0 から始める数理論理学入門

野口匠

2023 年 12 月 31 日

はじめに

数理論理学は，ゲーデルの不完全性定理の存在もあってか世間一般の認知度は比較的高い．しかしながら，数理論理学の基本コンセプトである「論理を形式化してその性質を探っていく」という考え方は広く浸透しているとはいいがたい．特にゲーデルの不完全性定理は，なんとなく日常用語として理解できそうな言い回しや字面のインパクトの強さからか「ゲーデルは数学が万能とはなりえないことを証明した」だの「完璧な数学理論は存在しない」だのと意味不明な誤解が発生しがちである．とはいえ，最近では「これは誤解である」という認識自体は広まっており，状況は改善しつつあるといえる．

一方で，いわゆる「通常の数学理論」と比較すると数理論理学はあまり広く学ばれてはいないのが現状である．現在ではわかりやすい和書も多数出版されており，学ぶハードルはそれなりに低いけども，学んでいる人の数はほかの数学理論と比較すれば少ないと言わざるを得ないのではないだろうか．実際，数学をそれなりに学んでいる人であっても数理論理学については何も知らないという人が少なくない．数学を専門とせず，道具として使っている物理学や統計学を学んでいる人であればなおさらである．

しかし，特に数学を学んでいる人にとっては「論理記号」については身近だと感じる人は多い．彼らにとって論理記号は普段使っている数学記号と同じく「なんらかの数学的主張を表現したもの」であり，その認識のままで大きな問題が生じることはない．むろん数理論理学を学んだ人からすればその認識は厳密には誤りである．誤っている部分が数理論理学にとっても些事で

あればよいのだが，残念なことに論理を形式化するという数理論理学の基本的な方法について理解できていない致命的な誤りである．

本書はそのような誤解を払拭することを第一の目標とした．すなわち「論理を形式化する」ことがいったいどういうことなのかを実感をもって学ぶことが目標である．そのため，入門書で多く取り上げられているであろう数理論理学に関する結果の多くは取り上げない．特に不完全性定理については取り上げないので，それをめあてにして本書を手に取るとがっかりするであろう．その代わり，通常の数学理論との接点を多く紹介することで「論理の形式化」についての理解を深めたい．

とりわけ「$A \wedge B$ は A かつ B という意味」**ではない**というジャーゴンの意味が理解できれば目標達成である．このことが理解できれば，数理論理学の世界に飛び込む準備は完全に整ったといってよい．要するに，本書は数理論理学入門の前段階という位置づけで活用するとよい．本書の後，あるいは並行して読むことになるであろう 1 冊目の入門書としては前原 [1] や鹿島 [2] がおすすめである．数理論理学入門としての色が強いのは後者であるが，やや難しいと感じた場合には前者を読んでみるのもよいだろう．また，数理論理学が数学の一分野である以上，集合や写像といった「道具」の修得は欠かせない．本書でも説明抜きに用いている．自信がない人は嘉田 [3] を手に取るとよい．戸次 [4] は複数の形式的体系に触れることができるという点において読む価値が高い．また，ユークリッド幾何学の基礎づけについて気になる人は足立 [5] を，数の体系について知りたい人は田中 [6] を読むとよい．

本書の原稿やソースファイルは，以下の GitHub リポジトリにて閲覧可能である．

`https://github.com/enunun/introductiontomathmaticallogic`

執筆時間の関係で書ききれなかった内容や演習問題の解答は，ここに随時追加予定である．

2023 年 12 月 31 日

目次

第 1 章

論理の形式化

数理論理学が数学の一分野として成功を収めた要因のひとつとして，素朴的直観を伴わない形式的な記号列を主役に据えたことが挙げられる．ともすれば，このことは「数学で用いる論理について研究する分野」という一般的な認識と矛盾するように見えることだろう．実際，この「形式的な記号列」に関する議論の結果を根拠に我々が普段使っている「論理」について何かを主張したい場合，これらの間の橋渡しを行うのは主張したい当人の責任であり，数理論理学の諸定理がその橋渡しについて何かを保証してくれることはない．これは，理論物理学で得られた結果から現実世界について言及したり，統計モデルの性質をもとに現実で得られたデータ（あるいはその生成元）について言及したりする営みに非常によく似ている．

もし読者にこのような「それそのものではないが何らかの意味で関連性をもつと期待される概念の性質をもとに，目的の対象について議論する」という営みに親しみがあれば，本章の内容は極めて身近に思えるに違いない．そして，この手法が科学においていかに強力であるかを知っていれば，数理論理学の手法がいかに強力であるかも予想できるだろう．

§1.1　数学における論理

数学が世界的に広く学ばれていることが示すように，数学（および算数）を学ぶことは有益であるというのが一般的な認識である．「なぜ数学を学ぶのか」という問いの答えは個々人によってさまざまだろうが，少なくとも日本の数学教育学の分野では，数学教育の目的は

1. 陶冶的目的
2. 実用的目的
3. 文化的目的

の 3 つの観点から論じられるのが一般的である[*1]．このうち，実用的目的と文化的目的については字面から容易に想像できる通りの意味である．すなわち，実用的目的は教科教育の内容そのものの修得と実社会における活用を志向したものであり，文化的目的は文化としての学問を継承・発展させていくことを志向したものである．

一方で，1 つ目の陶冶的目的についてはやや聞きなれない言葉である．ここでの「陶冶」という言葉には「人の性質や能力を円満に育てること」という意味である．すなわち，陶冶的目的というのは人間形成や価値観・（教科教育の内容以外での）能力を養成することを志向したものである．具体例を挙げていけばキリがないが，「論理的思考力の養成」という目的は数学教育に明るくない人からでも頻繁に挙がるものである[*2]．なぜ数学を学ぶことで論理的思考力を養成できるのだと考えられているかといえば，「数学」と「論理」の間に切っても切れない深いつながりがあるからに他ならない．数学では，ある言明が「正しい」と主張したいとき，なぜそうなるのかということの説明，すなわち「証明」が求められる．

[*1] 念のため述べておくが，これは観点別評価とはまったく別の話である．

[*2] ちなみに，価値観的な側面では「合理性を重んじる態度の養成」が挙げられる．

例 1.1. 「6 は偶数である」という言明が正しいと主張したいとする．この言明は以下のように「証明」できる：

1. 「偶数」とは「2 の倍数，すなわち 2 の整数倍として表される整数」のことである．
2. $6 = 2 \times 3$ と表わされる．
3. 3 は整数である．
4. 6 は 2 の整数倍として表わされる．
5. 従って，6 は偶数である．

我々は例 1.1 のような議論でもって「6 は偶数である」という主張を「正しい」と認識する．そして例 1.1 のような議論ができないとき，我々は「それはおそらく正しくないのだろう」と認識する[*3]．また，数学においてはこの「証明」からあいまいさを極力排除することを求めるのも特徴的である．

例 1.2. 「円と楕円は位相同型である」という言明が正しいを主張したいとする．しかし，以下のような議論は通常「証明」とは認められない：

1. 2 つの図形が位相同型であるというのは，一方を連続的に変形して他方と一致させることができることをいう．
2. 円を少しつぶすことで楕円と一致させることができる．
3. よって，円と楕円は位相同型である．

位相同型というものがどういうものか知らずとも，例 1.2 のような議論が「うさんくさい」ことに気づくであろう[*4]．例えば，

- 「連続的に変形」とはいったい何をどうすることなのか

[*3] 「誰がどうやってもこのような議論はできないのだ」ということを主張したければ，そのこともまた「証明」が求められる．

[*4] このような体験をもとにして「数学では厳格な証明のみが許容されるのだ」などとは思ってはいけない．むしろ，例 1.2 のような素朴的直観を精密化することによって厳格な証明を与えることも多い．許容されないのは，このようなラフな議論によって正しさの検証が完全に完結したかのように考えることである．

- 「少しつぶす」とはいったい何をどうすることなのか

あたりであろう．いずれも議論の中で使われている言葉の定義にあいまいさがあることに起因している．

言葉の定義にあいまいさがあること以外に，数学においては不適切であるとみなされる「証明」の例も挙げよう．

例 1.3. 「すべての整数 n に対して，整数 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である」という言明が正しいと主張したいとする．しかし，以下のような議論は通常「証明」とは認められない：

1. $n = 2$ とする．$n^2 = 4$ を 3 で割った余りは 1 である．
2. $n = 11$ とする．$n^2 = 121$ を 3 で割った余りは 1 である．
3. $n = 30$ とする．$n^2 = 900$ を 3 で割った余りは 0 である．
4. 以上より，「すべての整数 n に対して，整数 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である」ことが確かめられた．

例 1.3 での議論では，それぞれの場面で言葉の定義があいまいさがある場所はなかった．この議論が不適切であるとみなされるのは，ひとえに検証が不十分であることが要因である．整数というのは無限に多く存在するのにもかかわらず，$2, 11, 30$ の 3 つでしか検証していない．残りの整数に対して一切言及していないにもかかわらず，あたかもすべての整数に対して検証が終わったかのように議論を進めていることが問題である．これらの実験は，もとの言明の「正しさの根拠」とはなりえない[*5]．すべての整数に対してもれなく検証を終えて初めて正しさが検証されたといえる[*6]．

[*5] 当然のことであるが，正しさの根拠にならないからといって「これらの実験は無価値である」などと思ってはいけない．このような実験は，数学という広大な世界を渡り歩いていくうえで学術的・教育的に極めて高い価値を有する．学習者にとって対象が未知であればなおさらである．

[*6] 愚直に行うのは当然不可能なので，検証には別の方法を考える必要がある．ポピュラーなのは，特定の整数に限定しない一般的な整数 n を「任意に」とって，この n に対してだけ主張の正しさを検証することである．

以上のように数学と論理との関係について振り返ってみると，例えば次のような疑問が浮かび上がってくる：

1. 我々は，数学において「正しい」ことと「証明できる」ことを自然に同一視してしまっているが，それは適切なのだろうか？
2. 我々は，数学における議論の進め方に適切なものとそうでないものがあることを知っている．その境界になっているものは何か？
3. 数学における論理について，通常の数学と同じように何か一般的な法則や定理を見いだせないだろうか？

これらの問いに完全な解答を与えるのは極めて困難であろう．何を主張しても「そういう意見もあるよね」程度の立ち位置に落ち着いてしまいそうである．「証明」や「正しさ」の意味するところがあいまいであることが解答の難しさに拍車をかけている．

数理論理学では，このあいまいさに対して一定の解決策を見出すことができる．それは「論理そのものに対して直接議論することはせず，代わりに形式的な記号列について議論すること」である．これがいったいどういうことなのかを次節以降で学んでいく．

§1.2　記号論理学

数学では，議論したい対象を表現するために記号を用いることが多い．そして，記号化は単なる略記というだけでなくそれが意味するところを明確にするという役割も担うことがある．典型的なのは文字である．

例 1.4. 「2」や「3」などのような特定の整数に対してではなく一般の整数に対して議論したいとき，「整数 n」のように記号を用いて対象の整数を表現することが多い．「2」や「3」のような具体的な整数を表現する「数字」ではなく特に取り決めのない「文字」を使用することにより，「いまは特定の整数に限らない一般論を展開しているのだ」という意図がはっきりする．むろん

「どんな整数に対しても」のように記号を使わず言葉で述べてもよいが，文章を書くのが相当に面倒になることは想像に難くない．

例 1.4 と同じことを数学における論理でも行うことを考える．すなわち，「正しい」であったり「証明できる」という言葉の代わりに何らかの記号を用いるのである．しかし，これでは単なる略記にしかなっておらず，あいまいさに対する解決策にはなっていない．「何らかの主張 A が正しいことを〇〇を表す」とか「Γ から B が証明できることを〜と表す」などと書いたところであいまいさが何一つ解消されてはいない．これでは § 1.1 の最後で述べた問いへの解答とはなりえない．

ここで視点を変えて，「その記号は何らかの意味を有しているとは考えず，ただそこにあるのみである」と考えてみよう．「2」や「3」という「数字」は我々にとって具体的な「数」を表すための記号であるが，それはそれとして単に「2」や「3」のような形をした記号であるととらえることもできる．

例 1.5. 3 つの記号 $2, 3, +$ を書き並べた「$2+3$」という記号列を考える．素朴にはこの記号列を「これは 2 と 3 の和で 5 を表す」のように言いたくなるが，これを単なる記号列であると考える文脈においてはそのようなことはいえない．そもそも「5」という記号すら登場してはいないのである．この文脈においては，『記号「5」は記号列「$2+3$」の略記であると定義する』というように明示的に定義する必要がある．

例 1.5 のような議論を数学における論理についても適用してみよう．

例 1.6. 「Γ から A を証明できる」と解釈できることを期待して，「$\Gamma \Rightarrow A$」という記号列を導入する．この時点では，「$\Gamma \Rightarrow A$」という記号列は単にそういう記号列であるというのみであり，「Γ から A を証明できる」などという意味は有していない．ただ単に我々がそう期待しているだけである．

このような記号の中で，数学的主張を構成するために使用される記号を特

に**論理記号**と呼ぶことがある[*1]．本書で扱う論理記号の一覧を表 1.1 に示す．

表 1.1　本書で登場する論理記号の一覧とその記号についての素朴的直観

記号	素朴的直観	通常の数学における使用例
$\bot$	矛盾	$\bot$：矛盾する
$\neg$	否定	$\neg A$：A でない
$\wedge$	連言（かつ）	$A \wedge B$：A かつ B
$\vee$	選言（または）	$A \vee B$：A または B
$\to$	含意（ならば）	$A \to B$：A ならば B
$\forall$	全称（すべて）	$\forall x\varphi$：すべての x に対して φ
$\exists$	存在	$\exists x\varphi$：φ となる x が存在する

$\forall$ や $\exists$ のような論理記号は，現代的にはこのような直感を捨てて純粋な記号列に対する議論であることを明示するために導入される．従って，『「$\forall x\varphi$」は「すべての x に対して φ」という意味である』のような言明は厳密には誤りであり，しかもその誤りは本質的なものである[*2]．

このような立場に立つと，数学で使う論理にかかわるさまざまな概念が素朴的直観の伴わない形式的な記号列やそれに対する操作として「翻訳」できることに気づく．そして，そのような「記号列への操作ゲーム」が有する性質を調べるのは数学が得意とするところである．数理論理学も発展して久し

[*1] 「論理記号」という言葉は「論理に関連した記号」程度の意味合いで雑に使われがちな言葉であり，数学者の間で共通認識があるわけではないようである．実際，$\forall$ と $\exists$ は**量化子**と呼ばれることもある．「論理記号」の定義がないと困る場合にはその場で定義して使うようにすればよい．

[*2] 特に数理論理学と関係ない分野では，そのように導入したところで不都合は生じない．リアルタイム性が要求されるセミナーや講義の場等では書く文字数が少ない論理記号は便利である．一方で，数理論理学がこれだけ市民権を得ていることを考えれば，数学を専門とする人くらいは論理記号が単なる略記表現でないことを認識しておくべきであろう．その上で，時間の節約という目的であえて濫用するのであれば，そのことについてはまったく問題ないと考えられる．

く，現在ではさまざまな流儀や理論が存在するが，本書では数学で使う論理にかかわるさまざまな概念を形式的な記号列やそれに対する操作として「翻訳」する作業を体験することを目的とし，次章以降では話題を相当に絞って解説する．数理論理学の広大な世界については，他の本を参照されたい．

§1.3　メタとオブジェクト

数理論理学では，形式的な記号列やその操作に関する数学的性質を研究する．このとき，集合や写像といった数学での道具は通常通り使用する．これは，形式的記号列の世界の中で構成した「集合論」の性質を研究する場合でも変わらない．循環論法になっているかのように思えるが，研究対象は集合論そのものではなくそれを模した形式的記号列への操作ゲームなのだから，循環論法になっているわけではない．一方で，そのような議論の中では自分が今どちらの立場なのか混乱しがちである．

本書では形式的記号列の世界での「集合論」は取り扱わないが，等号「=」については取り扱う．形式的記号列の世界でも等号が登場するので，容易に区別をつけるために我々が普段使っている等号の方を

$$\equiv \tag{1.1}$$

のように書き表しておくこととする．2 つの記号列 s, t に対する「$s \equiv t$」は「s と t が（順序も含めて）まったく同じ記号列である」ことを示す．

上記のように，議論の対象として登場する理論や言語を**オブジェクト**側であるといい，議論のために用いている理論や言語を**メタ**側であるなどということがある．形式的記号列の世界での「集合論」を扱う文脈では，その形式的記号列の世界での「集合論」がオブジェクト側であり，研究のための道具として用いている集合論がメタ側である．

以降，本書では扱う記号がメタ側なのかオブジェクト側なのかを明示することを目的として，オブジェクト側での記号はタイプライタ体で「$\mathtt{x}$」のように表し，メタ側での記号は通常通り「x」のようにイタリック体で表す．

第 2 章

1 階述語論理の統語論

本章では，1 階述語論理と呼ばれる体系の統語論について述べる．統語論とは，雑に述べると「文の構造」についての理論である．この「文」は，ここでは「数学における何らかの主張」に対応する．つまり，ここで議論したいのは「数学における何らかの主張はどのような要素がどう組み合わさってできているのか」ということである．このことを議論するための足掛かりとして，我々は第 1 章で述べた方針に従い「何ら素朴的直観が関与しない形式的な記号列の世界」において論理式という概念を構成していく．

形式的記号列の世界での定義により，何を議論の対象とし，何を議論の対象としないのかが明瞭となる．これにより，通常の数学と同じく一般的な法則や定理を研究することが可能となる．本章の内容はその前準備に相当する．

§2.1　言語

議論を始めるにあたり，どのような記号を使用するのかを明瞭にする必要がある．まず，通常の数学においてはどうなっているかを振り返ろう．

例 2.1. 群論においては，単位元を表す記号「e」，2 項演算を表す記号「$*$」，逆元を表す記号「$^{-1}$」が用いられる．また，順序の理論においては，順序を表す記号「$\leq$」が用いられる．

この他，「x」や「y」等の変数を表す記号やカッコ「(」「)」やカンマ「,」等は共通して用いられる．

例 2.1 では，対象の理論に依存して必要であったりそうでなかったりする記号と共通して用いられる記号があった．そのような記号を表 2.1 に示し，今後逐一言及しないものとする[*1]．

表 2.1　数学理論で共通して用いられる記号

種別	一覧	備考
変数記号	$\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$	無限に多く存在する（可算無限）
論理記号	$\perp, \neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$	
等号	$=$	オブジェクト側の意味での等号
補助記号	“(”, “)”, “,”	カッコやカンマ

「名称」列に「変数記号」や「論理記号」等の名前が定義なしに入っているが，これは単にそういう区分けができることのみが要請される．また，変数記号については無限に多く存在することが要請されているが，これについて

[*1] ここに示す記号とは違う記号を採用する場合もあるが，それは単に流儀や議論の対象の違いである．その違いによって質的に大きな差異が生じることもあればそうでないこともある．

はすでにいくつか記号が登場している状況下においてそのいずれとも異なる変数記号をいつでも用意できることを期待しての要請である．

さて，表 2.1 に追加で記号を付け加えることにより，各理論の特色が現れる．

定義 2.2. 記号の集合 $\mathscr{L}$ が**言語**であるとは，$\mathscr{L}$ の元が以下の 3 種類に区分けされていることをいう：

- 定数記号
- 関数記号，**アリティ**と呼ばれる正の整数 n をもつ
- 関係記号，アリティと呼ばれる正の整数 n をもつ

「定数記号」や「関数記号」という字面はいかにも我々の素朴的直観を呼び起こしそうであるが，ここでは単にそういう名称で区分けできるということだけを要請しているに過ぎない．アリティについても同様である．「この関数記号のアリティはいくつですか？」に対して「2 です」のような解答を返せることを要請しているに過ぎない．

言語については，例を述べるのがわかりやすいだろう．

例 2.3. 群論の言語 $\mathscr{L}_1$ は $\mathscr{L}_1 \equiv \{\ast, \mathsf{e}, {}^{-1}\}$ と与えることができる．ここで，$\ast$ はアリティ 2 の関数記号，e は定数記号，${}^{-1}$ はアリティ 1 の関数記号である．また，順序の理論の言語 $\mathscr{L}_2$ は $\mathscr{L}_2 \equiv \{\leq\}$ と与えることができる．ここで，$\leq$ はアリティ 2 の関係記号である．

アリティというのは，素朴的直観における「引数の数」の対応物だと考えられる．こう考えてみれば，関数記号や関係記号にアリティが定まっていることを要請するのはごく自然であろう．

§2.2　項と論理式

使う記号を定義したことで，これらを組み合わせて「モノ」や「主張」に相当する概念を構築していくことができる．これは言語に対してある種の「文法」を定めることに相当する．文法を定めることにより，形式的記号の集合でしかなかった言語が一気に「数学っぽい」性格を帯びてくる．

定義 2.4. 言語 $\mathscr{L}$ に対し，$\mathscr{L}$ 項を以下のように帰納的に定義する：

1. 変数記号は $\mathscr{L}$ 項である．
2. 定数記号は $\mathscr{L}$ 項である．
3. f が $\mathscr{L}$ におけるアリティ n の関数記号であり[*1]，$t_1, t_2, \dots, t_n$ が $\mathscr{L}$ 項であるならば，記号列
$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) \tag{2.1}$$
は $\mathscr{L}$ 項である．
4. 以上の規則を有限回適用して得られるもののみが項である．

定義 2.4 で特徴的なのは，「項とは〇〇であるものをいう」などのような直接的な定義ではなく「変数記号と定数記号からどのようにして項全体が得られるか」という構成方法を述べていることである．何が項で何が項でないかが明確に定まっているため，この定義は定義として正当なものである．定義 2.4 で行ったような「ベースとなる対象から定義したい対象がどのように構成されるかを述べる」形式でなされる定義を**帰納的定義**，あるいは**再帰的定義**という．最後に「以上の規則を有限回適用して得られるもののみが」と宣言することで，上記の手続きで得られないものはすべてその定義からは外れていることを宣言し，対象の範囲を確定させている．この宣言がないと，実際に定義したいものよりも広い範囲の対象が定義から外れることが明文化

[*1] ここで f がイタリック体なのは，「f」という記号そのものが $\mathscr{L}$ の関数記号というわけではなく $\mathscr{L}$ の関数記号のうちのどれかであるということを明示することを意図している．

されない[*2]．とはいえ，帰納的定義を行う上でこの宣言が必要なくなることはありえないので，自明であるとして省略されることも多い．

例 2.5. 例 2.3 で述べた群論の言語 $\mathscr{L}_1$ において，$*\bigl(\mathrm{x},\mathrm{y}\bigr),\mathrm{e},*\bigl(*(\mathrm{e},\mathrm{x}),\mathrm{y}\bigr)$ はいずれも $\mathscr{L}_1$ 項である．ここで，x,y は変数記号である．なお，順序の理論の言語 $\mathscr{L}_2$ は定数記号も関数記号ももたないため，$\mathscr{L}_2$ 項は変数記号のみである．

演習 2.1. 定義 2.4 に基づき，例 2.5 における「$*\bigl(*(\mathrm{e},\mathrm{x}),\mathrm{y}\bigr)$」が $\mathscr{L}_1$ 項であることを確かめよ．また，記号列「$\mathrm{e}*(\mathrm{e},\mathrm{e})$」が $\mathscr{L}_1$ 項でないことを確かめよ．

定義 2.6. 言語 $\mathscr{L}$ に対し，$\mathscr{L}$ 論理式を以下のように帰納的に定義する：

1. $\perp$ は論理式である．
2. t_1,t_2 が $\mathscr{L}$ 項であるならば，記号列
$$\bigl(t_1=t_2\bigr) \tag{2.2}$$
は $\mathscr{L}$ 論理式である．
3. r が $\mathscr{L}$ におけるアリティ n の関係記号であり[*3]，$t_1,t_2,\dots,t_n$ が $\mathscr{L}$ 項であるならば，記号列
$$r\bigl(t_1,t_2,\dots,t_n\bigr) \tag{2.3}$$
は $\mathscr{L}$ 論理式である．

[*2] 例えば，偶数全体の集合 A を「$0\in A$ であり，$n\in A$ ならば $n+2\in A$ かつ $n-2\in A$ である」などとして定義しようとしたとき，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ もカギカッコ内の条件自体は満たしている．

[*3] 定義 2.4 のときと同様の理由で r はイタリック体としている．

4. φ, ψ が論理式で x が変数記号であるならば，記号列

$$(\neg\varphi), \tag{2.4}$$
$$(\varphi \wedge \psi), \tag{2.5}$$
$$(\varphi \vee \psi), \tag{2.6}$$
$$(\varphi \to \psi), \tag{2.7}$$
$$(\forall x \varphi), \tag{2.8}$$
$$(\exists x \varphi) \tag{2.9}$$

   はいずれも $\mathscr{L}$ 論理式である．

5. 以上の規則を有限回適用して得られるもののみが論理式である．

例 2.7. 群論の言語 $\mathscr{L}_1$ において，$\big(*(\mathrm{x},\mathrm{y}) = *(\mathrm{y},\mathrm{x})\big)$ は $\mathscr{L}_1$ 論理式である．また，順序の理論の言語 $\mathscr{L}_2$ において，$\big(\forall \mathrm{y} {\leq}(\mathrm{x},\mathrm{y})\big)$ や $\big(\forall \mathrm{x}\big(\forall \mathrm{y} {\leq}(\mathrm{x},\mathrm{y})\big)\big)$ はいずれも $\mathscr{L}_2$ 論理式である．ここで，x, y は変数記号である．

論理式でない記号列の例も挙げておこう．

例 2.8. 言語 $\mathscr{L}$ において，x が変数記号であるとき，記号列 $\big(\exists \mathrm{x}(\mathrm{x})\big)$ は $\mathscr{L}$ 論理式ではない．一方で，$\big(\exists \mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{x})\big)$ は $\mathscr{L}$ 論理式である．また，群論の言語 $\mathscr{L}_1$ において，$\big(\forall x(\mathrm{x} * \mathrm{e} = \mathrm{x})\big)$ や $\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{x})$ はいずれも**定義 2.6 で述べた意味においては** $\mathscr{L}_1$ 論理式ではない．

演習 2.2. 定義 2.6 に基づき，例 2.7 と例 2.8 で挙げた各式について，それが実際に論理式であることやそうでないことを確かめよ．

注意 2.9. 例 2.8 の後半で「定義 2.6 で述べた意味においては」と述べたのは，それなりに妥当性のある略記表現に関する約束事を適切に定めることにより，これらが論理式であるようにみなせるからである．例えば，以下のように約束することが多い：

- 対象の論理式がどのようにして構成されたかにあいまいさが生じない範囲でかっこは省略してよい．

- 論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ たちの結合の優先順位については，$\neg, \forall, \exists$ がもっとも高く，次に $\wedge, \vee$ が高く，もっとも低いのが $\to$ であると約束する．
- アリティ 2 の関数記号や関係記号については，$\mathtt{x} * \mathtt{y}$ や $\mathtt{x} \leq \mathtt{y}$ のようにその記号が真ん中に来るように配置して表記してよい．

こうすると，$\Bigl(\bigl(\varphi \wedge (\neg\psi)\bigr) \to \xi\Bigr) \equiv \varphi \wedge \neg\psi \to \xi$ のように見やすくできる[*4]．これは，通常の数学における数の演算において，$\times$ が $+$ よりも優先度が高いとみなして $\bigl((2 \times 3) + 4\bigr) \equiv 2 \times 3 + 4$ と略記することで可読性の向上を図るのとまったく同じである．とはいえ，これは人間が目で見る際に楽をするための約束事であって，数学的な議論の帰結ではないことに注意しておこう．本書でも，これらの略記表現を積極的に利用する．

注意 2.10. ここまで「言語 $\mathscr{L}$ において」とか「$\mathscr{L}$ 項」のように，用いる言語を明示して議論を進めてきた．しかし，以下で行われるのは特定の言語に依存しない議論がほとんどである．そのため，特に断りがない限りは「言語 $\mathscr{L}$」の表記は省略することとする．「$\mathscr{L}$ 項」や「$\mathscr{L}$ 論理式」は単に「項」や「論理式」と呼称する．

§2.3　変数の出現と代入可能性

　数学においては，一般論に具体例を当てはめることによって議論を進めることが多い．これの形式的記号列の世界での対応物は，項や論理式に登場する変数記号に別のものを当てはめることである．この操作を定式化するためには，いくつかのステップを踏む必要がある．なお，正確に書くとそれなりに議論が長くなるため，以下では相当にラフに記述していることに注意され

[*4] 記号列として異なるように見えるものに対してどうして $\equiv$ が使われているかというと，「後者は前者の略記だと約束したので同じであるとみなす」ということを主張するためである．これは $(2 + 3) \equiv 2 + 3$ が妥当であることと全く同じ理屈である．

たい．ラフな部分はいずれも帰納的定義によって精密化できる．

定義 2.11. 論理式

$$\varphi \equiv \Big(\cdots \big(\forall x(\cdots x \cdots) \cdots\big)\Big),$$
$$\psi \equiv \Big(\cdots \big(\exists x(\cdots x \cdots) \cdots\big)\Big)$$

の変数記号 x のように，$\forall, \exists$ とともに出現している変数記号はその論理式に**束縛出現**しているといい，$\forall, \exists$ をともなわずに出現している変数記号はその論理式に**自由出現**しているという．また，論理式 φ に束縛出現する変数記号全体の集合と φ に自由出現する変数記号全体の集合を，それぞれ

$$\mathrm{BV}\big(\varphi\big), \tag{2.10}$$
$$\mathrm{FV}\big(\varphi\big) \tag{2.11}$$

と表す．さらに，項 t に出現する変数記号全体の集合を

$$\mathrm{Var}(t) \tag{2.12}$$

と表す．$\mathrm{FV}\big(\varphi\big) \equiv \emptyset$ であるような論理式 φ は**閉論理式**，あるいは**文**と呼ぶ．$\mathrm{Var}(t) \equiv \emptyset$ となる項 t は**閉項**であるという．

注意 2.12. 言語 $\mathscr{L}$ を明示する文脈においては閉論理式や文，閉項はそれぞれ $\mathscr{L}$ 閉論理式，$\mathscr{L}$ 文，$\mathscr{L}$ 閉項と呼ぶ．

例 2.13. 群論の言語 $\mathscr{L} \equiv \{\, *, \mathtt{e}, {}^{-1} \,\}$ において，論理式

$$\varphi \equiv \bigg(\forall \mathtt{a}\Big(\forall y\Big(*\big(\mathtt{x}, \mathtt{y}\big) = *\big(\mathtt{y}, \mathtt{x}\big)\Big)\Big)\bigg)$$

に対しては

$$\mathrm{BV}\big(\varphi\big) \equiv \{\, \mathtt{a}, \mathtt{y} \,\},$$
$$\mathrm{FV}\big(\varphi\big) \equiv \{\, \mathtt{x} \,\}$$

が成り立つ．この $\mathtt{a}$ のように，$\forall, \exists$ 記号の直後でのみ出現する変数記号も束縛出現するとみなす．

以上の準備のもと，代入操作を定式化したいのだが，先に代入可能性について論ずる必要がある．

定義 2.14. φ を論理式，x を変数記号，t を項とする．以下の 2 条件をともに満たす変数記号 y が存在するとき，t は φ 中の x に**代入不可能**であるといい，そのような y が存在しないとき，t は φ 中の x に**代入可能**であるという：

- φ が $\bigl(\cdots\bigl(\forall y(\cdots x\cdots)\cdots\bigr)\cdots\bigr)$ か $\bigl(\cdots\bigl(\exists y(\cdots x\cdots)\cdots\bigr)\cdots\bigr)$ の形の論理式である．ただし，この x は φ に自由出現しているものとする．
- $y \in \mathrm{Var}(t)$ である．

代入可能性については，例を見るのが手っ取り早い．

例 2.15. 群論の言語 $\mathscr{L} \equiv \{\,*, \mathtt{e}, {}^{-1}\,\}$ において，論理式

$$\varphi \equiv \Bigl(\forall \mathtt{a}\Bigl(\forall \mathtt{y}\Bigl(*\bigl(\mathtt{x}, \mathtt{y}\bigr) = *\bigl(\mathtt{y}, \mathtt{x}\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr)$$

中の $\mathtt{x}$ に項 $*\bigl(\mathtt{y}, \mathtt{e}\bigr)$ は代入不可能である．一方で，$\mathtt{x}$ に項 $\mathtt{e}$ は代入可能である．また，$\mathtt{a}, \mathtt{y}$ だけでなく φ に出現しない変数記号すべてに対してあらゆる項が代入可能である．

定義 2.16. 論理式 φ 中の変数記号 x に項 t が代入可能であるとき，φ に自由出現している x すべてを t に置き換えて得られる論理式を

$$\varphi\bigl[t/x\bigr] \tag{2.13}$$

と表す．

例 2.17. 定義 2.15 における φ において

$$\varphi\bigl[\mathtt{e}/\mathtt{x}\bigr] \equiv \Bigl(\forall \mathtt{a}\Bigl(\forall \mathtt{y}\Bigl(*\bigl(\mathtt{e}, \mathtt{y}\bigr) = *\bigl(\mathtt{y}, \mathtt{e}\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr)$$

である．また，$\varphi\bigl[\mathtt{e}/\mathtt{a}\bigr] \equiv \varphi\bigl[\mathtt{e}/\mathtt{y}\bigr] \equiv \varphi$ である．

§2.4　理論

前節までは項や論理式に関する一般論を述べた．ここでは，実際の数学理論がどう形式化されるかについて少しだけ触れる．

定義 2.18. $\mathscr{L}$ を言語とするとき，$\mathscr{L}$ 文からなる集合を $\mathscr{L}$ **理論**という．言語 $\mathscr{L}$ を明示しない文脈では $\mathscr{L}$ 理論は単に理論と呼ばれる．

例 2.19. 群論の言語 $\mathscr{L} \equiv \{ *, \mathsf{e}, {}^{-1} \}$ において，群の理論は次の 3 つの文からなると考えることができる：

1. $\forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y} \forall \mathsf{z} \big((\mathsf{x} * \mathsf{y}) * \mathsf{z} = \mathsf{x} * (\mathsf{y} * \mathsf{z}) \big)$,
2. $\forall \mathsf{x} (\mathsf{e} * \mathsf{x} = \mathsf{x})$,
3. $\forall \mathsf{x} \big(\mathsf{x}^{-1} * \mathsf{x} = \mathsf{e} \big)$.

ここで，${}^{-1}(\mathsf{x})$ を x^{-1} と略記した．

演習 2.3. 群の言語を $\mathscr{L} \equiv \{ * \}$ だと考えて，群の理論を次のように書き下そうとする場合がある．

1. $\forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y} \forall \mathsf{z} \big((\mathsf{x} * \mathsf{y}) * \mathsf{z} = \mathsf{x} * (\mathsf{y} * \mathsf{z}) \big)$,
2. $\exists \mathsf{e} \forall \mathsf{x} (\mathsf{e} * \mathsf{x} = \mathsf{x})$,
3. $\forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \big(\mathsf{y} * \mathsf{x} = \mathsf{e} \big)$.

しかし，残念ながらこの書き下し方は構文的に不適切である．その理由を述べよ．

第 3 章

1 階述語論理の証明論

この章では，いよいよ「証明」という概念の形式化を試みる．第 2 章で定義された論理式は，数学における何らかの主張の形式的記号列の世界での対応物であった．数学における「証明」は，形式的記号列の世界においてはある論理式から別の論理式を得る操作に対応する．どのような操作を妥当なものとして認め，それをどのような記法で書き下すかによって多種多様な体系が得られる．本書では，その中から自然演繹式シークエント計算と呼ばれる体系を取り上げる．

§3.1　シークエント

自然演繹式シークエント計算において基本的なのは，シークエントと呼ばれる記号列である．

定義 3.1. 0 個以上の論理式の有限列 Γ と論理式 φ に対して，記号列

$$\Gamma \Rightarrow \varphi \tag{3.1}$$

を**シークエント**という．このとき，Γ をこのシークエントの左辺，φ をこのシークエントの右辺という．

例 3.2. 論理式 φ に対して，

$$\varphi \Rightarrow \varphi$$

という記号列はシークエントである．この形のシークエントを**始式**と呼ぶ．また，左辺に何もない

$$\Rightarrow \varphi,$$

といった記号列もシークエントである．

シークエント「$\Gamma \Rightarrow \varphi$」は，通常の数学における「$\Gamma$ という仮定によって φ を証明することができる」という主張の形式的記号列の世界での対応物であることを期待して導入されたものである．左辺に何もないシークエント「$\Rightarrow \varphi$」は，何も仮定せずとも φ が証明できること，すなわち「φ は証明できる」ことの形式的記号列の世界での対応物であることが期待される．以下で行われるのは，このシークエントを操作していくルールをうまく定義して「証明っぽいもの」を作り上げていくことである．

§3.2　公理と推論規則

通常の数学においては，議論の出発点となる主張，すなわち公理を用意し，そこから演繹的推論を重ねていくことによってさまざまな結果を得る．

自然演繹式シークエント計算においては，出発点となるシークエントから特定の操作を行うことによってさまざまな結果を得ることになる．このとき，出発点となるシークエントのことを**公理**と呼ぶ[*1]．また，あるシークエントから別のシークエントを得る操作をいくつか列挙し，それを使って議論を進めていく．この時に列挙した操作のことを**推論規則**と呼ぶ．以下に自然演繹式シークエント計算で用いる公理と推論規則の一覧を述べる．

公理や推論規則は，シークエントを横や縦に並べた

$$\text{(name)}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Sigma \Rightarrow \xi}$$

のような形式で記述される．「(name)」は規則名である．この記述は「上側に記述されているシークエントがすべて得られたら下段のシークエントを得てよい」という意味ととらえてよい．上段に何も書かれていない場合もあり，それが公理である．

定義 3.3 (公理)**.** 論理式 φ と項 t に対して，以下は自然演繹式シークエント計算における公理である：

$$\text{(ID)}\ \frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi} \qquad\qquad \text{(REFL)}\ \frac{}{t = t}$$

推論規則名になっている「ID」と「REFL」は同一律（law of identity）と反射律（reflexive law）に由来する．

推論規則の数はそれなりに多いので，いくつかのグループに分けて述べる．なお，定義 3.4 における推論規則名「w」「e」「c」はそれぞれ弱化（weakening），交換（exchange），縮約（contraction）に由来する．

定義 3.4 (構造規則)**.** 論理式の有限列 Γ, Δ と論理式 φ, ψ, ξ に対し，下記の 3 つは自然演繹式シークエント計算における推論規則である．

[*1] ここでいう「公理」は自然演繹式シークエント計算という証明体系そのものの出発点となるシークエントであり，個々の理論の基礎となる主張のことではない．通常の数学における「公理」に対応するのは閉論理式の集合である．

$$(\mathrm{w})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \xi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \xi} \qquad (\mathrm{e})\ \frac{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \Rightarrow \xi}{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \Rightarrow \xi} \qquad (\mathrm{c})\ \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \xi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \xi}$$

論理記号に関する推論規則を述べる．推論規則名の「I」や「E」はそれぞれ導入（Introduction）と除去（Elimination）に由来する．例えば，「∧I」は右辺に ∧ 記号を新しく導入する推論規則であり，「∧E」は右辺から ∧ 記号を除去するような推論規則である．すべての推論規則が導入と除去の対になっていることに着目しよう．我々の素朴的直観において導入規則と除去規則はそれぞれ「その論理記号を含む論理式に対応する主張を結論として得るためのルール」「その論理記号を含む論理式に対応する主張が得られた場合に行える推論を表すルール」に対応する．

定義 3.5 (論理規則その 1). 論理式の有限列 Γ, Δ, Σ と論理式 φ, ψ, ξ に対して，下記は自然演繹式シークエント計算における推論規則である．

$$(\to\mathrm{I})\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi} \qquad (\to\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Delta \Rightarrow \varphi \to \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi}$$

$$(\wedge\mathrm{I})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \qquad (\wedge\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \varphi_i}\ (i \equiv 1, 2)$$

$$(\vee\mathrm{I})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_i}{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (i \equiv 1, 2)$$

$$(\vee\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi \qquad \varphi, \Delta \Rightarrow \xi \qquad \psi, \Sigma \Rightarrow \xi}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow \xi}$$

定義 3.6 (論理規則その 2). 論理式の有限列 Γ, Δ と論理式 φ, ψ および変数記号 x, a に対して，下記の 4 つは自然演繹式シークエント計算における推論規則である．ここで，a は φ 中の x に代入可能であるものとする．

$$(\forall\mathrm{I})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi[a/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x \varphi} \qquad (\forall\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \forall x \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi[a/x]}$$

ただし，a は Γ 中の各論理式や φ に
自由出現しない．

$$(\exists\mathrm{I})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi[a]x}{\Gamma \Rightarrow \exists x\varphi}$$

$$(\exists\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \exists x\varphi \qquad \varphi[a/x], \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi}$$

ただし，a は Γ, Δ 中の各論理式と $\exists x\varphi, \psi$ のいずれにも自由出現しない．

定義 3.7 (論理規則その 3)**.** 論理式の有限列 Γ と論理式 φ について，下記は自然演繹式シークエント計算における推論規則である．

$$(\neg\mathrm{I})\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi} \qquad (\neg\mathrm{E})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \neg\varphi}{\Gamma \Rightarrow \bot}$$

等号に関する推論規則も必要である．ここで，規則名「SUBST」は代入（substitution）に由来する．

定義 3.8 (等号に関する推論規則)**.** φ を論理式，x を変数記号，s, t を φ 中の x に代入可能な項とするとき，以下は自然演繹式シークエント計算における推論規則である．

$$(\mathrm{SUBST})\ \frac{s = t \qquad \varphi[t/x]}{\varphi[s/x]}$$

最後に，いわゆる背理法の基礎となる推論規則を導入しておく．規則名「DNE」は 2 重否定除去（Double Negation Elimination）に由来する．

定義 3.9 (2 重否定除去)**.** 論理式の有限列 Γ と論理式 φ に対し，下記は自然演繹式シークエント計算における推論規則である．

$$(\mathrm{DNE})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$$

以上で公理と推論規則の準備が整った．あとは「証明」っぽく見えるようにいくつか定義を行うだけである．

定義 3.10. シークエントが導出可能であることを，以下のように定義する：

1. 任意の論理式 φ に対し，始式 $\varphi \Rightarrow \varphi$ は導出可能である．
2. これまでに挙げた各推論規則における上段のシークエントがすべて導出可能であるならば，下段のシークエントも導出可能である．
3. 以上の規則を有限回適用して得られるシークエントのみが導出可能である．

あるシークエントが導出可能であることを確かめる作業のことをそのシークエントの「導出」と呼ぶことがある．「シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ を導出する」といった言い回しである．

さて，シークエントの導出可能性の次は論理式の証明可能性である．

定義 3.11. φ を論理式とする．シークエント

$$\Rightarrow \varphi \tag{3.2}$$

が導出可能であるとき，φ は**証明可能**であるという．

ここで定義した体系が我々の素朴的直観における「証明」を模倣できているかどうかは，ここから導かれるさまざまな結果を見るよりほかはない．例を見てみよう．

定理 3.12 (背理法)**.** Γ を論理式の有限列，φ を論理式とするとき，シークエント $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \bot$ が導出可能であるならば，シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は導出可能である．

Proof. シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は次のように得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{I})}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{DNF})$$

よって，シークエント $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は導出可能である．　□

定理 3.13. φ を論理式とするとき，シークエント $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ と $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ はいずれも導出可能である．

Proof. シークエント $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ は次のようにして得られる．

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\mathrm{ID})}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{DNF})$$

次に，シークエント $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ を導出する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\mathrm{ID}) \qquad \dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{ID})}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \bot}\,(\neg\mathrm{E})}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\neg\mathrm{I})$$

よって，シークエント $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ と $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ はいずれも導出可能である． □

シークエントの導出過程を示すとき，定理 3.12 の証明のように各推論規則の適用過程を上から下に進む木構造として書き下すのが普通である．体系がもつ一般的な性質を研究する上ではこの記法は非常に便利なのだが，個々のシークエントの導出を人間の目にわかりやすい形で行うには扱いずらい．そこで，推論規則の適用過程は導出可能であることが分かったシークエントを順に書き並べる形で示すこととする．次の定理 3.14 の証明で実例を見せるとしよう．

定理 3.14 (排中律)**.** φ を論理式とするとき，論理式

$$\varphi \vee \neg\varphi \tag{3.3}$$

は証明可能である．

Proof. シークエント $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ を以下のようにして導く．

1. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$　(ID)
2. $\varphi \Rightarrow \varphi$　(ID)
3. $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　（2 から ($\vee$I) による）
4. $\varphi, \neg(\varphi, \neg\varphi) \Rightarrow \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$　（1 から (w) による）
5. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　（3 から (w) による）
6. $\varphi, \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　（4 から (e) による）
7. $\varphi, \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \bot$　（4, 6 から ($\neg$E) による）

8. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \neg\varphi$　（7 から $(\neg\mathrm{I})$ による）
9. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　（8 から $(\vee\mathrm{I})$ による）
10. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \bot$　（1, 9 から $(\neg\mathrm{E})$ による）
11. $\Rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$　（10 から $(\neg\mathrm{I})$ による）
12. $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$　（11 から (DNF) による）

よって $\varphi \vee \neg\varphi$ は証明可能である．□

定理 3.14 の証明で提示したシークエントの導出過程は，通常の数学における次のような証明に対応していると考えることができる．

> $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ だと仮定して矛盾を導く．φ であるとすると $\varphi \vee \neg\varphi$ となり，$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ と矛盾する．従って $\neg\varphi$ でなければならない．しかしこの場合も $\varphi \vee \neg\varphi$ となり $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ と矛盾する．よって $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$，すなわち $\varphi \vee \neg\varphi$ となる．

構造規則の関係で多少人工的な操作が見られたものの，定理 3.14 の証明はその下に述べた通常の数学における証明とうまく対応しているように見える．それでいて形式的記号列の世界で議論しているおかげで各々の導出の根拠に一切のあいまいさが存在しない．

定理 3.14 と同じように考えれば，数学における論理でよく知られてきた結果がこの自然演繹式シークエント計算においても導くことができる．

定理 3.15. φ, ψ, χ を論理式，x を変数記号とする．以下に述べる論理式のペアは，それぞれを左辺，右辺とするシークエントとその左右を入れ替えたシークエントのいずれも導出可能である．（「φ と ψ」と書かれていれば $\varphi \Rightarrow \psi$ と $\psi \Rightarrow \varphi$ の両方が導出可能である．）

1. $\varphi \to \psi$ と $\neg\varphi \vee \psi$
2. $\neg(\varphi \vee \psi)$ と $\neg\varphi \wedge \neg\psi$

3. $\neg(\varphi \wedge \psi)$ と $\neg\varphi \vee \neg\psi$
4. $\neg\forall x\varphi$ と $\exists x\neg\varphi$
5. $\neg\exists x\varphi$ と $\forall x\neg\varphi$
6. $\varphi \wedge \psi$ と $\psi \wedge \varphi$
7. $\varphi \vee \psi$ と $\psi \vee \varphi$
8. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ と $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$
9. $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ と $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$
10. $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ と $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
11. $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ と $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
12. $\neg(\varphi \to \psi)$ と $\varphi \wedge \neg\psi$
13. $\neg\forall x(\varphi \to \psi)$ と $\exists x(\varphi \wedge \neg\psi)$
14. $\varphi \to \psi$ と $\neg\psi \to \neg\varphi$
15. $\varphi \to (\psi \to \chi)$ と $\varphi \wedge \psi \to \chi$
16. $\forall x(\varphi \to \psi)$ と $\exists x\varphi \to \psi$（ただし x は ψ には自由出現しないものとする）
17. $\exists x(\varphi \to \psi)$ と $\forall x\varphi \to \psi$（ただし x は ψ には自由出現しないものとする）
18. $\forall x(\varphi \to \psi)$ と $\varphi \to \forall x\psi$（ただし x は φ には自由出現しないものとする）
19. $\exists x(\varphi \to \psi)$ と $\varphi \to \exists x\psi$（ただし x は φ には自由出現しないものとする）
20. $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ と $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
21. $\exists x(\varphi \vee \psi)$ と $\exists x\varphi \vee \exists x\psi$
22. $\forall x(\varphi \vee \psi)$ と $\forall x\varphi \vee \psi$（ただし x は ψ には自由出現しないものとする）
23. $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ と $\exists x\varphi \wedge \psi$（ただし x は ψ には自由出現しないものとする）

演習 3.1. 定義 3.15 を証明せよ．

演習 3.2. φ, ψ を論理式とするとき，Peirce の法則に対応するシークエント

$$(\varphi \to \psi) \to \varphi \Rightarrow \varphi \tag{3.4}$$

を導出せよ．

等号についてもいろいろなシークエントを導くことができる．

定理 3.16. f をアリティ n の関数記号，$s_1, s_2, \ldots s_n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ を項とする．$i \equiv 1, 2, \ldots, n$ に対して，シークエント

$$s_i = t_i \Rightarrow f\big(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n\big) = f\big(s_1, s_2, \ldots, t_i, \ldots, s_n\big) \tag{3.5}$$

は導出可能である．

定理 3.17. s, t, u を項とするとき，シークエント

$$s = t \Rightarrow t = s \tag{3.6}$$

$$(s = t) \wedge (t = u) \Rightarrow s = u \tag{3.7}$$

は導出可能である．

演習 3.3. 定理 3.16 と定理 3.17 を証明せよ．

参考文献

[1] 前原昭二, “記号論理入門”. 日評数学選書. 日本評論社, 2005.

[2] 鹿島亮, “数理論理学”. 現代基礎数学. 朝倉書店, 2009.

[3] 嘉田勝, “論理と集合から始める数学の基礎”. 日本評論社, 2008.

[4] 戸次大介, “数理論理学”. 東京大学出版会, 2012.

[5] 足立恒雄, “よみがえる非ユークリッド幾何”. 日本評論社, 2019.

[6] 田中一之, “数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ”. 裳華房, 2019.

[7] 新井敏康, “数学基礎論”. 岩波書店, 2011.

[8] Kenneth Kunen, “キューネン数学基礎論講義”. Trans. by 藤田博司. 日本評論社, 2016.

記号索引

■ 記号 ■

用語索引

0 から始める数理論理学入門

2023 年 12 月 初版

著者：野口 匠

Twitter：@Nmatician

発行：NOGUTAKU Lab

印刷：株式会社ポプルス