



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Enthony Araujo de Oliveira

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA Z NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS
DISCRETOS**

CARAÚBAS – RN

2025

Enthony Araujo de Oliveira

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA Z NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS
DISCRETOS**

Monografia apresentada à Universidade Federal
Rural do Semi-Árido como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Denilson Menezes
de Jesus

CARAÚBAS – RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

O48a Oliveira, Enthony Araujo de.
Aplicação da transformada Z na análise de
circuitos elétricos discretos / Enthony Araujo de
Oliveira. - 2025.
42 f. : il.

Orientador: Denilson Menezes de Jesus.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2025.

1. Transformada Z. 2. Ladder networks. 3.
Análise de circuitos. 4. Equações de diferença. I.
Jesus, Denilson Menezes de, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Sarah Freire Bezerra
CRB: 15/1052

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Enthony Araujo de Oliveira

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA Z NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS
DISCRETOS**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 28/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Denilson Menezes de Jesus, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Kelyane Barboza de Abreu, Profª. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

Heloisa Frazão da Silva Santiago, Profª. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

Dedico este trabalho à minha esposa, Mila Sandy, à minha mãe, Maria Edivania, ao meu pai Thompson de Oliveira, e ao meu irmão, Kelvyn Araujo.

RESUMO

Este trabalho analisa a aplicação da Transformada Z na resolução de circuitos elétricos discretos, com foco em *ladder networks*. A Transformada Z permite converter equações de diferenças em expressões algébricas, facilitando a modelagem e a previsão do comportamento dinâmico dos circuitos. Foram utilizadas as Leis de Kirchhoff e a Lei de Ohm para formular as equações dos circuitos, resolvidas no domínio da Transformada Z. A metodologia incluiu simulações computacionais no *software Multisim* e a implementação de um programa em Python para automatizar os cálculos. Os resultados mostraram forte correlação entre os valores teóricos e simulados, validando a eficácia do método. Os resultados ressaltam a aplicabilidade da Transformada Z na análise de circuitos elétricos e destacam sua utilidade na otimização de processos de modelagem matemática.

Palavras-chave: Transformada Z. Ladder networks. Análise de circuitos. Equações de diferença.

ABSTRACT

This study analyzes the application of the Z-Transform in solving discrete electrical circuits, focusing on ladder networks. The Z-Transform allows converting difference equations into algebraic expressions, facilitating the modeling and prediction of the dynamic behavior of circuits. Kirchhoff's Laws and Ohm's Law were used to formulate the circuit equations, which were solved in the Z-transform domain. The methodology included computational simulations using Multisim software and the implementation of a Python program to automate calculations. The results showed a strong correlation between the theoretical and simulated values, validating the effectiveness of the method. The findings highlight the applicability of the Z-Transform in electrical circuit analysis and emphasize its usefulness in optimizing mathematical modeling processes.

Keywords: Z-Transform, Ladder networks, Circuit analysis, Difference equations.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Tempo contínuo x Tempo discreto | 11 |
| Figura 2 – Região correspondente a $ z > a $ | 15 |
| Figura 3 – Divisão polinomial | 18 |
| Figura 4 – Circuito Equivalente da Lei de Ohm | 26 |
| Figura 5 – Exemplo Nó e Malha | 28 |
| Figura 6 – Soma de tensões | 28 |
| Figura 7 – Código criado em Python | 30 |
| Figura 8 – Exemplo de saída das correntes $i(n)$ | 30 |
| Figura 9 – <i>Multisim</i> | 31 |
| Figura 10 – Exemplo de Circuito no <i>Multisim</i> | 32 |
| Figura 11 – <i>ladder network</i> | 33 |
| Figura 12 – Malha $i(n+1)$ | 33 |
| Figura 13 – Circuito 1 - <i>ladder network</i> com 9 malhas | 39 |
| Figura 14 – Circuito 2 - <i>ladder network</i> com 6 malhas | 40 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (31)) e Computacionais <i>multisim</i> | 40 |
| Tabela 2 – Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (31)) e Computacional | 41 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|----------------------------------|
| EDO | Equações diferenciais ordinárias |
| LKT | Lei de Kirchhoff das Tensões |
| PG | Progressão Geométrica |
| RDC | Região de Convergência |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | OBJETIVOS | 12 |
| 2 | REFERENCIAL TEÓRICO | 13 |
| 2.1 | TRANSFORMADA Z | 13 |
| 2.1.1 | Região de Convergência | 13 |
| 2.1.1.1 | <i>Série Geométrica</i> | 14 |
| 2.1.2 | Propriedades da Transformada Z | 16 |
| 2.2 | TRANSFORMADA Z INVERSA | 17 |
| 2.2.1 | Expansão em Série de Potências | 17 |
| 2.2.2 | Expansão em Frações Parciais | 19 |
| 2.2.3 | Teorema dos Resíduos | 20 |
| 2.2.3.1 | <i>Transformada Z inversa via método dos resíduos</i> | 22 |
| 2.3 | EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS | 23 |
| 2.3.1 | Equações Lineares de ordem n | 23 |
| 2.4 | COMPONENTES E MÉTODOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS | 25 |
| 2.4.1 | Resistor e Fonte de Tensão | 25 |
| 2.4.1.1 | <i>Lei de Ohm</i> | 25 |
| 2.4.2 | Leis de Kirchhoff | 26 |
| 2.4.2.1 | <i>Lei de Kirchhoff das tensões (lei das malhas)</i> | 28 |
| 3 | METODOLOGIA | 29 |
| 3.1 | PROGRAMA EM PYTHON | 29 |
| 3.1.1 | Biblioteca <i>NumPy</i> | 29 |
| 3.1.2 | Código Utilizado | 30 |
| 3.2 | MULTISIM | 30 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 33 |
| 4.1 | Análise do Circuito 1 | 39 |
| 4.2 | Análise do Circuito 2 | 40 |
| 5 | CONCLUSÃO | 42 |
| | REFERÊNCIAS | 43 |

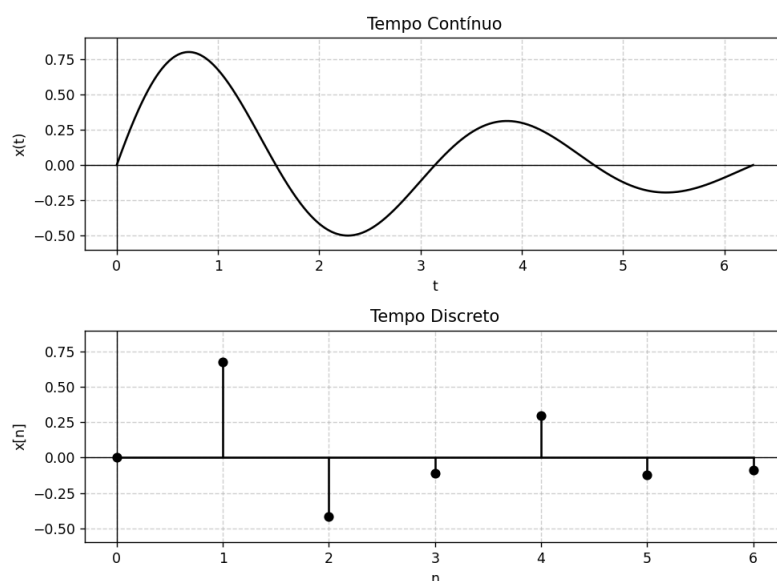
1 INTRODUÇÃO

A análise de circuitos elétricos é uma das bases fundamentais da engenharia elétrica, permitindo a compreensão e o desenvolvimento de sistemas mais complexos. Nos últimos anos, com o crescimento de sistemas digitais e de tempo discreto, a Transformada Z tem ganhado destaque como ferramenta matemática para modelagem, análise e solução de sistemas discretos. Segundo (ELAYDI, 2005), a Transformada Z é muito utilizada na análise e design de controle digital, comunicação e processamento de sinais. Ela desempenha um papel similar a Transformada de Laplace nos sistemas de tempo contínuo, fornecendo um método eficaz para resolver equações de diferença.

Uma equação de diferença descreve a relação entre os valores de uma sequência de números ou sinais discretos em diferentes instantes de tempo. Diferentemente das equações diferenciais, que são aplicadas em sistemas contínuos, onde o tempo é uma variável contínua e envolve derivadas, as equações de diferença lidam com sistemas em que o tempo é discreto e os valores variam em saltos.

Um circuito elétrico discreto é um circuito elétrico ou eletrônico no qual as variáveis de interesse são processadas em tempo discreto, em intervalos regulares definidos por uma frequência de amostragem. Diferenciando dos circuitos analógicos, que operam de forma contínua no tempo.

Figura 1 – Tempo contínuo x Tempo discreto



Fonte: Autor

Os circuitos elétricos em escada, também chamados como *ladder networks* é o tipo de circuito analisado nesse trabalho, que é uma classe de circuitos usados na modelagem de sistemas elétricos e eletrônicos devido sua estrutura modular e repetitiva, consiste em dois condutores paralelos conectando uma série de componentes, como resistores, capacitores e indutores, que formam degraus ao longo da rede.

1.1 OBJETIVOS

Analisar a aplicação da Transformada Z na resolução de sistemas dinâmicos descritos por equações de diferença em circuitos elétricos discretos, com ênfase em *ladder networks*, para prever seu comportamento dinâmico e avaliar a viabilidade do método em aplicações reais.

Aplicar as Leis de Kirchhoff e Lei de Ohm para modelar circuitos elétricos discretos por meio de sistemas recorrentes. Utilizar a Transformada Z para resolver as equações algébricas obtidas no domínio da frequência. Realizar simulações computacionais para validar os resultados teóricos. Comparar soluções analíticas e computacionais para avaliar a precisão do método.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TRANSFORMADA Z

Nesta seção, exploraremos os conceitos da Transformada Z, sua definição e principais propriedades. Além disso, discutiremos a Região de Convergência (RDC), um aspecto essencial para garantir a existência da transformada e sua relação com a estabilidade dos sistemas. Essa abordagem fornecerá uma base sólida para aplicações em circuitos elétricos.

A Transformada Z é uma ferramenta matemática utilizada para converter sinais do domínio do tempo discreto n para o domínio da variável complexa z . É muito aplicável a sinais e sistemas que são definidos para instantes de tempo discretos.

A Transformada Z de uma sequência $x(n)$ é dada por:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

onde z é uma variável complexa. É de se notar que $X(z)$ só é definida para regiões do plano complexo, em que o somatório à direita converge. Essa transformada é comumente denominada transformada unilateral. No entanto, os sinais normalmente analisados iniciam em $n = 0$, ou seja, são não nulos a partir desse ponto. Por essa razão, diversos materiais didáticos definem a transformada Z da seguinte forma:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2)$$

2.1.1 Região de Convergência

A RDC é um conceito fundamental ao se utilizar a Transformada Z, é diretamente influenciada pelo sinal $x(n)$, ou seja, se ela é causal ou anti-causal. Os causais são sinais que existem para $t \geq 0$, porém se o sinal existir apenas para $t \leq 0$, o sinal é chamado de anti-causal. Todavia os sinais de interesse prático são os causais, define-se então a transformada unilateral como mostra a equação (2). Segundo (SÁNCHEZ *et al.*, 2018) a transformada Z de uma sequência $x(n)$, pode não estar definida para todo complexo z . Em geral, a região do plano complexo para a qual a transformada $X(z)$ existe é definida como a região de convergência (RDC) da transformada $X(z)$.

Para determinar a RDC de algumas transformadas, é fundamental analisar a série geométrica e a sua correspondente região de convergência.

2.1.1.1 Série Geométrica

Progressão Geométrica (PG) é uma sequência na qual cada termo, a partir do segundo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante chamada razão. De forma geral, uma PG é representada como:

$$\{a, ar, ar^2, ar^3, \dots\},$$

onde $a \in \mathbb{C}$ é o primeiro termo e $r \in \mathbb{C}$ é razão da progressão.

Uma série geométrica corresponde à soma infinita dos termos de uma PG, dada por

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

Dependendo dos valores de a e r essa soma pode ou não convergir. Uma série é chamada de convergente quando a soma de seus termos se aproxima de um valor fixo, sem crescer infinitamente. A série geométrica converge se, somente se, o modulo da razão for estritamente menor que 1, ou seja, $|r| < 1$.

A razão de uma PG é definida como a relação entre um termo qualquer e seu antecessor:

$$r = \frac{\text{termo qualquer}}{\text{termo anterior}} \quad (3)$$

Caso a condição $|r| < 1$ seja satisfeita, teremos

$$S = \frac{a}{1 - r} \quad (4)$$

Exemplo 1. Calcular a Transformada Z de $x(n) = a^n$, para $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Temos que a $X(z) = Z\{x(n)\}$ é definida por

$$\begin{aligned} Z\{x(n)\} &= Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \\ &= \frac{a^0}{z^0} + \frac{a^1}{z^1} + \frac{a^2}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

Calculando a razão

$$r = \frac{az^{-1}}{\frac{a^0}{z^0}} = \frac{az^{-1}}{1} = \frac{a}{z}$$

Então podemos resolver $Z\{a^n\}$ usando a série geométrica:

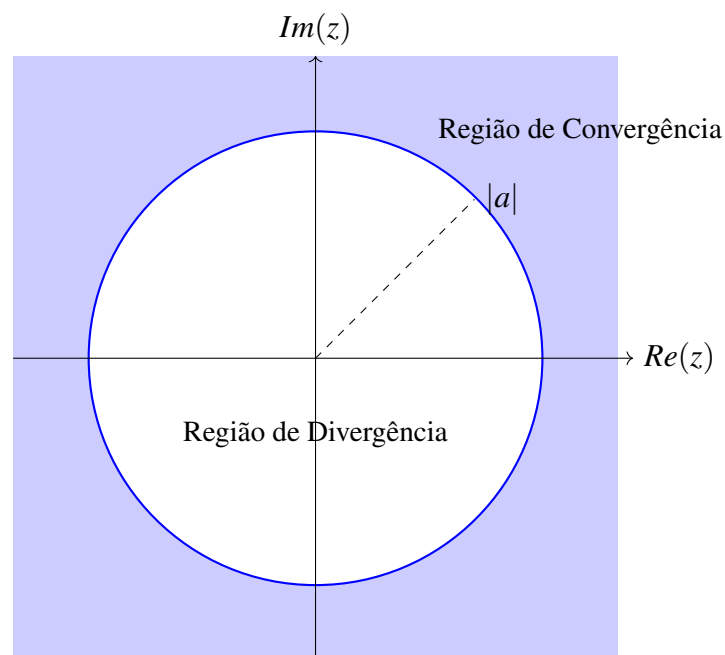
$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Por fim a Transformada Z de $Z\{a^n\}$ é:

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z - a}$$

Então ela converge quando $|\frac{a}{z}| < 1$ para todo $|z| > |a|$.

Figura 2 – Região correspondente a $|z| > |a|$



Fonte: Autor

Quando utilizamos a transformada Z, precisamos garantir que a soma dos valores de um sinal seja bem definida. Isso só ocorre se estivermos dentro da RDC, pois fora dela, a soma dos termos não faz sentido matematicamente e a transformada não pode ser aplicada corretamente.

2.1.2 Propriedades da Transformada Z

Uma de suas principais vantagens é a existência de propriedades que facilitam sua aplicação em diversas situações. Entre elas, destacam-se a linearidade, a convolução e a diferenciação, que permitem manipular sequências e resolver equações de forma mais eficiente.

1. **Diferenciação:** A derivada em relação a z permite obter o momento do sinal. Seja $X(z)$ a transformada de $x(n)$, tem-se:

$$Z\{nx(n)\} = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (5)$$

2. **Linearidade:** A transformada é linear, ou seja, se $x(n)$ e $y(n)$ são duas sequências com as transformadas $X(z)$ e $Y(z)$, então para quaisquer constantes a e b , podemos dizer que:

$$Z\{ax(n) + by(n)\} = aX(z) + bY(z) \quad (6)$$

3. **Similaridade:** Seja uma sequência discreta $x(n)$ com Transformada Z dada por $X(z) = Z\{x(n)\}$, a propriedade da similaridade define que o escalonamento do argumento z corresponde a um escalonamento exponencial da sequência original:

$$Z\{a^n x(n)\} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad (7)$$

Essa propriedade é útil para estudar como o escalonamento exponencial no domínio do tempo afeta a resposta no domínio da Transformada Z.

4. **Translação:** A propriedade de translação é fundamental para entender como deslocar, ou seja, atrasar ou adiantar. Essa translação é dividida em dois casos: à direita (um atraso no tempo) e à esquerda (adiantamento no tempo).

- a) **Translação à Direita:** Se deslocarmos a sequência $x(n)$ para a direita, isso significa atrasá-la no tempo em k amostras. O deslocamento é representado como $x(n-k)$, onde $k > 0$. A Transformada Z dessa sequência é:

$$Z\{x(n-k)\} = z^{-k}X(z), \quad \text{para } |z| > R, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

- b) **Translação à Esquerda:** Se deslocarmos a sequência $x(n)$ para a esquerda, isso significa adiantá-la no tempo em k amostras. O deslocamento é representado como $x(n+k)$, onde $k > 0$. A Transformada Z é dada por:

$$Z\{x(n+k)\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}, \quad \text{para } |z| > R, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

5. **Convolução:** A convolução de duas sequências $x(n)$ e $y(n)$, denotado por $x * y$, é uma nova sequência $w(n)$, definida como:

$$w(n) = x * y = \sum_{k=0}^n x(n-k)y(k) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k). \quad (10)$$

Se $X(z)$ e $Y(z)$ são as transformadas Z de $x(n)$ e $y(n)$, respectivamente, então

$$Z\{w(n)\} = Z\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z) \quad (11)$$

6. **Valor Final** A propriedade do valor final é usada para determinar o valor assintótico de uma sequência discreta $x(n)$ no tempo, ou seja, o valor que $x(n)$ atinge quando $n \rightarrow \infty$ a partir de sua transformada Z $X(z)$. Se $x(n)$ for uma sequência estável e sua Transformada Z $X(z)$ existir, o valor final de $x(n)$ é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (12)$$

2.2 TRANSFORMADA Z INVERSA

A Transformada Z Inversa é uma ferramenta fundamental na análise de sinais e sistemas discretos, permitindo a recuperação de uma sequência discreta $x(n)$ a partir de sua representação no domínio da variável z , que é obtida através da Transformada Z. Este processo de inversão é crucial em diversas aplicações, como processamento de sinais digitais, controle de sistemas, e em muitos casos de engenharia elétrica. Neste trabalho, serão explorados três métodos para o cálculo da Transformada Z inversa:

- Expansão em Série de Potências;
- Expansão em Frações Parciais;
- Teorema dos Resíduos.

2.2.1 Expansão em Série de Potências

A transformada Z é definida como mostrada na Equação (2). Para encontrar $x(n)$, um método direto é expandir $X(z)$ em uma série de potências de z^{-1} e identificar os coeficientes correspondentes aos termos z^{-n} , pois esses coeficientes representam a sequência de entrada no domínio do tempo.

Passos do método:

1. Escrever $X(z)$ como uma série de potências de z^{-1} .
2. Expandir o denominador, se necessário, utilizando séries geométricas.
3. Identificar os coeficientes $x(n)$ diretamente da expansão.

Exemplo 2. Considere a função de transferência na forma:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} \quad (13)$$

Para determinar a Transformada Z inversa, podemos reescrever a função como:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 1} \quad (14)$$

o que possibilita a determinação da sequência utilizando a divisão polinomial.

Figura 3 – Divisão polinomial

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 z^2 \\
 -z^2 - 2z - 1 \\
 \hline
 -2z - 1 \\
 2z + 4 + 2z^{-1} \\
 \hline
 3 + 2z^{-1} \\
 -3 - 6z^{-1} - 3z^{-2} \\
 \hline
 -4z^{-1} - 3z^{-2} \\
 4z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} \\
 \hline
 5z^{-2} + 4z^{-3} \\
 -5z^{-2} - 10z^{-3} - 5z^{-4} \\
 \hline
 -6z^{-3} - 5z^{-4} \\
 \vdots
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | z^2 + 2z + 1 \\
 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4} \dots
 \end{array}$$

Fonte: (SÁNCHEZ *et al.*, 2018)

O quociente da divisão resulta na série:

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4} + \dots$$

Analisando os coeficientes da sequência $x(n) = \{1, -2, 3, -4, 5, \dots\}$, podemos conjecturar que:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = (-1)^n(n+1).$$

Este método é útil quando $X(z)$ pode ser facilmente expandida, mas pode ser ineficiente para funções racionais mais complexas.

2.2.2 Expansão em Frações Parciais

A decomposição em frações parciais é um método que facilita a obtenção da transformada Z inversa, tornando a expressão $X(z)$ mais simples de manipular. Quando $X(z)$ é dada como a razão de dois polinômios, $D(z)$ e $E(z)$, temos:

$$X(z) = \frac{D(z)}{E(z)}$$

O objetivo é reescrevê-la como uma soma de frações mais simples, cuja transformada inversa seja conhecida. Essa técnica, amplamente utilizada na integração de funções racionais comuns, é adaptada à transformada Z considerando frações que correspondam a sequências reconhecíveis.

Para estabelecer a transformada Z inversa, precisamos adotar uma forma de facilitar a determinação dessa decomposição em frações parciais para $X(z)$, que é considerar inicialmente

$$\frac{X(z)}{z},$$

e determinar uma decomposição simples para essa expressão e, em seguida, obter a decomposição para $X(z)$ multiplicando pelo termo z .

Exemplo 3. *Seja a função de transferência*

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \quad (15)$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)}$$

Observe que:

$$\frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = \frac{\alpha(z-3) + \beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha + \beta)z - (3\alpha + 2\beta)}{(z-2)(z-3)}.$$

Dessa forma, conclui-se que, para garantir a igualdade, os coeficientes α e β devem satisfazer:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 0 \\ -3\alpha - 2\beta &= 1\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, seja por qualquer método obtemos os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}.$$

Multiplicando pelo termo z

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)}.$$

Notamos que os termos na soma correspondem às transformadas Z de sequências da forma a^n como calculado no exemplo da subseção 2.1.1.1. Sendo mais preciso, se

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha z}{(z-2)} + \frac{\beta z}{(z-3)}.$$

com $a = 2$ e $a = 3$, respectivamente, portanto temos

$$Z^{-1}\{X(z)\} = \alpha 2^n + \beta 3^n$$

substituindo os valores de α e β , concluímos que a inversa de $X(z)$ é

$$Z^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Esse método é poderoso para funções racionais e frequentemente usado em circuitos elétricos discretos.

2.2.3 Teorema dos Resíduos

O Teorema dos Resíduos oferece uma abordagem fundamentada para o cálculo da Transformada Z inversa por meio de integração no plano complexo. Além disso, é abordada a

derivada complexa, que representa a taxa de variação de uma função de variável complexa, de forma análoga à derivada no cálculo real.

Definição (Função analítica). Uma função $f(z)$ é dita *analítica* em um ponto do plano complexo se ela admite derivada complexa nesse ponto e em uma vizinhança ao seu redor. Quando isso ocorre em todos os pontos de um domínio, diz-se que f é analítica nesse domínio.

De acordo com o Teorema 6.21 do livro (FERNANDES, 2016), se $f(z)$ é uma função analítica em uma coroa $r < |z - z_0| < R$, ela pode ser representada por uma série de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde os coeficientes a_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

No contexto da Transformada Z, deseja-se recuperar a sequência $x(n)$ a partir de sua transformada $X(z)$. Comparando com a série de Laurent, nota-se que os coeficientes da expansão correspondem aos termos $x(n)$, com $a_{-n} = x(n)$. Assim, para cada $n \geq 0$, tem-se:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz.$$

Definição (Pólo). Diz-se que z_0 é um *pólo de ordem m* de uma função $f(z)$ se $f(z)$ não é analítica em z_0 , mas $(z - z_0)^m f(z)$ é analítica em z_0 , e m é o menor inteiro positivo com essa propriedade.

Os pólos são importantes porque determinam a resposta do sistema e sua estabilidade. Se todos estiverem dentro do círculo unitário ($|z| < 1$), o sistema é estável, porém se algum pólo estiver fora ($|z| > 1$) o sistema é instável.

Definição (Resíduo). O *resíduo* de uma função $f(z)$ em um ponto z_0 é o coeficiente a_{-1} da série de Laurent de $f(z)$ em torno de z_0 :

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Se a função $X(z)$ possui k polos no interior de uma curva fechada simples C , orientada positivamente, então o Teorema dos Resíduos garante que:

$$x(n) = \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j} [z^{n-1} X(z)],$$

de onde concluímos que a transformada Z inversa é calculada fazendo a soma dos resíduos.

Cálculo do resíduo:

- Para um **pólo simples** (ordem 1), o resíduo é dado por:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (16)$$

- Para um **pólo de ordem m**, o resíduo é:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

2.2.3.1 Transformada Z inversa via método dos resíduos

Exemplo 4. Seja $X(z)$ a equação (15), a mesma mostrada no método de expansão frações parciais.

Para determinar a transformada Z inversa utilizando esse método devemos multiplicar $X(z)$, por z^{n-1}

$$X(z) = \frac{z(z^{n-1})}{(z-2)(z-3)} = \frac{z^n}{(z-2)(z-3)}$$

A função $X(z)$ tem pólos em $z = 2$ e $z = 3$, portanto precisamos calcular os resíduos para ambos os pólos. Aplicando a equação (16), temos para:

- $z = 2$

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^n}{z-3} = \frac{2^n}{2-3} = -2^n \end{aligned}$$

- $z = 3$

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^n}{z-2} = \frac{3^n}{3-2} = 3^n \end{aligned}$$

Pelo teorema dos resíduos, a Transformada Z inversa é a soma dos resíduos:

$$x(n) = 3^n - 2^n$$

2.3 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

As equações de diferenças são a versão discreta das equações diferenciais e são amplamente usadas para modelar sistemas dinâmicos em tempo discreto.

Assim como a Transformada de Laplace é essencial na resolução de equações diferenciais, a Transformada Z desempenha um papel fundamental na solução das equações de diferenças. Essas equações podem ser analisadas de forma puramente matemática ou aplicadas a problemas de modelagem em diversas áreas, como processamento digital de sinais, análise de momentos de flexão, crescimento populacional, matemática financeira e computação.

As equações de diferenças podem ser escritas na forma:

$$f(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)) = 0 \quad (17)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots, k \geq 0$ e $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função discreta.

2.3.1 Equações Lineares de ordem n

Nesta seção, abordaremos as equações de diferenças lineares de ordem n homogêneas com coeficientes constantes. Essas equações podem ser expressas da seguinte maneira:

$$a_n y(n+N) + a_{n-1} y(n+N-1) + \dots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = 0 \quad (18)$$

onde $y(n)$ é uma sequência, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são coeficientes constantes e N é a ordem da equação, definida pelo maior atraso N .

A abordagem para resolver essa equação consiste em procurar soluções da forma:

$$y(n) = \lambda^n \quad (19)$$

onde λ é um número real ou complexo.

Substituindo λ^n na equação (18), temos a equação característica associada:

$$a_n \lambda^{n+N} + a_{n-1} \lambda^{n+N-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (20)$$

Fatorando λ^n

$$\lambda^n (a_n \lambda^N + a_{n-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_1 \lambda^{1-n} + a_0 \lambda^{-n}) = 0 \quad (21)$$

Dividindo toda a equação por λ^n

$$a_n \lambda^N + a_{n-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_1 \lambda^{1-n} + a_0 \lambda^{-n} = 0 \quad (22)$$

E de forma análoga como nas Equações diferenciais ordinárias (EDO) as soluções da equação dependem das raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ da equação.

- **CASO 1** Raízes reais distintas: Seja as raízes da equação $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, a solução geral é da forma:

$$y(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n \quad (23)$$

- **CASO 2** Raízes reais e repetidas: Se a raiz λ tem multiplicidade m , a solução corresponderá a:

$$y(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \dots + c_{m-1} n^{m-1}) \lambda^n \quad (24)$$

- **CASO 3** Raízes complexas: Se as raízes da equação são complexas, $\lambda_{1,2,\dots,k} = \alpha \pm i\beta$, neste caso a solução geral será:

$$y(n) = c_1 (\alpha - i\beta)^n + c_2 (\alpha + i\beta)^n + \dots + c_k (\alpha + i\beta)^n \quad (25)$$

Exemplo 5. *Vamos determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2*

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n (\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

Assim, obtemos as soluções fundamentais $y_1(n) = (-2)^n$ e $y_2(n) = 2^n$. Portanto, a solução geral é

$$y(n) = c_1 (-2)^n + c_2 2^n$$

2.4 COMPONENTES E MÉTODOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS

A análise de circuitos elétricos é um campo essencial da engenharia elétrica e eletrônica, permitindo a compreensão do comportamento de sistemas elétricos e eletrônicos em diferentes condições operacionais. Para isso, é fundamental conhecer os principais componentes utilizados nesses circuitos, bem como os métodos empregados para sua análise.

Nesta seção, exploraremos os elementos básicos dos circuitos elétricos, como resistores, e fonte de tensão. Além disso, apresentaremos os principais métodos de análise de circuitos, como a Lei de Ohm e Lei de Kirchhoff.

2.4.1 Resistor e Fonte de Tensão

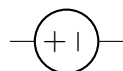
Os resistores são componentes passivos que limitam ou regulam a corrente elétrica em um circuito. Eles obedecem à Lei de Ohm.

Símbolo do Resistor:



A fonte de tensão é um dispositivo que fornece uma diferença de potencial elétrico entre seus terminais, permitindo a circulação de corrente elétrica em um circuito. Ela permite a passagem de corrente elétrica em um resistor quando ambos estão conectados em um circuito fechado. A corrente flui do terminal positivo da fonte, atravessa o resistor e retorna ao terminal negativo.

Símbolo representativo da fonte de tensão:



2.4.1.1 Lei de Ohm

A lei de Ohm é um dos princípios fundamentais da eletricidade, é fundamental para o entendimento e resolução de circuitos elétricos. Sendo formulada em 1827 pelo físico e matemático alemão Georg Simon Ohm (1789-1854), ele conduziu uma série de experimentos utilizando fios de diferentes materiais e comprimentos, aplicando tensões conhecidas e medindo a corrente elétrica passada pelo fio.

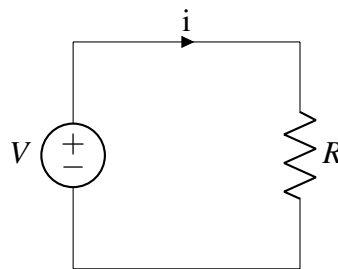
A partir desses experimentos a lei de Ohm certifica que a tensão em um resistor é diretamente proporcional à corrente que passa por ele.

$$V(t) = Ri(t) \quad (\text{Tempo contínuo}) \quad (26)$$

$$V(n) = Ri(n) \quad (\text{Tempo discreto}) \quad (27)$$

Onde V é a tensão medida em volts (V), i é a corrente elétrica medida amperes (A), R é a resistência medida em ohms (Ω).

Figura 4 – Circuito Equivalente da Lei de Ohm



Fonte: Autor

Segundo (BOYLESTAD, 2011), essa expressão mostra que para uma resistência de valor fixo, quanto maior a tensão aplicada aos terminais de um resistor, maior vai ser a corrente do mesmo, e que, para uma tensão fixa, quanto maior for a resistência, menor vai ser a corrente.

2.4.2 Leis de Kirchhoff

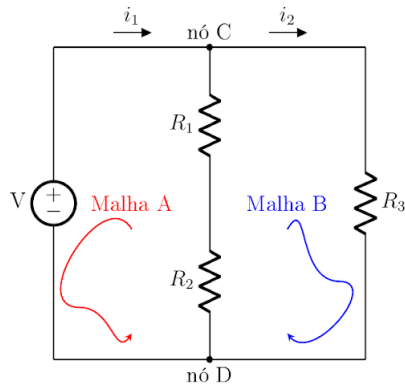
As leis de Kirchhoff, fundamentais para análise de circuitos elétricos, foram desenvolvidas por Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) em meados do século XIX. Suas contribuições tiveram grande impacto na física, especialmente nas áreas de circuitos elétricos e espectroscopia. Suas leis foram publicadas em 1845, quando ele ainda era um jovem estudante, e rapidamente se tornaram pilares da teoria dos circuitos elétricos. Elas podem ser representadas para corrente e tensão.

Para um melhor entendimento das leis de Kirchhoff, será necessário compreender o que são nós e malhas nos circuitos elétricos:

- Um nó é um ponto do circuito onde dois ou mais componentes são conectados, é o local onde a corrente elétrica pode ser dividida ou se encontrar, ou seja, é uma junção onde três ou mais ramos se conectam.

- Uma malha é o menor caminho fechado possível em um circuito. A análise de malhas é uma técnica comum para resolver circuitos usando a Lei das Tensões de Kirchhoff (LKT).

Figura 5 – Exemplo Nó e Malha



Fonte: Autor

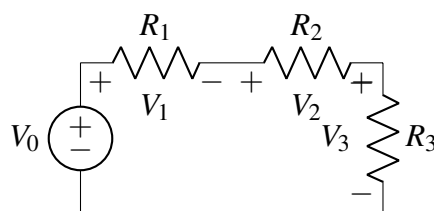
2.4.2.1 Lei de Kirchhoff das tensões (lei das malhas)

A Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), afirma que a soma algébrica das quedas de tensão em uma malha fechada é igual a zero. Pode ser expressa matematicamente como:

$$\sum V_n = 0 \quad (28)$$

Sabendo que tensão pode ser representada como mostrado na equação (26), sendo assim temos:

Figura 6 – Soma de tensões



Fonte: Autor

$$-V_0 + V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

Como a corrente que passa entre eles é a mesma temos então:

$$V_0 = R_1 i + R_2 i + R_3 i = 0$$

Dessa maneira que é feita uma soma algébrica de tensões seguindo a Lei das malhas.

3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho consiste na combinação de pesquisa teórica e computacional, visando à modelagem, análise e validação dos resultados. Inicialmente, será realizado um levantamento bibliográfico abrangente para identificar os principais conceitos e técnicas relacionados à Transformada Z e sua aplicação em circuitos elétricos discretos. Em seguida, as Leis de Kirchhoff e Lei de Ohm serão aplicadas para modelar os circuitos em escada como sistemas recorrentes, gerando equações de diferenças no domínio discreto.

Para solucionar essas equações, utiliza-se a Transformada Z, convertendo os sistemas de equações de diferenças em equações algébricas no domínio. Após a equação de $i(n)$ ser concedida, será utilizado um programa em python para calcular para cada valor de n , afim de simplificar o cálculo manual. As soluções serão validadas através de simulações computacionais, empregando ferramentas como Multisim.

Além disso, serão realizados testes com diferentes configurações de circuitos para analisar a robustez do método. Os resultados obtidos serão analisados à luz das teorias existentes, visando à verificação da eficácia da metodologia proposta. Todo o processo será documentado de forma sistemática para posterior apresentação e discussão.

3.1 PROGRAMA EM PYTHON

Para calcular as correntes em cada instante n , foi desenvolvido um programa em Python com o objetivo de automatizar e simplificar os cálculos manuais, tornando o processo mais eficiente e menos suscetível a erros. A escolha dessa linguagem se deu devido à sua sintaxe intuitiva, ampla disponibilidade de bibliotecas matemáticas e excelente desempenho na execução de cálculos numéricos.

3.1.1 Biblioteca *NumPy*

O *NumPy* é uma biblioteca fundamental para computação numérica em Python, amplamente utilizada em áreas como ciência de dados, engenharia e simulações matemáticas. Ele fornece suporte para arrays multidimensionais e um conjunto extenso de funções matemáticas otimizadas, permitindo cálculos eficientes e rápidos.

3.1.2 Código Utilizado

Figura 7 – Código criado em Python

```

1  import numpy as np # importação da biblioteca numpy
2
3  alpha = (3 + np.sqrt(5)) / 2 # cálculo do alpha
4  beta = (3 - np.sqrt(5)) / 2 # cálculo do beta
5  omega = np.log(alpha) # cálculo do omega
6  i_0 = 1.23607 # corrente inicial
7  V = 20 # tensão aplicada
8  R = 10 # resistência
9
10 for n in range(0,6): # 0 ≤ n ≤ 6
11     # equação final da corrente
12     i_n = (i_0*np.cosh(omega*n)) + ((i_0/2) - (V/R)) * (2/np.sqrt(5)) * np.sinh(omega*n)
13     # mostra os valores para cada valor de n
14     print(f"i({n}) = {i_n:.4f}")

```

Fonte: Autor

Exemplo de saída do código

Figura 8 – Exemplo de saída das correntes $i(n)$

```

i(0) = 1.2361
i(1) = 0.4721
i(2) = 0.1803
i(3) = 0.0689
i(4) = 0.0264
i(5) = 0.0102

```

Fonte: Autor

3.2 MULTISIM

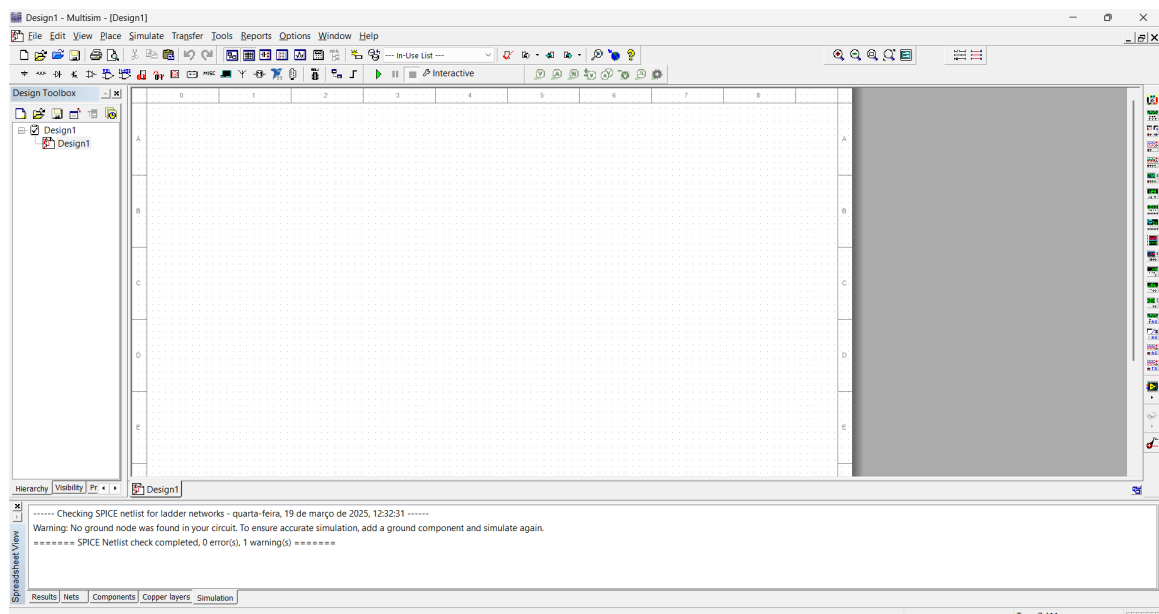
O *Multisim* é um *software* de simulação de circuitos elétricos e eletrônicos desenvolvido pela *National Instruments*. Ele é amplamente utilizado para projetar, simular e analisar circuitos analógicos e digitais de forma intuitiva e eficiente. Seu ambiente gráfico facilita a criação e a simulação de circuitos sem a necessidade de montagem física, permitindo a análise detalhada do comportamento dos componentes antes da implementação real.

A utilização do *Multisim* será fundamental para a análise e validação dos resultados obtidos a partir da equação da corrente. O software permitirá a simulação do circuito e a

comparação direta com os valores teóricos, verificando se os resultados realmente coincidem. Essa abordagem contribui para uma maior precisão na análise, garantindo que a modelagem matemática represente fielmente o comportamento real do sistema. O mesmo apresenta muitas vantagens, tais como:

- **Ampla utilização no meio acadêmico** - Ele é muito empregado em universidades, institutos técnicos e centros de pesquisa para auxiliar no ensino e na aprendizagem de circuitos elétricos e eletrônicos.
- **Interface gráfica intuitiva** – O software possui um ambiente visual de fácil uso, permitindo a criação de circuitos de forma arrastar e soltar.
- **Simulação precisa** – Utiliza um motor de simulação baseado no *SPICE*, garantindo cálculos realistas de tensões, correntes e comportamento dos componentes.
- **Biblioteca extensa de componentes** – Contém milhares de componentes reais de fabricantes, permitindo uma simulação mais fiel ao mundo real.
- **Análise avançada** – Oferece diversas ferramentas de medição, como osciloscópio, multímetro e analisador de espectro, possibilitando uma avaliação detalhada do desempenho do circuito.

Figura 9 – *Multisim*

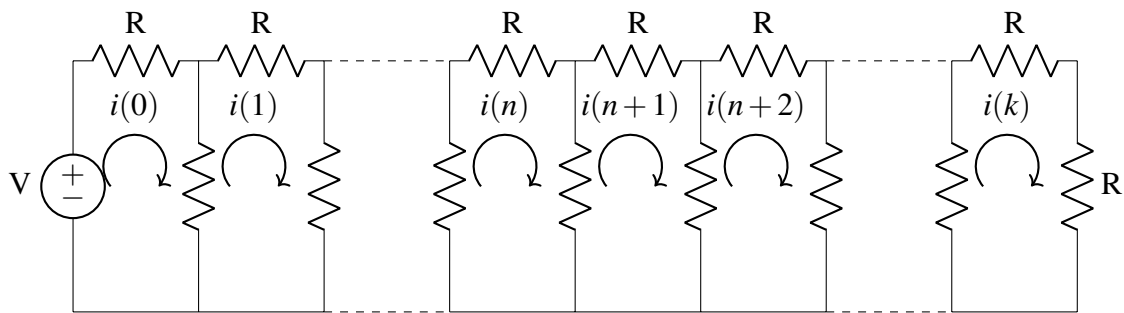


Fonte: Autor (*Multisim*)

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, adotamos um circuito elétrico, conhecido como *ladder network*, mostrado na Figura 11, onde $i(n)$ é a corrente que circula em cada malha. Podemos notar que é um circuito grande, e fica evidente que a aplicação somente de técnicas de análise de circuitos para determinar as correntes demandaria um grande esforço. Por exemplo, ao utilizar a LKT, seria necessário aplicar em cada malha, teríamos k equações, resultando em um sistema extenso e de difícil resolução. O objetivo, portanto, é empregar a Transformada Z para simplificar o problema e facilitar o cálculo de $i(n)$ para cada valor de n .

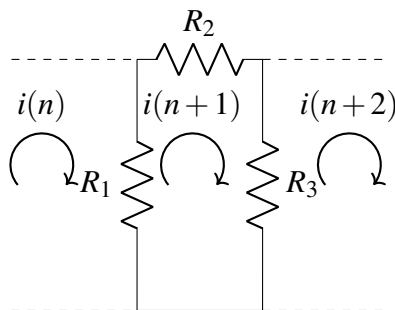
Figura 11 – *ladder network*



Fonte: Autor

Para resolver o circuito utilizaremos a LKT aplicada na malha $i(n+1)$. Isso envolve a soma das tensões em cada componente da malha, especificamente somando as tensões em todos os resistores.

Figura 12 – Malha $i(n+1)$



Fonte: Autor

$$V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = 0$$

Como os resistores R_1 e R_3 estão entre duas malhas, a corrente que os atravessa corresponde à diferença entre as correntes interna e externa.

$$V_{R1} = R_1 i_1 = R_1 [i(n+1) - i(n)]$$

$$V_{R2} = R_2 i_2 = R_2 i(n+1)$$

$$V_{R3} = R_3 i_3 = R_3 [i(n+1) - i(n+2)]$$

Como sabemos a tensão em cada resistor podemos somar

$$R_1 [i(n+1) - i(n)] + R_2 i(n+1) + R_3 [i(n+1) - i(n+2)]$$

$R_1 = R_2 = R_3 = R$, podemos colocar R em evidência

$$R [i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2)] = 0$$

Dividindo toda a equação por R :

$$i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2) = 0$$

Simplificando:

$$i(n+2) - 3i(n+1) + i(n) = 0 \quad (29)$$

Temos, portanto, uma Equação de Diferenças de ordem 2 que pode ser resolvida utilizando a Transformada Z :

$$Z\{i(n+2)\} - 3Z\{i(n+1)\} + Z\{i(n)\} = 0$$

Para resolver $Z\{i(n+2)\}$ e $Z\{i(n+1)\}$, devemos aplicar a propriedade da Translação a Esquerda, como ilustrado na equação (9).

$$Z\{i(n+2)\} = z^2 I(z) - \sum_{n=0}^{2-1} i(n) z^{2-n}$$

$$Z\{i(n+2)\} = z^2 I(z) - z^2 i(0) - zi(1)$$

e

$$Z\{i(n+1)\} = z^1 I(z) - \sum_{n=0}^{1-1} i(n)z^{1-n}$$

$$Z\{i(n+1)\} = zI(z) - zi(0)$$

Temos então

$$z^2 I(z) - z^2 i(0) - zi(1) - 3[zi(0) - zI(z)] + I(z) = 0$$

Organizando a equação:

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + zi(1) - 3zi(0)$$

No entanto, observa-se a presença de $i(0)$ e $i(1)$, sendo necessário expressar a equação em termos apenas da condição inicial $i(0)$.

Para resolver esse problema aplicamos a LKT na malha inicial:

$$-V + Ri(0) + R[i(0) - i(1)] = 0$$

ou

$$i(1) = 2i(0) - \frac{V}{R}$$

Substituindo $i(1)$ na equação reorganizando os termos, obtemos:

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + 2zi(0) - z\frac{V}{R} - 3zi(0)$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = [z^2 - z]i(0) - z\frac{V}{R}$$

Isolamos $I(z)$:

$$I(z) = \frac{[z^2 - z]i(0) - z\frac{V}{R}}{[z^2 - 3z + 1]}$$

O próximo passo é calcular a Transformada Z inversa de $I(z)$ a fim de obter a equação da corrente $i(n)$. Para isso usamos o Método da Decomposição em Fracções Parciais mostrada na subsecção 2.2.2.

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

Onde α e β são raízes da equação $z^2 - 3z + 1$, calculadas usando a fórmula de Bhaskara:

$$z = 3 \pm \frac{\sqrt{9 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Resolvendo por frações parciais:

$$\frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A(z - \beta) + B(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

$$\begin{cases} A + B = i(0) & (1) \\ -\beta A - \alpha B = -i(0) - \frac{V}{R} & (2) \end{cases} \quad (30)$$

Multiplicando a equação 1 por $(-\beta)$ e somando com a segunda, temos:

$$B(\alpha - \beta) = (1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}$$

Temos que B é:

$$B = \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

Para resolver A, substituímos B na equação 1 do sistema:

$$A = i(0) - B$$

$$A = i(0) - \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

$$A = \frac{(\alpha - 1)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

Logo:

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

$$I(z) = \frac{Az}{z - \alpha} + \frac{Bz}{z - \beta}$$

Para encontrar precisamos calcular a Transformada Z Inversa de $I(z)$, determinada a seguir:

$$Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{Az}{z - \alpha}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{Bz}{z - \beta}\right\}$$

Porém no Exemplo 1 calculamos a Transformada Z de $Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$, isso significa que a inversa de $\frac{z}{z-a}$ é a^n . Portanto facilmente conseguimos calcular a inversa de $\frac{Az}{z-\alpha}$ e $\frac{Bz}{z-\beta}$.

Pela propriedade da linearidade, temos:

$$i(n) = AZ^{-1}\left\{\frac{z}{z - \alpha}\right\} + BZ^{-1}\left\{\frac{z}{z - \beta}\right\}$$

$$i(n) = A\alpha^n + B\beta^n$$

Note que $\alpha \cdot \beta = 1$

$$\alpha \cdot \beta = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9 - 5}{4} = 1$$

Portanto, seja $\omega = \ln(\alpha)$, temos que $\alpha = e^\omega$, e $\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e^\omega} = e^{-\omega}$. Podemos rescrever em termos de Funções Hiperbólicas:

$$\cosh(\omega) = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$$

e

$$\sinh(\omega) = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Sabemos que:

$$e^{\omega n} = \cosh(\omega n) + \sinh(\omega n)$$

$$e^{-\omega n} = \cosh(\omega n) - \sinh(\omega n)$$

Substituindo na equação de $i(n)$:

$$i(n) = A(\cosh(\omega n) + \sinh(\omega n)) + B \cosh(\omega n) - \sinh(\omega n)$$

$$i(n) = (A + B) \cosh(\omega n) + (A - B) \sinh(\omega n)$$

A partir do sistema linear (30) obtido por meio do método das frações parciais, concluímos que $A + B = i(0)$, Agora, resta calcular $A - B$:

$$A - B = \frac{(\alpha - 1)i(0) - \frac{V}{R}}{\alpha - \beta} - \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{\alpha - \beta}$$

$$A - B = \frac{(\alpha + \beta + 2) - \frac{2V}{R}}{\alpha - \beta}$$

$$A - B = \frac{(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 2)i(0) - \frac{2V}{R}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$A - B = \frac{i(0) - \frac{2V}{R}}{\sqrt{5}}$$

Simplificando, obtemos;

$$A - B = \frac{i(0)}{\sqrt{5}} - \frac{2V}{\sqrt{5}R}$$

Colocando o 2 e $\sqrt{5}$ em evidência, temos:

$$(A - B) = \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R} \right) \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Por fim, temos que a equação da corrente $i(n)$ é dada como:

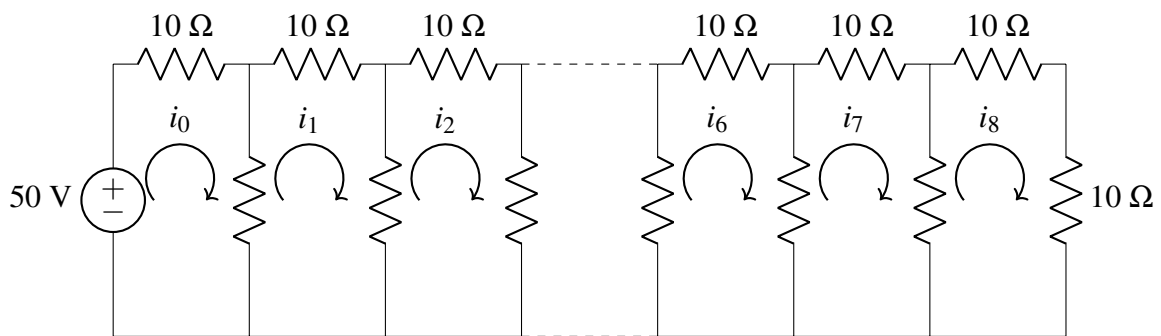
$$i(n) = i(0) \cosh(\omega n) + \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R} \right) \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\omega n) \quad (31)$$

Para validar os resultados obtidos analiticamente foram selecionados dois circuitos com diferentes valores de resistência, tensão e quantidade de malhas. Os resultados da equação (31), implementada em Python, foram comparadas com simulações realizadas no *Software Multisim*. Para calcular a corrente $i(n)$ em diferentes instantes foi desenvolvido um programa em Python com objetivo de automatizar o processo e reduzir a necessidade de cálculos manuais.

4.1 Análise do Circuito 1

Dados do circuito: $i_0 = 3,09017 \text{ A}$, $V = 50 \text{ V}$ e $R = 10 \Omega$

Figura 13 – Circuito 1 - *ladder network* com 9 malhas



Fonte: Autor

A Figura 13 mostra um circuito do tipo *ladder*, composto por 9 malhas em série, com resistores de 10Ω e uma fonte de 50 V . Colocando os dados na fórmula (31) juntamente com o valor de $\omega = \ln(\alpha)$, sendo que $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, temos:

$$i(n) = 3,09017 \cos \left(\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n \right) \right) + \left(\frac{3,09017}{2} - \frac{50}{10} \right) \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \left(\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n \right) \right)$$

Como o circuito apresenta 9 malhas, foram calculados a corrente $i(n)$ para $0 \leq n \leq 8$ conforme mostra na Tabela 1:

Tabela 1 – Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (31)) e Computacionais *multisim*

| n | Analíticos (Equação (31)) | Computacionais (<i>Multisim</i>) |
|---|---------------------------|------------------------------------|
| 0 | 3.0902 | 3.09 |
| 1 | 1.1803 | 1.18 |
| 2 | 0.4509 | 0.451 |
| 3 | 0.1722 | 0.172 |
| 4 | 0.0658 | 0.0658 |
| 5 | 0.0251 | 0.0251 |
| 6 | 0.0096 | 0.00957 |
| 7 | 0.0037 | 0.00359 |
| 8 | 0.0015 | 0.0012 |

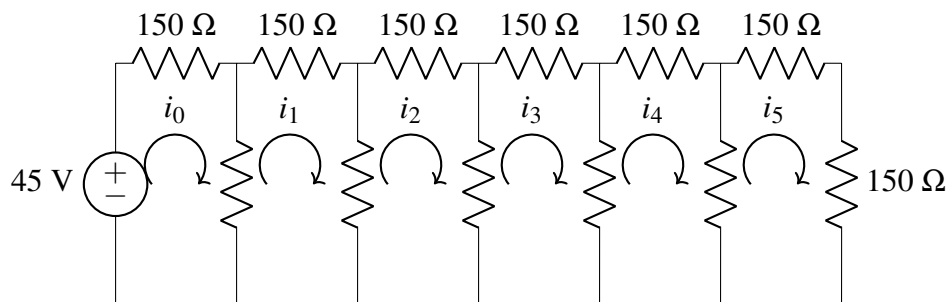
Fonte: Autor

Observa-se que os valores obtidos analiticamente coincidem com os resultados da simulação computacional em duas casas decimais, demonstrando a consistência entre as abordagens analítica e computacional.

4.2 Análise do Circuito 2

Dados do circuito: $i_0 = 0.185408 \text{ A}$, $V = 45 \text{ V}$ e $R = 150 \Omega$

Figura 14 – Circuito 2 - *ladder network* com 6 malhas



Fonte: Autor

O circuito mostrado na Figura 14 apresenta 6 malhas, resistores de $150 \, \Omega$ e uma fonte de $45 \, V$, de forma análoga calculamos a corrente para $0 \leq n \leq 6$.

$$i(n) = 0.185408 \cos \left(\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n \right) \right) + \left(\frac{0.185408}{2} - \frac{45}{150} \right) \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \left(\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n \right) \right)$$

Tabela 2 – Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (31)) e Computacional

| n | Analíticos (Equação (31)) | Computacionais (<i>Multisim</i>) |
|---|---------------------------|------------------------------------|
| 0 | 0.18541 | 0.185 |
| 1 | 0.07082 | 0.0708 |
| 2 | 0.02704 | 0.027 |
| 3 | 0.01030 | 0.0103 |
| 4 | 0.00387 | 0.00386 |
| 5 | 0.00131 | 0.00129 |

Fonte: Autor

Podemos verificar novamente que os valores computacionais e analíticos coincidem, demonstrando a eficácia do método utilizado. Além disso, os valores mostram que a corrente decai conforme n aumenta, o que é esperado em uma rede *ladder* devido à dissipação progressiva da tensão ao longo das malhas. Isso reforça a precisão do modelo matemático utilizado para a análise desses circuitos discretos.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar a aplicação da Transformada Z na resolução de circuitos elétricos discretos, com ênfase nos circuitos de escada. A abordagem demonstrou a eficácia da Transformada Z na conversão de equações de diferença em expressões algébricas, o que facilita a resolução e permite uma melhor compreensão do comportamento dinâmico dos circuitos.

A metodologia empregada, que combinou a formulação matemática com simulações computacionais no *Multisim*, confirmou a precisão dos resultados obtidos analiticamente. Os valores das correntes $i(n)$ calculados a partir da equação deduzida mostraram-se coerentes com aqueles obtidos na simulação, validando a aplicabilidade do método. Além disso, o desenvolvimento de um programa em Python permitiu a automatização dos cálculos, reduzindo erros manuais e tornando a análise mais eficiente.

Os resultados obtidos evidenciam as vantagens do uso da Transformada Z para a análise de circuitos elétricos de tempo discreto, proporcionando um método robusto e sistemático para a solução de problemas recorrentes nessa área.

Para trabalhos futuros, sugere-se a ampliação do estudo para circuitos com elementos mais complexos, como capacitores e indutores, bem como a exploração da Transformada Z em sistemas de controle digital. Além disso, a integração de outras ferramentas computacionais pode permitir a análise de circuitos mais avançados e ampliar as aplicações do método em diferentes contextos da engenharia elétrica.

REFERÊNCIAS

- BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 978-85-64574-20-5.
- ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. [s.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- FERNANDES, N. d. C. B. J. Cecília de S. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. 4. ed. [S.l.]: SBM, 2016. (Textos Universitários). ISBN 9788583371045.
- KONZEN, P. H. A. **Equações a Diferenças**. [S.l.]: Notas de aula, 2021.
- LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. ISBN 852440048X.
- SÁNCHEZ, A. D. B. *et al.* **Uma Introdução à Transformada Z**. [s.l.]: [s.n], 2018. 122 p. ISBN 978-1986266741.