{d^2z}\left[(z-1)^3Y(z)z^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{d^2z}\left[z^n(z^2 - z + 1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[nz^{n-1}(z^2 - z + 1) + z^n(2z-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[n(n-1)z^{n-2}(z^2 - z + 1) + 2nz^{n-1}(2z-1) + 2z^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[n(n-1) + 2n + 2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2\right).
\end{aligned}$$

Logo, o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido com n *cortes retos e dado por*

$$y_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

*Este problema foi proposto pelo geômetra alemão Jakob Steiner (*1.796-1.863*) e resolvido pelo mesmo em* 1.826*.*

Exemplo 3.20 (Castelo de cartas)**.** *A figura a seguir representa castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares? E um castelo de n andares?*

Seja x_n *a quantidade de cartas necessárias para construir um castelo com* n *andares. Logo,* $x_1 = 2$*.*

Para $n = 2$ *andares são necessárias: a quantidade anterior (*$x_1 = 2$ *cartas), mais* 2 *triângulos sem base (*$2n = 2 \cdot 2 = 4$ *cartas), mais* 1 *carta na posição horizontal (*$n - 1 = 2 - 1 = 1$ *carta). Logo,*

$$x_2 = x_1 + 2n + (n-1) = x_1 + 3n - 1 = 2 + 3.2 - 1 = 7.$$

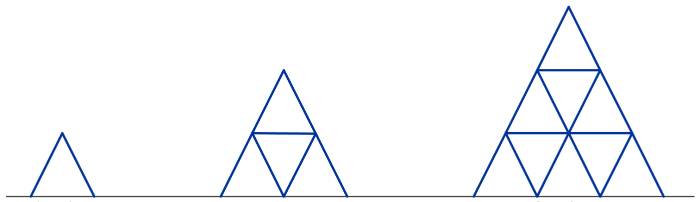

Figura 3.4: Castelo de cartas de 1, 2 e 3 andares.

Para $n = 3$ andares são necessárias: a quantidade anterior ($x_2 = 7$ cartas), mais 3 triângulos sem base ($2n = 2 \cdot 3 = 6$ cartas), mais 2 cartas na posição horizontal ($n - 1 = 3 - 1 = 2$ cartas). Logo,

$$x_3 = x_2 + 2n + (n - 1) = x_2 + 3n - 1 = 7 + 3.3 - 1 = 15.$$

Generalizando, para n andares são necessárias: a quantidade anterior (x_{n-1} cartas), mais n triângulos sem base ($2n$ cartas), mais $n - 1$ cartas na posição horizontal. Logo,

$$x_n = x_{n-1} + 2n + (n - 1) = x_{n-1} + 3n - 1.$$

Para responder a primeira pergunta pode-se utilizar a equação de recorrência até encontrar o valor de x_5, pois $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ e $x_3 = 15$ já são conhecidos. Assim:

$$x_4 = x_3 + 3 \cdot 4 - 1 = 15 + 12 - 1 = 26$$

e

$$x_5 = x_4 + 3 \cdot 5 - 1 = 26 + 15 - 1 = 40.$$

Portanto, são necessárias 40 cartas para construir um castelo de 5 andares.

Para responder a segunda pergunta utilizando a transformada $\mathcal{Z}$, note que para construir um castelo com $n + 1$ andares são necessárias

$$x_{n+1} = x_n + 3(n + 1) - 1 = x_n + 3n + 2$$

cartas, com $x_0 = 0$, pois são necessárias 0 cartas para construir um castelo com 0 andares. Assim, a equação de diferenças a ser resolvida é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 3n + 2 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{x_n + 3n + 2\}.$$

E pelas propriedades de linearidade e translação:

$$z[X(z) - x_0] = X(z) + 3\frac{z}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-1}.$$

$$X(z)[z-1] = \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{z-1}.$$
$$X(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3}.$$

Multiplicando $X(z)$ por z^{n-1} para aplicar o método dos resíduos:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n(2z+1)}{(z-1)^3}$$

o qual possui um pólo $z = 1$ de ordem 3.

Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname*{Res}_{z=1} z^{n-1}X(z) \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^3 z^{n-1}X(z) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}z^n(2z+1) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[z^n(2z+2) + nz^{n-1}] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}[(2n^2+2n)z^{n-1} + (n^2-n)z^{n-2}] \\
&= \frac{1}{2}(3n^2+n).
\end{aligned}$$

Portanto, são necessárias

$$x_n = \frac{3n^2+n}{2}$$

cartas para construir um castelo com n andares.

Note que a pode-se comprovar a resposta à primeira pergunta substituindo $n = 5$ na solução:

$$x_5 = \frac{3\cdot 5^2 + 5}{2} = 40.$$

As Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM) costumam colocar em suas provas questões que envolvem recorrências. Este exemplo do castelo de cartas pode ser encontrado na questão 1 da XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática, 2ª Fase - Nível 1.

Exemplo 3.21 (Financiamento de veículos)**.** *Considere um financiamento de um carro no valor de R\$32.000,00 que deve ser pago em 4 anos, com parcelas fixas mensais de R\$1.100,00. Determine:*

(a) *Qual o juros mensal pago?*

(b) *Se o juros mensal fosse o mesmo da poupança de* $0,63\%$, *quanto deveria pagar por mês para quitar a dívida em 4 anos?*

(c) *Quanto se deve dar de entrada para termos uma parcela fixa de R\$600,00, um juros igual ao da poupança e terminar a dívida em 4 anos?*

Considere que d_0 *seja a dívida inicial. Assim, a dívida* d_n, *depois de transcorridos* n *meses da compra, é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja:*

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + i d_{n-1} - P \\ &= (1+i)d_{n-1} - P \\ &= a d_{n-1} + b \end{aligned}$$

com $a = 1+i$ *e* $b = -P$, *sendo que* i *é a taxa de juros mensal do financiamento, e* P *o valor da parcela.*

Observe que, $a > 1$, *pois* $i > 0$. *Assim,* $d_{n+1} = a d_n + b$ *é uma equação de diferenças cuja solução geral será encontrada através da transformada* $\mathcal{Z}$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ *em ambos os lados da igualdade:*

$$\mathcal{Z}\{d_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{a d_n + b\}.$$

E utilizando a definição de transformada $\mathcal{Z}$ *e a propriedade de translação:*

$$z\left[D(z) - d_0 z^0\right] = aD(z) + \frac{bz}{z-1}.$$

$$D(z) = \frac{z(zd_0 + b - d_0)}{(z-1)(z-a)}.$$

Dividindo $D(z)$ *por* z *e aplicando a decomposição em frações parciais:*

$$\begin{aligned} \frac{D(z)}{z} &= \frac{zd_0 + b - d_0}{(z-1)(z-a)} \\ &= \frac{R}{z-1} + \frac{S}{z-a} \\ &= \frac{R(z-a) + S(z-1)}{(z-1)(z-a)}. \end{aligned}$$

Obtendo assim o sistema:

$$\begin{cases} R + S = d_0 \\ -aR - S = b - d_0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$R = \frac{b}{1-a} \text{ e } S = d_0 - \frac{b}{1-a}.$$

Substituindo R e S tem-se a equação em z dada por:

$$D(z) = \frac{b}{1-a}\frac{z}{z-1} + \left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{z}{z-a}.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ inversa e transformadas conhecidas:

$$\begin{aligned}
d_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{D(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b}{1-a}\frac{z}{z-1} + \left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{z}{z-a}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b}{1-a}\frac{z}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{z}{z-a}\right\} \\
&= \frac{b}{1-a} + \left(d_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n.
\end{aligned}$$

Substituindo a e b:

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{-P}{1-(1+i)} + \left[d_0 + \frac{P}{1-(1+i)}\right](1+i)^n \\
&= \frac{P}{i} + + \left[d_0 - \frac{P}{i}\right](1+i)^n \\
&= d_0(1+i)^n - P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$d_n = d_0(1+i)^n - P\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right).$$

Para $n = 48$, $d_{48} = 0$, $d_0 = 32000,00$, $P = 1100,00$ e substituindo na solução:

$$d_{48} = 0 = 32000(1+i)^{48} - 1100\left(\frac{(1+i)^{48} - 1}{i}\right).$$

$$32i = 1,1\left(\frac{(1+i)^{48} - 1}{(1+i)^{48}}\right).$$

E efetuando os cálculos tem-se $i \approx 2,26\%$ ao mês, o que responde o item (a).

Para o item (b) tome a taxa $i = 0,63\%$, período de financiamento de 48 meses, dívida inicial $d_0 = 48$ e dívida final $d_{48} = 0$.

Agora basta substituir os valores na solução e isolar P:

$$d_{48} = 32000(1+0,0063)^{48} - P\left(\frac{(1+0,0063)^{48}-1}{0,0063}\right).$$

Isolando P e fazendo os devidos cálculos tem-se $P \approx 774,62$.
Logo considerando o juros mensal do financiamento igual ao da poupança, a prestação fixa do financiamento a ser paga seria de R\$774,62.

Exemplo 3.22 (Tabuleiro de dominós)**.** *Determine o número máximo de modos de cobrir um tabuleiro $2 \times (n-1)$, $n > 1$, com dominós iguais de tamanho 2×1.*

Seja x_n o número de maneiras para se dispor os dominós. Para $n = 2$, num tabuleiro $2\times(n-1) = 2\times 1$ tem-se 1 única maneira de colocar um dominó 2×1, conforme Figura 3.5. Assim, $x_2 = 1$.

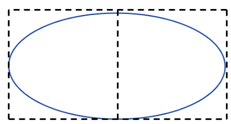

Figura 3.5: Um dominó em um tabuleiro 2×1.

Para $n = 3$, num tabuleiro $2 \times (n-1) = 2 \times 2$ tem-se 2 maneiras de colocar dois dominós 2×1: os dois na horizontal ou os dois na vertical. Assim, $x_3 = 2$, conforme Figura 3.6.

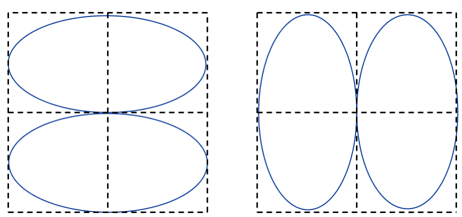

Figura 3.6: Dois dominós em um tabuleiro 2×2.

Para $n = 4$, num tabuleiro $2 \times (n-1) = 2 \times 3$ tem-se 3 maneiras de colocar três dominós 2×1: três deitados; dois em pé e um deitado abaixo; ou dois em pé e um deitado acima. Assim, $x_4 = 3$, conforme Figura 3.7.
Para $n = 5$, num tabuleiro $2 \times (n-1) = 2 \times 4$ tem-se 5 maneiras de colocar quatro dominós 2×1: quatro deitados; um deitado acima, outro deitado abaixo e dois em pé ao centro; dois em pé acima e dois deitados abaixo; dois em pé abaixo e dois deitados acima; ou quatro em pé. Assim, $x_5 = 5$, conforme Figura 3.8.
Para estabelecer uma equação de diferenças correspondente ao termo geral x_n, considere a seguinte questão: em uma configuração qualquer de n dominós

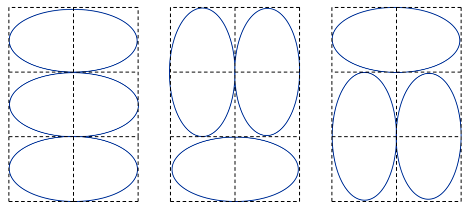

Figura 3.7: Três dominós em um tabuleiro 2×3.

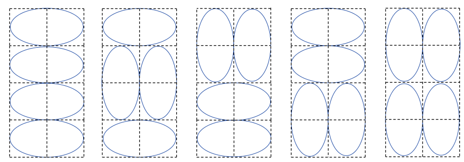

Figura 3.8: Quatro dominós em um tabuleiro 2×4.

em um tabuleiro $2 \times (n-1)$*, que tipo de configuração é encontrada olhando apenas a última linha do tabuleiro? Ou encontra-se um único dominó deitado, ou encontram-se duas metades de dominós em pé. Em outras palavras, uma configuração qualquer de* n *dominós cobrindo o tabuleiro* $2 \times (n-1)$ *só pode satisfazer uma das duas opções: ou tem um dominó deitado na última linha ou tem dois dominós em pé nas duas últimas linhas. Agora bem, em quantas possíveis configurações de* n *dominós aparece um dominó deitado na última linha? Como o que acontece na última linha é igual para todas estas configurações, o número de vezes que aparece um dominó deitado na última linha corresponde às diferentes formas que podem ser organizados os outros* $n-1$ *dominós no tabuleiro restante* $2 \times (n-1-1)$*, ou seja,* x_{n-1}*. Por outro lado, em quantas configurações de* n *dominós aparecem dois dominós em pé nas duas últimas linhas? Como a configuração das últimas duas linhas está fixa, esse valor corresponde ao número de formas que podem ser organizados os outros* $n-2$ *dominós no tabuleiro restante* $2 \times (n-2-1)$*, isto é,* x_{n-2}*. Assim, conclui-se que que* $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ *para* $n \geq 2$*, ou de forma equivalente,* $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ *para* $n \geq 0$*.*

Como é possível considerar $x_0 = 0$ *e* $x_1 = 1$*, o número máximo de maneiras para cobrir os tabuleiros corresponde à solução da equação de diferenças:*

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \\ x_0 = 0 \ \text{e}\ x_1 = 1. \end{cases}$$

A resolução da equação se refere ao Exemplo 3.12, cuja solução é dada por:

$$x_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

onde φ *é o número de ouro. Assim, esse resulta ser o número máximo de modos para cobrir um tabuleiro* $2 \times (n-1)$ *com dominós* 2×1 *iguais.*

3.4 Exercícios Propostos

1. Solucione a equação de diferenças com a condição inicial dada:

   (a) $x_{n+1} + 2x_n = (-1)^n$, com $x_0 = -2$.

   (b) $a_{n+1} - a_n = n^2$, com $a_0 = 0$.

2. Solucione a equação de diferenças com as condições iniciais dadas:

   (a) $\begin{cases} 2y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0 \\ y_0 = 2 \text{ e } y_1 = -1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 3 \\ x_0 = -2 \text{ e } x_1 = 1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 8x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 5 \\ x_0 = 0 \text{ e } x_1 = -1. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 2y_{n+3} - 3y_{n+2} + y_n = 0 \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -4. \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} a_{n+2} + 9a_n = 13 \cdot 2^n \\ a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 1. \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_0 = A \text{ e } x_1 = B. \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} y_{n+2} - \sqrt{3}y_{n+1} + y_n = 0 \\ y_0 = 1 \text{ e } y_1 = \sqrt{3}. \end{cases}$

   (h) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 3n \\ x_0 = 0 \text{ e } x_1 = 2. \end{cases}$

3. Solucione:

   (a) $(n+1)y_{n+1} - 2ny_n = 2^{n+1}$, com $y_0 = 1$.

   (b) $(n+1)a_{n+1} + na_n = 2n - 3$, com $a_1 = 1$.

4. Suponha que a população mundial em 2002 era de 6,2 bilhões e cresce com uma taxa de 1,3% ao ano.

   (a) Encontre uma equação de diferenças para a população mundial n anos depois de 2002.

   (b) Encontre uma fórmula explícita para a população mundial n anos depois de 2002.

   (c) Qual a estimativa da população mundial em 2022?

5. Um modelo para o número de lagostas capturadas por ano baseia-se na hipótese de que o número de lagostas pescadas em um ano é a média do número da pesca dos dois anos anteriores.

   (a) Encontre uma equação de diferenças para L_n, em que L_n é o número de lagostas capturadas em n anos, seguindo a hipótese para este modelo.

   (b) Resolva a relação de recorrência em (a) e encontre L_n sabendo que $L_0 = 100.000$ e $L_1 = 300.000$.

6. (Questão 1 - AV1 - MA12, PROFMAT 2013) Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje, R\$500.000,00 aplicados em um investimento que rende juros de 1% ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de R\$1.000,00.

   (a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação, após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida.

   (b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n.

   (c) Qual é a retirada mensal máxima que Paulo pode fazer de modo que o saldo da aplicação nunca se torne negativo?

7. (Questão 09 - Nível 2 - 1ª Fase, OBMEP 2012) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na Figura 3.9. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

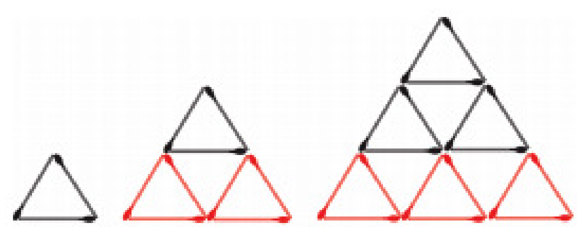

Figura 3.9: Triângulos com palitos.

3.4.1 Respostas

1. (a) $x_n = (-1)^n - 3(-2)^n$.

   (b) $a_n = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

2. (a) $y_n = 3 \cdot 2^{1-n} - 4$.

(b) $x_n = \dfrac{1}{4} - 6(-2)^n + \dfrac{15}{4}(-3)^n$.

(c) $x_n = \dfrac{4^{-n}(17(-2)^n - 18(-1)^n + 4^n)}{3}$.

(d) $y_n = -\dfrac{8}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{8}{3} - 3n$.

(e) $a_n = 2^n - 3^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - 3^{n-1} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(f) $x_n = A + (B - A)n$.

(g) $y_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

(h) $x_n = \dfrac{6n - 3n^2 + n^3}{2}$.

3. (a) $y_n = 2^n$.

   (b) $a_n = \dfrac{n - 2(-1)^n - 2}{n}$.

4. (a) $x_{n+1} = 1{,}013x_n$, com $x_0 = 6{,}2$, onde n é o tempo (em anos) e x_n é a população (em bilhões).

   (b) $x_n = 6{,}2 \times 1,013^n$.

   (c) $x_{20} \approx 8{,}03$ bilhões.

5. (a) $L_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n-2}}{2}$.

   (b) $L_n = \dfrac{1.400.000 - 800.000(-0{,}5)^n}{3}$.

6. (a) $s_{n+1} = 1{,}01s_n - 1.000$, com $s_0 = 500.000$.

   (b) $s_n = 400.000 \times 1,01^n + 100.000$.

   (c) A maior retirada possível é o rendimento mensal: $0{,}01 \times 500.000 = 5.000$.

7. 9 palitos.

Bibliografia

[1] ATTAR, R. *Lecture Notes on Z-Transform*. Alexandria: Lulu.com, 2006. (Mathematical series). ISBN 9781411619791.

[2] BARKER, R. H. The pulse transfer function and its application to sampling servo systems. *Proceedings of the IEE - Part IV: Institution Monographs*, v. 99, n. 4, p. 302–317, December 1952.

[3] BROWN, J.; CHURCHILL, R. *Complex Variables and Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2004. (Brown-Churchill series). ISBN 9780072872521.

[4] ELAYDI, S. *An Introduction to Difference Equations*. [S.l.]: Springer New York, 2013. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 9781475731101.

[5] FLEMMING, D.; GONCALVES, M. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2007. ISBN 9788576051152.

[6] GRAF, U. *Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers: A Computational Approach using a Mathematica Package*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2012. ISBN 9783034878463.

[7] GUIDORIZZI, H. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2013. ISBN 9788521612599.

[8] HUREWICZ, W. Filters and Servo Systems with Pulse Data. *Theory of Servomechanisms*, p. 231–261, 1947.

[9] JURY, E. *Theory and Application of the Z-transform Method*. [S.l.]: R. E. Krieger Publishing Company, 1973. ISBN 9780882751221.

[10] KAPLAN, W. *Advanced Calculus*. Boston: Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1991. (Advanced book program). ISBN 9780201578881.

[11] LEONDES, C. *Digital Control Systems Implementation and Computational Techniques: Advances in Theory and Applications*. [S.l.]: Elsevier Science, 1996. (Control and Dynamic Systems). ISBN 9780080529950.

[12] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[13] OPPENHEIM, A.; WILLSKY, A.; YOUNG, I. *Signals and systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1983. (Prentice-Hall signal processing series).

[14] PEARSON, E.; KENDALL, M.; PLACKETT, R. *Studies in the History of Statistics and Probability: A Series of Papers*. [S.l.]: C. Griffin, 1977. (Griffin books on statistics, v. 2). ISBN 9780852642320.

[15] POULARIKAS, A. *Transforms and Applications Handbook, Third Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2010. (Electrical Engineering Handbook). ISBN 9781420066531.

[16] RAGAZZINI, J. R.; ZADEH, L. A. The analysis of sampled-data systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, v. 71, n. 5, p. 225–234, Nov 1952. ISSN 0097-2185.

[17] SERTÖZ, A. S. *Lecture Notes on Laplace and Z-transforms*. Ankara: [s.n.], 2004.

[18] STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. ISBN 9788522112586.

[19] VENTURI, S. *Transformada $\mathcal{Z}$*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

[20] VICH, R. *Z Transform Theory and Applications*. Praga: Springer, 1987. (Mathematics and its Applications). ISBN 9789027719171.

Apêndice A

Propriedades da Transformada $\mathcal{Z}$

Operação	$x_n,\ n \geq 0$	$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$
Linearidade (Adição)	$x_n + y_n$	$X(z) + Y(z)$
Linearidade (Multiplicação)	ax_n	$aX(z),\ a \in \mathbb{R}$
Diferenciação	nx_n	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
Similaridade	$a^n x_n$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right),\ a \in \mathbb{R}$
Translação para Direita	x_{n-k}	$z^{-k}X(z),\ k \in \mathbb{N}$
Translação para Esquerda	x_{n+k}	$z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n},\ k \in \mathbb{N}$
Convolução	$x_n * y_n$	$X(z)Y(z)$
Valor Inicial	x_0	$\lim_{z \to \infty} X(z)$
Valor Final	$\lim_{n \to \infty} x_n$	$\lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$

Apêndice B

Lista de Transformadas $\mathcal{Z}$

Número	x_n, $n \geq 0$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$	RDC
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
2	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
3	a^{n-1}	$\dfrac{1}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	e^{an}	$\dfrac{z}{z-e^a}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
5	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
6	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	n^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	n^k	$(-1)^k \left(z\dfrac{d}{dz}\right)^k \left(\dfrac{z}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
9	na^n	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	n^2a^n	$\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
11	n^3a^n	$\dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
12	n^ka^n	$(-1)^k \left(z\dfrac{d}{dz}\right)^k \left(\dfrac{z}{z-a}\right)$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Número	$x_n,\, n \geq 0$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$	RDC
13	$\operatorname{sen} n\omega$	$\dfrac{z\operatorname{sen}\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
14	$\cos n\omega$	$\dfrac{z(z - \cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
15	$\operatorname{senh} n\omega$	$\dfrac{z\operatorname{senh}\omega}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > max\{e^{\omega}, e^{-\omega}\}$
16	$\cosh n\omega$	$\dfrac{z(z - \cosh\omega)}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1}$	$\lvert z\rvert > max\{e^{\omega}, e^{-\omega}\}$
17	$\lvert a\rvert^n \operatorname{sen}\omega n$	$\dfrac{z\lvert a\rvert\operatorname{sen}\omega}{z^2 - 2z\lvert a\rvert\cos\omega + \lvert a\rvert^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
18	$\lvert a\rvert^n \cos\omega n$	$\dfrac{z(z - \lvert a\rvert\operatorname{sen}\omega)}{z^2 - 2z\lvert a\rvert\cos\omega + \lvert a\rvert^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Índice