Sistemas Lineares de Equações

Sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ijs} e b_{is}, são constantes reais.

e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas

COEFICIENTES

TERMOS INDEP.

FORMA MATRICIAL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

O conjunto solução é o conjunto de todas as soluções do sistema linear.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{cases} \quad *$$

$$S \in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad **$$

SUBST ** em *

$$\underbrace{3 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2}_{8} = 8 \quad \text{ok}$$

$$\underbrace{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2}_{3} = 3 \quad \text{ok}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ é solução.}$$

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{cases} \quad *$$

$$\text{Se} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \quad **$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ é solução}$$

Volta ** em *:

$$\underbrace{\overbrace{3\cdot(-7)}^{-21} + 3 + \overbrace{2\cdot 13}^{26}}_{8} = 8 \quad \text{ok}$$

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot(-7)}_{-14} - \underbrace{3\cdot 3}_{-9} + \underbrace{2\cdot 13}_{+26}}_{3} = 3 \quad \text{ok}$$

Tipos de sistemas lineares

Um sistema linear pode ser:

a) Sistema Impossível: não tem solução

b) Sistema Possível Determinado: possui apenas uma solução

c) Sistema Possível Indeterminado: possui infinitas soluções

EXEMPLO:

1) Considere o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ ax + by = c \end{cases}$$

a) Utilizando o geogebra, represente graficamente as retas que compõem o sistema. Considere a, b e c como controles deslizantes.

b) Analise o sistema e determine para quais valores dos parâmetros a, b e c, o sistema é:

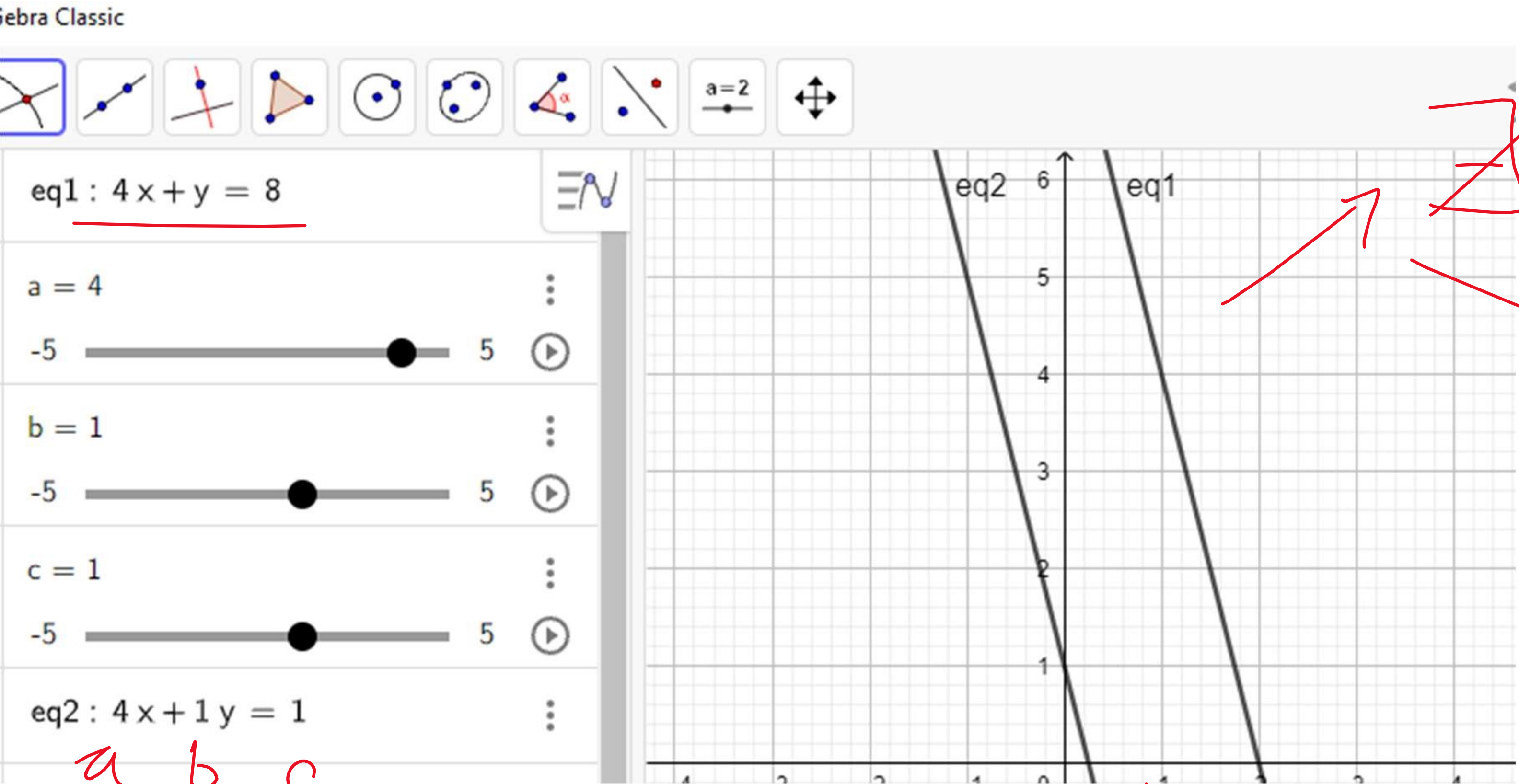
   i) SI

   ii) SCD

   iii) SCI

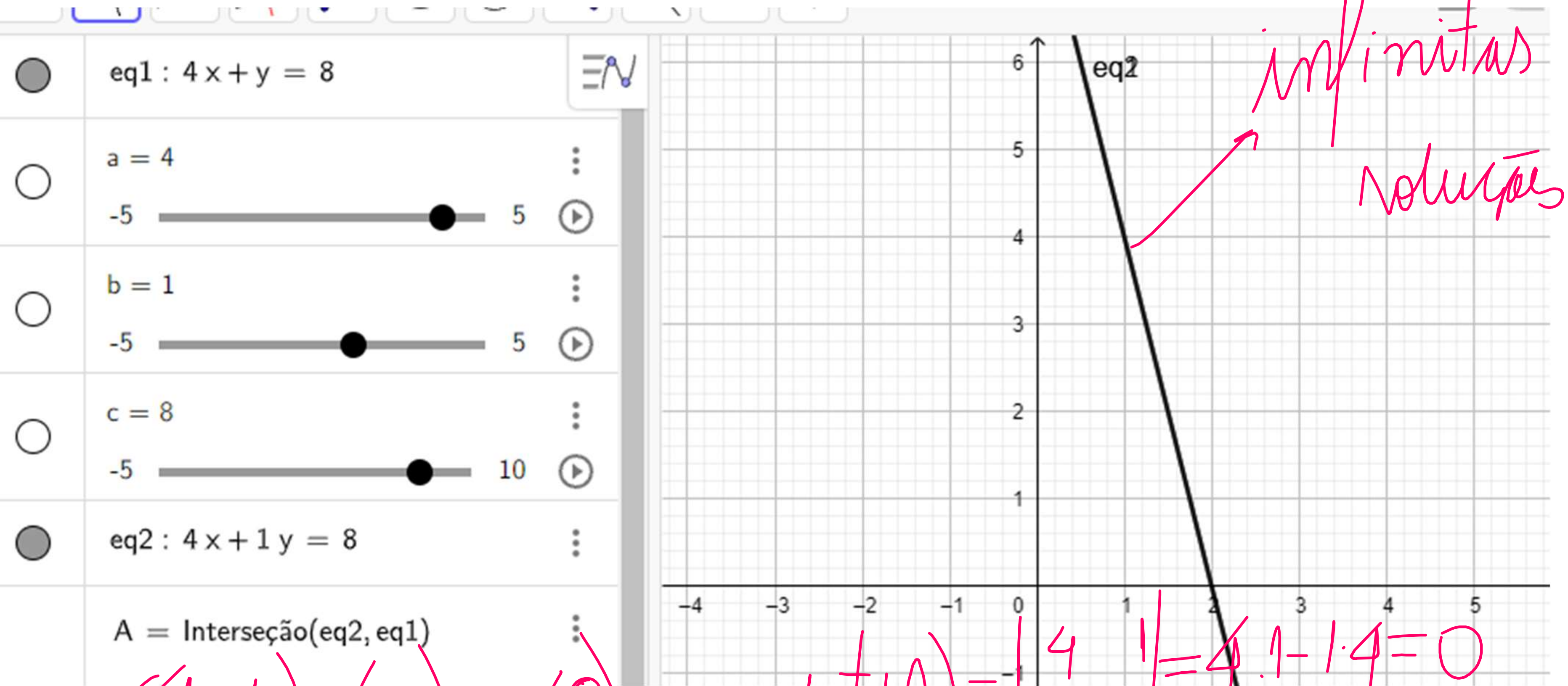
c) Usando o scilab ou o geogebra, calcule o determinante da matriz dos coeficientes para diferentes valores dos parâmetros.

$\nexists$ solução



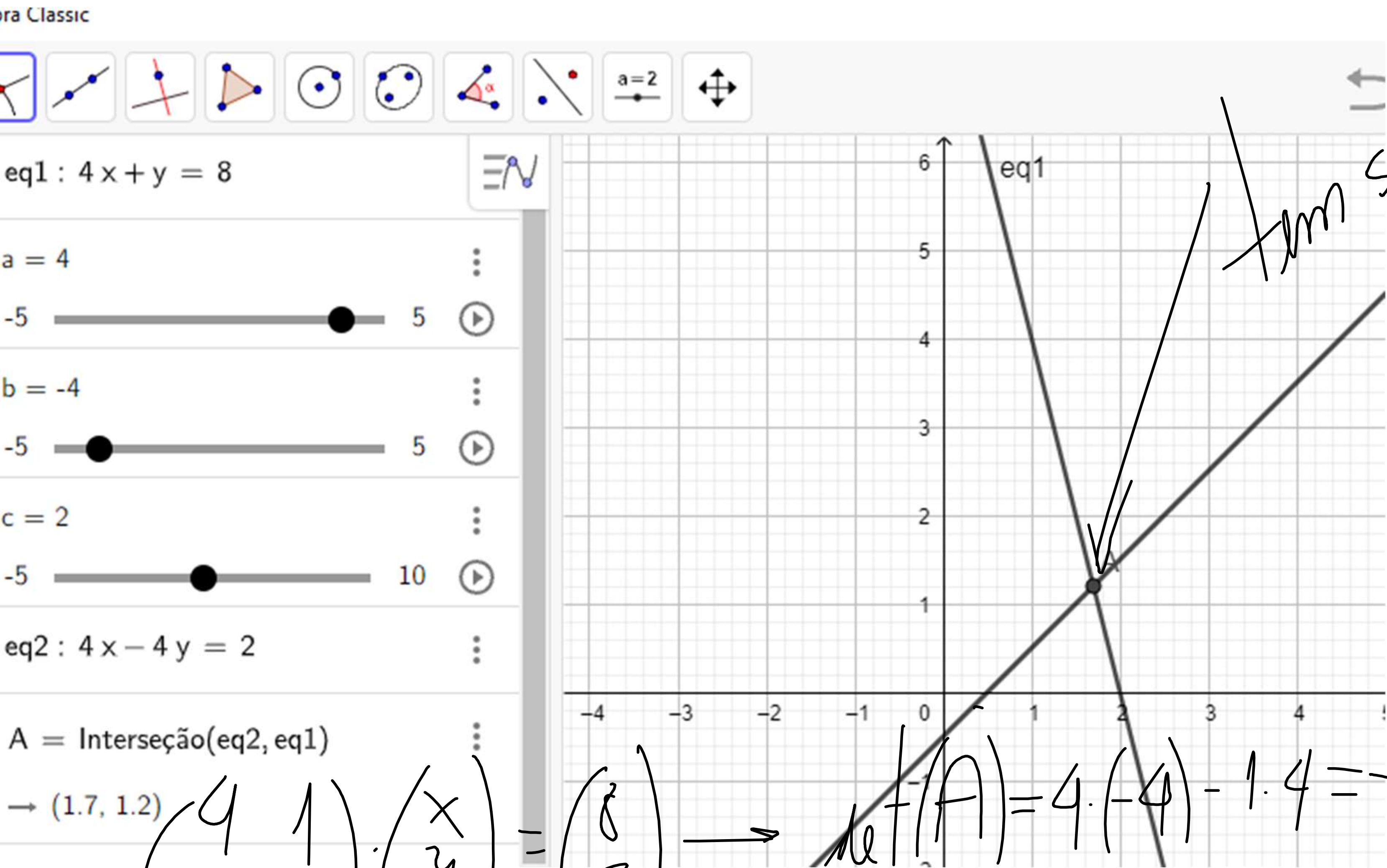
a b c

$$\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix} \longrightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-1\cdot 4=0$$



infinitas soluções

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 0$$



tem solução única

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 2\end{pmatrix}\longrightarrow \det(A)=4\cdot(-4)-1\cdot 4=-20\neq 0$$

Dado o sistema linear Ax=b

Se det(A)$\neq 0 \Rightarrow Ax = b$ tem solução única.

Resolução de sistemas lineares
Existem vários métodos para resolução de sistemas lineares. Entre eles, temos aqueles que utilizam o escalonamento da matriz ampliada (coeficientes da matriz A e o vetor b):

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

No método de Eliminação de Gauss, a cada iteração, cria-se zeros na coluna do líder e abaixo dele, através de operações elementares, de modo que a matriz escalonada obtida fornece um sistema equivalente ao original, que pode ser resolvido por substituição.

*TRICAR LINHAS

*SOMAR UMA LINHA COM O MÚLTIPLO DA OUTRA

SS.
LÍDER = 1º ELEMENTO NÃO
NULO NA LINHA PIVÔ

Exemplo

Resolva o sistema linear usando o método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 12 \\ 2x + 3y + z & = & 21 \\ 7x + 12y + 4z & = & 73 \end{cases}$$

MATRIZ AMPLIADA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 21 \\ 7 & 12 & 4 & 73 \end{array}\right)$$

1ª iteração

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{12} \\ 2 & 3 & 1 & 21 \\ 7 & 12 & 4 & 73 \end{array}\right) \times(-2) \times(-7) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \end{array}\right)$$

2ª iter.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

forma eq

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 12 \\ -y - z &= -3 \\ -z &= -5 \end{aligned}$$

$x + 2y + z = 12 \quad \text{I}$

$-y - z = -3 \quad \text{II}$

$-z = -5 \longrightarrow \boxed{z = 5}$

Volta $z = 5$ em II

$-y - 5 = -3$

$-y = -3 + 5 \rightarrow -y = 2$

$\boxed{y = -2}$

Volta em I:

$x + 2\cdot(-2) + 5 = 12$

$x - 4 + 5 = 12$

$x = 12 - 1$

$\boxed{x = 11}$

Sol.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$