Minimum Maximum Lateness

$$C_i(\sigma) = \sum_{k}^{i} l_k$$
$$\lambda_i(\sigma) = max\{0, C_i(\sigma) - d_i\}$$

Objetivo de la optimización:

$$min\{\max_{\sigma}\{\lambda_i(\sigma)\}\}$$

Solución Greedy

En la solución Greedy:

$$\sigma = T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$$
$$\sigma = (l_1, d_1), (l_2, d_2), (l_3, d_3), \ldots, (l_n, d_n)$$

Podemos asegurar lo siguiente:

$$d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_n$$

AFIRMACIÓN: ¡σ es la agenda/programación óptima!

Demostración:
Esta afirmación se demostrará por contradicción, es decir, afirmaremos primero lo opuesto:

¡σ **no** es la agenda/programación óptima!

Si σ no es la agenda óptima, entonces la agenda óptima debe ser alguna otra agenda, alguna otra de las $n! - 1$ agendas posibles restantes. Vamos a llamar σ^* a la agenda que sí es la óptima.

Por el *Teorema 1*, como σ^* no es igual a σ, entonces σ^* tiene al menos una inversión consecutiva. Es decir, podemos visualizar σ^* de la siguiente manera:

$$\sigma^* = \boxed{}\, , T_j, T_i, \boxed{}$$

Donde $i < j$. Construyamos una agenda diferente corrigiendo esta inversión:

$$\sigma^* = \boxed{}\, , T_j, T_i, \boxed{}$$
$$\sigma' = \boxed{}\, , T_i, T_j, \boxed{}$$

La clave está en preguntarnos, ¿**cómo cambian los costos totales y las tardanzas máximas de T_i y T_j al pasar de σ^* a σ'**?

Datos para σ^*:

$$\begin{aligned} C_j(\sigma^*) &= T_0 + l_j \\ C_i(\sigma^*) &= T_0 + l_j + l_i \\ \\ \lambda_j(\sigma^*) &= T_0 + l_j - d_j \\ \lambda_i(\sigma^*) &= T_0 + l_j + l_i - d_i \end{aligned}$$

Datos para σ':

$$\begin{aligned} C_i(\sigma') &= T_0 + l_i \\ C_j(\sigma') &= T_0 + l_i + l_j \\ \\ \lambda_i(\sigma') &= T_0 + l_i - d_i \\ \lambda_j(\sigma') &= T_0 + l_i + l_j - d_j \end{aligned}$$

En σ^* y en σ' es importante considerar en dónde se encuentra la tardanza máxima, y se tienen 3 escenarios:

- La tardanza máxima se encuentra antes de la inversión consecutiva. En este escenario entonces no cambia nada al pasar de σ^* a σ'.
- La tardanza máxima se encuentra después de la inversión consecutiva. En este escenario entonces tampoco cambia nada al pasar de σ^* a σ'.
- La tardanza máxima se encuentra en la inversión consecutiva, es decir, o le corresponde a T_i o le corresponde a T_j, y entonces acá sí puede haber cambios significativos al pasar de σ^* a σ'.

Vamos a analizar solamente el tercer escenario, precisamente porque en los demás no ocurriría nada relevante.

Si la tardanza máxima está en la inversión consecutiva, es necesario comparar a $\lambda_i(\sigma^*)$ con $\lambda_j(\sigma^*)$:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_i(\sigma^*) & ¿< / = / >? & \lambda_j(\sigma^*) \\ T_0 + l_j + l_i - d_i & ¿< / = / >? & T_0 + l_j - d_j \end{array}$$

Ambas expresiones son una resta, por lo que comparemos los minuendos y los sustraendos:

- El minuendo de $\lambda_i(\sigma^*)$ es igual al de $\lambda_j(\sigma^*)$ pero con un sumando extra, el valor l_i, por lo que es más grande.
- Ambos sustraendos son valores de *deadlines*, y gracias a la Solución Greedy sabemos que $d_i < d_j$. Por lo tanto, el sustraendo de $\lambda_i(\sigma^*)$ es más pequeño que el de $\lambda_j(\sigma^*)$.

Si en $\lambda_i(\sigma^*)$ se tiene un minuendo más grande y un sustraendo más pequeño en comparación a $\lambda_j(\sigma^*)$, entonces $\lambda_i(\sigma^*)$ es el valor más grande:

$$T_0 + l_j + l_i - d_i > T_0 + l_j - d_j$$

Y por ende, sería la tardanza máxima en σ^*.

Ahora, en σ' se tienen dos posibilidades:

- $\lambda_i(\sigma')$ es la tardanza máxima.
- $\lambda_j(\sigma')$ es la tardanza máxima.

Comparemos ambos casos con $\lambda_i(\sigma^*)$, que es la tardanza máxima en σ^*:

- $\lambda_i(\sigma')$ es más pequeño que $\lambda_i(\sigma^*)$ debido a que:

$$T_0 + l_i - d_i < T_0 + l_j + l_i - d_i$$

- $\lambda_j(\sigma')$ es más pequeño que $\lambda_i(\sigma^*)$ debido a que:

$$T_0 + l_i + l_j - d_j < T_0 + l_j + l_i - d_i$$

Ya que $d_i < d_j$, en el lado izquierdo se está restando un valor más grande.

Entonces, sin importar quién sea la tardanza máxima en σ', siempre sería un valor más pequeño que la tardanza máxima en σ^*, y entonces σ' sería una agenda más óptima que σ^*.

¡CONTRADICCIÓN!
Por lo tanto, σ **SÍ** es la agenda óptima.

lqqd