ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Escola Politécnica
1º Sem 2024

Professores:
Alexandre Monteiro

Vetores e Matrizes

Aplicações de Matrizes:

- **Grafos**
- **Cadeias de Markov**

Grafos

Vamos utilizar a noção de grafos para caracterizar relações dos tipos:

- Pessoa *A* domina pessoa *B.*
- Animal *A* alimenta-se do animal *B*.
- Companhia *A* vende seus produtos para a companhia *B.*
- Cidade *A* possui voo sem escalas para a cidade *B*.

Definição

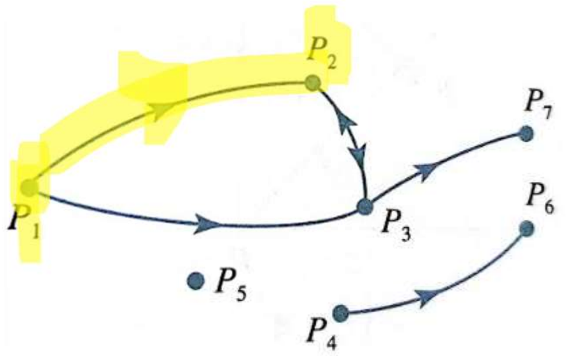
Dizemos que um ***grafo dirigido*** ou, ***dígrafo***, um conjunto finito de elementos (vértices) $[P_1, P_2, \ldots P_n]$ juntamente com uma coleção finita de pares ordenados (arestas) (P_i, P_j) de elementos distintos desse conjunto, sem repetição de pares ordenados.

Notação:

$P_i \longrightarrow P_j \Leftrightarrow P_i$ está conectado a P_i

$P_i \longrightarrow P_j$ e $P_j \longrightarrow P_i \Leftrightarrow \; P_i \longleftrightarrow P_j$

Exemplo:

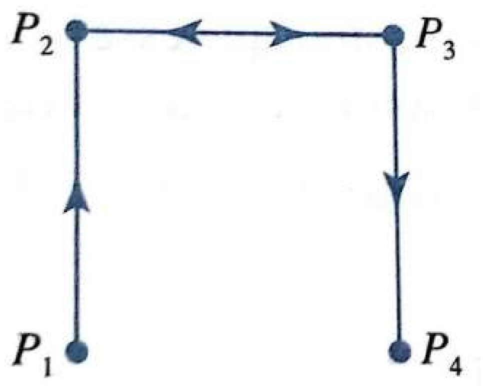


Grafos

Podemos associar ao grafo dirigido de *n* vértices uma matriz $M = (m_{ij})$, do tipo $n \times n$, chamada de ***matriz de vértices*** ou ***matriz de adjacência*** do grafo dirigido, dada por:

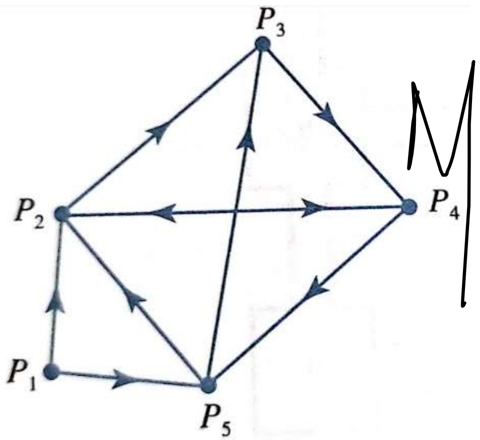
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } P_i \to P_j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo



$$M = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} j=1 & j=2 & j=3 & j=4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo



$$M = \Rightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} j=1 & j=2 & \cdots & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definimos uma conexão em um grafo como sendo uma sequência de arestas que nos permite ir de um vértice a outro continuamente. Nos referimos a uma conexão com *k* arestas como ***k-conexão.***

Teorema:
Se *A* é a matriz de vértices de um grafo G, o elemento (*i,j*) de A^k é equivalente ao número de k-conexões entre os vértices *i* e *j*.

Observação:

Um vértice pode não se ligar ao outro por apenas um caminho, ou seja, por uma única conexão de passo 1.

A matriz de 2 passos equivale a matriz de vértices elevada ao quadrado e representa as conexões que passam por 1 vértice da origem ao destino ($P_i \longrightarrow P_j \longrightarrow P_k$)

As entradas da matriz de 2 passos são o número de conexões com 2 passos que existe de um vértice a outro.

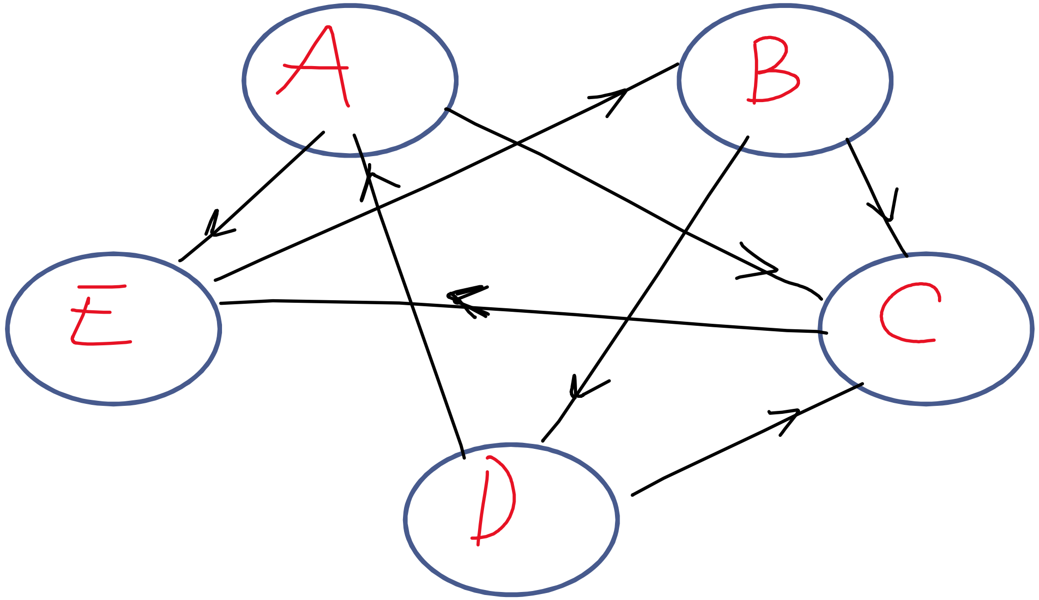
O poder de um vértice em um grafo dirigido por dominância é o número total de suas conexões de 1 e 2 passos para os outros vértices do grafo. Ou seja, o poder de um vértice P_i é a soma das entradas da i-ésima linha da matriz $M + M^2$.

O vértice mais poderoso será aquele com maior número de conexões de 1 ou 2 passos para os outros vértices e que se liga a todos os outros vértices do gráfico dirigido por dominância.

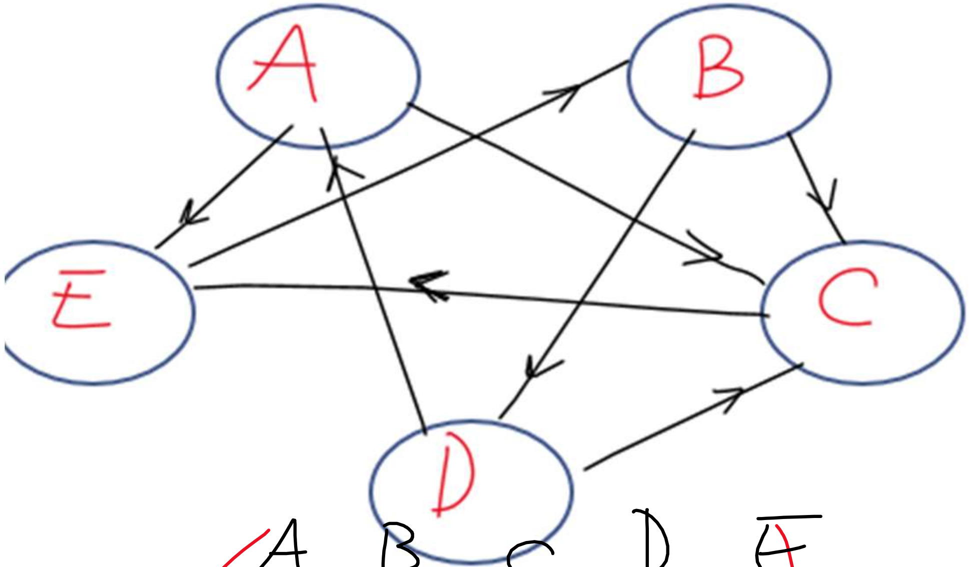
Problema

Cinco pessoas estão conectadas por e-mail. Sempre que uma delas ouve alguma fofoca interessante, passa a fofoca às outras pessoas, mandando um e-mail para alguém do grupo, conforme a tabela:

Remetente	Destinatários
Ana	Carla, Edu
Beto	Carla, Diana
Carla	Edu
Diana	Ana, Carla
Edu	Beto



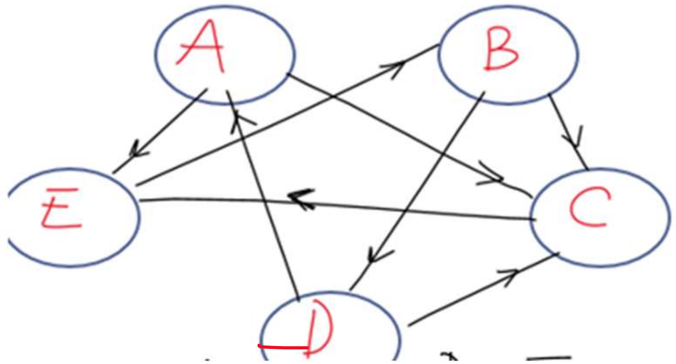
a) Desenhe o dígrafo que modela essa "rede de fofocas" e ache a sua matriz de vértices A.



$$M = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

b) Defina um *passo* como o tempo eu leva para uma pessoa mandar um e-mail para todas as outras de sua lista. (Dessa forma, em um passo, a fofoca vai de Ana par Carla e Edu). Se Beto ouvir algum boato, quantos passos terão que ser dados para que todos ouçam o boato?

Qual cálculo matricial representa isso?




```
--> M
 M  =

   0.   0.   1.   0.   1.
   0.   0.   1.   1.   0.
   0.   0.   0.   0.   1.
   1.   0.   1.   0.   0.
   0.   1.   0.   0.   0.
```

fornece conexões diretas

```
--> M^2
 ans  =

   0.   1.   0.   0.   1.
   1.   0.   1.   0.   1.
   0.   1.   0.   0.   0.
   0.   0.   1.   0.   2.
   0.   0.   1.   1.   0.
```

fornece conexões indiretas

```
--> M+M^2
 ans  =

    0.    1.    1.    0.    2.
    1.    0.    2.    1.    1.
    0.    1.    0.    0.    1.
    1.    0.    2.    0.    2.
    0.    1.    1.    1.    0.
```

São necessários 2 passos para Beto mandar mensagem para todo mundo.

Aplicações – Cadeias de Markov

Matriz de Transição

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\text{Estado precedente}} & \\ 1 & 2 & 3 & \\ \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}\right] & & & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \quad \text{Novo estado} \\ 3 \end{array} \end{array}$$

p_{ij}=probabilidade do sistema mudar do estado j para o estado i.

Dada uma observação com três estados, podemos caracterizá-la por um vetor coluna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Na qual x_i é a probabilidade de que o sistema esteja no estado i.

Sabendo o vetor de estado inicial $x^{(0)}$, podemos determinar os vetores de estado nas observações subsequentes:

$$x^{n+1} = P \cdot x^n$$

Problema(Locadora)

Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotadas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente nota que os clientes costumam devolver os carros de acordo com as probabilidades seguintes:

Alugado da loja $j = 3$

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}$$

$i = 2$ Devolvido à loja

a) Qual é a probabilidade de que um carro alugado na loja 3 vá ser devolvido na loja 2?

0.6 ou 60%

b) Qual é a probabilidade de que um carro alugado na loja 1 vá ser devolvido na loja 1?

0.8 ou 80%

c) Se um carro foi inicialmente alugado na loja 2, determine o vetor de estado inicial:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{loja 1} \\ \text{loja 2} \\ \text{loja 3} \end{array}$$

d) Determine os três vetores de estado subsequentes.

1^a iteração

$$X^{(1)} = P \cdot X^{(0)}$$

2^a iter.

$$X^{(2)} = P \cdot X^{(1)}$$

$$X^{(2)} = P \cdot P \cdot X^{0}$$

$$X^{2} = P^{2} \cdot X^{(0)}$$

⋮

generalizando

$$X^{(n)} = P^{n} \cdot X^{(0)}$$

$$X^{(1)} = P \cdot X^{(0)}$$

$$X^{(2)} = P^2 \cdot X^{(0)}$$

$$X^{(3)} = P^3 \cdot X^{(0)}$$

```
X = zeros(3,3)
P = [ . . . . , . . . ];
for j = 1 : 3 ,
X(:,j) = P^j * X(0)
end
```

```
// ALGORITMO DA CADEIA DE MARKOV

// MATRIZ DE TRANSIÇÃO
P = [0.8 0.3 0.2;0.1 0.2 0.6;0.1 0.5 0.2]

// VETOR DE ESTADO INICIAL
x0 =[0 1 0]'

X = zeros(3,3)

for j=1:3
    X(:,j)=P^j*x0
end

printf("vetor de estado 1 = ")
disp(X(:,1))

printf("vetor de estado 2 = ")
disp(X(:,2))

printf("vetor de estado 3 = ")
disp(X(:,3))
```

SAÍDA DO PROGRAMA

```
vetor de estado 1 =
   0.3
   0.2
   0.5
vetor de estado 2 =
   0.4
   0.37
   0.23
vetor de estado 3 =
   0.4770000
   0.252
   0.271
```