Conmutative and Homological Algebra

Abraham Rojas

Contents

Part I

Teoría básica

Chapter 1

Ideales y módulos en anillos conmutativos

Let A be a Conmutative ring with identity.

Un **ideal** es un subconjunto no vacío I de A tal que

1. es cerrado por la adición (em particular $0 \in A$),
2. si $a \in A$ y $x \in I$ entonces $ax \in I$.

Un ideal **propio** es un ideal de A que no contiene invertibles.

Ejercicio 1 *Un ideal es propio si y solo si es distinto de A.*

Dada una familia $\{b_\lambda\}_\Lambda$ de elementos de A, el **ideal generado** por estos elementos es definido como el conjunto las *combinaciones lineales* de estos, i.e.,

$$a_1 b_{\lambda_1} + \cdots + a_r b_{\lambda_r}, r \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in \Lambda.$$

El ideal generado por $a_1, \ldots, a_r \in A$ será denotado por $(a_1, \ldots, a_r)$. Ideales generados por un único elemento son llamados **principales**.

Ejercicio 2 *El núcleo de un morfismo de anillos (conmutativos) es un ideal del dominio.*

Dados dos ideales I y J de A, definimos el **producto** de estos como

$$IJ = \{a_1 b_{\lambda_1} + \cdots + a_r b_{\lambda_r}, r \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}.$$

El **radical** de I es definido como

$$\sqrt{(I)} = a \in A \mid a^n \in I \text{ para algun } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 3 *IJ, $I \cap J$, $I + J$, $\sqrt{I}$ son ideales de A. Además, $IJ \subset I \cap J$.*

Definimos el **anillo cociente** de A sobre el ideal I como el cociente de grupos abelianos A/I. Podemos darle una estructura de anillo, considerando la multiplicación $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$ (*ejercicio fácil*). De esta forma, la proyección $\pi : A \to A/I$ es un *epimorfismo* de anillos.

Ejercicio 4 (Teorema de isomorfismo) *Sea ϕ un epimorfismo de anillos. ...*

Teorema 1 (Lema de correspondencia) *contenidos...*

1.1 Ideales primos, maximales

Un ideal I es **primo** si satisface

$$x, y \in I \text{ implica } x \in I \text{ o } y \in I.$$

El conjunto de los ideales primos de A es denotado por $\operatorname{Spec} A$.

Ejemplo 1

La **altura** de $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ es el supremo de $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una cadena $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \imath_n = \mathfrak{p}$ en Spec, denotada por $\operatorname{alt} \mathfrak{p}$
La **dimensión de Krull** (o simplemente, dimensión) de A es el supremo de las alturas de sus ideales primos, será denotada por $\dim A$.

Ejemplo 2 *contenidos...*

Teorema 2 *El mapa $\phi : A \to B$ un mapa de anillos. La preimagen de un ideal primo es un ideal primo.*

Un ideal es **maximal** si es maximal en el conjunto de los ideales de I, según la relación de inclusión.

Proposición 1 *Sea I un ideal de A.*

1. *I es primo si y solo si A/I es un dominio.*

2. *I es primo si y solo si A/I es un cuerpo*

En particular, todo ideal maximal es primo.

Ejemplo 3 *la preimagen no preserva maximales excepto si el mapa es sobre*

Teorema 3 *Todo ideal propio y todo elemento de $A^\times$ está contenido en un ideal maximal.*

Un **anillo local** es aquel que posee un único ideal maximal. En el próximo capítulo, vamos a construir muchos ideales locales.
Un anillo **semilocal** es un anillo con una cantidad finita de ideales maximales. Entre estos, destacan los anillo artinianos.

Ejemplo 4 (Ideales radicales) *Un anillo radical es aquel donde*

1.2 Pre-álgebra Homológica

Sea

Teorema 4 (fundamental) *Secuencias exactas cortas inducen secuencias exactas largas en homología.*

Chapter 2

Dos operaciones fundamentales

El producto tensorial y la localización son operaciones funtoriales entre módulos con importantes interpretaciones geométricas. En ambos casos, comenzaremos dando las definiciones básicas para luego pasar directamente a las *definiciones universales* que, como sabemos, facilitan los cálculos con isomorfismos. Terminaremos el capítulo dando ejemplos que son piezas clave en el desenvolvimiento de otras áreas matemáticas.

2.1 Localización

2.1.1 Cambios de base

Teorema 5 *La localización (respecto a algún conjunto multiplicativo) es un funtor exacto.*

Corolario 1 (Localización de morfismos de módulos)

Teorema 6 (Localización e ideales) *Sean A un anillo y $S \subset A$ un conjunto multiplicativo, con mapa de localización $\rho : A \to S^{-1}A$.*

1. *Los ideales de $S^{-1}A$ son de la forma $S^{-1}I$ donde I es un ideal de A.*

2. $\mathrm{Spec}(\rho)$ *es inyectivo y tiene imagen*

$$D_S = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

3. *Tenemos una biyección ....*

4. *Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, tenemos que*

$$\dim A \geq \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p}.$$

2.2 Producto tensorial

Sean M, N módulos. Sea P el módulo libre con base $M \times N$, sea R el submódulo generado por los elementos de la forma

- $e_{(am,n)} - ae_{(m,n)}, e_{(m,an)} - ae_{(m,n)}$,
- $e_{(m_1+m_2,n)} - e_{(m_1,n)} - e_{m_2,n}$,
- $e - m, n_1 + n_2 - e_{m,n_1} - e_{m,n_2}$

El **producto tensorial** de M y N (sobre A) está definido por $M \otimes N = P/R$. La clase de (m, n) es denotada por $m \otimes n$. De esta manera, la operación $\otimes : M \times N \to M \cdot N$ es bilineal.

Teorema 7 (Propiedad universal) *Para todo módulo T y todo mapa bilineal $\phi : M \times N \to T$ existe un único morfismo de módulos $f : M \cdot N \to T$ tal que $\phi = f \circ \otimes$*

Teorema 8 (Exactitud a derecha) *Si $M \to N \to P \to 0$ es una secuencia exacta, entonces la secuencia inducida es exacta:*

$$M \otimes T \to N \otimes T \to P \otimes T \to 0$$

Isomorfismos básicos

1. $(M \otimes N) \otimes P \simeq M(\otimes N \otimes P)$
2. $A \otimes M \xrightarrow{\simeq} M$, $a \otimes m \mapsto am$.
3. $M \otimes N \xrightarrow{\simeq} N \otimes M$,
4. $M \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i \in I}(M \otimes N_i)$, $m \otimes (n_i) \mapsto (m \otimes n_i)$
5. $M \otimes (A/I) \xrightarrow{\simeq} M/IM$, $m \otimes \overline{a} \mapsto \overline{am}$.
6. $S^{-1}A \otimes M \xrightarrow{\simeq} S^{-1}M$, $(a/s) \otimes m \mapsto (am)/s$.
7. $A[x] \cdot B \to B[x]$
8. $A/I \otimes A/J \simeq A/(I + J)$.

Ejemplo 5 *producto tensorial de espacio vectoriales*

Teorema 9 (cambios de base)

Teorema 10 *El coproducto en la categoría de las $A-$álgebras es el producto tensorial sobre A.*

2.3 Aplicaciones

2.3.1 Fibras de morfismos

Lema 1 *Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos y sea $f = \mathrm{Spec}(\phi)$.*

1. $$f^{-1}(V(I)) = \mathrm{Spec}(B \otimes A/I)$$

2. *Sea S un conjunto multiplicativo,*
$$f^{-1}(D_S) = \mathrm{Spec}(B \otimes A/I)$$

Teorema 11 *Existe una biyección natural*

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}\, B \otimes k(\mathfrak{p})$$

Ejercicio 5 (Módulos y morfismos planos) *contenidos...*

2.3.2 Lema de Nakayama

Teorema 12 (Lema de Nakayama) *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{m}$ um ideal tal que, para todo $x \in \mathfrak{m}$, $1 + x$ es invertible. Sea M un $A-$módulo, tenemos que:*

1. *Si $M = \mathfrak{m}M$ y es finitamente generado, entonces $M = 0$.*

2. *Si N_1 y N_2 son submódulos de M, con N_1 finitamente generado, entonces*
$$N_1 \subset N_2 + \mathfrak{m}N_1 \text{ implica que } N_1 \subset N_2$$
.

Ejercicio 6 *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ y sea M un $A-$módulo libre de rango finito. Tenemos que $\dim_k M/I$ es finito si y solo si existe un entero $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset I$.*

Ejercicio 7 (usado en singularidades) *A local tal que $\mathfrak{m}$ es finitamente generado*

1. *Sea I un ideal. $\mathfrak{m}^k \subset I$ si y solo si $\mathfrak{m} \subset I + \mathfrak{m}^{k+1}$.*

2. *f_i genera $\mathfrak{m}_k$ si y solo si $\langle \overline{f}_i \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$.*

En particular tenemos

Corolario 2 (Bases minimales) *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local. $a_1, \ldots, a_n$ generan $\mathfrak{m}$ (como ideal) si y solamente si $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ generan $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^2$ como un $k-$espacio vectorial. En particular, $\delta(\mathfrak{m}) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.*

2.3.3 Principios locales-globales

Chapter 3

Algunos anillos importantes

3.1 Algunos dominios

anillos de factorizción única (equivalencia, relación con elementos primos e irreducibles, son normales), dominios principales (submódulo de un f.g.), euclidianos, ejemplos

3.2 Condición noetheriana

3.2.1 Anillos y módulos noetherianos

Teorema 13 *Si A es un anillo noetheriano, entonces $\dim A$ es finita*

Ejercicio 8 *En un anillo noetheriano, todo ideal posee solo un número finito de ideales primos minimales.*

Teorema 14 (Caracterización) *Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ secuencia exacta de $A-$módulos. M es noetheriano (artiniano) si y solo si M' e M'' son noetherianos (artinianos). En particular, cocientes y localizaciones de módulos de módulos noetherianos (artinianos) son noetherianos (artinianos).*

Corolario 3 *Un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es noetheriano.*

3.2.2 Artinianos

Teorema 15 (Módulos artinianos) *Seja M un $A-$módulo.*

1. $\operatorname{lon}_A M < \infty$ *si y solo si M es artiniano y noetheriano.*

2. *En el caso anterior, todas las secuencias de composición tienen la misma longitud.*

aditividad

Teorema 16 (Anillos artinianos) *Sea A un anillo artiniano.*

1. $\operatorname{Spec} A$ *es finito.*
2. *Todo ideal primo es maximal.*
3. $$A \simeq A_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots A_{\mathfrak{m}_n}$$

   donde $\mathfrak{m}_i$ son los ideales maximales de A.
4. *Dominios artinianos son cuerpos.*

Chapter 4

Anillos completos

Sean A un anillo, I un ideal y M un $A-$módulo.

Ejercicio 9 1. *La unión disjunta de M/I^nM, $n \in \mathbb{N}_0$ (considerando cada cociente como la familia de las clases laterales), es una topología en M, al incluir el conjunto vacío.*

2. *Esta topologia es Hausdorff si y solo si $\bigcap I^n = (0)$.*

Esta topología es la **topología I-ádica** de M.

Teorema 17 (Artin-Rees) *Sea A un anillo noetheriano, sean $N \subset M$ A-módulos, con M finitamente generado. Dado un ideal I, la topologia I-ádica de N coincide con la restricción de la topología I-ádica de M en N.*

Corolario 4 (Teorema de Intersección de Krull) *Sea A un anillo noetheriano e I un ideal propio. Si A es local o si A es un dominio, entonces la topologia I-ádica es Hausdorff.*

Ejemplo 6 (Álgebra de Tate)

Teorema 18 *El completamento es un funtor exato.*

Teorema 19 *sea A un anillo noetheriano $I \subset A$ un idela y M un $A-$módulo finitamente generado. Tenemos que:*

1. *El mapa natural $M \otimes_A \hat{A} \to \hat{M}$ es un isomorfismo.*

2. *Sea J un ideal de A, entonces $\hat{J} = J\hat{A}$.*

3. $\dim \hat{A} = \dim A$ *???*

Chapter 5

Extensiones integrales

Teorema 20 (Criterios de integridad) *Sea $A \subset B$ una extensión de anillos y sea $b \in B$. Son equivalentes:*

1. *b es integral sobre A.*
2. *$A[b]$ es una $A-$álgebra finita.*
3. *$A[b] \subset C$ para alguna $A-$subálgebra $C \subset B$.*

Corolario 5 (Caracterización de extensiones integrales) *1. ......*

5.1 Propiedades

Lema 2 (Elevador) *contenidos...*

Teorema 21 (Fibras integrales)

Falta going down... que será mostrado después

Ejemplo 7

Clausura integral... y propiedades

Proposición 2 *Una álgebra finitamente generada sobre un anillo noetheriano es noetheriana (sobre sí misma). Localizaciones igual..*

5.2 Grupos de automorfismos del anillos

5.3 Normalización de $K-$álgebras

Teorema 22 (Normalización de Noether) *Sea K un cuerpo y sea A una $K-$álgebra finitamente generada. Entonces existen $x_1, \ldots x_n \in A$ algebraicamente independientes sobre K tal que A es finito sobre $K[x_1, \ldots x_n]$*

Teorema 23 *Sea K un cuerpo y sea A un dominio que es una $K-$álgebra finitamente generada. Luego:*

1. $\dim A = \mathrm{gr.\,tr.}_K \operatorname{Frac} A$.
2. *Para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$:*
$$\operatorname{alt} \mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A.$$
3. *Sea L una extensión de cuerpos finita de $\operatorname{Frac} A$. Tenemos que ic_L es un $A-$módulo finitamente generado, y también una $K-$álgebra finitamente generada.*

Teorema 24 (Dimensión de fibras) *Sean $(A, \mathfrak{m}, k)$ y $(B, \mathfrak{n}, l)$ noetherianos, sea $\phi : A \to B$ morfismo local. Sea (M_n) una filtración $\mathfrak{q}-$estable. Entonces*

$$\dim B \leq \dim A + \dim B \otimes_A k$$

con igualdad si B es fielmente plano sobre A.

Corolario 6 *Sea A anillo noetheriano. Entonces* $\dim A[x_1, \ldots, x_n] = \dim A + n$.

Teorema 25 *Hilbert's Nullstellensatz Sea K un cuerpo.*

1. *Si $K \subset L$ es una extensión de cuerpos tal que L es finitamente generado como $K-$álgebra, entonces la extensión es finita.*
2. *Sea A una $K-$álgebra finitamente generada sobre K. Sea $P \in \operatorname{Spec} A$. Entonces P es un ideal maximal si y solamente si $\dim_K A/P$ es finita.*
3. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ que es un $K-$álgebra finitamente generada, entonces k es un extensión finita de K. Si K es algebraicamente cerrado, entonces $k = K$.*

5.4 Valuaciones

Sea K un cuerpo y G un grupos abeliano totalmente ordenado. Una **valuación** de K con valores en G es una función $v : K^\times \to G$ tal que

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$,
2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

El **anillo de valuación asociado** a v es el subanillo local de K dado por $R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$; su ideal maximal está formado por los elementos con elementos cuya valuación es positiva, junto con el 0.
Si k es un subcuerpo de K tal que $v|_{k^\times} = 0$, v es *valuación de K/k*, y R es el *anillo*

de valuación de K/k.
Un **anillo de valuación** es un dominio que el anillo asociado a alguna valuación de su cuerpo de fracciones.
Una valuación $v : K^\times \to G$ es **discreta** si $G = \mathbb{Z}$. La definición de **anillo de valuación discreta** es análoga a la anterior.

Sean $(A, \mathfrak{m}, k_1)$ y $(B, \mathfrak{n}, k_2)$ dos anillos locales dentro un cuerpo K. Decimos que B **domina** A si $A \subset B$ y $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$.

Teorema 26 1. *Sea K un cuerpo. Un anillo local R en K es una anillo de valuación de K si y solo si es un elemento maximal en el conjunto de los anillos locales en K, respecto a la relación de dominación.*

2. *Todo anillo local en K está dominado por un anillo de valuación en K*

Teorema 27 *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano de dimensión 1. Son equivalentes*

1. *A es un anillo de valuación discreta.*
2. *A es normal.*
3. *A es regular.*
4. *$\mathfrak{m}$ es principal.*

Un **dominio de Dedekind** es un dominio noetheriano normal de dimensión 1. Por el Teorema... y el anterior, cada localización en un ideal primo no nulo es un DVD.

Proposición 3 *La clausura integral de un dominio de Dedekind en una extensión finita de su cuerpo de fracciones es también un dominio de Dedekind.*

5.5 Regularidad

Un anillo local $(A, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano es dicho **regular** si $\delta(\mathfrak{m}) = \dim A = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Teorema 28 (Teorema de estructura de Cohen) *Si $(A, \mathfrak{m}, k)$ es regular completo de dimensión n conteniendo un cuerpo, entonces*

$$A \simeq k[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Part II

Álgebra Homológica

Chapter 6

Dimensión y multiplicidad

El **radical** de un módulo M es definido como el radical $\operatorname{Anu} M$, denotado por $\operatorname{rad} M$. Es claro que $\operatorname{rad}(R/\operatorname{Anu}) = \operatorname{rad}/\operatorname{Anu} M$.
En particular, si A es local entonces $\mathfrak{m} = \operatorname{rad} M$.

6.1 Primos asociados

Sea A un anillo y M un A-módulo.

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ es un **primo asociado** de M si

$$\text{existe} m \in M \text{ tal que } \mathfrak{p} = \operatorname{Anu} m$$

El conjunto de primos asociado es denotado por $\operatorname{Aso}_A M$ o $\operatorname{Aso} M$.

Ejercicio 10 (fácil e importante) *1.* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Aso} M$ *si y solo si existe* $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$.

2. $\operatorname{Aso}(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

3. $ZD(M) = \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Aso} M} \mathfrak{p}$.

Proposición 4 *Sea A un anillo noetheriano y sea M un $A-$módulo finitamente no nulo. Luego* $\operatorname{aso} M \neq \emptyset$.

Proposición 5 *Sea* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *una secuencia exacta. Luego*

$$\operatorname{Aso} M' \subset \operatorname{Aso} M \subset \operatorname{Aso} M' \cup \operatorname{Aso} M''.$$

Teorema 29 (Cadenas primarias) *Sea A anillo noetheriano y sea M un $A-$módulo finitamente generado. Luego existe una cadena de submódulos (llamada **primaria**)* $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ *tal que*

$$M_{i+1}/M_i \simeq A/\mathfrak{p}_i \text{ con } \mathfrak{p}_i \in \operatorname{spec} A$$

Además $\operatorname{Aso} M \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, *para cualquier cadena primaria como la anterior. En particular* $\operatorname{Aso} M$ *es finito.*

Un primo asociado es llamado **encajado** si no es minimal en $\operatorname{Aso} M$ (por inclusión).

Ejemplo 8 (geometría) *también sobre cadenas primarias y primos asociados en general*

Lema 3 *Sea A noetheriano y M finitamente generado,*

$$\operatorname{Aso}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Aso}_A M,\ \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}.$$

6.1.1 Descomposición primaria

Sea $\mathfrak{p} \operatorname{Spec} A$. Decimos que un submódulo propio P de M es $\mathfrak{p}-$primario si $\operatorname{Aso} M/P = \{\mathfrak{p}\}$.
La descomposición primaria es una versión débil de las factorización en factores primos y en anillos de Dedekind.
El caso más importante es $M = A$ noetheriano y P es un ideal propio.

Lema 4 (Teorema chino de residuos primarios) *Sea A noetheriano y sea M un $A-$módulo finitamente generado. Luego, existe $A-$módulos $E(\mathfrak{p})$, con $\operatorname{Aso} E(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ y un encaje*

$$M \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Aso} M} E(\mathfrak{p}).$$

Teorema 30 (Descomposición primaria) *Sea A un anillo noetheriano y sea M un $A-$módulo fintamente generado. Dado un submódulo N de M:*

$$N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Aso} M/N} Q(\mathfrak{p})$$

donde cada $Q(\mathfrak{p}) \subset M$ es un submódulo $\mathfrak{p}$-primario de M, que solo dependen M, N y $\mathfrak{p}$.

Ejemplo 9 *no única.*

6.1.2 Soporte

conjunto de los $\mathfrak{p}$ tal es que $M_\mathfrak{p} \neq 0$.

Lema 5 (Propiedades) *1.* $\operatorname{sop} M \subset V(\operatorname{Anu} M)$

2. aditividad en secuencias exactas

3. producto tensorial

4. $\operatorname{sop} M = \cup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Aso} M} V(\mathfrak{p})$. *En particular* $\operatorname{Aso} M \subset \operatorname{sop} M$ *y comparten los mismos primos minimales.*

Como aplicación tenemos el siguiente

Teorema 31 *A noetheirano, m finitamente generado*

1. $\operatorname{lon} M < \infty \iff \operatorname{Aso} M \subset \operatorname{SpecMax} M \iff \operatorname{sop} M \subset \operatorname{SpecMax} M$.

2. *Si K es algebraicamente cerrado* $\operatorname{lon}_{K[X_1,\ldots,X_n]} M = \dim_K M$. *En particular, M es artiniano si y solo si es dimensión finita sobre K.*

Ejemplo 10

Ejercicio 11 (importante en multiplicidad) *Sea A anillo, I ideal y M módulo.*

1. $\operatorname{sop}(M/IM) \subset \operatorname{sop} M \cap V(I)$, *vale la igualdad si M es finatamente generado.*

2. *Si M es finitamente generado entonces*

$$V(I + \operatorname{Anu} M) = \operatorname{sop}(M/IM) = V(\operatorname{Anu}(M/IM))$$

Definimos la **dimensión** del módulo un M no nulo por

$$\dim M = \sup\{r \in \ \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r \text{ en } \operatorname{sop} M\}.$$

Ejercicio 12 *Suponga que M es noetheriano, luego* $\dim M = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{sop} M$ *es minimal*$\}$.

6.2 Anillos y módulos graduados

Sea $(G, +)$ un monoide conmutativo. Un **anillo** $G-$**graduado** es un anillo A tal que

1. $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$,

2. $A_g \cdot A_h \subset A_{g+h}$ para todo $g, h \in G$.

Los elementos de A_{g_o} son llamados **homogéneos de grado** g_0. Si $a = \sum_{g\in G} a_g \in A$, tal que cada $a_g \in G$, llamamos a_{g_0} la **componente homogénea** de grado g de a.
Observe que cada A_g es un A_0-módulo y A es una A_0-álgebra. Denotamos $A_+ = \bigoplus_{g\in G^\times}$, que es un ideal de A.

Lema 6 *Sea A un anillo $G-$graduado que es una A_0-álgebra finitamente generada. Sea M un $A-$módulo finitamente generado. Luego las componentes homogéneas de M son A_0-módulos finitamente generados y se anulan si n es pequeño.*

Un morfismo $\phi : A \to B$ entre anillos $G-$graduados es un **morfismo graduado** si $\phi(A_g) \subset B_g$.

Sea A un anillo $G-$graduado. Un $A-$módulo M es un $A-$**módulo graduado** si $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ tal que $A_g \cdot M_h \subset M_{g+h}$. Las definiciones de *elementos homogéneos*, *componentes homogéneas* y *morfismo graduado entre módulos graduados* son análogas a las anteriores.
Un N un submódulo de M es un $G-$**submódulo graduado** si $N = \bigoplus_{g\in G} N \cap M_g$.
En particular, un **ideal graduado** de A es un $A-$submódulo graduado de A.
Definimos el $A-$módulo graduado $M(d)$ como el $A-$módulo definido por $M(d)_g = M_{d+g}$ para todo $g \in G$.

Ejercicio 13 1. *Cocientes de módulos graduados son graduados, e inducen sequencias exactas corta de módulos graduados.*

2. *El radical de un ideal homogéneo es homogéneo.*

Ejemplo 11

Lema 7 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es homogéneo*

2. *$a \in I$ si y solo si cada componente homogénea de a está en I*

3. *I es generado por elementos homogéneos (posiblemente de diferentes grados).*

6.3 Polinomio de Hilbert-Samuel

Sea A un anillo $\mathbb{Z}-$graduado tal que

- A_0 un anillo artiniano,
- A es una A_0-álgebra finitamente generada.

Sea M un $A-$módulo graduado finitamente generado.

La **serie de Hilbert** de M está dada por

$$HS_M = \sum \operatorname{lon}(M_n)t^n.$$

Está bien definida pues M_0 es finitamente generado sobre A_0 (.), luego $\operatorname{lon}_{A_0} M_n < \infty$ (.).
Veremos que está función coincide con un polinomio cuando n es grande.

Teorema 32 (Hilbert-Serre) *Suponga que $M_n = 0$ para $n < n_0$ y $M_{n_0} \neq 0$. Luego existen $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, con $f(0) \neq 0$ y $k_i \geq 1$ tales que*

$$PH(t) = \frac{f(t)}{t^{-n_0}(1-t^{k_1})\cdots(1-t^{k_r})}$$

Corolario 7 *Si $A = A_0[x_1, \ldots x_n]$ con $x_i \in R_1$ entonces*

$$PH_M = \frac{e(t)}{t^{n_0}(1-t)^d}$$

donde $e(t) \in \mathbb{Z}$, $e(0), e(1) \neq 0$ y $r \geq d \geq 0$. Además, existe $h(n) \in \mathbb{Q}[n]$ de grau $d-1$ tal que

$$l_{A_0}(M_n) = h_M \text{ para } n \geq \operatorname{gr} e(t) + n_0.$$

6.4 Polinomio de Hilbert-Samuel

Una **filtración** $F^\bullet M$ de M es una cadena descendente infinita de submódulos $\cdots \supset F^n M \supset F^{n+1} \supset \cdots$.
Si $IF^nM \subset F^{n+1}M$ para todo n, es llamada ***I*-filtración**, y es I-estable si además existen i, j tales que $M = F^iK$ y $I^nF^jM = F^{n+j}$ para todo $n > 0$.

La **filtración $I-$ádica** está definida por $(I^nM)_{n\neq 0}$, definiendo $I^n = 0$ si $n \leq 0$. Claramente es estable.
Considere los anillos graduados

$$\mathcal{R}(I) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n \quad \text{and} \quad G_I(R) := \mathcal{R}(I)/(\mathcal{R}(I)(-1)) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$$

llamados el **álgebra de Rees (extendida)** de I y el **anillo asociado** a I, respectivamente. Note que G_I es una $(A/I)-$álgebra.

Ejercicio 14 *Si I es finitamente generado, entonces $\mathcal{R}(I)$ es una $A-$álgebra finitamente generada.*

Sea $F^\bullet M$ una $I-$filtración, considere los $A-$módulos

$$\mathcal{R}(F^\bullet M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F^nM \quad \text{and} \quad G(M) := \mathcal{R}(F^\bullet M)/(\mathcal{R}(F^\bullet M)(-1))$$

Note que $\mathcal{R}(F^\bullet M[m]) = \mathcal{R}(F^\bullet M)(m) \quad$ and $\quad G(M[m]) = (G(M))(m)$.

La **función de Hilbert-Samuel** está definida por

$$HS(F^\bullet M, t) := \sum_{n\geq 0} \ell(M/F^nM)\, t^n$$

cuando los coeficienes son finitos. Estaremos interesados en la filtracion ádica, en ese caso escribiremos $HS_{\mathfrak{q}}$.

Teorema 33 (Samuel) *A anillo noetheriano y M $A-$módulo fintamente generado. Sea I ideal de A. Luego*

$$HS_F(t) = \frac{e(t)}{t^{l-1}(1-t)^{d+1}}$$

donde $e(t) \in \mathbb{Z}[t]$ y $e(0), e(1) \neq 0$ y $l \in \mathbb{Z}$ y $r \geq d \geq 0$, además existe un polinomio $p \in \mathbb{Q}$ de grado d tal que $\operatorname{lon}(M/M_i) = p(n)$ para $n \geq \operatorname{gr} e(t) - l + 1$.

p es llamado **polinomio de Hilbert-Samuel**, denotado por $\lambda_F M(t)$. En el caso de la filtración $I-$ádica, será denotado por $\lambda_I M$

Corolario 8 (Relación entre polinomio de Samuel Hilbert) *En el caso anterior, si $\lambda_I(n) - \lambda_F(n) \neq 0$, es un polinomio de grado $\leq d-1$ y coeficiente principal positivo. Luego, d y $e(1)$ no dependen de la filtración escogida.*

Proposición 6 *Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una secuencia exacta de módulos noetherianos.*

1. $\operatorname{lon}(M/IM) < \infty \iff \operatorname{lon}(M'/IM') < \infty \iff \operatorname{lon}(M''/IM'') < \infty$.

2. *Si* $\operatorname{lon}(M/IM) < \infty$ *entonces*

$$\operatorname{gr}[\lambda_I M'(n) - \lambda_I M(n) + \lambda_I M''(n)] \leq \operatorname{gr} \lambda_I M'(n) - 1$$

   y tiene coeficiente principal positivo, además

$$\operatorname{gr} \lambda_I M(n) = \max\{\operatorname{gr} \lambda_I M'(n), \operatorname{gr} \lambda_I M''(n)\}$$

En el caso anterior, I es un **ideal paramétrico** de M
En el teorema anterior, $g(n)$ es llamado **polinomio de Hilbert** de M.

6.5 Teorema de la dimensión de Krull

Sea A un anillo, M noetheriano no nulo, I ideal paramétrico. Sea $\mathfrak{m} = \operatorname{rad} M$ y $J = \operatorname{Anu}(M/IM)$.

Lema 8 *$\lambda_I, \lambda_{\mathfrak{m}}$ existen y tienen el mismo grado, denotado por $d(M)$.*

Sea $s(M)$ el menor s tal que existen $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{m}$ tal que $\operatorname{lon}(M/\langle x_1, \dots, x_s \rangle M) < \infty$. Caso $\operatorname{lon} M < \infty$ definimos $s(M) = 0$. Esos elementos son llamados **sistema de parámetros** para M, y forman un ideal paramétrico.

Lema 9 *Sea A un anillo, M noetheriano no nulo semilocal, I un ideal paramétrico de M, sea x ....*

Teorema 34 (Krull) *Sea M un módulo noetheriano semilocal no nulo. Luego*

$$\dim M = d(M) = s(M)z\infty$$

Corolario 9 (para secuencias regulares) *sea $x \in \operatorname{rad} M$. Entonces*

$$\dim(M/xM) \geq \dim M - 1,$$

con igualdad si y solo si $x \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{sop} M$, con $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim M$ (en particular, si x no es divisor de zero)

Teorema 35 (Ideal de Krull) *Sea A un anillo noetheriano e I un ideal propio. Tenemos que, para todo ideal primo minimal de I, $\operatorname{alt} \mathfrak{p} \leq \delta(I)$.*

Corolario 10 *Para todo $(A, \mathfrak{m}, k)$, $\dim A \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

6.6 Multiplicidad

Por el corolario ... podemos definir la **multiplicidad** de I en M como ....

6.7 Complejos de Kozsul

Chapter 7

Herramientas categóricas

7.1 Localización de categorías

Chapter 8

Categorías Aditivas

Una **categoria pre-aditiva** es uma categoria tal que os $\mathrm{Hom}(A, B)$ possuem estrutura de grupo abeliano, e composição de morfismos é bilinear. Em particular, existem morfismos nulos.
Um funtor entra categorias preaditivas é **aditivo** se os mapas $F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ são homomorfismos de grupos.

Proposición 7 *Numa categoria pre-aditiva, tudo produto finito é um coproduto, e vice-versa (chamado de* ***biproduto****).*

Uma **categoria aditiva** é uma categoria pre-aditiva que admite biprodutos finitos. Em particular, os biprodutos vazios são objetos zero.

Uma **categoria abeliana** é uma categoria aditiva tal que:

1. Todo morfismo possui núcleo e conúcelo,
2. todo monomorfismo (resp. epimorfismo) é o kernel (resp. cokernel) de um morfismo.

Um **complexo** numa categoria aditiva $\mathcal{C}$ é uma sequência de objetos $\{X_j\}$

8.1 Objetos projetivos e injetivos

Um objeto Q numa categoria é **injetivo** se para todo monomorfismo $f : X \to Y$ e todo morfismo $g : X \to Q$ existe um morfismo $h : Y \to Q$ tal que $h \circ f = g$.
Uma categoria **tem suficientes injetivos** se para todo objeto X existe um monomorfismo $X \to Q$, com Q injetivo.

Um objeto P numa categoria é **injetivo** se para todo epimorfismo $e : E \to X$ e todo morfismo $f : P \to X$ existe um morfismo $h : P \to E$ tal que $e \circ h = f$.
Uma categoria **tem suficientes projetivos** se para todo objeto A existe um epimorfismo $P \to A$, com P projetivo.

Proposición 8 *Numa categoria abeliana,*

- *um objeto é injetivo se e somente se* $\mathrm{Hom}(\cdot, Q)$ *é exato*
- *um objeto é projetivo se e somente se* $\mathrm{Hom}(\cdot, Q)$ *é exato.*

8.1.1 Resoluciones

8.2 Categoría Trianguladas

8.2.1 La categoría homotópica

8.3 Categorías derivadas

Chapter 9

Complejos en Categorías aditivas

Chapter 10

Los funtores Ext y Tor

Teorema 36 (Serre) *Sea* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *noetheriano regular, tenemos que* $A_{\mathfrak{p}}$ *es regular para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Teorema 37 (Auslander-Buchsbaum) *Todo* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *noetheriano regular es un DFU.*

Corolario 11 *Todo dominio noetheriano regular es normal.*

10.1 Cohen-Macaulay

10.2 Condición Gorenstein

Chapter 11

Sequencias espectrales

Part III

K-Teoría

Chapter 12

sdfs