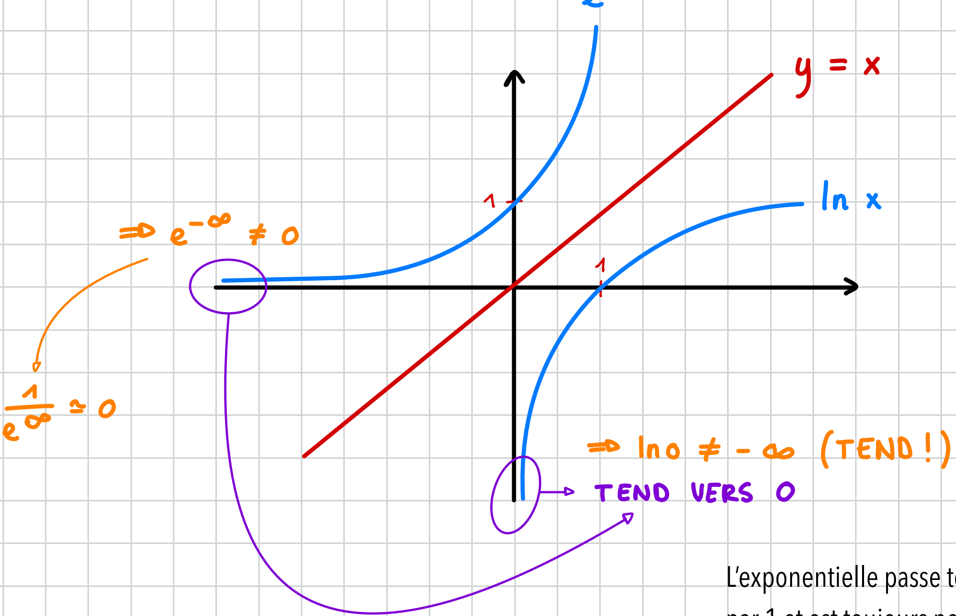
Exam décembre : math 6

1. Formules dérivées

- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$
- $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
- $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$ $\quad (\sin U)' = U' \cdot \cos U$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\quad (\cos U)' = -U' \cdot \sin U$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (\tan U)' = U' \cdot \dfrac{1}{\cos^2 U}$
- $(e^x)' = e^x$ $\quad (e^U)' = U' \cdot e^U$
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ $\quad (\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\quad (a^U)' = U' \cdot a^U \cdot \ln a$

2. Études de fonctions



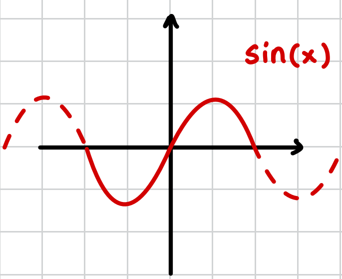
L'exponentielle passe toujours par 1 et est toujours positif.

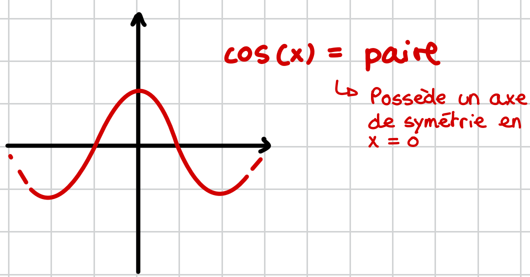
- Parité d'une fonction :

$f(-x) \rightarrow f(x)$ = paire

$f(-x) \rightarrow -f(x)$ = impaire

$f(-x) \dashrightarrow$ Ni paire ni impaire





- Domaine de définition

Il s'agit des valeurs de x pour laquelle la fonction est définie :

- Le dénominateur doit être différent de zéro.
- Sous une racine, le radicant doit être positif.

- Asymptotes :

- AV : $\lim\limits_{x \to a} f(x) \to \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = a$
  $\qquad\qquad\qquad\quad\; \to b \Rightarrow$ pas d'AV

- AH : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \to a \Rightarrow AH \equiv y = a$
  $\qquad\qquad\qquad\quad\; \to \pm\infty \Rightarrow$ pas d'AH

- AO : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

  on ÷ par x pour isoler la pente

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \underbrace{- ax}_{} = b$

  pour trouver l'ordonné a l'origine

  $\Rightarrow AO \equiv y = ax + b$

- Théorème de l'Hospital :

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminé $\to$ "$\dfrac{0}{0}$" ou "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Dérivée de ln(x)

$$\underbrace{e^{\ln(x)} = x}$$

ln = exposant auxquels il faut exposer e pour obtenir x

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)'$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot e^{\ln(x)} = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot x = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

- Valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x \; x < 0 \end{cases}$$

$$\left(|x|\right)' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \nexists & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Valeur de l'exponentielle :

$$e^x \simeq \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{\text{On dérive}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

= définition de l'exponentielle

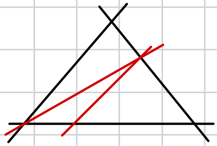
$$(e^x)' \simeq 0 + 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \dots$$

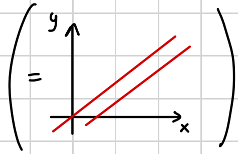
$$\simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si on remplace e par 1, on trouve la valeur de e

3. Plan projective

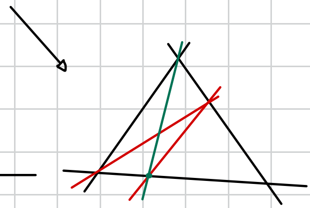
- Étape pour réaliser un plan projective :

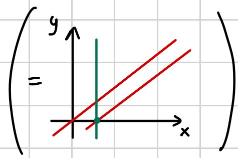


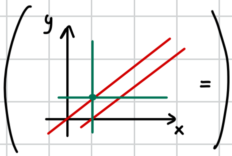


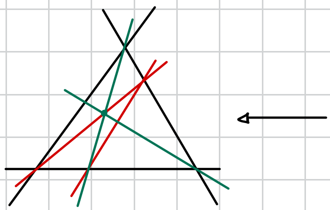
1. Faire un triangle quelconque

2. Tracer 2 parallèles





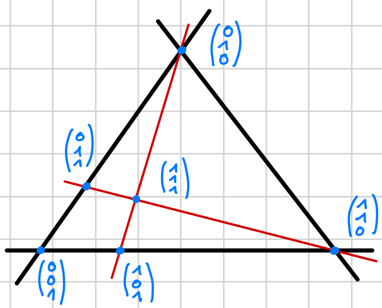




3. Tracer une droite perpendiculaire à la seconde parallèle

4. Tracer une droite perpendiculaire à la dernière tracé

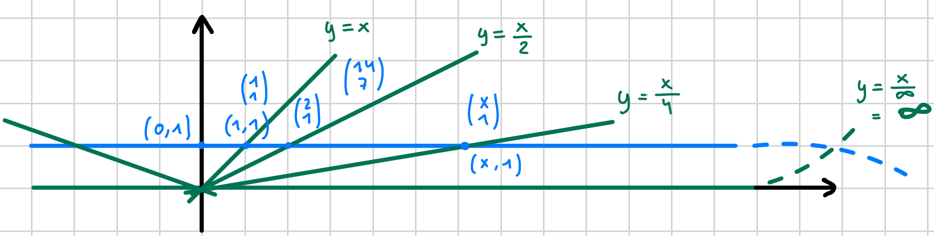
- Coordonnées homogènes :



Toutes les droites, passant par l'origine sont reliées à un point sur la droite (sauf celle de l'axe des X qui est reliée à l'infini).

Mettre des coordonnées, puis plonger le plan dans le plan euclidien et associer chaque droite à un point.

Toutes les droites sont associées à un point.



Équation générale du droit d'un plan projective : $ax + by + cz = 0$

2 points = 1 droite

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (a \quad b \quad c)$$

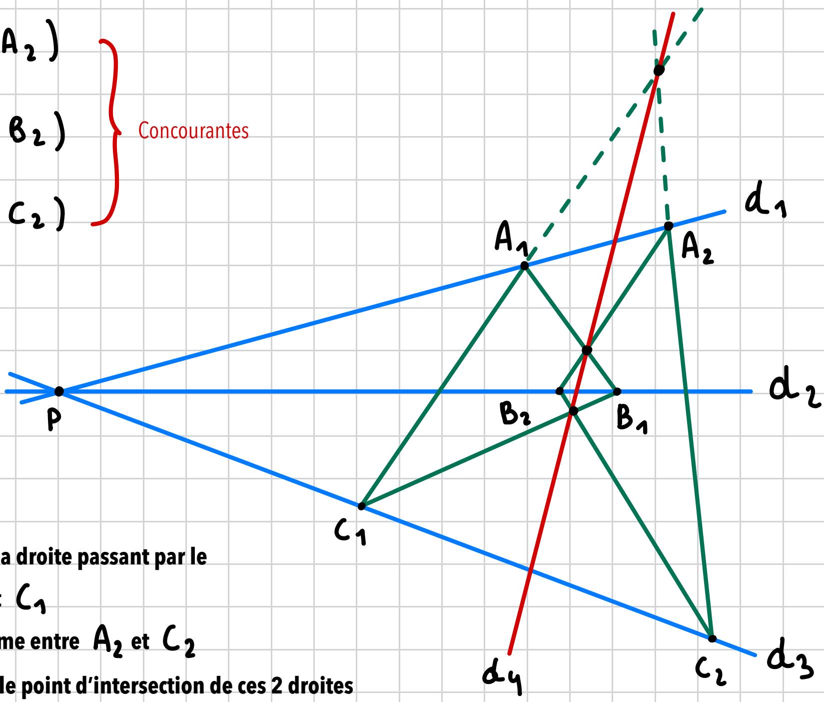
2 droites = 1 point d'intersection

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Théorème de Desargues**

Si les sommets respectifs de 2 triangles forment 3 droites concourantes, alors les côtés respectifs des triangles se coupent en 3 points alignés.

$$\left.\begin{aligned} d_1 &: (P, A_1, A_2) \\ d_2 &: (P, B_1, B_2) \\ d_3 &: (P, C_1, C_2) \end{aligned}\right\} \text{Concourantes}$$



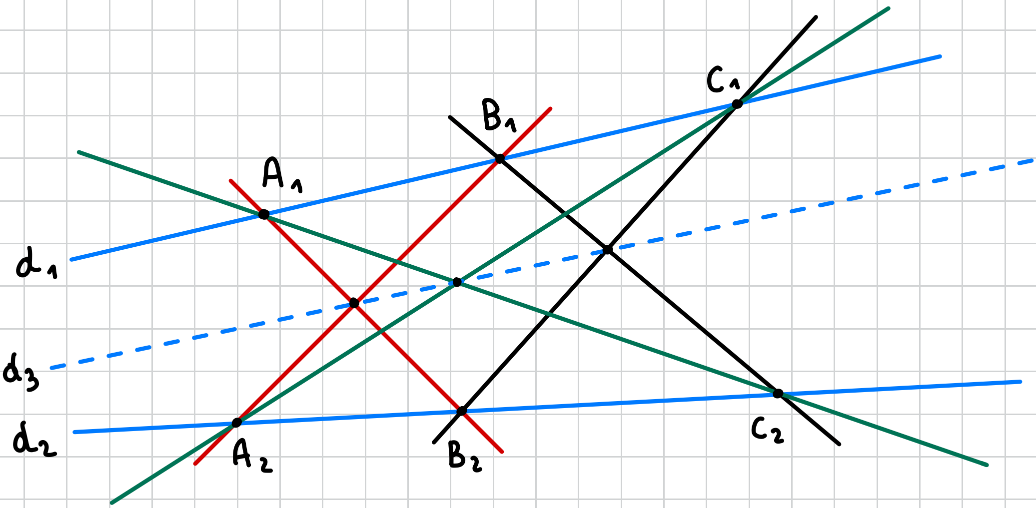
1. **Déterminer la droite passant par le point A_1 et C_1**
2. **Faire de même entre A_2 et C_2**
3. **Déterminer le point d'intersection de ces 2 droites**
4. **Faire de même entre A_1 et B_1, A_2 et B_2 et entre C_1 et B_1, C_2 et B_2**
5. **Déterminer d_4 passant par les 3 points trouvés (2 points = 1 droites, puis vérifier avec le 3e point)**

- **Théorème dual de Desargues**

Si les côtés respectifs de 2 triangles se coupent en 3 points alignés, alors, les sommets respectifs des 2 triangles formeront 3 droites concourantes.

- **Théorème de Pappus**

2 triples de points alignés sur 2 droites, si je relis les points entre eux, les 3 points d'intersections seront alignés.

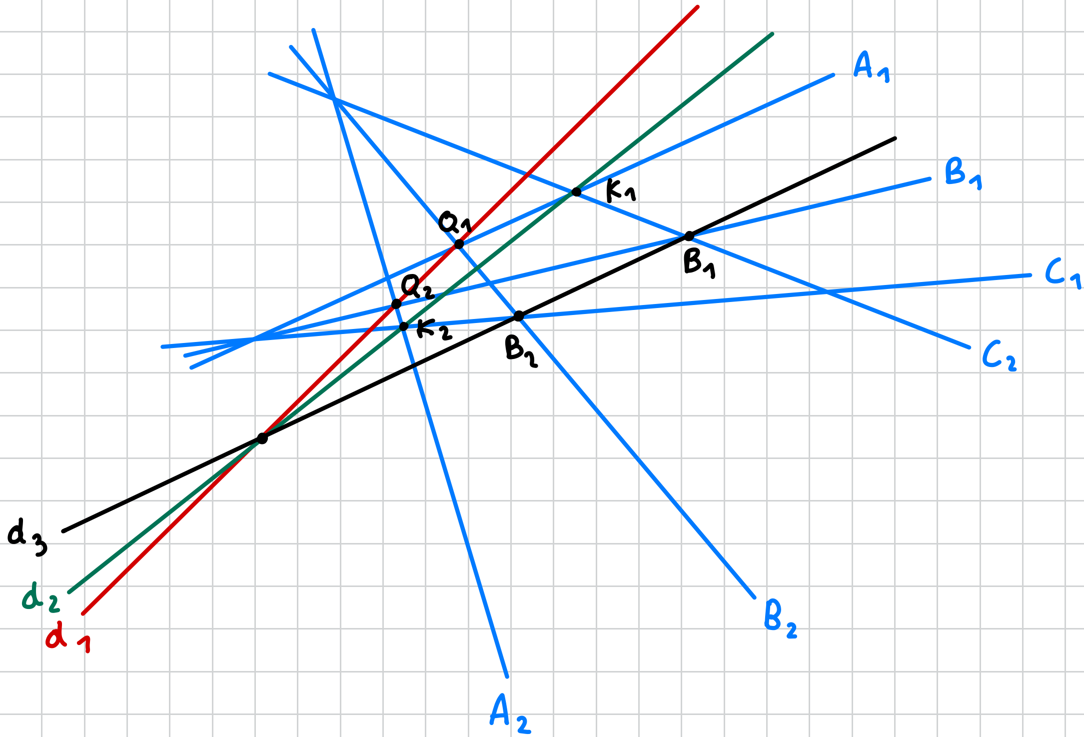


$d_1 : (A_1, B_1, C_1)$

$d_2 : (A_2, B_2, C_2)$

1. **Trouver la droite passant par A_1 et B_2**
2. **Trouver la droite passant par B_1 et A_2**
3. **Déterminer le point d'intersection des 2 droites trouvées**
4. **Faire de même entre A_1 et C_2, C_1 et A_2 et entre B_1 et C_2, C_1 et B_2**
5. **Déterminer d_3 passant par les 3 points trouvés (2 points = 1 droites, puis vérifier avec le 3e point)**

- **Théorème dual de Pappus**



Dual = « 3 points alignés = 3 droites concourantes »

1. **La droite passant par A_1 et B_2 devient le point Q_1** d_1
2. **La droite passant par B_1 et A_2 devient le point Q_2**
3. **La droite passant par A_1 et C_2 devient le point K_1** d_2
4. **La droite passant par C_1 et A_2 devient le point K_2**
5. **La droite passant par B_1 et C_2 devient le point B_1** d_3
6. **La droite passant par C_1 et B_2 devient le point B_2**
7. **Trouvez l'équation de la droite d_1 à partir des points Q_1 et Q_2**
8. **Répéter l'opération pour trouver les équations des droites d_2 et d_3**
9. **Trouver le point d'intersection des 3 droites trouvées (2 droites = 1 points puis vérifier avec la 3e droite)**

- **Les projectivités**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

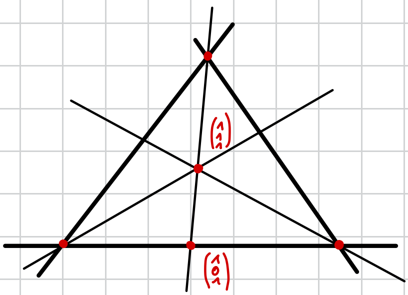
Une matrice permet de définir une projectivité

Dans la matrice est inversible si son déterminant est différent de 0

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}$$

Les projectivités sont des transformations bizarres qui conservent les birapport

Une projectivité qui fixe 4 points non alignés (3 à 3), fixe l'ensemble du plan :



La solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas être prise en compte car n'est pas dans le plan projective.

- Points fixes

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

→ Point qui ne bouge pas suite à des mouvements du plan

$$\begin{cases} ax + by + cz = \lambda x \\ dx + ey + fz = \lambda y \\ gx + hy + iz = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x + by + cz = 0 \\ dx + (e-\lambda)y + fz = 0 \\ gx + hy + (i-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix} = 0}$$

= $a + b + c = 0$

= $x + y + z = 0$

Polynôme de 3e degré en λ, il existe toujours au moins 1 solution

- Exemple : déterminer les points fixes de cette projectivité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ 2y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(2-\lambda)^2$$

$$(1-\lambda).(2-\lambda)^2 = 0$$

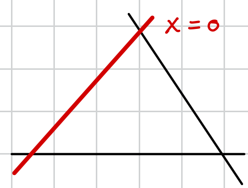
$$(1-\lambda).\big((2-\lambda).(2-\lambda)\big) = 0$$

Produits remarquables

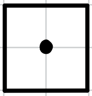
$$\underbrace{(1-\lambda)}_{\lambda = 1}.\underbrace{(4-4\lambda-\lambda^2)}_{\lambda = 2} = 0$$

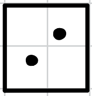
Avec 1 :
$$\begin{cases} 0x = 0 \\ (2-1)y = 0 \\ (2-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

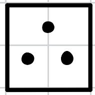
Avec 2 :
$$\begin{cases} (1-2)x = 0 \\ (2-2)y = 0 \\ (2-2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

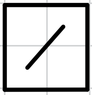


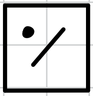
- Possibilités de points fixes d'une projectivité :

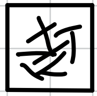

1 point


2 points

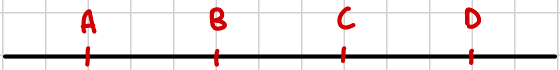

3 points non alignés


1 droite


1 point et 1 droite


1 plan

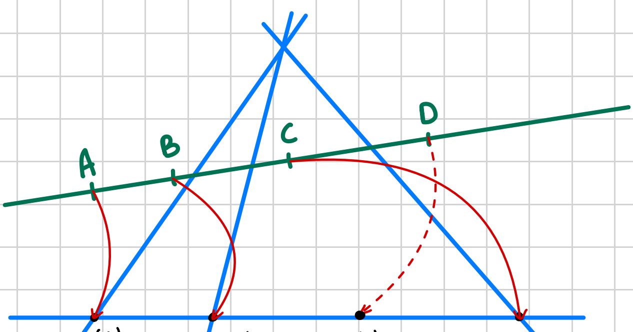
- **Birapport**



$$(A,B;C,D) = \frac{\frac{AD}{BD}}{\frac{AC}{BC}}$$

ou

$$k = (A,B;C,D)$$



$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

- Déterminer le birapport de ces 4 points alignés :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$ Droite de points alignés

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ e + f = 0 \\ h + i = \lambda \end{cases} \qquad \begin{matrix} c = -b \\ f = -e \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -b\\ d & e & -e\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 2b - b = \lambda \\ 2d + 2e - e = 0 \\ 2g + 2h + i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + b = \lambda \\ e = -2d \\ i = -2g - 2h \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -d\\ d & -2d & 2d\\ g & h & -2g-2h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 5b - b = \lambda \\ 4d - 6d + 2d = 0 \\ 4g + 3h - 2g - 2\lambda = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a + 2b = \lambda \\ 0 = 0 \\ 2g + h = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -b\\ d & -2d & 2d\\ g & h & -g-2h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b\\0\\2g+h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b\\0\\4a+2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2a+b}{4a+2b}\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$k = 1/2$

- Différents birapports

$$(A,B;C,D) = k = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$(B,A;C,D) = \frac{1}{k} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$(A,C;B,D) = \frac{k}{k-1}$$

$$(C,B;A,D) = 1-k$$

$$(B,C;A,D) = \frac{1}{1-k}$$

$$(D,B;C,A) = \frac{k}{k-1}$$

$$(D,B;A,C) = \frac{k-1}{k}$$

- Exemple :

$$(D,B;C,A) = \frac{k}{1-k}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ak + c = 0 \\ dk + f = 0 \\ gk + i = \lambda \end{cases} \qquad \begin{matrix} c = -ak \\ f = -dk \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -ak\\ d & e & -dk\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \lambda \\ d = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -ak\\ 0 & e & -dk\\ 0 & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - ak = \lambda \\ -dk = 0 \\ i = \lambda \end{cases} \qquad i = -ak$$

$$\begin{pmatrix}a & b & -ak\\ 0 & e & 0\\ 0 & h & a-ak\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

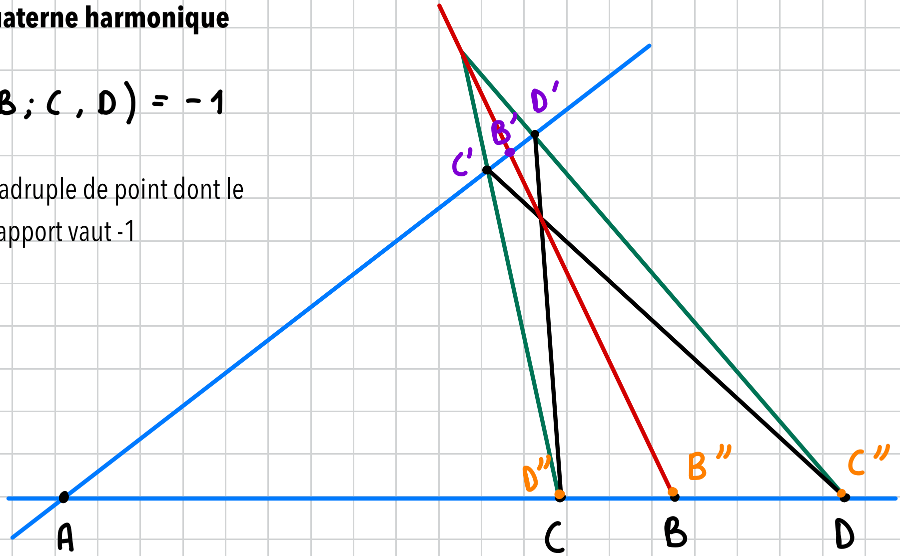
$$= \begin{pmatrix}-ak\\0\\a-ak\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k\\0\\1-k\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{-k}{1-k}\\0\\1\end{pmatrix}$$

- **Quaterne harmonique**

$$(A, B; C, D) = -1$$

Quadruple de point dont le birapport vaut -1



$$\underbrace{(A,B;C,D)}_{k} = (A, B'; C', D') = (A, B''; C'', D'') = \underbrace{(A, B; D, C)}_{1/k}$$

$$k = \frac{1}{k}$$

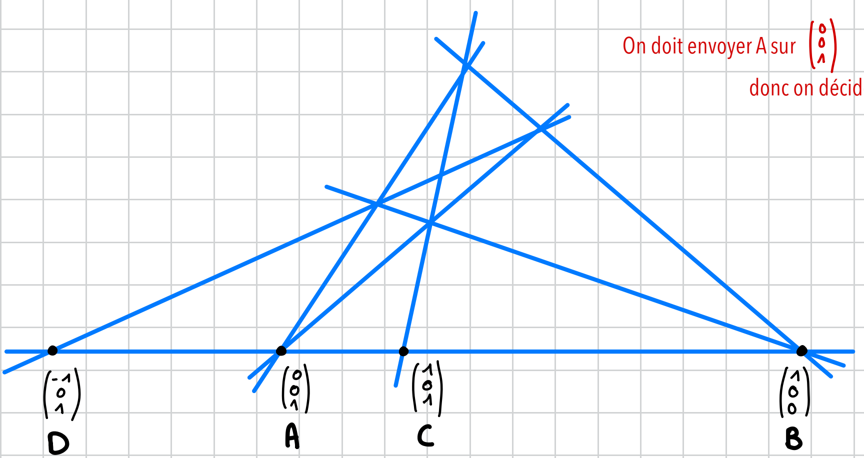
$$k^2 = 1$$

$k = \cancel{\pm}\, 1$ → Le point $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ existe déjà donc 1 ne peut pas être prit

$$k = -1$$

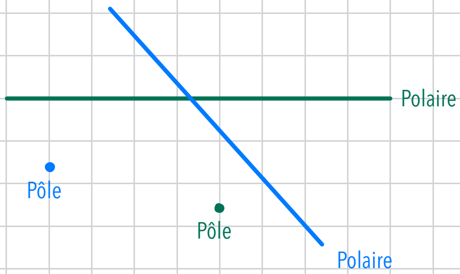
On doit envoyer A sur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

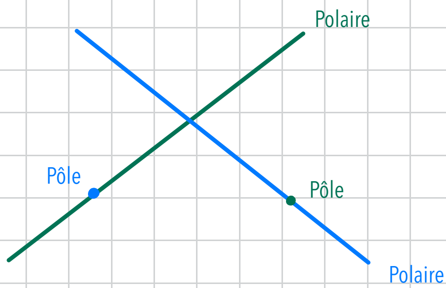
donc on décide que A = $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



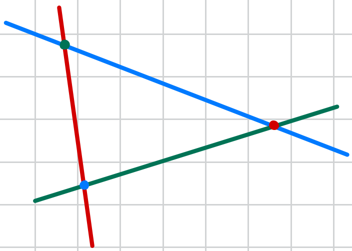
3. Coniques

- **Polarité**

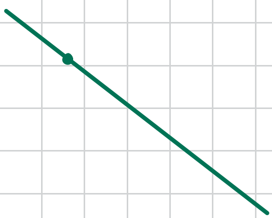




• et • sont conjugués



Conjugués = être sur la polaire l'un de l'autre



• est conjugués à lui-même

- Définir une polarité :

Quelque chose qui associe à tout point, une droite et réciproquement (pôle et polaire).

$$ {}^t\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \qquad (a\ b\ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 $$

$$ ax + by + cz = 0 $$

$$^t\Big[\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}}_{\text{Polarité}}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\text{Pôle}}\Big] = {}^t\begin{pmatrix}7\\3\\6\end{pmatrix} = \underbrace{(7,3,6)}_{\text{Polaire}}$$

$$(7\ 3\ 6)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \neq 0$$

Alors le pôle n'est pas sur la polaire

$$\underbrace{^t\Big[\underbrace{\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}}_{\text{Polarité}}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\text{Pôle}}\Big]}_{\text{Polaire}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

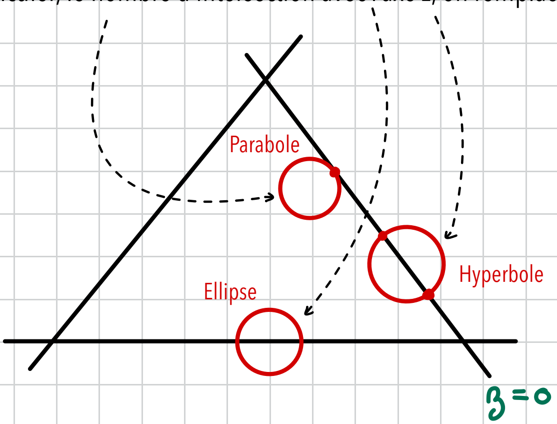
Pour que le pôle soit sur sa propre polaire (donc est sur la conique)

$$^t\Big[\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Big]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz = 0}$$

Équation générale d'une conique pour une polarité donnée.

- Pour calculer, le nombre d'intersection avec l'axe z, on remplace z par 0.



$$\begin{cases} ax^2 + dy + 2bxy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

● = intersection avec l'axe z

$$\begin{cases} ax^2 + dy^2 + 2bxy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$a = a$$
$$b = 2by$$
$$c = dy^2$$

$$x = \frac{-2by \pm \sqrt{(2by)^2 - 4a\,dy^2}}{2a}$$
$$= \frac{-2by \pm \sqrt{4b^2y^2 - 4ady^2}}{2a}$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ad}}{a} \cdot y$$

Si $\begin{cases} \Delta = \ominus & \text{ellipse (car pas de solution)} \\ \Delta = 0 & \text{parabole} \\ \Delta = \oplus & \text{hyperbole} \end{cases}$

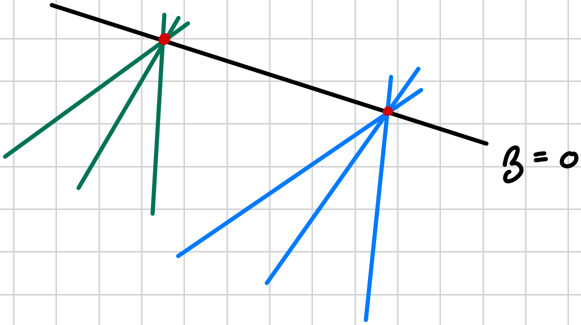
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} = ad - b^2$$

- > 0
- $= 0$
- < 0

- **Vocabulaire**

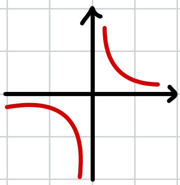
Conjugués : être sur la polaire l'un de l'autre.
Directions : points de la droite z = 0.
Asymptotique : points d'intersection d'une conique avec la droite z = 0.
Asymptote : polaires des directions asymptotiques.
Centre d'une conique : pôle de la droite z = 0.
Axes de symétries : polaires des directions conjugué perpendiculaire.
Diamètres : polaires des directions.
Sommet : les points d'intersections de la conique avec les axes de symétries.
Conique : l'ensemble des points qui sont conjugués à eux-mêmes par une polarité donnée

- Directions :



- Asymptotes :

$$y = \frac{1}{x} \implies$$



$$xy = 1$$

$$xy - 1 = 0$$

$$xy - 1z^2 = 0$$

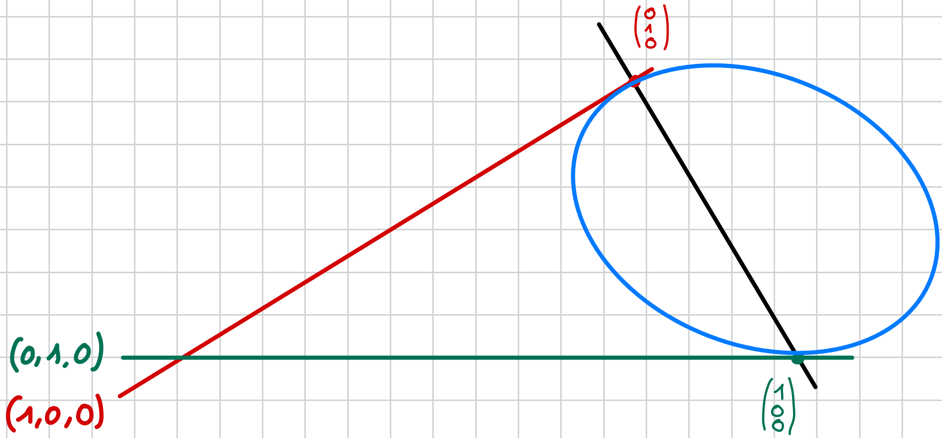
Il faut avoir une équation du second degré donc on multiplie les facteurs qui ne sont pas du second degré par z ou z carré.

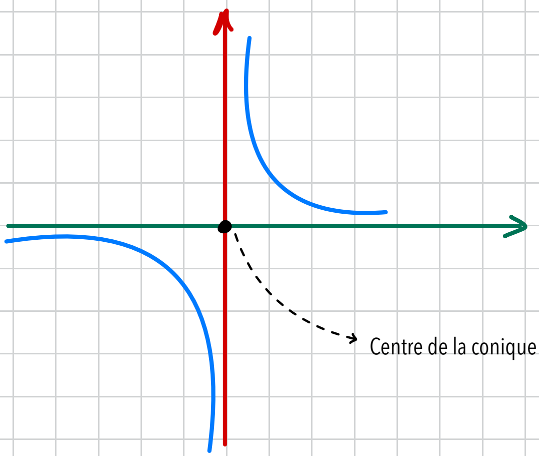
$$\underset{0}{ax^2} + \underset{1}{2bxy} + \underset{0}{2cxz} + \underset{0}{dy^2} + \underset{0}{2eyz} + \underset{-1}{fz^2} = 0$$

$$\begin{cases} 2xy - 2z^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

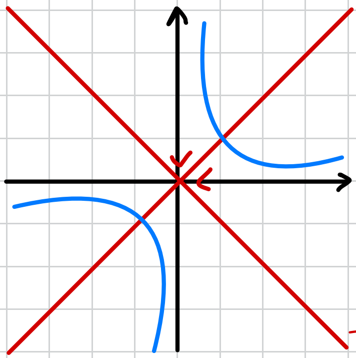
$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$ directions asymptomatiques

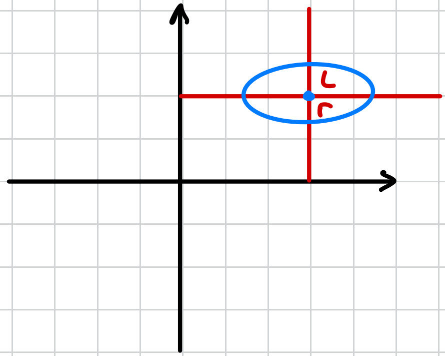
$$\left.\begin{aligned}
&{}^t\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1,0,0)\\
&{}^t\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (0,1,0)
\end{aligned}\right\}\ \text{POLAIRES}$$





- Axes de symétries :





$$\underbrace{{}^t\left[\underbrace{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}}_{\text{Polarité}}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}}_{\text{Direction}}\right]}_{\text{Polarité d'une direction}}\begin{pmatrix}y\\-x\\0\end{pmatrix}=0$$

Tous les points qui vérifie, cette équation, seront des directions conjuguées perpendiculaires.

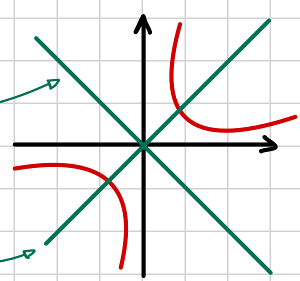
- Exemple :

$${}^t\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right]=(x,y,0)$$

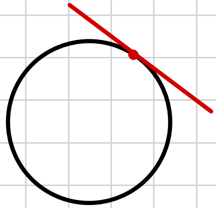
$$(x,y,0)\begin{pmatrix}y\\-x\\0\end{pmatrix}=0 \qquad y^2-x^2=0 \begin{cases} y=x & \begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\ y=-x & \begin{pmatrix}x\\-x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

$${}^t\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\underbrace{(1,1,0)}_{\to\ x+y=0}$$

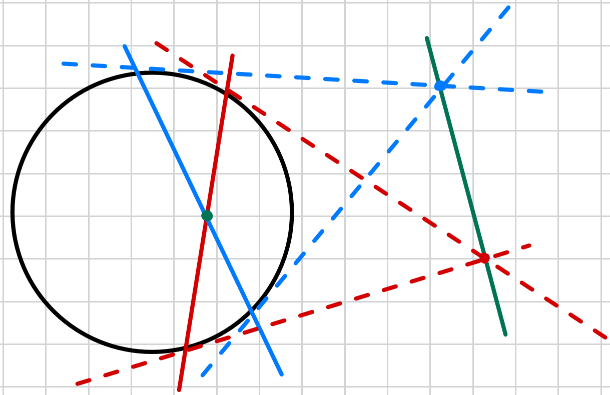
$${}^t\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]=\underbrace{(-1,1,0)}_{\to\ -x+y=0}$$



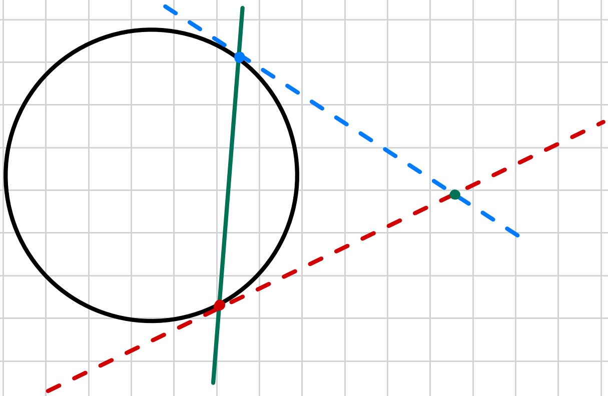
- **Exercices coniques**



Trouver la polaire d'un point sur la conique.

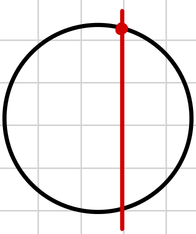


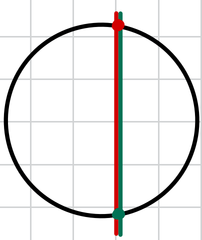
Trouver la polaire d'un point au dans la conique.

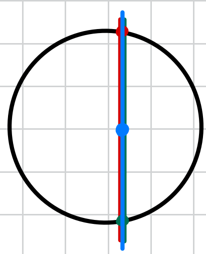


Trouver la polaire d'un point en dehors de la conique.

- Démonstration par l'absurde (par l'absurde, on va déterminer que la polaire n'est pas tangente mais sécante à la conique) :







1. • est sur la conique donc par définition est conjugué à elle même

2. • est sur la polaire de • donc est conjugué à • et inversement

3. • est sur la polaire de • et de • donc sa polaire passe par • et • donc • est sur sa propre polaire (mais c'est impossible car n'est pas sur la conique)

- Exercice d'examen :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

Homogénéiser

$$x^2 - yz = 0$$

On multiplie par 2 pour éviter les 1/2 dans la matrice

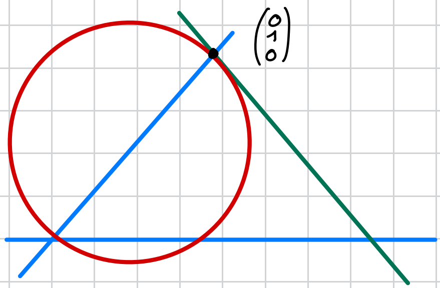
$$2x^2 - 2yz = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{Parabole}$$

Directions asymptomatiques :

$$\begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Polaires (= asymptotes) :

$$^t\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (0, 0, -1)$$

$$0x + 0y - z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Axe de symétrie :

$$^t\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} = 0$$

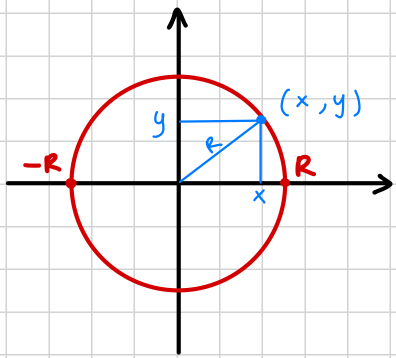
$$(2x \;\; 0 \;\; -y)\begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$2xy = 0 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Directions conjuguées perpendiculaires}} \qquad z = 0$$

$$^t\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (2, 0, 0)$$

$X = 0 \rightarrow$ Axe de symétrie

- Cercle :



$$\underbrace{x^2 + y^2 = R^2}$$

Équation générale d'un cercle de rayon R

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Homogénéiser

$$x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow \text{ellipse}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Majesté Yosha, abordons les points fixes d’une **isométrie** dans le contexte d’un plan projectif.

Définition et cadre :

- Une **isométrie** est une transformation qui conserve les distances.
- Dans un **plan projectif**, les points et les droites sont étendus par des relations d’incidence et des propriétés homogènes.

Dans le cas du plan projectif, les isométries incluent les transformations qui préservent les propriétés métriques tout en étant définies sur des coordonnées homogènes. Ce cadre inclut des transformations comme les rotations, les réflexions et les translations (dans une version adaptée au plan projectif).

Analyse des points fixes :

1. **Points fixes dans une rotation :**

- Une rotation conserve un unique point fixe dans le plan projectif. Ce point est le **centre de rotation**.
- Exemple : Si l’on considère une rotation d’angle , elle fixe un point dans le plan, visible comme l’intersection des axes invariants.

2. **Points fixes dans une réflexion :**

- Une réflexion conserve une droite entière comme point fixe, appelée **axe de réflexion**.
- Dans le contexte projectif, chaque point sur cette droite peut être vu comme un point fixe. De plus, le point à l’infini associé à la direction perpendiculaire est aussi fixe.

3. **Points fixes dans une translation :**

- Une translation ne fixe aucun point dans le plan affine ordinaire.
- Dans un cadre projectif, cependant, le **point à l’infini** associé à la direction de la translation est fixé. Cela traduit l’idée que, même sous une translation, une direction globale reste inchangée.

4. **Points fixes d’une involution :**
- Une involution est une transformation d’ordre 2 (son application deux fois donne l’identité).
- Dans un plan projectif, une involution possède **exactement deux points fixes distincts**. Ces points fixes sont appelés les **points doubles** de l’involution.

Cas particulier des transformations projectives dégénérées :

Dans un cadre projectif, il existe des transformations qui ne sont pas bijectives sur le plan affine mais qui, dans l’espace projectif, conservent des propriétés d’invariance. Par exemple :
- Une homologie (transformation ayant une droite et un point fixe) fixe une **droite entière** et un point particulier.

Conclusion :

Les points fixes d’une isométrie dans le cadre projectif dépendent de la nature spécifique de la transformation :
- Une rotation fixe un point.
- Une réflexion fixe une droite entière.
- Une translation fixe un point à l’infini.
- Une involution fixe exactement deux points distincts.

Le contexte projectif enrichit l’analyse par l’inclusion des points à l’infini, offrant une vision unifiée et plus générale des transformations géométriques.