Theorie Übung 4

Zufallsvariable X:

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnisraum Ω. Eine Zufallsvariable X (ZV) ist eine Funktion, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine Zahl $X(\omega) = x$ zuordnet. Der Wert x, den X bei Durchführung des Zufallsexperimentes annimmt, heisst *Realisierung* von X.

Beispiel zwei Runden Münzwerfen:

$$\Omega = \{\underbrace{HH}_{\omega_1}, \underbrace{HZ}_{\omega_2}, \underbrace{ZH}_{\omega_3}, \underbrace{ZZ}_{\omega_4}\} \quad \text{mit} \quad |\Omega| = 2^2$$

$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) = x$$

- Falls $X(\omega) := $ "Anzahl H", dann

$$X(\omega_1 = HH) = 2$$

$$X(\omega_2 = HZ) = 1 = X(\omega_3 = ZH)$$

$$X(\omega_4 = ZZ) = 0$$

- Was ist nun $P(\underbrace{X = X(\omega) = 1}_{\text{ein Mal Kopf}})$?

$$\mathbb{P}(X = X(\omega) = 1) = \sum_{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3) = 0.25 + 0.25$$

Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungen:

$$\mathbb{P}(X=x): x \mapsto \mathbb{P}(x)$$

"Gibt euch für eine Realisation x die Wahrscheinlichkeit davon an"

- Bernoulli: $\mathbb{P}(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$ (Erfolg/Misserfolg)
- Binomial: $\mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ (Mehrere Runden Erfolg/Misserfolg)

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

↳ Definition: $\hat{p} = \frac{1}{N}\big(\underbrace{X_1 + \ldots + X_N}_{=X}\big)$ (Anteilswert)

("prozentualer Anteil an Erfolgen aus N unabhängigen Bernoulli Zufallsexperimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p").

Somit ist $N\hat{p} = N \cdot \frac{X}{N} = X \sim \text{Binomial}(N,p)$

Gesetz der grossen Zahl: $\hat{p}$ konvergiert asymptotisch gegen das wahre p.

- Poisson ...
- Geometrisch
- ....

Eigenschaften der Verteilungen von Zufallsvariablen:

Beschreiben der Lage der Verteilung und der Streuung

Erwartungswert (Lage):

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

Varianz (Streuung):

$$Var(X) = \sum_{x \in W} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x) = \sigma_X^2$$

$$= \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$$

Statistik
Übungsaufgaben 4

Diskrete Zufallsvariabeln - Wahrscheinlichkeitsverteilung - Geometrische Verteilung - Bernoulli und Binomial Verteilung

1. Eine diskrete Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & x \in \{3, 4\} \\ 0.4 & x \in \{5, 6\}. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

   b) Berechnen Sie $P(X > 4)$ und $P(3 < X \leq 5)$.

   c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable X.

2. Sie setzen am Roulette-Tisch (Roulette Spiel mit einer Null) zehnmal hintereinander CHF 1 auf rot. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Nettogewinn nach den zehn Spielen mindestens CHF 3 beträgt?

3. **(Geometrische Verteilung)** Gleiche Grundsituation wie bei der Bernoulli-Verteilung. Allerdings wiederholen Sie nun das zugrundeliegende Zufallsexperiment, bis (zum ersten Mal) ein 'Erfolg' eintritt. Sei X die benötigte Anzahl der Wiederholungen. Dann ist $X \sim Geometrisch(p)$.

   a) Finden Sie $p_k = P(X = k)$ für $k = 1, 2, \ldots$.

   b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

   c) Finden Sie $E(X)$. (Beginnen Sie mit Ihrer Intuition hier . . .)

B.3.12.8 Which of the following could be quantified as a Bernoulli random variable?

   a) number of persons in a hospital ward with terminal diagnoses.

   b) weights of deliveries at a supermarket.

   c) square foot areas of houses being built in a suburban tract development.

   d) whether or not an employee wears glasses.

   e) none of the above.

B.3.12.9 Fifteen percent of the patients seen in a pediatric clinic have a respiratory complaint. In a Bernoulli process of 10 patients, what is the probability that at least three have a respiratory complaint?

5. Sei $X \sim Binomial(N, p)$, wobei $p = 0.2$. Gesucht ist die W'keit, dass $\hat{p} = X/N$, der Anteil der Erfolge bei N Versuchen, im Intervall $(p - \epsilon, p + \epsilon]$ liegt.

a) Berechnen Sie $P(0.15 < \hat{p} \leq 0.25)$ für $N = 10$.

b) Berechnen Sie $P(0.15 < \hat{p} \leq 0.25)$ für $N = 100$.

c) Wie ändert sich Ihre Antwort in b), wenn stattdessen $P(0.18 < \hat{p} \leq 0.22)$ gesucht ist?

d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse in a), b) und c) mit Bezug auf das Gesetz der grossen Zahlen.

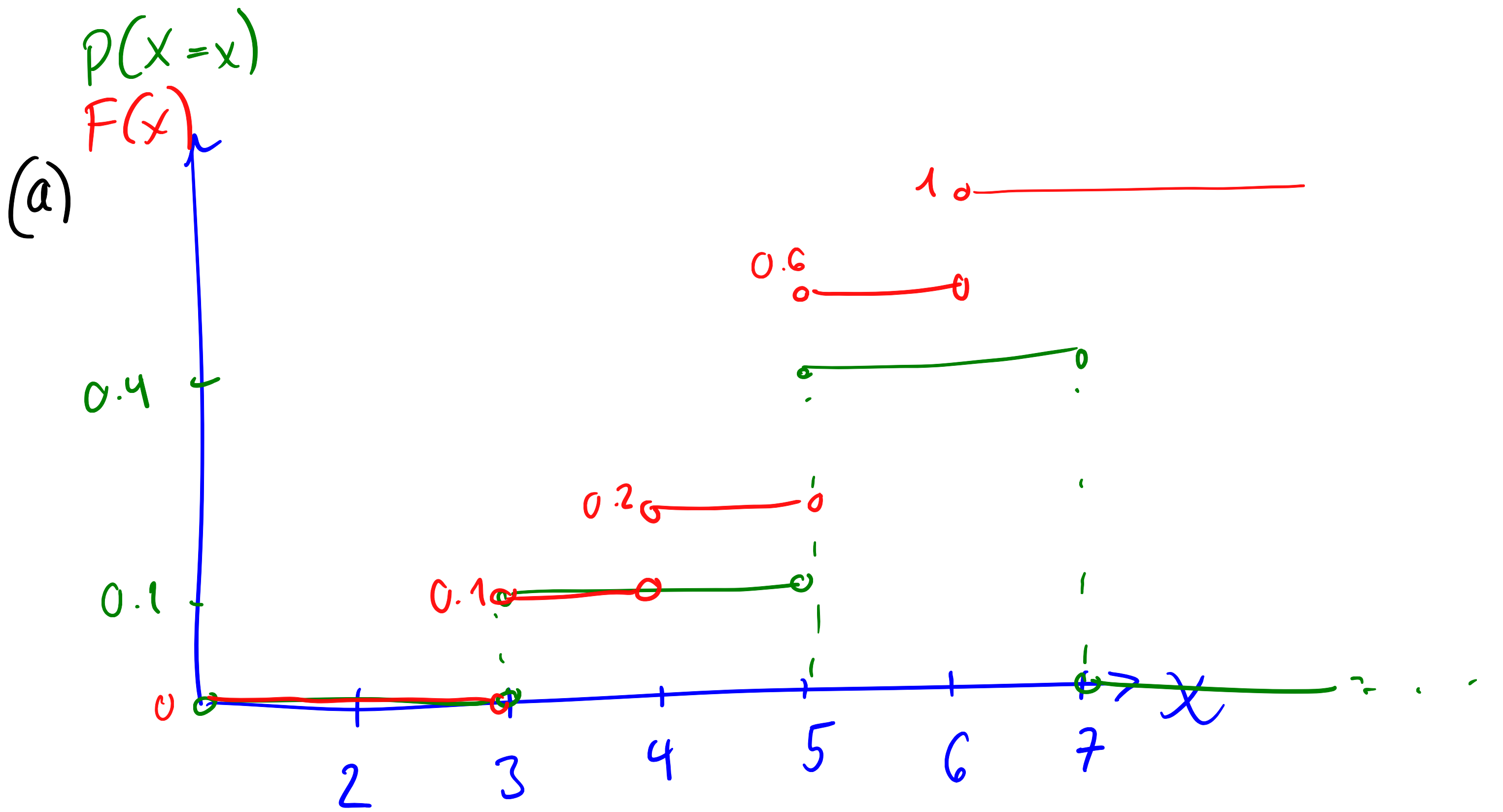
1. Eine diskrete Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & x \in \{3, 4\} \\ 0.4 & x \in \{5, 6\}. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

b) Berechnen Sie $P(X > 4)$ und $P(3 < X \leq 5)$.

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable X.



(b) $P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6) + \dots$

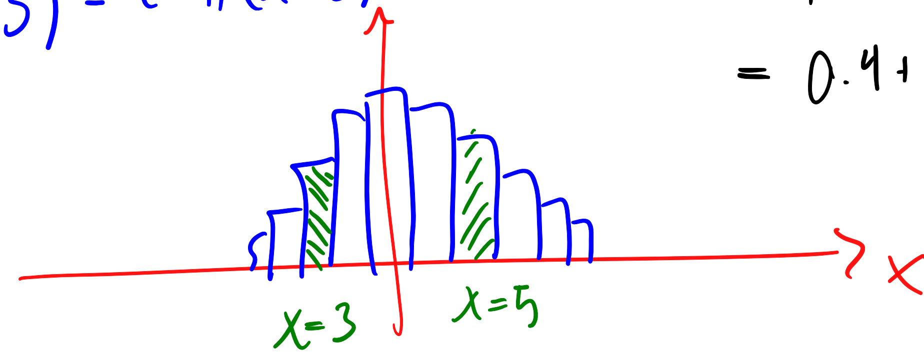
$= 0.4 + 0.4 = 0.8$

$P(3 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3)$

$= P(X=5) + P(X=4) + P(X=3)$

$- (P(X=3))$

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$$



$$= \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=4)$$

$$= 0.4 + 0.1 = \underline{\underline{0.5}}$$

(c) $$E(X) = \sum_{x \in W} \mathbb{P}(X=x)\, x$$

$$= 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.4$$

$$= 5.1$$

$$Var(X) = \sum_{x \in W} (x - E(X))^2\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$= 0.1\,(3 - 5.1)^2 + \dots + 0.4 \cdot (6 - 5.1)^2$$

$$= 0.89$$

2. Sie setzen am Roulette-Tisch (Roulette Spiel mit einer Null) zehnmal hintereinander CHF 1 auf rot. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Nettogewinn nach den zehn Spielen mindestens CHF 3 beträgt?

$$X \sim \text{Binomial}(10, p = 18/37)$$

$$G := \text{Gewinn}$$

$$G = 2X - 10 \cdot 1 \geq 3$$

$$X \geq 6.5$$

$\Rightarrow$ mindestens 7 Mal gewinnen

$$\mathbb{P}(X \geq 7) \text{ , wobei } X \sim \text{Binomial}(10, 18/37)$$

$$= \sum_{j=7}^{10} P(X=j) = \underbrace{\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^7 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^3}_{X=7} + \ldots + \underbrace{\binom{10}{10}}_{=1} \left(\frac{18}{37}\right)^{10}$$

$$= 0.1506$$

3. **(Geometrische Verteilung)** Gleiche Grundsituation wie bei der Bernoulli-Verteilung. Allerdings wiederholen Sie nun das zugrundeliegende Zufallsexperiment, bis (zum ersten Mal) ein 'Erfolg' eintritt. Sei X die benötigte Anzahl der Wiederholungen. Dann ist $X \sim \mathit{Geometrisch}(p)$.

a) Finden Sie $p_k = P(X = k)$ für $k = 1, 2, \ldots$.

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

c) Finden Sie $E(X)$. (Beginnen Sie mit Ihrer Intuition hier …)

(a) $p :=$ Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p_k = P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \quad , \text{wobei } 1-p < 1$$

$$\boxed{\text{Geom. Reihe: } \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \; a < 1}$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{a}{}^{k} = p \left(\frac{1}{1-(1-p)} \right) = p \, \frac{1}{p} = 1$$

(c) $$E(X) = \sum_{x \in W} x \, P(X = x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \, \underbrace{(1-p)}_{q}{}^{k-1} \cdot p \qquad 1-p = q \iff p = 1-q$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = p\left(1 + 2q + 3q^2 + \dots\right)$$

$$= (1-q)\left(1 + 2q + 3q^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + 2q - q - 2q^2 + 3q^2 + \dots$$

$$= 1 + q + q^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{, wobei } q < 1$$

(weil $q = 1-p$)

$$E(X) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

B.3.12.8 Which of the following could be quantified as a Bernoulli random variable?

a) number of persons in a hospital ward with terminal diagnoses.

b) weights of deliveries at a supermarket.

c) square foot areas of houses being built in a suburban tract development.

d) whether or not an employee wears glasses.

e) none of the above.

B.3.12.9 Fifteen percent of the patients seen in a pediatric clinic have a respiratory complaint. In a Bernoulli process of 10 patients, what is the probability that at least three have a respiratory complaint?

$X \sim \text{Binomial}(10, 0.15)$

Wahrscheinlichkeit of having a respiratory complaint is

$$p = 0.15$$

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0)\right)$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{2} \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^{10-2} + \ldots + \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \cdot 0.85^{10} \right)$$

$$= 0.17$$

5. Sei $X \sim Binomial(N, p)$, wobei $p = 0.2$. Gesucht ist die W'keit, dass $\hat{p} = X/N$, der Anteil der Erfolge bei N Versuchen, im Intervall $(p - \epsilon, p + \epsilon]$ liegt.

a) Berechnen Sie $P(0.15 < \hat{p} \le 0.25)$ für $N = 10$.

b) Berechnen Sie $P(0.15 < \hat{p} \le 0.25)$ für $N = 100$.

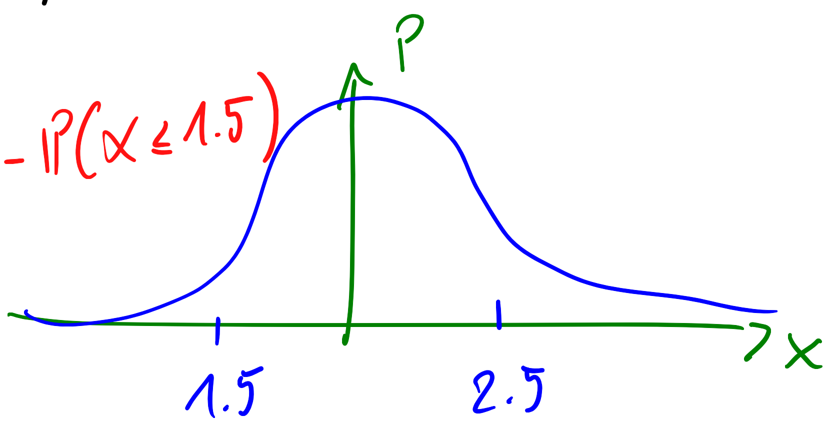
c) Wie ändert sich Ihre Antwort in b), wenn stattdessen $P(0.18 < \hat{p} \le 0.22)$ gesucht ist?

d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse in a), b) und c) mit Bezug auf das Gesetz der grossen Zahlen.

(a) $P(0.15 < \hat{p} \le 0.25) = P\left(0.15 < \frac{X}{N} \le 0.25\right)$

$$= P(\underbrace{1.5 < X} \le 2.5)$$

$P(X > 1.5) = 1 - P(X \le 1.5)$



$$= P(X \le 2.5) - P(X \le 1.5)$$

$$= P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) - \big(P(X=1) + P(X=0)\big)$$

$$= P(X=2) = 0.302$$

$X \sim$ Binomial

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{10-2}$$

(b) $\mathbb{P}(0.15 < \hat{p} \leq 0.25)$ für $N = 100$

$$= \mathbb{P}(15 < X \leq 25)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq 25) - \mathbb{P}(X \leq 15)$$

$$= \mathbb{P}(X = 16) + \ldots + \mathbb{P}(X = 25)$$

$$= \sum_{j=16}^{25} \mathbb{P}(X = j) = 0.784$$

(c) ...

(d) Gegeben $\varepsilon > 0$, haben wir

$$\mathbb{P}(p - \varepsilon < \hat{p} \leq p + \varepsilon) \xrightarrow{N \to \infty} 1$$