Übung 3: Theorie

Repetition Zufallsexperimente:

- Ergebnis ω: mögliches Ergebnis des Zufallsexperiments (disjunkt)
- Ergebnisraum Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse
- Ereignis $A \subseteq \Omega$: Teilmenge des Ergebnisraums

3 Axiome von Kolmogorov:

(A1): $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

(A2): $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n) = 1$

(A3): $A \cap B = \emptyset \rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Daraus abgeleitete Regeln:

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (Additivität)
- $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie)

Operationen der Mengenlehre:

(1) Commutative laws:

$$E \cup F = F \cup E$$
$$E \cap F = F \cap E.$$

(2) Associative laws:

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$$
$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

(3) Distributive laws:

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$
$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G).$$

De Morgan's laws: We consider a sequence of events $(E_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c.$$

Unabhängigkeit und Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Unabhängigkeit zweier Ereignisse:
  "Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des zweiten Ereignisses ist vom Eintreten des ersten unabhängig"
  → zwei Runden Roulette

↳ Formal:

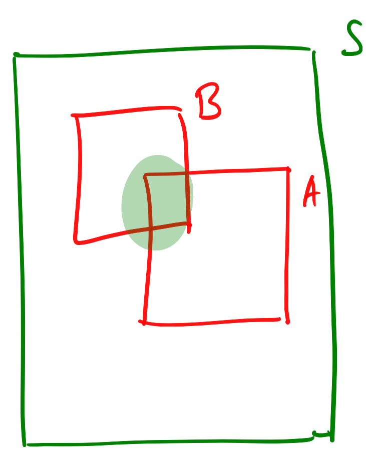
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ falls } A, B \text{ unabhängig}$$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit:
  "Die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Ereignis eintritt, gegeben dass das erste eingetroffen ist"

↳ Formal:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$



Statistik
Übungsaufgaben 3

Mengenoperationen - Satz von Bayes - Textaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Sei $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,6\}$ und $C = \{1,4\}$, finden Sie

a) $A \cap B$

b) $B \cup C$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $(A \cup B)^c$

2. Beweisen Sie die beiden folgenden Eigenschaften für Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der drei Axiome von Kolmogoroff (In der Prüfung müssen Sie keine Beweise führen, aber in den Übungen hin und wieder schon)

a) $P(A) = \sum_{s \in A} P(s)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. Seien A und B disjunkte Ereignisse mit $P(A) = 0.2$ und $P(B) = 0.5$. Finden Sie

a) $P(A^c)$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(A \cup B)$

d) $P(A^c \cap B)$

4. Sei $A \subset C$ und $B \subset C$.
Zeigen Sie, dass

$$\frac{P(A \mid C)}{P(B \mid C)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

B.2.12.4 An experiment results in a sample space S containing five sample points and their associated probabilities of occurrence:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
0.22	0.31	0.15	0.22	0.1

The following events have been defined

- $E_1 = \{s_1, s_3\}$
- $E_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$
- $E_3 = \{s_1, s_5\}$

Find each of the following probabilities:

a) $P(E_1)$

b) $P(E_2)$

c) $P(E_1 \cap E_2)$

d) $P(E_1 \mid E_2)$

e) $P(E_2 \cap E_3)$

f) $P(E_3 \mid E_2)$

B.2.12.3 Three events, A, B, and C are defined over some sample space S. Events A and B are independent. Events A and C are mutually exclusive. Some relevant probabilities are $P(A) = 0.04$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.2$ and $P(B \mid C) = 0.15$. Compute the values of $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(A \cup B \cup C)$ and $P(C \mid B)$.

5. Täglich werden ungefähr 100 Milliarden E-Mails an gültige E-Mail-Adressen auf der ganzen Welt gesendet. 2010 waren schätzungsweise 88 Prozent dieser weltweit verschickten E-Mails Spam (Symantec 2010; MAAWG 2011). Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spamfilter eine E-Mail löscht, gegeben sie ist Spam, beträgt 0.95. Ausserdem wird eine E-Mail, welche kein Spam ist, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.00001 gelöscht. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail kein Spam ist, gegeben sie wurde gelöscht?

B.2.12.7 On the basis of a physical examination and symptoms, a physician assesses the probabilities that the patient has no tumour, a benign tumour, or a malignant tumour as 0.70, 0.20, and 0.10, respectively. A thermographic test is subsequently given to the patient. This test gives a negative result with probability 0.90 if there is no tumour, with probability 0.80 if there is a benign tumour, and with probability 0.20 if there is a malignant tumour.

a) What is the probability that a thermographic test will give a negative result for this patient?

b) Obtain the posterior probability for a malignant tumour when the test result is negative?

c) Obtain the posterior probability for a malignant tumour when the test result is positive?

d) How does the information provided by the test in the two cases change the physician's view as to whether the patient has a malignant tumour?

1. Sei $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,6\}$ und $C = \{1,4\}$, finden Sie

   a) $A \cap B$

   b) $B \cup C$

   c) $A \cup (B \cap C)$

   d) $(A \cup B)^c$

(a) $A \cap B = \emptyset$

(b) $B \cup C = \{1, 4, 6\}$

(c) $A \cup (B \cap C) = A \cup \{4\} = \{1, 3, 4, 5\}$

(d) $(A \cup B)^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}^c = \{2\}$

2. Beweisen Sie die beiden folgenden Eigenschaften für Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der drei Axiome von Kolmogoroff (In der Prüfung müssen Sie keine Beweise führen, aber in den Übungen hin und wieder schon)

a) $P(A) = \sum_{s \in A} P(s)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Axiome von Kolmogoroff:

(A1): $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

(A2): $P(\Omega) = 1$

(A3): $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + \mathbb{P}(B)$

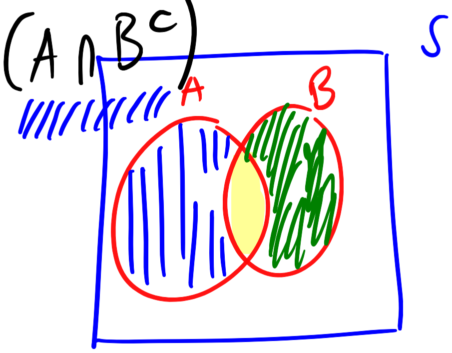
(a) Ereignis $A = s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_k$ (disjunkt)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_k) \overset{\text{Axiom 3}}{=} \mathbb{P}(s_1) + \ldots + \mathbb{P}(s_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(s_i)$$

(b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- $A \cap B = \emptyset$: Axiom 3
- $A \cap B \neq \emptyset$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$



$$\left(\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

3. Seien A und B disjunkte Ereignisse mit $P(A) = 0.2$ und $P(B) = 0.5$. Finden Sie

a) $P(A^c)$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(A \cup B)$

d) $P(A^c \cap B)$

$A \cap B = \emptyset$

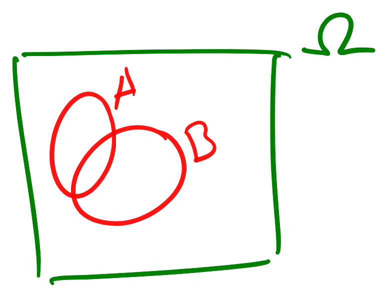
$A \cap B = \emptyset$

(a) $P(A^c) = 1 - P(A) = 0.8$

(b) $P(\underbrace{A \cap B}_{=\emptyset}) = 0$

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(d) $P(A^c \cap B) = P(B)$



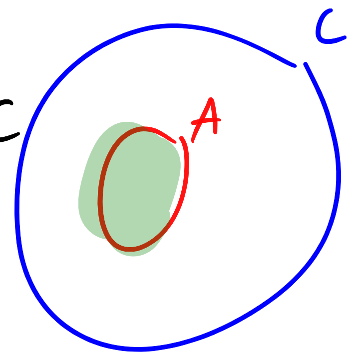
↳ falls $A \cap B \neq \emptyset$:

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

4. Sei $A \subset C$ und $B \subset C$.
Zeigen Sie, dass

$$\frac{P(A \mid C)}{P(B \mid C)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)}, \text{ da } A \subset C$$



$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)}$$

$$\rightsquigarrow \frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

B.2.12.4 An experiment results in a sample space S containing five sample points and their associated probabilities of occurrence:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
0.22	0.31	0.15	0.22	0.1

$= 0.22 + 0.15 = 0.37$

$= 0.31 + 0.15 + 0.22 = 0.68$

$= 0.15$

$= P(E_1 \cap E_2)/P(E_2) = 0.15/(0.31 + 0.15 + 0.22) = 0.22$

$= 0$

$= P(E_3 \cap E_2)/P(E_2) = 0$

B.2.12.3 Three events, A, B, and C are defined over some sample space S. Events A and B are independent. Events A and C are mutually exclusive. Some relevant probabilities are $P(A) = 0.04$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.2$ and $P(B \mid C) = 0.15$. Compute the values of $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(A \cup B \cup C)$ and $P(C \mid B)$.

- A, B sind unabhängig: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
- $A \cap C = \emptyset$

- $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
  $$= 0.04 + 0.25 - 0.04 \times 0.25$$
- $$\mathbb{P}(A \cup C) \underset{\text{disjunkt}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) = 0.04 + 0.2$$
- $$\mathbb{P}(\underbrace{A}_{X} \cup \underbrace{B \cup C}_{Y}) = \text{"}\mathbb{P}(X \cup Y)\text{"}$$

Formel aus zweiter Aufgabe

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

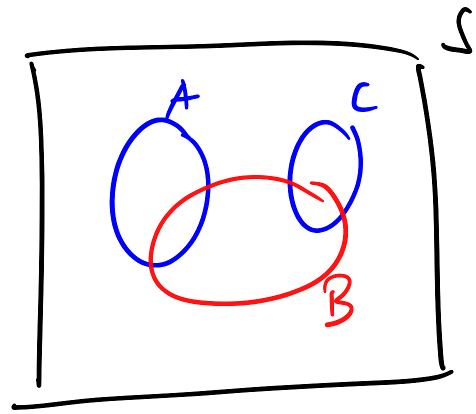
$$= \ldots\ldots - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(\underbrace{\cancel{A \cap C}}_{=\emptyset}) + \underbrace{\mathbb{P}((A \cap B) \cap \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset})}_{=0}$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$$

$$= 0.45$$



$$\cdot\ \mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.2 \times 0.15}{0.25}$$

5. Täglich werden ungefähr 100 Milliarden E-Mails an gültige E-Mail-Adressen auf der ganzen Welt gesendet. 2010 waren schätzungsweise 88 Prozent dieser weltweit verschickten E-Mails Spam (Symantec 2010; MAAWG 2011). Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spamfilter eine E-Mail löscht, gegeben sie ist Spam, beträgt 0.95. Ausserdem wird eine E-Mail, welche kein Spam ist, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.00001 gelöscht. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail kein Spam ist, gegeben sie wurde gelöscht?

- $S :=$ Spam, $S^c :=$ kein Spam, $\mathbb{P}(S) = 0.88$
- $L :=$ Löschen, $L^c :=$ nicht löschen

$P(L|S) = 0.95$, $P(L|S^c) = 0.00001$

$\boxed{\text{Wir suchen } \mathbb{P}(S^c|L)}$

$\mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S) = 0.12$

$$\mathbb{P}(S^c|L) = \frac{\overset{0.00001}{P(L|S^c)}\,\mathbb{P}(S^c)}{\mathbb{P}(L)} = 0.0000014$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_n)\,\mathbb{P}(B_n)$$

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(L|S^c)\,\mathbb{P}(S^c) + \mathbb{P}(L|S)\,\mathbb{P}(S)$$
$$= 0.00001 \cdot 0.12 + 0.95 \cdot 0.88$$

B.2.12.7 On the basis of a physical examination and symptoms, a physician assesses the probabilities that the patient has no tumour, a benign tumour, or a malignant tumour as 0.70, 0.20, and 0.10, respectively. A thermographic test is subsequently given to the patient. This test gives a negative result with probability 0.90 if there is no tumour, with probability 0.80 if there is a benign tumour, and with probability 0.20 if there is a malignant tumour.

a) What is the probability that a thermographic test will give a negative result for this patient?

b) Obtain the posterior probability for a malignant tumour when the test result is negative?

c) Obtain the posterior probability for a malignant tumour when the test result is positive?

d) How does the information provided by the test in the two cases change the physician's view as to whether the patient has a malignant tumour?

$A :=$ no tumour

$B :=$ benign tumour

$C :=$ malignant tumour

$N :=$ negative test

$N^c :=$ positive test

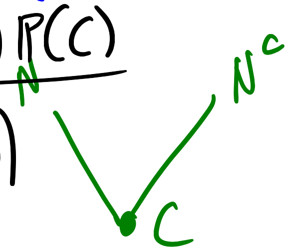
totale Wahrscheinlichkeit

(a) $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(N|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(N|C)\mathbb{P}(C) = 0.81$

(b) $\mathbb{P}(C|N) = \dfrac{\mathbb{P}(N|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(N)} = 0.025$

$1-\mathbb{P}(N|C)$

(c) $\mathbb{P}(C|N^c) = \dfrac{\mathbb{P}(N^c|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(N^c)} = \dfrac{(1-\mathbb{P}(N|C))\mathbb{P}(C)}{1-\mathbb{P}(N)}$



$= 0.421$

(d) wie erwähnt