

# Geometría Diferencial

Abraham Rojas



# Índice general

<b>I</b>	<b>Basics</b>	<b>5</b>
1.	Introducción	7
2.	Variedades diferenciales	9
3.	Espacio tangente	11
3.1.	Campos vectoriales . . . . .	11
4.	Algunas aplicaciones	13
4.1.	Subvariedades . . . . .	13
4.2.	Grupos y Álgebras de Lie . . . . .	13
4.3.	Propiedades de las variedades . . . . .	13
4.3.1.	Orientación . . . . .	13
4.3.2.	Partición de la unidad . . . . .	13
4.3.3.	Preludios... . . . .	13
5.	Formas diferenciales	15
5.1.	Derivada (exterior) . . . . .	15
5.2.	Caso complejo . . . . .	15
5.3.	El Complejo de De Rham . . . . .	15
5.3.1.	La sequencia de Mayer-Vietoris . . . . .	15
6.	Integración	17
6.1.	Teorema de Stokes . . . . .	17
6.2.	Dualidad de Poincaré . . . . .	17
7.	Formas Diferenciales	19
7.1.	Género . . . . .	19
7.2.	Teoría de grado en variedades . . . . .	19
<b>II</b>	<b>Geometría Riemannian</b>	<b>21</b>
<b>III</b>	<b>Geometría Simplética</b>	<b>23</b>



# Parte I

## Basics



# Capítulo 1

## Introducción





# Capítulo 2

## Variedades diferenciales

Sea  $M$  un espacio topológico Hausdorff y segundo contable.

$M$  es una **variedad topológica de dimensión**  $n$  si existe un **atlas**, que es una colección  $\mathfrak{A}$  de pares  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ , donde

1.  $\{U_i\}$  es un cubrimiento abierto de  $M$ ,
2. para cada  $i \in I$ ,  $\varphi_i$  es un homeomorfismo entre  $U_i$  y un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Los elementos de un atlas son llamados **cartas**.

$M$  es una **variedad diferenciable** si, para cada  $i, j \in I$ ,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} \text{ es de clase } C^\infty.$$

Un mapa diferenciable es una función continua  $f : M \rightarrow N$  entre variedades suaves tal que, para todo par de cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  de  $M$  y  $N$ , respectivamente, tenemos que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(V))} \text{ es de clase } C^\infty.$$

**Proposición 1** *Las variedades diferenciables forman una categoría, tomando como morfismos los mapas diferenciables.*

Los isomorfismos en esta categoría son llamados **difeomorfismos**.

### Ejemplo 1

Una variedad compleja de dimensión (compleja)  $n$



# Capítulo 3

## Espacio tangente

### 3.1. Campos vectoriales



# Capítulo 4

## Algunas aplicaciones

### 4.1. Subvariedades

### 4.2. Grupos y Álgebras de Lie

### 4.3. Propiedades de las variedades

#### 4.3.1. Orientación

#### 4.3.2. Partición de la unidad

#### 4.3.3. Preludios...



# Capítulo 5

## Formas diferenciales

5.1. Derivada (exterior)

5.2. Caso complejo

5.3. El Complejo de De Rham

5.3.1. La secuencia de Mayer-Vietoris





# Capítulo 6

## Integración

6.1. Teorema de Stokes

6.2. Dualidad de Poincaré

6.3. Género

6.4. Teoría de grado en variedades



# Parte II

## Geometría Riemannian



# Parte III

## Geometría Simpléctica

