Teoría de singularidades

Abraham Rojas

Índice general

Introducción

Uno de los problemas fundamentales es clasificar las singularidades de aplicaciones diferenciales u holomorfas, que en adelante llamaremos regulares.
Solo nos interesa el comportamiento de la función en una vecindad de la singularidad.

Comenzaremos estudiando la estructura algebraica de los gérmenes de funciones.

0.1. Resultados de acciones de grupos en variedades

Teorema 1 *Si las órbitas son subvariedades, entonces los mapas $\phi_p : G \longrightarrow G{\cdot}p$ es una sumersión. En particulpar*

$$LG \cdot p = d\varphi_p(T_1 G).$$

Proposición 1 (Clasificación formas cuadráticas con $n = 2$) *Sea $f = ax^2 + 2bxy + c^2$, el rango coincide con el rango del Hessiano, y del número de variables de la forma normal.*

- ***Simbólico.*** *$f = 0$, rango 0*
- ***Parabólico.*** *rango 1, $b^2 = ac$*
- ***Hiperbólico.*** *rango 2, semi-índice 1, $b^2 - ac > 0$.*
- ***Elíptico.*** *rango 2, semi-índice 0, $b^2 - ac < 0$. en el caso complejo, son* ***no degenerados***

Proposición 2 (Clasificación formas cúbicas con $n = 2$) *Sea $p = l_1 l_2 l_3$, l_i forma lineal sobre $\mathbb{C}$. en $\Re$, todas son reales o una es real y las otras son conjugadas.*

- ***Cúbica Simbólica.*** *l_i colineales, equivalente a x^3*
- ***Parabólica.*** *l_1, l_2 colineales, l_2, l_3 no colineales, x^2y.*
- ***Cúbica no degenerada.*** *en $\mathbb{C}$, l_i nunca colineales, $x^2y + y^3$*
- ***hiperbólica.*** *En $\Re$, l_i nunca colineales y reales, $x^2y - y^3$.*
- ***elíptica.*** *en $\mathbb{R}$, l_i nunca colineales, una real, $x^2y + y^3$.*

Teorema 2 (Lema de Mather) *Sea G un grupo de Lie actuando en una variedad suave de forma .... Sea $N \subset M$ una subvariedad. Tenemos que N está contenida en una órbita si y solo si*

1. *N es conexa.*
2. *$T_pN \subset LGp$ para todo $p \in N$.*
3. *$\dim G.p$ no depende de $p \in N$*

Corolario 1 (espacio afines) *Sea A un espacio afín, G actuando tal que las ŕobitas son subvariedades. Sea $W \leqslant V_A$, $x + W$ está contenida en una órbita si*

1. $W \hookrightarrow LGx$
2. $LG(x + w) \simeq LGx$ *para todo* $w \in W$.

Teorema 3 (Transversal completa) *Sea G actuando en A afín. Sea $W \leqslant V_A$ tal que*

$$LG(x + w) \simeq LGx, \ \forall x \in A, \ w \in W$$

Entonces

1. *Para todo $x \in A$:*
$$x + (LGx \cap W) \subset Gx + \{x + W\}$$

2. *Si $x_0 \in A$ y $T \leqslant W$ tal que*
$$W \subset LGx_0 + L$$
entonces
$$\forall w \in W, \ \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot (x_0 + w) = x - 0 + t$$

Parte I

Clasificación de singularidades

Capítulo 1

Funciones $(\mathbb{K}^n, 0) \to \mathbb{K}$

1.1. El álgebra de gérmenes

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{n,p} &= \{f : (\mathbb{K}^n, 0) \to \mathbb{K}^p \text{ regular}\} \\ \mathcal{O}^0_{n,p} &= \{f \in \mathcal{O}_{n,p} \mid f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Denotaremos $\mathcal{O}_{n,1}$ por $\mathcal{O}_n$, que es un anillo local, con ideal maximal $\mathcal{O}^0_{n,1}$, denotado por $\mathfrak{m}_n$ o $\mathfrak{m}$. Es claro que $\mathcal{O}_{n,p}$ es un $\mathcal{O}_n$-módulo libre de rango p.

El siguiente resultado permite encontrar generadores para $\mathfrak{m}_n$. Note la semejanza con el caso algebraico, allí eso es una consecuencia inmediata de las definiciones.

Teorema 4 (Lema de Hadamard) *Sea $f : U \times \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}$ suave tal que $f(0, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{K}^q$, $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto estrellado . Luego existen funciones $f_1, \dots f_n : U \times \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}$ tales que $f = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$, donde $f_i(x, y) = \int_0^1 \partial_i f(tx, y) dt$.*

Corolario 2 *Dado $k \geq 1$, tenemos que $\mathfrak{m}_n^k$ es generado por los monomios de grado k en n variables.*

Sea $\varphi : \mathcal{O}_n \to K[[x_1, \dots x_n]]$ el mapa que asigna las series de Taylor.

Teorema 5 (Lema de Borel) *φ es un epimorfismo $\mathbb{K}$-álgebras, cuyo núcleo es nulo en el caso complejo, y $\mathfrak{m}_n^\infty$ (funciones planas) en el caso real, que es un ideal no nulo.*

Corolario 3 *En el caso real, $\mathcal{O}_n$ no es un anillo noetheriano.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{m}_n$ sea finitamente generado, como $\mathfrak{m}_n^\infty \subset \{0\} + \mathfrak{m}_n \mathfrak{m}_n^\infty$ entonces el lema de Nakayama implica que $\mathfrak{m}_n \subset \{0\}$, contradiciendo el teorema anterior.

Corolario 4 *Sea $\hat{\mathfrak{m}}_n{}^k$ la imagen de $\mathfrak{m}_n$ por ϕ, tenemos que*

$$\mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n^k \simeq \hat{\mathcal{O}}_n / \hat{\mathfrak{m}}_n{}^k \simeq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]_{<k}$$

El siguiente resultado es importante en determinación finita y otros contextos

Proposición 3 *Sea M un $\mathcal{O}_n$−módulo libre de rango finito y sea N un submódulo. Luego* $\dim_{\mathbb{K}} M/N$ *es finita si y solo si existe un entero $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}^k M \subset N$.*

El **espacio de $k-$jets** $J^k(n,p)$ es el conjunto de $p-$uplas de polinomios en n variables de grado $\leq k$ con término independiente nulo.
El espacio de jets posee estructura de variedad suave, de las cual hablaremos más adelante.
Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^p$ suave/holomorfa, definimos su $k-jet$ en a, $j^k f : U \longrightarrow J^k(n,1)$, como el polinomio de Taylor de orden k en a.

Corolario 5

$$\mathfrak{m}_n^k = \{f \in \mathcal{O}_n \mid j^{k-1} f(0) = 0\}$$

1.2. $\mathcal{R}-$equivalencia

Definimos

$$\mathcal{R} = \operatorname{Aut} \mathbb{K}^n(0,0)$$

cuya acción en $\mathcal{O}_n$ es $h \cdot f = f \circ h^{-1}$.
Definición de morfismos inducido... morfismos entre álgebras de funciones.

Una familia interesante de gérmenes son los **finitamente determinados**, aquellos cuyo $k-$jet determina su $\mathcal{R}-$clase.

$\mathcal{R}$ y $\mathcal{O}$ no son variedades suaves. Para solucionar este problemas y también entender la determinación finita, vamos a considerar

$$\mathcal{R}^{(k)} = \{j^k h(0) \mid h \in \mathcal{R}\} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_k}, \text{ donde } \mathcal{R}_k = \{j^k h(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$$

que es un grupo de Lie, y actúa en $J^k(n,1)$ por $j^k h(0) \cdot j^k f(0) = j^k(f \circ h^{-1})(0)$.

Proposición 4 *gérmenes equivalentes tienen la misma determinanción.*

Para caracterizar la determinación finita necesitaremos los siguientes resultados, que son importantes por sí solos.

Proposición 5

$$L\mathcal{R}^{(k)} h = \frac{\mathfrak{m}_n J f + \mathfrak{m}_n^{k+1}}{\mathfrak{m}_n^{k+1}} = \left\{ j^k \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} h_i \right)(0) \mid (h_1, \ldots, h_n) \in J^k(n,n) \right\}$$

Lema 1 (Lema de Thom-Levine) *Sea $f \in \mathcal{O}_n$ y $F' : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}, 0) \longrightarrow (\mathbb{K} \times \mathbb{K}, 0)$ tal que $F'(x,t) = (F(x,t), t)$, $F(0,t) = 0$, $F(x,0) = f(x)$. Si $\dfrac{\partial F}{\partial x} \in \mathfrak{m}_n \left\langle \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \mathcal{O}_{n+1}$ entonces existe $H : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}, 0)$ tal que $H(x,0) = x$, $H(0,t) = 0$ y $F(\cdot,t) \circ H(\cdot,t) = f$ para todo t.*

Lema 2 *las órbitas son subavariedades regulares!*

Teorema 6 (Determinación finita para $\mathcal{R}$) *Sea $f \in \mathcal{O}_n$.*

1. *Si $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subset \mathfrak{m}_n^2 J(f)$ entonces f es $k-$determinado (basta que $\mathfrak{m}_n^k \subset \mathfrak{m}_n J(f)$).*

2. *Si f es $k-$determinado entonces $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subset \mathfrak{m}_n J(f)$*

motivación

El **ideal Jacobiano** está definido por

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

Proposición 6 *1. $f \in \mathfrak{m}_n^2$ si y solo si $Df = 0$ si y solo si es crítico si y solo si $J(f) \subset \mathfrak{m}_n$.*

2. $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es no degenerado si y solo si $Jf = \mathfrak{m}_n$.

3. $f \in \mathfrak{m}_n^3$ si y solo si es crítico degenerado

La Proposición 5 motiva la siguiente definición (tomando $k \to \infty$). Sea $f \in \mathcal{O}^n$. El **espacio tangente a** $\mathcal{R}f$ está definido como

$$T\mathcal{R} \cdot f = \mathfrak{m}_n J(f) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i / h_i \in \mathfrak{m}_n, i = 1, \ldots, n \right\}$$

Definimos la **codimensión** de f por $\mathcal{R} - \operatorname{cod}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}_n / \mathfrak{m}_n J(f)$.

Corolario 6 (Determinación finita y codimensión) *Un germen en $\mathcal{O}_n$ es finitamente determinado si y solo su codimensión es finita.*

Existe otra noción de espacio tangente, la de **espacio tangente extendido**... motivación. Más adelante daremos otra descripción de él.
Definimos la **codimensión extendida** por $\mathcal{R}_e \operatorname{cod} f = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_n / J(f)$, también llamada **número de Milnor** también denotadad por$\mu(f)$. Esta será la que usaremos en adelante, cuando hablemos de codimensión.

Proposición 7 *1. Sea $f \in \mathfrak{m}_n$, $\mathcal{R} - \operatorname{cod} f$ es finita si y solo si $\mu(f)$ lo es, si y solo si $\mathfrak{m}_n^k \subset Jf$.*

2. Sea $f \in \mathfrak{m}_n$ tal que $0 < \mathcal{R} - \operatorname{cod} f < \infty$. Entonces $\mathcal{R} - \operatorname{cod} f = \mu(f) + n - 1$.

3. $\mu(f) = 0$ si y solo si es no singular, $\mu(f) = 1$ si y solo si es crítico no degenerado.

Ejercicio 1 *Si $n \geq 2$ y $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es independiente de una de su variables entonces tiene codimensión infinita.*

Teorema 7 (Invarianza) *La codimensión es un $\mathcal{R}-$invariante.*

Teorema 8 (Codimensión y Topología) *Si la codimensión es finita entonces la singularidad es aislada. La recíproca vale en el caso complejo.*

Capítulo 2

Las catástrofes elementales

historia...
Thom clasificó las singularidades hasta codimensión 5, llamadas **catástrofes elementales**.
Vamos clasificar las singularidades según codimensión, posibles valores del corango.

Proposición 8 *$\mu(f) = 0$ si y solo si f es un sumersión. En particular, es equivalente a una proyección.*

Clasificación de formas cuadráticas. El rango es invariante lineal, pero el índcie puede cambiar, para eso definimos el semi-índice. Sale con álgebra lineal o aplicando el Lema de Mather. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces el índice es igual al rango.

Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$. Es **no degenerada** si la matriz hessiana (en cero) es no singular, caso contrario es **degenerado**. Definimos el **corango** de f como $\operatorname{cr} f = n - \operatorname{rk} \operatorname{Hess} f$. Definimos el **índice** de f como el índice de su Hessiana.

Teorema 9 (Lema de Morse) $\operatorname{cod} f = 1$ *si y solo si es no degenerada. En ese caso, si s es el índice de f, entonces es equivalente a*

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1} - \cdots - x_n^2$$

Teorema 10 (Lema de Separación) *Si f es degenerada (siempre trabajamos con gérmenes en el origen) de corango c entonces existe $g \in \mathfrak{m}_c^3$, único por $\mathcal{R}-$equivalencia y $\mu(f) = \mu(g)ojn$, tal que f es equivalente a*

$$g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 + \ldots + \pm x_n^2.$$

Proposición 9 (Cota para el corango) *Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$. Sea $k = \operatorname{cor} f$ Entonces $\mu(f) \geq \frac{1}{2}k(k+1) + 1$.*

Por tanto, analizaremos por ahora hasta corango 2.

Teorema 11 (Singularidades A_k) *Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$ de corango 1 y $\mu(f) = k$. Entonces f es equivalente a*

$$\pm x^{k+1} \pm x_2^2 + \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Demostración. Separación. Tenemos $g : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$, entonces $J(g) = x^k$...
En el caso complejo, g es equivalente a x^{k+1}. En el caso real, si k es par entonces Ak es equivalente a A_{-k}. Si K es impar, lo contrario.

Para el caso corango 2, haremos inducción sobre el grado de los jets, usando el método de la transversal.
Sea f, $W = H^{k+1}(n,1) = \frac{\mathfrak{m}_n^k}{\mathfrak{m}_n^{k+1}}$, $A = j^k(f) + W \subset J^{k+1}(n+1)$. Así, vamos a buscar $T \leqslant W$ tal que $L\mathscr{R}f + T = j^k(f) + W$ (note que aquí sí es igualdad).

Proposición 10 (Transversal completa en $J^{k+1}\mathscr{R}$) *Sea Sean $G_1, \ldots G_r \in H^{l+1}(n,1)$ que cumplen*

$$\mathfrak{m}_n^2 J(f) + \mathbb{R}\{G_1, \ldots, G_r\} + \mathfrak{m}_n^{k+2} \supset \mathfrak{m}_n^{k+1}$$

entonces todo $g \in J^{k+1}(n,1)$ con $j^k g = j^k f$ es $\mathscr{R}_1^{(k+1)}$-equivalente a algún $f + \sum_{i=1}^r u_i G_i$

Proposición 11 (Singularidades D_k) *Si $f \in \mathfrak{m}_n^3$ de codimensión $k-1 \geq 3$y $j^3 g$ es no degenerada o parabólica. Entonces es equivalente a*

$$xy^2 \pm y^{k-1}$$

Falta el caso simbólico, de codimensión mayor que 5.
Podemos dar por ahora la clasificación de Thom hasta codimensiçon 5.

Antes de continuar, debemos tener en cuenta que una clasificación finita no siempre es posible. Esto envuelve la noción de germen simple, que será explicada en el próximo capítulo.

Capítulo 3

$\mathcal{A}$ vs. $\mathcal{K}$ equivalencia

Dejaremos de enfocarnos en funciones, y consideraremos mapas más generales.

Diremos que dos mapas son a equivalente cuando...
Definir L equivalencia también

Como en el capítulo pasado, nos gustaría definir la codimensión, mostrar que es un invariante, y encontrar criterios de determinación finita. Además, noción de espacio tangente seguirá siendo. Por otro lado, podemos daruna motivación más geométrica que la de truncamientos

Imitando la intuición de la teoría de variedades suaves, usaremos despliegues para denotar caminos en el espacio de funciones. Recordemos que la acción está siendo aplicada, en principio, en $\mathfrak{m}_n$
En realidad, solamente lograremos clasificar gérmenes estables, i.e., de codimensión 0, para n, p pequeños.

3.1. Despliegues

Los despliegues generalizan la idea de caminos en el espacio de funciones.

Sea $f : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p)$. Un **despliegue a $d-$parámetros** es un germen $F' : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^d, 0) \to (\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^d)$.

Ejemplo 1 *teorema de Thom-Levine y otros (germen constante)... espacios tangentes, aunque dejaremos esa construcción para después, nuestra principal motivación fueron las acciones truncadas.*

Dos despliegues a $r-$parámetros F_1, F_2 de un germen $f : (\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^p)$ son **equivalentes** si existen despliegues I_n, I_p de de los mapas identidad en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, respectivamente, tal que

$$F_2 = I_p^{-1} \circ F_1 \circ I_n$$

es decir, son $\mathcal{A}-$equivalentes. Note que I_n (y deformaciones asociadas) son gérmenes invertibles, similarmente con I_p.
Un despliegue es trivial si es equivalente al germen constante. Un germen es **estable** si todo despliegue es $\mathcal{A}-$trivial.

Ejemplo 2 *ejemplos de gérmenes estables y no estables*

Despliegue inducido, es como un cambio de parámetros.
Despliegue versal, cualquier otro despliegue es equivalente a un despliegue inducido.
Despliegue isomorfos si es equivalente a un despliegue inducido por un difeomorfismo.

Teorema 12 (Versalidad y transversalidad) *Un **despliegue** F a d-parámetros es versal si y solo si **transversal**, i.e.,*

$$L\mathcal{A}_e f_0 + \langle \dot{F}_1, \ldots, \dot{F}_d \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{O}_{n,p}$$

o sea, si las derivadas generan el cotangente....

Corolario 7 (Versalidad y codimensión) *Un germen tiene codimensión finita si y solo si admite un despliegue versal, en ese caso, el número de parámetro de una deformación miniversal es la codimensión extendida.*

3.1.1. Conjunto de bifurcación

El **conjunto de catástroges** de un despliegue es

$$C(F) = \{(x, u) \in (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^d, 0) \mid DF(x, u) \text{ es singular } \}$$

El **conjunto de bifurcación** es

$$B(F) = \Sigma(F) = \{u \in (\mathbb{K}^\kappa, 0) \mid \exists (x, u) \in C(F), \text{ Hess}(f) \text{ es singular } \}$$

el discrimiante es la imagen el conjunto de catástrofes.

Proposición 12 *despliegues versales con el mismo número de parámetros tienen todo isomorfo*

3.1.2. Espacio tangente

Definimos el **espacio tangente** a f por

$$L\mathcal{A}f = \{ \frac{d}{dt}\psi_t \circ f \circ \varphi_t \Big|_{t=0} : \phi_t, \varphi_t \text{ deformaciones de las identidades tq. } \psi_t(0) = 0, \ \varphi_t(0) = 0, \ \forall t\}$$

Una definición útil será la de **espacio tangente extendido** a f, dada por

$$L\mathcal{A}_e f = \{ \frac{d}{dt}\psi_t \circ f \circ \varphi_t \Big|_{t=0} : \phi_t, \varphi_t \text{ deformaciones de las identidades}\}$$

Para dar una definición equivalente de espacio tangente, que será mucho más calculabe, usaremos las siguientes notaciones

- θ_n: gérmenes de campos vectoriales sobre $\mathbb{K}^n$ en 0, es un $\mathcal{O}_n$-módulo de rango n.
- $\theta(f)$: gérmenes de campos vectoriales a lo largo de f, es un $\mathcal{O}_n$-módulo libre, y también un $\mathcal{O}_p$-móudulo libre usando f^*.
- $tf : \theta_n \longrightarrow \theta(f)$ dada por $\xi \mapsto df \circ \xi$, morfismo de $\mathcal{O}_n$-módulos
- $wf : \theta_p \longrightarrow \theta(f)$ dada por $\eta \mapsto \eta \circ f$, morfismo de $\mathcal{O}_p$−módulos

Lema 3

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_t \circ f \circ \varphi_t^{-1}\right)\Big|_{t=0} = df \circ \left(\frac{d\varphi_t^{-1}}{dt}\Big|_{t=0} \right) + \left(\frac{d\psi_t}{dt}\Big|_{t=0} \right) \circ f$$

Teorema 13 (espacio tangente)

$$LAf = tf(\mathfrak{m}_n\theta_n) + \omega f(\mathfrak{m}_p\theta_p) = \mathfrak{m}_n J(f) + \{\eta \circ f \mid \eta \in \mathfrak{m}_p\mathcal{O}_{p,p}\}$$

$$L\mathcal{A}_e f = tf(\theta_n) + \omega f(\theta_p) = J(f)\mathcal{O}_n + \{\eta \circ f \mid \eta \in \mathcal{O}_{p,p}\}$$

Note que tenemos una combinación de estructuras modulares.
El concepto de codimensión significa cuanto le falta a un espacio para ser igual al total. En nuestro caso, el espacio total será el espacio tangente a f en el espacio de funciones, que identificaremos con el conjunto $\mathfrak{m}_n\theta(f)$. En el caso extendido, tiene sentido considerar el espacio de todas las funciones, no solo de las que fijan el origen.

Por tanto, las codimensiones serán definidas por

$$\mathcal{A} - \text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathfrak{m}_n\mathcal{O}_{n,p}}{L\mathcal{A}f} \quad \mathcal{A}_e - \text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{L\mathcal{A}_e f}$$

3.2. Equivalencia de contacto

Dados dos gérmenes $f_1, f_2 : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$, sabemos que sus gráficos son subvariedades de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$. La $\mathcal{K}$-equivalencia los relaciona si estos gráficos tienen el mismo *tipo de contacto* en $(0, 0)$ con el eje $\mathbb{K}^n$. En este caso, buscamos que estas intersecciones sean isomorfas.
la ventaja de la $\mathcal{K}$-equivalencia es que es mucho más fácil de verificar. Además está relacionada fuertemente con la $\mathcal{A}-$equivalencia, cuando consideramos relación entre germenes y despliegues, próximo capítulo.

El grupo de contacto es definido por

$$\mathcal{K} = \{(h, H) \in \text{Dif}(\mathbb{K}^n, 0) \times \text{Dif}(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p) \mid H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)),\ \theta(x, 0) = 0\}$$

que actúa en $f : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ por

$$(h, H) \cdot f(x) = \theta(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x)))$$

Un caso particular es el grupo $\mathcal{C}$, tomando $h = \text{id}_{(\mathbb{K}^n,0)}$.

Proposición 13 *$\mathcal{K}$ es el producto semi-directo de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}$.*

Proposición 14 (criterio algebraico de equivalencia) *Sean $f, g \in \mathcal{O}^0_{n,p}$. Son equivalentes*

1. *f, g son $\mathcal{C}-$equivalentes*

2. *Los ideales $\langle f_1, \ldots, f_p\rangle = \langle g_1, \ldots, g_p\rangle$ en $\mathcal{O}_n$.*

3. *Existe una matriz $(u_{ij}) \in \mathcal{O}_n^{p\times p}$ tal que $f_i = \sum u_{ij}g_j$.*

Ejemplo 3 *K equi pero no A equi*

Teorema 14 (criterio algebraico de equivalencia) *Dos gérmenes son $\mathcal{K}$-equivalentes si y solo sus $\langle f_1, \ldots, f_p\rangle = \langle g_1, \ldots, g_p\rangle$ son isomorfos inducidos.*

Como antes, podemos definir los espacios tangentes y la codimensiones, $\mathcal{O}_n$ −módulo.

$$L\mathcal{K}f = tf(\mathfrak{m}_n) + f^*\mathfrak{m}_p\theta(f) = J(f)\mathfrak{m}_n + I(f)\mathcal{O}_{n,p}$$

$$L\mathcal{K}_ef = tf(\mathcal{O}_n) + f^*\mathfrak{m}_p\theta(f) = J(f) + I(f)\mathcal{O}_{n,p}$$

Todos vistos como submódulos de $\mathcal{O}_{n,p}$

Teorema 15 *La $\mathcal{K}$-codimensión es $\mathcal{K}$−invariante.*

Teorema 16 *Un despliegue es $\mathcal{K}$-versal si y solo si es $\mathcal{K}$-transversal, si y solo si la $\mathcal{K}$−codimensión es finita*

Proposición 15 *Dos deformaciones miniversales son isomorfas.*

Demostración.mostrar que el cambio de base entre ambos es un difeo.

A continuación mostraremos un resultado fácil y fundamental.

Proposición 16 *Todo germen es $F : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ de rango r es $\mathbb{R}$-equivalente al despliegue a r−parámetros de un germen de rango* 0.

Por tanto, en la $\mathcal{A}$-clasificación de gérmenes, podemos restringirnos a despliegues.

Proposición 17 *si son despliegues son $\mathcal{A}$−equivalentes entonces los centros son $\mathcal{K}$−equivalentes.*

Capítulo 4

Estabilidad

Hay varias maneras de entendar la estabilidad: topologicamanete, con despliegues, e infinitesimalmente.

Sea $F' : (\mathbb{K}^n \times \times \mathbb{K}^r) \longrightarrow (\mathbb{K}^p \times \times \mathbb{K}^r)$ un despliegue a $r-$parámetros. Vamos anlaizar la correspondencia $F \longmapsto F_0$.

Teorema 17 (fundamental) *Existe una biyección entre las clases de $\mathcal{A}$-equivalencia de gérmenes estables $(\mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^n) \longrightarrow (\mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^p)$ de rango r y las clases de $\mathcal{K}-$equivalencia de rango 0 y $\mathcal{K}_e$-codimensión $\leq r + p$*

4.1. Estabilidad infinitesimal

Un germen es dicho $\mathcal{G}$-**infinitesimalmente estable** si la $\mathcal{G}_e$-codimensión es 0.

Teorema 18 *Estable (por despliegues) es equivalente a infinitesimalmente estable.*

Así, nos enfocaremos en hallar las clases de $\mathcal{K}-$equivalencia gérmenes de rango 0 hasta cierta $\mathcal{K}_e$codimensión.

Podemos descomponer este problema en otros más fáciles utilizando la *estratificación* (partición) de Thom-Boardman, que utiliza la topología del espacio de funciones, que finalmente comenzaremos a utilizar, en lugar de huir de ella.

4.2. La Topología de Whitney

Nos gustaría que el conjunto de aplicaciones estables sea abierto y denso. Seremos globales por un rato.

Escoja una métrica d en $J^k(n,p)$ (que es una variedad suave). La **topología C^k de Whitney** tiene como base

$$V(f,\delta) = \{g \in C^k \mid d(j^k g(x) - j^k f(x)) < \delta(x),\ \forall x \in \mathbb{K}\}$$

donde δ es una función continua y positiva.
la **topología C^∞ de Whitney** tiene como base la unión de todos los abiertos de las topologías C^k.

Observación 1 *La topologia de Whitney es Baire no metrizable.*
El espacio de jets entre dos variedades en un fibrado sobre cada variedad. Esto define la estructura suave de $J^k(n,p)$, la topología coincide con la euclidiana... aunque eso no importa.

Proposición 18 *1. Considerando la topologia de Whitney $j^k : C^\infty(n,p) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, J^k(n,p))$ es continua.*

2. *$\phi_* : C^\infty(n,p) \longrightarrow (n,q)$, con $\phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ (covariante) es continua.*

3. *Si $\phi \in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C^\infty(n,n)$ entonces $f \mapsto \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es continua. Si ψ es un difeomorfismo, entonces es un homeomorfismo.*

Teorema 19 (Transversalidad de Thom) *Sean $Q_1 \cdots Q_p$ subvariedades suaves de $J^k(n,p)$. Entonces el conjunto de las aplicaciones f en $C^\infty(n,p)$ tales que $j^k(f)$ es transversal a todos los Q_i es denso.*

Un mapa $f \in C^\infty(n,p)$ es **globalmente estable** si existe una vecindad de f contenida en una única $\mathrm{Dif}\, n \times \mathrm{Dif}\, p-$órbita. En realidad, dicha órbita será abierta.

Teorema 20 *f propio. Son equivalentes.*

1. *globalmente estable.*

2. *Para todo p, $S \subset f^{-1}(p)$, $f : (,S) \longrightarrow (,p)$ es estable.*

4.2.1. Singularidades de primer orden

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Re^p$, definimos el conjunto de singularidades de primer orden

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \Re^n \mid \dim \ker df(x) = i\}.$$

También definimos

$$\Sigma^i = \{\sigma \in J^1(n,p) \mid \dim \ker j^1\sigma = i\}$$

Note que $\Sigma^i(f) = j^{-1}(f)(\Sigma^i)$, por tanto es una subvariedad.

Proposición 19 $\operatorname{cod} \Sigma^i = i(p-n+i)$ *en* $J^1(n,p)$.

Demostración.aplicar lema de álgebra lineal y luego transversalidad de Thom.

Corolario 8 *El conjunto de aplicaciones con $1-$jet transversal a todos los σi es denso, para ese conjunto* $\operatorname{cod} \sigma^i(f) = i(|p-n|+i)$

4.2.2. Singularidades de Thom-Boardman

Definir símobolo de Boardman

4.3. Gérmenes simples

Una singularidad finitamente determinada $f \in \mathfrak{m}_n \mathcal{O}_{n,p}$ es **simple** si para todo k grande existe un vecindad V de $j^k(f)$ en $J^k(n,p)$ que contiene un número finito de órbitas de la acción de $J^k\mathcal{G}$ en $J^k(n,p)$.
También se puede definir usando deformaciones y la topología del espacio de funciones.

Lema 4 *es suficiente tomar una deformación versal*

Gérmenes no simples... comentarios.... ver en las notas... también caso Arnold

Proposición 20 *A simple equivale K simple, equivale R simples*

4.4. Algunos gérmenes estables

Vamos a clasificar gérmenes del plano en el plano.

Teorema 21 (Whitney) *Las únicas singularidades aisladas que aparecen en los discriminantes de una aplicación estable del plano en el plano son cúspides y dobleces transversales.*

Capítulo 5

Falso epílogo

Determinación finita.
Variedades.

Parte II

Topología de las singularidades

Capítulo 6

La fibración de Milnor

Teorema 22 *Existe un vecindad puntuada del origen tal que f es una fibración, con fibra homotópica al bouquet de esferas (de codimensión 1 por regularidad), de cantidad kgula al número de milnor.*

Capítulo 7

Cálculo número de Milnor y Tjurina

Poliedro de Newton

Proposición 21

Capítulo 8

Estratificaciones

cómo varían los estratos con deformaciones (poliedro de Newton)

Parte III

Casos particulares y generalizaciones

Capítulo 9

Intersección completa

9.1. Singularidades de esquemas afines

9.2. Cohen Macaulay

9.3. Gorenstein

Capítulo 10

Variedades determinantales