Einführung in die Empirische Wirtschaftsforschung

Übungsaufgaben 10

Exponentielles Wachstum - Qualitative Prediktoren

1. Der Umsatz der Firma Wolfswagen AG belief sich in 2020 auf 243 Millionen Franken. In 2021 war der Umsatz 250 Millionen Franken.

a) Berechnen Sie die prozentuale Umsatzsteigerung mittels der bekannten Formel

$$100 \times \frac{(\text{Umsatz}_{2021} - \text{Umsatz}_{2020})}{\text{Umsatz}_{2020}}.$$

Vergleichen Sie diesen Wert mit der Approximation

$$100 \times [\log(\text{Umsatz}_{2021}) - \log(\text{Umsatz}_{2020})].$$

b) Wiederholen Sie a), wenn $\text{Umsatz}_{2021} = 255$, $\text{Umsatz}_{2021} = 260$ und $\text{Umsatz}_{2021} = 265$. Wie verändert sich die Güte der Approximation?

2. Betrachten Sie folgende geschätzte lineare Einfachregression

$$\widehat{\log(Y_t)} = 0.15 + 0.064t$$

a) Nach wie vielen Tagen verdreifacht sich der Wert von Y_t, laut dem geschätzten Modell?

b) Wie verändert sich Ihre Aussage in a), wenn Sie die Wachstumsrate approximieren mit $b_1 = 0.064$?

c) Wiederholen Sie die Aufgaben a) und b) mit $b_1 = 2.78$, was fällt Ihnen auf?

3. In den 80er Jahren führte Tennessee ein Experiment mit Kindergärtnern durch. Die Schüler wurden zufällig in "small" und "regular" Klassen unterteilt. Am Ende des Jahres wurde ein standardisierter Test durchgeführt. Das Ziel der Studie war herauszufinden, ob die Klassengrösse einen signifikanten Effekt auf die Leistung eines Schülers hat. Sie erhielten folgende geschätzte lineare Einfachregression

$$\widehat{Testscore} = \underset{(1.6)}{918} + \underset{(2.5)}{13.9} SmallClass,$$

wobei *SmallClass* ein Dummy-Prediktor ist, welcher gleich 1 ist, wenn es sich um eine kleine Klasse handelt.

a) Erhöhen kleine Klassen die Leistung der Kindergärtner im finalen Test?

b) Ist der geschätzte Effekt von $SmallClass$ auf $Testscore$ statistisch signifikant verschieden von 0 auf dem 5% Niveau?

c) Konstruieren Sie ein 99% Konfidenzintervall für β_1.

4. Sei $Female$ eine Dummy Variable welche gleich 1 ist für weibliche Mitarbeiter und gleich 0 für männliche. Eine lineare Einfachregression der logarithmierten Gehälter auf $Female$ ergibt folgendes Resultat

$$\log(\widehat{Earnings}) = \underset{(0.01)}{6.48} - \underset{(0.05)}{0.44} Female$$

a) Interpretieren Sie den Steigungskoeffizienten der obigen Regression.

b) Sagt diese Regression, dass weibliche Mitarbeiter weniger verdienen als männliche?

c) Suggeriert diese Regression eine Diskriminierung gegen weibliche Mitarbeiter?

1. Der Umsatz der Firma Wolfswagen AG belief sich in 2020 auf 243 Millionen Franken. In 2021 war der Umsatz 250 Millionen Franken.

   a) Berechnen Sie die prozentuale Umsatzsteigerung mittels der bekannten Formel

$$100 \times \frac{(\text{Umsatz}_{2021} - \text{Umsatz}_{2020})}{\text{Umsatz}_{2020}}.$$

   Vergleichen Sie diesen Wert mit der Approximation

$$100 \times [\log(\text{Umsatz}_{2021}) - \log(\text{Umsatz}_{2020})].$$

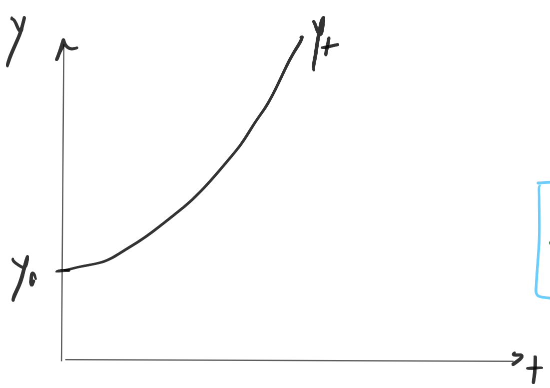
   b) Wiederholen Sie a), wenn $\text{Umsatz}_{2021} = 255$, $\text{Umsatz}_{2021} = 260$ und $\text{Umsatz}_{2021} = 265$. Wie verändert sich die Güte der Approximation?

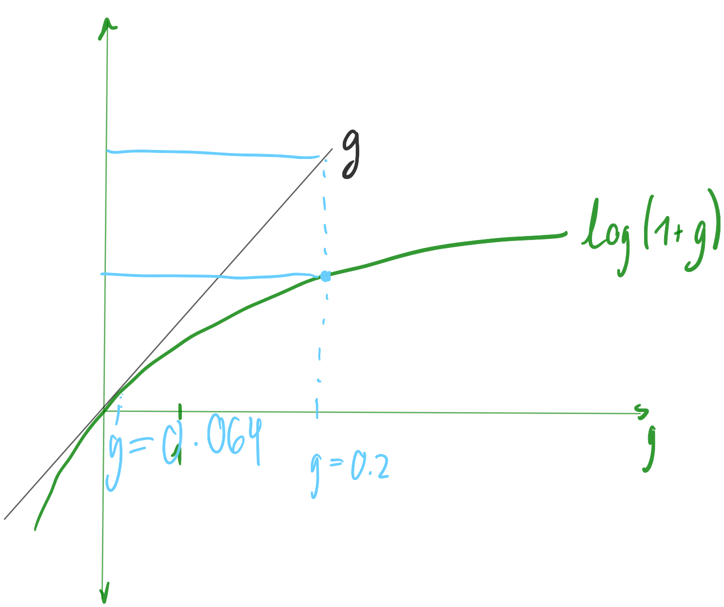
Theorie:

· Wachstum definiert über: $Y_t = (1+g)^t \cdot Y_0$, wobei g die Wachstumsrate darstellt. Wir können g approximieren via

$$\log Y_t = t \cdot \log(1+g) + \log Y_0$$

$$\boxed{\log(1+g)} = \frac{\log Y_t - \log Y_0}{t} \quad \boxed{\approx g}$$ via Taylor-Entwicklung (für kleine g).





a) $t=1$ also haben wir:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & 100 \times \left(\frac{250-243}{243}\right) = 2.881\% \\ \text{(ii)} & 100 \times \log\left(\frac{250}{243}\right) = 2.839\%\end{array}\right\} \Delta = 0.041\%$$

b) $t=1$ also haben wir:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & 100 \times \left(\frac{255-243}{243}\right) = 4.938\% \\ \text{(ii)} & 100 \times \log\left(\frac{255}{243}\right) = 4.820\%\end{array}\right\} \Delta = 0.118\%$$

- Δ für 260: 0.234%
- Δ für 265: 0.386%

2. Betrachten Sie folgende geschätzte lineare Einfachregression

$$\widehat{\log(Y_t)} = \underset{b_0}{0.15} + \underset{b_1}{0.064}t$$

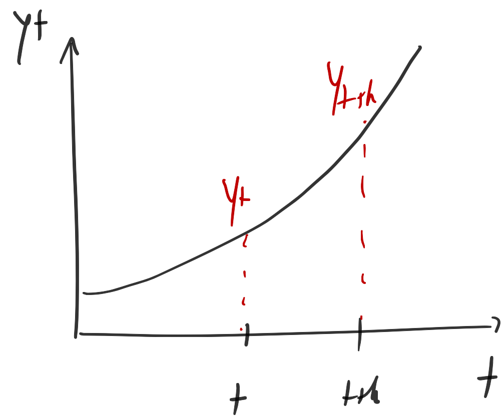
$X_1 := t = (1, 2, \dots, T)$

a) Nach wie vielen Tagen verdreifacht sich der Wert von Y_t, laut dem geschätzten Modell?

b) Wie verändert sich Ihre Aussage in a), wenn Sie die Wachstumsrate approximieren mit $b_1 = 0.064$?

c) Wiederholen Sie die Aufgaben a) und b) mit $b_1 = 2.78$, was fällt Ihnen auf?

a) $Y_{t+k} \overset{!}{=} 3Y_t$



$$\log y_t = 0.15 + 0.064t$$

$$y_t = \exp(0.15 + 0.064t)$$

und $$y_{t+k} = \exp(0.15 + 0.064(t+k))$$

$$= \exp(0.15 + 0.064t)\exp(0.064k)$$

$$= y_t \exp(0.064k) \quad \text{(Rekursion)}$$

$\hookrightarrow$ $$y_{t+k} = y_t \exp(0.064k) \overset{!}{=} 3y_t$$

$$\exp(0.064k) = 3$$

$$0.064k = \log 3$$

$$k = \frac{\log 3}{0.064} = 17.17$$

b) $y_{t+k} \approx (1+0.064)^k y_t \overset{!}{=} 3 y_t$

$$(1+0.064)^k = 3$$

$$k \log(1+0.064) = \log 3$$

$$k = \frac{\log 3}{\log(1+0.064)} = 17.71$$

c) Je grösser die Wachstumsrate, desto schlechter die Approximation.

3. In den 80er Jahren führte Tennessee ein Experiment mit Kindergärtnern durch. Die Schüler wurden zufällig in "small" und "regular" Klassen unterteilt. Am Ende des Jahres wurde ein standardisierter Test durchgeführt. Das Ziel der Studie war herauszufinden, ob die Klassengrösse einen signifikanten Effekt auf die Leistung eines Schülers hat. Sie erhielten folgende geschätzte lineare Einfachregression

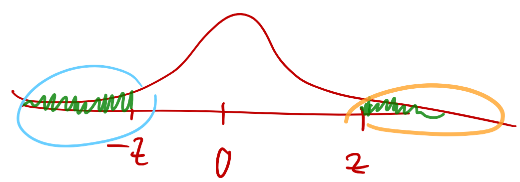
$$\widehat{Testscore} = \underset{(1.6)}{918} + \underset{(2.5)}{13.9}SmallClass,$$

wobei $SmallClass$ ein Dummy-Prediktor ist, welcher gleich 1 ist, wenn es sich um eine kleine Klasse handelt.

a) Erhöhen kleine Klassen die Leistung der Kindergärtner im finalen Test?

b) Ist der geschätzte Effekt von $SmallClass$ auf $Testscore$ statistisch signifikant verschieden von 0 auf dem 5% Niveau?

c) Konstruieren Sie ein 99% Konfidenzintervall für β_1.



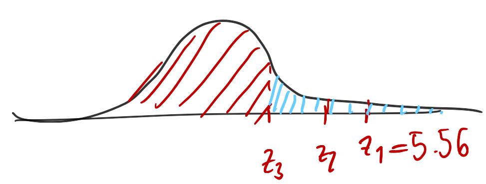
a) (Kausalität unklar)

b) $z = \dfrac{b_1 - \beta_{1,0}}{SF(b_1)} = \dfrac{13.9 - 0}{2.5} = 5.56$

$\# := P(Z < -z) + P(Z > z) = 2P(Z > |z|)$

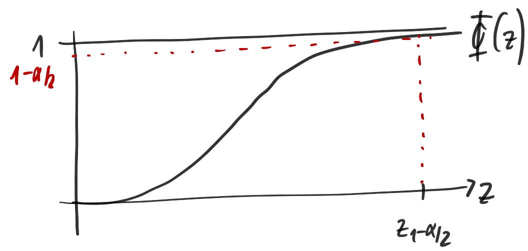
$p\text{-Wert} = 2\underbrace{P(Z > |z|)}_{P(Z > z)} = 2\,(1 - P(Z < \underbrace{5.56}_{z})) \approx 0$

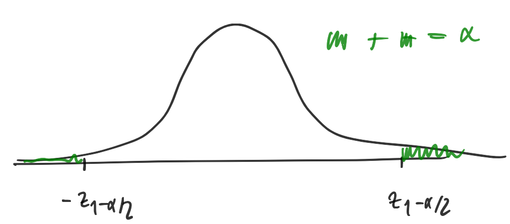
Der Schätzer liegt 5.56 SF von der Null entfernt und ist signifikant.



c) $b_1 \pm z_{1-\alpha/2}\, SF(b_1) = 13.9 \pm 2.576 \cdot 2.5 = [7.46, 20.34]$

$z_{1-\alpha/2} := \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$





$\Phi(z) = P(Z \le z)$, gegeben $Z \sim N(0,1)$

$$SF(b_1) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}} = 0.4$$

, da $R_{-1}^2 = 0$ weil x_1, x_2 unkorreliert und $r(x_1, x_2) = R_{-1}^2$

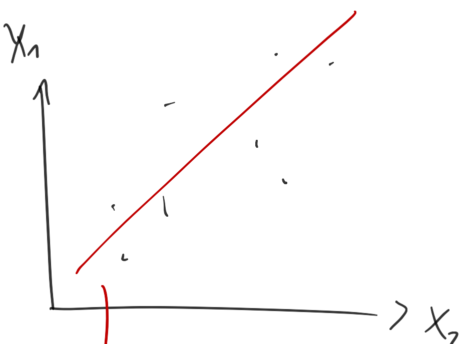
Neu:

$$\boxed{SF(b_{1,neu})} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 (1 - R_{-1}^2)}}$$

$$= 0.4 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \underbrace{R_{-1}^2}_{= r^2 = (-\sqrt{0.75})^2 = 0.75})}}$$

$$= 0.4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0.75}}$$

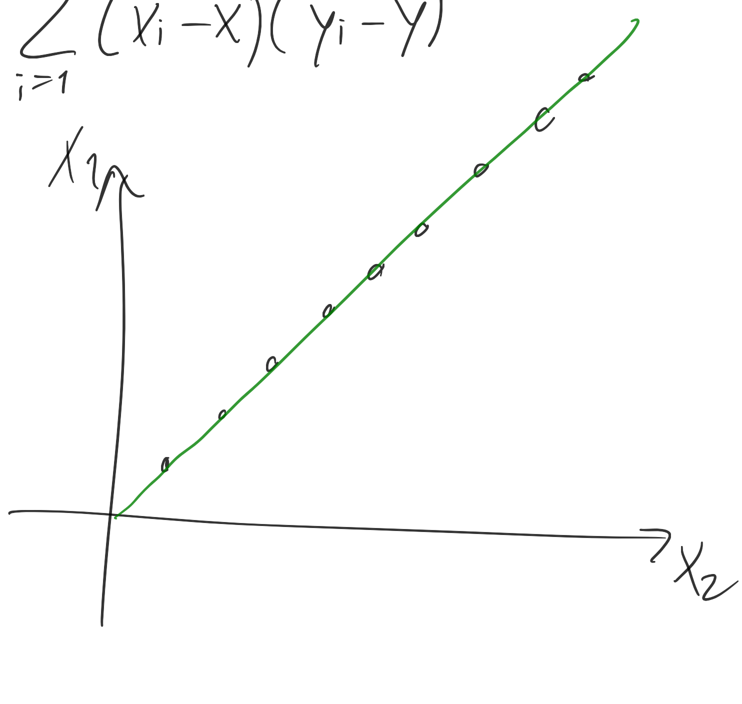
$$VIF = \frac{1}{1 - R_{-1}^2}$$



Korr x_1, x_2

$R^2 =$ Korr x_1, x_2

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



$\hat{y}_1, \ldots \hat{y}_N$

4. Sei *Female* eine Dummy Variable welche gleich 1 ist für weibliche Mitarbeiter und gleich 0 für männliche. Eine lineare Einfachregression der logarithmierten Gehälter auf *Female* ergibt folgendes Resultat

$$\log(\widehat{Earnings}) = \underset{(0.01)}{6.48} - \underset{(0.05)}{0.44}\,Female$$

a) Interpretieren Sie den Steigungskoeffizienten der obigen Regression.

b) Sagt diese Regression, dass weibliche Mitarbeiter weniger verdienen als männliche?

c) Suggeriert diese Regression eine Diskriminierung gegen weibliche Mitarbeiter?

a) $\widetilde{Earn} = \exp(6.48 - 0.44F)$

$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

$\hat{Earn}|M = \exp(6.48)$

$\hat{Earn}|F = \exp(6.48 - 0.44) = \exp(6.48)\exp(-0.44)$

$= \widetilde{Earn}|M \cdot \exp(-0.44)$

$= \widehat{Earn}|M \cdot 0.644$

↳ Gehalt (im Durchschnitt) der Frauen um $100 \times (1-0.644)\%$ tiefer als das der Männer.

b) Ja, siehe a).

c) Nein

$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$

$\cancel{\frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}(\varepsilon)$