

复旦大学计算机科学技术学院

《代数结构与数理逻辑》期末考试试卷

A 卷 共 8 页

2014 年 6 月

课程代码: COMP130005

考试形式: 闭卷

(本试卷答卷时间为 120 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业_____学号_____姓名_____成绩_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、判断下列结论是否正确。若正确, 请予以证明; 若错误, 请举出反例。(每题 5 分, 其中判断正误 1 分, 证明或反例 4 分, 共 25 分)。

1. R 是格, 若非空集合 $S \subseteq R$, S 关于 R 中的偏序关系构成格, 则 S 是 R 的子格。

2. 任意分配格 L 满足: $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, $a, b, c \in L$ 。

-
3. 用 P 表示“老师在”，用 Q 表示“我们在学习”，用 R 表示“我们是好学生”，那么命题“只有若老师不在我们也在学习，我们才是好学生”的符号化形式为 $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 。

4. 设 $A \subseteq P(X)$, $q \in P(X)$, 若 A 语义蕴含 q , 那么存在赋值 v , 使得 $\{v(p) | p \in A\} \cap \{0\} \neq \emptyset$ 并且 $v(q) = 1$ 。

5. $P(Y)$ 是谓词代数，项 $t = f_2^1(y, z)$ ，那么由 $\forall x(R_2^1(x, y) \rightarrow \forall z R_2^2(z, x))$ 可以导出 $R_2^1(t, y) \rightarrow \forall z R_2^2(z, t)$ 。

二、 L 是 12 的正整数因子，偏序关系是整除 $|$ ， $[L; |]$ 构成格。画出 $[L; |]$ 的哈斯图，并说明是否是有界格、有补格、分配格。（5 分）

三、设存在从格 P 到格 Q 的双射 f ，当 f 是同构映射时，证明 f 的逆映射保序。（10 分）

四、已知合成公式 $(\neg x_1 \leftrightarrow x_2 \wedge x_3) \rightarrow (x_2 \rightarrow \neg x_1 \vee x_3)$ ，列出真值表，并求出标准析取范式和标准合取范式。(5 分)

五、 $P(X)$ 是命题代数， $P(Y)$ 是谓词代数，证明：

(1) $p, q \in P(X)$, $\{\neg p\} \vdash p \rightarrow q$

(2) $p, q \in P(Y)$, $A \subseteq P(Y)$, $(A \cup p(x)) \rightarrow q \vdash (\exists x p(x) \cup A) \rightarrow q$, 其中 x 不在 A 和 q 中出现。(8 分)

六、 已知谓词公式 $(\neg x \exists R_2^1(x, y) \vee \forall z R_1^1(z)) \rightarrow (R_1^2(y) \vee \exists x R_2^2(x, z))$ (8 分)

- (1) 指出自由变量和约束变量，并指明量词的辖域。
- (2) 说明项 $f_2^1(x, z)$ 对哪个(些)自由变量是自由的，对哪个(些)自由变量是不自由的。
- (3) 求量词深度和层次。
- (4) 变换成前束范式。

七、 证明：(1) $\models \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x))$ (2) $\{\forall x(\alpha \rightarrow \beta), \forall x \alpha\} \models \forall x \beta$ 。(8 分)

八、证明： $\forall x p$ 是普遍有效的，当且仅当公式 p 是普遍有效的。利用该结论证明谓词逻辑的可靠性定理。（10 分）

九、 设 v_1 是公式 $G(v_1)$ 中唯一的自由变元，并且 d 是论域 \mathfrak{P} 中的元素。用符号 $\mathfrak{P} \models G[d]$ 表示对所有赋值函数 s ， $(\mathfrak{P}, s_d^{v_1}) \models G(v_1)$ 。证明：

$$\mathfrak{P} \models \forall v_2 \mathfrak{R} v_1 v_2 [c^{\mathfrak{P}}] \text{ 当且仅当 } \mathfrak{P} \models \forall v_2 \mathcal{R} c v_2$$

其中 \mathfrak{R} 是一个二元谓词符号并且 c 是常数。（12 分）

十、设 X 为可列集，给定类型 $T = \{\rightarrow, \neg\}$ ，构造 X 上的自由 T -代数 $P(X)$ ，构造关于 $P(X)$ 的满足可靠性和完备性的命题演算逻辑，并对其可靠性和完备性进行证明。（14 分）