Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Escola Politécnica

Introdução a Grafos

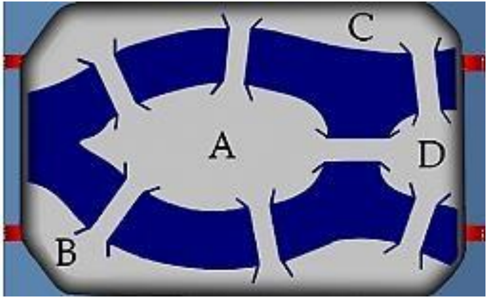
Estrutura e Recuperação de Dados II

José Guilherme Picolo
E-mail: jose.picolo@puc-campinas.edu.br

Fevereiro de 2024

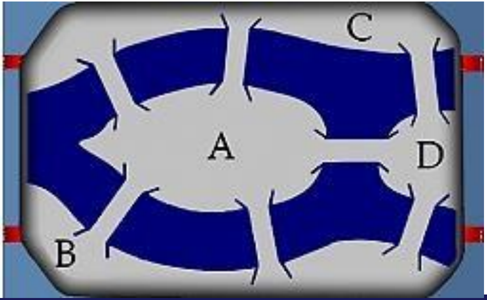
Pontes de Königsberg

- O rio Pregel divide o centro da cidade de Königsberg (Prússia no século XVII, atual Kaliningrado, Rússia) em quatro regiões.
- Essas regiões são ligadas por um complexo de sete (7) pontes, conforme mostra a figura.



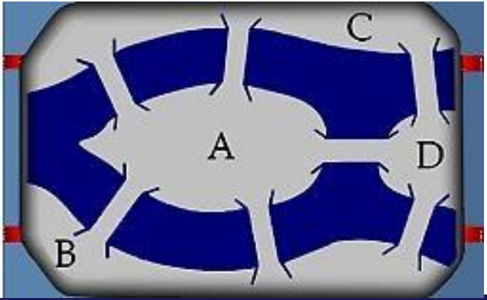
Pontes de Königsberg

- Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, voltando ao lugar de onde se saiu, sem repetir alguma.
- Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.



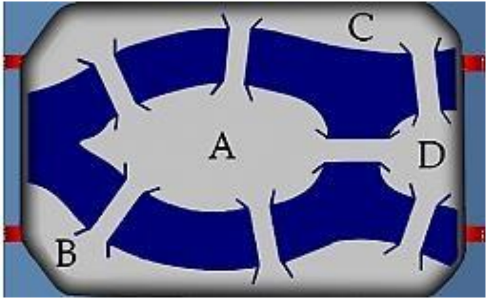
Pontes de Königsberg

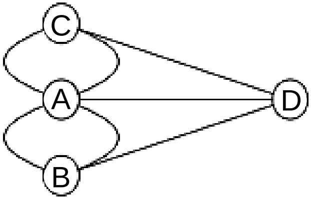
- Como provar?
  - É necessário um modelo para representar o problema
  - Abstração de detalhes irrelevantes:
    - Área de cada ilha
    - Formato de cada ilha
    - Tipo da ponte, etc.



Pontes de Königsberg

- Euler generalizou o problema através de um modelo de grafos.





Grafo

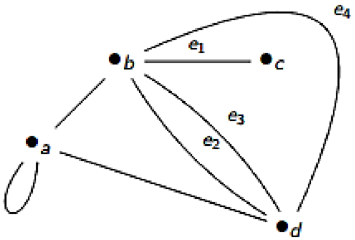
É uma coleção de vértices e arestas.

Vértices

É um objetivo simples que pode ter nomes ou outros atributos.

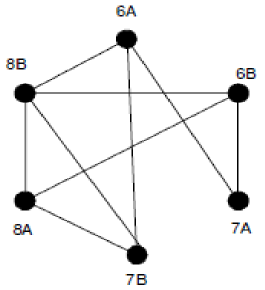
Aresta

É uma conexão entre dois vértices



No exemplo ao lado o conjunto de vértices e arestas é dado por:

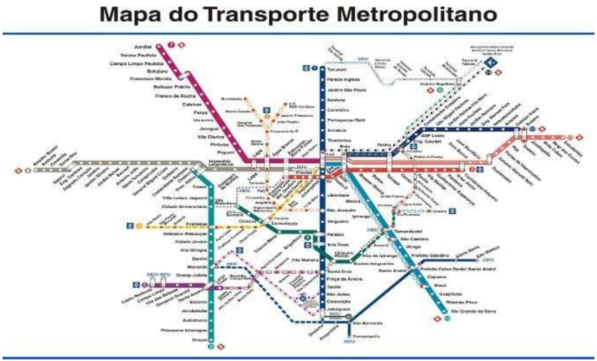
V = {6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B}
A = {(6A, 7A), (6A, 7B), (6A, 8B), (6B, 7A), (6B, 8A), (6B, 8B), (7B, 8A),(7B, 8B), (8A, 8B)}

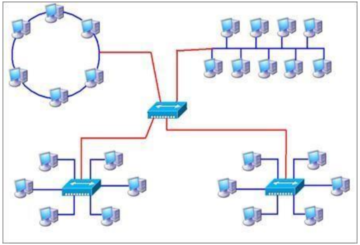


Porque estudar grafos?

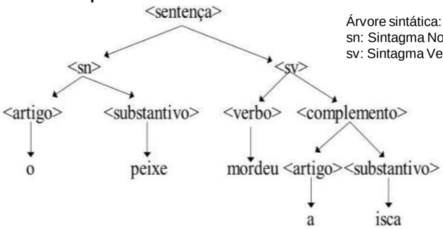
- Utilizados na definição e/ou resolução de problemas.
- Abstração matemática que representa situações reais através de um diagrama.
- Estudar grafos é mais uma forma de solucionar problemas computáveis.
- Os estudos teóricos em grafos buscam o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes.

Porque estudar grafos?





“o peixe mordeu a isca”



Árvore sintática:
sn: Sintagma Nominal
sv: Sintagma Verbal

Exemplos - Coloração

- Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?

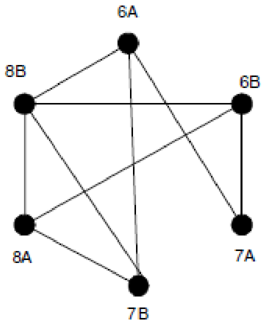
Exemplos – Caminho Mínimo

- De forma a reduzir seus custos operacionais, uma empresa de transporte de cargas deseja oferecer aos motoristas de sua frota um mecanismo que os auxilie a selecionar o melhor caminho (o de menor distância) entre quaisquer duas cidades por ela servidas, de forma a que sejam minimizados os custos de transporte

Exemplos – Análise de partidas

Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora:

- 6A jogou com 7A, 7B, 8B
- 6B jogou com 7A, 8A, 8B
- 7A jogou com 6A, 6B
- 7B jogou com 6A, 8A, 8B
- 8A jogou com 6B, 7B, 8B
- 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A



Terminologia

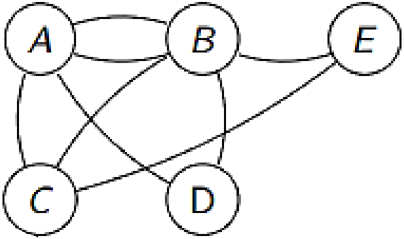
No problema da <u>coloração de mapas</u> os vértices são estados e as arestas relacionam estados vizinhos.

No problema do <u>caminho mais curto</u> os vértices são as cidades e as arestas são as ligações entre as cidades.

No problema da <u>análise de partidas</u> os vértices são as turmas e as arestas ligam os oponentes.

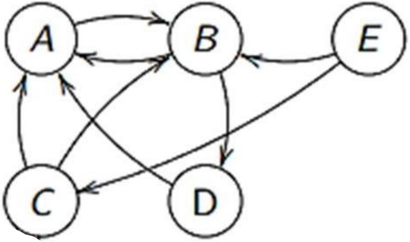
Grafo Não Direcionado

Par G=(V,E) em que o conjunto de arestas (E) consiste em pares de vértices não orientados, onde **{vi, vj} = {vj, vi}**



Grafo Direcionado (ou Dígrafo)

Par G=(V,E) em que o conjunto de arestas (E) consiste em pares de vértices orientados, onde **{vi, vj}** $\neq$ **{vj, vi}**



Terminologia

Loop (Laço)

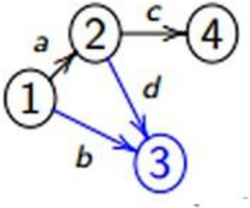
Aresta associada ao par de vértices (v_i, v_i), ou seja, o mesmo vértice.

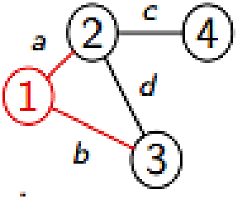
Arestas Paralelas

Ocorre quando duas ou mais arestas direcionadas estão associadas ao mesmo par de vértices.

Arestas Adjacentes

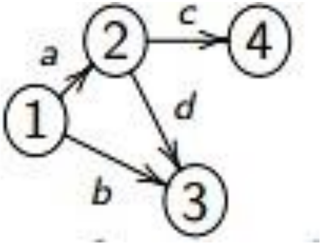
Duas Arestas não paralelas são adjacentes se elas são incidentes a um vértice comum

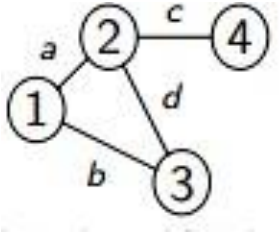




Vértices adjacentes

Dois Vértices são adjacentes se existe uma aresta ligando estes dois vértices, ou seja, o vi é adjacente ao vj se posso sair de i e chegar em j.

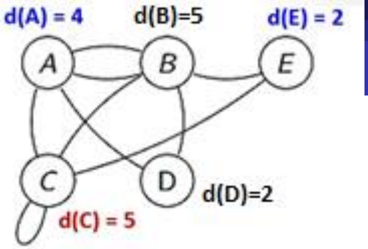




Terminologia

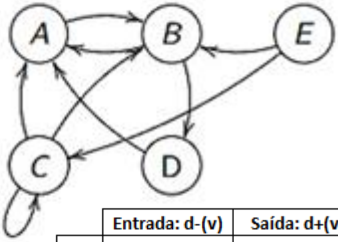
Grau de um vértice

<u>Grafo não direcionado:</u>



- Grau $d(v)$ = número de arestas que incidem em v.
- Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice não direcionado.

<u>Grafo direcionado:</u>



- Grau $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.
- Grau de <u>entrada</u> $d^-(v)$ = número de arestas que chegam em v.
- Grau de <u>saída</u> $d^+(v)$ = número de arestas que saem em v.

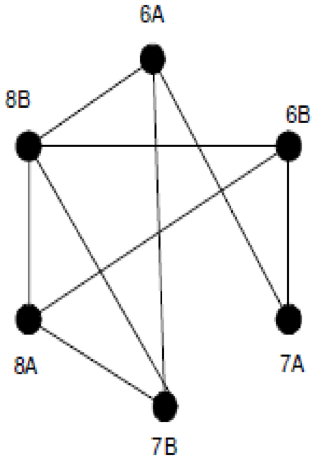
	Entrada: d-(v)	Saída: d+(v)
A	3	1
B	3	2
C	2	3
D	1	1
E	0	2

Grau de um vértice

Exemplo de utilização do grau de um vértice:

Cada turma jogou um número diferente de jogos:

- 6A jogou 3 jogos.
- 6B jogou 3 jogos.
- 7A jogou 2 jogos.
- 7B jogou 3 jogos.
- 8A jogou 3 jogos.
- 8B jogou 4 jogos.



Terminologia

Grau de um vértice

<u>Teorema 1:</u>

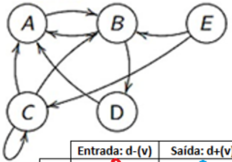
- Em um grafo não direcionado, a soma dos graus dos vértices é duas vezes o número de arestas.

$$2|E| = \sum_{v_i \in V} d(v_i)$$

<u>Teorema 2:</u>

- Em um grafo direcionado, a soma dos graus de saída de todos os vértices é igual a soma dos graus de entrada de todos os vértices, que equivale ao número de arestas do grafo.

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i)$$



	Entrada: d-(v)		Saída: d+(v)	
A	3		1	
B	3		2	
C	2	9	3	9
D	1		1	
E	0		2	

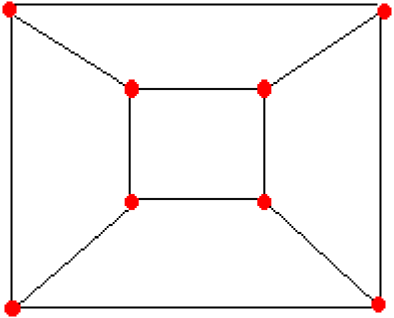
Grau de um vértice

- O <u>menor grau</u> presente em um grafo G é denotado por δ(G)
- O <u>maior grau</u> presente em um grafo G é denotado por Δ(G)
- A soma total dos graus de todos os vértices de um grafo é <u>sempre par</u>.

PUC CAMPINAS

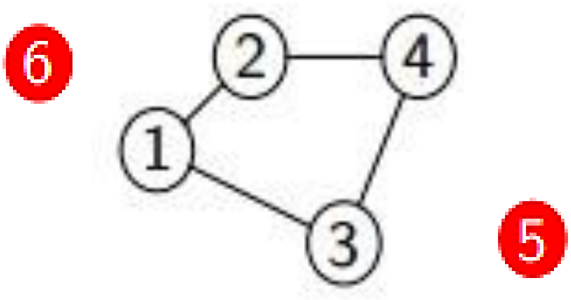
Grafo regular

Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de grafo regular. A figura ao lado apresenta um grafo 3-regular.



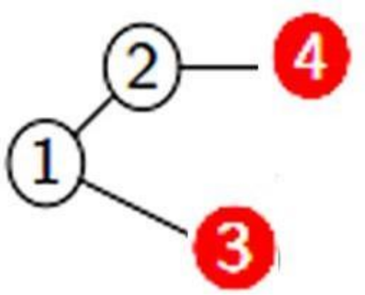
Vértice isolado

Um vértice com nenhuma aresta incidente é chamado de vértice isolado.



Vértice pendente

Um vértice com grau 1 é chamado de vértice pendente.

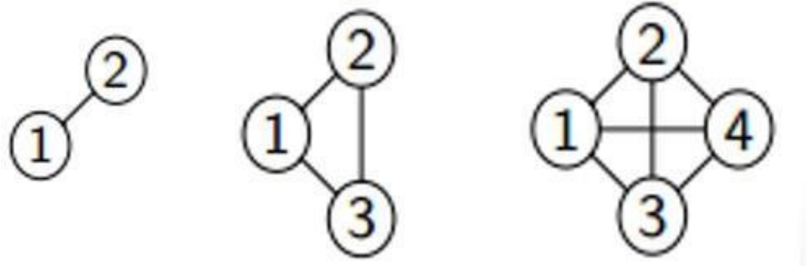


Grafo nulo

Um grafo sem nenhuma aresta é chamado de grafo nulo. Todos os vértices em um grafo nulo são vértices isolados.

Grafo Completo (K_n)

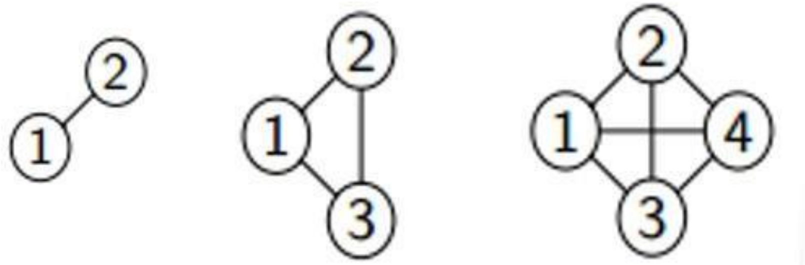
Um grafo G=(V,E) é completo se para cada par de vértices vi e vj existe uma aresta entre vi e vj. Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes.



Grafo Completo (K_n)

Qual o grau dos vértices de um grafo completo K_n? (n = número de nós)

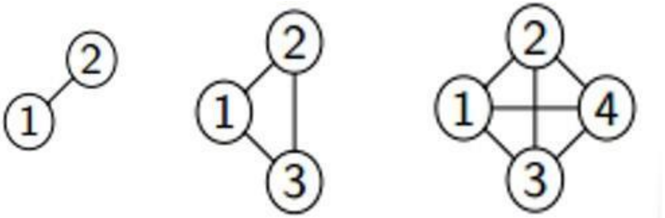
Resposta: n -1



Grafo Completo (K_n)

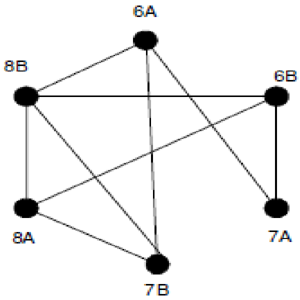
Qual o número de arestas de um grafo completo K_n?

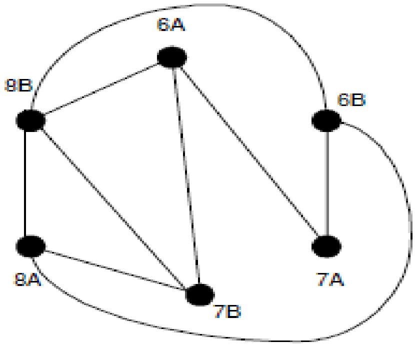
$$|E| = \frac{(n-1) \times \ n}{2}$$



Grafo Isomorfos

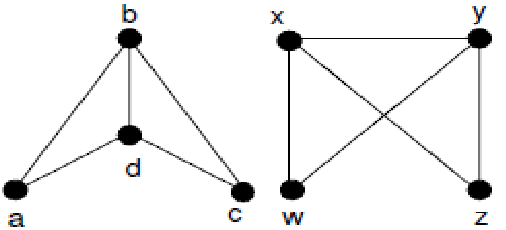
Quando dois grafos representam a mesma situação dizemos que eles são grafos isomorfos.





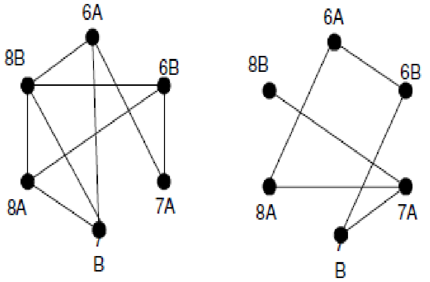
Grafo Isomorfos

Os grafos abaixo são isomorfos?



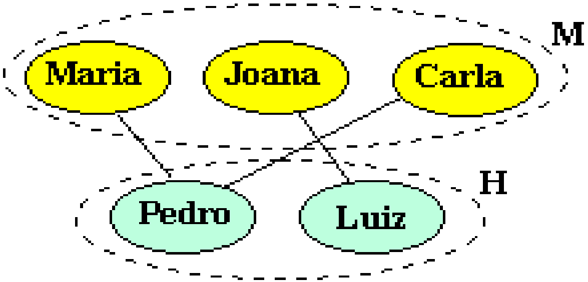
Grafo Complementar

Chamamos este grafo de grafo complementar do grafo G, denotado por $\bar{G}$. É fácil perceber que V (G) = V ($\bar{G}$) e que A(G) U A ($\bar{G}$) contempla todas as arestas possíveis de G.



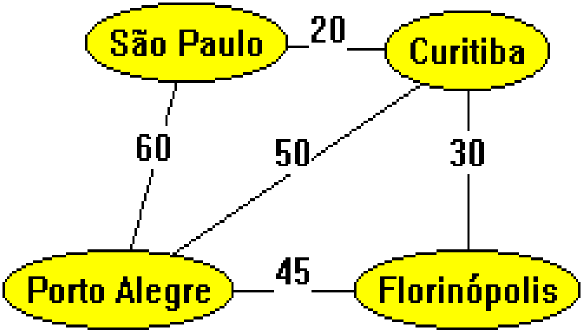
Grafo Rotulado

Ocorre quando um grafo G(V,A) é rotulado em vértices (ou arestas), ou seja, quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.



Grafo Valorizado ou Ponderado

Ocorre quando um grafo G(V,A) possui um valor, ou seja, quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números.

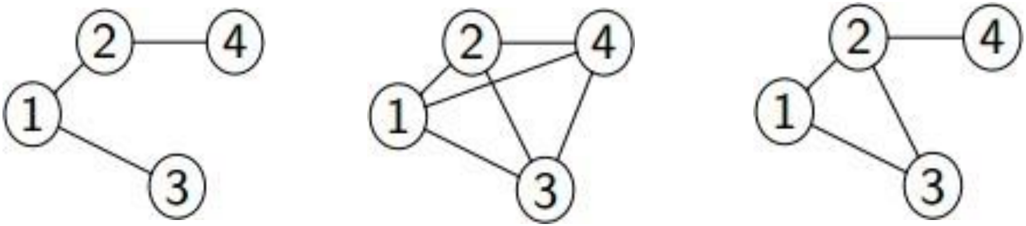


Subgrafo

Um Subgrafo G’ = (V’,E’) de um grafo G(V, E) é um grafo tal que V’ ⊆ V e E’ ⊆ E

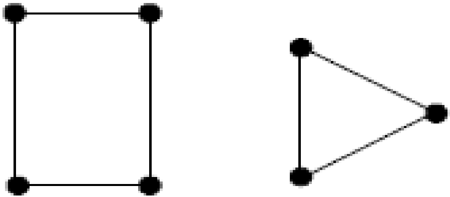
Grafo Conexo

Existe pelo menos um caminho entre todos os pares de vértices.



Grafo Desconexo

O grafo abaixo poderia ser o que chamamos de grafo desconexo. Cada parte conexa do grafo (no nosso exemplo o “quadrado” e o “triângulo”) é chamada de componente conexa do grafo.

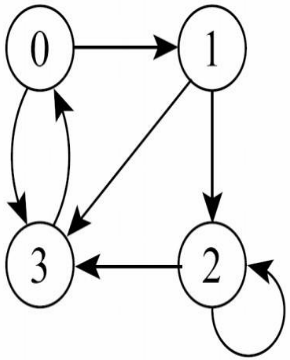


Conectividade num grafo orientado

Existem três tipos de conectividade em um grafo orientado G:

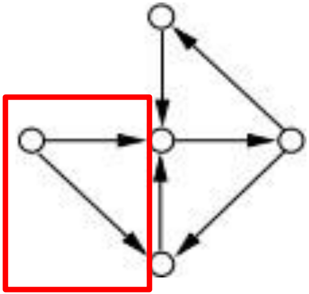
1) G é **fortemente conexo** ou forte se, para qualquer par de vértices u e v em G, existe um caminho de u para v e um caminho de v para u, isto é, se cada um deles é alcançável a partir do outro.

Um vértice v é **alcançável** a partir de um vértice u se existir um caminho de u para v



Conectividade num grafo orientado

2. G é **unilateralmente conexo** ou unilateral se, para qualquer par de vértices u e v em G, existe um caminho de u para v ou um caminho de v para u, isto é, se algum deles é alcançável a partir do outro.



Terminologia

Caminho

Um caminho entre os nós vi e vj é uma sequência alternada de nós e arestas que começa no nó vi e termina no nó vj .

Caminho Simples

Um caminho é simples se é uma sequência de vértices em que cada um aparece **apenas uma vez** (ou seja, não se repete).

Trilha

É uma sequência de vértices em que **as arestas podem se repetir**, mas **os vértices** não podem se repetir.

Comprimento de um caminho

- O comprimento (ou tamanho) de um caminho entre os vértices vi a vj é quantidade de arestas presentes no caminho.
- Se existirem mais de um caminho de vi a vj , então o comprimento do caminho de vi a vj será igual ao <u>menor comprimento</u> dentre todos os caminhos de vi a vj

PUC CAMPINAS

Circuito

Um circuito é um caminho fechado, ou seja, o vértice de saída (origem) é igual ao de chegada (destino).

Ciclo

Um ciclo é um circuito onde todos os vértices não se repete (exceto pelo Primeiro, que será também o último)

Caminho Hamiltoniano (ou de Hamilton)

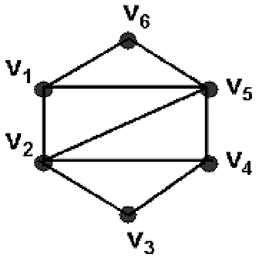
É o caminho que contém todos os vértices de um grafo exatamente uma vez.

Ciclo Hamiltoniano:

É um caminho Hamiltoniano onde o primeiro e o último vértices são iguais

$v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$ **é hamiltoniano**

$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ **é um ciclo hamiltoniano**



Grafo Euleriano

Um Grafo é Euleriano se contiver um CIRCUITO que contém todas as arestas de G.

Ciclo de Euler:

É um caminho de Euler onde o primeiro e o último vértices são iguais

são iguais

$v_1, v_6, v_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ **é euleriano**

Portanto, este grafo é euleriano