Candidatos a Solución Greedy en el Scheduling Problem con Minimum Weighted Cost

En este problema las tareas están representadas por dos datos: la duración l_k y el peso (o prioridad) w_k.

Candidato 1

Primero se considera el escenario en que todos los pesos son iguales.

Considerando la expresión del Costo Ponderado:

$$\sum_k w_k C_k(\sigma) = w_1 C_1(\sigma) + w_2 C_2(\sigma) + \cdots + w_n C_n(\sigma)$$

Si los pesos son iguales:

$$\sum_k w_k C_k(\sigma) = w C_1(\sigma) + w C_2(\sigma) + \cdots + w C_n(\sigma)$$

Bajo este escenario, lo único que influye en los resultados son los costos de cada tarea, y lo que se vuelve más importante es que cada tarea espere la menor cantidad de tiempo posible para poder completarse.

La mejor manera de lograr lo anterior es ordenar las tareas ascendentemente por duración, por lo que el **Candidato a Criterio de Selección #1** es simplemente:

$$l_k \quad \text{, en orden ascendente}$$

Candidato 2

Ahora se considera el escenario en que todas las duraciones son iguales.

Considerando la expresión del Costo Ponderado:

$$\sum_k w_k C_k(\sigma) = w_1 C_1(\sigma) + w_2 C_2(\sigma) + \cdots + w_n C_n(\sigma)$$

Si las duraciones son iguales a un valor l, entonces los costos se vuelven mútiplos de este valor:

$$\sum_k w_k C_k(\sigma) = w_1(l) + w_2(2l) + w_3(3l) + \cdots + w_n(nl)$$

Bajo este escenario, lo que se vuelve más importante es que los pesos más grandes queden asociados con los factores más pequeños, con los múltiplos más pequeños de l.

La mejor manera de lograr lo anterior es ordenar las tareas descendentemente por peso, por lo que el **Candidato a Criterio de Selección #2** es simplemente:

$$w_k \quad \text{, en orden descendente}$$

Candidato 3

Ahora, es importante considerar expresiones que tomen en cuenta los datos en conjunto y que cumplan también con las observaciones anteriores, donde estas expresiones cumplen un rol de *"puntaje"*, y donde el criterio de selección es *"la tarea con el mayor puntaje"*.

Una primera expresión que cumple estos requisitos es la división:

- Si en w/l se consideran los pesos más grandes, se estaría obteniendo un mayor puntaje.

- Si en w/l se consideran las duraciones más pequeñas, se estaría obteniendo un mayor puntaje.

Por lo que el **Candidato a Criterio de Selección #3** es:

$$\frac{w_k}{l_k} \quad \text{, en orden descendente}$$

Candidato 4

Otra expresión que toma en cuenta los datos en conjunto y que cumple también con las observaciones hechas es la resta:

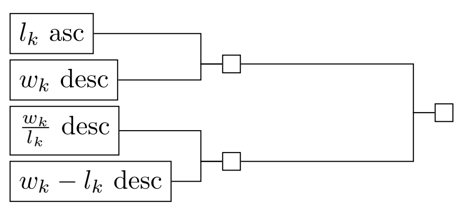
- Si en $w - l$ se consideran los pesos más grandes, se estaría obteniendo un mayor puntaje.
- Si en $w - l$ se consideran las duraciones más pequeñas, se estaría obteniendo un mayor puntaje.

Por lo que el **Candidato a Criterio de Selección #4** es:

$$w_k - l_k \quad \text{, en orden descendente}$$

VS: Combate entre los candidatos para determinar cuál es mejor

Dado que tenemos 4 candidatos, podemos organizar un pequeño torneo:



l_k VS w_k

Necesitamos definir dos tareas tal que, al utilizar l_k como criterio de selección gane una de ellas, y que al utilizar w_k como criterio de selección gane la otra:

$$T_1 = (1, 2)$$
$$T_2 = (4, 5)$$

De acuerdo a ambos criterios de selección, las agendas correspondientes serían:

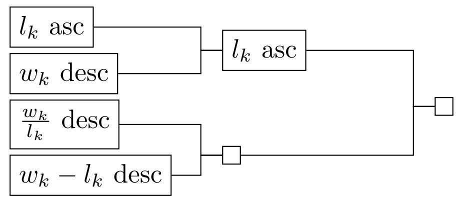
$$\sigma_{l_k} = (1, 2), (4, 5)$$
$$\sigma_{w_k} = (4, 5), (1, 2)$$

Calculemos el Costo Total Ponderado de ambas agendas:

$$\sum wC(\sigma_{l_k}) = w_1 C_1(\sigma_{l_k}) + w_2 C_2(\sigma_{l_k})$$
$$\sum wC(\sigma_{l_k}) = 2(1) + 5(1 + 4) = 27$$

$$\sum wC(\sigma_{w_k}) = w_1 C_1(\sigma_{w_k}) + w_2(C_2(\sigma_{w_k}))$$
$$\sum wC(\sigma_{w_k}) = 5(4) + 2(4 + 1) = 30$$

El Costo Total Ponderado Mínimo es 27, por lo que tenemos un ganador:



$\frac{w_k}{l_k}$ VS $w_k - l_k$

Nuevamente, primero definimos dos tareas tal que, al utilizar $\frac{w_k}{l_k}$ como criterio de selección gane una de ellas, y que al utilizar $w_k - l_k$ como criterio de selección gane la otra:

$$T_1 = (2, 1)$$
$$T_2 = (5, 3)$$

De acuerdo a ambos criterios de selección, las agendas correspondientes serían:

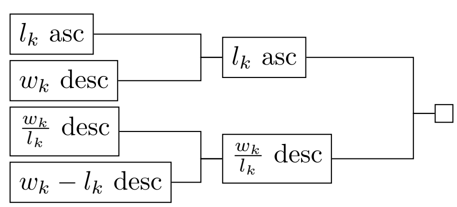
$$\sigma_{\frac{w_k}{l_k}} = (5, 3), (2, 1)$$
$$\sigma_{w_k - l_k} = (2, 1), (5, 3)$$

Calculemos el Costo Total Ponderado de ambas agendas:

$$\sum wC(\sigma_{\frac{w_k}{l_k}}) = w_1C_1(\sigma_{\frac{w_k}{l_k}}) + w_2C_2(\sigma_{\frac{w_k}{l_k}})$$
$$\sum wC(\sigma_{\frac{w_k}{l_k}}) = 3(5) + 1(5 + 2) = 22$$

$$\sum wC(\sigma_{w_k - l_k}) = w_1C_1(\sigma_{w_k - l_k}) + w_2(C_2(\sigma_{w_k - l_k}))$$
$$\sum wC(\sigma_{w_k - l_k}) = 1(2) + 3(2 + 5) = 23$$

El Costo Total Ponderado Mínimo es 22, por lo que tenemos un ganador:



l_k VS $\frac{w_k}{l_k}$

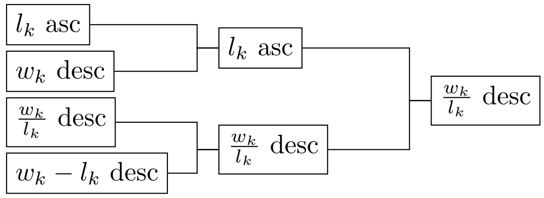
Nuevamente, primero definimos dos tareas tal que, al utilizar l_k como criterio de selección gane una de ellas, y que al utilizar $\frac{w_k}{l_k}$ como criterio de selección gane la otra.
Afortunadamente, podemos reutilizar las mismas tareas de la contienda anterior:

$$T_1 = (2, 1)$$
$$T_2 = (5, 3)$$

De acuerdo a ambos criterios de selección, las agendas correspondientes serían:

$$\sigma_{l_k} = (2, 1), (5, 3)$$
$$\sigma_{\frac{w_k}{l_k}} = (5, 3), (2, 1)$$

Ya sabemos que el Costo Total Ponderado Mínimo de la primera será 23 y el de la segunda será 22, por lo que tenemos un campeón:



Por lo tanto, la **Solución Greedy** utilizará como criterio $\frac{w_k}{l_k}$ en orden descendente.