記号論理超入門

高知工科大学環境理工学群 4 年 野口 匠

2018/7/30

はじめに

この資料は，これから数学を本格的に学ぼうとする高校生，大学生を対象に，数学全体の基礎となっている「論理」や「推論」の感覚をつかんでもらうために書いたものである．

本格的に数学を学ぼうとしたとき，まず第一に数学的な議論のフォーマットに体を慣らさなくてはならない．数学的な議論のフォーマットは，実際に数学を学ぶことを通して体得するのが普通である．そうして数学を学んでいくと，数学で使われる「推論」のなかには，直感的に明らかとは言い難いものがそこそこ多くあることに気がつくはずである．De Morgan の法則や対偶証明法，あるいは背理法などが挙げられるだろう．初めてそれらの論法が提示された際，ちょっとモヤモヤした気分になった人は私だけではあるまい．

この資料では，まずは意味論的に論理記号を導入し，その後，自然演繹と呼ばれる演繹体系に基づいてこれらの論法を正当化することを試みる．ただし，ここでは自然演繹そのものではなく，シークエント計算と呼ばれる手法を利用した自然演繹の体系を紹介する．個人的な意見ではあるが，自然演繹そのものよりもシークエント計

算のほうがとっつきやすい．とはいえ，慣れるまではかなり苦労すると思われるから，根気よく学んでもらいたい．ページ数自体はあまり多くはないが，読み通すまでにはかなり時間がかかると思われる．

なお，この資料は私 1 人で書いたものであり，校正も私自身が行っている．従って，普通の本よりも間違いや誤植が存在する可能性が高いということに留意されたい．もしも間違いや誤植を見つけた際には，以下に連絡していただけるとありがたい．

- TwitterID：@NOGUTAKULab
- E-mail：nogutakulab@gmail.com

2018 年 1 月 著者

更新履歴

- 2018/1/10 公開
- 2018/1/11 誤植の修正，連絡先の追加
- 2018/4/5 「現代数学への展望」を追加，演習問題の追加，その他不適切な言い回しの修正
- 2018/7/30 レイアウトの修正，英訳の訂正，数学的構造の解説の追加など

ギリシャ文字一覧

読み	大文字	小文字
アルファ	A	α
ベータ	B	β
ガンマ	Γ	γ
デルタ	Δ	δ
イプシロン, エプシロン	E	ϵ, ε
ゼータ, ツェータ	Z	ζ
イータ, エータ	H	η
シータ, テータ	Θ	θ, ϑ
イオタ	I	ι
カッパ	K	κ
ラムダ	Λ	λ
ミュー	M	μ
ニュー	N	ν
オミクロン	O	o
グザイ, クシー	Ξ	ξ
パイ	Π	π, ϖ
ロー	P	ρ, ϱ
シグマ	Σ	σ, ς
タウ	T	τ
ユプシロン, ウプシロン	Υ	υ
ファイ	Φ	ϕ, φ
カイ, キー	X	χ
プサイ, プシー	Ψ	ψ
オメガ	Ω	ω

花文字一覧

大文字	対応する大文字	大文字	対応する大文字
$\mathscr{A}$	A	$\mathscr{N}$	N
$\mathscr{B}$	B	$\mathscr{O}$	O
$\mathscr{C}$	C	$\mathscr{P}$	P
$\mathscr{D}$	D	$\mathscr{Q}$	Q
$\mathscr{E}$	E	$\mathscr{R}$	R
$\mathscr{F}$	F	$\mathscr{S}$	S
$\mathscr{G}$	G	$\mathscr{T}$	T
$\mathscr{H}$	H	$\mathscr{U}$	U
$\mathscr{I}$	I	$\mathscr{V}$	V
$\mathscr{J}$	J	$\mathscr{W}$	W
$\mathscr{K}$	K	$\mathscr{X}$	X
$\mathscr{L}$	L	$\mathscr{Y}$	Y
$\mathscr{M}$	M	$\mathscr{Z}$	Z

よく使う集合

記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合

目次

第 1 章

現代数学への展望

この資料を手に取った読者の中には初めて数学を本格的に学ぼうとする人も多いだろう．そのような人の中には，現代数学は複雑怪奇でよくわからない世界というイメージを持っている人も多いと思う．特に，「公理とは，絶対普遍の真理である」などと考えている人も多いのではないだろうか.

この章では，そうした「公理」や「定義」などの数学を学ぶ上では絶対に知っておかなければならない基本的な用語に関してざっくりと解説する．後半では数学的構造について解説し，位相空間論や群論などの現代数学の基礎となっている理論をより深く理解するための橋渡しを試みる．

この章では，他の分野（特に代数学）で学ぶ事項のうちで既知としたものがある．この章を読むときには，実際に数学を学びながら暇をつぶす感覚でこの章を読むとよい.

§ 1.1　幾何学の歴史と公理論

公理主義的な現代数学の価値観は，幾何学とともに形成されていったといっても過言ではない．ここでは，幾何学の歴史をおおざっぱに見ていこう．

■幾何学の起源　幾何学は，紀元前に古代エジプトにおいて測量の必要性から生まれた．しかし，そこでの「幾何学」は現代のように演繹的証明を積み重ねていくものではなかった．それは幾何学だけではない．当時の古代エジプトでは十進法や単位分数，辺の長さの比が 3 : 4 : 5 の直角三角形などが発見されていたが，その特徴は「具体的な例題の解法の羅列」であった．

また，紀元前の幾何学といえば古代バビロニアも見逃せない．古代バビロニアでは六十進法が主として用いられた．ほかにも，2 次方程式の解法やピタゴラスの定理についての研究もなされていたようである．しかし，その特徴は古代エジプトと同じく「具体的な例題の解法の羅列」であった．

■古代ギリシャの数学　古代エジプトと古代バビロニアでの幾何学に共通するのは「具体的な例題の解法の羅列」である．すなわち，古代エジプトと古代バビロニアで培われていた知識はどちらも実用的なものであったと考えることができる．ところが，古代エジプトと古代バビロニアで培われていた知識は古代ギリシャに渡り，そこで大きな変貌を遂げることとなった．それは，実用的知識をある理論体系にまとめあげ，そこから得られた結果を再び実用的な問題に当てはめるというものである．つまり，古代ギリシャでは「具体的

な対象から推測される一般化された主張に証明を与え，それを再び具体的な対象に適用する」という形式で幾何学が展開されていったのである．

Thales（624 B.C. 頃–547 B.C. 頃）はギリシャ哲学の祖とも言われており，上記のような考えのもと，さまざまな主張を一般化し，その証明を与えていった．以下に Thales の発見と言われていることがらをいくつか挙げておこう．

- 円は直径により 2 等分される．
- 二等辺三角形の両底角は相等しい．
- 2 直線が交わるとき，その対頂角は相等しい．
- 2 つの三角形において，一辺とその両端の角がそれぞれ等しければ，2 つの三角形は合同である．
- 1 つの円において，直径に対する円周角はつねに直角である．

■Euclid の原論　古代ギリシャにおいては幾何学の研究は以後も続けられていたが，古代ギリシャの数学者 Euclid（300 B.C. 頃）の著書『原論』により，それまでに得られていた数学研究の成果が演繹的体系としてまとめ上げられた．

『原論』では，まずこれから用いる「点」や「直線」，あるいは「面」などの言葉の定義がなされており，ついで幾何学を展開するときの基礎となる 5 つの公準（要請）と数学全体において基礎となる公理（共通概念）が述べられている．その後，用意した公理と公準に基づき，演繹的論証を積み重ねることによって当時知られていたいくつもの定理が証明されている．しかし，『原論』における「公理」とは「一般に共通する普遍の真理」であり，「公準」とは「幾何学にお

ける要請」であったことに注意しておかなければならない[*1]．すなわち，『原論』においては「公理」は「自明の事実」として扱われていたのである．

『原論』は紀元前に書かれた幾何学の教科書である．しかし，後世の人々によって加筆されたり翻訳されたりなどにより，長い間幾何学の標準的な教科書として使われ続けてた．それほどまでの完成度の教科書が紀元前の時点ですでに出現していたことは驚くべきことであろう．

『原論』の冒頭で定義されている用語は 23 個あるが，そのうちのいくつかを見てみよう．

- 点とは部分を持たないものである．
- 線とは幅のない長さである．
- 線の端は点である．
- 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である．
- 平面とはその上にある線について一様に横たわる面である．

この「定義」についてはのちにもう少し深く考えることにして，『原論』における公準と公理も見ておこう．『原論』における公準は以下の通りである．

公準 1. 任意の点とこれと異なるほかの任意の点とを結ぶ直線を引くことができる．

公準 2. 任意の線分はこれを両方にいくらでも延長することができる．

[*1] ここでの「公準」は「幾何学における公理」であると思っておけばよい．

公準 3. 任意の点を中心とする任意の半径の円を描くことができる.

公準 4. 直角はすべて互いに等しい.

公準 5. 2 直線が 1 直線と交わるとき，その同じ側にできる内角の和が 2 直角よりも小さいならば，2 直線はその側に延長すると必ず交わる.

そして，『原論』において述べられている公理は以下の通りである.

公理 1. 同一のものに等しいものはまた互いに等しい.

公理 2. 等しいものに等しいものを加えれば，その結果もまた等しい.

公理 3. 等しいものから等しいものを引けば，その結果もまた等しい.

公理 4. 互いに重なり合うものは互いに等しい.

公理 5. 全体は部分より大きい.

先に述べた公準と公理を眺めていると，明らかに第 5 公準だけが複雑で長ったらしい主張であることに気づく．この第 5 公準はほかの公準から導けるのではないかという疑問が出現し，多くの数学者がその証明に取り組んだ．しかし，いくら探しても第 5 公準がほかの公準から証明されることはなかった.

■非 Euclid 幾何学の登場　この問題に解決の兆しが見られたのは 19 世紀に入ってからのことである．Gauss や Lobachevski，Bolyai らの手により，第 1 公準から第 4 公準を仮定し，第 5 公準を否定す

る幾何学が提案された[*2]．このことから，第 1 公準から第 5 公準までをすべて仮定するような幾何学は Euclid 幾何学と呼ばれるようになり，第 5 公準を否定するような幾何学は非 Euclid 幾何学と呼ばれるようになった．

こうして Euclid 幾何学と非 Euclid 幾何学の両方が存在しうることが示されたわけであるが，Euclid 幾何学や非 Euclid 幾何学の公理系[*3]そのものが矛盾を抱えていないということが示されたわけではないということに注意しなくてはならない．矛盾が生じるような公理を仮定してもそこから構築される理論に（通常の意味では）価値はない．また，一見仮定した公理系に矛盾がないように見えても，そこから矛盾した結果が導かれることはないという保証はない．公理系の無矛盾性は決して自明なことではないのである．

Euclid 幾何学や非 Euclid 幾何学の公理系の無矛盾性に関しては，Klein や Beltrami らの手により不完全ながらも解決されることとなった．その方法は「Euclid 幾何学の公理系で許された手法のみを利用して，非 Euclid 幾何学の公理系を満たす対象を実際に構成してみせる」というものである．ある公理系を満たす対象のことをその公理系の **モデル**（model）と呼ぶ．すなわち，Klein や Beltrami らが行ったのは Euclid 幾何学上に非 Euclid 幾何学のモデルを構築したということである．非 Euclid 幾何学のモデルとして有名なのは Riemann によって構築された球面幾何学であろう．それらの非 Euclid 幾何学の詳細は省くが，非 Euclid 幾何学の公理

[*2] Gauss は，宗教的な論争に巻き込まれることを恐れたのか公表はしていない．しかし，このような幾何学が存在するということは確信していたようである．

[*3] ここではとりあえず「公理の集まり」と考えておくとよい．また，ここでの「公理」は『原論』でいうところの「公準」である．

系を満たす対象が具体的に構成されたからには，非 Euclid 幾何学の公理系の無矛盾性を認めざるを得ない．「正しい」手続きのもとで構成された対象が満たす性質に矛盾が存在するわけがないからである．しかし，非 Euclid 幾何学のモデルは Euclid 幾何学のもとで構築されたわけであるから，実際にいえるのは「Euclid 幾何学の公理系が無矛盾であれば非 Euclid 幾何学の公理系も無矛盾である」ということである．

非 Euclid 幾何学の登場により,「そもそも幾何学とは何なのか？」という疑問が出てくる．この問に対して 1 つの答えを与えたのが Klein である．Klein は「空間[*4] S と変換群 G が与えられたとき，S の部分集合，すなわち S 上の図形に関する種々の性質のうち，G に属するすべての変換によって不変に保たれるものを研究することが G に従属する S の幾何学である」とした．この主張は Klein がエルランゲン大学の教授職に就くときに示されたものであり，エルランゲン・プログラムと呼ばれている．エルランゲン・プログラムの登場により，当時知られていたさまざまな幾何学を統一的な視点で考えることができるようになったのである．

■公理論と形式主義　さて，Euclid 幾何学の公理系が無矛盾であるのならば非 Euclid 幾何学の公理系も無矛盾であるのであった．では Euclid 幾何学の公理系は無矛盾であるのか？ と考えるのは当然である．この問に対しては，そもそも Euclid 幾何学の公理系に論理的な不備があったことに注目しなくてはならない．

Hilbert は 1899 年に著書『幾何学基礎論』において，Euclid 幾何

[*4] 空間に関しては § 1.3 で解説する．変換群に関しては代数学の本を参照せよ．

学の論理的不備を正した公理系を提出した[*5]．『幾何学基礎論』においては,「点」や「直線」などの用語が使われているにも関わらず,その定義は書かれていない．これは『原論』とは大きく異なる点である．また，公理中で「... が—の間にある」などといった言葉が使われているが，これにも定義は書かれていない．これは，Hilbert が定義する必要のない自明な概念として用いたからではない．これらの用語はそもそも定義なしに用いる用語であるとしたのである．『原論』では,「点とは部分を持たないものである」だとか「線とは幅のない長さである」などといった定義がなされているが，この「部分をもたない」や「幅のない長さ」とは一体なんだろうかということを考えてみると，どういうように定義をしても結局は循環論法になってしまうことに気づく．そこで，Hilbert はこれらの用語を定義することなしに公理を説明した．このように，公理を説明するために定義せずに用いる用語を **無定義術語**（undefined term）という．『幾何学基礎論』においては,「点」や「直線」,「平面」といった用語が無定義術語である．定義されないのだから，これらの用語を別のものに置き換えても理論に何ら支障はない．すなわち，これらの用語を「テーブル」,「椅子」,「ビールジョッキ」といった言葉に置き換えても理論としてはまったく同じであるとしたのである．この頃から，**公理**（axiom）とは，理論の出発点となる単なる仮定であり，それが自明であるなどとは考えないようになった．この考え方に基づいて組み立てられた理論は **公理論**（axiomatics）的で

[*5] 現代の視点で述べるのであれば，Hilbert が提案した Euclid 幾何学の公理系は少々扱いづらく，Tarski という人物が考案した公理系のほうが便利である．また，Tarski による公理系を改良する研究は今も続いているようである．

あるという*6．しかし Hilbert はさらに，公理からの「演繹的推論」にも手を出した．Hilbert は我々が当たり前のように使っている演繹的推論も定式化して議論できるのではないかと考えたのである．Hilbert は，公理は「意味」を持たない単なる記号列であり，そこから定められたルールに基づく記号操作により，あらゆる命題が導かれるとした．そして，この「記号操作」こそが **証明**（proof）であるとしたのである．Hilbert のこの考え方は **形式主義**（formalism）と呼ばれている．この資料では Hilbert が考案した演繹体系は取り扱わないが，代わりに第 2 章において，Gentzen が考案した自然演繹という演繹体系を取り扱う．自然演繹は形式主義に基づく演繹体系のひとつである．

理論の出発点として仮定した公理系には矛盾があってはならない．また，仮定した公理系にほかの公理から導かれる結果が混ざっているのは美しくない．すなわち，公理系は全体として矛盾を含まないという **無矛盾性**（consistency）は絶対に必要であり，さらに，ほかの公理から導かれる結果が混ざっていないという **独立性**（independence）があるのが望ましい．そして，公理は理論の出発点であるが，研究としては公理にたどり着くことはゴールであるというべきである．また，公理の選び方は議論の進め方によっていくらでも変わりうるということにも注意すべきである．

さて，Hilbert の功績により，Euclid 幾何学の公理系の無矛盾性が本格的に議論できるようになったわけであるが，その問題はすでに解決していたといってもよい．Descartes が創始した解析幾何学

---

*6 よく **公理主義**（axiomatism）という言葉が使われることがあるが，これは日本だけでしか使われない．しかし，Hilbert の思想を表現するには便利なのでしばしば使われる．もちろん axiomatism も和製英語である．

が Euclid 幾何学のモデルになっていると考えられるからである．解析幾何学は実数論に基づいて構築されているから，このことからわかるのは「実数論の公理系が無矛盾であるならば，Euclid 幾何学の公理系も無矛盾である」ということになる．

公理論的な数学理論の作り方をまとめておこう．まず，基礎となる用語や概念を無定義術語として用意する．そして，理論の基礎となる命題を公理に据える．公理を仮定して論理や集合を用いて証明された命題を **定理**（theorem）と呼ぶ*7．もちろん，すでに得られた定理を利用することで新たな定理を得ることも許される．また，定理の中でもある定理から即座に得られるものはその定理の **系**（corollary）と呼び，その定理自体にはさほど興味がなく，そこから導かれる結果のほうに関心があるとき，もととなるその定理のことを **補題**（lemma）と呼ぶことがある．定理，系，補題には明確な区別があるわけではなく，どの用語が使われるかは理論を構築する人の意図による．また，よく使う対象や関係を一言で表したいときには，それらの対象や関係に名前をつけて活用すればよい．名前のついた対象や関係のことを **定義**（definition）と呼ぶ．

さて，古典的な数学観においては，現実世界における数や図形の性質を明らかに正しいと思われる公理に基づき，そこから正しい推論によって定理を証明し，その得られた定理は当然正しいとしていた．しかし，公理論的数学観においては，現実世界とはまったく無関係な無定義術語によって表現された公理を単なる仮定とし，そこから論理や集合を用いて定理を証明していくのだが，そもそも無定義術語に意味が存在しないため，公理や定理が正しいかどうかなど

*7 通常は定理の中でも特に重要なもののみを「定理」として挙げる場合が多い．

考えること自体が無意味である．もっとも，これは単なる建前上の話であり，実際は無定義術語に意味が存在しないとしているのはみずからの先入観を排除するためであり，現実世界とは別に存在している「数学的実在の世界」の様子を調べていて，その表現手段として言葉や記号を用いているのだと考えるべきである．「意味」とは無関係に議論しているからこそ，数学理論に適当な意味づけをしてやることにより，その手法や結果が自然科学に限らないありとあらゆる学問分野に応用できるのである．

§ 1.2　定義の手法とその well-defined 性

数学に限らず，ありとあらゆる学問分野においてそこで用いられる言葉の定義がなされ，それに基づいた議論が行われている．数学においても同じだが，少し特殊な方法で定義がなされることもある．後半では定義をする上で保証しなくてはならない well-defined 性についても解説する．

■定義の手法　数学において何かを定義するとき，もっともよく使われる手法が「すでに定義された対象や関係，もしくは無定義術語の組み合わせでできる対象や関係に名前をつける」というものである．

例 1.1　「各辺の長さがすべて等しい三角形を正三角形という」という定義は，「辺」，「長さ」，「三角形」という対象と「等しい」という関係を組み合わせてできる「各辺の長さがすべて等しい三角形」という対象に対して「正三角形」という名前をつけている．また，「整数 a, b に対し，a は b で割り切れる，もしくは b は a を割り切

るとは，$a = bc$ となる整数 c が存在することをいい，このことを $b \mid a$ と表す」という定義は，整数 a, b に対する「$a = bc$ となる整数 c が存在する」という関係に「a は b で割り切れる」と「b は a を割り切る」という 2 つの名前と「$b \mid a$」という記号列を与えている．

定義を書くときには「... を—という」か「—であるとは... であることをいう」のどちらかの形式で書くことが多い．

対象を定義するとき，「$:=$」や「$\stackrel{\text{def}}{=}$」あるいは「$\equiv$」などの記号を用いて

$$f(x) := x^2 + 1, \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + 1, \quad f(x) \equiv x^2 + 1$$

などと表すこともある．これらはすべて「$f(x) = x^2 + 1$ と定める」という意味である．また，関係を定義をするとき，記号「$\Longleftrightarrow$」を用いて「整数 n に対し，

$$n \text{ が偶数である} \Longleftrightarrow n \text{ が } 2 \text{ で割り切れる}$$

と定める」と書かれることもある．最後の「と定める」は重要である．これがないと定義しているのか事実を述べているのかがわからないからである．このように定義する場合，

$$（\text{新たに定義する関係}）\Longleftrightarrow（\text{既知の関係}）$$

という形式で書かれることが多い．

定義の手法でよく使われるものがもうひとつある．それは「定義する対象や関係を構成する方法を提示する」というものである．このような定義を **再帰的定義** もしくは **帰納的定義**（recursive definition）という．

例 1.2　命題論理式を以下に述べるように帰納的に定義する：

(1)　命題変数は命題論理式である．

(2)　$\curlyvee$ と $\curlywedge$ は命題論理式である．

(3)　φ が命題論理式であるとき，$\neg\varphi$ は命題論理式である．

(4)　φ, ψ が命題論理式であるとき，$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \varphi \rightleftarrows \psi$ はすべて命題論理式である．

(5)　以上の規則を有限回適用して得られるもののみが命題論理式である．

例 1.2 では，「命題論理式」という用語を

1. 出発点となる命題論理式を用意する．
2. すでに得られた命題論理式から別の命題論理式をつくる方法を述べる．
3. 以上の操作を有限回適用して得られるもののみが命題論理式であると宣言する．

という手順に従って定義している．この 3. のステップはどこまでが命題論理式なのかを指定する重要なステップであるが，明らかであるとして省略されることも多い．

例 1.3　数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_{n+1} &= \sqrt{a_n + 6} \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

で帰納的に定義する．

例 1.3 では，a_1 がまず与えられ，そこから $a_2, a_3, \ldots$ が順にすべ

て得られる等式が提示されている．この等式により，数列 $\{a_n\}$ の任意の項を求めることができる．

例 1.2 と例 1.3 からもわかるように，帰納的定義においては定義の中に定義したい概念が登場しているという特徴がある．

■well-defined 性　定義というのは対象や関係に関する単なる約束事であるから（一般によく使われるものを除けば）何にどんな名前をつけるかは個々人の自由である．しかし，定義であればどんなものでも許されるわけではない．

例 1.4　「実数 α を $\alpha = \lim_{n\to\infty} n$ と定める」という定義は不適切である．なぜならば，右辺は明らかに実数ではなく，この α は「実数」とは呼べないからである．「実数 x に対し，$y^2 = x$ を満たす実数 y を対応させる関数を $f(x)$ とする」という定義も不適切である．x が負であれば $y^2 = x$ を満たす実数 y は存在せず，x が正であれば $y^2 = x$ を満たす実数 y は 2 つ存在する．よって，この対応関係は「関数」と呼ぶことはできない．

このように，すでに定義されたものを使って新しく定義をする場合，その定義がそれまでの議論と矛盾しないことを保証しなくてはならない．このことが保証されている場合，その定義は **well-defined** であるという．また，定義が well-defined でない場合，その定義は **ill-defined** であるという．例 1.4 で挙げた定義はともに ill-defined である．

例 1.5　「実数 γ を

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

と定める」という定義は well-defined である．なぜならば，右辺の極限が確かに有限の実数であることが示せるからである．

well-defined 性について身近なのは，代数学において同値類に演算を導入する場面であろう．

例 1.6　2 以上の自然数 n に対し，n を法とする剰余類全体の集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上に加法 $+$ を

$$[a] + [b] = [a+b] \quad ([a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

で定義する．このとき，この加法 $+$ は well-defined である．なぜならば，よく知られているように，与えられた $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $[a+b]$ はその代表元のとり方によらず一意に定まることが示せるため，この加法は確かに「集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上に定義された加法」といえるからである．もしも結果が剰余類だけでなくその代表元に依存するならば，これは $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の 2 つの元を定めただけではその結果が確定しないことになる．それでは「$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上に加法を定めた」とはいえない．

このように，数学において何かを定義する場合，その well-defined 性は必ず確かめなくてはならない．しかし，そのことは明らかであるか，明らかでなくとも容易であるとして省略されることも多い．

§ 1.3　数学的構造

19 世紀以降，数学理論の考察の対象は，数や図形といった具体的なものから集合という根源的なものへと移り変わり，大きく抽象化されていくこととなった．その原動力となったのが，Cantor と Dedekind によって創始された集合論と，Galois 以来大きな発展を遂げた群論を中心とする代数学である．

この数学の抽象化という流れと相性が良かったためか，Hilbert の提唱した形式主義という考え方が幾何学のみならず数学全体に広まることとなった．ところが，Hilbert の思い描いた「公理」と我々が現在思い描く「公理」には微妙に差異がある．典型的な例として，以下に挙げる群の公理が挙げられる．

公理（群の公理）　空でない集合 G と G の元 e, そして G 上の二項演算 $* : G \times G \longrightarrow G$ と単項演算 ${}^{-1} : G \to G$ が以下の条件を満たすとき，対 $(G, e, *, {}^{-1})$ を群と呼び，G は演算 $*$ に関して e を単位元とする群をなすという：

(1)　$\forall x, y, z \in G(x * (y * z))$,
(2)　$\forall x \in G(x * e = e * x = x)$,
(3)　$\forall x \in G(x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$.

Hilbert が思い描いた「公理」というのは，あくまで確定した 1 つの対象を定式化するための命題である．しかし，群の公理系のモデルのなかで明らかに「異なる」と思われるものはいくつも発見できる．

例 1.7　（空でない）集合 X に対し，X から自身への全単射全体の集合は，写像の合成に関して恒等写像を単位元とする群をなす．また，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は，その加法に関して 0 を単位元とする群をなす．これらは「同じ」群であるが，両者は明らかに「異なる」と思われる．実際，前者は演算が可換ではないが，後者は演算が可換である．

群の公理とは少し様子が異なる公理系を挙げておこう．

例 1.8　実数論の公理系のモデルはどの 2 つも「本質的に同じ」である．すなわち，実数論の公理系のモデルは本質的にただひとつである．

Hilbert は，「よい」公理系に対し，無矛盾性や独立性だけではなく，この「その公理系のモデルが本質的にただひとつである」という性質も要求していた．なぜそのような性質を要求したかは省略するが，Hilbert にとっては，群の公理やベクトル空間の公理といった同じ公理系のモデルで「異なる」モデルが存在するような公理系は「よい」公理系ではなかったことになる．

公理系のモデルが「本質的に同じである」とき，そのモデルは **同型**（ismorphic）であるという．さらに，公理系のモデルがどの 2 つも同型である，すなわちその公理系のモデルが本質的にただひとつであるとき，その公理系は **<ruby>範疇性<rt>はんちゅうせい</rt></ruby>**（categoricity）をもつという．「本質的に同じである」というのがどういうことなのかということを述べるのはやや面倒なので省略するが，公理系に範疇性を要求していた Hirbert にとっては，「公理系を考察する」ということは「ある特定の具体的な対象を考察する」ことと同じだったのである．

ところが，Hilbert のこのような態度は 21 世紀を生きる我々とは相容れないものがある．我々は公理系を考察するとき，「この公理系を満たす対象全体の共通点を探っていく」という態度をとっているはずである．これは，暗に「公理系を満たす対象は複数存在する」ということを認めているということを意味する．すなわち，公理を，ある特定の具体的な対象を定式化するためではなく，無数の対象に共通する性質を抽出して定式化するために用いているのである．

このような「無数の対象に共通する性質を探っていく」という態度で数学理論を最初に構築したのは誰か，という疑問に答えるのは実に難しい．しかし，「無数の対象に共通する性質を探っていく」ことそのものに着目し，それを最初に定式化したのはおそらく Bourbaki であろう．

フランスの数学者集団[*8]Bourbaki は，19 世紀の Cauchy の時代以降標準的に用いられていた解析学の教科書に不満を持っていた．そこで，現代的な解析学の教科書を執筆しようということになったのだが，その作業があまりに膨大であったため，最終的には現代数学を厳密かつ公理論的に構築し直そうということになった．そうして 1939 年に『数学原論』という本の第 1 巻が出版されることとなる．

「原論」とあるように，『数学原論』はただひたすらに一般から特殊へという流れで議論が進んでいく．しかし，Euclid の『原論』の時代とは当時得られていた数学の成果の量が段違いであったため，

[*8] Bourbaki は多数の若手数学者からなる集団であったが，当初はさも個人であるかのように活動していた．説明のしやすさを考え，ここでも Bourbaki をさも個人であるかのように扱う．

その量も『原論』とは比べ物にならない．日本語に翻訳されているものだけでも 30 巻はゆうに超え，今もなお続刊が執筆され続けている．Euclid の『原論』と同じように，『数学原論』で語られる事実の多くは Bourbaki が発見したものではなく，当時すでに得られていたものである．『数学原論』において画期的なのは，その考察対象を集合に対してある種の「性質」を付与するという方法で構成していったことである．

集合に対してある種の「性質」を付与したものを **空間**（space）と呼び[*9]，付与するその「性質」のことを **数学的構造**（mathmatical structure），あるいは単に **構造**（structure）と呼ぶ．空間を考える文脈では，構造を与える前の集合のことをその空間の **台集合**（underlying set）という．そして，この数学的構造が満たすべき条件こそが現在でいうところの「公理」なのである．かなり曖昧な言い方であるが，明確な形で定義を述べるのはかなり面倒であるため省略させてもらうことにする．

Bourbaki が導入した数学的構造の中で最も基本となるのは，代数構造・順序構造・位相構造の 3 つである．これらの構造を複数もっているとみなせる集合は少なくなく，たとえば実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は上記 3 つの構造をすべてもっていると解釈できる．

Bourbaki は「集合の上に構造を付与する」という思想の上で数学を構築していった．すなわち，構造を付与する前の集合は，何の意味ももたない単なる「モノ」の集まりということである．従って，

[*9] この言い方だと群や環といった我々が素朴な意味で「空間」と呼んでいるものとは明らかに異なったものも「空間」ということになってしまうが，明示的に「空間」と呼ばれるのはベクトル空間や距離空間などの我々の幾何学的直感が通用するものがほとんどである．

集合を特徴づけるのは「モノ」の数のみということとなり，それさえ同じなら「集合としては」同じということになる．

例 1.9　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の間には全単射が存在する．集合の濃度をその集合の個数と解釈するのならば，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は「集合としては」まったく「同じ」ということになる．

「$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ がまったく同じ」と言われれば，ほとんどの人が違和感を抱くに違いない．しかし Bourbaki 流にいえば，その「違い」は $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ を単なる集合とだけ考えたのでは決して発見できず，そこに付与された「構造」を見ることにより初めて発見できるということになる．実際，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は（自然に持ち合わせているとみなせる）代数構造，順序構造がまったく異なる．代数構造が異なる根拠としては $\mathbb{Q}$ は体であるが $\mathbb{N}$ は体でないこと，順序構造が異なる根拠としては $\mathbb{N}$ には最小元が存在するが $\mathbb{Q}$ には最小元が存在しないことなどが挙げられる．

「集合として」同じであっても，「構造」が違えばそれらの対象は異なるとみなされる．一方，「集合として」同じであり，かつその「構造」も同じであれば，それらの対象はたとえどのような形で記述されていたとしても「同じ」とみなされる．

例 1.10　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と正の実数全体の集合 $\mathbb{R}^+$ は，$\mathbb{R}$ についてはその加法，$\mathbb{R}^+$ についてはその乗法の代数構造のみを考えると，これら 2 つは集合としても「同じ」で，代数構造も「同じ」である．実際，$\mathbb{R}$ 上で α, β に対して $\alpha + \beta$ という和を考えることは，$\mathbb{R}^+$ 上においては $e^\alpha \cdot e^\beta$ という積を考えることに相当する．

例 1.10 が意味することは，加法群 $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ と乗法群

$(\mathbb{R}^+, 1, \cdot, ^{-1})$ が「本質的に同じ」である，すなわちこの 2 つの群は群として同型であるということである．このことは通常 $(\mathbb{R}, 0, +, -) \cong (\mathbb{R}^+, 1, \cdot, ^{-1})$ と表記される．「群」という観点で考える限り，これら 2 つの対象は「同じ」とみなされる．これは，群論がこれら 2 つの対象に共通する性質のみを研究対象とすることを意味する．幾何学においては，エルランゲン・プログラムがちょうどそのような視点に沿って幾何学を構築すべきだと主張するものである．互いに移り合う変換群が存在するような 2 つの図形を同型と考えるのである．

2 つの対象が同型であることは，全単射であって，その写像と逆写像の両方が構造を保つものが存在することとして定式化される．同種の構造をもった 2 つの集合 A, B において，全単射とは限らないが構造を保つような写像 $f : A \longrightarrow B$ が存在する場合，その写像 f のことを **準同型写像**（homomorphism）という．準同型写像 f が特に単射である場合，A と $f(A)$ が同型である場合がある．このとき，f を **埋め込み**（embedding）という．埋め込みが存在する場合，A と $f(A)$ を同一視して，A が B の部分集合であるかのように扱うことができる．

もちろん，群として同型であっても，他の構造に目を向ければ同型でないということはある．

例 1.11　$\mathbb{R}$ には整列順序と呼ばれる順序構造 $\leq'$ を入れ，$\mathbb{R}^+$ には通常の大小関係と同じ順序構造 $\leq$ を入れる．このとき，これら 2 つの順序集合は順序同型でない．実際，順序集合 $(\mathbb{R}, \leq')$ は最小元をもつが，順序集合 $(\mathbb{R}^+, \leq)$ は最小元をもたない．

このように，同型でない複数の対象が同じ公理系のモデルとして

議論されているのが Bourbaki 流の公理論的数学理論の最も大きな特徴と考えることができる．そのため，典型的な例とは明らかにかけ離れた対象も同じ土台に乗せられて議論されることがある．たとえば，n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ とある閉区間 $[a, b]$ 上で定義された関数全体の集合 $\mathbb{R}^{[a,b]}$ をベクトル空間とみなしたものが同じ（同型という意味ではない）ベクトル空間とみなされ，一緒くたにされて議論されていることには違和感を抱くこともあるだろう．もちろんこれら 2 つのベクトル空間は同型ではないため，「この 2 つは違う対象だろう」という直感は健全なものである．

Bourbaki のこの「集合というまっさらな土台に構造を与え，それにより生まれる性質を研究する」という思想はすぐに数学全体に波及した．しかし，波及した学問分野は数学だけにとどまらなかった．フランスの文化人類学者 Strauss がオーストラリアの原住民の婚姻システムの「構造」を群論を用いて説明してみせたのである．このことを皮切りに，Bourbaki の思想は **構造主義**（structuralism）という名前で世界中に広まり，数学に限らない数多くの学問分野に取り入れられることとなった．

現在では，数学的構造とその間の関係を研究する圏論や，数理論理学の手法を用いて数学的構造を研究するモデル理論といった数学的構造そのものが研究対象となっている理論も生み出され，そして発展している．残念ながら『数学原論』はこれらをカバーしてはいないが，構造主義という思想がこれらの理論に影響を与えていることはもはや疑う余地はないように思える．

§ 1.4　よく使う数学界の方言

第 2 章

記号論理超入門

数学理論は論理の上に成り立っている．このことは疑いようのない事実であろう．基礎となる公理を出発点とし，演繹的推論を適用して証明を積み重ねていく．これが最も一般的な数学的議論のフォーマットである．

しかし，この「論理」や「推論」に関して重要な成果が挙げられ始めたのは案外最近で，20 世紀あたりからである．有名どころでいえば，Gödel の不完全性定理が挙げられる．もちろん，他にも重要で興味深い話題はたくさんある．

この資料ではそのあたりの面白くて興味深い話題は取り扱わないが，そこに至るまでの道筋のほんの小さな一歩を踏みしめてみよう．

なお，この資料では syntax と semantics という 2 つの立場の区別や，基本的な用語の厳密な定義はあまり重視していない．そのため，数理論理学の視点から見るとかなり不満のある議論が多く含まれていることに留意されたい．

§ 2.1　命題論理と述語論理

■命題と条件　正しいか正しくないかが明確に定まる主張（statement）や式（expression）のことを **命題**（proposition）といい，ある命題について，その命題が正しいことをその命題は **真**（true）である，その命題が正しくないことをその命題は **偽**（false）であるという[*1]．

命題は，A, B や p, q などといったアルファベットで表すことが多い．

例 2.1　「6 は偶数である」や「1=1」は真な命題であり，「$3 < 2$」や「10 は素数である」は偽な命題である．しかし，「7」や「偶数である」，「$x + y = 0$」などといったものは命題でない．

最後の例「$x+y = 0$」は，そのままでは命題とはならないが，この x, y に具体的な値を代入すると命題になる．たとえば, $x = 1, y = 2$ とすると「$1 + 2 = 0$」という偽な命題になるが，$x = -1, y = 1$ とすると「$-1 + 1 = 0$」という真な命題となる．このように，変数や文字を含んだ式で，その変数に値を代入したときに命題になるものをその変数に関する **条件**（condition）もしくはその変数に関する **命題関数**（propositional function）と呼ぶ．

変数 x に関する条件は，よく $F(x)$ などと表される．2 変数 x, y に関する条件ならば，$F(x, y)$ などと表されることが多い．$F(x)$

[*1] 「命題 A が成り立つ」といえば，それは命題 A が真であることを意味することが多い．

が「x は偶数である」という条件を表すのであれば，$F(\ )$ はちょうど「... は偶数である」という部分に相当する．そういうわけで，変数に関する条件をその変数に関する **述語**（prodicate）と呼ぶことも多い．x の条件 $F(x)$ について，x に別の変数，もしくは定数 a を当てはめたものは $F(a)$ と表される．実数 x に対し，$F(x)$ が「$x > 1$」を表すのだとすれば，$F(0)$ は「$0 > 1$」を表すのである．

例 2.2　「x は偶数である」や「$x^2 = 1$」は 1 変数 x に関する条件である．また，「A は正方行列である」や「A は正則である」は 1 つの行列 A に関する条件である．さらに，「x, y の少なくとも一方は正である」や「x, y はともに整数である」は 2 変数 x, y に関する条件である．

上の例のように，「変数」と書いたのはあくまで象徴的な意味合いであって，本当の意味での「数」でなくてもかまわない．行列に関する条件や，関数に関する条件なども考えられる．ここで言うところの「変数」とは，とりあえずいまのところは単なる「モノ」程度の認識でよい．これを強調するため，この「モノ」のことを **対象**（object）やら **項**（term）と呼ぶことがある．「対象」および「項」に関してはもう少しきちんと考えなくてはならないのだが，この資料ではこのあたりの用語はあまり意識せずに使うことにする．

■命題結合記号　ここからは，与えられた命題（もしくは条件）から別の命題（条件）を作り出すことを考えてみよう．

命題（条件）A に対し，「A でない」という命題（条件）を A の **否定**（negation）といい，

$$\neg A \tag{2.1.1}$$

と表す[*2]．命題（条件）A に対し，$\neg A$ は，A が真である場合に偽となり，A が偽である場合に真となる．

例 2.3　「$1 = 0$」は偽な命題であり，その否定「$\neg(1 = 0)$」は真な命題である．これを通常「$1 \neq 0$」と略記している．

x を整数を表す変数として，x に関する条件「x は偶数である」の否定「$\neg$(x は偶数である)」は「x は奇数である」と同じ意味である．「$\neg$(x は偶数である)」は x が奇数である場合に真となり，x が偶数である場合に偽となる．

2 つの命題（条件）A, B に対し，「A かつ B」という命題（条件）を A と B の **連言**（conjunction）といい，

$$A \wedge B \tag{2.1.2}$$

と表す．命題（条件）A, B に対し，$A \wedge B$ は A, B がともに真であるとき，またそのときにのみ真となり，他の場合は偽となる．

例 2.4　2 つの命題「$1 = 1$」と「$2 = 2$」はともに真である．従って，命題「$1 = 1 \wedge 2 = 2$」は真となる．命題「$1 = 2$」は偽である．よって命題「$1 = 2 \wedge 2 = 2$」は偽である．

また，「$x = 1 \wedge y = 2$」は 2 変数 x, y に関する条件である．これを

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

*2 高校の教科書では，命題 A の否定を $\overline{A}$ と表すのが一般的であるが，この資料では用いない．

や「$(x,y)=(1,2)$」あるいは「$x=1, y=2$」などと略記することが多い．

2 つの命題（条件）A, B に対し，「A または B」という命題（条件）を A と B の **選言**（disjunction）といい，

$$A \vee B \tag{2.1.3}$$

と表す．命題（条件）A, B に対し，$A \vee B$ は A と B のどちらか一方でも真であれば真となる．$A \vee B$ が偽になるのは A と B がともに偽である場合に限るということにする．これは，直感には反することである．たとえば，「パンまたはライスが選べます」と言われたら，「パン」か「ライス」のどちらか一方のみが選べると解釈するのが普通である．しかし数学においては，「パン」と「ライス」の両方を選んでもいいのである．こういうふうに約束するのは，単にその方が数学の議論を展開しやすいからであって，数学独自のローカルルール（それでも数学全体におおよそ通用するが）であることに気をつけよう．まさか現実で「パンとライス両方で」などと頼む人はおるまい．

例 2.5　命題「$1=2 \vee 2=2$」は真である．命題「$2=2$」が真であるからである．また，命題「$1=2 \vee 2=3$」は偽である．命題「$1=2$」と「$2=3$」がともに偽であるからである．そして，命題「$1=1$」と「$3<4$」がともに真であるから，命題「$1=1 \vee 3<4$」は真となる．

「$x=1 \vee x=3$」は 1 変数 x に関する条件である．これを通常「$x=1,3$」と略記して書くことが多い．

命題（条件）A, B に対し，「A ならば B」，すなわち「もし A が真だとすると B も必ず真になる」という命題（条件）を A の B による **含意**（implication）といい，

$$A \to B \tag{2.1.4}$$

と表す．高校の教科書では，「$\Longrightarrow$」という記号を用いて $A \Longrightarrow B$ と表すことが多いが[*3]，記号「$\Longrightarrow$」は違う意味で使いたいのでここでは「$\to$」を用いる．命題（条件）A, B に対し，$A \to B$ の真偽には注意が必要である．結論から言って，命題（条件）A, B に対し，$A \to B$ は A が真であり，かつ B が偽であるとき，またそのときにのみ偽となり，残りの場合にはすべて真となる．このことに関しては § 2.4 で考えることにする．

例 2.6　命題「$1 = 2 \to 2 = 1$」は真な命題である．また，命題「$2 = 2 \to 1 = 4$」は偽である．

命題（条件）A, B に対し，命題（条件）$(A \to B) \wedge (B \to A)$ を A と B の **同値**（equivalence）命題といい，

$$A \rightleftarrows B \tag{2.1.5}$$

と表す．この記号も高校の教科書では「$\Longleftrightarrow$」が使われることが多いが，この資料では用いない．命題（条件）A, B に対し，$A \rightleftarrows B$ は A と B の真偽が一致した場合にのみ真となる．

[*3] 実は，高校の教科書では命題 A, B に対して $A \to B$ という命題は議論されていない．

以上で使った記号 $\wedge, \vee, \to, \rightleftarrows$ は，2 つの命題（条件）を 1 つの命題（条件）として「くっつける」役割を果たしている．これらの記号を **命題結合記号**（propositional connective）という．

$(A \to B) \wedge (B \to A)$ のように，論理記号を複数使って複雑な命題を作ることがある．このとき，無用な混乱を避けるため，どの命題結合記号がどの命題を結合しているのかを明らかにしなくてはならない．カッコを用いるのが普通である．

例 2.7　命題 A, B, C に対し，$A \vee B \wedge C$ といった書き方は許されない．$A \vee (B \wedge C)$ か $(A \vee B) \wedge C$ と書き表す．そして，これら 2 つの命題は一般には異なる意味を持つ．気になる人は A, B, C の真偽を適当に定めてみると良い．

誤解のない範囲ではカッコは省略することが許される．たとえば，$A \wedge (B \wedge C)$ と $(A \wedge B) \wedge C$ はどちらの意味に解釈されてもかまわないので，$A \wedge B \wedge C$ と略記する．ただし，カッコの省略はあくまで「誤解のない範囲で」である．$A \to B \to C$ などと書くのは誤解を招くので許されない．$(A \to B) \to C$ か $A \to (B \to C)$ と書かねばならない．

命題結合記号に優先順位を設ければ，カッコの数を大幅に減らすことができる．そこで，命題結合記号の結合の強さを $\neg$ が最強，$\wedge, \vee$ が次，$\to, \rightleftarrows$ が最も弱いと約束しよう．

例 2.8　$\neg A \wedge B$ は $\neg(A \wedge B)$ ではなく $(\neg A) \wedge B$ と解釈する．また，$\neg A \to B \vee C$ は $(\neg A \to B) \vee C$ などではなく $(\neg A) \to (B \vee C)$ と解釈する．

■限定記号　x の条件 $F(x)$ に対し，「すべての x について $F(x)$ である」という命題を

$$\forall x F(x) \tag{2.1.6}$$

と表す．記号 $\forall$ は **全称記号**（universal quantifier）と呼ばれており，「For all x, $F(x)$.」の「A」をひっくり返したものであると覚えておけばよい．$F(x)$ は変数 x に関する条件であるが，$\forall x F(x)$ は 1 つの命題であることに注意してほしい．

x の条件 $F(x)$ に対し，$\forall x F(x)$ の形の命題を **全称命題**（universal proposition）という．

例 2.9　命題「$\forall x(x \geq 0)$」は x が実数を表す変数である場合には偽であるが，x が自然数を表す変数である場合には真である．

y に関する条件「$\forall x(y \leq x^2)$」は，x が実数を表すのであれば「$y \leq 0$」と同じ意味である．

2 番目の例について，x がとりうる範囲が決まれば，この命題の真偽は y によってのみ決まることに注意してほしい．

$\forall x F(x)$ の表し方には人によってさまざまで，「どんな x についても $F(x)$ である」とか「任意の x に対して $F(x)$ である」なども $\forall x F(x)$ と同じ意味である．

x の条件 $F(x)$ について，「$F(x)$ を満たす x が存在する」という命題を

$$\exists x F(x) \tag{2.1.7}$$

と表す．記号 $\exists$ は **存在記号**（existential quantifier）と呼ばれてお

り，「There exists a x such that $F(x)$.」の「E」をひっくり返したものであると覚えるのがよいだろう．

x の条件 $F(x)$ に対し，$\exists x F(x)$ の形の命題を **存在命題**（existential proposition）という．

例 2.10　命題「$\exists x(x^2 = -1)$」は x が実数を表す変数の場合には偽であり，x が複素数を表す変数の場合には真である．

$\exists x F(x)$ にも色々言い方がある．「ある x について $F(x)$ である」だとか「x をうまくとれば $F(x)$ とできる」や「x が存在して $F(x)$ となる」などだろうか．このうち，「x が存在して $F(x)$ となる」は今後よく使うだろう．しかし，存在命題のことを「ある x に対して...」と表現するのはおすすめしない．「存在」というニュアンスが薄れてしまうからだ．

全称記号と存在記号を組み合わせる場合には注意が必要である．

例 2.11　x, y を自然数を表す変数とすると，命題「$\forall x(\exists y(x \leq y))$」は真である．任意にとった自然数 x に対して $y = x + 1$ とおけば，y も自然数であり，さらに $x \leq y$ が成り立つからである．

しかし，x, y を自然数を表す変数であるとして，全称記号と存在記号の順番を入れ替えた命題「$\exists y(\forall x(x \leq y))$」は偽である．どのように y をとろうとも「任意の x に対して $x \leq y$」となるようにはできないからである．

ただし，順番さえ守れば「$\forall x \exists y(x \leq y)$」や「$\exists y \forall x(x \leq y)$」などとカッコを省略してしまうのは許されるであろう．

「$\exists x \forall y F(x, y)$」という形の命題を言葉で表現するとき，「すべての y に対して $F(x, y)$ となる x が存在する」と表現することが考

えられる．しかし，これは「“すべての y に対し”$F(x,y)$ となる x が存在する」なのか「“すべての y に対し $F(x,y)$ となる”x が存在する」なのか紛らわしい．今回表したいのは後者なので，「すべての y に対して $F(x,y)$ となる，x が存在する」などと「,」を使って区切ってやるという手法が思いつく．「すべての y に対し，$F(x,y)$ となる x が存在する」と書けばこれは「$\forall y \exists x F(x,y)$」を表しているのだと解釈するのが自然だろう．とはいえ，このような区別は面倒だし間違えやすいので，「x が存在して，すべての y について $F(x,y)$」だとか「すべての y に対して x が存在して $F(x,y)$」などと表してしまうことにしまおう．日本語的には多少変かもしれないが，こっちの方が誤解は少ないと思う．

$\forall$ と $\exists$ の順番は入れ替えてはいけないが，$\forall$ 同士や $\exists$ 同士なら話は別である．2 変数 x, y に関する条件 $F(x,y)$ に対し，2 つの全称命題「$\forall x \forall y F(x,y)$」と「$\forall y \forall x F(x,y)$」，および 2 つ存在命題「$\exists x \exists y F(x,y)$」と「$\exists y \exists x F(x,y)$」は同じ意味である．従って，これらを「$\forall x, y F(x,y)$」や「$\exists x, y F(x,y)$」と略記しても誤解は生じないだろう[*4]．

全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ とを総称して **限定記号**（quantifier）と呼ぶ．また，限定記号 $\forall, \exists$ を用いる体系を **述語論理**（predicate logic）と呼ぶ[*5]．これに対して命題結合記号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ を用いる体系を **命題論理**（propositional logic）という．

もっとも，$\forall, \exists$ だけを切り離し，他の論理記号と区別して研究してもあまり意味はないので，述語論理においては結局のところ他の

[*4] 全称記号同士の順序の交換はともかく，存在記号同士の順序の交換は直感的には納得しがたいが，このことは § 2.4 で考察しよう．

[*5] より正確には，この資料で展開する述語論理は一階述語論理と呼ばれている．

論理記号をすべて取り扱うことになる．従って，述語論理は命題論理を含んだ体系であると考えるのが普通である．

命題結合記号同士には結合の優先順位を定めたが，限定記号に関しては，限定記号はどの命題結合記号よりも結合が強い，あるいは $\neg$ と結合の強さが同じであると約束しておく．直感的にも納得がいくであろう．

■矛盾記号　命題 A の否定 $\neg A$ とは，「A が間違いである」という意味である．では，A が間違いであるということをどうやって示せばよいかといえば，A を仮定すると「矛盾する」ということを導くのが一般的であろう．この「矛盾」というのを

$$\curlywedge \tag{2.1.8}$$

と表す．これは 1 つの「間違った命題」もしくは「偽な命題」とでも思っておけばよい．

以下，この資料で展開する命題論理と述語論理においては，矛盾記号 $\curlywedge$ も取り扱うことにする．

さて，変数 x の条件 $F(x)$ について，命題 $\forall x F(x)$ が偽である，すなわち $\forall x F(x)$ を仮定すると矛盾することを示すには，$\neg F(a)$ となる a が存在する，すなわち命題 $\exists x \neg F(x)$ が真であることを示せばよい．これを示すには，$\neg F(a)$ となるような a を具体的に用意してやるのが手っ取り早い．このような a のことを全称命題 $\forall x F(x)$ の **反例**（counter-example）という．

例 2.12　x を実数を表す変数であるとして，命題「$\forall x(x \leq 0)$」は偽である．反例として，たとえば $x = 1$ がとれる（他にも無数にとれる）．

問 2.1　次の命題の真偽を判定せよ．ただし，全称命題が偽である場合には反例を挙げよ．

(1) $\neg(1=2 \to 2=2)$
(2) $(1=2 \to 3=2) \lor (1=1 \land 1=3)$
(3) x は実数を表す変数であるとして $\forall x \neg(x^2+x+1 \leq 0)$
(4) x, y, z は自然数を表す変数だとして $\forall x, y \exists z(x+z=y)$
(5) $(2=0 \to 1=1) \to 2=3$
(6) $2=0 \to (1=1 \to 2=3)$

§ 2.2　変数の束縛

■自由変数と束縛変数　x, y, z を自然数を表す変数として，x, y, z の条件 $F(x, y, z)$ を「$x+y=z$」としよう．このとき，存在命題 $\exists x F(x, y, z)$，すなわち $\exists x(x+y=z)$ は，内容としては「$y<z$」を意味していることになる[*6]．ここで重要なのは，文中の x はその真偽に影響せず，$\exists x F(x, y, z)$ の真偽は y, z によってのみ決定されることである．存在命題 $\exists x F(x, y, z)$ において，y, z は値を代入することのできるいわば「本当の変数」であるが，x は内容に関与しない「見かけ上の変数」である．

命題（条件）において，限定記号 $\forall, \exists$ とともに用いられている「見かけ上の変数」を **束縛変数**（bound variable）といい，値を代入することができる「本当の変数」を **自由変数**（free variable）と

[*6] この資料では自然数は 0 を含まないとしているので $<$ であるが，自然数は 0 を含めるという立場を取るならば $\leq$ とするのが正しい．

いう．プログラミングにおけるグローバル変数とローカル変数の関係と似ている．

束縛変数は記号を別のものに変えても「内容」は変わらない．$\exists x F(x, y, z)$ と書こうが $\exists t F(t, y, z)$ と書こうが同じことである．ただし，$\exists t F(x, y, z)$ と書いたら意味は変わってしまう．重要なのは記号間の対応であり，その記号が何と書かれているかは「内容」には関わらないのである．

例 2.13　2 変数関数 $f(x, y) = xy^2$ について，$f(x, y)$ を $1 \leq x \leq 3$ まで積分すると，y の 1 変数関数が得られる．これを $g(y)$ とおくと，

$$g(y) = \int_1^3 xy^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x=1}^{x=3} = 4y^2$$

となる．積分変数を t に変えても

$$\int_1^3 ty^2\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2y^2\right]_{t=1}^{t=3} = 4y^2 = g(y)$$

と，得られる関数は変わらない．しかし，束縛変数と同じ記号を代入してしまうと

$$g(x) = \int_1^3 xx^2dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=1}^{x=3} = 20 \neq \int_1^3 tx^2dt = 6x^2$$

と，おかしな結果になる．

どうしてこのようなおかしな結果が導かれたかといえば，積分変数として仮においていただけの x と，関数の独立変数としての y とをごっちゃにしてしまったからだ．

こうした不都合を回避するためには，「仮におく変数」と「真の変数」，すなわち束縛変数と自由変数をきちんと区別し，記号を使い分ければよい．もちろんどの記号が自由変数を表していて，どの記号が束縛変数を表しているかは文脈によってまちまちである．しかし，束縛変数の方は限定記号や積分記号のようにわかりやすい目印があるだろうから参考にしてほしい．

さて，束縛変数は「仮の変数」であり，「内容」には関わらないのであった．束縛変数はある特定の範囲でのみ「意味」を持ち，その範囲から外では存在しないものとみなされる．従って，束縛変数がどこまで「意味」を持つのか，すなわち束縛変数の作用範囲を明示しなければ誤解が生じてしまう．

例 **2.14**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) &= \sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

であるが，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2-k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-k\neq\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$

である．

察しろと言いたくなるような例ではあるものの，何らかの手段（普通はカッコ）を用いて束縛変数の作用範囲を明示してやらないと意図しない解釈がなされてしまうのである．とはいえ，これは悪いことばかりではない．

例 2.15　x は実数を表す変数として，命題 $\forall x(x \leq 0 \vee x > 0)$ は真である．しかし，命題 $\forall x(x \leq 0) \vee \forall x(x > 0)$ は偽である．

束縛変数が作用範囲の外では何の意味も持たないことを利用すれば，このように表記を美しくしたり，使う記号の数を節約したりできるのである．

束縛変数の作用範囲について考えてみれば，ちまたでよく見る

$$\forall x : F(x) \to A$$

やら

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\ \ s.t.\ \forall n,\ n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

なんていう記法がよろしくないことはすぐにわかる．もちろん，文章中で「$\forall x$ に対して」だったり「$\exists x$ なので」などと書くのもご法度である．論理記号は単に文章を記号化したものではない．もちろん，論理記号で書かれた記号列を文章に翻訳する，もしくはその逆を実行することはできるが，それは「論理記号で書かれた記号列」と「論理記号で書かれた記号列を文章に翻訳したもの」は等価であることを意味しているわけではない．あくまで，「論理記号で書かれた文字列」に人間が「勝手に意味を付け加えている」のである*7．

■対象領域　変数を含んだ命題や条件を考えるとき，「x は自然数を表す変数だとして」のように，変数が動きうる範囲をあらかじめ指定しておくことがあった．

*7 とはいえ，論理記号の使い方に関して重箱の隅をつつくように騒ぎ立てるのも考えものである．しかし，記号論理を学んでいるときには，重箱の隅をつつくように気をつけるくらいでちょうどいいと思う．

この「変数が動きうる領域」が集合である場合，その集合のことをその変数の **対象領域**（domain）と呼ぶ*8．変数 x の対象領域が集合 D である場合，「$\forall x(x \in D \to (\cdots x \cdots))$」という形の命題（条件）は「$D$ に属するすべての x に対して $\cdots x \cdots$」という意味であるから，これを「$\forall x \in D(\cdots x \cdots)$」と略記することにしよう．同様に，「$\exists x \in D(\cdots x \cdots)$」という形の命題（条件）は「$\exists x(x \in D \wedge (\cdots x \cdots))$」の略記であるということにしておく．

問 2.2　次の命題の真偽を判定せよ．ただし，全称命題が偽である場合には反例を挙げ，存在命題が真である場合には例を挙げよ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq 2 \to x \leq 0)$
(2) $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq 2) \to \forall x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$
(3) $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 2 \wedge 2 < x)$
(4) $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 2) \wedge \exists x \in \mathbb{R}(2 < x)$
(5) $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 2 \to 1 = 2)$
(6) $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 2) \to 1 = 2$

§ 2.3　必要性と十分性

■必要条件と十分条件　x の条件 $F(x), G(x)$ に対し，命題

$$\forall x(F(x) \to G(x)) \tag{2.3.1}$$

が真であるとき，$F(x)$ は $G(x)$ であるための **十分条件**（sufficient condition）であるといい，$G(x)$ は $F(x)$ であるための **必要条件**

*8 集合とはいっても，対象領域が空である場合は考えない．

（necessary condition）であるという．

例 2.16　命題 $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq 1 \to x \leq 2)$ は真である．従って，実数 x について，$x \leq 1$ であることは $x \leq 2$ であるための十分条件で，$x \leq 2$ であることは $x \leq 1$ であるための必要条件である．

なお，高校の教科書では，x の条件 $F(x), G(x)$ に対し，命題 $\forall x(F(x) \to G(x))$ を

$$F(x) \Longrightarrow G(x) \tag{2.3.2}$$

と書き表すことがある．この資料で用いる「$\Longrightarrow$」とは意味がまったく異なるので注意されたい．

例 2.16 を眺めてみれば必要・十分のネーミングの意味がわかるはずだ．$x \leq 1$ が成り立つためには $x \leq 2$ が成り立っていなければならない．すなわち，$x \leq 1$ となるためには $x \leq 2$ であることが「必要」なのであり，$x \leq 2$ が成り立つためには $x \leq 1$ が成り立っていればよい．すなわち，$x \leq 2$ となるためには $x \leq 1$ であれば「十分」なのである．

2 つの x に関する条件 $F(x), G(x)$ に対し，命題

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x)) \tag{2.3.3}$$

が真である，すなわち命題

$$\forall x((F(x) \to G(x)) \wedge (F(x) \to G(x))) \tag{2.3.4}$$

が真であるとき，$F(x)$ は $G(x)$ であるための **必要十分条件**（necessary and sufficient condition）であるという．

例 2.17　命題 $\forall x \in \mathbb{R}(x = 1 \vee x = -1 \rightleftarrows x^2 = 1)$ は真である．従って，実数 x について，$x = 1 \vee x = -1$ であることは $x^2 = 1$ であるための必要十分条件である．

高校の教科書では，2 つの x に関する条件 $F(x), G(x)$ について，命題 $\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$ のことを

$$F(x) \iff G(x) \tag{2.3.5}$$

と表すことがある．

必要条件，十分条件は変数の数が増えても同様に定義される．x, y に関する 2 つの条件 $F(x, y), G(x, y)$ に対し，命題

$$\forall x, y(F(x, y) \to G(x, y)) \tag{2.3.6}$$

が真であるとき，$F(x, y)$ は $G(x, y)$ であるための十分条件であるといい，$G(x, y)$ は $F(x, y)$ であるための必要条件であるという．さらに，x, y に関する 2 つの条件 $F(x, y), G(x, y)$ に対し，命題

$$\forall x, y(F(x, y) \rightleftarrows G(x, y)) \tag{2.3.7}$$

が真であるとき，$F(x, y)$ は $G(x, y)$ であるための必要十分条件であるという．

一般の場合も同様である．n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する 2 つの条件 $F(x_1, \ldots, x_n), G(x_1, \ldots, x_n)$ について，命題

$$\forall x_1, \ldots, x_n(F(x_1, \ldots, x_n) \to G(x_1, \ldots, x_n)) \tag{2.3.8}$$

が真であるとき，$F(x_1, \ldots x_n)$ は $G(x_1, \ldots, x_n)$ であるための十分条件であるといい，$G(x_1, \ldots, x_n)$ は $F(x_1, \ldots, x_n)$ であるための

必要条件であるという．さらに，n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する 2 つの条件 $F(x_1, \ldots, x_n), G(x_1, \ldots, x_n)$ について，命題

$$\forall x_1, \ldots, x_n (F(x_1, \ldots, x_n) \rightleftarrows G(x_1, \ldots, x_n)) \tag{2.3.9}$$

が真であるとき，$F(x_1, \ldots x_n)$ は $G(x_1, \ldots, x_n)$ であるための必要十分条件であるという．

問 2.3　次の各主張が正しいかどうか判定せよ．

(1) x に関する 2 つの条件 $F(x), G(x)$ について，「$F(x)$ は $G(x)$ であるための必要十分条件である」とき，$G(x)$ は $F(x)$ であるための必要条件ではない．

(2) 2 つの x に関する条件 $F(x), G(x)$ について，「$F(x)$ であるための必要条件は $G(x)$ である」ことを示すには，「$F(x)$ を満たすすべての x が $G(x)$ を満たす」ことを示せばよい．

(3) 2 つの x に関する条件 $F(x), G(x)$ に対し，「$G(x)$ を満たす x で $F(x)$ を満たすものはない」ことが示されたとき，「$\neg F(x)$ は $G(x)$ であるための必要条件である」ことがいえる．

問 2.4　次の記号列を言葉に翻訳せよ．ただし，「$\forall x > 0(\cdots x \cdots)$」は「$\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \to (\cdots x \cdots))$」を略記したものであり，「$\exists x > 0(\cdots x \cdots)$」は「$\exists x \in \mathbb{R}(x > 0 \wedge (\cdots x \cdots))$」の略記である．

(1) $\exists x F(x) \wedge \forall x, y (F(x) \wedge F(y) \to x = y)$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon)$

(3) $\forall y \in Y \exists x \in X (y = f(x))$

(4) $\forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

(5) $\forall a, b > 0 \exists N \in \mathbb{N} (Na > b)$

問 2.5　次の文章を論理記号を用いて表現せよ．

(1) $x \in A$ であれば必ず $x \in B$ となる．

(2) 任意の正の数 ε に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n, m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ について $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となる．

(3) $x^2 + y^2 = 1$ を満たす任意の実数 x, y に対し，$x = \cos\theta$ と $y = \sin\theta$ をともに満たす実数 θ で $0 \leq \theta < 2\pi$ となるものが存在する．

(4) 任意の $x \in S$ に対して $x \leq M$ を成り立たせるような実数 M のなかで最小のものが存在する．

§ 2.4　シークエントを利用した自然演繹

数学では，基礎となる公理を出発点とし，そこから演繹的に証明を重ねることによって数々の定理を導き出している．この節では，数学において通常行われている演繹的推論について，そこからいくつかの規則を抽出し，証明の形式化を試みる．

■シークエント　命題（条件）の有限列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ および命題（条件）B について，「$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を仮定すると B を導くことができる」ことを

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \Longrightarrow B \tag{2.4.1}$$

と書き表し，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を左辺（前提），B を右辺（結論）とする **シークエント**（sequent）という．ただし，$n = 0$ の場合として，

$$\Longrightarrow B \tag{2.4.2}$$

という形式のシークエントも許し，「前提なしで B が成り立つ」ということを表すものと約束する．

例 2.18　a, b, c を実数として，

$$a > 0, b^2 - 4ac \geq 0 \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + c = 0)$$

は a, b, c に関する条件 $a > 0$ と $b^2 - 4ac \geq 0$ を前提とし，条件 $\exists x \in \mathbb{R}(ax^2+bx+c = 0)$ を結論とするシークエントである．一方，

$$a > 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0 \to \exists x \in \mathbb{R}(ax^2 + bx + c = 0)$$

は a, b, c についての 1 つの条件である．

シークエントの前提に現れる命題（条件）の有限列を Γ や Δ といったギリシャ文字の大文字で表すことが多い．ただし，列とはいってもその列に現れる命題（条件）の種類のみを考え，重複や順序は気にしないことにする．また，命題（条件）の有限列 Γ, Δ について，Γ に現れる命題（条件）は必ず Δ にも現れることを $\Gamma \subset \Delta$ と表すことにする．

例 2.19　A, B, C, D を命題（条件）として，Γ が A, C, B という列を表し，Δ が D, B という列を表すとする．このとき，Γ, Δ という前提を考えるとき，A, C, B, D, B ではなく A, B, C, D と扱ってよい．

命題（条件）A に対し，

$$A \Longrightarrow A \tag{2.4.3}$$

の形のシークエントを A についての（論理的）**始式**（initial sequent）という．「A を仮定すれば A が導ける」という意味のシークエントである．

■**推論規則**　あるシークエントが与えられたとき，そのシークエントから別のシークエントを導くためのルールのことを **推論規則**（inference rule）という．どのような推論規則を採用するかについてはたくさんの流儀がある．ここでは，シークエント計算を用いた古典論理の自然演繹と呼ばれる体系の推論規則を見ていく[*9]．

推論規則は，A, B, C, D, E, F を命題（条件）として，

$$(\text{規則名})\ \frac{A \Longrightarrow B \qquad C \Longrightarrow D}{E \Longrightarrow F}$$

という形式で記述される．これは「もしシークエント $A \Longrightarrow B$ と $C \Longrightarrow D$ がともに成り立つであれば，シークエント $E \Longrightarrow F$ が成り立つ」という意味である．上側にあるシークエントの数が変わっても同様に解釈してほしい．

この資料では，以下に示すような推論規則を採用する．

A, B, C は任意の命題（条件）Γ, Δ は命題（条件）の任意の有限列（空列でもよい），$F(a)$ は自由変数 a に関する任意の条件，t は任意の項とし，$\curlywedge$ は「矛盾」を表す命題とする．変数条件として，$\forall$ 導入においては自由変数 a は $\Gamma, \forall x F(x)$ には現れず，$\exists$ 除去においては自由変数 a は $\Gamma, \exists x F(x), C$ には現れ

[*9] この資料で挙げる体系は，一般に「LK」として知られているものとは形が相当異なるものである．この体系は参考文献の [5] がもとになっている．

ないものとする：

前提の増加 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow B}$ (ただし $\Gamma \subset \Delta$ とする)

$\wedge$ 導入 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \wedge B}$

$\wedge$ 除去 (左) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \wedge B}{\Gamma \Longrightarrow A}$　　$\wedge$ 除去 (右) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \wedge B}{\Gamma \Longrightarrow B}$

$\vee$ 導入 (左) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B}$　　$\vee$ 導入 (右) $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B}$

$\vee$ 除去 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \vee B \qquad A, \Gamma \Longrightarrow C \qquad B, \Gamma \Longrightarrow C}{\Gamma \Longrightarrow C}$

$\neg$ 導入 $\dfrac{A, \Gamma \Longrightarrow \curlywedge}{\Gamma \Longrightarrow \neg A}$　　$\neg$ 除去 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Gamma \Longrightarrow \neg A}{\Gamma \Longrightarrow \curlywedge}$

2 重否定の除去 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \neg\neg A}{\Gamma \Longrightarrow A}$　　$\rightarrow$ 導入 $\dfrac{A, \Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \rightarrow B}$

$\rightarrow$ 除去（modus ponens） $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Gamma \Longrightarrow A \rightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow B}$

$\forall$ 導入 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow F(a)}{\Gamma \Longrightarrow \forall x F(x)}$　　$\forall$ 除去 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \forall x F(x)}{\Gamma \Longrightarrow F(t)}$

$\exists$ 導入 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow F(t)}{\Gamma \Longrightarrow \exists x F(x)}$

$\exists$ 除去 $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \exists x F(x) \qquad F(a), \Gamma \Longrightarrow C}{\Gamma \Longrightarrow C}$

$\forall$ 導入と $\exists$ 除去には変数条件が課されている．$\forall$ 導入の推論規則

$$\forall\text{導入}\ \frac{\Gamma \Longrightarrow F(a)}{\Gamma \Longrightarrow \forall x F(x)}$$

に課された変数条件は「自由変数 a は $\Gamma, \forall x F(x)$ に現れないこと」である．推論規則としての意味は「任意の自由変数 a に対し，Γ から $F(a)$ が導けたのであれば，Γ から $\forall x F(x)$ が導ける」という意味であるから，Γ と $\forall x F(x)$ に a が現れてはいけないというのはある意味で当然ともいえる．

$\forall$ 導入の推論規則は「Γ から $\forall x F(x)$ を導きたいとき，代わりに自由変数 a を任意にとり，その a に対して Γ から $F(a)$ を導いてよい」というように解釈することができる．$\forall x F(x)$ は「すべて（all）の x に対して $F(x)$」という意味であり，自由変数 a を任意にとった場合の $F(a)$ というのは「任意の（arbitrary）a に対して $F(a)$」という意味である．両者のニュアンスは少し異なる．前者は「無限に多くある変数 x を一挙に見てそのすべてが $F(x)$ を満たす」というニュアンスであるが，後者は「無限に多くある変数 x の中から a を 1 つ任意に選び出し，その 1 つの a が $F(a)$ を満たす」というニュアンスである．前者から後者を結論してよいという推論規則が $\forall$ 除去であり，後者から前者を結論してよいという推論規則が $\forall$ 導入である．無限に多くある x のすべてが $F(x)$ を満たすことを示すのは有限の時間しか生きられない我々には不可能である．しかし，任意に 1 つとった自由変数 a が $F(a)$ を満たすことを示すのは有限の時間でも可能である．両者を別物として考えてしまうと数学理論を構築することがとても困難になってしまう．よく“数学においては「すべて」と「任意」は区別しない”と言われるのにはこういう

事情があるのである．

∃除去の推論規則

$$\exists\text{除去}\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \exists x F(x) \qquad F(a), \Gamma \Longrightarrow C}{\Gamma \Longrightarrow C}$$

にも「自由変数 a は $\Gamma, \exists x F(x), C$ には現れない」という変数条件が課されている．推論規則の意味としては「Γ から $F(x)$ を満たす x が存在することがわかったとする．$F(x)$ を満たす x を 1 つとり，仮に a という名前をつけたとして，a がたとえどんなものであったとしても $F(a)$ と Γ から C が導けたとするならば，Γ だけから C を導ける」という意味であるからこの変数条件にも納得がいくであろう．

■シークエント計算　我々がいま導入した推論規則は，命題結合記号や限定記号の「意味」を考えればごく「自然」なものである．

ここからは，命題結合記号や限定記号の「意味」は忘れ，これらの推論規則のみをもとにしてシークエントを導出し，演繹的推論を形式的な記号操作として実行することを考える．

命題（条件）の有限列 Γ と命題（条件）A について，シークエント $\Gamma \Longrightarrow A$ が **導出可能**（derivable）であるとは

(1) $\Gamma \Longrightarrow A$ が始式の形をしている．
(2) すでに導出可能とわかっているいくつかのシークエントに対して推論規則を適用することで $\Gamma \Longrightarrow A$ が得られる．

のいずれかが成り立つことをいう．推論規則においては始式については言及されなかったが，始式は必ず導出可能であることを認めるのである．これは，始式を公理として採用したことに相当する．

命題（条件）A について，シークエント

$$\Longrightarrow A$$

が導出可能であることを，A は **証明可能**（provable）であるという．

また，2 つの命題（条件）A, B について，2 つのシークエント $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow A$ がともに導出可能であるとき，A と B は **同値**（equivalent）であるといい，

$$A \equiv B \tag{2.4.4}$$

と書き表す[*10]．

この資料では，命題結合記号「$\to$」とシークエントを構成する記号「$\Longrightarrow$」を異なる記号として導入した．しかし，「意味」としてはそれほど変わるわけではない．それを象徴するのが次の定理である．

定理 2.1（演繹定理）　命題（条件）A, B について，シークエント $A \Longrightarrow B$ が導出可能であるための必要十分条件は，命題（条件）$A \to B$ が証明可能であることである．

［証明］（必要性）シークエント $A \Longrightarrow B$ が導出可能であるとする．このとき，

$$\to \text{導入}\ \cfrac{\overset{\text{仮定}}{A \Longrightarrow B}}{\Longrightarrow A \to B}$$

*10 「$\Longleftrightarrow$」という記号が使いたくなるが，この資料で言及しないもろもろの事情により，「$\Longleftrightarrow$」という記号はここでは用いない．「$\Longleftrightarrow$」という記号は日本語の「同値である」の略記であると思っておけばよい．

よって，$A \to B$ は証明可能である．
（十分性）$A \to B$ が証明可能であると仮定する．このとき，

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\text{仮定}}{\Longrightarrow A \to B}}{A \Longrightarrow A \to B} \quad \overset{\text{始式}}{A \Longrightarrow A}}{A \Longrightarrow B} \ \to \text{除去}
$$

従って，シークエント $A \Longrightarrow B$ は導出可能である．　□

定理 2.1 の証明のように，「前提の増加」以外の推論規則については自分が何の推論規則を用いたかを書き記しておくのがお約束である．

また，定理 2.1 により，以下のことはすぐにわかる：

系　命題（条件）A, B について，A と B が同値であるための必要十分条件は，命題（条件）$A \rightleftarrows B$ が証明可能であることである．

命題（条件）の同値を表す記号 $\equiv$ は次の関係を満たす．証明は容易であろう．

補題 2.1　命題（条件）A, B, C について，次の関係が成り立つ．

1. $A \equiv A$ となる．
2. $A \equiv B$ ならば $B \equiv A$ となる．
3. $A \equiv B$ かつ $B \equiv C$ ならば，$A \equiv C$ となる．

「矛盾からは何でも導ける」というのはよく一般に言われることであるが，それを象徴するのが次の補題 2.2 である．

補題 2.2（矛盾に関する推論法則）　Γ を命題（条件）の有限列，C を任意の命題（条件）とする．このとき，矛盾に関する推論法則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \curlywedge}{\Gamma \Longrightarrow C}$$

が成り立つ.

［証明］シークエント $\Gamma \Longrightarrow \curlywedge$ が導出可能であると仮定して，シークエント $\Gamma \Longrightarrow C$ が導出可能であることを示せばよい.

$$\neg\text{導入}\ \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定}\\ \Gamma \Longrightarrow \curlywedge\end{array}}{\neg C, \Gamma \Longrightarrow \curlywedge}}{\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \neg\neg C}{\Gamma \Longrightarrow C}\ 2\,\text{重否定の除去}}$$

従って，シークエント $\Gamma \Longrightarrow \curlywedge$ が導出可能であれば，シークエント $\Gamma \Longrightarrow C$ も導出可能である. □

今後，矛盾に関する推論法則も用いることにする.

推論法則として有名なものをもうひとつ導いておこう.

補題 2.3（cut 規則）　Γ, Δ を任意の命題（条件）の有限列とし，A, B を任意の命題（条件）とする．このとき，cut 規則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad A, \Delta \Longrightarrow B}{\Gamma, \Delta \Longrightarrow B}$$

が成り立つ.

［証明］2 つのシークエント $\Gamma \Longrightarrow A$ と $A, \Delta \Longrightarrow B$ がともに導出可能であるとすると

$$\to\text{除去}\ \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定}\\ \Gamma \Longrightarrow A\end{array}}{\Gamma, \Delta \Longrightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定}\\ A, \Delta \Longrightarrow B\end{array}}{\Delta \Longrightarrow A \to B}\ \to\text{導入}}{\Gamma, \Delta \Longrightarrow A \to B}}{\Gamma, \Delta \Longrightarrow B}$$

よって，シークエント $\Gamma, \Delta \Longrightarrow B$ は導出可能である． □

cut 規則は三段論法とも呼ばれている．実際，Γ をひとつの命題（条件）P であるとし，A, B をそれぞれ命題（条件）Q, R におきかえ，Δ を空列とみなせば，cut 規則により

$$\frac{P \Longrightarrow Q \qquad Q \Longrightarrow R}{P \Longrightarrow R}$$

という推論ができることになる．今後は cut 規則も推論法則として妥当なものとして利用していくことにする．

次の定理 2.2 は，古典論理における非常に重要な定理である．

定理 2.2（排中律）　任意の命題（条件）A について，$A \lor \neg A$ は証明可能である．

［証明］シークエント $\Longrightarrow A \lor \neg A$ を導出する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{始式}}{A \Longrightarrow A}}{A \Longrightarrow A \lor \neg A}\,\lor\text{導入}}{A, \neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow A \lor \neg A} \qquad \dfrac{\overset{\text{始式}}{\neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \neg(A \lor \neg A)}}{A, \neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \neg(A \lor \neg A)}}{A, \neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \bot}\,\neg\text{除去}}{\neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \neg A}\,\neg\text{導入}}{\neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow A \lor \neg A}\,\lor\text{導入} \qquad \overset{\text{始式}}{\neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \neg(A \lor \neg A)}}{\neg(A \lor \neg A) \Longrightarrow \bot}\,\neg\text{除去}}{\Longrightarrow \neg\neg(A \lor \neg A)}\,\neg\text{導入}}{\Longrightarrow A \lor \neg A}\,2\text{重否定の除去}$$

従って，$A \lor \neg A$ は証明可能である． □

定理 2.2 の証明を言葉に翻訳してみよう．

> $\neg(A \vee \neg A)$ を仮定して矛盾を導く．もし A であるとすると，$A \vee \neg A$ となり，これは $\neg(A \vee \neg A)$ に矛盾する．従って，$\neg A$ でなければばならない．しかしこの場合も $A \vee \neg A$ となり，やはり $\neg(A \vee \neg A)$ に矛盾する．よって，$\neg\neg(A \vee \neg A)$，すなわち $A \vee \neg A$ となる．

どの箇所でどの推論規則が使われているか確認してほしい．言葉での証明においては「仮定する」という文言が出てきたが，シークエント計算においては始式を持ち出したことに相当する．

定理 2.2 の証明では，証明したい命題 $A \vee \neg A$ の否定 $\neg(A \vee \neg A)$ を仮定し，矛盾を導くことによって証明を行った．一般に，命題（条件）A を証明する代わりに A の否定 $\neg A$ を仮定し，そこから矛盾を導く証明法のことを **背理法**（reductio ad absurdum）という．背理法においては本質的に 2 重否定の除去が使われていることに注意せよ[*11]．

問 2.6　$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は明らかに実数である．命題 A を「$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数である」と定めたとき，A に排中律を適用することで，無理数 a, b で a^b が有理数になるものが存在することを示せ．

定理 2.2 の証明では，推論規則の適用過程を図に書き表してある．一般に，シークエントへの推論規則の適用過程を表した図形を **導出図**（derivation diagram）と呼ぶ．

[*11] A を仮定して矛盾を導き，そこから $\neg A$ を結論する証明法も背理法と呼ばれることがあるが，この 2 つは厳密には区別して扱われるべき証明法である．

2 重否定については少し補足をしておこう．

補題 2.4　命題（条件）A について，

$$\neg\neg A \equiv A \tag{2.4.5}$$

が成り立つ．

［証明］まずはシークエント $\neg\neg A \Longrightarrow A$ を導出しよう．

$$\text{2 重否定の除去}\ \dfrac{\overset{\text{始式}}{\neg\neg A \Longrightarrow \neg\neg A}}{\neg\neg A \Longrightarrow A}$$

従って，シークエント $\neg\neg A \Longrightarrow A$ は導出可能である．

次に，シークエント $A \Longrightarrow \neg\neg A$ を導出する．

$$\neg\ \text{除去}\ \dfrac{\dfrac{\overset{\text{始式}}{A \Longrightarrow A}}{A, \neg A \Longrightarrow A} \qquad \dfrac{\overset{\text{始式}}{\neg A \Longrightarrow \neg A}}{A, \neg A \Longrightarrow \neg A}}{\neg\ \text{導入}\ \dfrac{A, \neg A \Longrightarrow \curlywedge}{A \Longrightarrow \neg\neg A}}$$

よって，シークエント $A \Longrightarrow \neg\neg A$ も導出可能であり，従って式 (2.4.5) が成り立つ．　□

補題 2.4 の証明において，シークエント $A \Longrightarrow \neg\neg A$ は 2 重否定の除去の推論規則を使わずに導出できたことに留意されたい．

シークエントを導出する際，導出図を構成するのが基本となるが，シークエントに番号を振って書き並べる方法もある．次の定理 2.3 の証明で実例を見せることにする．

定理 2.3　命題（条件）A, B に対し，

$$A \to B \equiv \neg A \vee B \tag{2.4.6}$$

が成り立つ．

［証明］まずは，シークエント $A \to B \Longrightarrow \neg A \vee B$ を導出する．

1. $A \to B \Longrightarrow A \to B$　［始式］
2. $\neg(\neg A \vee B) \Longrightarrow \neg(\neg A \vee B)$　［始式（背理法で示す）］
3. $A \Longrightarrow A$　［始式］
4. $A, A \to B \Longrightarrow B$　［1., 3. から $\to$ 除去による］
5. $A, A \to B \Longrightarrow \neg A \vee B$　［4. から $\vee$ 導入による］
6. $A, A \to B, \neg(\neg A \vee B) \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 5. から $\neg$ 除去による］
7. $A \to B, \neg(\neg A \vee B) \Longrightarrow \neg A$　［6. から $\neg$ 導入による］
8. $A \to B, \neg(\neg A \vee B) \Longrightarrow \neg A \vee B$　［7. から $\vee$ 導入による］
9. $A \to B, \neg(\neg A \vee B) \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 8. から $\neg$ 除去による］
10. $A \to B \Longrightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$　［9. から $\neg$ 導入による］
11. $A \to B \Longrightarrow \neg A \vee B$　［10. から 2 重否定の除去による］

次に，シークエント $\neg A \vee B \Longrightarrow A \to B$ を導出する．

1. $\neg A \vee B \Longrightarrow \neg A \vee B$　［始式］
2. $A \Longrightarrow A$　［始式］
3. $\neg A \Longrightarrow \neg A$　［始式］
4. $A, \neg A \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 3. から $\neg$ 除去による］
5. $A, \neg A \Longrightarrow B$　［4. から矛盾による］
6. $B \Longrightarrow B$　［始式］
7. $A, \neg A \vee B \Longrightarrow B$　［1., 5., 6. から $\vee$ 除去による］
8. $\neg A \vee B \Longrightarrow A \to B$　［7. から $\to$ 導入による］

従って，$A \to B \equiv \neg A \lor B$ が成り立つ．　□

定理 2.3 の証明のように，表記を簡単にするためにも，シークエントの導出において，前提の増加の適用は省略することにする．

定理 2.4（命題論理における De Morgan の法則）　命題（条件）A, B について，

$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \tag{2.4.7}$$

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \tag{2.4.8}$$

が成り立つ．

［証明］式 (2.4.7) のみ示す．式 (2.4.8) も同様である．

1. $\neg(A \lor B) \Longrightarrow \neg(A \lor B)$　［始式］
2. $A \Longrightarrow A$　［始式］
3. $A \Longrightarrow A \lor B$　［2. から $\lor$ 導入による］
4. $A, \neg(A \lor B) \Longrightarrow \curlywedge$　［1., 3. から $\neg$ 除去による］
5. $\neg(A \lor B) \Longrightarrow \neg A$　［4. から $\neg$ 導入による］
6. $B \Longrightarrow B$　［始式］
7. $B \Longrightarrow A \lor B$　［6. から $\lor$ 導入による］
8. $B, \neg(A \lor B) \Longrightarrow \curlywedge$　［1., 7. から $\neg$ 除去による］
9. $\neg(A \lor B) \Longrightarrow \neg B$　［8. から $\neg$ 導入による］
10. $\neg(A \lor B) \Longrightarrow \neg A \land \neg B$　［5., 9. から $\land$ 導入による］

よって，シークエント $\neg(A \lor B) \Longrightarrow \neg A \land \neg B$ は導出可能である．

1. $\neg A \land \neg B \Longrightarrow \neg A \land \neg B$　［始式］
2. $A \lor B \Longrightarrow A \lor B$　［始式］

3.　$A \Longrightarrow A$　［始式］
4.　$\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg A$　［1. から $\wedge$ 除去による］
5.　$A, \neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \curlywedge$　［3., 4. から $\neg$ 除去による］
6.　$B \Longrightarrow B$　［始式］
7.　$\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg B$　［1. から $\wedge$ 除去による］
8.　$B, \neg A \wedge B \Longrightarrow \curlywedge$　［6., 7. から $\neg$ 除去による］
9.　$A \vee B, \neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 5., 8. から $\vee$ 除去による］
10.　$\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg(A \vee B)$　［9. から $\neg$ 導入による］

よって，シークエント $\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg(A \vee B)$ は導出可能である．
　以上より，$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ となる．　□

　述語論理についても，命題論理における De Morgan の法則と類似した関係が成り立つ．

定理 2.5（述語論理における De Morgan の法則）　任意の述語 F について

$$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x) \tag{2.4.9}$$
$$\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x) \tag{2.4.10}$$

が成り立つ．

［**証明**］式 (2.4.9) の導出をする．まず $\neg \forall x F(x) \Longrightarrow \exists x \neg F(x)$ を導く．

1.　$\neg \forall x F(x) \Longrightarrow \neg \forall x F(x)$　［始式］
2.　$\neg \exists x \neg F(x) \Longrightarrow \neg \exists x \neg F(x)$　［始式（背理法で示す）］
3.　$\neg F(a) \Longrightarrow \neg F(a)$　［始式（a は新たな自由変数）］

4. $\neg F(a) \Longrightarrow \exists x \neg F(x)$　［3. から ∃ 導入による］
5. $\neg\exists x \neg F(x), \neg F(a) \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 4. から ¬ 除去による］
6. $\neg\exists x \neg F(x) \Longrightarrow \neg\neg F(a)$　［5. から ¬ 導入による］
7. $\neg\exists x \neg F(x) \Longrightarrow F(a)$　［6. から 2 重否定の除去による］
8. $\neg\exists x \neg F(x) \Longrightarrow \forall x F(x)$　［7. から ∀ 導入による］
9. $\neg\exists x \neg F(x), \neg\forall x F(x) \Longrightarrow \curlywedge$　［1., 8. から ¬ 除去による］
10. $\neg\forall x F(x) \Longrightarrow \neg\neg\exists x \neg F(x)$　［9. から ¬ 導入による］
11. $\neg\forall x F(x) \Longrightarrow \exists x \neg F(x)$　［10. から 2 重否定の除去による］

言葉への翻訳：$\neg\forall x F(x)$ という仮定のもと，$\exists x \neg F(x)$ を導くことを考える．$\neg\exists x \neg F(x)$ だとして矛盾を導くことにする．自由変数 a を任意にとって $F(a)$ が成り立つことを示したいのだが，これも $\neg F(a)$ を仮定して矛盾を導くことにする．

さて，$\neg F(a)$ より $\exists\neg x F(x)$ であるが，これは $\neg\exists x \neg F(x)$ に矛盾する．従って $\neg\neg F(a)$，すなわち $F(a)$ である．自由変数 a は任意だったので $\forall x F(x)$ となり，これは $\neg\forall x F(x)$ に矛盾する．以上より，$\neg\neg\exists x \neg F(x)$，すなわち $\exists x \neg F(x)$ となる．

次に，$\exists x \neg F(x) \Longrightarrow \neg\forall x F(x)$ を導く．

1. $\exists x \neg F(x) \Longrightarrow \exists x \neg F(x)$　［始式］
2. $\forall x F(x) \Longrightarrow \forall x F(x)$　［始式］
3. $\neg F(a) \Longrightarrow \neg F(a)$　［始式（a は新たな自由変数）］
4. $\forall x F(x) \Longrightarrow F(a)$　［2. から ∀ 除去による］
5. $\forall x F(x), \neg F(a) \Longrightarrow \curlywedge$　［3., 4. から ¬ 除去による］
6. $\exists x \neg F(x), \forall x F(x) \Longrightarrow \curlywedge$　［1., 5. から ∃ 除去による］

7. $\exists x \neg F(x) \Longrightarrow \neg \forall F(x)$　　［6. から $\neg$ 除去による］

> 言葉への翻訳：$\exists x \neg F(x)$ という仮定のもと，$\neg \forall x F(x)$ を導くことを考える．$\forall x F(x)$ を仮定して矛盾を導くことにする．
>
> $\exists x \neg F(x)$ だから，$\neg F(a)$ となる自由変数 a が存在する．しかし，$\forall x F(x)$ だから，$F(a)$ とならなくてはならず矛盾する．これは a のとり方に依存しないので，$\neg \forall x F(x)$ が導かれる．

従って，$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$ が成り立つ．式 (2.4.10) も同様である．　$\square$

$\wedge$ と $\vee$ の組み合わせについて考えよう．

定理 2.6（命題論理における分配律）　命題（条件）A, B, C に対し，

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{2.4.11}$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{2.4.12}$$

が成り立つ．

［証明］式 (2.4.11) を示す．式 (2.4.12) も同様に示せる．まずはシークエント $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ を導出しよう．

1. $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow A \wedge (B \vee C)$　　［始式］
2. $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow A$　　［1. から $\wedge$ 除去による］
3. $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow B \vee C$　　［1. から $\wedge$ 除去による］
4. $B \Longrightarrow B$　　［始式］

5. $B, A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow A \wedge B$　［2., 4. から ∧ 導入による］
6. $B, A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　［5. から ∨ 導入による］
7. $C \Longrightarrow C$　［始式］
8. $C, A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow A \wedge C$　［2., 7. から ∧ 導入による］
9. $C, A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　［8. から ∨ 導入による］
10. $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　［3., 6., 9. から ∨ 除去による］

次に，シークエント $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Longrightarrow A \wedge (B \vee C)$ を導出する．

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　［始式］
2. $A \wedge B \Longrightarrow A \wedge B$　［始式］
3. $A \wedge B \Longrightarrow A$　［2. から ∧ 除去による］
4. $A \wedge B \Longrightarrow B$　［2. から ∧ 除去による］
5. $A \wedge B \Longrightarrow B \vee C$　［4. から ∨ 導入による］
6. $A \wedge B \Longrightarrow A \wedge (B \vee C)$　［3., 5. から ∧ 導入による］
7. $A \wedge C \Longrightarrow A \wedge C$　［始式］
8. $A \wedge C \Longrightarrow A$　［7. から ∧ 除去による］
9. $A \wedge C \Longrightarrow C$　［7. から ∧ 除去による］
10. $A \wedge C \Longrightarrow B \vee C$　［9. から ∨ 導入による］
11. $A \wedge C \Longrightarrow A \wedge (B \vee C)$　［8., 10. から ∧ 導入による］
12. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Longrightarrow A \wedge (B \vee C)$　［1., 6., 11. から ∨ 除去による］

従って，$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ が成り立つ． □

問 2.7　命題（条件）A, B, C について

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \tag{2.4.13}$$
$$A \vee B \equiv B \vee A \tag{2.4.14}$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \tag{2.4.15}$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \tag{2.4.16}$$

が成り立つことを示せ．このことから，$A \wedge B \wedge C$ や $A \vee B \vee C$ などと書くことが許されることがわかる．

定理 2.3 と定理 2.4，定理 2.5 により，次の定理 2.7 が導かれる．

定理 2.7　命題（条件）A, B，および述語 F, G について，

$$\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B \tag{2.4.17}$$
$$\neg\forall x(F(x) \to G(x)) \equiv \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \tag{2.4.18}$$

が成り立つ．

［証明］

$$\begin{aligned}\neg(A \to B) &\equiv \neg(\neg A \vee B)\\ &\equiv \neg\neg A \wedge \neg B\\ &\equiv A \wedge \neg B\end{aligned}$$

これで式 (2.4.17) が導かれた．

$$\begin{aligned}\neg\forall x(F(x) \to G(x)) &\equiv \exists x\neg(F(x) \to G(x))\\ &\equiv \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))\end{aligned}$$

よって，式 (2.4.18) も導かれた． □

定理 2.7 の証明では証明済みの定理を用いたが，推論規則を利用してシークエントを導出することによっても（少し長くはなるが）証明できる．

また，定理 2.7 の証明では，以下に挙げる定理 2.8 を暗に用いている．証明はしないがその主張だけは提示しておく．

定理 2.8（置換定理） $\mathscr{F}(X)$ を命題変数 X を含む論理式とする．このとき，命題 A, B について，$A \equiv B$ ならば $\mathscr{F}(A) \equiv \mathscr{F}(B)$ となる．また，$\mathscr{F}(P)$ を述語変数 P を含む論理式とする．述語 F, G に対し，$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$ が証明可能であるならば $\mathscr{F}(F) \equiv \mathscr{F}(G)$ が成り立つ．

ここで，「命題（述語）変数 X を含む論理式」というのは，とりあえず命題（述語）X の真偽によってその真偽が決定される命題とでも思っておけばよい．たとえば，$A \wedge B$ は命題 A, B を含む論理式であり，$\forall x(F(x) \vee G(x))$ は述語 F, G を含む論理式である．

定理 2.7 の証明では，$A \to B \equiv \neg A \vee B$ を根拠に $\neg(A \to B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$ を導き，$\neg\neg A \equiv A$ を根拠に $\neg\neg A \wedge \neg B \equiv A \wedge \neg B$ を導いた．また，任意の自由変数 a に対して

$$\neg(F(a) \to G(a)) \equiv F(a) \wedge \neg G(a)$$

が成り立つ，すなわち

$$\forall x(\neg(F(x) \to G(x)) \rightleftarrows F(x) \wedge \neg G(x))$$

が証明可能であることを根拠に

$$\exists x \neg (F(x) \to G(x)) \equiv \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

を導いたが，ここに定理 2.8 が使われている．

問 2.8　空でない集合 D と D（を含んだ集合）を対象領域とする x の条件 $F(x)$ に対し，次式が成り立つことを示せ．

$$\neg \forall x \in D(F(x)) \equiv \exists x \in D(\neg F(x)) \tag{2.4.19}$$

$$\neg \exists x \in D(F(x)) \equiv \forall x \in D(\neg F(x)) \tag{2.4.20}$$

命題（条件）A, B について，$A \to B$ の形をした命題（条件）について考える．命題（条件）$B \to A$ を $A \to B$ の **逆**（converse）といい，命題（条件）$\neg A \to \neg B$ を $A \to B$ の **裏**（inverse）という．また，命題（条件）$\neg B \to \neg A$ を $A \to B$ の **対偶**（contraposition）と呼ぶ．

定理 2.9　命題（条件）A, B について，

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A \tag{2.4.21}$$

$$B \to A \equiv \neg A \to \neg B \tag{2.4.22}$$

が成り立つ．

［証明］ 式 (2.4.21) を示す．シークエント $A \to B \Longrightarrow \neg B \to \neg A$ を導出する．

1.　$A \to B \Longrightarrow A \to B$　　［始式］
2.　$\neg B \Longrightarrow \neg B$　　［始式］
3.　$A \Longrightarrow A$　　［始式］
4.　$A, A \to B \Longrightarrow B$　　［1., 3. から $\to$ 除去による］

5.　$A, A \to B, \neg B \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 4. から ¬ 除去による］
6.　$A \to B, \neg B \Longrightarrow \neg A$　［5. から ¬ 導入による］
7.　$A \to B \Longrightarrow \neg B \to \neg A$　［6. から → 導入による］

次に，シークエント $\neg B \to \neg A \Longrightarrow A \to B$ を導出する．

1.　$\neg B \to \neg A \Longrightarrow \neg B \to \neg A$　［始式］
2.　$A \Longrightarrow A$　［始式］
3.　$\neg B \Longrightarrow \neg B$　［始式］
4.　$\neg B, \neg B \to \neg A \Longrightarrow \neg A$　［1., 3. から → 除去による］
5.　$A, \neg B, \neg B \to \neg A \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 4. から ¬ 除去による］
6.　$A, \neg B \to \neg A \Longrightarrow \neg\neg B$　［5. から ¬ 導入による］
7.　$A, \neg B \to \neg A \Longrightarrow B$　［6. から 2 重否定の除去による］
8.　$\neg B \to \neg A \Longrightarrow A \to B$　［7. から → 導入による］

従って，式 (2.4.21) は成り立つ．式 (2.4.22) も同様にできる．　□

問 2.9　命題（条件）A, B, C について，

$$A \to (B \to C) \equiv A \wedge B \to C \tag{2.4.23}$$

が成り立つことを示せ．

問 2.10　命題（条件）A, B について，シークエント

$$(A \to B) \to A \Longrightarrow A \tag{2.4.24}$$

を導出せよ．これを **Peirce** の法則という．

限定記号と → の組み合わせには注意が必要である．

定理 2.10　述語 F と x を含まない命題（条件）A に対し，

$$\forall x(F(x) \to A) \equiv \exists x F(x) \to A \tag{2.4.25}$$

$$\exists x(F(x) \to A) \equiv \forall x F(x) \to A \tag{2.4.26}$$

が成り立つ．

［証明］式 (2.4.25) の導出は容易であるから，式 (2.4.26) の導出をする．シークエント $\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \forall x F(x) \to A$ を導出しよう．

1. $\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \exists x(F(x) \to A)$　［始式］
2. $\forall x F(x) \Longrightarrow \forall x F(x)$　［始式］
3. $F(a) \to A \Longrightarrow F(a) \to A$　［始式（a）は新たな自由変数］
4. $\forall x F(x) \Longrightarrow F(a)$　［2. から $\forall$ 除去による］
5. $\forall x F(x), F(a) \to A \Longrightarrow A$　［3., 4. から $\to$ 除去による］
6. $\exists x(F(x) \to A), \forall x F(x) \Longrightarrow A$　［1., 5. から $\exists$ 除去による］
7. $\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \forall x F(x) \to A$　［6. から $\to$ 導入による］

次に，シークエント $\forall x F(x) \to A \Longrightarrow \exists x(F(x) \to A)$ を導出する．

1. $\forall x F(x) \to A \Longrightarrow \forall x F(x) \to A$　［始式］
2. $\neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \neg\exists x(F(x) \to A)$　［始式（背理法で示す）］
3. $\neg F(a) \Longrightarrow \neg F(a)$　［始式（a は新たな自由変数）］
4. $F(a) \Longrightarrow F(a)$　［始式］
5. $\neg F(a), F(a) \Longrightarrow \curlywedge$　［3., 4. から $\neg$ 除去による］
6. $\neg F(a), F(a) \Longrightarrow A$　［5. から矛盾による］
7. $\neg F(a) \Longrightarrow F(a) \to A$　［6. から $\to$ 導入による］

8. $\neg F(a) \Longrightarrow \exists x(F(x) \to A)$　［7. から ∃ 導入による］

9. $\neg F(a), \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 8. から ¬ 除去による］

10. $\neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \neg\neg F(a)$　［9. から ¬ 導入による］

11. $\neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow F(a)$　［10. から 2 重否定の除去による］

12. $\neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \forall x F(x)$　［11. から ∀ 導入による］

13. $\forall x F(x) \to A, \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow A$　［1., 12. から → 除去による］

14. $F(a), \forall x F(x) \to A, \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow A$　［13. から前提の増加による］

15. $\forall x F(x) \to A, \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow F(a) \to A$　［14. から → 導入による］

16. $\forall x F(x) \to A, \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \exists x(F(x) \to A)$　［15. から ∃ 導入による］

17. $\forall x F(x) \to A, \neg\exists x(F(x) \to A) \Longrightarrow \curlywedge$　［2., 16. から ¬ 除去による］

18. $\forall x F(x) \to A \Longrightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \to A)$　［17. から ¬ 導入による］

19. $\forall x F(x) \to A \Longrightarrow \exists x(F(x) \to A)$　［18. から 2 重否定の除去による］

以上で式 (2.4.26) は示された. □

問 2.11　述語 F と x を含まない命題（条件）A に対し

$$\forall x(A \to F(x)) \equiv A \to \forall x F(x) \tag{2.4.27}$$

$$\exists x(A \to F(x)) \equiv A \to \exists x F(x) \tag{2.4.28}$$

が成り立つことを示せ.

最後に限定記号と $\wedge, \vee$ の組み合わせについて言及しておこう.

定理 2.11　述語 F, G に対して

$$\forall x(F(x) \wedge G(x)) \equiv \forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \tag{2.4.29}$$

$$\exists x(F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x F(x) \vee \exists x G(x) \tag{2.4.30}$$

が成り立つ.

［証明］容易である. □

問 2.12　述語 F, G と x を含まない命題（条件）A について

$$\forall x(F(x) \vee A) \equiv \forall x F(x) \vee A \tag{2.4.31}$$

$$\exists x(F(x) \wedge A) \equiv \exists x F(x) \wedge A \tag{2.4.32}$$

が成り立つことを示せ.

問 2.13　2 変数の述語 F に対し,

$$\forall x \forall y F(x, y) \equiv \forall y \forall x F(x, y) \tag{2.4.33}$$

$$\exists x \exists y F(x, y) \equiv \exists y \exists x F(x, y) \tag{2.4.34}$$

が成り立つことを示せ.

問 2.14　n 個の命題（条件）$P_1, P_2, \ldots, P_n$ について，シークエント

$$P_1 \Longrightarrow P_2,\ P_2 \Longrightarrow P_3,\ \ldots,\ P_{n-1} \Longrightarrow P_n,\ P_n \Longrightarrow P_1$$

がすべて導出可能であるとする．このとき，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ はすべて同値であることを示せ．

問 2.14 の結果は，複数の命題がすべて同値であることを示すときにその手順を簡略化する強力な手段となる．たとえば，3 つの命題 A, B, C がすべて同値であることを示すのには，3 つのシークエント

$$A \Longrightarrow B,\ B \Longrightarrow C,\ C \Longrightarrow A$$

を導くだけでよいのである．

§ 2.5　等号について

何か 2 つのものが等しいというとき，我々は「=」という記号を使ってきた．この「=」という記号は，数や関数，行列や図形などの様々な対象に対して使われる．個々の分野においては，議論の対象になるものに応じて「=」の使い方が決定される．たとえば，数 a, b に対して $a = b$ が成り立つことと，図形 S, T に対して $S = T$ が成り立つことの定義は異なるものである．しかしながら，同じ記号を使うだけあって，この「=」が示す「意味」はほとんど同じものである．この節では，「=」という記号を一段上の視点から眺めてみよう．

■等号公理　基礎となる公理をもとに等号について議論しよう．この資料で採用する公理は次の 2 つである．

公理（等号公理）　等号「=」は 2 つの項の関係を表す記号であって，

1. 任意の項 s に対して $s = s$ が成り立つ．
2. 任意の述語 F，および任意の項 s, t に対して，シークエント $s = t \Longrightarrow F(s) \to F(t)$ は導出可能である．

を満たすものであるとする．

性質 1 を **反射律**（reflexive law），性質 2 を**置換法則** という．

今導入した等号公理が妥当であるかどうかは，この公理から導かれる定理を考察するよりほかはない．

定理 2.12（代入原理）　任意の関数記号 f と任意の項 a, b に対して，シークエント

$$a = b \Longrightarrow f(a) = f(b) \tag{2.5.1}$$

は導出可能である．

［証明］ 任意の項 a に対し，$f(a) = f(x)$ を x に関する述語と考え，これを $F(x)$ とおくと，シークエント

$$a = b \Longrightarrow f(a) = f(a) \to f(a) = f(b)$$

は

$$a = b \Longrightarrow F(a) \to F(b)$$

と書き換えられ，置換法則の特別な場合と考えられることに注意する．

1. $a = b \Longrightarrow f(a) = f(a) \to f(a) = f(b)$　　［置換法則］
2. $\Longrightarrow f(a) = f(a)$　　［反射律］

3.　$a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$　　［1., 2. から $\to$ 除去による］

従って，シークエント $a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$ は導出可能である． $\Box$

定理 2.12 において，「関数記号」という用語が出てきたが，これはとりあえず「項に依存して別の項をつくる記号」とでも思っておけばよい．

等号「$=$」は次の 2 つの性質を満たす．証明は演習問題としよう．

定理 2.13　任意の項 a, b, c に対して，次の 2 つのシークエント

$$a = b \Longrightarrow b = a \tag{2.5.2}$$

$$a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = c \tag{2.5.3}$$

はともに導出可能である．

式 (2.5.2) を **対称律**（symmetric law），式 (2.5.3) を **推移律**（transitive law）という．

問 2.15　定理 2.13 を証明せよ．

対称律を用いると，次の定理 2.14 が成り立つことがわかる．

定理 2.14　任意の述語 F，および任意の項 s, t に対し，シークエント

$$s = t \Longrightarrow F(s) \rightleftarrows F(t) \tag{2.5.4}$$

は導出可能である．

■唯一存在記号　等号を用いると，述語 F に対して「$F(x)$ となる x がただひとつ存在する」という命題を表現することができる．たとえば，

$$\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to y = x)) \tag{2.5.5}$$

という命題が「$F(x)$ をとなる x がただ 1 つ存在する」という命題を表すことになる．この命題を

$$\exists! x F(x) \tag{2.5.6}$$

と表すことがある[*12]．

項 s, t に対し，条件 $\neg(s = t)$ を $s \neq t$ と略記する．記号 $\neq$ を用いると，述語 F に対し，「$F(x)$ となる x は少なくとも 2 つ存在する」という命題が

$$\exists x, y((F(x) \wedge F(y)) \wedge x \neq y) \tag{2.5.7}$$

と表現できる．

問 2.16　述語 F に対し，

$$\neg\exists x, y((F(x) \wedge F(y)) \wedge x \neq y) \equiv \forall x, y(F(x) \wedge F(y) \to x = y)$$

が成り立つことを示せ．

問 2.17　述語 F に対し，シークエント

$$\exists! x F(x) \Longrightarrow \exists x F(x) \tag{2.5.8}$$

*12 現代ではあまり使われない記号である．

$$\exists! x F(x) \Longrightarrow \exists x \forall y (F(y) \to y = x) \tag{2.5.9}$$

$$\exists x \forall y (F(y) \to y = x) \Longrightarrow \forall x, y (F(x) \land F(y) \to x = y) \tag{2.5.10}$$

$$\exists x F(x) \land \forall x, y (F(x) \land F(y) \to x = y) \Longrightarrow \exists! x F(x) \tag{2.5.11}$$

$$\neg \exists x F(x) \Longrightarrow \exists x \forall y (F(y) \to y = x) \tag{2.5.12}$$

を導出せよ．ただし，$\exists! x F(x)$ は $\exists x (F(x) \land \forall y (F(y) \to y = x))$ の略記であるとする．

問 2.17 により，

$$\exists! x F(x) \equiv \exists x F(x) \land \forall x, y (F(x) \land F(y) \to x = y) \tag{2.5.13}$$

$$\exists x \forall y (F(y) \to y = x) \equiv \forall x, y (F(x) \land F(y) \to x = y) \tag{2.5.14}$$

が成り立つことがわかる（式 (2.5.14) に関しては排中律を思い出せ）．式 (2.5.13) は「$F(x)$ となる x がただ 1 つ存在する」という命題の別の表記を与えており，式 (2.5.14) は「$F(x)$ となる x はたかだか 1 つである」という命題の 2 つの表記法を与えている．

演習問題略解

問 2.1

(1) 偽

(2) 真

(3) 真

(4) 偽（反例は $x = 3, y = 2$ など）

(5) 偽

(6) 真

問 2.2

(1) 偽（反例は $x = 1$ など）

(2) 真

(3) 偽

(4) 真

(5) 真 （$x = 3$ とでもすればよい）

(6) 偽

問 2.3

(1) 正しくない

(2) 正しい

(3) 正しい

問 2.4

ここに挙げるのはあくまで一例である．細かい言い回しを考えれば，解答として適切なものはいくつも考えられるであろう．

(1) $F(x)$ となる x がただひとつ存在する．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ．

(3) 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在して，$y = f(x)$ となる．

(4) $f(x_1) = f(x_2)$ を満たす任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $x_1 = x_2$ が成り立つ．

(5) 任意の $a, b > 0$ に対して自然数 N で $Na > b$ となるものがとれる．

問 2.5

(1) $\forall x(x \in A \to x \in B)$．（「必ず」とあることを考えれば x には全称記号をつけるのが妥当であろう）

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}(n, m \geq N \to |a_n - a_m| < \varepsilon)$.

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}(x^2 + y^2 = 1 \to \exists \theta \in \mathbb{R}(0 \leq \theta < 2\pi \wedge (x = \cos\theta \wedge y = \sin\theta)))$.

(4) $\exists c \in \mathbb{R}(\forall x \in S(x \leq c) \wedge \forall M \in \mathbb{R}(\forall x \in S(x \leq M) \to c \leq M))$.

問 2.6

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数の場合には $a = b = \sqrt{2}$ とすればよい．$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない場合には，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数であるから $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ とすればよい．

問 2.7

式 (2.4.16) の証明のうち，シークエント $A \vee (B \vee C) \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ の導出をする（ほかのものは省略する）．

1. $A \vee (B \vee C) \Longrightarrow A \vee (B \vee C)$ ［始式］
2. $A \Longrightarrow A$ ［始式］
3. $A \Longrightarrow A \vee B$ ［2. から $\vee$ 導入による］
4. $A \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ ［3. から $\vee$ 導入による］
5. $B \vee C \Longrightarrow B \vee C$ ［始式］
6. $B \Longrightarrow B$ ［始式］
7. $B \Longrightarrow A \vee B$ ［6. から $\vee$ 導入による］
8. $B \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ ［7. から $\vee$ 導入による］

9. $C \Longrightarrow C$ ［始式］
10. $C \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ ［9. から $\vee$ 導入による］
11. $B \vee C \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ ［5., 8., 10. から $\vee$ 除去による］
12. $A \vee (B \vee C) \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ ［1., 4., 11. から $\vee$ 除去による］

問 2.8

式 (2.4.19) を示す.

$$\begin{aligned}\neg\forall x \in D(F(x)) &\equiv \neg\forall x(x \in D \to F(x)) \\ &\equiv \exists x(x \in D \wedge \neg F(x)) \\ &\equiv \exists x \in D(\neg F(x)).\end{aligned}$$

次に式 (2.4.20) を示す.

$$\begin{aligned}\neg\exists x \in D(F(x)) &\equiv \neg\exists x(x \in D \wedge F(x)) \\ &\equiv \forall x\neg(x \in D \wedge F(x)) \\ &\equiv \forall x(\neg(x \in D) \vee \neg F(x)) \\ &\equiv \forall x(x \in D \to \neg F(x)) \\ &\equiv \forall x \in D(\neg F(x)).\end{aligned}$$

問 2.9

シークエント $A \to (B \to C) \Longrightarrow A \wedge B \to C$ の導出をする.

1. $A \to (B \to C) \Longrightarrow A \to (B \to C)$ ［始式］
2. $A \wedge B \Longrightarrow A \wedge B$ ［始式］
3. $A \wedge B \Longrightarrow A$ ［2. から $\wedge$ 除去による］
4. $A \wedge B, A \to (B \to C) \Longrightarrow B \to C$ ［1., 3. から $\to$ 除去による］
5. $A \wedge B \Longrightarrow B$ ［2. から $\wedge$ 除去による］
6. $A \wedge B, A \to (B \to C) \Longrightarrow C$ ［4., 5. から $\to$ 除去による］
7. $A \to (B \to C) \Longrightarrow A \wedge B \to C$ ［6. から $\to$ 導入による］

逆向きのシークエントも同様に導出できる.

問 2.10

1. $(A \to B) \to A \Longrightarrow (A \to B) \to A$ ［始式］
2. $\neg A \Longrightarrow \neg A$ ［始式（背理法で示す）］
3. $A \Longrightarrow A$ ［始式］
4. $\neg A, A \Longrightarrow \curlywedge$ ［2., 3. から $\neg$ 除去による］
5. $\neg A, A \Longrightarrow B$ ［4. から矛盾による］
6. $\neg A \Longrightarrow A \to B$ ［5. から $\to$ 導入による］
7. $\neg A, (A \to B) \to A \Longrightarrow A$ ［1., 6. から $\to$ 除去による］
8. $\neg A, (A \to B) \to A \Longrightarrow \curlywedge$ ［2., 7. から $\neg$ 除去による］
9. $(A \to B) \to A \Longrightarrow \neg\neg A$ ［8. から $\neg$ 導入による］
10. $(A \to B) \to A \Longrightarrow A$ ［9. から 2 重否定の除去による］

問 2.11

定理 2.10 と同様に示せる．

問 2.12

シークエント $\forall x(F(x) \vee A) \Longrightarrow \forall x F(x) \vee A$ は背理法によって導出できる．あとは容易である．

問 2.13

式 (2.4.33) の証明は容易である．式 (2.4.34) の証明のうち，シークエント $\exists x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$ を導出しよう．

1. $\exists x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists x \exists y F(, y)$ ［始式］
2. $\exists y F(a, y) \Longrightarrow \exists y F(a, y)$ ［始式（a は新たな自由変数）］
3. $F(a, b) \Longrightarrow F(a, b)$ ［始式（b は新たな自由変数）］
4. $F(a, b) \Longrightarrow \exists x F(x, b)$ ［3. から $\exists$ 導入による］
5. $F(a, b) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$ ［4. から $\exists$ 導入による］
6. $\exists y F(a, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$ ［2., 5. から $\exists$ 除去による］
7. $\exists x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$ ［1., 6. から $\exists$ 除去による］

逆向きのシークエントもまったく同様にして導出できることは明らかであろう．

問 2.14

cut 規則を繰り返し用いればよい．

問 2.15　式 (2.5.2) を導出する．

1. $a = b \Longrightarrow a = a \to b = a$ ［置換法則］

2. $\Longrightarrow a = a$ ［反射律］
3. $a = b \Longrightarrow b = a$ ［1., 2. から $\to$ 除去による］

次に，式 (2.5.3) を導出する．

1. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = b \wedge b = c$ ［始式］
2. $b = a \Longrightarrow b = c \to a = c$ ［置換法則］
3. $a = b \Longrightarrow b = a$ ［対称律］
4. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = b$ ［1. から $\wedge$ 除去による］
5. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow b = a$ ［3., 4. から cut による］
6. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow b = c \to a = c$ ［2., 5. から cut による］
7. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow b = c$ ［1. から $\wedge$ 除去による］
8. $a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = c$ ［6., 7. から $\to$ 除去による］

問 2.16

証明済みの関係式を用いれば容易であろう．

問 2.17

式 (2.5.10) の導出をする．ほかは省略する．

1. $\exists x \forall y(F(y) \to y = x) \Longrightarrow \exists x \forall y(F(y) \to y = x)$ ［始式］
2. $F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow F(a) \wedge F(b)$ ［始式（a, b は新たな自由変数)］
3. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow \forall y(F(y) \to y = c)$ ［始式（c は新たな自由変数)］
4. $F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow F(a)$ ［2. から $\wedge$ 除去による］
5. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow F(a) \to a = c$ ［3. から $\forall$ 除去による］
6. $\forall y(F(y) \to y = c), F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow a = c$ ［3., 4. から $\to$ 除去による］
7. $F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow F(b)$ ［2. から $\wedge$ 除去による］
8. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow F(b) \to b = c$ ［3. から $\forall$ 除去による］
9. $\forall y(F(y) \to y = c), F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow b = c$ ［7., 8. から $\to$ 除去による］
10. $b = c \Longrightarrow c = b$ ［対称律］

11. $\forall y(F(y) \to y = c), F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow c = b$ ［9., 10. から cut による］
12. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow a = c \wedge c = b$ ［6., 11. から $\wedge$ 導入による］
13. $a = c \wedge c = b \Longrightarrow a = b$ ［推移律］
14. $\forall y(F(y) \to y = c), F(a) \wedge F(b) \Longrightarrow a = b$ ［12., 13. から cut よる］
15. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow F(a) \wedge F(b) \to a = b$ ［14. から $\to$ 導入による］
16. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow \forall y(F(a) \wedge F(y) \to a = y)$ ［15. から $\forall$ 導入による］
17. $\forall y(F(y) \to y = c) \Longrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \to x = y)$ ［16. から $\forall$ 導入による］
18. $\exists x \forall y(F(y) \to y = x) \Longrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \to x = y)$ ［1., 17. から $\exists$ 除去による］

参考文献

[1] 前原 昭二『記号論理入門』，2005 年，日本評論社
これほどわかりやすく書かれた記号論理の解説にはなかなかお目にかかれるものではない．数学を学ぶのであればとりあえず購入していい本である．とはいえ，内容はそれほど豊富というわけではない（それでも本格的に足を突っ込むのでなければ十分）ので，そのあたりは他の本に頼る必要がある．

[2] 鹿島 亮『数理論理学（現代基礎数学）』，2009 年，朝倉書店
この資料のシークエント計算の解説に煮えきらなさを感じた方はこういう本を読むと良い．類書よりもたくさんの話題が取り上げられているお買い得パックである．

[3] 嘉田 勝『論理と集合から始める数学の基礎』，2008 年，日本評論社
ページ数が少ない割にたくさんの話題が解説されている．この資料よりも情報科学に必要な話題が多く取り上げられており，情報系の学生には自信を持っておすすめできる 1 冊である．

[4] 戸田山 和久『論理学をつくる』，2000 年，名古屋大学出版会
本当の意味で 0 からの入門書が欲しい人はこれ．fitch style と

呼ばれる流儀で演繹を行っている．とにかく分厚い．この資料の解説がいかに薄っぺらなものかがよくわかる本である．

[5] 吉田 夏彦『論理学』，1958 年，培風館
この資料のシークエント計算の体系はこの本がもとになっている．現在入手するのは少々苦労するかもしれない．図書館の出番である．

[6] 奥村 晴彦・黒木 裕介『LaTeX 2_ε 美文書作成入門』，2017 年，技術評論社
この本は数学の専門書ではなく，数学を学ぶのなら絶対に知らなければならない LaTeX というフリーの組版システムの解説書である．まさかいつまでも手書きで文章を書くわけでもあるまいから，ちょっとくらい手を出してもバチは当たらないだろうと思う．とりあえず今現在使うのであれば upLaTeX という種類の LaTeX を使うのがおすすめである．

人名索引

用語索引