Theorie Übung 8

Statistische Induktion für das Durchschnittsalter in der Schweiz:

Population $\longrightarrow$ Stichprobe

Parameter θ
(das wahre Durchschnitts-
alter, z.B 40 Jahre)

Schätzfunktion $T(x)$
berechnet Schätzer $\hat{\theta}$
(z.B 45 Jahre)

Wichtige Punkte:

(I) Vor der Ziehung der Zufallsstichprobe ist $\hat{\theta}$ eine Zufallsvariable, da abhängig von $X_1, \dots, X_N$

↳ in gewissen Fällen können wir die Verteilung von $\hat{\theta}$ herleiten ($\hat{p}$, $\bar{z}$ mit ZGS)

(II) Anstatt nur den Punktschätzer (auch Statistik) anzugeben – zum Beispiel $\hat{\theta} = 45$ Jahre – wollen wir ein Intervall angeben, in dem der wahre Wert $\theta = 40$ Jahre mit einer gewissen Konfidenz liegt

↳ u.a um der Abhängigkeit von der Zufallsstichprobe gerecht zu werden

↳ Konfidenzintervall ($\alpha = 5\%$): Wenn wir 100 Zufallsstichproben ziehen, erwarten wir, dass θ in 95 der Fälle in unserem Konfidenzintervall liegt

Statistik
Übungsaufgaben 8

Konfidenzintervalle

1. **(Was ist ein Konfidenzintervall?)** Gegeben ist eine Zufallsstichprobe, $X_1, ..., X_N$, wobei $X_i \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, ..., N$. Konstruieren Sie ein $1 - \alpha$ Konfidenzintervall für den Anteil p. Verwenden Sie dazu den Zentralen Grenzwertsatz.

B.4.12.5. The mean and standard deviation of a random sample of N measurements are equal to 33.9 and 3.3 respectively.

a) Find a 95% confidence interval for μ if $N = 100$.

b) Find a 95% confidence interval for μ if $N = 400$.

c) What is the effect on the width of the confidence interval of quadrupling the sample size while holding the confidence coefficient fixed?

B.4.12.6 Health insurers and the federal government are both putting pressure on hospitals to shorten the average length of stay of their patients. In 1993 the average length of stay for men in the United States was 6.5 days and the average for women was 5.6 days (Statistical Abstract of the United States: 1995). A random sample of 20 hospitals in one state had a mean length of stay for women in 1996 of 3.6 days and a standard deviation of 1.2 days.

a) Use a 90% confidence interval to estimate the population mean length of stay for women in the state's hospitals in 1996.

b) Interpret the interval in terms of this application.

c) What is meant by the phrase "90% confidence interval"?

2. Ihre Firma stellt Produkte für Jogger her. Eine (Zufalls-)Stichprobe von $N = 70$ Joggern ergibt die folgenden Statistiken bezüglich des Gewichtes der Jogger (in Kilogramm): $\bar{x} = 66.8$ und $s = 4.8$.

a) Finden Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ, das durchschnittliche Gewicht aller Jogger.

b) Sie hätten gerne ein 95%-Konfidenzintervall für μ mit einer Fehler-Marge von höchstens 0.75 Kilogramm. Eine wie grosse Stichprobe wäre (ungefähr) notwendig?

c) Wandeln Sie das Konfidenzintervall aus a) für den amerikanischen Markt um, wo das Gewicht in Pounds gemessen wird. Hinweis: 1 Kilogramm = 2.2 Pounds.

3. Eine Zufallsstichprobe von 100 Einwohnern von Los Angeles ergab, dass sich 64 der Befragten zugunsten einer strengeren Waffengesetzgebung ausgesprochen haben. Finden Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil aller Einwohner von Los Angeles die eine strengere Waffenkontrolle bevorzugen.

4. Man betrachtet eine Zufallsstichprobe der Grösse, $N = 140$. Das Häufigkeitsdiagramm weist auf eine extrem rechtsschiefe Verteilung hin. Ein Kollege von Ihnen konstruiert ein Konfidenzintervall mittels der t-Verteilung. Wie beurteilen Sie seine Vorgehensweise?

1. **(Was ist ein Konfidenzintervall?)** Gegeben ist eine Zufallsstichprobe, $X_1, ..., X_N$, wobei $X_i \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, ..., N$. Konstruieren Sie ein $1-\alpha$ Konfidenzintervall für den Anteil p. Verwenden Sie dazu den Zentralen Grenzwertsatz.

- Definition: $\hat{p} = \frac{X}{N}$, sodass $N\hat{p} \sim \text{Binomial}(N, p)$

- ZGS: für $\min\{Np, N(1-p)\} \geq 10$ haben wir

$$Np \sim \mathcal{N}(Np, Np(1-p))$$

- Konstruktion:

$$1-\alpha \approx \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \underbrace{\frac{N\hat{p} - E[N\tilde{p}]}{\sqrt{Var(N\hat{p})}}}_{:= Z \sim \mathcal{N}(0,1)} \leq z_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{N\hat{p} - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq z_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{N\cdot(\hat{p}-p)}{N\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} \leq z_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}} \leq z_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \leq \hat{p}-p \leq z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(-\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \leq -p \leq -\hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} < p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(p \in \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)$$

B.4.12.5. The mean and standard deviation of a random sample of N measurements are equal to 33.9 and 3.3 respectively.

a) Find a 95% confidence interval for μ if $N = 100$.

b) Find a 95% confidence interval for μ if $N = 400$.

c) What is the effect on the width of the confidence interval of quadrupling the sample size while holding the confidence coefficient fixed?

(a) $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{s^2}{N}\right)$, sodass

$$1-\alpha \approx \mathbb{P}\left(\mu \in \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}}\right)$$

$$0.95 \approx \mathbb{P}\left(\mu \in 33.9 \pm 1.96 \cdot \frac{3.3}{\sqrt{100}}\right)$$

$$0.95 \approx \mathbb{P}\left(\mu \in [33.25, 34.55]\right)$$

Mit 95% Konfidenz liegt μ im Intervall $[33.25, 34.55]$.

(b) $$0.95 \approx \mathbb{P}\left(\mu \in 33.9 \pm 1.96 \cdot \frac{3.3}{\sqrt{400}}\right)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(\mu \in [33.58, 34.22]\right)$$

Kleineres Konfidenzintervall

(c) $$33.9 \pm 1.96 \cdot \frac{3.3}{\sqrt{4}\sqrt{100}} = 33.9 \pm 1.96 \cdot \frac{3.3}{\sqrt{400}}$$

↳ neues KI um Faktor $\sqrt{4}$ kleiner als das alte

B.4.12.6 Health insurers and the federal government are both putting pressure on hospitals to shorten the average length of stay of their patients. In 1993 the average length of stay for men in the United States was 6.5 days and the average for women was 5.6 days (Statistical Abstract of the United States: 1995). A random sample of 20 hospitals in one state had a mean length of stay for women in 1996 of 3.6 days and a standard deviation of 1.2 days.

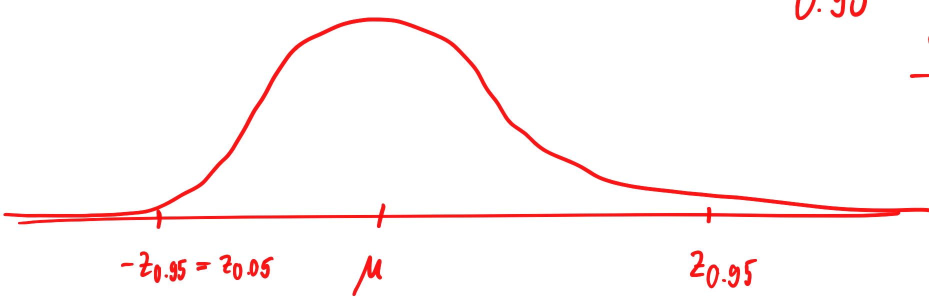
a) Use a 90% confidence interval to estimate the population mean length of stay for women in the state's hospitals in 1996.

b) Interpret the interval in terms of this application.

c) What is meant by the phrase "90% confidence interval"?

Repetition Perzentile

$$0.95 = \int_{-\infty}^{z_{0.95}} f(x)\,dx, \text{ wobei } X \sim N(0,1)$$



(a) $$1 - 0.1 \approx \mathbb{P}\left(\mu \in \bar{x} \pm z_{1-\frac{0.1}{2}} \frac{s}{\sqrt{N}}\right)$$

$$0.9 \approx \mathbb{P}\left(\mu \in 3.6 \pm 1.645 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{20}}\right)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(\mu \in [3.16, 4.04]\right)$$

(Anmerkung: $N = 20 < 50$)

(b) • Mit 90% Konfidenz....

• Von 1000 Stichproben....

2. Ihre Firma stellt Produkte für Jogger her. Eine (Zufalls-)Stichprobe von $N = 70$ Joggern ergibt die folgenden Statistiken bezüglich des Gewichtes der Jogger (in Kilogramm): $\bar{x} = 66.8$ und $s = 4.8$.

a) Finden Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ, das durchschnittliche Gewicht aller Jogger.

b) Sie hätten gerne ein 95%-Konfidenzintervall für μ mit einer Fehler-Marge von höchstens 0.75 Kilogramm. Eine wie grosse Stichprobe wäre (ungefähr) notwendig?

c) Wandeln Sie das Konfidenzintervall aus a) für den amerikanischen Markt um, wo das Gewicht in Pounds gemessen wird. Hinweis: 1 Kilogramm = 2.2 Pounds.

(a) 95-% KI: $\bar{X} \pm z_{1-\frac{0.05}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$

$$= 66.8 \pm 1.96 \cdot \frac{4.8}{\sqrt{70}}$$

$$= [65.7, 67.9]$$

(b) $FM = z_{1-\alpha/2} \cdot SF(\bar{X})$, wobei $SF(\bar{x}) = \sqrt{\hat{Var}(\bar{X})}$

$$= z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq 0.75$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot s}{0.75} \leq \sqrt{N}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot s}{0.75}\right)^2 \leq N$$, womit wir haben:

$$N \geq \left(\frac{1.96 \cdot 4.8}{0.75}\right)^2 = \lceil 157.35 \rceil = 158$$

(c) Reminder:

$$100 \times (1-\alpha)\%\ KI = \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\, SF(\bar{X})$$

- Originaldaten: $\{X_j\}_{j=1}^{70}$
- In Pounds: $\{\underbrace{X_1 \cdot 2.2}_{:= X_{NEU1}}, \underbrace{X_2 \cdot 2.2}_{:= X_{NEU2}}, \dots, X_{70} \cdot 2.2\} = 2.2\ \{X_j\}_{j=1}^{70}$

$$\bar{X}_{NEU} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_{NEUi} = 2.2\, N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i = 2.2\,\bar{X}$$

$$SF(\bar{X}_{NEU}) = \frac{s_{NEU}}{\sqrt{N}}$$

$$s^2_{NEU} = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (X_{NEUi} - \bar{X}_{NEU})^2$$

$$= (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (2.2\, X_i - 2.2\bar{X})^2$$

$$= (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (2.2\,(x_i - \bar{x}))^2$$

$$= (N-1)^{-1}\, 2.2^2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = 2.2^2 s^2 \quad \text{, womit}$$

$$s_{NEU} = \sqrt{2.2^2 s^2} = 2.2 s$$, womit das neue KI gegeben ist durch:

$$2.2\bar{X} \pm 1.96 \cdot \frac{2.2 s}{\sqrt{N}} = [145, 148]$$

$\hookrightarrow$ transformieren mit 2.2 [die Grenzen des KI]

3. Eine Zufallsstichprobe von 100 Einwohnern von Los Angeles ergab, dass sich 64 der Befragten zugunsten einer strengeren Waffengesetzgebung ausgesprochen haben. Finden Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil aller Einwohner von Los Angeles die eine strengere Waffenkontrolle bevorzugen.

Theorie - Wiederholung:

$$N\hat{p} \sim \mathcal{N}(Np, Np(1-p))$$

- $\hat{p} = \frac{64}{100}$

- $100 \times (1-\alpha)\%$ Konfidenzintervall:

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

Wir kennen p nicht und ersetzen p mit $\hat{p}$:

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} = [0.546, 0.734]$$

4. Man betrachtet eine Zufallsstichprobe der Grösse, $N = 140$. Das Häufigkeitsdiagramm weist auf eine extrem rechtsschiefe Verteilung hin. Ein Kollege von Ihnen konstruiert ein Konfidenzintervall für den Mittelwert mittels der Normalverteilung. Wie beurteilen Sie seine Vorgehensweise?