Theorie Übung 5

Repetition: Erwartungswert + Varianz von

Zufallsvariablen: $p(x)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W} x\, \mathbb{P}(X=x) \overset{\text{stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in W} (x - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X=x) \overset{\text{stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\, dx$$

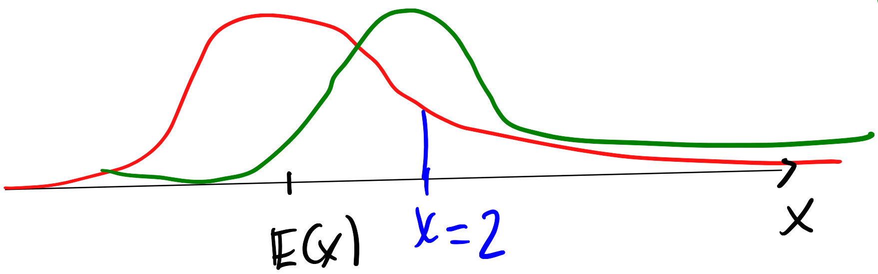
Regeln:

$$\mathbb{E}(a + bX + cY) = a + b\mathbb{E}(X) + c\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathrm{Var}(a + bX + cY) = b^2 \mathrm{Var}(X) + c^2 \mathrm{Var}(Y)$$

X, Y unabhängig

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$



(i) a: verschieben

(ii) b: standen/ziehen

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Statistik
Übungsaufgaben 5

Summe von Zufallsvariabeln - Erwartungswert und Varianz - Poisson Verteilung - Bernoullis Gesetz der Grossen Zahlen

B.3.12.10 Two independent random variables X and Y have the following properties: $\mu_X = 10$, $\sigma_X = 4$, $\mu_Y = 8$, $\sigma_Y = 5$. Find the expected value and variance of $U = 3X - 4Y$.

1. Sei $S = X + Y$ die Summe zweier Würfel-Würfe. Berechnen Sie $E(S)$ und $Var(S)$ 'direkt' über die Verteilung von S.

B.3.12.14 Let $X_i = 1$ with probability p and 0 with probability $1-p$ where X_i is an independent sequence. For

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

show that

$$E(X) = Np$$

and

$$Var(X) = Np(1-p)$$

2. Ein Wohltätigkeits-Kasino bietet das folgende Spiel an: Sie werfen einen Würfel einmal. Diese Summe zahlen Sie an das Kasino. Dann werfen Sie den Würfel nocheinmal. Diese Summe zahlt das Kasino an Sie. Berechen Sie den Erwartungswert und die Varianz Ihres (Netto-)Gewinnes G.

3. Beweisen Sie folgende Gleichung

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

4. Eine Multiple-Choice-Aufgabe hat vier mögliche Antworten, wovon genau eine richtig ist. Wer die richtige Antwort ankreuzt, bekommt 1 Punkt. Wer die falsche Antwort ankreuzt, bekommt a Punkte. Wie sollte a gewählt werden, damit jemand, der rät, einen Erwartungswert von null Punkten hat? (Die Motivation ist, dass Raten keinen Vorteil erbringen soll gegenüber dem Ankreuzen keiner Antwort.)

5. Wenn es morgen schön ist lernt Michael 3 Stunden. Sollte es regnen, sind es ganze 8 Stunden. Bei 3 Stunden Lernzeit rechnet Michael mit einer 5.25 und bei 8 Stunden mit einer 6. Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet ist 30%. Was hat der gute Mann in Erwartung für eine Note?

6. **(Das St. Petersburg Paradox)** Gemäss der Entscheidungstheorie ist ein Spiel fair, wenn der Erwartungswert des Nettogewinns gleich Null ist. Oder equivalent, wenn der Preis der gezahlt wird (um spielen zu dürfen) gleich dem Erwartungswert der Auszahlung ist. Zum Beispiel, wenn die Auszahlung (in CHF) eines Spiels der Augenanzahl eines Würfelwurfes entspricht, dann wäre der faire Preis für dieses Spiels CHF 3.5.

Betrachten Sie nun das folgende Spiel: Sie werfen eine Münze, bis ein Wappen erscheint. Sei Y die Anzahl der benötigten Würfe; die Auszahlung an Sie beträgt dann $X = 2^{Y-1}$. D.h., wenn Sie sofort ein Wappen werfen, erhalten Sie CHF 1; wenn das Wappen beim zweiten Wurf kommt, erhalten Sie CHF 2; wenn das Wappen beim dritten Wurf kommt, erhalten Sie CHF 4; usw.

a) Was wäre der faire Preis für dieses Spiel?

b) Wieviel wären Sie persönlich bereit, für dieses Spiel zu zahlen?

B.3.12.17 The number of houses sold each month by a top real estate agent is a Poisson random variable X with $\lambda = 4$.

a) What are the expected value and standard deviation of X?

b) What is the probability that the agent will sell more than 2 houses in a given month?

c) Given that the agent sells at least 1 house in a month, what is the probability that she will sell 3 or more?

Erwartungswert der Summe von 2 ZV. ist die Summe des Erwartungswerte

$$\mathbb{E}(3X-4Y) = 3\mathbb{E}(X) + (-4)\mathbb{E}(Y)$$

$$= 3\cdot\mu_X - 4\mu_Y = 30 - 4\cdot 8 = -2$$

$$Var(3X-4Y) = 3^2\,Var(X) + (-4)^2\,Var(Y)$$

falls X, Y unabhängig

$$\mathbb{E}\left[\left((X-Y)-\mathbb{E}(X-Y)\right)^2\right]$$

$$= 3^2\cdot\sigma_X^2 + (-4)^2\sigma_Y^2 = 544$$

1. Sei $S = X + Y$ die Summe zweier Würfel-Würfe. Berechnen Sie $E(S)$ und $Var(S)$ 'direkt' über die Verteilung von S.

$X :=$ erster Wurf

$Y :=$ zweites Wurf

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6$$

$$= \frac{1}{6}(1 + \dots + 6) = \frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 3.5$$

$$E(X) = E(Y)$$

$$\hookrightarrow E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = 7$$

Anmerkung: X, Y unabhängig

$$\hookrightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 - 3.5)^2 + \dots + \frac{1}{6}(6 - 3.5)^2$$

$$= 2.91$$

$$Var(S) = Var(X) + Var(Y) = 2 Var(X) = \underline{2 \cdot 2.91}$$

B.3.12.14 Let $X_i = 1$ with probability p and 0 with probability $1-p$ where X_i is an independent sequence. For

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

show that

$$E(X) = Np$$

and

$$Var(X) = Np(1-p)$$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$X \sim \text{Binomial}(N,p)$

(a) $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i)$,

wobei $E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$,

sodass $\sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p = Np$

(b) $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i)$,

wobei $Var(X_i) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 (1-p)$

$= (1-2p+p^2)p + p^2(1-p)$

$= p - 2p^2 + \cancel{p^3} + p^2 - \cancel{p^3}$

$= p - p^2 = p(1-p)$,

sodass $\sum_{i=1}^{N} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p(1-p) = Np(1-p) = Var(X)$

2. Ein Wohltätigkeits-Kasino bietet das folgende Spiel an: Sie werfen einen Würfel einmal. Diese Summe zahlen Sie an das Kasino. Dann werfen Sie den Würfel nocheinmal. Diese Summe zahlt das Kasino an Sie. Berechen Sie den Erwartungswert und die Varianz Ihres (Netto-)Gewinnes G.

$$G = -X + Y \qquad (-1)\cdot X$$

$$E(G) = E(-X+Y) = -E(X) + E(Y)$$
$$= -3.5 + 3.5 = 0$$

$$Var(G) = Var(-X+Y) = (-1)^2\, Var(X) + Var(Y)$$
$$= 2 \cdot 2.91$$

3. Beweisen Sie folgende Gleichung

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

$$Var(a+bX) = \mathbb{E}[((a+bX) - \mathbb{E}(a+bX))^2]$$

$$= \mathbb{E}[(\cancel{a} + bX - \cancel{a} - bE(X))^2]$$

$$= \mathbb{E}[(bX)^2 - 2bXb\mathbb{E}(X) + b^2[\mathbb{E}(X)]^2]$$

$$= \mathbb{E}(b^2X^2) - \mathbb{E}(2b^2X)\mathbb{E}(X) + b^2[\mathbb{E}(X)]^2$$

$$= b^2\mathbb{E}(X^2) - 2b^2\underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)}_{[\mathbb{E}(X)]^2} + b^2[\mathbb{E}(X)]^2$$

$$= b^2\mathbb{E}(X^2) - b^2[\mathbb{E}(X)]^2$$

$$= b^2(\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2)$$

$$= b^2 Var(X)$$

4. Eine Multiple-Choice-Aufgabe hat vier mögliche Antworten, wovon genau eine richtig ist. Wer die richtige Antwort ankreuzt, bekommt 1 Punkt. Wer die falsche Antwort ankreuzt, bekommt a Punkte. Wie sollte a gewählt werden, damit jemand, der rät, einen Erwartungswert von null Punkten hat? (Die Motivation ist, dass Raten keinen Vorteil erbringen soll gegenüber dem Ankreuzen keiner Antwort.)

$$\mathbb{E}(X) \overset{!}{=} 0$$

man liegt richtig mit $p = 1/4$

falsch mit $1-p = 3/4$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot a \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} / {}^{3}/_{4} = -\frac{0.25}{0.75}$$

5. Wenn es morgen schön ist lernt Michael 3 Stunden. Sollte es regnen, sind es ganze 8 Stunden. Bei 3 Stunden Lernzeit rechnet Michael mit einer 5.25 und bei 8 Stunden mit einer 6. Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet ist 30%. Was hat der gute Mann in Erwartung für eine Note?

$$\mathbb{E}(N) = 0.3 \cdot 6 + (1-0.3) \cdot 5.25 = 5.475$$

6. **(Das St. Petersburg Paradox)** Gemäss der Entscheidungstheorie ist ein Spiel fair, wenn der Erwartungswert des Nettogewinns gleich Null ist. Oder equivalent, wenn der Preis der gezahlt wird (um spielen zu dürfen) gleich dem Erwartungswert der Auszahlung ist. Zum Beispiel, wenn die Auszahlung (in CHF) eines Spiels der Augenanzahl eines Würfelwurfes entspricht, dann wäre der faire Preis für dieses Spiels CHF 3.5.

Betrachten Sie nun das folgende Spiel: Sie werfen eine Münze, bis ein Wappen erscheint. Sei Y die Anzahl der benötigten Würfe; die Auszahlung an Sie beträgt dann $X = 2^{Y-1}$. D.h., wenn Sie sofort ein Wappen werfen, erhalten Sie CHF 1; wenn das Wappen beim zweiten Wurf kommt, erhalten Sie CHF 2; wenn das Wappen beim dritten Wurf kommt, erhalten Sie CHF 4; usw.

a) Was wäre der faire Preis für dieses Spiel?

b) Wieviel wären Sie persönlich bereit, für dieses Spiel zu zahlen?

$Y \sim \text{Geom}(p)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p$

(a) $E(X) = \mathbb{E}(2^{Y-1}) \overset{!}{=} 0$ (faires Spiel)

$$\mathbb{E}(2^{Y-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{2^{k-1}}_{\text{"}X\text{"}} \cdot \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= 2^{1-1} \cdot 0.5^{1-1} \cdot 0.5 \quad (0.5, k=1)$$

$$+ 2^{2-1} \cdot 0.5^{2-1} \cdot 0.5 \quad (0.5, k=2)$$

$$+ 2^{3-1} \cdot 0.5^{3-1} \cdot 0.5 \quad (0.5, k=3)$$

$$+ \vdots$$

$$= 0.5 + 0.5 + \cdots = \infty$$

(b)

B.3.12.17 The number of houses sold each month by a top real estate agent is a Poisson random variable X with $\lambda = 4$.

a) What are the expected value and standard deviation of X?

b) What is the probability that the agent will sell more than 2 houses in a given month?

c) Given that the agent sells at least 1 house in a month, what is the probability that she will sell 3 or more?

$X \sim Pois(\lambda = 4)$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$

(a) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

$$= \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \exp(-\lambda) \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^{(k-1)}}{k!}$$

$$= \exp(-\lambda) \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k} \lambda^{(k-1)}}{\cancel{k} \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1}$$

$$= \exp(-\lambda) \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} \qquad [j = k-1]$$

$$= \exp(-\lambda)\,\lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}$$

Potenzreihe, die $\exp(\lambda)$ generiert

$$= \exp(-\lambda)\,\lambda\,\exp(\lambda)$$

$$= \exp(-\lambda+\lambda)\,\lambda$$

$$= \lambda = \mathbb{E}(X)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2}_{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

$$= \dots$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

(b) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$

$$= 1 - \Big(\mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0)\Big)$$

$$= 1 - \left(2 \cdot \frac{4^2}{2!} \exp(-4) + \dots \right)$$

$$= 0.76$$

(c) Wir suchen:

$$\mathbb{P}(X \geq 3 \mid X \geq 1)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\{X \geq 3\} \cap \{X \geq 1\}\right)}{\mathbb{P}(\{X \geq 1\})}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq 3)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = 0.77$$

Wahrscheinlichkeits-
verteilung

$$= 1 - \mathbb{P}(X < 1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X = 0)$$