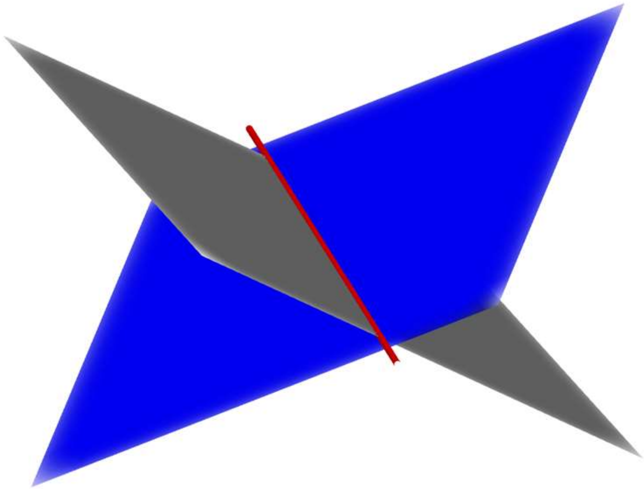
Resolução de Sistemas Lineares com Parâmetros



Uma versão modificada do ***Método de Eliminação de Gauss*** cria zeros abaixo e acima do líder, na coluna do líder, de forma a reduzir a matriz ampliada do sistema linear a uma forma chamada ***forma escalonada reduzida*** por linhas.

Exemplo 1:

Resolva o sistema linear abaixo usando o *Método de Eliminação de Gauss Jordan*. Interprete geometricamente a solução.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-2) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(1/3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \times\left(\tfrac{1}{3}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \tfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + \tfrac{2}{3}z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases}$$

$+1 \times 3$

$\tfrac{?}{1} \times 3$

$$\underbrace{\text{Nº DE VARIÁVEIS LIVRES}}_{} = \underbrace{\text{Nº DE INCÓGNITAS}}_{3} - \underbrace{\text{Nº DE EQUAÇÕES}}_{2}$$

$3 - 2 = 1 \longrightarrow 1$ livre

escolho

$z = \beta, \ \forall \beta \in \mathbb{R}$

ISOLA AS VARIÁVEIS DEPENDENTES EM TERMOS DA VARIÁVEL LIVRE:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{2}{3}z \longrightarrow x = -\frac{2}{3}\beta$$

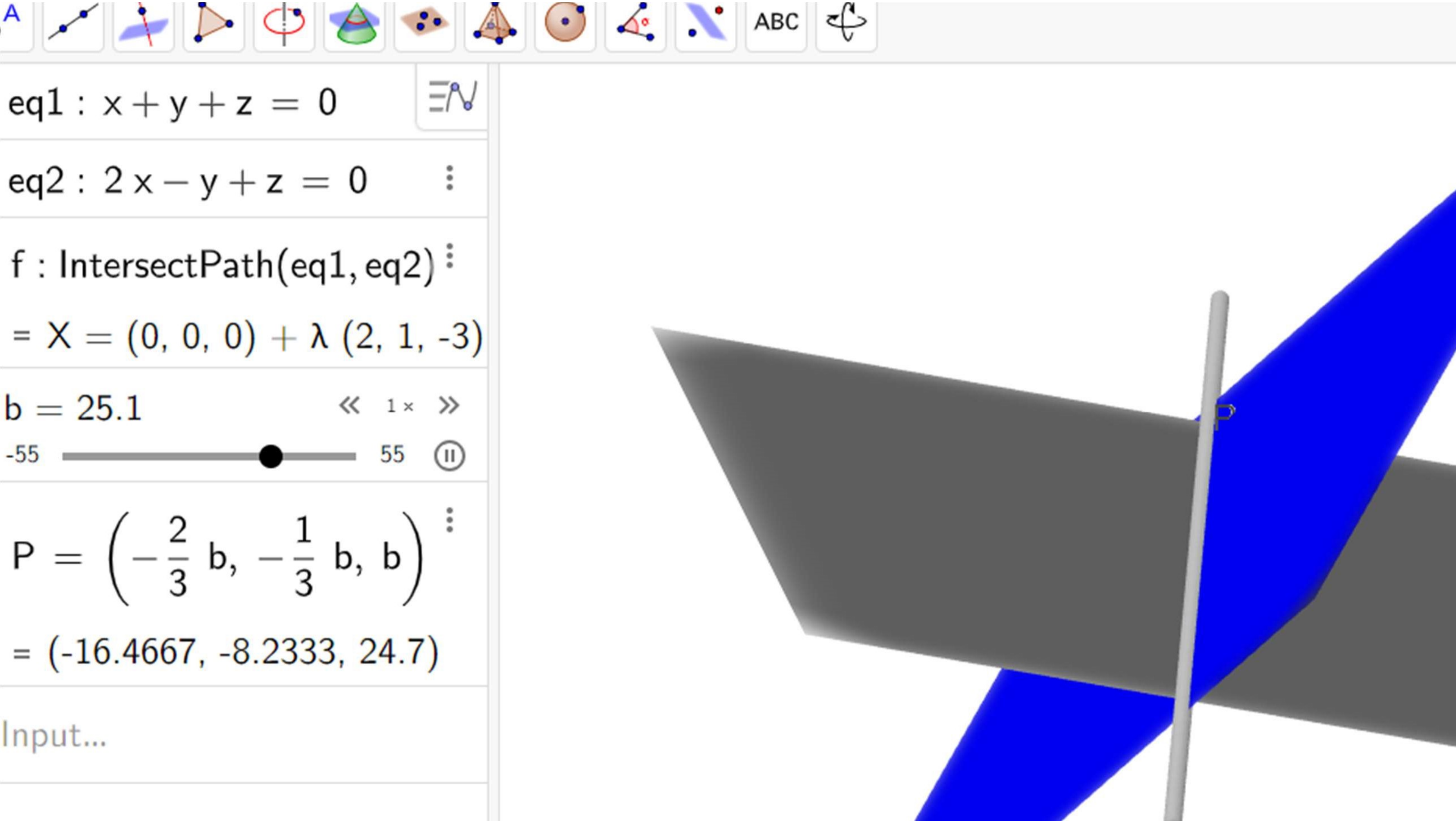
$$z = \beta$$

$$-3y = z$$

$$y = -\frac{1}{3}z \longrightarrow y = -\frac{1}{3}\beta$$

Soluções

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\beta \\ -\frac{1}{3}\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \ \forall \beta \in \mathbb{R}$$



ABC
eq1 : x + y + z = 0
eq2 : 2 x − y + z = 0
f : IntersectPath(eq1, eq2)
= X = (0, 0, 0) + λ (2, 1, -3)
b = 25.1
1 ×
-55
55
P = (−2/3 b, −1/3 b, b)
= (-16.4667, -8.2333, 24.7)
Input...
P

No método de Gauss-Jordan, obtemos a forma escalonada reduzida por linhas da matriz ampliada, que facilita a resolução do sistema.

Esse procedimento será realizado pelo scilab, através do comando *rref*.

Um sistema pode envolver um ou mais parâmetros e a classificação do sistema depende da análise da matriz aumentada na forma escalonada.

Exemplo 2:

Resolva e classifique o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

```
--> rref([1 1 2 4;1 -2 -1 -2;3 -1 2 4])
 ans  =
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1. & 0. & 1. & 2. \\ 0. & 1. & 1. & 2. \\ \cancel{0.} & \cancel{0.} & \cancel{0.} & \cancel{0.} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Nº DE VARIÁVEIS LIVRES = Nº DE INCÓGNITAS – Nº DE EQUAÇÕES

$$\underbrace{3 - 2}_{1}$$

→ z é livre

$z = \beta, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$$x + z = 2$$
$$y + z = 2$$

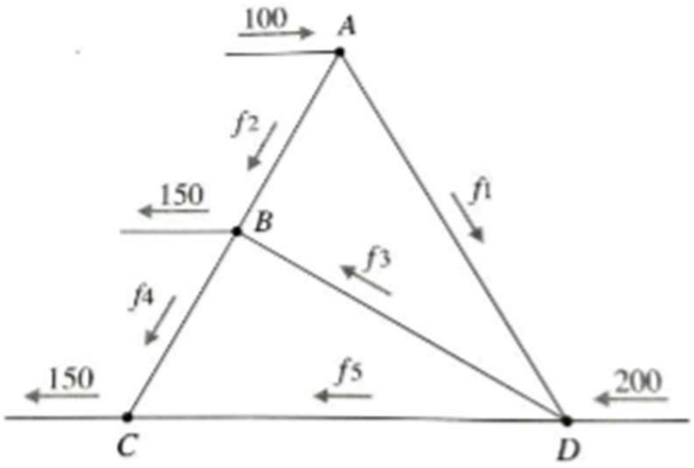
isola as variáveis
pendentes:

$$x = 2 - z$$
$$y = 2 - z$$
$$z = \beta$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\beta \\ 2-\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Aplicação dos Sistemas Lineares ao Problema de Fluxos em Redes.

Uma rede de canais de irrigação é mostrada na figura abaixo, com fluxo medido em milhares de litros por dia.



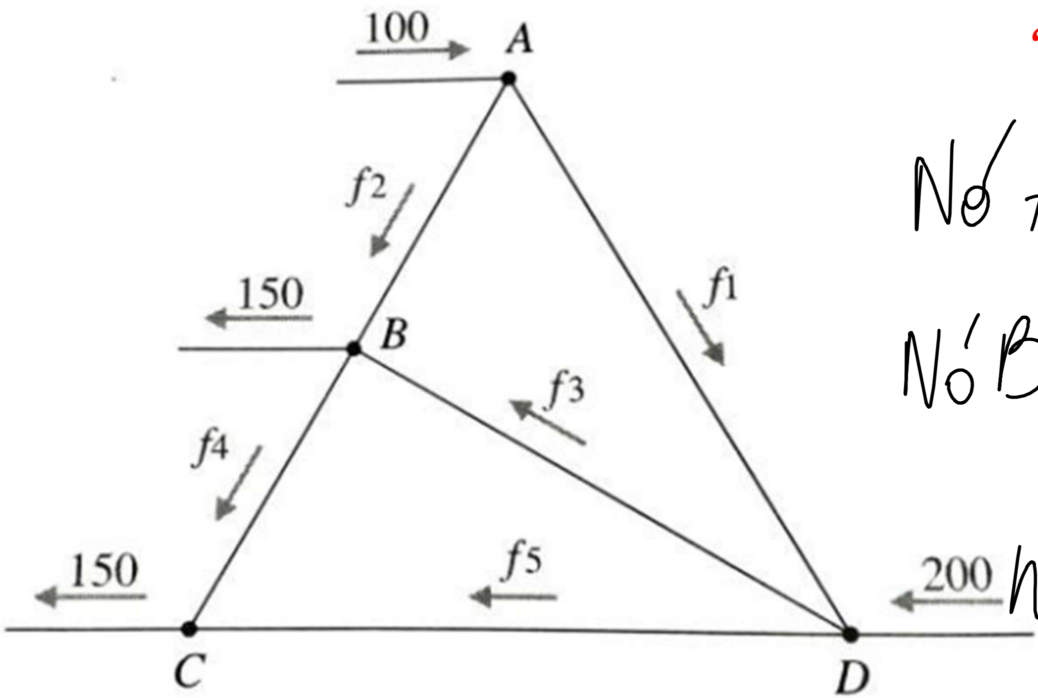
Princípio satisfeito em cada nó:

"Fluxo de Entrada = Fluxo de Saída"

a) Monte e resolva um sistema de equações lineares para encontrar os possíveis fluxos f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5.

b) Determine os fluxos mínimos e máximos em cada nó.

a) Suponha que o canal DC seja fechado. Qual intensidade do fluxo será necessário manter através de DB?



"Fluxo de Entrada = Fluxo de Saída"

Nó A: $100 = f_1 + f_2$

Nó B: $f_2 + f_3 = 150 + f_4$

Nó C: $f_4 + f_5 = 150$

Nó D: $f_1 + 200 = f_3 + f_5$

$$\text{Nó A: } 100 = f_1 + f_2 \longrightarrow 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 = 100$$

$$\text{Nó B: } f_2 + f_3 = 150 + f_4 \longrightarrow 0f_1 + 1f_2 + 1 \cdot f_3 - 1f_4 + 0f_5 = 150$$

$$\text{Nó C: } f_4 + f_5 = 150 \longrightarrow 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 1f_4 + 1f_5 = 150$$

$$\text{Nó D: } f_1 + 200 = f_3 + f_5 \longrightarrow -f_1 + 0f_2 + 1f_3 + 0f_4 + f_5 = 200$$

$$f_1 + 1f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 = 100$$

$$\to 0f_1 + 1f_2 + 1f_3 - 1f_4 + 0f_5 = 150$$

$$\to 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 1f_4 + 1f_5 = 150$$

$$\to -f_1 + 0f_2 + 1f_3 + 0f_4 + f_5 = 200$$

$\to$ MATRIZ AMPLIADA

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

```
--> rref([1 1 0 0 0 100;0 1 1 -1 0 150;0 0 0 1 1 150;-1 0 1 0 1 200])
 ans  =

   1.   0.  -1.   0.  -1.  -200.
   0.   1.   1.   0.   1.   300.
   0.   0.   0.   1.   1.   150.
   0.   0.   0.   0.   0.   0.
```

```
--> rref([1 1 0 0 0 100;0 1 1 -1 0 150;0 0 0 1 1 150;-1 0 1 0 1 200])
 ans  =

   1.    0.   -1.    0.   -1.   -200.
   0.    1.    1.    0.    1.    300.
   0.    0.    0.    1.    1.    150.
   0.    0.    0.    0.    0.    0.
```

$$f_1 - f_3 - f_5 = -200$$
$$f_2 + f_3 + f_5 = 300$$
$$f_4 + f_5 = 150$$

Nº DE VARIÁVEIS LIVRES = Nº DE INCÓGNITAS – Nº DE EQUAÇÕES

$$\underbrace{5 - 3}_{2}$$

→ f_3 e f_5 SÃO LIVRES

$f_3 = \lambda$ e $f_5 = \beta$

ISOLA AS VARIÁVEIS INDEPENDENTES EM TERMOS DAS LIVRES:

$$f_1 - f_3 - f_5 = -200$$
$$f_2 + f_3 + f_5 = 300$$
$$f_4 + f_5 = 150$$

$$f_1 = -200 + f_3 + f_5$$
$$f_2 = 300 - f_3 - f_5$$
$$f_4 = 150 - f_5$$

$$f_3 = \lambda$$
$$f_5 = \beta$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 + \lambda + \beta \\ 300 - \lambda - \beta \\ \lambda \\ 150 - \beta \\ \beta \end{pmatrix}, \forall \lambda, \beta$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+\lambda+\beta \\ 300-\lambda-\beta \\ \lambda \\ 150-\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f_i \geq 0.$$

$$f_1 \geq 0 \longrightarrow -200+\lambda+\beta \geq 0$$

$$f_2 \geq 0 \longrightarrow 300-\lambda-\beta \geq 0$$

$$f_4 \geq 0 \longrightarrow 150-\beta \geq 0$$

$$f_3 \geq 0 \longrightarrow \lambda \geq 0$$

$$f_5 \geq 0 \quad \beta \geq 0$$

$f_i \geq 0$

$f_1 \geq 0 \rightarrow \boxed{-200+\lambda+\beta \geq 0}$

$f_2 \geq 0 \rightarrow 300-\lambda-\beta \geq 0$

$f_4 \geq 0 \rightarrow 150-\beta \geq 0$

$f_3 \geq 0 \rightarrow \lambda \geq 0$

$f_5 \geq 0 \quad \beta \geq 0$

$-\beta \geq -150 \quad \times(-1)$

$0 \leq \beta \leq 150$

$= 150-\beta$

$f_{4_{MAX}} = \underbrace{150-0}_{150}$

$)$

$(f_{4_{Min}}) = 0$

Se $\beta = 0 \rightarrow f_1 = -200+\lambda+0 \geq 0$

$\lambda \geq 200$

Se $\lambda = 200 \rightarrow f_{1_{Min}} = -200+200+0 = 0$