| | |
|---|---|
| PUC CAMPINAS PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA | PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE CAMPINAS<br>Escola Politécnica<br>Sistemas de Informação<br>Elementos de Álgebra Linear – 1º Sem 2024<br>**Professores: Alexandre Monteiro e Bia Leite**<br>**Alguns exemplos desse material foram fornecidos pelo Prof. Miro** |

| Avaliações | P1 | P2 | Rec | Testes | | Atividades | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 16/04 | 04/06 | 18/06 | 09/04 | 28/05 | 01/04 | 12/05 | 26/05 |

**Unidade 1 – Vetores e Matrizes**

## Exercícios para aula

### VETORES

Dados nas ciências exatas e na computação, em particular, são frequentemente organizados em arrays, isto é, conjuntos cujos elementos são indexados por um ou mais índices. Normalmente um array unidimensional é chamado um vetor, e um array bidimensional é chamado de matriz. A dimensão, neste caso, diz respeito ao número de índices.

Para motivar estas estruturas, considere a seguinte situação:

**Exemplo**: Os pesos (em libras) de oito estudantes são listados a seguir:

134,156,127,145,203,186,145,138

Pode-se denotar todos os valores na lista, inserindo apenas um símbolo w indexado com índice distintos w1,w2,w3,w4,w5,w6,w7,w8

Cada índice denota uma posição do valor na lista.

Por exemplo,

$w_1 = 134$ (o primeiro número)

$w_2$= 156, (o segundo número)

Essa lista é dita um vetor ou um array linear.

Vamos nos referenciar a uma lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ como um vetor $u$ e dado o enfoque computacional da disciplina, iremos convencionar a representação padrão do vetor sob a forma de vetor coluna. Tal vetor é denotado por

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Os números $a_i$ são ditos componentes, entradas ou elementos de u.

### OPERAÇÕES COM VETORES

**ADIÇÃO:**

*Definição algébrica*:

Dados os vetores $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ então a adição, ou soma, do vetor $u$ com o vetor $v$ é dada por:

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Em particular, quando o vetor tem duas entradas, podemos representá-lo no plano cartesiano como um segmento de reta orientado, conforme exibe a Figura 1.

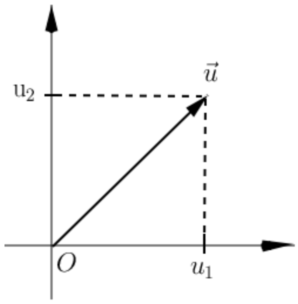



Figura 1: Vetor u

*Definição geométrica*:

Considere 2 ou mais vetores, de duas entradas. Partindo de um ponto qualquer $P$ e aplicando sucessivamente os vetores de tal maneira que o ponto final do primeiro coincide com o ponto inicial do segundo e assim sucessivamente, temos que o vetor soma é o vetor que que une o ponto inicial do primeiro ao ponto final do último (regra do polígono), conforme exibe a Figura 2.

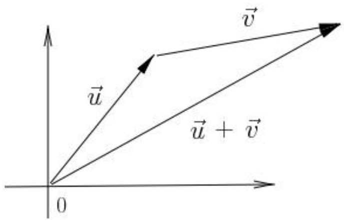



Figura 2: O vetor $\vec{u} + \vec{v}$

**Exemplos:**

**V1)** Obtenha o vetor soma:

a) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, onde $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{s}$, onde, onde $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Propriedades:**

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

**<u>MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR</u>**: Seja $\alpha$ um número real qualquer e $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ um vetor. Definimos a operação de multiplicação de $\vec{u}$ pelo escalar $\alpha$ por $\vec{v} = \alpha\vec{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \end{pmatrix}$.

Isto é, obtemos um novo vetor $v$ com mesma direção de $\vec{u}$ (ou seja, $\vec{u} // \vec{v}$ ).

**Propriedades:**

i) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

ii) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

iii) $1\vec{v} = \vec{v}$;

iv) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta\alpha\vec{u}$

**Exemplos:**

**V2)** Resolva a equação $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$

**V3)** Dados $\vec{u} = \binom{3}{-1}$ e $\vec{v} = \binom{-2}{1}$, determine o vetor $\vec{w} = 2u + 3v$

**<u>OBSERVAÇÃO:</u>** A subtração de 2 vetores pode ser definida como $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

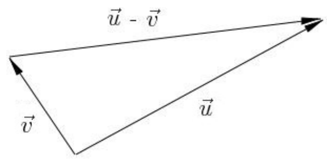



Figura 3: Subtração de vetores: $\vec{u} - \vec{v}$

## VETOR TRANSPOSTO

Dado um vetor coluna $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, o vetor $u$ transposto é o vetor linha $u^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

## PRODUTO ESCALAR OU PRODUTO INTERNO

Ao multiplicar um vetor por um escalar, o resultado obtido é um vetor. No entanto, o *produto escalar* ou o *produto interno* de dois vetores resultará num número real, ou um escalar.

<u>*Definição algébrica*</u>:
Dados dois vetores $\vec{u} = \binom{a}{b}$ e $\vec{v} = \binom{c}{d}$ , definimos o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ o número real dado por
$\vec{u}.\,\vec{v} = ac + bd$ .
Para vetores com mais de duas componentes, a definição é estendida.
Isto é, sejam os vetores

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O produto interno dos vetores $u\ e\ v$ é definido e dado por:

$$u^T \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Exemplos:

**V4)** Determine o produto escalar entre os vetores:

a) $\vec{u} = \binom{3}{3}$ e $\vec{v} = \binom{2}{-1}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aplicações:**

- Embora tenha passado por atualização recente, a maioria dos livros tem um código de 10 dígitos denominado ISBN (*International Standard Book Number*). 0 último dígito é o **dígito de verificação** do ISBN e é calculado utilizando-se produto escalar. Os nove primeiros dígitos deste número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado dígito de verificação, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não há erro de digitação nos nove primeiros, por exemplo, numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela Internet.

Para explicar como isto é feito, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor b de $\mathbb{R}^9$ e seja a o vetor (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) . Então o dígito de verificação c é calculado pelo seguinte processo:
1. Calcule o produto escalar a · b.
2. Divida a · b por 11, produzindo um resto c que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais um dígito. Por exemplo, o ISBN do Novo Aurélio Século 20 é **85-209-1010-6** com um dígito de verificação igual a 6. Isto é consistente com os nove primeiros dígitos do ISBN, pois a · b = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) · (8, 5, 2, 0, 9, 1, 0, 1, 0) = 83
Dividindo 83 por 11 obtemos um quociente de 7 e um resto de 6, de modo que o dígito de verificação é
**c = 6**.

**V5)** Verifique se o dígito de verificação do código ISBN (com 10 dígitos) 9780470432051 / **0470432055** do livro ***Álgebra Linear com Aplicações*** está correto.

## MATRIZES

A estrutura matricial é extremamente útil para representar um conjunto de informações que são identificados a partir de duas características.

Veremos algumas aplicações como:

- **Grafos e dígrafos**: estrutura usada para representar e analisar conexões em redes.
- **Cadeias de Markov**: estrutura usada para representar uma sequência de estados, a partir de um estado inicial e uma matriz de transição.
- **Criptografia**: codificação e decodificação de mensagens.
- **Tomada de decisão**: estrutura usada para analisar diferentes cenários que subsidie uma tomada de decisão.
- **Computação gráfica**: alterações em imagens como translação, rotação, reflexão, contração, expansão; podem ser representadas a partir de cálculo com matrizes.

Considere a situação abaixo:

O proprietário de uma loja fez uma promoção de 2 produtos A e B e anotou as quantidades vendidas de cada um deles durante 1 semana.

**Produto A**: segunda-feira da 1ª semana: 5
terça-feira da 1ª semana: 6
quarta-feira da 1ª semana: 7
quinta-feira da 1ª semana: 7
sexta-feira da 1ª semana: 10
sábado da 1ª semana: 15

**Produto B:** segunda-feira da 1ª semana: 4
terça-feira da 1ª semana: 7
quarta-feira da 1ª semana: 6
quinta-feira da 1ª semana: 8
sexta-feira da 1ª semana: 12
sábado da 1ª semana: 13

Na semana seguinte a promoção foi suspensa e o proprietário anotou novamente as quantidades vendidas de cada produto:

**Produto A**: segunda-feira da 2ª semana: 4
terça-feira da 2ª semana: 3
quarta-feira da 2ª semana: 5
quinta-feira da 2ª semana: 6
sexta-feira da 2ª semana: 8
sábado da 2ª semana: 10

**Produto B**: segunda-feira da 2ª semana: 2
terça-feira da 2ª semana: 0
quarta-feira da 2ª semana: 1
quinta-feira da 2ª semana: 7
sexta-feira da 2ª semana: 9
sábado da 2ª semana: 8

a) Organize os dados acima.
b) Como você poderia apresentar a quantidade total vendida de cada produto, nas duas semanas, em cada dia da semana?
c) Na terceira semana o proprietário fez uma super liquidação e conseguiu vender, em cada dia da semana, o dobro das quantidades vendidas na 1ª semana. Como essas informações podem ser apresentadas?

Uma matriz é um conjunto retangular de números, símbolos ou expressões, organizados em linhas e colunas. Cada um dos itens de uma matriz é chamado de elemento.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Simbologia: $A_{m \times n} = (a_{ij})$

Os índices $i$ e $j$ indicam a posição do elemento $a_{ij}$.

**Igualdade de matrizes**: Duas matrizes **são iguais** quando os elementos que ocupam as mesmas posições são iguais.

**Matriz transposta**: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ a sua matriz transposta $A^T{}_{n \times m}$ é a matriz cujas linhas são as colunas da matriz $A$.

**Exemplos**:

**M1)** Calcule o produto dos elementos da 2ª linha da matriz $A_{4 \times 3}$ dada por $(a_{ij}) = \begin{cases} i, & se\ i > j \\ j, & se\ i \leq j \end{cases}$

**M2)** Dada a matriz $A_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = (i + j)^2 - 1$, calcule o valor da expressão $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

**M3)** Determine os valores de *a, b, c, d* e *e* para que a igualdade seja válida:

$$\begin{bmatrix} 3a & b+1 & a-b+c \\ c+d & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Alguns tipos de Matrizes:

- **Matriz Quadrada**: número de linhas igual ao número de colunas ($n = m$)
- **Matriz Simétrica**: é uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$. Ou ainda $A = A^T$
- **Matriz Diagonal**: matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
- **Matriz Identidade ($\boldsymbol{I_n}$)**: matriz diagonal com $a_{ii} = 1$
- **Matriz Triangular Superior:** matriz quadrada com $a_{ij} = 0$ se $i > j$
- **Matriz Triangular Inferior:** matriz quadrada com $a_{ij} = 0$ se $i < j$

## OPERAÇÕES COM MATRIZES

### 1) Adição

Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$, definimos a adição entre elas por

$C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})$

Ou seja, a matriz resultante é obtida somando-se os elementos que ocupam a mesma posição.

Observe que esta operação só é possível entre matrizes de mesma dimensão e a matriz resultante preserva essa dimensão.

### 2) Produto por escalar

Dados uma matriz $A_{m \times n}$ e um número real $k$ definimos a operação de produto por escalar por

$C_{m \times n} = kA_{m \times n} = (ka_{ij})$.

Ou seja, a matriz resultante é obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar k. Observe que a matriz resultante terá a mesma dimensão da matriz A.

### 3) Multiplicação de matrizes

Consideremos inicialmente os exemplos abaixo:

**1)** Uma dieta é composta por 3 tipos de alimentos I, II e III. A tabela abaixo apresenta a composição nutricional desses alimentos em relação a 2 ingredientes distintos A e B.

| Ingredientes \ Alimento | I | II | III |
|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 2 | 0 |
| **B** | 2 | 1 | 3 |

Num determinado dia, uma pessoa ingeriu 3 unidades do alimento I, 2 do alimento II e um do alimento III. Qual foi a quantidade ingerida de cada um dos ingredientes A e B?

**Definição:**

Dadas duas matrizes $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$ definimos cada elemento $c_{ij}$ resultante da multiplicação entre elas por

$C_{m\times n} = A_{m\times p}\, B_{p\times n} = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Observe que esta operação só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. A matriz resultante terá a mesma quantidade de linhas da primeira e colunas da segunda.

**Exemplos:**

**M4)** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule, se possível:

a) $AB$ b) $BA$ c) $3D + C$ d) $BC$ e) $D + AC$

**M5)** Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada abaixo:

| | **ferro** | **madeira** | **vidro** | **tinta** | **tijolo** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Moderno** | **5** | **20** | **16** | **7** | **17** |
| **Mediterrâneo** | **7** | **28** | **12** | **9** | **21** |
| **colonial** | **6** | **25** | **8** | **5** | **13** |

Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas do tipo moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

**M6)** A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante quatro dias. Cada elemento $a_{ij}$ da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$T = \begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 36 \\ 36{,}1 & 37 & 37{,}2 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 37 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

**M7)** A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante.

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo $P_1$, $P_2$, $P_3$ desse restaurante:

Calcule o custo de produção os pratos.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{array}$$

**M8)** Quatro clientes solicitam 4 pedidos de 3 tipos de produtos. Os pedidos podem ser realizados em um de dois fornecedores, conforme matrizes a seguir.

| MATRIZ do número de unidades | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | | Produtos | | |
| | | P1 | P2 | P3 |
| Clientes | C1 | 4 | 3 | 2 |
| | C2 | 3 | 5 | 6 |
| | C3 | 5 | 7 | 3 |
| | C4 | 6 | 4 | 6 |

| MATRIZ do custo unitário | | | |
|---|---|---|---|
| B | | Fornecedor | |
| | | F1 | F2 |
| Preço/Un. | P1 | 6 | 5 |
| | P2 | 4 | 3 |
| | P3 | 5 | 7 |

a) Calcule o produto C = AxB.
b) Qual é o significado do elemento $c_{32}$ no contexto desse problema?
c) **Generalize**: qual é o significado do elemento $c_{ij}$ no contexto desse problema?
d) Quais linhas e colunas devem ser multiplicadas para se obter apenas o elemento $c_{41}$?

**M9)** Se uma matriz $A$ é $4 \times 3$ e o produto $AB$ é uma matriz $M_{p\times 2}$, qual a dimensão da matriz $B$?

**M10)** Sejam as matrizes $A_{m\times n}$ e $I_n$, onde $I_n$ é a matriz identidade de ordem $n$. Qual o resultado do produto $AI$ ?

## Algumas Propriedades

***ADIÇÃO***

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo (ordem) *m x n* e 0 a matriz nula do tipo *m x n*.

- Comutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$
- Elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- Transposta da soma: $(A + B)^T = A^T + B^T$

***MULTIPLICAÇÃO***

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo (ordem) *m x n* e 0 a matriz nula do tipo *m x n*.

- Associativa: $(AB)\ C = A\ (BC)$
- Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$
  $(A + B)C = AC + BC$
- Elemento neutro (matriz identidade):
  $A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$ e $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
- Transposta do produto: $(AB)^T = B^T A^T$

## MATRIZ INVERSA

**Definição:** Uma matriz quadrada $B$ será denominada inversa de $A^{-1}$, se existir a matriz $B = A^{-1}$ tal que:

$$A\,A^{-1} = I = A^{-1}A$$

***OBSERVAÇÕES:***

➔ Nem toda matriz é inversível.
➔ Uma condição para a matriz possuir inversa é

$$\det(A) \neq 0$$

➔ Quando a matriz não é inversível, dizemos que ela é **não inversível ou singular (determinante nulo).**

**Exemplos:**

**M11)** Verifique se as matrizes abaixo possuem inversas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## GRAFOS E DÍGRAFOS

Usados para representar situações nas quais é importante estabelecer a interrelação entre um conjunto finito de elementos, como por exemplo: rotas, redes de comunicação, rede de distribuição, cadeia alimentar, etc....

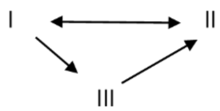
Um grafo dirigido (ou dígrafo) é um conjunto de pontos (chamados vértices) juntamente com setas (chamadas arestas) que ligam vários pares de vértices. Se um grafo tem n vértices, a **matriz de adjacências** $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times n$ cujo elemento $a_{ij}$ na posição $(i, j)$ é igual a 1 se houver uma aresta do vértice $v_i$ ao vértice $v_j$, e 0 caso em contrário. Ou seja:

$$A_{n \times n} = [a_{ij}] \quad onde$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existir uma aresta do véritice } i \ para\ o\ vértice \ \ j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um grafo com arestas dirigidas é chamado **dígrafo.**

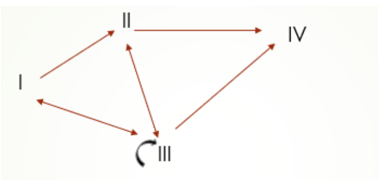
O dígrafo abaixo representa as opções de vôos diretos entre as cidades I, II e II:




A matriz de adjacências que representa esse dígrafo é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**A1)** Represente matricialmente o grafo/dígrafo abaixo:




**A2)** Represente esquematicamente as matrizes de adjacências dada:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**A3)** Cinco pessoas estão conectadas por e-mail. Sempre que uma delas ouve uma fofoca interessante, passa a fofoca às outras, mandando um e-mail para alguém do grupo, conforme a tabela abaixo:

| REMETENTE | DESTINATÁRIOS |
|---|---|
| Ana | Carla, Edu |
| Beto | Carla, Diana |
| Carla | Edu |
| Diana | Ana, Carla |
| Edu | Beto |

a) Desenhe o dígrafo que modela essa “rede de fofocas” e ache sua matriz de adjacências;

b) Defina um passo como o tempo que leva para uma pessoa mandar um e-mail para todas as outras de sua lista (dessa forma, em um passo, a fofoca vai de Ana para Carla e Edu). Se Beto ouvir algum boato, quantos passos terão de ser dados para que todos ouçam o boato? Que cálculo matricial revela isso?

## CRIPTOGRAFIA

***Criptografia: codificação e decodificação de mensagens.***

A codificação e decodificação de mensagens pode ser feita a partir da utilização da estrutura matricial.

A seguir apresentamos algumas possibilidades.

Existem diversas maneiras para se codificar uma mensagem, usando diferentes ferramentas algébricas (permutação, transformação, etc..). Basicamente, a codificação é feita a partir de uma matriz chave chamada matriz codificadora $A$ e a decodificação é feita a partir da matriz decodificadora $A^{-1}$.

### CASO 1- CRIPTOGRAFIA COM UMA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Uma matriz encriptadora de transformação, em vez de apenas permutar os termos, os transforma em outros valores por uma multiplicação matricial.

**A4)** Considere a matriz codificadora A a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Considere a senha S = 9375 representada pela matriz S abaixo. A senha codificada S’ é dada por $S' = AS$. Obtenha S’.

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Qual é a **matriz decodificadora**?

c. Determine a senha original sabendo que a senha cifrada é

$$S' = \begin{bmatrix} 16 & 42 \\ 19 & 50 \end{bmatrix}$$

### CASO 2- CRIPTOGRAFIA COM UMA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO E CORRESPONDÊNCIA ALFA-NUMÉRICA

Neste caso, a codificação consiste em transformar a mensagem original (sequência de letras/palavras) numa sequência numérica.

**i)** Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave $A$;

**ii)** O remetente transforma a mensagem a ser enviada numa sequência numérica, utilizando uma correspondência numérica entre letras e números, **por exemplo** a tabela abaixo:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A<br>1 | B<br>2 | C<br>3 | D<br>4 | E<br>5 | F<br>6 | G<br>7 | H<br>8 | I<br>9 | J<br>10 | K<br>11 | L<br>12 | M<br>13 |
| N<br>14 | O<br>15 | P<br>16 | Q<br>17 | R<br>18 | S<br>19 | T<br>20 | U<br>21 | V<br>22 | X<br>23 | W<br>24 | Y<br>25 | Z<br>26 |
| ,<br>27 | .<br>28 | #<br>29 | | | | | | | | | | |

**iii)** A partir da matriz chave $A$, o remetente dispõe a sequência numérica obtida com a correspondência alfanumérica numa matriz de tal forma que seja possível codificá-la a partir do produto $AM$ (isto é, a dimensão da matriz

$M$ depende da dimensão da matriz chave $A$). Quando necessário, completa-se a matriz $M$ com caracteres que não alteram o sentido da frase, por exemplo #.

**iv)** O destinatário recebe do remetente uma matriz $P$, tal que $AM = P$, onde $M$ é a matriz mensagem a ser decodificada.

**v)** Para decodificar a mensagem recebida, o remetente deve recuperar a sequência numérica $M$.

***Como recuperar a matriz M?***

Para isso precisamos encontrar a ***matriz inversa*** da matriz chave $C$, representada por $A^{-1}$. Assim, obteremos

$$AM = P$$
$$A^{-1}A\,M = A^{-1}P$$
$$IM = A^{-1}P$$
$$M = A^{-1}P$$

**A5)** Decodifique a mensagem

$$-2, 6, 12, 0, -4, -9, -1, -29$$

sabendo-se que a matriz chave utilizada na codificação foi C=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Note que, neste caso, ambas as mensagens, original e codificada, são dadas por uma sequência numérica com números de 1 a 29.

**CASO 3- CRIPTOGRAFIA CIFRAS DE HILL**

**Cifra de Hill** é um tipo de cifra de substituição baseado em álgebra linear usado para codificação de mensagens. Foi inventada pelo matemático norte americano Lester S. Hill, em 1929.

O método **cifra de Hill**, da mesma forma que o Caso 3, também utiliza uma tabela para converter as letras do alfabeto em números inteiros (abaixo). Em seguida, utiliza uma matriz de ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ para cifrar a mensagem. Para isso, a mensagem é separada em blocos de n caracteres cada, sendo completado com letras falsas quando necessário. O processo é similar ao Caso 3, mas neste caso a mensagem codificada é convertida em letras.

| **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** | **H** | **I** | **J** | **K** | **L** | **M** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **N** | **O** | **P** | **Q** | **R** | **S** | **T** | **U** | **V** | **W** | **X** | **Y** | **Z** |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

**OBSERVAÇÃO:** A matriz decodificadora nas cifras de Hill utiliza a matriz inversa módulo 26. A razão é obter valores entre 1 e 26 para poder recuperar a cifra original de acordo com a correspondência dada na tabela acima. Esse recurso basicamente trabalha com os restos da divisão por 26 (que são valores de 0 a 25). Este conteúdo faz parte da Teoria dos Números/Matemática Discreta, e aqui não entraremos nesses detalhes. A obtenção da matriz inversa módulo 26 poderá ser feita a partir do Python, como apresentaremos posteriormente.

OBSERVAÇÃO: Há diferentes maneiras para se obter a cifra de Hill, dependendo de como os elementos são organizados na matriz.

Considere a matriz $M$ formada pelos valores obtidos pela da correspondência alfa numérica.

- ➔ Usando um processo similar ao caso anterior. A codificação é feita a partir da multiplicação $AM$ e depois convertendo os elementos para algarismos de 0 a 25 utilizando o módulo 26.
  A decodificação será feita a partir da utilização da matriz inversa no módulo 26 e os elementos obtidos devem ser então convertidos para valores de 0 a 25 novamente. A mensagem original é obtida a partir da correspondência alfa numérica desses valores.
- ➔ A codificação é feita organizando os elementos da matriz M em pares, em vetores colunas. A mensagem codificada é obtida a partir da multiplicação da matriz A por cada um desses vetores. Os elementos obtidos devem ser convertidos em algarismos de 0 a 25, utilizando o módulo 26.
  A decodificação será feita a partir da utilização da matriz inversa no módulo 26. Deve-se efetuar o produto da inversa por cada um dos vetores obtidos na mensagem codificada. Para recuperar a mensagem original, os

elementos obtidos devem ser então convertidos para valores de 0 a 25 e então realiza-se a correspondência alfa numérica.

**PASSO A PASSO DA CRIPTOGRAFIA CIFRAS DE HILL**

**CODIFICAÇÃO DA MENSAGEM**

Passo 1) Escolha uma matriz 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Passo 2) Agrupe pares sucessivos de letras de acordo com a indexação da tabela alfabética abaixo:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

Passo 3)Converta cada par sucessivo de letras de texto comum em um vetor coluna:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Passo 4) Construa o vetor cifrado $c$ a partir do produto matriz x vetor:

$$c = A \cdot p$$

Passo 5) Converta cada vetor cifrado em seu vetor alfabético equivalente pela tabela:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

**EXEMPLO**

**Gere a cifra de Hill (texto criptografado) da mensagem de texto comum WE LOVE MATH.**

Passo 1) Vamos a seguinte matriz chave:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 2) Separe pares sucessivos de letras

**WE LO VE MA TH**

Passo 3) Converta os pares sucessivos de letras em vetores coluna, usando a tabela alfabética:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

$$p_1 = \begin{pmatrix} W \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} V \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow p_3 = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} M \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow p_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Passo 4) Transforme cada vetor coluna $p$ de texto comum em um vetor cifrado $c$ através da multiplicação:

$$c_i = A \cdot p_i$$

vetor cifrado vetor comum

Podemos fazer um cálculo paralelo, construindo uma matriz de texto comum $P$, formada pelos vetores coluna $p_i$.

$$C = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Matriz de
Vetores cifrados

Matriz de
vetores comuns

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 4. & 3. \\ 1. & 2. \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 23. & 12. & 22. & 13. & 20. \\ 5. & 15. & 5. & 1. & 8. \end{pmatrix}}_{P}$$

$$C = \begin{pmatrix} 107. & 93. & 103. & 55. & 104. \\ 33. & 42. & 32. & 15. & 36. \end{pmatrix}$$

Observe que existem números maiores do que 26 que não aparecem na tabela alfabética:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

Nós contornamos este obstáculo de ter números $a$ >26 que não aparecem na tabela alfabética, simplesmente aplicando o algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{l|l} a & 26 \\ \hline r & q \end{array}$$

e encontramos um representante único de $a$ em $\mathbb{Z}_{26}$, que é essencialmente o resto $r$ da divisão de $a$ por 26 .

Por exemplo,

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

$$\begin{array}{l|l} 107 & 26 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

Então 107 é equivalente a 3 e é indexado pela letra C.

Felizmente, nós podemos aplicar o algoritmo de Euclides usando o comando pmodulo do Scilab:

```
 C  =

   107.    93.    103.    55.    104.
   33.     42.    32.     15.    36.

-->pmodulo(C,26)
 ans  =

   3.    15.    25.    3.     0.
   7.    16.    6.     15.    10.
```

Atualizamos a matriz de texto cifrado *C:*

$$C = \begin{bmatrix} 3. & 15. & 25. & 3. & 0. \\ 7. & 16. & 6. & 15. & 10. \end{bmatrix}$$

Passo 5) Finalmente indexamos os vetores coluna aos pares de letras da tabela alfabética de indexação:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

$$c_1 = \frac{3}{7} = \frac{C}{G}$$

$$c_2 = \frac{15}{16} = \frac{O}{P}$$

$$c_3 = \frac{25}{6} = \frac{Y}{F}$$

$$c_4 = \frac{3}{15} = \frac{C}{O}$$

$$c_5 = \frac{0}{10} = \frac{Z}{J}$$

TEXTO COMUM ⇒ TEXTO CRIPTOGRAFADO
WE LOVE MATH ⇒ CG OPYF COZJ

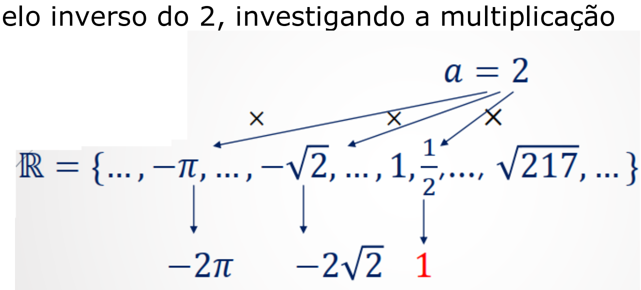
**DECODIFICAÇÃO DA MENSAGEM**

Suponha agora que queremos decifrar o texto criptografado.
Para isso nós precisaremos recorrer à noção de matriz inversa.
Lembremos que quando temos um número real $a$, digamos, seu **inverso** é aquele cujo produto com $a$ dá 1 como resultado.
Em outras palavras:

$$\boldsymbol{a^{-1} \cdot a = 1}$$

$a^{-1}$ é o inverso de $a$.

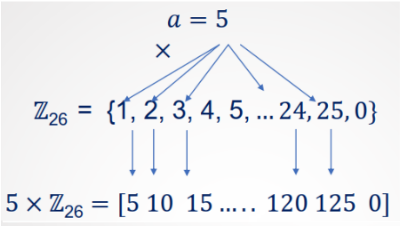
Por exemplo, se $a = 2$ qual é o seu inverso no conjunto dos resais, $\mathbb{R}$.
Vamos procurar pelo inverso do 2, investigando a multiplicação




Então, o número real $\frac{1}{2}$ é o inverso do 2 no conjunto $\mathbb{R}$
Entretanto, nós precisamos determinar os inversos no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$.
Lembremos que estamos trabalhando em um conjunto finito:

$$\mathbb{Z}_{26} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots 24, 25, 0\}$$

Note que, com exceção do 0, todos os outros números são maiores que 1, inclusive.
Então, dado um número $a$ neste conjunto, provavelmente quando multiplicarmos ele pelo seu inverso $a^{-1}$ , vamos obter um resultado maior do que 1.
Como resolvemos esta dificuldade.
Vejamos,
Suponha que $a = 5$.
Se nós multiplicarmos todos os números do $\mathbb{Z}_{26}$, obteríamos:




Como você pode ver, com exceção do 0, todos os outros resultados da multiplicação são maiores do que 1. Então, lembremos de como resolvemos esta questão o algorigmo de Euclides da divisão para encontrar o representante equivalente no $\mathbb{Z}_{26}$.
Defina $\mathbb{Z}_{26}$ no Scilab:

```
--> Z26=[1:1:25 0]
 Z26  =

       column 1 to 13

  1.   2.   3.   4.   5.   6.   7.   8.   9.   10.   11.   12.   13.

       column 14 to 25

  14.   15.   16.   17.   18.   19.   20.   21.   22.   23.   24.   25.

       column 26

  0.
```

Agora, multiplicamos por 5:

```
--> 5*Z26
ans  =

       column 1 to 12

  5.   10.   15.   20.   25.   30.   35.   40.   45.   50.   55.   60.

       column 13 to 23

  65.   70.   75.   80.   85.   90.   95.   100.   105.   110.   115.

       column 24 to 26

  120.   125.   0.
```

Depois disso, nós aplicamos o comando pmodulo:

```
-> pmodulo(5*Z26,26)
ans  =

       column 1 to 12

  5.   10.   15.   20.   25.   4.   9.   14.   19.   24.   3.   8.

       column 13 to 24

  13.   18.   23.   2.   7.   12.   17.   22.   1.   6.   11.   16.

       column 25 to 26

  21.   0.
```

A posição do vetor que dá o resultado 1 na multiplicação é o 21.
Então, 21 é o inverso do 5 no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$. Com efeito, veja que:

$$21 \times 5 = 105$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & \underline{26} \\ 1 & 4 \end{array}$$

**PASSO A PASSO DO PROCESSO DE DECIFRAGEM DE HILL**

Passo 1) Encontre a matriz inversa associada a matriz chave original:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Onde $\frac{1}{\det(A)}$ é o inverso de $\det(A)$ no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$, de acordo com a tabela consolidada de inversos no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$:

| $a$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^{-1}$ | 1 | 9 | 21 | 15 | 3 | 19 | 7 | 23 | 11 | 5 | 17 | 25 |

*Observação: Esta é uma restrição para a matriz chave A. O inverso do determinante de A deve aparecer na segunda linha da tabela para assegurar o processo de decodificação.*

Passo 2) Lembremos que nós criptografamos o texto comum a partir da equação matricial:

$$C = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Matriz de
Vetores cifrados

Matriz de
vetores comuns

Multiplicando ambos os lados da equação por $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot C = A^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$A^{-1} \cdot C = I \cdot P$$

$$A^{-1} \cdot C = P$$

Então nós determinamos uma fórmula para obter a matriz P de texto comum da nossa mensagem original:

$$P = A^{-1} \cdot C$$

**EXEMPLO:**

**Decodifique o texto criptografado CG OPYF COZJ sabendo que a matriz chave é** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Passo 1) Vamos construir a matriz inversa $A^{-1}$ usando a fórmula consolidada:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(4 \cdot 2 - 3 \cdot 1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = 5^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 21 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

inverse of 5
in Z26

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 21\cdot 2 & 21\cdot(-3) \\ 21\cdot(-1) & 21\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & -63 \\ -21 & 48 \end{pmatrix}$$

Passo 2) Agora, nós contruímos a nossa matriz de texto cifrado $C$ , cujas colunas são formadas pelos vetores cifrados a partir da mensagem criptografaca CG OPYF COZJ:

$$C = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

<u>CG</u> <u>OP</u> <u>YF</u> <u>CO</u> <u>ZJ</u>

$$c_1 = \begin{bmatrix} C \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} O \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} Y \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \quad c_5 = \begin{bmatrix} Z \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

```
C  =  3.   15.   25.   3.    0.
      7.   16.   6.    15.   10.
```

Passo 3) Use a fórmula $P = A^{-1} \cdot C$ para obter a matriz *P* da mensagem original de texto comum.

$$P = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 42 & -63 \\ -21 & 84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 15 & 25 & 3 & 0 \\ 7 & 16 & 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -315. & -378. & 672. & -819. & -630. \\ 525. & 1029. & -21. & 1197. & 840. \end{pmatrix}$$

Felizmente, nós podemos usar o comando pmodulo do Scilab para obter o resto da divisão por 26, como um representante de números maiores do que 26 em módulo.

```
-> P
P  =

 -315.  -378.    672.  -819.   -630.
  525.   1029.  -21.    1197.   840.

-> P=pmodulo(P,26)
P  =

  23.    12.    22.    13.    20.
  5.     15.    5.     1.     8.
```

Passo 4) Nós indexamos os vetores coluna dos pares de letras comum da tabela alfabética de indexação do $\mathbb{Z}_{26}$.

$$P = \begin{pmatrix} 23. & 12. & 22. & 13. & 20. \\ 5. & 15. & 5. & 1. & 8. \end{pmatrix}$$

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 |

$$p_1 = \begin{bmatrix} 23 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ E \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ O \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ E \end{bmatrix} \quad p_4 = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ A \end{bmatrix} \quad p_5 = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix}$$

WE LO VE MA TH

## CADEIAS DE MARKOV

Vamos supor que um sistema físico esteja sofrendo mudanças de modo que a cada momento ele possa ocupar algum entre um número finito de estados.

x(i)=estados possíveis.

i=tempo; i=1,2,3,...,n

Suponha que um tal sistema mude com o tempo de um estado para outro e que, em **instantes predeterminados**, observamos o estado do sistema.

Se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita a partir do conhecimento do estado do sistema na observação imediatamente anterior, então o **processo de mudança de um estado para outro** é chamado de **cadeia de Markov**.

Por exemplo, numa cadeia de Markov de três estados, a matriz de transição tem o formato:

Estado precedente

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Novo estado

Probabilidade do sistema mudar do estado 2 para o estado 3 = $p_{32}$.

Podemos descrever o estado possível do sistema numa certa observação de uma cadeia de Markov com três estados, por um vetor coluna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

No qual, $x_1$ é a probabilidade de que o sistema esteja no estado 1, $x_2$ é a probabilidade de que o sistema esteja no estado 2 e $x_3$ é a probabilidade de que o sistema esteja no estado 3.

Se soubermos o vetor de estado $x^{(0)}$ de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial e se P for a matriz de transição da cadeia de Markov podemos determinar os vetores de estado nas observações subsequentes a partir da seguinte relação recursiva

$$x^{(n+1)} = Px^{(n)}$$

**A6)** Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotadas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente nota que os clientes costumam devolver os carros de acordo com as probabilidades seguintes:

$$\begin{array}{c} \text{Alugado da loja} \\ \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & \\ & \left[\begin{array}{ccc} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}\right] & & & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{Devolvido} \\ \text{à loja}\end{array} \end{array}$$

a) Qual é a probabilidade de que um carro alugado na loja 3 vá ser devolvido na loja 2?
**Resposta**: 0,6 ou 60%

b) Qual é a probabilidade de que um carro alugado na loja 1 vá ser devolvido na loja 1?
**Resposta**: 0,8 ou 80%

c) Se um carro foi inicialmente alugado na loja 2, determine o vetor de estado inicial:
**Resposta:**

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**A7)** Considere a seguinte matriz de transição para uma cadeia de Markov com dois estados:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Considere $x_0$ o seguinte vetor de estado inicial para a população:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} .5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $x_1$ e $x_2$.
b) Qual proporção da população do estado 1 passará para o estado 2 após 2 passos?
c) Qual proporção da população do estado 2 estará no estado 1 após dois passos?
d) Determine o vetor de estado estacionário.

**A8)** Considere a seguinte matriz de transição para uma cadeia de Markov com três estados:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Considere $x_0$ o seguinte vetor de estado inicial para a população:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 90 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $x_1$ e $x_2$.
b) Qual proporção da população do estado 2 estará no estado 3 após 2 passos?

**A9)** Um estudo de safras de nozes de pinha do Sudoeste americano de 1940 a 1947, levantou a hipótese de a produção de nozes seguir uma cadeia de Markov. Os dados sugeriram que, se a safra de um ano fosse boa, as probabilidades de a safra do ano seguinte ser boa, regular ou ruim seriam, respectivamente 0.08, 0.07 e 0.85; se a safra de um ano fosse regular, as probabilidades de a safra do ano seguinte ser boa, regular ou ruim seriam de, respectivamente, 0.09, 0.11 e 0.80; se a safra de um ano fosse ruim, as probabilidades de a safra do ano seguinte ser boa, regular ou ruim seriam de, respectivamente 0.11, 0.05 e 0.84.

a) Se a safra de noz de pinha foi boa em 1940, ache as probabilidades de uma boa safra nos anos 1941 até 1945

b) A longo prazo, qual proporção da safra será boa, regular e ruim?

## Exercícios propostos e aplicações

1) Resolva as equações para $\alpha$ e $\beta$:
   a) $(2,-3) = \alpha(-2,-1) + (5,\beta)$
   b) $(5,\alpha) = (\alpha,4) + (\beta,-10)$
   c) $(10,2) = \alpha(3,5) + \beta(-1,2)$

2) Sejam $u = (2,-5), v = (0,4), e\ w = (-3,1)$
   a) Calcule o produto escalar $u.v$
   b) Calcule o produto escalar $w.v$.

3) Dados os vetores $u = (4,2)$ e
   $v = \left(2,-\frac{1}{4}\right)$, calcule:
   a) $u.v$ b) $(u + v).(u - v)$ c) $2u.3v$

4) Calcule o produto dos elementos da 2ª coluna da matriz $A_{3x5}$ dada por

$$(a_{ij}) = \begin{cases} i+j, & se\ i > j \\ -2j, & se\ i \le j \end{cases}$$

5) Dada a matriz $A_{2x2}$ tal que $a_{ij} = (i-j)^2 + 2$, calcule o valor da expressão
   $a_{11} + a_{22} - 2a_{12}a_{21}$

6) Determine os valores de *x*, *y* para que a igualdade seja válida:

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ 2x & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

7) Se
   $\begin{pmatrix} a+2 & x & y \\ -x & b+1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2 & -a & -b \\ a & -b-1 & b \end{pmatrix}$, qual o valor da soma $x + y$?

8) Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcule se existir:
   *a) A+B*
   *b) B-2A*
   *c) AB*
   *d) BC*
   *e) DB+3C*
   *f) CD*
   *g) AD*

*9)* As meninas 1 = Adriana; B = Bruna e 3 = Carla falam muito ao telefone entre si. A matriz M mostra cada elemento $a_{ij}$

   representando o número de telefonemas que “i” deu para “j” no mês de setembro: $M = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 10 \\ 18 & 0 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \end{bmatrix}$.

   Quem mais telefonou e quem mais recebeu ligações?

10) As quantidades vendidas no mês de abril de dois produtos I e II de uma certa empresa vendidos em duas filiais X e Y são apresentadas no quadro I:

   Quadro I

| | Produto I | Produto II |
|---|---|---|
| Filial X | 100 | 150 |
| Filial Y | 200 | 120 |

Já as vendas no mês de maio são dadas pelo quadro II.

Quadro II

| | Produto I | Produto II |
|---|---|---|
| Filial X | 120 | 130 |
| Filial Y | 180 | 150 |

Representando os quadros acima pelas matrizes *A* e *B,* utilize a notação matricial para responder os itens abaixo:

a) Calcule e interprete o resultado de $A+B$.
b) Sabendo-se que no mês de junho as vendas caíram 10% em relação a maio, calcule o total vendido neste semestre.

11) Uma empresa fabrica três produtos. Suas despesas de produção estão divididas em três categorias (tabela I). Em cada uma dessas categorias, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por estação (tabela II)

Tabela I

| Custo de produção por item (em dólares) | | | |
|---|---|---|---|
| Categorias | Produto | | |
| | A | B | C |
| Matéria prima | 0,10 | 0,30 | 0,15 |
| Pessoal | 0,30 | 0,40 | 0,25 |
| Despesas gerais | 0,10 | 0,20 | 0,15 |

Tabela II

| Quantidade produzida por estação | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Categorias | estação | | | |
| | verão | outono | inverno | primavera |
| A | 4000 | 4500 | 4500 | 4000 |
| B | 2000 | 2600 | 2400 | 2200 |
| C | 5800 | 6200 | 6000 | 6000 |

Representando as tabelas I e II pelas matrizes M e N, calcule e interprete o significado da matriz MN

12) Encontre os elementos *a, b, c, d* para que $2\begin{bmatrix} a & 2 \\ 6 & 9 \\ b & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ c & 7 \\ 2 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 11 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

13) Um fabricante faz dois tipos de produtos P e Q, em cada uma de duas fábricas X e Y. Ao fazer esses produtos, são produzidos dióxido de enxofre, óxido nítrico e partículas de outros materiais poluentes. As quantidades de poluentes produzidas são dadas (em kg) pela matriz A (a primeira linha refere-se ao produto P e a segunda ao produto Q):

$$\begin{array}{cccc} & \textit{Dióxido de enxofre} & \textit{óxido nítrico} & \textit{partículas} \\ A = & \left[\begin{array}{c} 300 \\ 200 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 100 \\ 250 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 150 \\ 400 \end{array}\right] \end{array}$$

Leis estaduais e federais exigem a remoção desses poluentes. O custo diário para remover cada quilo de poluente é dado (em dólares) pela matriz:

$$\begin{array}{ccc} \text{Fábrica X} & \text{Fábrica Y} & \\ B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 7 & 9 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} \textit{dióxido de enxofre} \\ \textit{óxido nítrico} \\ \textit{partículas} \end{array} \end{array}$$

Qual o significado dos elementos do produto matricial AB?.

14) Verifique, JUSTIFICANDO, se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas (apresente um exemplo que mostre que é falsa):

a) Se AB está definida, então BA está definida.
b) Se AB está definida e é uma matriz quadrada, então BA está definida.
c) Se AB=BA então A e B são ambas quadradas e de mesmo tamanho.
d) Se AB e BA ambas existem então AB=BA

15) Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{4\times 7}$ tal que $a_{ij} = i - j$ e $B = (b_{ij})_{7\times 9}$ tal que $b_{ij} = i$ e $C = AB$. Calcule os elementos $c_{63}$ e $c_{38}$. (OBS: não calcule as matrizes, apenas os elementos indicados!)

16) Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe em sete jogos através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $a_{ij}$ dessa matriz é um número de pontos marcados pelo jogador de número i no jogo j.
a) Quantos pontos marcou o jogador de número 3 no jogo 5?
b) Quantos pontos marcou a equipe no jogo 4?
c) Quantos pontos marcou o jogador de número 2 em todos os jogos?

17) Cinco amigos $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ e $A_5$ viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, s despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro. Considere que nas matrizes S e D abaixo, estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha i e coluna j representa o que o amigo $A_i$ emprestou para o amigo $A_j$, nesse dia

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, quanto o amigo $A_4$ devia aos demais amigos?
E quanto o amigo $A_1$ tinha a receber?

18) Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz $4\times4$ dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz $4\times4$ se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

a) Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.
b) Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.
c) Pode-se ir diretamente da cidade D até C.
d) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.
e) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

19) m cada parte, obtenha a cifra de Hill da mensagem DARK NIGHT com matriz codificadora dada:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$    b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

20) Em cada uma das partes, determine se a matriz é inversível módulo 26. Se for, encontre uma inversa módulo 26 e confira o seu resultado verificando que no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$    b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$    c) $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

21) Decodifique a mensagem SAKNOXAOJX sabendo que é uma cifra de Hill com matriz codificadora $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

## GABARITO

1) a) $\alpha = 1{,}5 \quad e \quad \beta = -1{,}5$
b) $\alpha = -6 \quad e \quad \beta = 11$
c) $\alpha = 2 \quad e \quad \beta = -4$

1) a)-20 b) 4

2) a) 17/2 b) 255/16 c) 51

3) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 3 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 4 & 5 & -6 & -8 & -10 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad a_{11} + a_{22} - 2a_{12}a_{21} = -14$

5) $x = -1 \quad e\ y = 1$

6) $x + y = 3$

7) $a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$    $b) \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 6 & 5 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$    $d) \nexists$

$d) \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 24 \\ 1 & -14 \end{bmatrix}$    $e) \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 19 & 29 \end{bmatrix}$

$f) \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 18 & 25 & 4 \end{bmatrix}$    $g) \begin{bmatrix} 12 & 11 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ = 4 & -15 & -2 \end{bmatrix}$

8) Bruna foi quem mais telefonou e Adriana foi quem mais recebeu ligações.

9) a) $C = A + B = \begin{bmatrix} 220 & 280 \\ 380 & 270 \end{bmatrix}$ cada elemento $c_{ij}$ representa o total vendido na filial i (X=1 e Y=2) do produto j (I, II) nos meses de abril e maio.
b)

| | I | II |
|---|---|---|
| X | 328 | 397 |
| Y | 542 | 405 |

10) $MN = \begin{bmatrix} 1870 & 2160 & 2070 & 1960 \\ 3450 & 3940 & 3810 & 3580 \\ 1670 & 1900 & 1830 & 1740 \end{bmatrix}$

A matriz fornece os custos em dólares dos produtos I, II e III, referente a matéria prima (1ª linha), pessoal (2ª linha) e despesas gerais (3ª linha) nos períodos verão (1ª coluna), outono (2ª coluna), inverno (3ª coluna) e primavera (4ª coluna).

11) a=5, b= -3, c= -6, d=4
12) A matriz resultante representa os custos totais de remoção dos poluentes P e Q (1ª e 2ª linhas, respectivamente) nas fábricas X e Y (1ª e 2ª colunas, respectivamente)
13) a) F b) V c) V d) F
14) $c_{63}$ não existe e $c_{38} = -56$
15) a) 14 b) 90 c) 128
**16)** $A_4$ deve R$ 7,00 para $A_1$ , R$ 4,00 para $A_2$ , R$ 8,00 para $A_3$ e deve receber R$ 9,00 de $A_5$ . Total da dívida: 10,00
$A_1$ deve R$ 10,00 para $A_2$ , R$ 16,00 para $A_3$ , R$ 20,00 para $A_5$ e deve receber R$ 7,00 de $A_4$ . Total da dívida: 39,00
17) a

19)
a) G I Y U O K E V B
b) S F A N E F Z W J

20) a) det(A) = 11 e $11^{-1}$ no $\mathbb{Z}_{26}$ é o número 19.
$A^{-1}=\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$ no $\mathbb{Z}_{26}$.
b) det(A)=4 e 4 não tem inverso no $\mathbb{Z}_{26}$, de acordo com a tabela de recíprocos.

| a | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^{-1}$ | 1 | 9 | 21 | 15 | 3 | 19 | 7 | 23 | 11 | 5 | 17 | 25 |

c) det(A) = 61>26

$$\begin{array}{r|l} 61 & 26 \\ \hline 9 & 2 \end{array}$$

E o inverso do 9 no $\mathbb{Z}_{26}$ é o número 3.

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 23 & 24 \end{pmatrix}$ no $\mathbb{Z}_{26}$.

21) WELOVEMATH

## Exercícios com o Scilab/Python

1) Admita que $x = 3$ $e$ $y = 4$. Use o scilab para avaliar as seguintes expressões:

a) $\frac{x^2+y^3}{(x-y)^2}$
b) $\sqrt{x} + e^{-2y}\sqrt{xy}$

2) Construa utilizando valores aleatórios, as seguintes matrizes: $A_{8x5}$, $B_{3x5}$ , $C_{5x8}$ e $D_{3x3}$.

Efetue as operações abaixo usando os comandos apropriados:

a) $AB^T$ b) $C - A^T$ c) $B^T$D

3) Usando as matrizes do exercício 2, obtenha:
a) $a_{23}$
b) 2ª linha de B
c) linhas 3 e 10 de C
d) o maior elemento de D
e) A 7ª linha da matriz A com os elementos acrescidos de 2 unidades
f) Os elementos da 4ª coluna das linhas de 2 a 5, na matriz A
g) produto do maior elemento de B pelo menor elemento de A

4) Usando o scilab, construa uma matriz $A_{5x5}$ tal que

$$(a_{ij}) = \begin{cases} i+j, & se\ i > j \\ -2j, & se\ i < j \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

5) Elabore um algoritmo na linguagem scilab que define a matriz $A_{6\times7}$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} -2 \cdot i + 3 \cdot j, & \text{se} \quad i > j \\ 5 \cdot i - j, & \text{se} \quad i < j \\ 0, & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

6) Elabore um algoritmo na linguagem scilab que escreve o vetor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 25 \\ 49 \\ 81 \\ 121 \end{pmatrix}$$

usando a estrutura de laço.

7) Elabore um algoritmo na linguagem scilab, que escreve o vetor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \\ 55 \\ 91 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Observação:
Use a estrutura de laço e use o fato

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

8) Elabore um algoritmo recursivo na linguagem scilab que escreve o vetor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \\ 225 \\ 441 \\ 784 \end{pmatrix}$$

Observação:
Use a estrutura de laço e use o fato

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

9) Considere a matriz

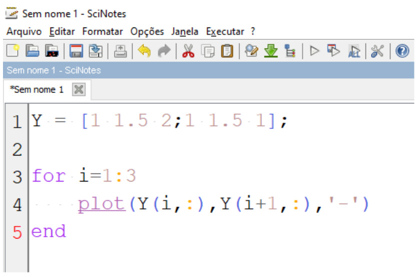
$$A = \begin{pmatrix} 3. & 6. & 9. & 81. \\ -2. & -4. & 4. & 16. \\ 6. & 12. & 36. & 1296. \\ 5. & 10. & 25. & 625. \\ 9. & 18. & 81. & 6561. \\ 11. & 22. & 121. & 14641. \end{pmatrix}$$

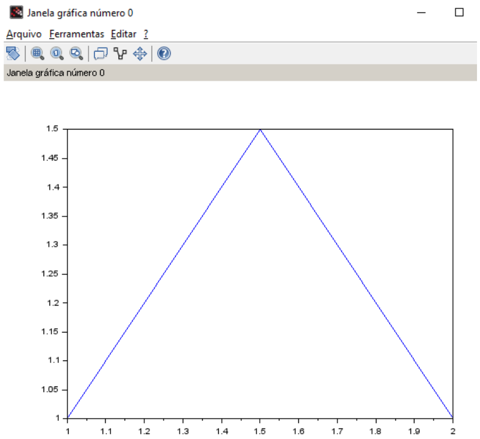
Aplique os comandos do scilab para responder os seguintes itens:

a) Acesse o elemento $a_{34}$ de A.
b) Acesse a terceira coluna de A.
c) Acesse a quarta linha de A.
d) Acesse o bloco da matriz A constituído pelas linhas i=1 e i=2 e pelas colunas de j=2 até j=4.
e) Acesse o bloco da matriz A constituído pelas linhas i=2 e i=3 e pelas colunas de j=1 até j=3.

10) Plote os seguintes polígonos no plano cartesiano, usando o comando plot do scilab.

a) Triângulo de vértices $A = \binom{1}{1}; B == \binom{1.5}{1.5}; C = \binom{2}{1}$.




b) Paralelogramo de vértices $A = \binom{1}{0}; B = \binom{2}{2}; C = \binom{5}{2}; D = \binom{4}{0}$

## MATERIAL COMPLEMENTAR

## AINDA SOBRE VETORES

**Definição**: Um vetor é um segmento de reta orientado, caracterizado por três aspectos: direção, tamanho e sentido.
São usualmente representados por letras minúsculas com uma seta acima, $\vec{v}$, ou com a indicação do ponto inicial e do ponto final que definem o vetor por letras maiúsculas com uma seta acima, $\overrightarrow{AB}$.
Qualquer entidade que possua direção, sentido e comprimento pode ser representada por um vetor. Por exemplo, considere a velocidade de um carro que viaja para o nordeste a 40 mi/h. Esta grandeza pode ser representada por uma seta apontando na direção de 45° acima da horizontal para a direita; como ilustra a Figura 1.

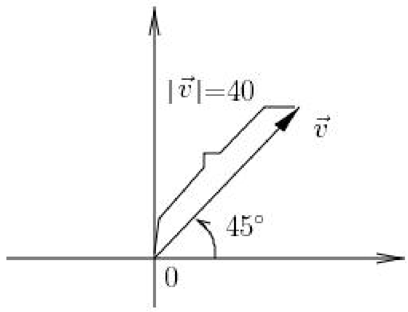



Figura 1: velocidade de um carro

Vetores são normalmente orientados em um sistema de coordenadas, sendo o mais comum o plano cartesiano.

As coordenadas $(a, b)$ indicam a abscissa (deslocamento horizontal) e a ordenada (deslocamento vertical) de um ponto $P = (a, b)$ . Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, sendo estamos dizendo que o vetor $\vec{v}$ é determinado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ . Ou seja, $\vec{v}$ é o vetor com origem no ponto $A = (x_1, y_1)$ e extremidade no ponto $B = (x_2, y_2)$ .
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (a, b) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .
Assim, um representante de $\vec{v}$ pode ter a sua origem em qualquer ponto do espaço.

O ponto $A$ é chamado ponto inicial e o ponto $B$ é o ponto final. Note que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é o vetor que representa um deslocamento de $a$ unidades na direção do eixo $x$ e $b$ unidades na direção do eixo $y$, tendo como ponto de partida o ponto $A$.

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. Na Figura 2, todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de $AB$, representam o mesmo
vetor, que será denotado por $\overrightarrow{AB}$.

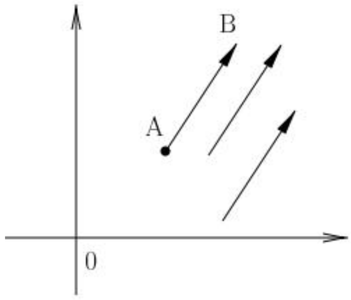



Figura 2: representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$

Dentre todos os segmentos que representam o vetor $\overrightarrow{AB}$, o que "melhor o representa" é o que tem origem no ponto (0,0) e extremidade em $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, como ilustrado na Figura 3.

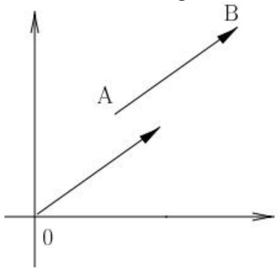



Figura 3: melhor representante do vetor $\overrightarrow{AB}$

## CONCEITOS FUNDAMENTAIS

**Módulo:** O comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o tamanho do segmento de reta $\overline{AB}$, e é denominado módulo do vetor.

**Notação:** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

A expressão acima que corresponde ao cálculo da distância entre os pontos $A$ e $B$, facilmente obtida através do Teorema de Pitágoras.

**Direção:** A direção de um vetor $\vec{v}$ será caracterizada pelo ângulo $\theta_v$ que o vetor forma com o eixo horizontal. Pode ser calculado usando a trigonometria:

$tg(\theta_v) = \frac{v_y}{v_x}$, isto é $\theta = arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

**Igualdade:** dois vetores são iguais se possuem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Note que dois vetores iguais não necessariamente começam no mesmo ponto e não precisam estar ao longo da mesma reta, como ilustra a Figura 4.

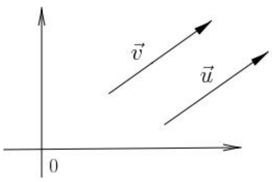



Figura 4: $\vec{v} = \vec{u}$

**Vetores paralelos**: dois vetores são paralelos quando possuem a mesma direção (incluindo o caso no qual estão ao longo da mesma reta). Indicaremos que o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$ por: $\vec{u}\,//\vec{v}$ .

A relação de paralelismo entre vetores satisfaz as seguintes relações:

i) $\vec{u}\,//\vec{u}$

ii) se $\vec{u}\,//\vec{v}$ então $\vec{v}\,//\vec{u}$

iii) se $\vec{u}\,//w$ e $\vec{w}\,//\vec{v}$ então se $\vec{u}\,//\vec{v}$ .

### Versores

O versor de um vetor $\vec{v}$ é o vetor de módulo 1 que possui a mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

$e_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

## Ângulo entre vetores

É possível mostrar que

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Ou ainda

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow \theta = arc\cos\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

Como ilustrado nas aplicações apresentadas abaixo, essa informação é essencial para IA.

**ALGUMAS APLICAÇÕES QUE UTILIZAM VETORES/MATRIZES COMO FERRAMENTA**:

## → MODELO DE CORES RGB

As cores nas telas de monitores de computadores costumam ter por base o chamado ***modelo de cores* RGB**. As cores nesse sistema são criadas juntando porcentagens das três cores primárias (vermelho, verde e azul). As cores primárias são identificadas pelos vetores

(1, 0, 0) - r vermelho puro
(0, 1, 0) - g verde puro
(0, 0, 1) - b azul puro

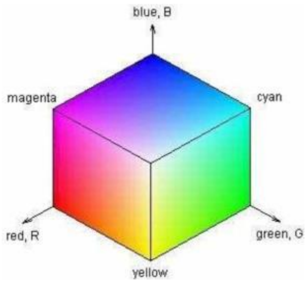
Assim, o vetor que representa a cor de um ponto (*pixel*) na tela é dado pela **combinação linear** dos vetores de cores primária com coeficientes entre 0 e 1, inclusive.

$c = k_1 r + k_2 g + k_3 b\,, \quad 0 \leq k_i \leq 1$

Desenvolvendo a combinação linear, obtém-se

$$c = (k_1, k_2, k_3)$$

Variando os coeficientes, obtemos o **cubo de cores**




## → CLASSIFICAÇÃO

A Inteligência Artificial (IA), em especial o aprendizado de máquina (*machine learning*), é uma área da computação que utilizada largamente estruturas matemáticas como vetores e matrizes.

**A Matemática por trás do SVM em IA**

**SVM** (*Support Vector Machines*) ou *Máquinas de Vetores de Suporte* é uma técnica de *machine learning* que é empregada em problemas de classificação, com grande utilidade em diferentes áreas da Computação, como reconhecimento de padrões, mineração de dados, reconhecimento de caracteres, reconhecimento de objetos e outras.

De modo simplificado, podemos dizer que a tarefa de um algoritmo SVM para resolver um problema de classificação é encontrar a **equação do hiperplano** (ponto, reta ou superfície) que separa as duas classes de dados, conforme figuras abaixo.

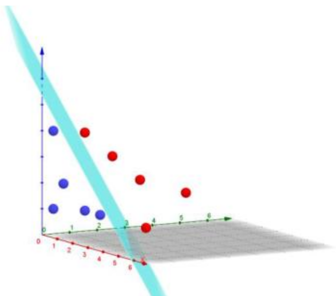


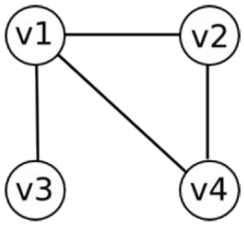
**Fig1: Problema de classificação bidimensional**

Em linhas gerais, os elementos são classificados a partir da posição que ocupam em relação ao hiperplano.

## → MOTORES DE BUSCA

Um dos motores de busca na internet de maior sucesso é o *PageRank*, do Google, desenvolvido por Larry Page e Sergey Brin, em 1996. Este algoritmo utiliza um processo matemático, denominado *Cadeias de Markov*, para lidar com sistemas dinâmicos.

Considere o grafo a seguir. Nesta estrutura, os vértices (nós) representam 4 sites (v1, v2, v3 e v4). Já as arestas representam hiperlinks entre os sites. Veja que uma pessoa que está no site 3 (V3) só dispõe de link direto para o site 1 (v1). Já uma pessoa que está no site 1 dispõe de links diretos (apenas uma aresta) para todos os demais sites.




Nomenclatura:

- **Grau** (*degree*) de um vértice é o número de arestas adjacentes a ele (número de vizinhos). No exemplo: d(v1) = 3, d(v2) = 2, d(v3) = 1 e d(v4) = 2.
- **Matriz** $\Delta$ : matriz dos graus dos vértices

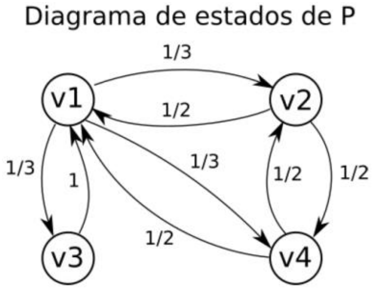
$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d. Obtenha a inversa da matriz $\Delta$, isto é, $\Delta^{-1}$. **Generalize** essa regra.
e. Obtenha a matriz A de adjacências do grafo.
f. Obtenha a matriz P dada por $P = \Delta^{-1}A$.

**Interpretação**: note que cada entrada $p_{ij}$ de P representa a probabilidade de uma pessoa que está no vértice i ir para o vértice j (ir do site i para o site j) usando apenas uma aresta (link direto).

Chamamos P de **matriz de probabilidades de transição de estados**, pois ela define um processo aleatório conhecido como **Cadeia de Markov**. Toda matriz P pode ser representada graficamente por um **diagrama de estados**.

g. Represente e interprete o **diagrama de estados** da matriz P.




h. Considere o **vetor de estado** inicial $w^{(0)} = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, isto é, uma pessoa que inicialmente está no site 2. **Calcule e interprete** o vetor do próximo estado $w^{(1)}$.

$$w^{(1)} = w^{(0)}P$$

## → OUTRAS POSSIBILIDADES PARA CRIPTOGRAFAR UMA MENSAGEM

## CRIPTOGRAFIA COM UMA MATRIZ DE PERMUTAÇÃO

Neste caso, a codificação consiste em basicamente alterar a ordem dos elementos numéricos da mensagem original.

Uma matriz quadrada booleana (binária) composta apenas por **zeros** e **uns** é uma **matriz de permutação** se:

- Cada linha contém exatamente um único **um**;
- Cada coluna contém exatamente um único **um**.

1) Considere a matriz de permutação a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considere a senha de 3 algarismos 937 representada pelo vetor S = (9, 3, 7).

**Atenção**: um vetor, por padrão, é visto como uma matriz coluna. Portanto

$$S = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Verifique as diferenças de interpretação (leitura) da matriz A nos produtos $S^T A$ e $AS$
b) Faça um grafo (dígrafo) mostrando o esquema visual dessas codificações.
c) Considerando que a **matriz codificadora** A é lida EM LINHAS e que a senha a ser codificada é S, qual é a **senha cifrada** S'?
d) Se A é a matriz codificadora, qual é a **matriz decodificadora**? Note que, neste caso, ou seja, quando temos uma **matriz permutação,** temos $A^{-1} = A^T$.
e) Se a senha cifrada é 456, qual é a senha original (senha decodificada)? Utilize $A^{-1}$.
f) Considere a senha S = 9375 representada pela matriz S abaixo. A senha codificada S' é dada por $S' = AS$. Obtenha S'.

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$