Topología Algebraica

Abraham Rojas

2023

Índice general

Parte I

(Co)homologías

Capítulo 1

Algunos conceptos topológicos

El término mapa denota función continua. I denotará el intervalo $[0, 1]$. Términos como retracción, cocientes, serán pensados en la categoria de espacio topológicos.

Dado un mapa $f : X \to Y$, el **cilindro** de f es el cociente de $(X \times I) \bigsqcup Y$, identificando $(x, 1)$ con $f(x)$

1.1. Homotopías

Una **homotopía** entre dos espacio X e Y es una familia de mapas $f_t : X \to Y$ con $t \in I$, tal que $F : X \times I \to Y$ definida por $F(x, t) = f_t(x)$ es continuo. Diremos que f_0 y f_1 son homotópicos, y escribiremos $f_0 \simeq f_1$.

Un **retrato por deformación** de X es un subespacio A es una homotopía entre Id_X y una retracción de X en A.
Una homotopía $f_t : X \to Y$ que se restringe a la identidad en A es una **homotopía relativa** a A.

Un mapa $f : X \to Y$ es una **equivalencia homotópica** si existe otro mapa $g : Y \to X$ tal que $fg \simeq \mathrm{Id}$ y $gf \simeq \mathrm{Id}$, en este caso, X e Y son **homotópicamente equivalentes** (o tiene el mismo **tipo de homotopía**), denotaremos $X \simeq Y$.
Un espacio con la clase de homotopía de un punto es llamado **contráctil**. Equivalentemente, su mapa identidad es homotópica a un mapa constante (hacia algún punto).
Note que un retrato por deformación es una equivalencia homotópica.

Ejemplo 1 *1. La cinta de Möbius se retrae por deformación a su círculo interior.*

2. Consideremos una hoja de papel con dos hoyos, esta se retrae a lo siguiente... pag. 2, por tanto estas figuras son homotópicamente equivalentes, pero no son retratos de deformación entre sí. Esto puede expresarse en función de cilindros.

3. Se puede retraer una X gorda en una X fina y luego retraer a un punto. Observe que los caminos pueden cruzarse, a diferencia de los ejemplos anteriores.

Ejercicio 1 *Sea* $f : X \to Y$ *un mapa,* M_f *se retrae por deformación a* Y*, lo Cuál generaliza los ejemplos anteriores.*

1.2. Complejos simpliciales

1.3. Complejos CW

Ejemplo 2 *Construir un toro partir de un cuadrado, y generalizar para un polígono regular de* $4g$ *lados paar obtener superficies orientables.*

son construido de forma inductiva

1. X^0 es un conjunto discreto, sus puntos son las $0-$células del complejo.

2. Inductivamente, construiremos el n-esqueleto X^n a partir de X^{n-1}, adjuntando n-células e^n_α via mapas $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Esto significa que X^n es el cociente de $X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha$ of X^{n-1}, con las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D^n_\alpha$. Tenemos que $X^n = X^{n-1} \bigsqcup_\alpha e^n_\alpha$ donde cada e^n_α es un n-disco abierto.

3. Podemos parar este proceso luego de n pasos, obteniendo un complejo de **dimensión** n, o dejarlo continuar indefinidamente, en cuyo caso X tiene la topología débil: $A \subset X$ es abierto si y solo si $A \cap X^n$ es abierto en X^n para todo n.

Ejemplo 3 *1. Un* ***grafo*** *es un complejo celular de dimensión* 1.

2. S^n *tiene dos células.*

3. ***Espacio proyectivo real de dimensión*** n***.*** *Existen definiciones equivalentes:*

   a*) Conjunto de subespacios lineales de dimensión* 1 *en* $\mathcal{R}^{n+1}$.

   b*) Cociente de* $R^{n+1} \setminus \{0\}$*, identificando puntos en una misma recta.*

   c*) Cociente de* S^n*, identificando puntos antípodas.*

   d*) Cociente del hemisferio* D^n*, identificando puntos antípodas en* ∂D^n.

   Como el cociente de ∂D^n *identificando antípodas es* $\mathcal{R}P^{n-1}$*, tenemos una estructura de complejo celular* $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$*, donde* e^i *es una* $i-$*célula,* $0 \leq i \leq n$*. Si no detenemos este proceso, obtenemos* $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$

4. El caso complejo es similar, tenemos que $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$*, y es equivalente al cociente de* S^{2n+1} *(identificamos no solo antípodas, sino aquellos múltiplos por complejos de norma* 1*).*

Capítulo 2

Homologías

2.1. Cálculo

2.2. Aplicaciones clásicas

2.2.1. Teorema de De Rham

2.2.2. Grado

2.3. Axiomas

2.4. De los coeficientes

Capítulo 3

Cohomología

3.1. Dualidad de Poincaré

3.2. Productos cup y cap

Parte II

Teoría de Homotopía

Capítulo 4

Grupo fundamental

4.1. Cálculos

4.2. Cubrimientos

4.3. Una aplicación en Teoría de Grupos

Parte III

Más herramientas

Capítulo 5

Homología de intersección

Capítulo 6

Espacios de intersección