Einführung in die Empirische Wirtschaftsforschung

Übungsaufgaben 2

Bedingte Verteilungen - Bedingter Erwartungswert - Kovarianz und Korrelation

1. Betrachten Sie nochmals die bivariate diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Übung 1

$$p(x,y) = \frac{xy^2}{13}\mathbb{1}_S(x,y),$$

wobei $S = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ und

$$\mathbb{1}_S(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (x,y) \in S \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $P(X = 1 \mid Y = 2)$ und $P(Y = 2 \mid X = 1)$.

b) Berechnen Sie $E(X \mid Y = 2)$.

2. Beweisen Sie das "Gesetz des iterierten Erwarungswertes" für zwei stetige Zufallsvariablen.

3. Es seien $X \sim Bernoulli(0.7)$ und

$$Y \sim \begin{cases} Normal(2,3) & \text{wenn } X = 1 \\ Normal(-0.5,3) & \text{wenn } X = 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $E(Y)$.
Tipp: Verwenden Sie das "Gesetz des iterierten Erwartungswertes".

b) (in R) Simulieren Sie $N = 200$ Realisationen von Y und stellen Sie diese in einem Histogramm dar.
Tipp: verwenden Sie ein if...else statement in R.

c) (in R) Berechnen Sie den Mittelwert der 200 Beobachtungen, was fällt Ihnen auf?

4. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y).$$

Wie sieht es für $Var(X-Y)$ aus?

5. Sei (X,Y) bivariat Normalverteilt, mit $Var(X) = Var(Y)$. Zeigen Sie, dass die zwei Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ unabhängig sind.

6. Das folgende Problem hatten wir schon in einer Übung des letzten Semesters bearbeitet. Eine Firma verkauft einen Benzinzusatz, der angeblich den Benzinverbrauch von Autos senken soll. Die Packung behauptet, dass die durchschnittliche Senkung des Verbrauches bei 0.3 (Liter/100km) liegt. Eine Verbraucherschutzgesellschaft fragt sich, ob diese kühne Behauptung in der Tat wahr sein mag. Man wählt eine (Zufalls)Stichprobe von $N = 100$ Autos aus und misst ihren Benzinverbrauch jeweils ohne und mit dem Zusatz. Die folgenden Statistiken kommen dabei heraus:

Gruppe	N	$\bar{x}$	s
Ohne	100	8.50	1.5
Mit	100	8.35	1.4
Ohne − Mit	100	0.15	0.7

Berechnen Sie die Stichproben-Korrelation r zwischen "Ohne" und "Mit".

1. Betrachten Sie nochmals die bivariate diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Übung 1

$$p(x, y) = \frac{xy^2}{13} \mathbb{1}_S(x, y),$$

wobei $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ und

$$\mathbb{1}_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (x, y) \in S \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $P(X = 1 \mid Y = 2)$ und $P(Y = 2 \mid X = 1)$.

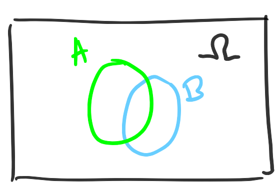
b) Berechnen Sie $E(X \mid Y = 2)$.

Letztes Mal:

$y \backslash x$	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	$\frac{1}{13}$	0
$Y=2$	$4/13$	$8/13$

Repetition Bayes' Regel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$\Rightarrow p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$ für diskrete ZV und $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$

a) $$p(X=1 \mid Y=2) = \frac{p(X=1, Y=2)}{p(Y=2)} = \frac{4/13}{12/13} = 1/3$$

$$p(Y=2 \mid X=1) = \frac{p(Y=2 \mid X=1)}{p(X=1)} = \frac{4/13}{5/13} = 4/5$$

b) $$E(X \mid Y=2) = \sum_{x} x \cdot p(X=x \mid Y=2)$$ (Intuition + Aufgabe nachher)

$$= \underbrace{1 \cdot p(X=1 \mid Y=2)}_{X=1} + \underbrace{2\, p(X=2 \mid Y=2)}_{X=2}$$

$$= 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 2/3 = 5/3$$

2. Beweisen Sie das "Gesetz des iterierten Erwarungswertes" für zwei stetige Zufallsvariablen.

$$\boxed{\text{Satz: } E(X) = E[E[X|Y]]}$$

$$E(X) = \int_x x f(x)\,dx$$

$$= \int_x x \left(\underbrace{\int_y f(x,y)\,dy}_{f(x)}\right) dx$$

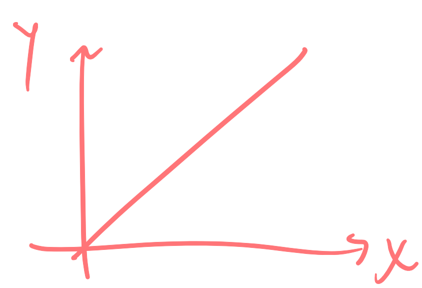
$$= \int_x x \left(\int_y \underbrace{f(x|y)\,f(y)}_{f(x,y)}\,dy\right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_y \left[\int_x \underbrace{x\, f(x|y)\,dx}_{E[X|Y]}\right] f(y)\,dy$$

$$\boxed{= \int_y \underbrace{E[X|Y]}_{g(x)}\, f(y)\,dy}$$

$$= E[E[X|Y]]$$

$$\boxed{E[\overset{g(x)=x}{g(x)}] = \int_x \underset{x}{g(x)}\, f(x)\,dx}$$



3. Es seien $X \sim Bernoulli(0.7)$ und

$$Y \sim \begin{cases} Normal(2,3) & \text{wenn } X = 1 \\ Normal(-0.5,3) & \text{wenn } X = 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $E(Y)$.
Tipp: Verwenden Sie das "Gesetz des iterierten Erwartungswertes".

b) (in R) Simulieren Sie $N = 200$ Realisationen von Y und stellen Sie diese in einem Histogramm dar.
Tipp: verwenden Sie ein if...else statement in R.

c) (in R) Berechnen Sie den Mittelwert der 200 Beobachtungen, was fällt Ihnen auf?

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "X=0"'] \arrow[dr, "X=1"] & \\ Y \sim N(-0.5,3) & & Y \sim N(2,3) \end{tikzcd}$$

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = \sum_x E[Y|X=x]\, p(X=x), \quad x \in \{0,1\}$$

$$= \underbrace{0.3 \cdot -0.5}_{X=0} + \underbrace{0.7 \cdot 2}_{X=1} = 1.25$$

4. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y).$$

Wie sieht es für $Var(X-Y)$ aus?

Zuerst Intuition geben (zwei abhängige Variablen...)

$$Var(X+Y) = \mathbb{E}\left[\left(X+Y-\mathbb{E}(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E(X+Y) + E(X+Y)^2\right]$$

$$= E\left[(X+Y)^2\right] - 2E(X+Y)^2 + E(X+Y)^2$$

$$= E\left[(X+Y)^2\right] - \underbrace{E(X+Y)^2}_{(E(X)+E(Y))^2}$$

$$= E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

$$= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

↳ Gleiches für minus aber $Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

5. Sei (X, Y) bivariat Normalverteilt, mit $Var(X) = Var(Y)$. Zeigen Sie, dass die zwei Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig sind.

↳ An Lösungen zeigen!

6. Das folgende Problem hatten wir schon in einer Übung des letzten Semesters bearbeitet. Eine Firma verkauft einen Benzinzusatz, der angeblich den Benzinverbrauch von Autos senken soll. Die Packung behauptet, dass die durchschnittliche Senkung des Verbrauches bei 0.3 (Liter/100km) liegt. Eine Verbraucherschutzgesellschaft fragt sich, ob diese kühne Behauptung in der Tat wahr sein mag. Man wählt eine (Zufalls)Stichprobe von $N = 100$ Autos aus und misst ihren Benzinverbrauch jeweils ohne und mit dem Zusatz. Die folgenden Statistiken kommen dabei heraus:

Gruppe	N	$\bar{x}$	s
Ohne	100	8.50	1.5
Mit	100	8.35	1.4
Ohne − Mit	100	0.15	0.7

$$\frac{Cov(ohne, mit)}{\sqrt{Var(ohne)\, Var(mit)}}$$

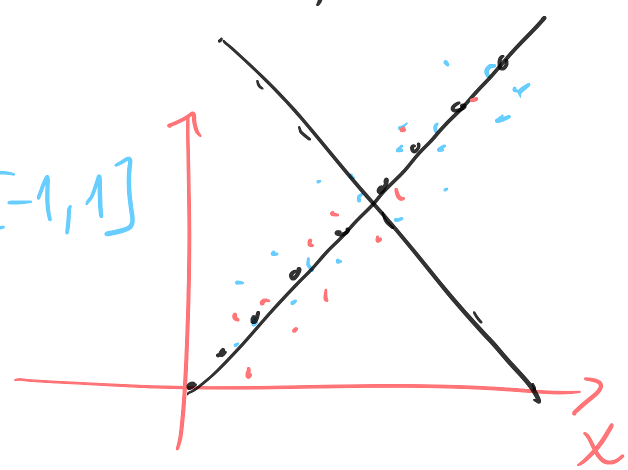
Berechnen Sie die Stichproben-Korrelation r zwischen "Ohne" und "Mit".

$$Var(ohne - mit) = Var(ohne) + Var(mit) - 2\, Cov(ohne, mit)$$

$$Cov(ohne, mit) = \frac{1}{2}\left(Var(ohne) + Var(mit) - Var(ohne - mit) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1.5^2 + 1.4^2 - 0.7^2\right) = 1.86$$

$\hookrightarrow |Corr| \leq 1 \Rightarrow Corr \in [-1, 1]$



$$\hookrightarrow Corr = \frac{1.86}{\sqrt{1.5^2 \cdot 1.4^2}} = 0.886$$