Resolução de Sistemas
O caso Infinitas Soluções

Um sistema linear $Ax = \boldsymbol{b}$ pode envolver um ou mais parâmetros e a classificação do sistema depende da análise da matriz ampliada na forma escalonada.

Exemplo:

Resolva e classifique o sistema linear abaixo usando o *Método de Eliminação de Gauss*.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Inicialmente representamos o sistema linear na forma ampliada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Implementando o Método de Eliminação de Gauss:

1ª Iteração (Criar zeros na coluna e abaixo do 1º líder)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{cc} \times(-1) & \times(-3) \\ + & + \\ & \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right]$$

Chegamos ao final da primeira iteração do Método de Eliminação de Gauss e, com efeito, criamos zeros na coluna e abaixo do primeiro líder, consolidando a seguinte matriz ampliada do sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Vamos realizar agora a segunda iteração do Método na matriz ampliada acima. Agora a nossa linha pivô é a segunda e o líder é o primeiro elemento não nulo nesta linha, que no caso é o -3.

2ª Iteração (Criar zeros na coluna e abaixo do 2º líder)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right] \times \left(\frac{-4}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Chegamos ao final da segunda iteração do método de Eliminação de Gauss e observe que a terceira linha foi completamente eliminada. Em outras palavras, eliminamos a terceira equação do sistema e ficamos essencialmente com duas equações no sistema linear equivalente resultante:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

Passando para a forma de equações:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -3y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x + y + 2z = 4 \\
-3y - 3z = -6
\end{cases}
$$

Observe que no sistema linear equivalente resultante temos mais incógnitas do que equações, neste caso estamos no potencial caso de infinitas soluções. Teremos variáveis livres e precisaremos contá-las.

Contamos o número de variáveis livres do sistema equivalente resultante com a seguinte fórmula:

nº de variáveis livres = nº total de variáveis – nº de equações

$$\underbrace{3 - 2}_{1}$$

1 variável livre ⇒ Escolhemos z como livre ⇒ $z = \beta, \forall \beta \in \mathbb{R}$

Isolamos as variáveis dependentes no sistema linear em termos da variável livre:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 & I \\ \quad -3y - 3z = -6 & II \end{cases}$$

Isolando *y* em *II:*

$$-3y = -6 + 3z \Rightarrow y = \frac{-6+3z}{-3} \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} + \frac{3z}{-3} \Rightarrow y = 2 - z \underset{\substack{\downarrow \\ z = \beta}}{\Rightarrow} y = 2 - \beta$$

Voltando $z = \beta$ e $y = 2 - \beta$ na Equação I, temos que:

$$x + (2 - \beta) + 2 \cdot \beta = 4 \Rightarrow x - \beta + 2\beta + 2 = 4 \Rightarrow x + \beta + 2 = 4$$
$$\Rightarrow x = 2 - \beta$$

Logo as infinitas soluções do sistema estão parametrizadas pelo parâmetro livre β e são dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\beta \\ 2-\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \forall \beta \in \mathbb{R}$$