漸化式の解を推測するアレがアレな件

野口 匠

2018/12/22

漸化式によって帰納的に定義された数列の一般項を求めるという問題は，大学受験レベルの問題でよくあるものである．その中で，「一般項を推測して帰納法で示す」というものがあった．高校の数学 B の教科書を見てみると，次のような問題が記載されている．

問 1　（ここに引用する問題が入る）

この問題に対する解答は次のようになっている．

［解答］ ここに解答

定式化して証明を述べておこう．

定理 1　空でない集合 X と写像 $G\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{\mathbb{N}\langle n\rangle} \longrightarrow X$ が与えられたとする．このとき，$x_0 \in X$ を 1 つ定めるごとに，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で

$$\begin{aligned} &f(0) = x_0 \\ &f(n) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle n\rangle}\right) \quad (n \in \mathbb{N} - \{\,0\,\}) \end{aligned} \tag{1}$$

を満たすものが一意に定まる．

［証明］先に一意性の方から示しておこう．写像 $f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で式 (1) を満たすようなものを任意にとり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ が成り立つことを帰納法で示す．$f(0) = x_0 = g(0)$ より $f(0) = g(0)$ である．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $f(i) = g(i)$ であるとすると，$f|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle} = g|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}$ だから $f(n+1) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}\right) = G\left(g|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}\right) = g(n+1)$ より $f(n+1) = g(n+1)$ となる．ゆえに $f(n) = g(n)$ となるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ となり，$f = g$ を得る．

式 (1) を満たす写像の存在を示そう．自然数 n の条件 $P(n)$ を「写像 $f\colon \mathbb{N}\langle n\rangle \longrightarrow X$ ですべての $m \in \mathbb{N}\langle n\rangle$ に対して $f(m) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle m\rangle}\right)$ を満たすものが存在する」と定める．一意性の証明とまったく同様にして，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ を成り立たせるような写像 f はたかだか 1 つであることが示される．その写像を f_n と表記する．すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを帰納法によって示そう．$\mathbb{N}\langle 0\rangle = \varnothing$ だから，$P(0)$ を成り立たせるような写像 f として空写像がとれる．従って $P(0)$ は成り立つ．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $P(i)$ が成り立つと仮

定する．いま，写像 $f\colon \mathbb{N}\langle n+1\rangle \longrightarrow X$ を

$$f(m) = \begin{cases} G\left(f_m\right) & (m = n \text{ のとき}), \\ f_{m+1}(m) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定めると，この f はすべての $m \in \mathbb{N}\langle n+1\rangle$ に対して $f(m) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle m\rangle}\right)$ を満たす．ゆえに $P(n+1)$ も成り立つから，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ．そこで，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ を

$$f(n) = f_{n+1}(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定めると，この f は式 (1) を満たす． $\square$

定理 1 において，各 $\varPhi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{\mathbb{N}\langle n\rangle}$ に対して $\varPhi \in X^{\mathbb{N}\langle i\rangle}$ となる