漸化式の解を推測するアレがアレな件

NOGUTAKU Lab

2018 年 12 月 24 日

本稿を読む上で，以下の点に注意していただきたい．

- 本稿では，0 を自然数に含めるとする．そのため，引用されている問題や解答が引用元とは若干異なるものになっていることがある．これは，自然数に 0 を含める立場と含めない立場が混在してしまったときに生じる混乱を避けるためである．また，自然数全体の集合と実数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ と表す．
- 集合と写像に関する基本的な知識は既知とし，なんら解説なく用いることにする．前半部分は集合や写像に関する知識がなくても高校の数学 B レベルの知識があれば読めないこともないが，後半部分はほとんど無理だろうと思われる．
- 数学的帰納法のことをしばしば帰納法と略記する．
- 数列を，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像と定義して議論を進める．
- 集合 X, Y に対し，X から Y への写像全体の集合を Y^X と表す．
- 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ と $A \subset X$ に対し，$f|_A$ は f の始集合を A に制限したものを表す．
- 整列集合 $(W, \leq)$ と $x \in W$ に対し，W の部分集合 $\{\, w \in W \mid w < x \,\}$ を $W\langle x\rangle$ と表す．ひとまずは $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{N}\langle n\rangle = \{\, 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$ であることさえわかっていれば問題ない．

1　「推測して帰納法」の問題点

漸化式によって帰納的に定義された数列の一般項を求めるという問題は，大学受験レベルの問題でよくあるものである．その中で，「一般項を推測して帰納法で示す」というものがあった．高校の数学 B の教科書 [1] を見てみると，次のような問題が記載されている．

問 1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_0 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2 - \frac{2}{a_n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ．

教科書ではこの問題は演習問題として載せられているため，詳細な解答は見られない．そこで，出版社が同じであり，かつ大学受験用参考書として定評のある [2] 中の類似した問題を見てみる．

問 2

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{1+3a_n} \quad (n = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ．
(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ．

この問題には詳細な解答が載せられている．

［解答］ $a_1 = 1/4$, $a_2 = 1/7$, $a_3 = 1/10$ だから，$a_n = 1/(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ と推測される．これを帰納法によって示す．$a_0 = 1$, $1/(3 \cdot 0 + 1) = 1$ より $a_0 = 1/(3 \cdot 0 + 1)$ である．$a_k = 1/(3k+1)$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k}{1+3a_k} \\ &= \frac{\frac{1}{3k+1}}{1+3\frac{1}{3k+1}} \\ &= \frac{1}{3k+4} \end{aligned}$$

となる．ゆえにすべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n+1)$ となる．

この解答は，いわゆる受験業界では非常によく知られたものである．また，「数学的帰納法で」という文言を無視すれば，別解として次のようなものがあることも見逃せない．

［別解］ $a_1 = 1/4$, $a_2 = 1/7$, $a_3 = 1/10$ であるから，$a_n = 1/(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ と推測できる．実際，$a_n = 1/(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると，この数列 $\{a_n\}$ は，$a_0 = 1/(3 \cdot 0 + 1) = 1$ を満たし，さらに各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{1+3a_n} &= \frac{\frac{1}{3n+1}}{1+3\frac{1}{3n+1}} \\ &= \frac{1}{3n+4} \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

を満たす．

まず［別解］に関してだが，明確に穴があるように思われる．それは，「数列 $\{1/(3n+1)\}$ 以外に式 (1) を満たす数列が存在するかどうか」がまったく検討されていない点である．このギャップを埋めるには，［別解］に続けて式 (1) を満たす任意の数列 $\{a_n\}$ が $\{1/(3n+1)\}$ に等しいことを示せばよい．すなわち，式 (1) を満たす任意の数列 $\{a_n\}$ に対し，すべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n+1)$ が成り立つことを示せばよい．帰納法によるのが普通だろう．この証明はすでに述べられたような気がしなくもない．実際に書いてみればわかると思うが，**これは［解答］で述べた証明とまったく同じである．**

［解答］と［別解］で何をやったのかを整理しよう．［解答］では，「式 (1) を満たす数列 $\{a_n\}$ を任意にとったとき，すべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n+1)$ が成り立つ」ことを帰納法によって示している．このことからわかるのは，「式 (1) を満たす数列 $\{a_n\}$ で，数列 $\{1/(3n+1)\}$ と等しくないものは存在しない」ということである．このことからわかるのは，式 (1) を満たす数列がたかだか 1 つであるということである．［別解］では，「数列 $\{1/(3n+1)\}$ が式 (1) を満たすこと」を示している．このことから，「式 (1)」を満たす数列が存在することがわかる．

従って，式 (1) を満たす数列が数列 $\{1/(3n+1)\}$ **のみである**ことを示すためには，［解答］と［別解］の両方の記述を合わせなくてはならず，どちらも問題の解答としては不十分なのである[*1]．

2 何が問題なのか

「推測して帰納法」という解法の問題点を述べたが，この言説には致命的な欠陥が存在する．それは，実は［解答］の中で「数列 $\{1/(3n+1)\}$ が式 (1) を満たすこと」とほぼ同じことが示されているのである．

定式化して証明を述べておこう．

定理 1 空でない集合 X と写像 $G\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{\mathbb{N}\langle n\rangle} \longrightarrow X$ が与えられたとする．このとき，$x_0 \in X$ を 1 つ定めるごとに，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で

$$\begin{aligned} &f(0) = x_0, \\ &f(n) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle n\rangle}\right) \quad (n \in \mathbb{N} - \{\,0\,\}) \end{aligned} \tag{2}$$

を満たすものが一意に定まる．

［証明］ 先に一意性の方から示しておこう．写像 $f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で式 (2) を満たすようなものを任意にとり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ が成り立つことを帰納法で示す．$f(0) = x_0 = g(0)$ より $f(0) = g(0)$ である．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $f(i) = g(i)$ であるとすると，$f|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle} = g|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}$ だから $f(n+1) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}\right) = G\left(g|_{\mathbb{N}\langle n+1\rangle}\right) = g(n+1)$ より $f(n+1) = g(n+1)$ となる．ゆえにすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ となり，$f = g$ を得る．

式 (2) を満たす写像の存在を示そう．自然数 n の条件 $P(n)$ を「写像 $f\colon \mathbb{N}\langle n\rangle \longrightarrow X$ ですべての $m \in \mathbb{N}\langle n\rangle$ に対して $f(m) = G\left(f|_{\mathbb{N}\langle m\rangle}\right)$ を満たすものが存在する」と定める．一意性の証明と

[*1] すぐ後にこの言説には致命的な欠陥が存在することを述べる．

まったく同様にして，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $P(n)$ を成り立たせるような写像 f はたかだか 1 つであることが示される．その写像を f_n と表記する．すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを帰納法によって示そう．$\mathbb{N}\langle 0\rangle=\varnothing$ だから，$P(0)$ を成り立たせるような写像 f として空写像がとれる．従って $P(0)$ は成り立つ．各 $n\in\mathbb{N}$ に対し，$i=0,1,\dots,n$ に対して $P(i)$ が成り立つと仮定する．いま，写像 $f\colon\mathbb{N}\langle n+1\rangle\longrightarrow X$ を

$$f(m)=\begin{cases}G\left(f_m\right) & (m=n\text{ のとき}),\\ f_{m+1}(m) & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

と定めると，この f はすべての $m\in\mathbb{N}\langle n+1\rangle$ に対して $f(m)=G\left(f|_{\mathbb{N}\langle m\rangle}\right)$ を満たす．ゆえに $P(n+1)$ も成り立つから，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ．そこで，写像 $f\colon\mathbb{N}\longrightarrow X$ を

$$\begin{aligned}f(0)&=x_0,\\ f(n)&=f_{n+1}(n)\quad(n\in\mathbb{N}-\{\,0\,\})\end{aligned}$$

と定めると，この f は式 (2) を満たす． □

参考文献

[1]改訂版 高等学校 数学 B (数研出版株式会社, 2018).

[2]新課程 チャート式 基礎からの数学Ⅱ +B (数研出版株式会社).