Geometría Algebraica

Abraham Rojas

Índice general

Parte I

Parte I

Capítulo 1

Introducción

Este es un libro de Geometría.

Asumiremos conocimientos de Álgebra Conmutativa, aunque hay un resu,ent en el apéndice.

Me gusta distinguir entre dos conceptos: la Geometría Algebraica, el estudio de la geometría utilizando espacios algebraicos y herramientas algebraicas, y por otro, lo que me gusta llamar "Álgebra Geométrica", o sea, utilizar herramientas geométricas para estudiar estructuras algebraicas. Nosotros seguiremos el primer enfoque.

Por otro lado, podemos estudiar la Geometría utilizando diferentes tipos de espacios ambiente y diversas herramientas.

Obviamente, toda distinción que se haga entre áreas del conocimiento no deja de ser artificial.

la introducción de un libro me parece una buena oportunidad para comentar temas qeu no serán explicados en el mismo. POr ejemplo, Álgebra Geometrica

Capítulo 2

Guardando información geométrica

2.1. Haces

Podemos pensar en los haces como generalización del concepto de fibrado.

Sea X un espacio topológico.

Consideremos la categoría $\mathfrak{U}$, cuyos elementos son los abiertos de X y cada morfismo $U \to V$ proviene de la inclusión $U \subset V$.
Un **pre-haz** (de grupos abelianos) sobre X es un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{Sets}$$

Dados $U \subset$ en $\mathfrak{U}$, el **morfismo de restricción** es el morfismo correspondiente a la inclusión. Dado $s \in \mathcal{F}(V)$, denotaremos su **restricción** en U (i.e., su imagen por el morfismo de restricción) por $s|_U$. A veces, denotaremos $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.
Un **haz** (de grupos abelianos) es un pre-haz que satisface

- (Determinación) Sean U un abierto, $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto y $s \in U$ tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i, entonces $s = 0$.
- (Construcción) Sean U un abierto, $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto y elementos $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ para cada i, tal que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todo i, j. Entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i

Ejemplo 1 (Variedades suaves)

Ejemplo 2 (los clásicos) *contenidos...*

2.1.1. gavijas

2.1.2. Hacificación

2.1.3. Más ejemplos y motivación

2.2. Divisores en variedades complejas

Capítulo 3

La Geometría de los anillos conmutativos

En adelante, A será un anillo conmutativo con unidad.

3.1. Geometría Algebraica Clásica

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, el **espacio afín de dimensión** n sobre K es definido como K^n, denotado por $\mathbb{A}^n_K$ o $\mathbb{A}^n$.

Sea $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$, definimos el **conjunto algebraico** (asociado a S) como

$$Z(S) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0, \ \forall f \in S\}.$$

Es obvio que si $S \subset T \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ entonces $Z(J) \subset Z(I)$.

Ejemplo 3

conjuntos unitarios son llamados ***puntos****, estos son conjuntos algebraicos, también cantidad finita de puntos.*

recta afín, curvas algebraicas planas.

Note que $Z(f)^n = Z(f)$*, luego si* I *es un ideal, entonces* $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.

Dado $h \in K[X_1, \ldots, X_n]$, definimos $D(h) = \mathbb{A}^n \setminus Z(f)$.

Proposición 1 (Topología de Zariski ingenua) *Sea* $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *una familia de ideales de* $K[X_1, \ldots, X_n]$*, tenemos que*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z(J_\lambda) = Z\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda\right) . \bigcup_{i=1}^{k} Z(J_{\lambda_i}) = Z\left(\bigcap_{i=1}^{k} J_{\lambda_i}\right) = Z\left(\prod_{i=1}^{k} J_{\lambda_i}\right)$$

Así, los conjuntos algebraicos forman la familia de conjuntos cerrados correspondiente a una topología en $\mathbb{A}^n$*, llamada* ***topología de Zariski****. Los conjuntos* $D(h)$ *forman una base para esta topología.*

Sea $X \subset \mathbb{A}^n$, definimos el **ideal asociado** a X como

$$I(X) = \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid f(P) = 0, \ \forall P \in X\}.$$

Es claro que si $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n$ entonces $I(X) = I(Y)$. Además, si $f^n \in I(X)$ entonces $f \in I(X)$, luego $I(X)$ es un ideal radical.
Por otro lado, el Teorema de la base de Hilbert implica que $I(X)$ siempre es finitamente generado.

Teorema 1 (Nullstellensatz geométrico) *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Tenemos que*

$$\sqrt{I} = I(Z(I))$$

Corolario 1 *Existe una biyección entre el con*

3.1.1. Más que una equivalencia entre categoría

3.2. Espectros

El **espectro** de A es el conjunto de sus ideales primos, denotado por $\mathrm{Spec}(A)$. Podemos dotar a este conjunto de la **Topología de Zariski**, donde los conjuntos cerrados son de la forma

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid I \subset \mathfrak{p}\}, \text{ donde } I \text{ es un ideal.}$$

3.2.1. Topología de Zariski

Dado um elemento $h \in A$, definimos

$$D(h) = \{\mathfrak{p} \mid h \notin \mathfrak{p}\}$$

Si $\phi : A \to B$ es un morfismo de anillos, definimos el **mapa induzido** por

$$\mathrm{Spec}(\phi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

Teorema 2

1. $\{D(H)\}_{h \in A}$ *es una base de abierto de la topología de Zariski.*
2. *Los mapas inducidos por morfismos de anillos son continuos.*
3. $\mathrm{cl}\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})$, *en particular, un ideal primo es un punto cerrado si y solo si este es maximal.*
4. $\mathrm{Spec}(A)$ *es compacto.*
5. *Sea I un ideal, el morfismo inducido de la proyección natural $A \to A/I$ es un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(A/I)$ con $V(I)$.*

Ejemplo 4

Teorema 3 (Nullstellensatz) *Sea* $\sqrt{I} = I(Z(I))$

3.3. Esquemas

3.3.1. Productos fibrados

Capítulo 4

Morfismos proyectivos

El **espacio proyectivo** de dimensión n sobre k, denotado por $\mathcal{P}_k^n$, está dado por $\mathbb{A}_k^{n+1}/\sim$, dada por la relación de equivalencia

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \text{ for all } \lambda \in k, \lambda \neq 0.$$

Sabemos que $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ es un anillo, siendo S_d las combniaciones lineales de monomios de grado d.
Sea T un conjunto de polinomios homogéneos, el **conjunto de zeros** de T es definido como

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid f(P) = 0 \text{ for all } f \in T\}.$$

si I es un ideal homogéneo, definimos $Z(I)$ como el conjunto de ceros del conjunto de elementos homogéneos de I.
$Y \subset \mathbb{P}$ es **conjunto algebraico proyectivo** si existe un conjunto de polinomios homogéneos T tal que $Y = Z(T)$.
Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$, definimos su **ideal homogéneo** como

$$I(Y) = \langle \{f \in S \,|\, f \text{ es un polinomio homogéneo y } f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\} \rangle$$

Si Y es un conjunto algebraico, su **anillo de coordenadas homogéneas** está definido como $S(Y) = S/I(Y)$.

La topologia de Zariski en $\mathbb{P}^n$ es aquella cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos proyectivos.
Una **variedad proyectiva** es un conjunto algebraico irreducible en $\mathbb{P}^n$, con la topología inducida. Un conjunto abierto de una variedad proyectiva es un **variedad casi-proyectiva**.

Parte II

Teoría

Capítulo 5

Clases Características

5.1. Divisores, encajes y diferenciales

5.1.1. Morfismos proyectivos

5.1.2. Teorema de Riemann-Roch

5.1.3. Dualidad de Serre

5.2. Variedades Jacobianas

Capítulo 6

Algunos casos particulares

6.1. Geometría birracional

6.2. Curvas

6.3. Superficies

6.4. Geometría Compleja

6.5. Geometría Diofantina

Capítulo 7

Deformaciones

7.1. Teoría de Intersección

Me llevó mucho tiempo tratar de entender los cómos y los porqués de las definiciones. Valió mucho la pena, pero creo que un
Lo más difícil es dar un concepto (y en particular, una definición) precisa de los número de intersección y grado de una variedad. Así que comenzaremos dando algunas condiciones (que pueden tomarse como axiomas) que cumplen los número de intersección

número de intersección lo que implica definición de grado

El primer paso percibir que el número de intersección varía continuamente con la posición de las variedades. Considere el siguiente

Ejemplo 5

Ya podemos ver una de las posibles definiciones del número de intersección

7.1.1. Resultantes

Sea A un dominio integral. Sean $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k}x^k$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_{q-k}x^k$ polinomios homogéneos en $A[x]$, de grados p y q respectivamente. El **resultante** de P y Q es el determinante de la función $A-$lineal $A[x]_{\leq p} \times A[x]_{\leq q} \to A[x]_{\leq p+q}$ definida por

$$(A, B) \to Ap + BQ$$

El resultante posee muchas propiedades interesantes para el álgebra computacional. Para nuestros fines, será necesaria la siguiente

Proposición 2 1. *El resultante se anula si y solo si los polinomios tienen una raíz común en cuerpo algebraicamente cerrado que contiene al anillo de coeficientes.*

2. *es un polinomio homogéneo, de grado* p *respecto a los* a_i *y de grado* q *respecto a los* b_j*.*

Capítulo 8

Cohomologia Ètale

Capítulo 9

Mirror Symmetry

Apéndice A

Un poco de Análisis

Apéndice B

Un recuento de Álgebra Conmutativa

Apéndice C

Álgebra Homológica

C.1. Categorías Abelianas