	PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE CAMPINAS Escola Politécnica Elementos de Álgebra Linear – 1º Sem 2024 **Professores: Alexandre Monteiro e Bia Leite**

Avaliações	P1	P2	Recuperação	T1	T2	T3
	16/04	04/06	20/06	09/04	28/05	11/06

Unidade 2 – SISTEMAS LINEARES

Exercícios para aula

SISTEMAS LINEARES

Equação Linear

Uma equação linear nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão da forma
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots . + a_nx_n = b$,
onde a_{ijs} e b_{is}, são constantes reais. são constantes reais.

Uma solução da equação
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots . + a_nx_n = b$
é uma sequência de n números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tal que a equação é satisfeita quando se substitui x_1 por s_1, x_2 por s_2 e assim por diante. Chama-se conjunto solução o conjunto de todas as soluções da equação linear.

Determine o conjunto solução das equações abaixo:

1) $2x = 8$
2) $0x = 4$
3) $0x = 0$
4) $x + y = 1$
5) $(a+3)x = a^2 - 9$
6) $(a^2 - 1)x = a + 1$

Sistema de equações lineares

Sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots . + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots . + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Na notação matricial:

$Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é uma solução do sistema linear se for solução de **todas** as equações do sistema. O conjunto solução é o conjunto de todas as soluções do sistema linear.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

(1,1,2) é solução do sistema.
(-7,3,13) é outra solução.
(0,2,3) não é solução do sistema.

Tipos de sistemas lineares

Um sistema linear pode ser:

a) Sistema Incompatível (ou impossível): não tem solução
b) Sistema Compatível Determinado (ou possível determinado): possui apenas uma solução
c) Sistema Compatível Indeterminado (ou possível indeterminado): possui infinitas soluções

7) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$.

   a) Represente graficamente as equações que compõem o sistema.
   b) Resolva algebricamente o sistema, escreva o conjunto solução e classifique-o de acordo com o número de soluções.

c) Compare a solução algébrica obtida em (b) com a representação gráfica obtida em (a).

8) Refaça os itens do exercício (7) para os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2\,y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 8 \end{cases}$

Sistema Homogêneo

$Ax = b$ onde b é o vetor nulo. Note que esse tipo de sistema sempre é compatível, pois sempre admite pelo menos a solução nula.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Resolução de sistemas lineares

Existem vários métodos para resolução de sistemas lineares. Entre eles, temos aqueles que utilizam o escalonamento da matriz ampliada (coeficientes da matriz A e o vetor b):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

No método de Eliminação de Gauss, a cada iteração, cria-se zeros na coluna do líder e abaixo dele, através de operações elementares, de modo que a matriz escalonada obtida fornece um sistema equivalente ao original, que pode ser resolvido por substituição.

Exemplo:

Resolva o sistema linear pelo Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solução:

Primeiramente devemos construir a matriz ampliada associada ao sistema linear dado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Agora vamos reduzir a matriz ampliada à forma escalonada por linhas. Vamos criar zeros abaixo do líder. Somando a primeira linha com a segunda linha, temos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Multiplicando a primeira linha por 3 e somando com a terceira linha, temos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{array}\right)$$

Chegamos ao final da 1ª iteração pois criamos zeros abaixo do primeiro líder.

Agora na segunda iteração, vamos criar zeros abaixo do segundo líder.

Multiplicando a segunda linha por -4/3 e somando com a terceira linha, temos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Ou seja, finalmente chegamos à forma escalonada da matriz ampliada do sistema. Então, voltando à forma de equações, temos que:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 5 \qquad (I) \\ 3y + 3z &= 9 \qquad (II) \\ -9z &= 0 \qquad (III) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de trás para frente chegamos à solução:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo:

Resolva, por escalonamento, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 5 \\ x - y - 2z &= -5 \end{aligned}$$

No método de Gauss-Jordan, obtemos a forma escalonada reduzida por linhas da matriz ampliada, que facilita a resolução do sistema. Esse procedimento será realizado pelo scilab, através do comando ***rref.***

Resolução de sistemas com parâmetros

Um sistema pode envolver um ou mais parâmetros e a classificação do sistema depende da análise da matriz aumentada na forma escalonada.

9) Resolva e classifique o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-2y-z=-2 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$$

10) Classifique o sistema abaixo em função do parâmetro k:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=k \end{cases}$$

11) Determine k para que o sistema abaixo admita solução única:

$$\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$$

12) Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

13) Em cada jogo de um campeonato de futebol uma equipe pode ganhar dois, um ou nenhum ponto, conforme vença, empate ou perca, respectivamente. Se num total de 5 jogos a equipe ganhou 7 pontos, determine os possíveis números de vitórias, empates e derrotas dessa equipe nesses jogos.

Exercícios propostos e aplicações

1) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x-3y+4z=2 \\ 2x-y+5z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z+w=2 \\ -x-y-2z+2w=1 \\ 2x \qquad +z-3w=0 \\ x-y-z-w=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x-y+4z=17 \\ 3x-2y+2z=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-3z+4t=2 \\ 2x+5y-2z+t=1 \\ 5x+12y-7z+6t=7 \end{cases}$

2) Para repor seus estoques, um empresário compra peças do tipo A e do tipo B. Em julho, ele comprou 20 peças do tipo A e 60 peças do tipo B, gastando um total de R$1.320,00. Em agosto, ele comprou 40 peças do tipo A e 50 peças do tipo B, gastando um total de R$1.380,00. Sabendo que o preço das peças não variou de julho para agosto, qual é o preço da peça do tipo A e qual é o preço da peça tipo B?

3) Uma empresa produz dois produtos diferentes A e B utilizando 3 matérias primas distintas I, II, III. As quantidades necessárias de matérias primas para fabricar cada unidade dos produtos A e B estão relacionados abaixo. Sabendo-se que ela dispõe de 41 unidades de I, 53 unidades de II e 46 unidades de III quanto ela pode produzir de modo a utilizar toda a matéria prima?

	A	**B**
I	2	1
II	3	1
III	1	2

4) Um comerciante sabe que a receita de um produto é uma função quadrática do preço, isto é, é uma função da forma $R = ap^2 + bp + c$, onde R é a Receita e p é o preço unitário de venda, ambos em reais. Para determinar a função receita, ele observou a receita obtida para três preços diferentes, conforme tabela:

Preço (p)	1,00	2,00	4,00
Receita (R)	18,00	32,00	48,00

a) Determine a expressão da função receita.
b) Qual é o preço que maximiza a receita?
c) Qual é a receita máxima?

5) Considere que três pessoas, Pedro, Carlos e João tem a seguinte relação entre seus salários:

i – Duas vezes o salário de Carlos, menos o salário de João, menos o salário de Pedro é igual a R$ 3000,00.

ii – A soma do salário das três pessoas é igual a R$ 6000,00.

iii – O salário de Pedro, mais duas vezes o salário de João, mais duas vezes o salário de Carlos é igual a R$ 11000,00.

Determine o salário de cada um deles

6) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O medicamento I é fabricado com 5g de A, 8g de B e 10g de C e o medicamento II é fabricado com 9g de A, 6g de B e 4g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X, Y e Z de um grama das substâncias A, B e C encontre as expressões que fornecem os preços de custos com matéria prima para os medicamentos I e II.

7) O Ministério dos Transportes investiu 50 milhões de dólares na construção de 3 estradas A, B e C. O custo da estrada B foi o dobro do custo de C e A custou 2 milhões de dólares a mais que o custo das outras duas estradas juntas. Encontre o valor gasto com cada estrada.

8) Verifique se os sistemas homogêneos possuem solução não trivial:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - 8y + 8z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

Gabarito dos exercícios propostos

1)
a) SCD, $S = \{(1,1,1)\}$,
b) SI, $S = \emptyset$
c) SCD , $S = \{(2,-1,3)\}$,
d) SI , $S = \emptyset$

2) $S = \{(12,18)\}$
3) $S = \{(12,17)\}$
4) a) $R = -2p^2 + 20p$ b) $p = 5$ c) $R(5) = 50$
5) Pedro: R$ 1000,00, Carlos: R$ 3000,00,
João: R$ 2000,00

6) Medicamento I : P_I=5x+8y+10z
Medicamento II: P_{II}+9x+6y+4z
7) A custou 26 milhões, B custou 16 milhões e C custou 8 milhões.

8) a) sim b) não

Exercícios

1) Considere o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ ax + by = c \end{cases}$$

a) Utilizando o geogebra, represente graficamente as retas que compõem o sistema. Considere a, b e c como controles deslizantes.
b) Analise o sistema e determine para quais valores dos parâmetros a, b e c, o sistema é:
   i) SI
   ii) SCD
   iii) SCI
c) Usando o scilab ou o geogebra, calcule o determinante da matriz dos coeficientes para diferentes valores dos parâmetros.
d) Para os valores que tornam o sistema compatível determinado (solução única), encontre a solução usando a matriz inversa.

2) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine o que se pede em cada item abaixo.
a) Mostre que A é inversível;
b) Calcule a matriz inversa de A, utilizando o comando *inv* do Scilab;
c) Se $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ então resolva o sistema Ax=b usando inversão de matrizes
d) det(A) = 0? Porque?

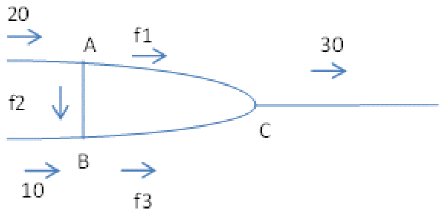
3) Resolva os sistemas de equações lineares abaixo usando o comando *rref* do Scilab, que reduz a matriz ampliada do sistema linear $Ax = b$ pelo Método de Gauss Jordan.

e) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - y + z = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

4) Os poluentes A, B e C foram detectados uma amostra de ar de uma grande cidade. Observou-se que o total dos três poluentes na amostra correspondia a 15 mm^3 por litro. Na amostra, a quantidade de A era o dobro de B, e a de C era 75% da de B. Determine a quantidade de cada poluente na amostra . Obtenha o sistema de equações que representa o problema e resolva-o.

5) A figura abaixo mostra uma rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto:



a) Monte e resolva um sistema linear para encontrar os fluxos possíveis e indique os valores máximos e mínimos de cada um deles.

b) Se o fluxo através de AB está restrito a 5 litros por minuto, qual será o fluxo através dos outros ramos?

Exercícios com uso de recursos computacionais: Python ou Scilab

1) Resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z + 3w - 7t = 14 \\ 2x + 6y + z - 2w + 5t = -2 \\ x + 3y - z + 2t = -1 \end{cases}$

2) Discuta a existência de solução dos seguintes sistemas de equações lineares abaixo e resolva o sistema, quando for possível.

a) $\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z + w = 1 \\ x + 3y - z + 2w = 3 \end{cases}$

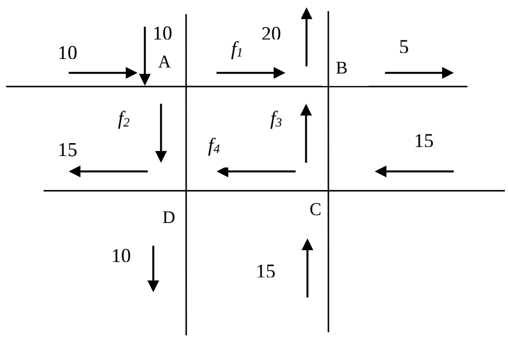
3) O coração do centro de uma cidade consiste de ruas de mão única: o fluxo do tráfego é medido em cada cruzamento. Para os quarteirões mostrados na figura abaixo, os números representam o número médio de veículos por minuto entrando e saído dos cruzamentos A, B, C e D durante o horário comercial.

a) Monte e resolva um sistema de equações lineares para encontrar os possíveis fluxos;

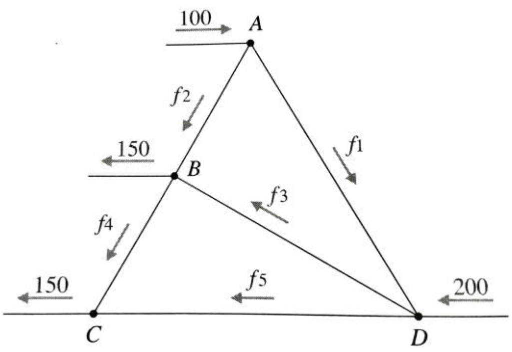
b) Se o tráfego CD for regulado de modo que f_4=10 veículos por minuto, qual será o fluxo médio das outras ruas?

c) Quais são os fluxos mínimo e máximo possíve em cada rua?

d) De que forma o resultado mudaria se todos o sentidos do fluxo fossem trocados?

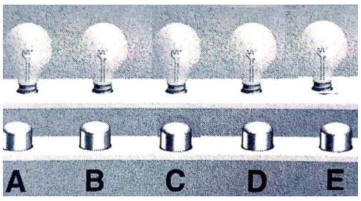


4) Uma rede de canais de irrigação é mostrada na figura abaixo, com fluxo medido em milhares de litros por dia.

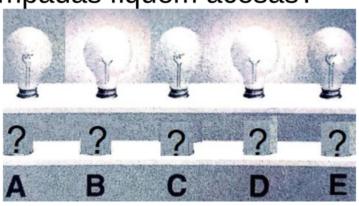


a) Monte e resolva um sistema de equações lineares para encontrar os possíveis fluxos
f1, ... , f5;
b) Suponha que o canal DC seja fechado. Qual intensidade de fluxo será necessário manter através de DB?

5) Uma fileira de cinco lâmpadas é controlada por cinco interruptores. Cada interruptor muda o estado (ligado ou desligado) da lâmpada diretamente sobre ele e os estados das lâmpadas imediatamente adjacentes a esquerda e à direita. Suponha que as lâmpadas estejam inicialmente desligadas, conforme exibe a figura abaixo.



E possível pressionar os interruptores em alguma ordem de modo que apenas a segunda e
A quarta lâmpadas fiquem acesas?



Respostas:

a)

a) $x = -2, y = 3 \; e \; z = 0$

b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\beta - \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2 \\ 3 - 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b)

a) infinitas soluções

$(x, y, z) = (-12 - 13\beta, -11 - 11\beta, \beta, 5 + 5\beta), \forall \beta \in \mathbb{R}$

b) sistema impossível

c) infinitas soluções

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 5\alpha + \beta \\ 2 + 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \forall \beta, \alpha \in \mathbb{R}$$

3)

a) $S = \{(f_4 - 5, 25 - f_4, 30 - f_4, f_4) / \; 5 \le f_4 \le 25\}$

b) $f_1 = 5, f_2 = 15, f_3 = 20$

c) $0 \le f_1 \le 20, \;\; 0 \le f_2 \le 20, \;\; 5 \le f_3 \le 25$

4) *a)* $f_1 = -200 + s + t$

$f_2 = -300 - s - t$

$f_3 = s$

$f_4 = 150 - t$

$f_5 = t$

b) $200 \le f_3 \le 300$

5) *Sim. Pressione os interruptores 1, 2 e 3 ou os interruptores 3, 4 e 5.*