APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA Z NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS DISCRETOS

Enthony Araujo de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

Orientador: Prof. Dr. Denilson Menezes de Jesus

28 de Março de 2025

Roteiro de Apresentação

- Introdução
- Objetivos
- Transformada Z
- Transformada Z Inversa
- Equações de Diferença
- Componentes e Métodos de Análise de Circuitos
- Metodologia
- Resultados e Discussões
- Conclusão
- Referências

Introdução

A análise de circuitos elétricos é fundamental para a engenharia elétrica. Com o crescimento dos sistemas digitais e de tempo discreto, a Transformada Z se destaca como ferramenta matemática essencial para a modelagem e solução de sistemas dinâmicos. Neste trabalho, exploramos sua aplicação na análise de circuitos elétricos discretos, com foco em *ladder networks*.

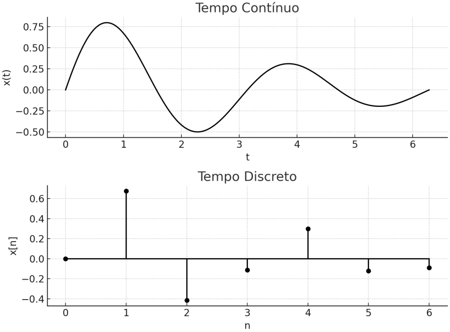
Objetivos

- **Objetivo Geral**
  Analisar a aplicação da Transformada Z na resolução de circuitos elétricos discretos, com ênfase em *ladder networks*.
- **Objetivos Específicos**
  1. Aplicar as Leis de Kirchhoff e a Lei de Ohm para modelar circuitos.
  2. Utilizar a Transformada Z para resolver equações algébricas.
  3. Realizar simulações computacionais para validar os resultados.
  4. Comparar soluções analíticas e computacionais.

Tempo Contínuo x Tempo Discreto

- Um sinal de tempo contínuo é definido para todos os instantes de tempo dentro de um intervalo
- Um sinal de tempo discreto é definido apenas em instantes específicos e separados de tempo.

Figura 1: Tempo contínuo x Tempo discreto



Transformada Z

- A Transformada Z é ferramenta matemática que converte equações de diferenças em equações algébricas.
- Fundamental para sistemas discretos.

Definição

A Transformada Z de uma sequência $x(n)$ é dada por:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1.1}$$

Onde z é uma variável complexa.

Transformada Z - Região de Convergência

- A Região de Convergência (RDC) é um conceito fundamental ao se utilizar a Transformada Z, ela serve para determinar onde a Transformada Z de uma sequência realmente existe, ou seja, A RDC garante que a Transformada Z seja válida.
- Para determinar a RDC de algumas transformadas, é fundamental analisar a série geométrica e a sua correspondente região de convergência.

Considerando uma Progressão Geométrica de razão $r \in \mathbb{C}$ e o termo $a \in \mathbb{C}$. A forma geral de uma PG é:

$$\{a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\}$$

A série geométrica corresponde à soma infinita dos termos de uma PG, dada por:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Dependendo dos valores de a e r essa soma pode ou não convergir. A série geométrica converge se, somente se, o modulo da razão for estritamente menor que 1, ou seja, $|r| < 1$.

Transformada Z - Região de Convergência

A razão de uma PG é definida como a relação entre um termo qualquer e seu antecessor:

$$r = \frac{\text{termo qualquer}}{\text{termo anterior}} \tag{1.2}$$

Caso a condição $|r| < 1$ seja satisfeita, teremos

$$S = \frac{a}{1 - r} \tag{1.3}$$

Transformada Z - Região de Convergência

Exemplo 1: Calcular a Transformada Z de $x(n) = a^n$, para $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que a $X(z) = Z\{x(n)\}$ é definida por:

$$Z\{x(n)\} = Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$$

$$= \frac{a^0}{z^0} + \frac{a^1}{z^1} + \frac{a^2}{z^2} + ...$$

Calculando a razão:

$$r = \frac{az^{-1}}{\frac{a^0}{z^0}} = \frac{az^{-1}}{1} = \frac{a}{z}$$

Então podemos resolver $Z\{a^n\}$ usando a série geométrica:

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Exemplo 1: Calcular a Transformada Z de $x(n) = a^n$, para $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que a $X(z) = Z\{x(n)\}$ é definida por:

$$Z\{x(n)\} = Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$$

$$= \frac{a^0}{z^0} + \frac{a^1}{z^1} + \frac{a^2}{z^2} + ...$$

Calculando a razão:

$$r = \frac{az^{-1}}{\frac{a^0}{z^0}} = \frac{az^{-1}}{1} = \frac{a}{z}$$

Então podemos resolver $Z\{a^n\}$ usando a série geométrica:

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Transformada Z - Região de Convergência

Exemplo 1: Calcular a Transformada Z de $x(n) = a^n$, para $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que a $X(z) = Z\{x(n)\}$ é definida por:

$$Z\{x(n)\} = Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$$

$$= \frac{a^0}{z^0} + \frac{a^1}{z^1} + \frac{a^2}{z^2} + ...$$

Calculando a razão:

$$r = \frac{az^{-1}}{\frac{a^0}{z^0}} = \frac{az^{-1}}{1} = \frac{a}{z}$$

Então podemos resolver $Z\{a^n\}$ usando a série geométrica:

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Transformada Z - Região de Convergência

Exemplo 1: Calcular a Transformada Z de $x(n) = a^n$, para $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.
Temos que a $X(z) = Z\{x(n)\}$ é definida por:

$$Z\{x(n)\} = Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$$

$$= \frac{a^0}{z^0} + \frac{a^1}{z^1} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots.$$

Calculando a razão:

$$r = \frac{az^{-1}}{\frac{a^0}{z^0}} = \frac{az^{-1}}{1} = \frac{a}{z}$$

Então podemos resolver $Z\{a^n\}$ usando a série geométrica:

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

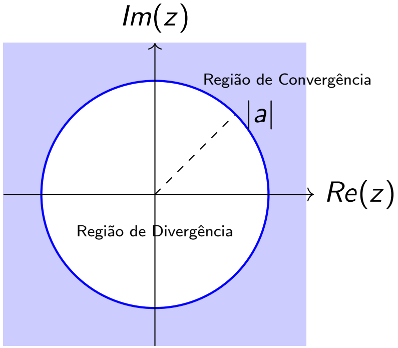
Transformada Z - Região de Convergência

Por fim a Transformada Z de $Z\{a^n\}$ é:

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$

Então ela converge quando $|\frac{a}{z}| < 1$ para todo $|z| > |a|$.

Figura 2: Região correspondente a $|z| > |a|$



Transformada Z - Propriedades

As propriedades da Transformada Z são fundamentais para análise e projeto de sistemas no domínio discreto. Elas simplificam cálculos, facilitam a resolução de equações de diferença e a análise de estabilidade e resposta de sistemas.

Tabela 1: Propriedades da Transformada Z

Propriedade	**Fórmula**
Diferenciação	$\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$
Linearidade	$\mathcal{Z}\{ax(n) + by(n)\} = aX(z) + bY(z)$
Similaridade	$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \neq 0$
Translação à Direita	$\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k}X(z), \quad \|z\| > R, \quad k \in \mathbb{N}$
Translação à Esquerda	$\mathcal{Z}\{x(n+k)\} = z^{k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}, \quad \|z\| > R, \quad k \in \mathbb{N}$
Convolução	$\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z)$
Valor Final	$x(n) = (z-1)X(z)$

Transformada Z Inversa

Processo de recuperação da sequência discreta $x(n)$.
Métodos principais:

1. Expansão em séries de potência
2. Expansão em frações parciais
3. Teorema dos resíduos

Transformada Z Inversa - Expansão em séries de potência

- **Expansão em séries de potências:**

Para encontrar $x(n)$, um método direto é expandir X(z) em uma série de potências de $z^{-}1$ e identificar os coeficientes correspondentes aos termos z^{-n}, pois esses coeficientes representam a sequência de entrada no domínio do tempo.

1. Escrever X(z) como uma série de potências de z^{-1}.
2. Expandir o denominador, se necessário, utilizando séries geométricas.
3. Identificar os coeficientes $x(n)$ diretamente da expansão.

- **Expansão em séries de potências:**

Para encontrar $x(n)$, um método direto é expandir X(z) em uma série de potências de $z^{-}1$ e identificar os coeficientes correspondentes aos termos z^{-n}, pois esses coeficientes representam a sequência de entrada no domínio do tempo.

1. Escrever X(z) como uma série de potências de z^{-1}.
2. Expandir o denominador, se necessário, utilizando séries geométricas.
3. Identificar os coeficientes $x(n)$ diretamente da expansão.

Transformada Z Inversa - Expansão em séries de potência

- **Expansão em séries de potências:**

Para encontrar $x(n)$, um método direto é expandir X(z) em uma série de potências de $z^{-}1$ e identificar os coeficientes correspondentes aos termos z^{-n}, pois esses coeficientes representam a sequência de entrada no domínio do tempo.

1. Escrever X(z) como uma série de potências de z^{-1}.
2. Expandir o denominador, se necessário, utilizando séries geométricas.
3. Identificar os coeficientes $x(n)$ diretamente da expansão.

- **Expansão em séries de potências:**

Para encontrar $x(n)$, um método direto é expandir X(z) em uma série de potências de $z^{-}1$ e identificar os coeficientes correspondentes aos termos z^{-n}, pois esses coeficientes representam a sequência de entrada no domínio do tempo.

1. Escrever X(z) como uma série de potências de z^{-1}.
2. Expandir o denominador, se necessário, utilizando séries geométricas.
3. Identificar os coeficientes $x(n)$ diretamente da expansão.

Transformada Z Inversa - Expansão em séries de potência

Exemplo 2. Considere a função de transferência na forma:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} \tag{1.4}$$

Reescrevendo a função:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 1} \tag{1.5}$$

o que possibilita a determinação de utilizando a divisão polinomial.

Figura 3: Divisão Polinomial

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^2 + 2z + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z^2 - 2z - 1} & 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4} \ldots \\
\quad -2z - 1 & \\
\quad \underline{2z + 4 + 2z^{-1}} & \\
\qquad 3 + 2z^{-1} & \\
\qquad \underline{-3 - 6z^{-1} - 3z^{-2}} & \\
\qquad\quad -4z^{-1} - 3z^{-2} & \\
\qquad\quad \underline{4z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3}} & \\
\qquad\qquad 5z^{-2} + 4z^{-3} & \\
\qquad\qquad \underline{-5z^{-2} - 10z^{-3} - 5z^{-4}} & \\
\qquad\qquad\quad -6z^{-3} - 5z^{-4} & \\
\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}
$$

Transformada Z Inversa - Expansão em séries de potência

O quociente da divisão resulta na série:

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4} + \dots$$

Analisando os coeficientes da sequência:

$$x(n)_{n \geq 0} = \{1, -2, 3, -4, 5, \cdots\}$$

- Os valores absolutos seguem $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, ou seja, $|x(n)| = n + 1$.
- O sinal alterna entre positivo e negativo. Isso pode ser expresso por $(-1)^n$.

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = (-1)^n(n + 1).$$

Transformada Z Inversa - Expansão em frações parciais

- **Expansão em frações parciais:**

A decomposição em frações parciais é um método que facilita a obtenção da transformada Z inversa, tornando a expressão X(z) mais simples de manipular.
A forma de facilitar a decomposição é inicialmente considerar:

$$\frac{X(z)}{z} \tag{1.6}$$

Exemplo 3. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)}$$

Observe que:

$$\frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = \frac{\alpha(z-3)+\beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha+\beta)z-(3\alpha+2\beta)}{(z-2)(z-3)}.$$

Exemplo 3. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)}$$

Observe que:

$$\frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = \frac{\alpha(z-3)+\beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha+\beta)z-(3\alpha+2\beta)}{(z-2)(z-3)}.$$

Exemplo 3. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)}$$

Observe que:

$$\frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = \frac{\alpha(z-3)+\beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha+\beta)z-(3\alpha+2\beta)}{(z-2)(z-3)}.$$

Exemplo 3. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

O objetivo é determinar uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)}$$

Observe que:

$$\frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = \frac{\alpha(z-3) + \beta(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{(\alpha+\beta)z - (3\alpha + 2\beta)}{(z-2)(z-3)}.$$

Transformada Z Inversa - Expansão em frações parciais

Dessa forma, conclui-se que, para garantir a igualdade, os coeficientes α e β devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -3\alpha - 2\beta &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, seja por qualquer método obtemos os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}.$$

Multiplicando pelo termo z

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)}.$$

Resultado:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Transformada Z Inversa - Expansão em frações parciais

Dessa forma, conclui-se que, para garantir a igualdade, os coeficientes α e β devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -3\alpha - 2\beta &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, seja por qualquer método obtemos os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}.$$

Multiplicando pelo termo z

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)}.$$

Resultado:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Transformada Z Inversa - Expansão em frações parciais

Dessa forma, conclui-se que, para garantir a igualdade, os coeficientes α e β devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -3\alpha - 2\beta &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, seja por qualquer método obtemos os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}.$$

Multiplicando pelo termo z

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)}.$$

Resultado:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Transformada Z Inversa - Expansão em frações parciais

Dessa forma, conclui-se que, para garantir a igualdade, os coeficientes α e β devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -3\alpha - 2\beta &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, seja por qualquer método obtemos os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, portanto:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}.$$

Multiplicando pelo termo z

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{(z-2)} + \frac{z}{(z-3)}.$$

Resultado:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = -2^n + 3^n.$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos resíduos

- **Teorema dos resíduos:** O Teorema dos Resíduos oferece uma abordagem fundamentada para o cálculo da Transformada Z inversa por meio de integração no plano complexo.
- **Pólos:** Os pólos de uma função X(z) são os valores de z que fazem o denominador da função se anular, tornando X(z) indefinida (ou tendendo ao infinito).

$$\frac{z}{(z-0,5)(z-0,8)}$$

os pólos são obtidos resolvendo $z - 0,5 = 0$ e $z - 0,8 = 0$, ou seja $z = 0,5$ e e $z = 0,8$.

- Residuos: O resíduo de uma função analítica em um polo é o coeficiente do termo $(z - z_0)^{-1}$ na expansão em série de Laurent da função em torno desse ponto.
  1. Para um **pólo simples** (ordem 1):

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1.8}$$

  2. Para um **pólo** de ordem m:

$$\underset{z=z_0}{Res} F(z) = \frac{1}{(1-m)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [z - z_0] F(z) \tag{1.9}$$

Fórmula do Teorema dos Resíduos:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = x(n) = \sum_{j=1}^{k} \text{Res}_{z=z_j} \left[z^{n-1} X(z) \right], \tag{1.10}$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

- Residuos: O resíduo de uma função analítica em um polo é o coeficiente do termo $(z - z_0)^{-1}$ na expansão em série de Laurent da função em torno desse ponto.
  1. Para um **pólo simples** (ordem 1):

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1.8}$$

  2. Para um **pólo** de ordem m:

$$\underset{z=z_0}{Res} F(z) = \frac{1}{(1-m)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [z - z_0] F(z) \tag{1.9}$$

Fórmula do Teorema dos Resíduos:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = x(n) = \sum_{j=1}^{k} \text{Res}_{z=z_j} \left[z^{n-1} X(z) \right], \tag{1.10}$$

Como determinar a transformada Z Inversa a partir do método dos resíduos?

1. Determinar os pólos da função.
2. Calcular o resíduos para cada polo.
3. A tranformada Z Inversa vai ser a soma do resíduos.

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

Como determinar a transformada Z Inversa a partir do método dos resíduos?

1. Determinar os pólos da função.
2. Calcular o resíduos para cada polo.
3. A tranformada Z Inversa vai ser a soma do resíduos.

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

Como determinar a transformada Z Inversa a partir do método dos resíduos?

1. Determinar os pólos da função.
2. Calcular o resíduos para cada polo.
3. A tranformada Z Inversa vai ser a soma do resíduos.

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

Como determinar a transformada Z Inversa a partir do método dos resíduos?

1. Determinar os pólos da função.
2. Calcular o resíduos para cada polo.
3. A tranformada Z Inversa vai ser a soma do resíduos.

Exemplo 4. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.11}$$

Para determinar utilizando esse método devemos multiplicar $X(z)$, por z^{n-1}

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z(z^{n-1})}{(z-2)(z-3)} = \frac{z^n}{(z-2)(z-3)}$$

A função $X(z)$ tem pólos em $z = 2$ e $z = 3$, portanto precisamos calcular os resíduos para ambos os pólos.

- $z = 2$

$$\underset{z=2}{Res} = \lim_{z \to 2}(z-2)\left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)}\right)$$

$$= \lim_{z \to 2}\frac{z^n}{z-3} = \frac{2^n}{2-3} = -2^n$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

Exemplo 4. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.11}$$

Para determinar utilizando esse método devemos multiplicar $X(z)$, por z^{n-1}

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z(z^{n-1})}{(z-2)(z-3)} = \frac{z^n}{(z-2)(z-3)}$$

A função $X(z)$ tem pólos em $z = 2$ e $z = 3$, portanto precisamos calcular os resíduos para ambos os pólos.

- $z = 2$

$$\underset{z=2}{Res} = \lim_{z \to 2}(z-2)\left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)}\right)$$

$$= \lim_{z \to 2}\frac{z^n}{z-3} = \frac{2^n}{2-3} = -2^n$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

Exemplo 4. Seja a função de transferência

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \tag{1.11}$$

Para determinar utilizando esse método devemos multiplicar $X(z)$, por z^{n-1}

$$z^{n-1}X(z) = \frac{z(z^{n-1})}{(z-2)(z-3)} = \frac{z^n}{(z-2)(z-3)}$$

A função $X(z)$ tem pólos em $z=2$ e $z=3$, portanto precisamos calcular os resíduos para ambos os pólos.

- $z = 2$

$$\underset{z=2}{Res} = \lim_{z\to 2}(z-2)\left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)}\right)$$

$$= \lim_{z\to 2}\frac{z^n}{z-3} = \frac{2^n}{2-3} = -2^n$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

- $z = 3$

$$\underset{z=3}{Res} = \lim_{z \to 3} (z-3) \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} \right)$$

$$= \lim_{z \to 3} \frac{z^n}{z-2} = \frac{3^n}{3-2} = 3^n$$

Pelo teorema dos resíduos, a Transformada Z inversa é a soma dos resíduos:

$$x(n) = 3^n - 2^n$$

Transformada Z Inversa - Teorema dos Resíduos

- $z = 3$

$$\underset{z=3}{Res} = \lim_{z \to 3} (z-3) \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} \right)$$

$$= \lim_{z \to 3} \frac{z^n}{z-2} = \frac{3^n}{3-2} = 3^n$$

Pelo teorema dos resíduos, a Transformada Z inversa é a soma dos resíduos:

$$x(n) = 3^n - 2^n$$

Equações de Diferença

Uma importante aplicação da transformada Z é a resolução de equações de diferenças. Podemos relacioná-las sendo uma versão discreta das equações diferenciais.

Definição

As equações de diferenças lineares de ordem n homogêneas com coeficientes constantes podem ser expressas da seguinte maneira:

$$a_n y(n+N) + a_{n-1} y(n+N-1) + \ldots + a_1 y(n+1) + a_0 y(0) = 0 \quad (1.12)$$

A abordagem para resolver essa equação consiste em procurar soluções da forma:

$$y(n) = \lambda^n \quad (1.13)$$

Substituindo λ^n na equação (1.12), temos a equação característica associada:

$$a_n\lambda^{n+N} + a_{n-1}\lambda^{n+N-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{1.14}$$

Fatorando λ^n

$$\lambda^n \left(a_n\lambda^N + a_{n-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda^{1-n} + a_0\lambda^{-n}\right) = 0 \tag{1.15}$$

Dividindo toda a equação por λ^n

$$a_n\lambda^N + a_{n-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda^{1-n} + a_0\lambda^{-n} = 0 \tag{1.16}$$

E de forma análoga como nas EDO's as soluções da equação dependem das raízes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ da equação.

- **CASO 1** Raízes reais distintas: Seja as raízes da equação $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, a solução geral é da forma:

$$y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ...c_k\lambda_k^n \tag{1.17}$$

- **CASO 2** Raízes reais e repetidas: Se a raiz λ tem multiplicidade m, a solução corresponderá a:

$$y(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + ... + c_{m-1} n^{m-1})\lambda^n \tag{1.18}$$

- **CASO 3** Raízes complexas: Se as raízes da equação são complexas, $\lambda_{1,2,...,k} = \alpha \pm i\beta$, neste caso a solução geral será

$$y(n) = c_1(\alpha - i\beta)^n + c_2(\alpha + i\beta)^n + ... + c_k(\alpha + i\beta)^n \tag{1.19}$$

Equações de Diferença

Exemplo 5. Determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2.

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$y(n) = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Solução geral: $y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n$

Exemplo 5. Determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2.

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$y(n) = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Solução geral: $y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n$

Exemplo 5. Determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2.

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$y(n) = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Solução geral: $y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n$

Exemplo 5. Determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2.

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$y(n) = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Solução geral: $y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n$

Exemplo 5. Determinar a solução geral da Equação de Diferença de Ordem 2.

$$y(n+2) - 4y(n) = 0,$$

Inicialmente resolvemos a equação característica associada

$$y(n) = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

Colocando λ^n em evidência

$$\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dividindo a equação por λ^n e resolvendo, temos

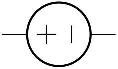
$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Solução geral: $y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n$

1. **Resistores:** São componentes passivos que limitam ou regulam a corrente elétrica em um circuito. Eles obedecem à Lei de Ohm.

2. **Fonte de tensão:** é um dispositivo que fornece uma diferença de potencial elétrico entre seus terminais, permitindo a circulação de corrente elétrica em um circuito.



- **Lei de Ohm:**

A lei de Ohm é um dos princípios fundamentais da eletricidade, é fundamental para o entendimento e resolução de circuitos elétricos. Estabelece que a tensão em um resistor é diretamente proporcional à corrente que percorre.

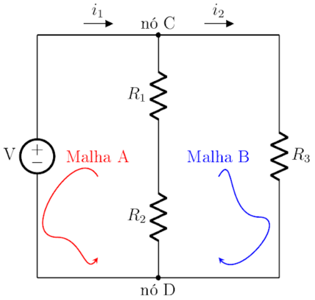
$$V = Ri \tag{1.20}$$

em que V é a tensão medida em volts (V), i é a corrente elétrica medida amperes (A), R é a resistência medida em ohms (Ω).

- **Leis de Kirchhoff**

As leis de Kirchhoff são leis da física que permitem calcular a corrente e a tensão elétrica em circuitos elétricos.
Para um melhor entendimento das leis de Kirchhoff, será necessário compreender o que são nós e malhas nos circuitos elétricos:

Figura 4: Exemplo Nó e Malha

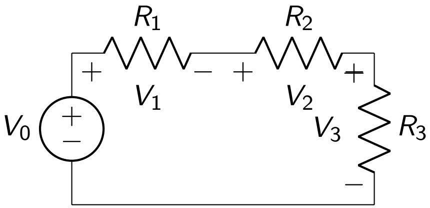


- **Lei de Kirchhoff das tensões (LKT)**

A LKT, afirma que a soma algébrica das quedas de tensão em uma malha fechada é igual a zero. Pode ser expressa matematicamente como:

$$\sum V_n = 0 \tag{1.21}$$

Figura 5: Soma de tensões



$$-V_0 + V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

Metodologia

- A metodologia deste trabalho consiste na combinação de pesquisa teórica e computacional, visando à modelagem, análise e validação dos resultados.
- Além do uso de ferramentas como Python para facilitar nos cálculos e *Multisim* para simular os circuitos e comparar.

- **Python**

Para calcular as correntes em cada instante n, foi desenvolvido um programa em Python com o objetivo de automatizar e simplificar os cálculos manuais, tornando o processo mais eficiente e menos suscetível a erros.

Metodologia

- **Multisim**

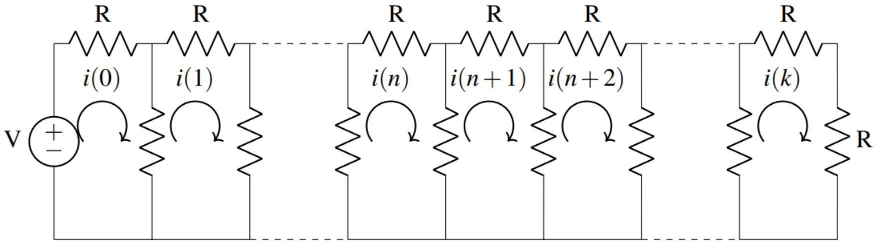
O *Multisim* é um *software* de simulação de circuitos elétricos e eletrônicos desenvolvido pela *National Instruments*. Ele é amplamente utilizado para projetar, simular e analisar circuitos analógicos e digitais de forma intuitiva e eficiente.

1. Ampla utilização no meio acadêmico.
2. Simulação precisa.
3. Biblioteca extensa de componentes.
4. Análise avançada.

Resultados e Discussões

Nesta seção, é analisado um circuito elétrico do tipo *ladder network*, ilustrado na Figura abaixo, onde i(n) representa a corrente em cada malha.

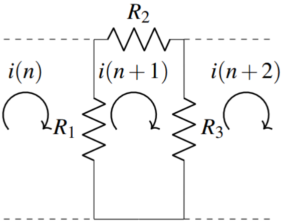
Figura 6: *ladder network*



Resultados e Discussões

Para resolver o circuito utilizaremos a LKT aplicada na malha $i(n+1)$. Isso envolve a soma das tensões em cada componente da malha.

Figura 7: Malha i(n+1)

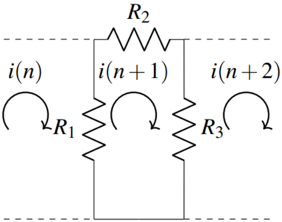


$$R_1 = R_2 + R_3 = R$$

$$R[i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2)] = 0$$

Para resolver o circuito utilizaremos a LKT aplicada na malha $i(n+1)$. Isso envolve a soma das tensões em cada componente da malha.

Figura 7: Malha i(n+1)



$$R_1 = R_2 + R_3 = R$$

$$R[i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2)] = 0$$

$$i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2) = 0$$

Simplificando:

$$i(n+2) - 3i(n+1) + i(n) = 0 \tag{1.22}$$

Temos, portanto, uma equação de diferenças de ordem 2 Aplicando a transformada Z

$$Z\{i(n+2)\} - Z\{3i(n+1)\} + Z\{i(n)\} = 0$$

$$i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2) = 0$$

Simplificando:

$$i(n+2) - 3i(n+1) + i(n) = 0 \tag{1.22}$$

Temos, portanto, uma equação de diferenças de ordem 2 Aplicando a transformada Z

$$Z\{i(n+2)\} - Z\{3i(n+1)\} + Z\{i(n)\} = 0$$

$$i(n+1) - i(n) + i(n+1) + i(n+1) - i(n+2) = 0$$

Simplificando:

$$i(n+2) - 3i(n+1) + i(n) = 0 \tag{1.22}$$

Temos, portanto, uma equação de diferenças de ordem 2 Aplicando a transformada Z

$$Z\{i(n+2)\} - Z\{3i(n+1)\} + Z\{i(n)\} = 0$$

Resultados e Discussões

$$Z\{i(n+2)\} - Z\{3i(n+1)\} + Z\{i(n)\} = 0$$

1. **Linearidade**: $\mathcal{Z}\{ax(n) + by(n)\} = aX(z) + bY(z)$
2. **Translação à Esquerda:**
$\mathcal{Z}\{x(n+k)\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}, \quad |z| > R, \quad k \in \mathbb{N}$

1. $Z\{i(n+2)\}$

$$Z\{i(n+2)\} = z^2 I(z) - \sum_{n=0}^{2-1} i(n) z^{2-n}$$

$$= z^2 I(z) - z^2 i(0) - z i(1)$$

2. $Z\{3i(n+1)\}$

$$3Z\{i(n+1)\} = 3[z^1 I(z) - \sum_{n=0}^{1-1} i(n) z^{1-n}]$$

$$= 3[zI(z) - zi(0)]$$

3. $Z\{i(n)\} = I(z)$

$$z^2 I(z) - z^2 i(0) - zi(1) - 3[zI(z) - zi(0)] + I(z) = 0$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + zi(1) - 3zi(0)$$

Figura 8: Malha Inicial

$$i(1) = 2i(0) - \frac{V}{R}$$

$$z^2 I(z) - z^2 i(0) - zi(1) - 3[zI(z) - zi(0)] + I(z) = 0$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + zi(1) - 3zi(0)$$

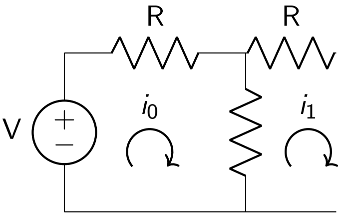
Figura 8: Malha Inicial

$$i(1) = 2i(0) - \frac{V}{R}$$

$$z^2 I(z) - z^2 i(0) - zi(1) - 3[zI(z) - zi(0)] + I(z) = 0$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + zi(1) - 3zi(0)$$

Figura 8: Malha Inicial

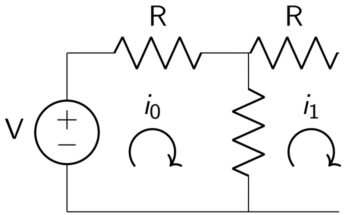


$$i(1) = 2i(0) - \frac{V}{R}$$

$$z^2I(z) - z^2i(0) - zi(1) - 3[zI(z) - zi(0)] + I(z) = 0$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2i(0) + zi(1) - 3zi(0)$$

Figura 8: Malha Inicial



$$i(1) = 2i(0) - \frac{V}{R}$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = z^2 i(0) + 2zi(0) - z\frac{V}{R} - 3zi(0)$$

$$I(z)[z^2 - 3z + 1] = [z^2 - z]i(0) - z\frac{V}{R}$$

$$I(z) = \frac{[z^2 - z]i(0) - z\frac{V}{R}}{[z^2 - 3z + 1]} \tag{1.23}$$

O próximo passo é calcular a Transformada Z inversa da equação (1.23) para obter a equação da corrente $i(n)$. Para isso, aplica-se o Método da Decomposição em Frações Parciais.

Resultados e Discussões

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A(z-\beta) + B(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$\begin{cases} A + B &= i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B &= -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

Resultados e Discussões

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A(z-\beta) + B(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$\begin{cases} A + B = i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B = -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A(z-\beta) + B(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$\begin{cases} A + B & = & i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B & = & -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{(z-1)i(0) - \frac{V}{R}}{z^2 - 3z + 1} = \frac{A(z-\beta) + B(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$\begin{cases} A + B = i(0) & (1) \\ -\beta A - \alpha B = -i(0) - \frac{V}{R} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = i(0) & (1) \\ -\beta A - \alpha B = -i(0) - \frac{V}{R} & (2) \end{cases}$$

$$B = \frac{(1-\beta)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

$$A = \frac{(\alpha - 1)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

Resultados e Discussões

$$\begin{cases} A + B &= i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B &= -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$B = \frac{(1-\beta)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

$$A = \frac{(\alpha - 1)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

Resultados e Discussões

$$\begin{cases} A + B & = & i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B & = & -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$B = \frac{(1-\beta)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

$$A = \frac{(\alpha - 1)i(0) + \frac{V}{R}}{(\alpha - \beta)}$$

Resultados e Discussões

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$I(z) = \frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}$$

$$Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}\right\} \tag{1.24}$$

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$I(z) = \frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}$$

$$Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}\right\} \tag{1.24}$$

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$

Resultados e Discussões

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$I(z) = \frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}$$

$$Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}\right\} \tag{1.24}$$

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$

Resultados e Discussões

$$\frac{I(z)}{z} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$

$$I(z) = \frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}$$

$$Z^{-1}\{I(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta}\right\} \tag{1.24}$$

$$Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$$

Resultados e Discussões

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = a^n$$

$$i(n) = AZ^{-1}\left\{\frac{z}{z-\alpha}\right\} + BZ^{-1}\left\{\frac{z}{z-\beta}\right\}$$

$$i(n) = A\alpha^n + B\beta^n \tag{1.25}$$

Note que:

$$\alpha.\beta = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = 1$$

Seja $\omega = \ln(\alpha)$, temos que $\alpha = e^{\omega}$, e $\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e^{w}} = e^{-\omega}$. Podemos rescrever em termos de Funções Hiperbólicas:

$$\cosh(\omega) = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$$

e

$$\sinh(\omega) = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\omega n} &= \cosh(\omega n) + \sinh(\omega n) \\
e^{-\omega n} &= \cosh(\omega n) - \sinh(\omega n)
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação de $i(n)$:

$$i(n) = A\alpha^n + B\beta^n \tag{1.26}$$

$$i(n) = A(\cosh(\omega n) + \sinh(\omega n)) + B(\cosh(\omega n) - \sinh(\omega n))$$

$$i(n) = (A + B)\cosh(\omega n) + (A - B)\sinh(\omega n)$$

Resultados e Discussões

$$\begin{cases} A + B &= i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B &= -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$A + B = i(0) \tag{1.27}$$

$$A - B = \frac{(\alpha - 1)i(0) - \frac{V}{R}}{\alpha - \beta} - \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{\alpha - \beta}$$

$$A - B = \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} A + B &= i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B &= -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$A + B = i(0) \tag{1.27}$$

$$A - B = \frac{(\alpha - 1)i(0) - \frac{V}{R}}{\alpha - \beta} - \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{\alpha - \beta}$$

$$A - B = \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} A + B & = & i(0) \quad (1) \\ -\beta A - \alpha B & = & -i(0) - \frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$A + B = i(0) \tag{1.27}$$

$$A - B = \frac{(\alpha - 1)i(0) - \frac{V}{R}}{\alpha - \beta} - \frac{(1 - \beta)i(0) + \frac{V}{R}}{\alpha - \beta}$$

$$A - B = \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{1.28}$$

Resultados e Discussões

$$\begin{cases} A+B &= i(0) \quad (1) \\ -\beta A-\alpha B &= -i(0)-\frac{V}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$A+B=i(0) \tag{1.27}$$

$$A-B=\frac{(\alpha-1)i(0)-\frac{V}{R}}{\alpha-\beta}-\frac{(1-\beta)i(0)+\frac{V}{R}}{\alpha-\beta}$$

$$A-B=\left(\frac{i(0)}{2}-\frac{V}{R}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{1.28}$$

Resultados e Discussões

$$i(n) = (A + B)\cosh(\omega n) + (A - B)\sinh(\omega n)$$

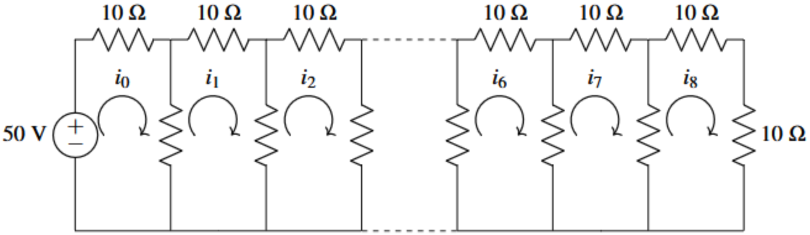
$$i(n) = i(0)\cosh(\omega n) + \left(\frac{i(0)}{2} - \frac{V}{R}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(\omega n) \tag{1.29}$$

Resultados e Discussões

Para validar os resultados analíticos, foram simulados dois circuitos com diferentes parâmetros no *Multisim* e comparados com os valores obtidos pela equação (1.29), implementada em Python. Um programa foi desenvolvido para calcular automaticamente a corrente $i(n)$ em diferentes instantes, reduzindo a necessidade de cálculos manuais.

A Figura 9 mostra um circuito do tipo *ladder*, composto por 9 malhas, com resistores de 10 Ω, uma fonte de 50 V e a corrente inicial $i_0 = 3,09017\ A$.

Figura 9: Circuito 1 - *ladder network* com 9 malhas



Resultados e Discussões - Análise do Circuito 1

Colocando os dados na fórmula (1.29) juntamente com o valor de $\omega = \ln(\alpha)$, sendo que $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, temos:

$$i(n) = 3,09017\cosh\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right)\right) + \left(\frac{3,09017}{2} - \frac{50}{10}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}\sinh\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right)\right)$$

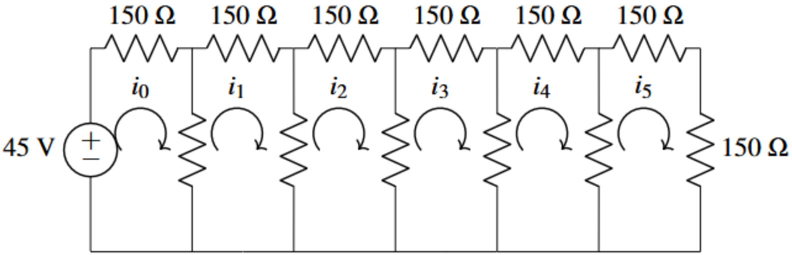
Como o circuito apresenta 9 malhas, foram calculados a corrente i(n) para $0 \leq n \leq 8$ conforme mostra na Tabela 2 a seguir:

Tabela 2: - Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (1.29)) e Computacionais *multisim*

n	Analíticos (Equação (1.29))	Computacionais (*Multisim*)
0	3.0902	3.09
1	1.1803	1.18
2	0.4509	0.451
3	0.1722	0.172
4	0.0658	0.0658
5	0.0251	0.0251
6	0.0096	0.00957
7	0.0037	0.00359
8	0.0015	0.0012

A Figura 10 apresenta um circuito do tipo *ladder*, composto por 6 malhas, contendo resistores de 150 Ω, uma fonte de 45 V e $i_0 = 0.185408$ A.

Figura 10: Circuito 2 - *ladder network com 6 malhas*



$$i(n) = 0.185408 \cosh \left(\ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} n \right) \right) + \left(\frac{0.185408}{2} - \frac{45}{150} \right) \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \left(\ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} n \right) \right)$$

O circuito apresenta 6 malhas, analogamente como mostrado anteriormente foram calculados a corrente i(n) para $0 \leq n \leq 5$ conforme mostra na Tabela 3 a seguir:

Tabela 3: - Comparação Entre os Resultados Analíticos de $i(n)$ (Equação (1.29)) e Computacionais *multisim*

n	Analíticos (Equação (1.29))	Computacionais (*Multisim*)
0	0.18541	0.185
1	0.07082	0.0708
2	0.02704	0.027
3	0.01030	0.0103
4	0.00387	0.00386
5	0.00131	0.00129

Observa-se que os valores obtidos analitiacamente coincidem com os resultados da simulação computacional, demonstrando a consistência entre as abordagens analítica e computacional. Além disso, os valores mostram que a corrente decai conforme n aumenta, o que é esperado em uma rede *ladder* devido à dissipação progressiva da tensão ao longo das malhas. Isso reforça a precisão do modelo matemático utilizado para a análise desses circuitos discretos.

Conclusão

Este trabalho analisou a aplicação da Transformada Z na resolução de circuitos elétricos discretos, com foco em circuitos de escada. A metodologia combinou formulação matemática e simulações no *Multisim*, confirmando a precisão dos resultados. Além disso, um programa em Python automatizou os cálculos, reduzindo erros e aumentando a eficiência da análise. Os resultados obtidos evidenciam as vantagens do uso da Transformada Z para a análise de circuitos elétricos de tempo discreto, proporcionando um método robusto e sistemático para a solução de problemas recorrentes nessa área.

Referências

BOYLESTAD, R. L. (2011).
Introdução à análise de circuitos.
Pearson Prentice Hall, São Paulo.

Cecília de Souza Fernandes, N. d. C. B. J. (2016).
Introdução às Funções de uma Variável Complexa.
Textos Universitários. SBM, 4 edition.

ELAYDI, S. (2005).
An Introduction to Difference Equations.
Springer Science & Business Media, [s.l.], 3 edition.

Konzen, P. H. A. (2021).
Equações a Diferenças.
Notas de aula.

Lima, E. L. (2006).
Análise real volume 1. Funções de uma variável.
IMPA, Rio de Janeiro, 8 edition.

SÁNCHEZ, A. D. B. et al. (2018).
Uma Introdução à Transformada Z.
[s.n], [s.l.].

Obrigado pela Atenção!