Geometría Algebraica

Abraham Rojas

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este es un libro de Geometría.

Me gusta distinguir entre dos conceptos: la Geometría Algebraica, el estudio de la geometría utilizando espacios algebraicos y herramientas algebraicas, y por otro, lo que me gusta llamar ”Álgebra Geométrica”, o sea, utilizar herramientas geométricas para estudiar estructuras algebraicas. Nosotros seguiremos el primer enfoque.

Por otro lado, podemos estudiar la Geometría utilizando diferentes tipos de espacios ambiente y diversas herramientas.

Obviamente, toda distinción que se haga entre áreas del conocimiento no deja de ser artificial.

Capítulo 2

Geometría Diferencial para algebristas

2.1. Variedades

Sea M un espacio topológico Hausdorff y segundo contable.

M es una **variedad topológica de dimensión** n si existe un **atlas**, que es una colección $\mathfrak{A}$ de pares $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, donde

1. $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de M,
2. para cada $i \in I$, φ_i es un homeomorfismo entre U_i y un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Los elementos de un atlas son llamados **cartas**.

M es una **variedad diferenciable** si, para cada $i, j \in I$,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} \text{ es de clase } C^\infty.$$

Un mapa diferenciable es una función continua $f : M \to N$ entre variedades suaves tal que, para todo par de cartas (U, φ) y (V, ψ) de M y N, respectivamente, tenemos que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{f^{-1}(V)\cap U} \text{ es de clase } C^\infty.$$

Proposición 1 *Las variedades diferenciables forman una categoría, tomando como morfismos los mapas diferenciables.*

Los isomorfismos en esta categoria son llamados **difeoemorfismos**.

Ejemplo 1

Una variedad compleja de dimensión (compleja) n

2.2. Fibrados y haces

2.2.1. Formas

2.2.2. Fibrados

2.2.3. Haces

Sea X un espacio topológico. Consideremos la categoría $\mathfrak{U}$, cuyos elementos son los abiertos de X y cada morfismo $U \to V$ proviene de la inclusión $U \subset V$.

Un **haz de conjuntos** sobre X es un funtor (contravariante) $\mathcal{F} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{Sets}$ tal que

2.3. Invariantes algebraicos

2.4. Otros

2.4.1. Estructuras exóticas

2.4.2. Grupos de Lie

2.4.3. Cocientes

2.4.4. Teoría de Galois Diferencial

Capítulo 3

La geometría de los Anillos Conmutativos

3.1. Conceptos básicos

En adelante, A será un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo.

Un **ideal** es un subconjunto I de A tal que

1. es cerrado por la suma,
2. si $a \in A$ y $x \in I$ entonces $ax \in R$.

El **espectro** de A es el conjunto de sus ideales primos, denotado por $\mathrm{Spec}(A)$. Podemos dotar a este conjunto de la **Topología de Zariski**, donde los conjuntos cerrados son de la forma

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid I \subset \mathfrak{p}\}, \text{ donde } I \text{ es un ideal.}$$

Dado um elemento $h \in A$, definimos

$$D(h) = \{\mathfrak{p} \mid h \notin \mathfrak{p}\}$$

Si $\phi : A \to B$ es un morfismo de anillos, definimos el **mapa induzido** por

$$\mathrm{Spec}(\phi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

Teorema 1

1. *$\{D(H)\}_{h\in A}$ es una base de abierto de la topología de Zariski.*
2. *Los mapas inducidos por morfismos de anillos son continuos.*
3. *$\overline{\mathfrak{p}} = V(\mathfrak{p})$, en particular, un ideal primo es un punto cerrado si y solo si este ideal es maximal.*
4. *$\mathrm{Spec}(A)$ es compacto.*
5. *Sea I un ideal, el morfismo inducido de la proyección natural $A \to A/I$ es un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(A/I)$ con $V(I)$.*

Ejemplo 2

3.2. Regularidad y Normalidad

3.3. Dimensiones

3.4. Módulos

Capítulo 4

Esquemas

En el conjunto de ideales de un anillo, vamos considerar

4.1. Tipos de morfismo

4.2. Divisores y diferenciales

4.3. Haces Coherentes

Capítulo 5

Algunos casos particulares

5.1. Curvas

5.2. Superficies

5.3. Geometría Compleja

5.4. Geometría Diofantina

Capítulo 6

Deformaciones

6.1. Teoría de Intersección

Me llevó mucho tiempo tratar de entender los cómos y los porqués de las definiciones. Valió mucho la pena, pero creo que un
Lo más difícil es dar un concepto (y en particular, una definición) precisa de los número de intersección y grado de una variedad. Así que comenzaremos dando algunas condiciones (que pueden tomarse como axiomas) que cumplen los número de intersección

número de intersección lo que implica definición de grado
El primer paso percibir que el número de intersección varía continuamente con la posición de las variedades. Considere el siguiente

Ejemplo 3

Ya podemos ver una de las posibles definiciones del número de intersección

Apéndice A

Un poco de Análisis

Apéndice B

Álgebra Homológica

B.1. Categorías Abelianas