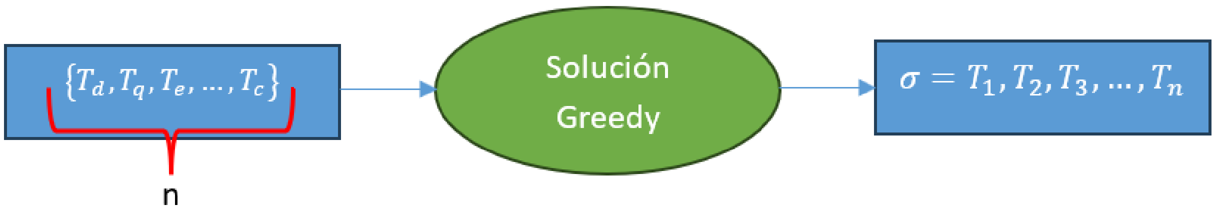


$$\sigma = T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$$
$$\sigma = (l_1, w_1), (l_2, w_2), (l_3, w_3), \ldots, (l_n, w_n)$$

σ es la programación/agenda/secuencia Greedy.

Si en σ una tarea i aparece antes de una tarea j, entonces $i < j$. σ define el nombramiento de las tareas, la tarea i mantendrá este nombre en cualquier otra agenda/programación, lo mismo ocurre con la tarea j y con cualquier otra tarea.

En el caso del **Scheduling Problem** visto en clase se ordena descendentemente por $\frac{w}{l}$, por lo que podemos asegurar:

$$\frac{w_1}{l_1} > \frac{w_2}{l_2} > \frac{w_3}{l_3} > \cdots > \frac{w_n}{l_n}$$

Y por ende, podemos resumir lo anterior con la expresión:

$$\frac{w_i}{l_i} > \frac{w_j}{l_j}$$

Dado que los nombres de las tareas no van a cambiar, esta desigualdad se mantendrá cierta.

Definición: Si $i < j$, y en una agenda/programación T_j aparece programada antes de T_i, entonces a la pareja (T_j, T_i) se le conoco como **inversión** (las tareas aparecen programadas "al revés").

Definición: Si $i < j$, y en una agenda/programación T_j aparece programada **inmediatamente antes** de T_i, entonces a la pareja (T_j, T_i) se le conoco como **inversión consecutiva** (las tareas aparecen programadas "al revés" justo una antes de la otra).

Teorema 1: *Si $\hat{\sigma}$ es una secuencia diferente a σ, entonces $\hat{\sigma}$ tiene al menos una inversión consecutiva.*
Demostración:
El Teorema 1 cumple la forma $p \to q$, y en este caso es más fácil demostrar la contraposición: $\bar{q} \to \bar{p}$

$p :=$ $\hat{\sigma}$ es diferente a σ
$q :=$ $\hat{\sigma}$ tiene al menos una inversión consecutiva

$\bar{q} :=$ $\hat{\sigma}$ no tiene inversiones consecutivas
$\bar{p} :=$ $\hat{\sigma}$ es igual a σ

Teorema 1 (contrapuesto): *Si $\hat{\sigma}$ no tiene inversiones consecutivas, entonces $\hat{\sigma}$ es igual a σ.*
Demostración:
Digamos que:

$$\hat{\sigma} = T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, \ldots, T_\omega$$

Si $\hat{\sigma}$ no tiene inversiones consecutivas, entonces α tiene que ser menor que β, y luego β tiene que ser menor que γ, y así sucesivamente. Entonces:

$$\alpha < \beta < \gamma < \cdots < \omega$$

Pero si esto es cierto, entonces es un orden ascendente, y es un orden completamente equivalente a:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n$$

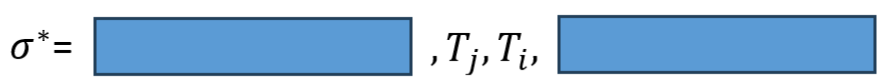
Por lo que en realidad $\hat{\sigma} = \sigma$.

AFIRMACIÓN: ¡σ es la agenda/programación óptima!
Demostración:
Esta afirmación se demostrará por contradicción, es decir, afirmaremos primero lo opuesto:

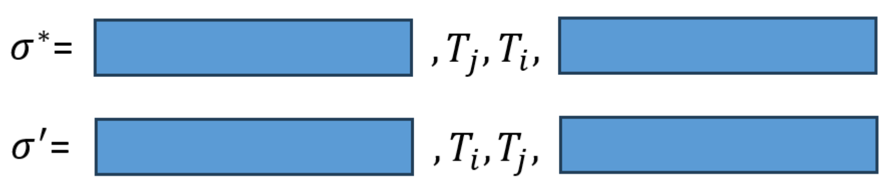
¡σ **no** es la agenda/programación óptima!

Si σ no es la agenda óptima, entonces la agenda óptima debe ser alguna otra agenda, alguna otra de las $n! - 1$ agendas posibles restantes. Vamos a llamar σ^* a la agenda que sí es la óptima.

Por el *Teorema 1*, como σ^* no es igual a σ, entonces σ^* tiene al menos una inversión consecutiva. Es decir, podemos visualizar σ^* de la siguiente manera:



Donde $i < j$. Construyamos una agenda diferente corrigiendo esta inversión:



La clave está en preguntarnos, ¿cómo cambian los costos totales ($C(\sigma)$) de T_i y T_j al pasar de σ^* a σ'? ¿Cómo cambia el costo total ponderado?

Datos para σ^*:

$$C_j(\sigma^*) = T_0 + l_j$$
$$C_i(\sigma^*) = T_0 + l_j + l_i$$

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_j(T_0 + l_j) + w_i(T_0 + l_j + l_i)$$

Datos para σ':

$$C_i(\sigma') = T_0 + l_i$$
$$C_j(\sigma') = T_0 + l_i + l_j$$

$$\Sigma wC(\sigma') = w_i(T_0 + l_i) + w_j(T_0 + l_i + l_j)$$

Distribuyendo los factores en cada escenario:

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_jT_0 + w_jl_j + w_iT_0 + w_il_j + w_il_i$$
$$\Sigma wC(\sigma') = w_iT_0 + w_il_i + w_jT_0 + w_jl_i + w_jl_j$$

Reordenamos para identificar qué es igual y qué es diferente:

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_iT_0 + w_jT_0 + w_il_i + w_jl_j + w_il_j$$
$$\Sigma wC(\sigma') = w_iT_0 + w_jT_0 + w_il_i + w_jl_j + w_jl_i$$

El término w_il_j desaparece al pasar de σ^* a σ', mientras que el término w_jl_i se añade. En otras palabras:

$$\Sigma wC(\sigma') = \Sigma wC(\sigma^*) + w_jl_i - w_il_j$$

Lo anterior hace referencia a los cambios locales, es decir, a la inversión identificada en σ^*, pero dado que esta es la única parte de la agenda que se ha modificado, la observación puede extenderse a la respuesta completa de las agendas.

Sea R_0 la respuesta del costo total ponderado en σ^*, y sea R_1 la respuesta del costo total ponderado en σ', entonces:

$$R_1 = R_0 + w_jl_i - w_il_j$$

Como σ^* es la agenda óptima, R_0 tiene que ser el costo total ponderado mínimo, por lo que no le queda otra opción a R_1 que ser más grande, es decir, $R_1 > R_0$.

Ahora bien, como R_1 se obtiene al agregar w_jl_i y restar w_il_j, para que efectivamente sea más grande que R_0 tengo que agregar más de lo que le quito, es decir, se tiene que cumplir que

$$w_jl_i > w_il_j$$

Dividiendo ambos lados entre l_il_j:

$$\frac{w_j}{l_j} > \frac{w_i}{l_i}$$

¡PERO! Como en σ, la agenda Greedy, i va antes de j, sabemos que:

$$\frac{w_i}{l_i} > \frac{w_j}{l_j}$$

¡CONTRADICCIÓN!
Por lo tanto, σ **SÍ** es la agenda óptima.

lqqd

Ahora bien, todo lo anterior trabaja sobre el hecho de que en σ:

$$\frac{w_1}{l_1} > \frac{w_2}{l_2} > \frac{w_3}{l_3} > \cdots > \frac{w_n}{l_n}$$

Sin embargo, acá hemos asumido algo: *no hay posibilidad de empate entre las tareas.*

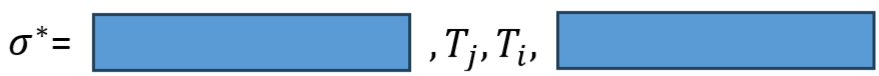
Que no haya empates es algo poco probable, no es muy realista, por lo que es necesario analizar el caso con empates, lo que modifica la expresión anterior:

$$\frac{w_1}{l_1} \geq \frac{w_2}{l_2} \geq \frac{w_3}{l_3} \geq \cdots \geq \frac{w_n}{l_n}$$

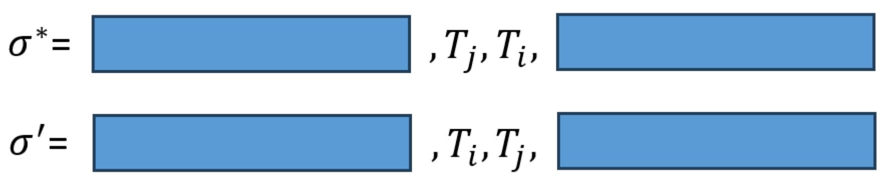
La demostración bajo este escenario es muy similar a la demostración anterior:

AFIRMACIÓN: ¡σ es la agenda/programación óptima!
Demostración:
Esta afirmación se demostrará ahora de forma directa: Consideremos primero alguna otra de las $n! - 1$ agendas posibles diferentes a σ y llamémosle σ^*.

Por el *Teorema 1*, como σ^* no es igual a σ, entonces σ^* tiene al menos una inversión consecutiva. Es decir, podemos visualizar σ^* de la siguiente manera:



Donde $i < j$. Construyamos una agenda diferente corrigiendo esta inversión:



La clave está en preguntarnos, ¿cómo cambian los costos totales ($C(\sigma)$) de T_i y T_j al pasar de σ^* a σ'? ¿Cómo cambia el costo total ponderado?

Datos para σ^*:

$$C_j(\sigma^*) = T_0 + l_j$$
$$C_i(\sigma^*) = T_0 + l_j + l_i$$

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_j(T_0 + l_j) + w_i(T_0 + l_j + l_i)$$

Datos para σ':

$$C_i(\sigma') = T_0 + l_i$$
$$C_j(\sigma') = T_0 + l_i + l_j$$

$$\Sigma wC(\sigma') = w_i(T_0 + l_i) + w_j(T_0 + l_i + l_j)$$

Distribuyendo los factores en cada escenario:

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_jT_0 + w_jl_j + w_iT_0 + w_il_j + w_il_i$$
$$\Sigma wC(\sigma') = w_iT_0 + w_il_i + w_jT_0 + w_jl_i + w_jl_j$$

Reordenamos para identificar qué es igual y qué es diferente:

$$\Sigma wC(\sigma^*) = w_iT_0 + w_jT_0 + w_il_i + w_jl_j + w_il_j$$
$$\Sigma wC(\sigma') = w_iT_0 + w_jT_0 + w_il_i + w_jl_j + w_jl_i$$

El término w_il_j desaparece al pasar de σ^* a σ', mientras que el término w_jl_i se añade. En otras palabras:

$$\Sigma wC(\sigma') = \Sigma wC(\sigma^*) + w_jl_i - w_il_j$$

Lo anterior hace referencia a los cambios locales, es decir, a la inversión identificada en σ^*, pero dado que esta es la única parte de la agenda que se ha modificado, la observación puede extenderse a la respuesta completa de las agendas.

Sea R_0 la respuesta del costo total ponderado en σ^*, y sea R_1 la respuesta del costo total ponderado en σ', entonces:

$$R_1 = R_0 + w_jl_i - w_il_j$$

Sabemos que en σ, la agenda Greedy, i va antes de j, y por tanto que:

$$\frac{w_i}{l_i} \geq \frac{w_j}{l_j}$$

Multiplicando ambos lados por l_il_j:

$$w_il_j \geq w_jl_i$$

Esto quiere decir que, o estamos restando lo mismo que estamos agregando y entonces el monto no cambia, o estamos restando más de lo que agregamos y entonces el monto se reduce. En otras palabras:

$$R_1 \leq R_0$$
$$min\{\Sigma wC(\sigma')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma^*)\}$$

Pero acá podemos inferir algo muy importante: *corregir una inversión reduce el costo total ponderado, o no lo modifica.*

Si σ' tiene más inversiones, y nos ponemos a corregirlas todas, cada vez que corrijamos una inversión obtendremos entonces un costo total ponderado menor o igual al que ya teníamos. Por ejemplo, al haber corregido dos inversiones más tendríamos:

$$min\{\Sigma wC(\sigma''')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma'')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma^*)\}$$

Si seguimos corrigiendo inversiones, eventualmente ya no quedará ninguna, pero en ese momento entonces, por el *Teorema 1*, lo que tendremos en las manos es σ:

$$min\{\Sigma wC(\sigma)\} \leq \cdots \leq min\{\Sigma wC(\sigma''')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma'')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma')\} \leq min\{\Sigma wC(\sigma^*)\}$$

En otras palabras, **el costo total ponderado de σ es menor o igual que cualquier otra agenda posible**.

Por lo tanto, σ efectivamente es la agenda óptima.

lqqd

Ejercicios:

Resolver las siguientes instancias del Scheduling Problem de forma manual y utilizando la solución Greedy, comparando resultados.

$$\tau_1 := \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$$
$$\tau_2 := \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$
$$\tau_3 := \{(78,97),(7,18),(100,11),(82,76)\}$$
$$\tau_4 := \{(25,26),(16,45),(24,76),(86,78),(88,54)\}$$