漸化式の解を推測するアレがアレな件

野口 匠

初版：2018 年 12 月 28 日
改訂：2025 年 1 月 26 日

本稿では，しばらくの間は初等・中等教育の慣例に合わせ，自然数は正の整数のことであるとし，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す．「$n \in \mathbb{N}$」は「n は自然数である」ことを表す．また，数学的帰納法のことをしばしば帰納法と略記する．ここでいう数学的帰納法とは，自然数 n に関する条件 $P(n)$ について，

(1) $P(1)$ が成り立つ.
(2) 各 k について，$P(k)$ が成り立つならば $P(k+1)$ が成り立つ

ことが示されたとき，これを根拠にすべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを結論する証明法のことである．さらに,

(1) $P(1)$ が成り立つ.
(2) 各 k について，$P(1), P(2), \ldots, P(k)$ がすべて成り立つならば $P(k+1)$ が成り立つ

が示されたとき，これを根拠にすべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを結論する証明法のことも数学的帰納法と呼ぶことにする.

1 「推測して帰納法」の問題点

漸化式によって帰納的に定義された数列の一般項を求めるという問題は，大学受験レベルの問題でよくあるものである．その中で,「一般項を推測して帰納法で示す」というものがあった．この解法に関しては，例えば [1] において批判的な議論がなされている．しかし，インターネット上で調べてみた限り，[1] も含めてあまり踏み込んだ議論はなされてはいないと感じたので，あらためて議論していくことにする.

高校の数学 B の教科書 [2] を見てみると，次のような問題が記載されてる.

問 1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2 - \frac{2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ．

教科書ではこの問題は演習問題として載せられているため，詳細な解答は載っていない．解答としては「$a_n = (n+1)/n$ と推測できる」とあるのみである．そこで，出版社が同じであり，かつ大学受験用参考書として定評のある [3] 中の類似した問題を見てみる．

問 2

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ．

この問題には詳細な解答が載せられている．以下に概略を記しておく．

[解答]　$a_2 = 1/4$, $a_3 = 1/7$, $a_4 = 1/10$ だから，$a_n = 1/(3n-2)$ $(n \in \mathbb{N})$ と推測される．これを帰納法によって示す．$a_1 = 1/(3 \cdot 1 - 2) = 1$ より $n = 1$ では成り立つ．$a_k = 1/(3k-2)$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + 3a_k} = \frac{\frac{1}{3k-2}}{1 + 3\frac{1}{3k-2}} = \frac{1}{3k+1}$$

となる．ゆえにすべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n-2)$ となる．

この解答は，いわゆる受験業界では非常によく知られたものである．また,「数学的帰納法で」という文言を無視すれば，別解として次のようなものがあることも見逃せない．

[別解]　$a_2 = 1/4$, $a_3 = 1/7$, $a_4 = 1/10$ であるから，$a_n = 1/(3n-2)$ $(n \in \mathbb{N})$ と推測できる．実際，$a_n = 1/(3n-2)$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると，この数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1/(3 \cdot 1 - 2) = 1$ を満たし，さ

らに各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{1+3a_n} &= \frac{\dfrac{1}{3n-2}}{1+3\dfrac{1}{3n-2}} \\
&= \frac{1}{3n+1} \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}
$$

を満たす.

まず［別解］に関してだが，明確に穴があるように思われる．それは,「数列 $\{1/(3n-2)\}$ 以外に式 (1) を満たす数列が存在するかどうか」がまったく検討されていない点である．このギャップを埋めるには,［別解］に続けて式 (1) を満たす任意の数列 $\{a_n\}$ が $\{1/(3n-2)\}$ に等しいことを示せばよい．すなわち，式 (1) を満たす任意の数列 $\{a_n\}$ に対し，すべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n-2)$ が成り立つことを示せばよい．帰納法によるのが普通だろう．この証明はすでに述べられたような気がしなくもない．実際に書いてみればわかると思うが，これは **［解答］で述べた証明とまったく同じである．**

［解答］と［別解］で何をやったのかを整理しよう．［解答］では,「式 (1) を満たす数列 $\{a_n\}$ を任意にとったとき，すべての自然数 n に対して $a_n = 1/(3n-2)$ が成り立つ」ことを帰納法によって示している．このことからわかるのは,「式 (1) を満たす数列 $\{a_n\}$ で，数列 $\{1/(3n-2)\}$ と等しくないものは存在しない」ということである．つまり,［解答］では式 (1) を満たす数列が**たかだか** 1 つであるということを示しているのである．［別解］では,「数列 $\{1/(3n-2)\}$ が式 (1) を満たすこと」を示している．すなわち,［別解］では「式 (1)」を満たす数列が存在することを示しているのである．

従って，式 (1) を満たす数列が数列 $\{1/(3n-2)\}$ **のみである**ことを示すためには,［解答］と［別解］の両方の記述を合わせなくてはならず，どちらも問題の解答としては不十分なのである．

2　何が問題なのか

「推測して帰納法」という解法の問題点を述べたが，この言説に対して以下のような反論を想定することができる．それは，実は［解答］の中で「数列 $\{1/(3n-2)\}$ が式 (1) を満たすこと」とほぼ同じことが示されているというものである．

［解答］の中で，$1/(3\cdot 1-2) = 1$ であり，$a_k = 1/(3k-2)$ と仮定すると $a_1 = 1$ かつ $a_{k+1} = a_k/(1+3a_k)$ となることが示されている[*1]が，これはまさに「数列 $\{1/(3n-2)\}$ が式 (1) を満たすこと」の証明にほかならない．となると,［解答］は式 (1) を満たす数列の存在と一意性を同時に示しているのだと解釈できるであろう，というのが想定される反論である．

[*1] 2 つ目については，計算の順番こそ逆だが等号なので問題ない．

しかし，この反論は反論として成立してはいない．確かに計算過程はそれっぽいが，「数列 $\{a_n\}$ が式 (1) を満たすこと」が仮定されているからである．もしも存在と一意性を同時に示したいのであれば，示すべきは

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ が式 (1) を満たす} \iff \text{各 } n \text{ について } a_n = 1/(3n-2) \text{ が成り立つ} \tag{2}$$

である．［解答］では式 (2) のうち $\Longrightarrow$ の方を，［別解］の方は式 (2) のうち $\Longleftarrow$ の方をそれぞれ示している．

問 1 や問 2 の問題文には「推測が正しいことを帰納法で証明せよ」などとは書かれておらず，「それを帰納法で証明せよ」と書かれているのみである．しかし，この「それ」が指す文言が「推測が正しいこと」であることは疑いようもない．そしてこの「推測正しいこと」が何を指すかを考えると，問 2 でいえば「$a_n = 1/(3n-2)$ が確かに任意の自然数 n に対して式 (1) を満たすこと」であろう．これは推測が間違っていたときのことを考えるとわかりやすい．例えば，$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1\ (n \in \mathbb{N})$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ であるが，このことから $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)$ と推測したとすると，この推測は間違いである．実際，$n = 4$ のとき，漸化式からは $a_4 = a_3 + 1 = 4$ となるが，$4 + (4-1)(4-2)(4-3) = 10$ となり，$n = 4$ のときには $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)$ は漸化式を満たさない．

式 (1) のような漸化式を満たす数列を考えるとき，のちに定理 1 で示すように，漸化式を満たすような数列が一意に存在することが知られている．漸化式に関する問題が軒並み「次の条件を満たす数列をすべて求めよ」ではなく「次の条件によって定義される数列の一般項を求めよ」と書かれているのはそのためである．このことを「暗黙の了解」とするならば，［解答］も［別解］も問題の解答として完全なものになる[*2]．

一意存在性がわかっているものについての問題なので，多少雑な解答であろうとたいていの場合は数学的に正当なものとなる．しかしながら，筆者がもっとも問題視しているのは解答が数学的に正しいかどうかではなく，何を仮定，もしくは前提として何を証明しているのかがあやふやなまま問題の解き方のみが盛んに議論されていることである．

以上の主張に関連して，[3] にある問題で解答に「推測して帰納法」を使っている問題をもう 1 問挙げてみよう．

問 3　数列 $\{a_n\}$（ただし $a_n > 0$）について次の関係式が成り立つとき，一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ．

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_n}^3. \tag{3}$$

この問題にも解答が載せられている．[3] にある解答の概略を述べよう．

[解答]　関係式において，$a_n > 0$ であるから，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ である．以上から，$a_n = n$

*2 ［解答］では存在性を，［別解］では一意性をそれぞれ利用し，もう片方は直接証明している．

と推測できる．これを帰納法で示す．$a_1 = 1$ である．$a_1 = 1, \ldots, a_k = k$ と仮定すると，

$$(1 + 2 + \cdots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + {a_{k+1}}^3,$$

（中略）

$$a_{k+1}(a_{k+1} + k)(a_{k+1} - k - 1) = 0.$$

ゆえに $a_{k+1} > 0$ だから $a_{k+1} = k + 1$ となる．従って，任意の自然数 n に対して $a_n = n$ である．

問 3 の解答では，文中の条件（式 (3) と $a_n > 0$）を満たす数列 $\{a_n\}$ について，任意の自然数 n に対して $a_n = n$ が成り立つことを帰納法で示している．これはつまり，「任意の数列 $\{a_n\}$ について，文中の条件が成り立つならば任意の自然数 n に対して $a_n = n$ である」という主張を証明したことになる．そして，問 3 の［解答］の中には「数列 $\{n\}$ が条件を満たすこと」の証明はどこにもない．すなわち，問 3 の［解答］では「推測が正しいこと」は証明されてはいないのである．にもかかわらず，このような形式の解答は「推測して帰納法」なる解法として多くの大学受験用の参考書やウェブサイトで紹介されている．

参考書の答えが間違っているなどということは，正直このような文章を書いてまで指摘しなければいけないことではない．もっとも問題視すべきは，ちょっと考えれば間違いであることはすぐにわかるのに，「参考書にそう書いてあったから」とか「そう教わったから」として思考停止してしまっていることである．数学教員を志している筆者としては，きちんと批判をしておく必要があると考えている．

3　教科書・参考書の訂正案

問 2 や問 3 の解答の問題点を挙げた．そこでは，ほんの少し考えるだけで，一般に広まっている「推測して帰納法」という解法に誤りがあることを見出すことができることを述べたのであった．では，どう訂正するべきかと考えるのは自然なことである．そこで，筆者は次のような訂正案を提案する．もう一度問題を提示しておく．

問 4

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{4}$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ．

［解答］ $a_n = 1/(3n - 2)$ と推定できる．実際，$a_n = 1/(3n - 2)$ とすると，この a_n は $a_1 =$

$1/(3 \cdot 1 - 2) = 1$ を満たし，さらに各 n について

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{1+3a_n} &= \frac{\dfrac{1}{3n-2}}{1+3\dfrac{1}{3n-2}} \\ &= \frac{1}{3n+1} \\ &= a_{n+1}\end{aligned}$$

を満たす．また，数列 $\{b_n\}$ が式 (4) を満たすとすると，$b_1 = 1 = 1/(3 \cdot 1 - 2)$ が成り立ち，さらに $b_k = 1/(3k-2)$ と仮定すると，上と同様の計算によって $b_{k+1} = 1/(3k+1)$ が成り立つ．従って数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $b_n = 1/(3n-2)$ が成り立つので，式 (4) を満たす数列 $\{a_n\}$ は $a_n = 1/(3n-2)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のみである．

問 5　数列 $\{a_n\}$（ただし $a_n > 0$）について次の関係式が成り立つとき，一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ．

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_n}^3. \tag{5}$$

[解答]　$a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と推測できる．実際，$a_n = n$ とすると

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^3$$

より式 (5) は成り立ち，さらにつねに $a_n > 0$ である．また，数列 $\{b_n\}$ がつねに $b_n > 0$ で，かつ式 (5) を満たすとすると，問 3 の［解答］と同様の議論により，$b_1 = 1$ が成り立ち，$b_k = k$ と仮定すると $b_{k+1} = k + 1$ となることがわかる．ゆえにすべての自然数 n に対して $b_n = n$ となるので，条件を満たす数列は $a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のみである．

これらの解答では，どのように議論が進んでいるかが明確になっていることがわかるだろう．また，アヤシイ「暗黙の了解」も一切使っていない．もともと，一般項が具体的にわかる数列においては，「漸化式の解の存在と一意性」という仮定は不要である．

ただし，漸化式によって定義される数列の存在と一意性はそれ自体が非常に重要なトピックである．このことに習熟するという意味でも，特に［別解］の方はそのまま使用してもまったく問題ないように思う．逆に，普段取り沙汰されがちな［解答］は，やたら仰々しい割に証明が容易な存在性を「暗黙の了解」としている点においてナンセンスな解答であるように思う．総じていうと，筆者は［別解］か訂正案のいずれかを採用するのがよいと考えている．

4　学習指導要領はどうなっているか

以上で「推測して帰納法」という解法の問題点と解決策を述べたわけだが，国レベルではどう扱われているのかも気になるところである．国が課す制約として，文部科学大臣から告示される学習

指導要領がある．これは，全国の教育水準を維持するため，各学校が編成する教育計画（これを教育課程という）の大綱的な基準を定めたものである [4]．この学習指導要領は法的拘束力が有するとされており，このことからよく「学校教育は中身がガチガチに規定されており，自由度がない」という言説を見かけることがあるが，学習指導要領にはそのような具体的な方法論や細かい内容に関する記述はない[*3]．

名前の似ている文書として，学習指導要領解説というものがある．これは文部科学省の著作物で，学習指導要領等の改善の趣旨や内容を解説したものである [4]．こちらにはかなり具体的な内容や方法論が書かれているが，法的拘束力はなく，無理に従う必要はない．

さて，現行の高校の学習指導要領 [5] の数列のところを見てみると，当然のことながら「推測して帰納法」に明確に関連すると思われる記述はない．しかし，学習指導要領解説 [6] には次のように記述されている．

> 漸化式を用いて表される数列の一般項を推測し，数学的帰納法を用いてその推測が正しいことを証明することも考えられる。例えば，$a_{n+1} = 3a_n + 2,\ a_1 = 1$ で表される数列の一般項を $2 \times 3^{n-1} - 1$ と推測して証明することなどを扱う。

明らかに「推測して帰納法」を取り上げさせる意図が見えている．もちろん，どのように証明するのかに関する詳細は述べられてはいないが，「問題がある解法」として紹介した方の解法が想定されているであろうことは想像に難くない．高校生向けの教科書併用問題集や参考書のほとんどに誤りがあるという認識があるならば，学習指導要領解説において何らかの記述があるはずだからである．このことは，新学習指導指導要領解説においても変わっていない．

現状では，一般に指導者とされる人間の多くに先に述べたような誤解が広まってしまっているため，この誤解がまた次の世代まで引き継がれてしまう可能性は高い．誰かがこの誤解の連鎖を断ち切らなければならない．本稿が，そのきっかけの 1 つとなれば幸いである．

5 帰納的定義について

以下，0 は自然数に含まれるとする．また，集合と写像に関する基本的な知識は既知とする．さらに，以下の点に注意していただきたい．

- 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ と $A \subset X$ に対し，写像 $f|_A\colon A \longrightarrow Y$ は f の始集合を A に制限したものを表す．
- 整列集合 $(W, \leq)$ と $x \in W$ に対し，W の部分集合 $\{\, w \in W \mid w < x \,\}$ を $W\langle x\rangle$ と表す．整列集合について知らなくても，ひとまず $n \in \mathbb{N}$ について，$\mathbb{N}\langle n\rangle = \{\, 0, 1, \ldots n-1 \,\}$ であることがわかれば問題ない．$W = \mathbb{N} - \{\, 0 \,\}$ としたときに，$n \in W$ に対して $W\langle n\rangle = \{\, 1, 2, \ldots, n-1 \,\}$ となることもすぐにわかるだろう．

[*3] だからこそ，新学習指導要領に，いわゆる「アクティブ・ラーニング」を盛り込んだことが話題になったのである．

漸化式により数列が帰納的に定義できることは，主張自体はよく見かけるものであるが，その証明はちょっとググった程度では出てきてはくれない．もちろんちゃんとした本を見れば載っているのだが，せっかくの機会なのでここで定式化して証明まで済ませてしまおう．

定理 1　$W = \mathbb{N} - \{\,0\,\}$ とし，空でない集合 X と写像 $G\colon \bigcup_{n\in W} X^{W\langle n\rangle} \longrightarrow X$ が与えられたとする．このとき，$x_0 \in X$ を 1 つ定めるごとに，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で

$$\begin{aligned} &f(0) = x_0, \\ &f(n) = G\left(f|_{W\langle n\rangle}\right) \quad (n \in W) \end{aligned} \tag{6}$$

を満たすものが一意に定まる．

[証明] 先に一意性の方から示しておこう．写像 $f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で式 (6) を満たすようなものを任意にとり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ が成り立つことを帰納法で示す．$f(0) = x_0 = g(0)$ より $f(0) = g(0)$ である．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $f(i) = g(i)$ であるとすると，$f|_{W\langle n+1\rangle} = g|_{W\langle n+1\rangle}$ だから $f(n+1) = G\left(f|_{W\langle n+1\rangle}\right) = G\left(g|_{W\langle n+1\rangle}\right) = g(n+1)$ より $f(n+1) = g(n+1)$ となる．ゆえにすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = g(n)$ となり，$f = g$ を得る．

式 (6) を満たす写像の存在を示そう．$n \in W$ に関する条件 $P(n)$ を「写像 $f\colon W\langle n\rangle \longrightarrow X$ ですべての $m \in W\langle n\rangle$ に対して $f(m) = G\left(f|_{W\langle m\rangle}\right)$ を満たすものが存在する」と定める．一意性の証明とまったく同様にして，各 $n \in W$ に対して $P(n)$ を成り立たせるような写像 f はたかだか 1 つであることが示される．その写像を f_n と表記する．すべての $n \in W$ に対して $P(n)$ が成り立つことを帰納法によって示そう．$W\langle 1\rangle = \varnothing$ だから，$P(1)$ を成り立たせるような写像 f として空写像がとれる．従って $P(1)$ は成り立つ．各 $n \in W$ に対し，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $P(i)$ が成り立つと仮定する．いま，写像 $f\colon W\langle n+1\rangle \longrightarrow X$ を

$$f(m) = \begin{cases} G\left(f_m\right) & (m = n \text{ のとき}), \\ f_{m+1}(m) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定めると，この f はすべての $m \in W\langle n+1\rangle$ に対して $f(m) = G\left(f|_{W\langle m\rangle}\right)$ を満たす．ゆえに $P(n+1)$ も成り立つから，すべての $n \in W$ に対して $P(n)$ が成り立つ．そこで，あらためて写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ を

$$\begin{aligned} &f(0) = x_0, \\ &f(n) = f_{n+1}(n) \quad (n \in W) \end{aligned}$$

と定めると，この f は式 (6) を満たす．　□

$W = \mathbb{N} - \{\,0\,\}$ とし，空でない集合 X と写像 $g\colon X \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ が与えられたとする．各 $\Phi \in \bigcup_{n\in W} X^{W\langle n\rangle}$ に対し，$\Phi \in X^{W\langle i\rangle}$ となる $i \in W$ がただ 1 つ存在する．$\Phi(i-1) \in X$ だから，$g(\Phi(i-1), i-1) \in X$ である．$\Phi \in \bigcup_{n\in W} X^{W\langle n\rangle}$ を上記の $g(\Phi(i-1), i-1) \in X$ に対応させる写像を G とすると，定理 1 より，$x_0 \in X$ を 1 つ定めるごとに，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で

$$\begin{aligned} &f(0) = x_0 \\ &f(n) = G\left(f|_{W\langle n\rangle}\right) \quad (n \in W) \end{aligned}$$

を満たすものがただ 1 つ定まる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$G\left(f|_{W\langle n+1\rangle}\right) = g(f(n), n)$ だから，写像 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ で

$$\begin{aligned} f(0) &= x_0 \\ f(n+1) &= g(f(n), n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{7}$$

を満たすものがただ 1 つ定まることになる．X を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とし，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像が数列だと解釈すれば，これで漸化式による数列の帰納的定義が保証されたことになる．また，定理 1 においては，隣接 2 項間の漸化式に関してしか言及できてはいないが，隣接 3 項間，4 項間といった漸化式においても同様であることは明らかであろう．

参考文献

[1]原. 牧夫, 数学のいずみ 数学的帰納法の「応用」, 2002, http://izumi-math.jp/M_Harada/kinou_o/kinou_o.pdf (visited on 12/28/2018).

[2]改訂版 高等学校 数学 B (数研出版株式会社, 2018), ISBN: 978-4-410-80217-1.

[3]新課程 チャート式 基礎からの数学 II +B (数研出版株式会社, 2015), ISBN: 978-4-410-10585-2.

[4]文部科学省, 学習指導要領（解説）等の位置付けについて, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/039/siryo/attach/1402682.htm (visited on 12/28/2018).

[5]文部科学省, 高等学校学習指導要領 (2009), http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2011/03/30/1304427_002.pdf.

[6]文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 (2009), http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf.