LP: Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.

Pré-requis:
- Hydrostatique
- Notions de champs v et p
- Viscosité

Introduction

Alors on a vu précédemment comment on pouvait étudier les écoulements au travers des champs de vitesse et pression, on a vu que ces champs étaient régies par l'équation de Navier Stokes, les équations de NS en réalité.
Néanmoins, c'est une équation qui en pratique est impossible à résoudre mais dans certains cas, comme on le verra on peut avoir une bonne description du fluide en négligeant sa viscosité, on verra dans quelle mesure cela reste vrai. C'est ce qu'on appelle le modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.

I/ Modèle du fluide parfait

a) Définition et dérivation

Def: Un écoulement est dit parfait si tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité, sont négligeables.

Pour étudier ces écoulements, on va d'abord dériver la formule générale qui les régit.
On considère un volume élémentaire de fluide dtau = dxdydz, pour le dessin on fera ça à deux dimensions, ce sera plus simple, et on va bêtement appliquer la seconde loi de Newton:
ma = Somme des forces

Pour la partie des gauche, c'est assez simple, on va exprimer a en fonction du champ de vitesse, qui dépend de …

[Faire la démo] améliorer la transition et prendre des notes

On aboutit alors à l'équation de Navier-Stokes présentée plus haut mais sans le terme incluant la viscosité.

On peut s'intéresser au cas idéal d'un écoulement stationnaire, parfait et rectiligne, selon Ox par exemple, dont les lignes de champs sont parallèles. La pression exterieure est fixée à p0.
En supposant que les seules forces en jeu sont les forces de pressions, on a alors dp/dy = dp/dz=0, on en déduit que la pression ne varie pas dans une section ortho et à l'intérieur, la pression subie par le fluide vaut p0 la pression extérieure.

Si maintenant on considère des forces qui s'appliquent aux fluides fvol, on a dp/dy = fvoly …
Si c'est la force de gravité, selon z par exemple, on retrouve la pression hydrostatique:
dp/dz = mu*g => p = p0+mugz

b) Lignes de courant courbes, effet Coanda

Maintenant on va s'intéresser à un cas un peu plus intéressant. Considérons un écoulement dont les lignes de courants sont courbes. On suppose que les forces volumiques (dont la gravité) sont négligeables. On voit qu'ici v(M,t) = v(r,t)u_theta.
L'équation d'Euler devient: (démo p. 346 du Dunod).
Une conséquence de ce raisonnement simpliste est l'étude de la portance des avions: [explication] et schéma slide
En réalité, comme on le justifiera un peu plus loin, la viscosité joue un rôle non-négligeable dans la force exercée sur l'aile de l'avion, il sera alors nécessaire d'en tenir compte dans une description réaliste.
Un effet intéressant qui découle de ce résultat est l'efffet Coanda. Autour d'un objet circulaire, les lignes de courants sont courbes, on a donc une pression plus forte à l'extérieur qu'à l'intérieur des lignes de courant, ce qui vient "maintenir" l'objet dans le jet. Je vais illustrer cela avec une balle de ping pong et un jet.

blabla

c) Limites

Tout à l'heure on a introduit l'équation d'Euler, qu'on a utilisé par la suite. Ce qu'on remarque, si on reprend la définition du nombre de Reynolds Re = … c'est que celui-ci tend vers l'infini. On peut légitimement s'interroger sur la pertinence de ce modèle.

Dans un écoulement réel, en tenant compte de la viscosité, imaginons un mobile dans un fluide, une huile par exemple dans laquelle on vient disposer une colonne de colorant. Le système est initialement au repos. Dans un second temps, on vient mettre en mouvement cette plaque qui, à cause de la viscosité, vient entraîner l'huile couche par couche comme sur la figure ci-contre.
[slide]
Cette couche, à l'instant t, est appelée couche limite de viscosité.
Remarque: Lorsqu'on néglige la viscosité, dans un écoulement parfait, on alors delta = 0.
Dem anière générale, On peut montrer que delta = \sqrt(nu t). avec t = L/U avec L la longueur caractéristique du mobile et U sa vitesse, il vient alors \sqrt(nu L/ U) = \sqrt(eta * L / mu U) = L/\srt(Re).

On considérera par la suite, que lorsque cette couche limite est très inférieure aux dimensions caractéristiques de l'objet, alors l'écoulement autour de cet objet est parfait.
Si on considère le cas d'une voiture à 90 km/h, de taille caractéristique L = 3 m, on a un delta de l'ordre du mm. Il faut noter néanmoins que si la viscosité joue un rôle négligeable dans l'écoulement à l'extérieur de la voiture, force est de constater qu'elles sont à l'origine de force de frottements importantes à ne pas négliger.
Un autre cas est celui du paramécie, un organisme unicellulaire qui vit dans l'eau à une vitesse d'environ 30 um/s. Sa taille est de l'ordre de 100 um, dans ce cas la couche limite visqueuse est de l'ordre du mm, l'écoulement doit être décrit comme absolument visqueux.

On va maintenant s’intéresser à un résultat fondamental des écoulements parfait

II/ Théorème de Bernoulli

a) Enoncé et démonstration

On réécrit l’équation d’Euler:
[Ecrire]
Cette fois on va l’écrire sous une autre forme que voici:
[ecrire]
Je n’ai rien changé, tout est exactement similaire, j’ai juste utilisé des identités vectorielles. Maintenant on va considérer le cas où le fluide est stationnaire, on a lors ce terme qui s’en va. Si maintenant, cas n°1: le fludie est irrotationnel, on a:
[ecrire]
on peut tout réécrire sous le même grad et on a finalement selon l’axe Oz:
p/mu + v^2/2 + gz = cst

on peut montrer que dans le cas irrotationnel ou tourbilllonaire: soit A et B de points d’une même ligne de courant on a la relation
p(A) .. . .

Si on est un peu attentif, on pourra remarquer que ce terme ressemble quand même beaucoup à une énergie cinétique et celui-ci à une énergie potentiel ici de pesanteur, et ici à une pression! En fait il y a une autre manière aussi jolie de remontrer le th de bernouilli sans faire appelle à l’équation d’Euler.

b) Aspect énergétique

On considère le système suivant
[cf. Khan Academy]
Je trouve cette façon de voir assez jolie et assez riche physiquement. En fait on voit que cette équation traduit la conservation de l’énergie le long d’une ligne de courant, ainsi, tout ce qu’on gagne en énergie de pression, on le perd en vitesse. Ce qui donne lieu à l’effet Venturi:

[explication] [slide]
stationnaire et incompressible, ce qui signfiie que le débit est conservé vAS = vBs = vCS. On en déduit donc que vA=vC et que vB>vA.
Par ailleurs, on peut également étudier les pressions. Dans les hypothèses que nous avons faites, on considère que les lignes de courants sont rectilignes et parallèles au niveau des points A,B et C, l’extrémité supérieure de chaque tube est ouverte à la pression atmosphérique à p_0. Or comme on l’a dit plus haut, dans ce cas la pression est hydrostatique, on a donc pA = p0 + mugzA, pb ..
C’est assez contre-intuitif, mais dans une certaine mesure qui vaut ce qu’elle vaut, on peut le constater dans les embouteillages lorsqu’on passe de deux voies à une seule, la pression diminue et la vitesse augmente à l’endroit de l’étranglement qu’un peu avant. Aussi, on pourra noter que c’est cet effet qui est à l’origine des bulles de cavitation: il arrive parfois que la vitesse soit si élevée qu’elle fait diminuer la pression au point de pression de vapeur

saturante du fluide, ce qui provoque l’apparition de bulle qui viennent ensuite imploser le long de surface solide. Ce qui provoque des dégâts notamment sur les pales des turbines des bateaux par exemple (en plus de faire du bruit au point de rendre les sous-marins militaires vulnérables)

Ces relations imposent $zA = zC > zB$. En pratique on a $zA > zC > zB$, pcq dans la réalité on a quelques frottements visqueux qui vont venir dissiper de l’énergie.

III/ Tube de pitot (et anémométrie)

Le tube de Pitot est un dispositif qui permet de mesurer la vitesse de l’écoulement d’un fluide. Il est notamment utilisé sur les avions ou sur les bateaux. C’est un dispositif expérimental assez simple où on a un tube, qu’on représente comme cela:
[slide]
En appliquant Bernoulli on a le long de la ligne AinfA’
$muv0^2/2+p_0 = 0 + p_A$ (la vitesse est nulle au point d’arrêt A).
Pour la ligne SinfS’, juste au dessus du deuxième trou, on a $muv_0^2/2 + p_0 = muv_0^2/2 + p_{S'}$. Au vu des dimensions du système, l’influence de la pesanteur entre S et S’ est négligeable, on considerera alors que $ps'=ps$ on a alors $ps=p_0$.

On peut alors en déduire que $(pA-pS) = mu*v0^2/2$.

On peut donc mesurer la vitesse d’un fluide en mesurant la différence de pression en sortie des deux conduits du tube pitot. C’est l’expérience qu’on se propose de faire ici. Pour ne pas faire qu’une mesure de vitesse, ce qu’on va plutôt faire ici c’est de