Synthèse – Examen de mathématiques

Enzo Pisaneschi

Juin 2025

Table des matières

1 Calculette **1**

2 Dérivations **2**
2.1 Rappel des formules : 2

3 Calcul intégrale **3**
3.1 Formules : 3
3.2 Primitives à connaître : 3
3.3 Intégration par parties : 4
3.4 Intégration par fractions partielles : 4
3.5 Intégrale définie : 8
A. Calcul sous la courbe 8
B. Solides de révolution 10
C. Longueur de courbe 12

4 Suites numériques **14**
4.1 Arithmétiques et géométriques : 14

5 Algèbre financière **17**

6 Dénombrement/combinatoire **20**
6.1 Arrangements et combinatoire : 20
A. Réflexion préalable à chaque calcul 20
6.2 Combinatoires à connaitre : 21
6.3 Binôme de Newton : 21
B. Démonstration du bionôme de Newton 21

7 Séries **23**

8 Statistique **24**
8.1 Droite de régression linéaire : 24

9 Distribution de probabilités **26**
9.1 Loi binomiale de Bernoulli : 26
9.2 Loi normale : 27

10 Probabilité **29**
10.1 Axiomatique de Kolmogorov : 29
10.2 Probabilité conditionnelle : 30

1 Calculette

Utiliser la fonction factorielle $x!$

- Aller dans le menu : `MENU > EXE MAT`
- Aller dans : `OPTN > F6 > F3` (PROB)
- Appuyer sur : `F1` pour sélectionner $x!$

Calcul de combinaison C_m^n et d'arrangement A_m^n

- Aller dans le menu : `MENU > EXE MAT > OPTN > F6 > F3` (PROB)
  - **Calculer une combinaison C_m^n** :
    - Entrer le nombre n (nombre total d'objets)
    - Appuyer sur `F3` pour sélectionner nCr
    - Entrer le nombre m (nombre d'objets choisis)
    - Exemple : pour calculer $\boldsymbol{C_3^{10}}$, taper `10 F3 3`
  - **Calculer un arrangement A_m^n** :
    - Entrer le nombre n (nombre total d'objets)
    - Appuyer sur `F2` pour sélectionner nPr
    - Entrer le nombre m (nombre d'objets choisis)
    - Exemple : pour calculer $\boldsymbol{A_3^{10}}$, taper `10 F2 3`

Étude statistique ($\bar{x}$, σ, etc.)

- Aller dans le menu : `MENU > STAT > F2` (CALC) `> F6` (RÉGL)
- `ListeX 1Var` : deux méthodes possibles pour entrer les données :
  - **Méthode 1 — Inscrire chaque donnée, y compris les répétitions** :
    Exemple : `2, 4, 6, 6, 6, 3, ...`
    → Dans ce cas, on met : `Eff 1Var = 1`
  - **Méthode 2 — Inscrire une seule fois chaque donnée et utiliser une 2e colonne pour les effectifs** :
    Liste 1 : `2, 4, 6, 3`
    Liste 2 : `1, 1, 3, 1` (nombre de répétitions)
    → Dans ce cas, on met : `Eff 1Var = Liste 2`

Notation exacte dans la calculatrice

ListeX 1Var	:	Liste1
Eff 1Var	:	1 **ou** Liste2 *(Seul paramètre à changer en fonction de la méthode)*
ListeX 2Var	:	Liste1
ListeY 2Var	:	Liste2
Eff 2Var	:	1

Calcul intégrale définie

— Aller dans le menu : `MENU > EXE MAT`
— Appuyer sur : `F4 (MATH) > F6 > F1`

Trouver les points d'intersection entre deux courbes

— Aller dans le menu : `MENU > GRAPHE`
— Indiquer les équations
— Appuyer sur : `F5 > F5` (ISCT)

Dézoomer et zoomer dans GRAPHE

— **Pour dézoomer :**
  — Aller dans le menu : `MENU > GRAPHE`
  — Lorsque vous êtes sur votre graphique
  — Appuyer sur : `F3 > F1` (INIT)
— **Pour zoomer :**
  — Aller dans le menu : `MENU > GRAPHE`
  — Lorsque vous êtes sur votre graphique
  — Appuyer sur : `F2 > F1` (BOÎT)
  — Lorsque vous êtes sur votre graphique, rendez-vous sur la fonction à l'endroit où vous voulez zoomer
  — Appuyer sur : `EXE > bougez les flèches pour former un cadre où vous voulez zoomer > EXE`

2 Dérivations

2.1 Rappel des formules :

— $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
— $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
— $(f(x)^a)' = a \cdot f'(x) \cdot f(x)^{a-1}$
— $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
— $(\sin U)' = U' \cdot \cos U$
— $(\cos U)' = -U' \cdot \sin U$
— $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$
— $(\ln^2 |x|)' = \dfrac{2 \ln |x|}{x}$
— $(e^U)' = U' \cdot e^U$

3 Calcul intégrale

3.1 Formules :

- $\displaystyle\int x^N\,dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} + C, \quad N \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{\ln^N|x|}{x}\,dx = \frac{\ln^{N+1}|x|}{N+1} + C, \quad N \neq -1$
- $\displaystyle\int \cos(x)\,\sin^N(x)\,dx = \frac{\sin^{N+1}(x)}{N+1} + C, \quad N \neq -1$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\displaystyle\int (ax+b)^N\,dx = \frac{1}{a(N+1)}(ax+b)^{N+1} + C, \quad N \neq -1$
- $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right) + C$
- $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + C$

3.2 Primitives à connaître :

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$
- $\displaystyle\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = x\ln|x| - x + C$
- $\displaystyle\int \ln^2|x|\,\mathrm{d}x = x\left(\ln^2|x| - 2\ln|x| + 2\right) + C$
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln|x^2+1|}{2} + C$
- $\displaystyle\int \frac{x^2(+1-1)}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \arctan(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int (x - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + C$
- $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx = x\ \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\ \arctan(x) - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \csc(x)\,dx = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + C$

— $\displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)| + C$

3.3 Intégration par parties :

$$\int U'V\,dx = UV - \int UV'\,dx$$

Conseils pour choisir U' et V en intégration par parties

— **Cas avec logarithmes :**
Pour $\displaystyle\int x^N \ln^M|x|\,dx$, posez

$$U' = x^N \quad \text{et} \quad V = \ln^M|x|$$

afin de faciliter l'intégration.

— **Cas avec fonctions trigonométriques ou exponentielle :**
Pour

$$\int x^N \cos(x)\,dx, \quad \int x^N \sin(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad \int x^N e^x\,dx,$$

posez

$$V = x^N.$$

3.4 Intégration par fractions partielles :

$$\begin{aligned}
\int \frac{26x+9}{(3x+2)(x-1)}\,dx &= \int \frac{A}{3x+2}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx \\
&= \int \frac{A(x-1)}{(3x+2)(x-1)}\,dx + \int \frac{B(3x+2)}{(x-1)(3x+2)}\,dx \\
&= \int \frac{A(x-1)+B(3x+2)}{(3x+2)(x-1)}\,dx
\end{aligned}$$

$$26x + 9 = Ax - A + 3Bx + 2B$$

$$\begin{cases} A + 3B = 26 \\ -A + 2B = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = 7 \end{cases}$$

$$= \int \frac{5}{3x+2}\,dx + \int \frac{7}{x-1}\,dx = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + 7\ln|x-1| + C$$

Remarque 1 — Dénominateur non factorisé

Lorsque le dénominateur n'est pas factorisé, on cherche ses racines réelles afin de le réécrire sous forme factorisée :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Cela facilite l'application de la méthode des fractions partielles pour intégrer

Remarque 2 — Division euclidienne

Pour une intégration par fractions partielles, lorsque le dénominateur n'a pas un degré strictement plus grand que le numérateur, il faut réaliser une division euclidienne et travailler avec le reste obtenu.
Pour la réalisation de cette intégrale, nous avons premièrement réalisé une division euclidienne et avons obtenu comme reste x.

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + C$$

Remarque 3 — Degrés du dénominateur

Lorsque le dénominateur contient un facteur élevé à une puissance, il faut penser à faire apparaître tous les degrés possibles jusqu'à celui-ci pour réaliser correctement l'intégration par fractions partielles.

Exemple avec $P^3(x)Q^2(x)$ comme dénominateur :

$$\frac{N(x)}{P^3(x)Q^2(x)} = \frac{A}{P(x)} + \frac{B}{P^2(x)} + \frac{C}{P^3(x)} + \frac{D}{Q(x)} + \frac{E}{Q^2(x)}$$

Cela s'applique quel que soit le degré du facteur : il faut toujours faire apparaître chaque puissance inférieure jusqu'à la plus élevée.

Reprenons un exemple étape par étape, dont le dénominateur est de degré 3 :

Étape 1 — Mise au même dénominateur

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(2x+3)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{C}{2x+3}\,dx$$

On met les trois termes au même dénominateur :

$$= \int \frac{A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)}\,dx$$

Car

$$\frac{A(x-1)(2x+3)}{(x-1)^2(2x+3)} = \frac{A}{x-1}$$

On fait de même pour B et C afin de mettre tous les termes sur le même dénominateur.

Étape 2 — Trouver les coefficients

On égalise les numérateurs :

$$1 = A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^2$$

En développant :

$$1 = A(2x^2 + x - 3) + B(2x+3) + C(x^2 - 2x + 1)$$

Soit :

$$1 = 2Ax^2 + Ax - 3A + 2Bx + 3B + Cx^2 - 2Cx + C$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A + 2B - 2C = 0 \\ -3A + 3B + C = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{2}{15} \\ C = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Étape 3 — Remplacer et résoudre l'intégrale par fractions partielles

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(2x+3)}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{2}{15(x-1)} + \frac{1}{5}\ln|2x+3| + C$$

Remarque 4 — Dénominateur non-factorisable sans racines réelles

Dans ce cas, il faut vérifier s'il ne s'agit pas simplement d'une primitive de type $\arctan(x)$ ou $\ln|x|$.

Exemples de primitives où le dénominateur est non factorisable (et ne comporte pas de racines réelles) :

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1|$$

Dans le cas où il ne s'agit pas d'une primitive connue, nous devons réaliser une intégration par fractions partielles, dans laquelle nous allons rajouter au numérateur un terme du premier degré, x.

Voici un exemple concret, étape par étape, où le dénominateur est déjà factorisé :

$$\int \frac{2x+3}{x(x^2+1)}\,dx$$

Étape 1 — Décomposition en fractions partielles

$$\frac{2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Étape 2 — Mise au même dénominateur

$$= \int \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}\,dx$$

Étape 3 — Trouver les coefficients On égalise les numérateurs :

$$2x+3 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 2 = C \\ 3 = A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 3 \\ C = 2 \\ B = -3 \end{cases}$$

Étape 4 — Remplacement et résolution de l'intégrale par fractions partielles

On remplace les constantes trouvées dans l'expression :

$$\int \frac{2x+3}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-3x+2}{x^2+1}\,dx$$

On intègre terme à terme :

$$3\ln|x| + \int \frac{-3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan(x) + C$$

Résultat final :

$$\int \frac{2x+3}{x(x^2+1)}\,dx = 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan(x) + C$$

3.5 Intégrale définie :

A. Calcul d'air

Pour déterminer l'aire située entre une courbe et l'axe des abscisses (OX), nous utilisons une intégrale définie entre deux bornes. On note a le point de départ de la zone à calculer, et b son extrémité. La formule à retenir est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple — Calcul sous la courbe

Nous cherchons à définir l'aire finie comprise entre la courbe définie par la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et l'axe des abscisses (OX).

Etape 1 — Déterminer les bornes d'intégration (racines) :
On résout $f(x) = 0$:

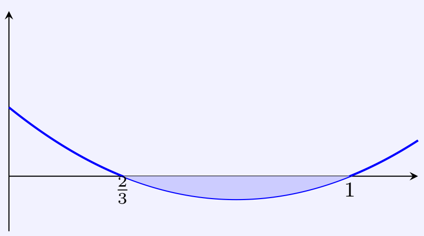
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x = 1$$

Etape 2 — Remplacer et intégrer :
Nous allons maintenant intégrer la fonction sur l'intervalle trouvé précédemment, c'est-à-dire entre $\frac{2}{3}$ et 1 :

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} (3x^2 - 5x + 2)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{5}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{27} - \frac{10}{9} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{54}$$

L'aire sous la courbe est donc égale à $\frac{1}{54}$ **:**



Dans le cas où il nous est demandé de déterminer l'aire comprise entre deux courbes, nous allons utiliser la formule suivante :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

À savoir que f doit être la fonction située au-dessus de g.

La résolution à effectuer est donc similaire, mais elle passe par une étape préalable : il faut trouver les bornes, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes. Pour cela, deux méthodes sont possibles :

— **Méthode 1** – Si les fonctions sont relativement simples, poser et résoudre l'égalité suivante :

$$f(x) = g(x)$$

— **Méthode 2** – Utiliser la calculatrice en suivant le mode d'emploi présenté en début de document.

Remarque — Plus de deux points d'intersection

Dans le cas où les courbes se chevauchent plusieurs fois, donnant lieu à plus de deux points d'intersection, nous allons utiliser la formule suivante :

$$\int_a^b g - f \ dx + \int_b^c f - g \ dx + \int_c^d g - f \ dx$$

Chaque intégrale correspond à une zone délimitée entre les courbes, en tenant compte de laquelle est au-dessus dans l'intervalle considéré.

Exemple — Calcul entre courbes

Déterminer l'aire finie comprise entre les courbes $f(x) = x^2 - 5x + 2$ et $g(x) = x - 3$.

Etape 1 — Déterminer les points d'intersection :
On pose :

$$x^2 - 5x + 2 = x - 3$$

Ce qui équivaut à :

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

On résout cette équation du second degré à l'aide de la formule :

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Donc les solutions sont :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 5$$

Etape 2 — Calcul intégral défini :
Nous avons ainsi trouvé nos bornes et pouvons réaliser l'intégrale suivante :

$$\int_1^5 g(x) - f(x)\, dx = \int_1^5 (x-3) - (x^2 - 5x + 2)\, dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \frac{32}{3}$$

B. Solides de révolution

Cette méthode consiste à faire tourner une fonction autour de l'axe des abscisses, créant ainsi un volume. À partir de cela, nous sommes capables de déterminer le volume ou la surface (l'aire) générée par cette fonction.

Formule — Calcul de volume

La formule pour calculer le volume d'un solide de révolution autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Formule — Calcul de surface

La formule pour calculer la surface d'un solide de révolution autour de l'axe des abscisses est :

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$$

Pour représenter les différents solides de révolution, on utilise les fonctions suivantes selon la forme souhaitée :

— Cylindre : $y = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$)
— Cône : $y = \frac{R}{h}x$ (h étant la hauteur du cône)
— Sphère : $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ (rappel : équation d'un cercle $x^2 + y^2 = R^2$)

Exemple — Calcul d'un volume d'un cône

Déterminons le volume d'un cône de rayon 5 et de hauteur 10.

Remarque : Il est important de comprendre que le cône va être « renversé » pour permettre de le créer en faisant tourner autour de l'axe des abscisses uniquement une droite. C'est pour cela que, dans ce cas-ci, la hauteur s'étend entre $(0, 0)$ et $(10, 0)$, et le rayon entre $(10, 0)$ et $(10, 5)$.

Étape 1 — Déterminer la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{5}{10}x = \frac{1}{2}x$$

Étape 2 — Intégrer $f(x)$ dans la formule :
On remplace dans la formule de calcul du volume :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Soit ici :

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = 261{,}8 \quad \text{unités de volume}$$

Remarque : Bien évidemment, ce calcul est réalisable uniquement à la calculatrice, en suivant le mode d'emploi disponible au début de ce document.

Exemple — Calcul de la surface d'une sphère

Déterminons la surface (aire) d'une sphère de rayon 1.

Étape 1 — Déterminer la fonction :
Avec $R = 1$, on remplace dans la fonction d'une sphère :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

Étape 2 — Déterminer la dérivée de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Étape 3 — Déterminer les bornes :
Avec $R = 1$, les bornes les plus simples sont $a = -1$ et $b = 1$.

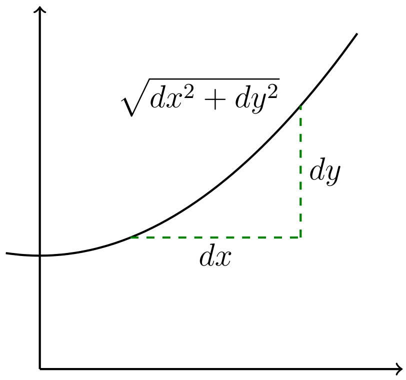
Étape 4 — Remplacer dans la formule :

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = 4\pi$$

C. Longueur de courbe

Le schéma ci-dessous illustre la formule de la longueur d'une courbe en reliant le déplacement horizontal dx, vertical dy et la longueur infinitésimale.



Formule — Longueur de courbe

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Exemple — Calcul longueur de courbe

Déterminons la longueur de la courbe $y = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$

La formule de la longueur d'une courbe est :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)}\, dx = 3,82$$

Remarque : Bien penser à inscrire $\big(\cos(x)\big)^2$ et non $\cos^2(x)$ dans la calculatrice.

D. Questions possibles

— Résoudre pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^\lambda (2x + 1)\, dx = 10$$

Aide : $\lambda > 1$ car l'intégrale doit être positive (valeur donnée = 10).
Réponse : $\lambda = 3$

— Démontrer que le volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$, à l'aide du calcul intégral :

Aide : f(x) = $\sqrt{R^2 - x^2}$ entre $-R$ et R.
Réponse : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

— Idem pour le volume d'un cône :

Réponse : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

— Soit un verre à champagne (en forme de cône) de 2 cm de rayon et 10 cm de hauteur.

1. Déterminer le volume total du verre (avec unité).
2. Déterminer ensuite le volume du verre lorsqu'il est rempli à la moitié de sa hauteur.

Aide : Pour la demi-hauteur, poser $\int_0^5 f(x)\,dx$ = demi-volume.
Réponses :

— $\frac{40\pi}{3}$ cm^3
— $\frac{5\pi}{3}$ cm^3

— Déterminer à l'aide du calcul intégral l'aire finie comprise entre les trois droites suivantes : $y = x$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$, et $y = 2x - 5$.

Aide : Poser :

$$\int_{4/3}^{14/5} \left(x - \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)\right) dx + \int_{14/5}^{5} (x - (2x - 5))\, dx$$

Réponse : 4,033 (unité de surface)

— Résoudre l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x^2 + 5x + 7}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\, dx$$

Aide : Poser une décomposition en éléments simples sous la forme :

$$\frac{3x^2 + 5x + 7}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2}$$

Réponse : $\ln(x^2 + 1) - \frac{5}{2}\arctan(x) - 2\ln|x - 1| - \frac{15}{2(x-1)} + C$

4 Suites numériques

4.1 Arithmétiques et géométriques :

	Arithmétique	**Géométrique**
Raison	$r = u_{n+1} - u_n$	$q = \frac{u_{n+1}}{u_n},\ u_n \neq 0$
Explicite	$u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
Récurrence	$u_1 = \alpha$ $u_n = u_{n-1} + r$	$u_1 = \alpha$ $u_n = u_{n-1} \cdot q$
Somme	$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r$	$S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1$
Moyenne	$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$	$u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot u_{n+2}}$

Remarques

- Pour les sommes, on trouve n à l'aide de la formule explicite.
- La somme S de u_a à u_c = u_a à u_c − u_a à u_b

Ci-dessous se trouvent les corrections du contrôle sur les suites numériques (groupe X. Bruffaerts) pour les exercices 4, 5 et 6.

Exemple — Suite géométrique

Données issues de l'énoncé :
$q = 2$, somme des 10 premiers termes : $S_{10} = 7000$

Étape 1 – Utiliser la formule de la somme :

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \Rightarrow \quad 7000 = u_1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2}$$

$$= u_1 \cdot \frac{1-1024}{-1} = u_1 \cdot 1023 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{7000}{1023} \approx 6{,}84$$

Étape 2 – Donner le terme général :

$$u_n = 6{,}84 \cdot 2^{n-1}$$

Exemple — Suite arithmétique

Données issues de l'énoncé :
$S_{10} = 235$, somme du 4e au 12e terme : $S_{12} - S_3 = 324$

Étape 1 – Écrire les deux équations :

$$S_{10} = 5(2u_1 + 9r) = 235 \quad \Rightarrow \quad 2u_1 + 9r = 47 \quad (1)$$

$$S_{12} - S_3 = 6(2u_1 + 11r) - \frac{3}{2}(2u_1 + 2r)$$

$$= 12u_1 + 66r - 3u_1 - 3r = 9u_1 + 63r = 324 \quad (2)$$

Étape 2 – Résoudre le système :

$$2u_1 + 9r = 47 \quad ; \quad 9u_1 + 63r = 324$$

On multiplie (1) par 4,5 :

$$9u_1 + 40{,}5r = 211{,}5$$

Soustraction :

$$(9u_1 + 63r) - (9u_1 + 40{,}5r) = 324 - 211{,}5 \Rightarrow 22{,}5r = 112{,}5 \Rightarrow r = 5$$

Puis :

$$2u_1 + 9 \times 5 = 47 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1$$

Étape 3 – Déterminer le terme général :

$$u_n = 1 + (n-1)5 = 5n - 4$$

Exemple — Polynômes en progression géométrique

Données issues de l'énoncé :
Montrer que les polynômes $P_1 = x^2 - 2x + 1$, $P_2 = x^2 + x - 2$ et $P_3 = x^2 + 4x + 4$ sont en progression géométrique.

Étape 1 – Factoriser chaque polynôme :

$$P_1 = (x-1)^2 \quad ; \quad P_2 = (x+2)(x-1) \quad ; \quad P_3 = (x+2)^2$$

Étape 2 – Vérifier la relation de la moyenne géométrique :
Pour une progression géométrique, le terme du milieu vérifie :

$$P_2 = \sqrt{P_1 \times P_3}$$

Calculons :

$$\sqrt{P_1 \times P_3} = \sqrt{(x-1)^2 \times (x+2)^2} = (x-1)(x+2) = P_2$$

Conclusion : Les trois polynômes vérifient bien la formule de la moyenne géométrique, ce qui confirme que P_1, P_2 et P_3 forment une progression géométrique.

A. Questions possibles

— Soient 144 et 486 respectivement les troisième et sixième termes d'une suite arithmétique.

1. Déterminer la raison de cette suite.
2. Déterminer le premier terme de cette suite.
3. Déterminer le terme général de cette suite.
4. Déterminer le dixième terme de cette suite.

Réponses :
— $r = 114$
— $u_1 = -84$
— $u_n = 114n - 198$
— $u_{10} = 942$

— Soient 144 et 486 respectivement les troisième et sixième termes d'une suite géométrique.

1. Déterminer la raison de cette suite.
2. Déterminer le premier terme de cette suite.
3. Déterminer le terme général de cette suite.
4. Déterminer le dixième terme de cette suite.

Réponses :
— $q = 1.5$
— $u_1 = 64$
— $u_n = 64 \times (1.5)^{n-1}$
— $u_{10} = 2460,375$

— Déterminer le terme général d'une suite arithmétique de raison égale à 1 et dont la somme des 50 premiers termes vaut 700.

Réponse : $u_n = n - 11.5$

5 Algèbre financière

	Simple	Composé
Intérêt	$C' = C(1+ni)$	$C' = C(1+i)^n$

Formule — Intérêt mensuel/annuel

$$i_m = \sqrt[12]{i_A + 1} - 1$$
$$i_A = (1+i_m)^{12} - 1$$

Formule — Mensualité

$$m = C\,\frac{i_m(1+i_m)^n}{(1+i_m)^n - 1}$$

Remarque : n est le nombre d'années lorsqu'on utilise le taux annuel i_A, et le nombre de mois lorsqu'on utilise le taux mensuel i_m, c'est-à-dire uniquement dans la formule de la mensualité.

Exemples — Calculs simples

— Un commerçant malhonnête désire augmenter ses prix avant les soldes de telle sorte qu'une réduction de 30% ramène le prix au prix de départ.

$$C' \times 0,7 = C \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{0,7} \approx 1,43 \quad \Rightarrow \quad \text{augmentation de } 43\%$$

— Pendant combien de temps faut-il placer un capital C à un taux annuel $i_A = 4\%$ pour qu'il soit doublé ?

Intérêt simple :

$$C(1+0,04n) = 2C \quad \Rightarrow \quad 1 + 0,04n = 2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ ans}$$

Intérêt composé :

$$C \times (1+0,04)^n = 2C$$
$$(1,04)^n = 2$$
$$n\ln(1,04) = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,04)} \approx 17,67 \text{ ans}$$

Exemple — Calcul de mensualité

Déterminons la mensualité d'un prêt de 120 000 € d'une durée de 20 ans à un taux annuel i_A de 2,2%.

Données :
$C = 120\,000$
$n = 20$ ans
$i_A = 2{,}2\% = 0{,}022$

Étape 1 — Déterminer le taux mensuel i_m :

$$i_m = \sqrt[12]{1 + i_A} - 1 = \sqrt[12]{1{,}022} - 1 \approx 0{,}001815 = 0{,}1815\%$$

Étape 2 — Remplacer dans la formule de la mensualité :

$$m = C \times \frac{i_m(1+i_m)^{12n}}{(1+i_m)^{12n} - 1} = 120\,000 \times \frac{0{,}001815 \times (1{,}001815)^{240}}{(1{,}001815)^{240} - 1} \approx 617{,}22$$

Dès lors que nous avons déterminé la mensualité de ce prêt, réalisons un tableau d'amortissement de celui-ci.

	Mensualité	**Part d'intérêt**	**Part de capital**	**Capital restant**
0	0 €	0 €	0 €	120 000 €
1	617 €	217,80 €	399,20 €	119 600,80 €
2	617 €	217,00 €	400 €	119 200,80 €
...				1230,64 € $= y$
239	617 €	$y \times i_m$ = 2,23 €	617 - $y \times i_m$ = 614,77 €	615,88 € $= x$
240	617 €	$x \times i_m$ = 1,12 €	617 - $x \times i_m$ = 615,9 €	0 €

Dans le cas où il est demandé de calculer les derniers mois d'un tableau d'amortissement d'un prêt, il faut partir de l'égalité suivante :

$$x = m - i_m \times x$$

x étant le capital restant dû à l'avant-dernier mois.

En remplaçant avec les valeurs connues :

$$x = 617 - 1{,}001815 \times x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{617}{1{,}001815} = 615{,}88$$

Ensuite, pour déterminer la part d'intérêt et la part de capital, il suffit de remplacer x par la valeur trouvée :

Part d'intérêt :

$$x \times i_m = 615{,}9 \cdot 0{,}001815 = 1{,}12$$

Part de capital :

$$m - x \times i_m = 617 - 1{,}12 = 615{,}88$$

Ensuite, on remonte mois par mois en posant l'égalité suivante :

$$x = y - (m - y \times i_m)$$

En ayant déterminé x, il suffit alors de résoudre cette équation à une inconnue (y) :

$$x = y - (m - y \times i_m) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x + m}{1 + i_m} = 1230{,}64 \text{ €}$$

De là, nous pouvons trouver la part d'intérêt et de capital du mois 239, et même remonter le tableau en répétant l'opération.

6 Dénombrement/combinatoire

6.1 Arrangements et combinatoire :

— **Avec répétitions** : on utilise les puissances.

Exemple

Nombre de codes PIN à 4 chiffres (chiffres de 0 à 9, avec répétitions) :

$$10^4 = 10\,000$$

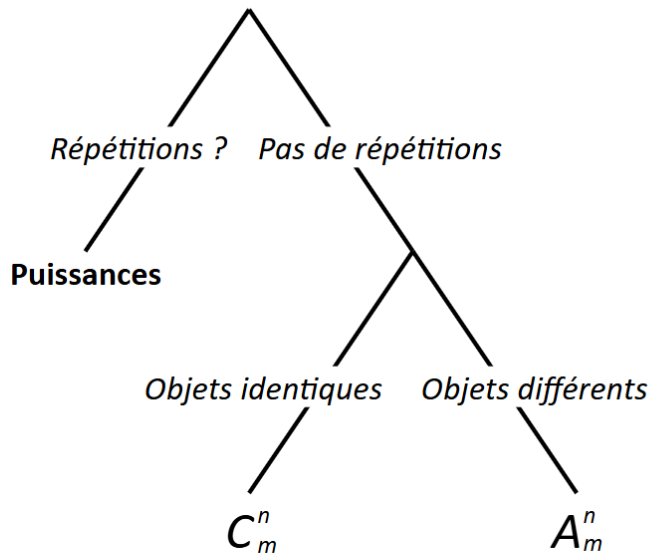
— **Sans répétitions** : on utilise les factorielles.

Exemple

Nombre de façons de ranger 4 objets différents :

$$4! = 24$$

A. Réflexion préalable à chaque calcul



Remarque

$\boldsymbol{n}$ étant le nombre de possibilités
$\boldsymbol{m}$ étant le nombre d'objets
Si $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{m}$, alors indique $C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ ou $A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ selon la situation.

Formules — Combinatoires et arrangements

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad , \quad A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

6.2 Combinatoires à connaitre :

- $C_0^n = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$
- $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$
- $C_m^n + C_{m+1}^n = C_{m+1}^{n+1}$

6.3 Binôme de Newton :

Formule — Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \, b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \, a^i \, b^{n-i}$$

A. Démonstration du bionôme de Newton

$$\text{Soient } a = 1 \text{ et } b = 1$$

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \, 1^i \, 1^{n-i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^n = C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Exemple — Déterminer la puissance final du binôme

Soit le binôme suivant : $(3x^2 + \frac{7}{x^3})^{124}$

Étape 1 — Remplacer dans la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \, a^i \, b^{n-i} = \sum_{i=0}^{124} C_i^{124} \, (3x^2)^i \, \left(\frac{7}{x^3}\right)^{124-i}$$

Étape 2 — Se concentrer sur x et on détermine sa puissance :

$$(3x^2)^i \quad \Rightarrow \quad x^{2i}$$

$$\left(\frac{7}{x^3}\right)^{124-i} \quad \Rightarrow \quad x^{-3(124-i)} = x^{-372+3i}$$

Ainsi :

$$x^{2i} \, x^{-372+3i} = x^{2i-372+3i} = x^{5i-372}$$

Exemple — Trouver le terme indépendant

Nous pouvons nous demander si ce binôme comporte un terme indépendant, c'est-à-dire un terme où l'exposant de x est nul (x^0).
Posons alors l'égalité suivante pour annuler la puissance de x :

$$5i - 372 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{372}{5}$$

Or, $\frac{372}{5} \notin \mathbb{N}$.

Ainsi, il n'existe aucun entier naturel i entre 0 et 124 permettant l'existence d'un terme indépendant. Par conséquent, ce binôme ne comporte aucun terme indépendant.

Ce mode opératoire peut être répété quelle que soit la puissance du terme recherché. Voici un exemple dans lequel nous allons chercher à déterminer s'il existe ou non un coefficient associé à un terme de puissance 3 (soit x^3) dans le binôme.

Ainsi, posons :

$$5i - 372 = 3 \quad \Rightarrow \quad i = 75$$

Donc :

$$C_{75}^{124}\ (3x^2)^{75}\ \left(\frac{7}{x^3}\right)^{49} = C_{75}^{124}\ 3^{75}\ x^{150}\ \frac{7^{49}}{x^{147}} = C_{75}^{124}\ 3^{75}\ 7^{49}\ x^3$$

Ainsi, le coefficient du terme de puissance 3 est :

$$C_{75}^{124}\ 3^{75}\ 7^{49}$$

B. Questions possibles

— Déterminer le coefficient du terme indépendant du binôme suivant :

$$\left(3x^5 + \frac{2}{x^5}\right)^{100}$$

Aide : $x^{10i-500}$
Réponse : $C_{50}^{100}\ 3^{50}\ 2^{50}$

— Existe-t-il des valeurs naturelles de a permettant l'existence d'un terme indépendant ? Si oui, lesquelles ?

$$\left(5x^4 + \frac{1}{x^a}\right)^{33}$$

Aide : Trouver les valeurs de a telles que $4 + a$ soit un multiple de 11.
Réponse : $a = 2,\ 7,\ 8,\ 29,\ \ldots$

7 Séries

Introduction — Notion de série

Une série (S_n) est la somme des termes d'une suite (s_n).

Soit la suite $(s_n) = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$.
La série associée est :

$$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = \{1, (1+2), (1+2+3), \ldots\} = \{1, 3, 6, \ldots\}$$

Par exemple :

$$S_3 = s_1 + s_2 + s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Ainsi, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Divergente désigne une série dont la somme tend vers l'infini.
Convergente désigne une série dont la somme tend vers un nombre.

Exemple — Série divergente

Soit $s_n = 3 + 2n = \{5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 + 2n) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \cdots = +\infty$$

La série est donc divergente.

Exemple — Série convergente

Soit $s_n = \frac{1}{2^n} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

La série est donc convergente.

A. Questions possibles

— Soit la suite arithmétique (u_n) définie par $u_1 = 5$ et raison $r = 3$.

1. Calculer la somme $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.
2. Exprimer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Réponses :

— $S_5 = 55$
— $S_n = \frac{n}{2}\left(2u_1 + (n-1)r\right) = \frac{n}{2}(10 + 3(n-1)) = \frac{n}{2}(3n+7)$

8 Statistique

Vocabulaire — Statistique

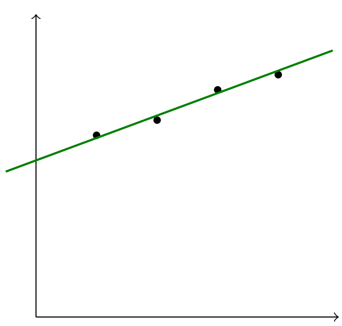
- **Médiane :** valeur centrale qui partage les données en deux moitiés.
  Exemple : $37, 38, 39, 39, 39, 42, 43, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46$
- **Moyenne $\bar{x}$:** somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.
  Exemple : $\frac{37+38+39+39+39+42+43+44+44+44+45+45+45+46+46}{15} = 42{,}4$
- **Mode :** valeur la plus fréquente dans la série.
  Exemple : $37, 38, 39, 39, 39, 42, 43, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46$
- **Écart à la moyenne :** différence entre une valeur et la moyenne de la série.
  Exemple : si $\bar{x} = 5$ et la valeur est 7, l'écart à la moyenne est $7 - 5 = 2$.
- **Écart type :** mesure de la dispersion des valeurs autour de la moyenne.
- **Variance :** moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
- **Données de position :** varient dans la durée.
  - le minimum
  - le maximum
  - la médiane
  - le mode
  - la moyenne
- **Données de dispersion :** ne varient pas dans la durée.
  - le rapport maximum-minimum
  - l'écart-type (σ)
  - la variance (σ^2)

Remarque — Médiane

Dans le cas où l'on étudie un nombre pair de données, on prend les médianes des deux valeurs centrales.

8.1 Droite de régression linéaire :

La droite de régression linéaire est celle qui s'ajuste au mieux à un nuage de points, en représentant la tendance générale des données.



Formules — Régression linéaire

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0 \qquad \text{(y = ax + b)}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Exemples — Régression linéaire

Calculons la droite de régression à partir des quatre points suivants : (1 ; 6), (2 ; 6,5), (3 ; 7,5) et (4 ; 8).

Étape 1 — Déterminer les moyennes de x et y :

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{6+6{,}5+7{,}5+8}{4} = 7$$

Étape 2 — Calculer les différences $(x_i - \bar{x})$ et $(y_i - \bar{y})$:

	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
1	$1 - 2{,}5 = -1{,}5$	$6 - 7 = -1$
2	$2 - 2{,}5 = -0{,}5$	$6{,}5 - 7 = -0{,}5$
3	$3 - 2{,}5 = 0{,}5$	$7{,}5 - 7 = 0{,}5$
4	$4 - 2{,}5 = 1{,}5$	$8 - 7 = 1$

Étape 3 — Remplacer dans les formules et déterminer l'équation de la droite :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(-1{,}5)(-1) + (-0{,}5)(-0{,}5) + (0{,}5)(0{,}5) + (1{,}5)(1)}{(-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (1{,}5)^2} = \frac{2{,}75}{4} = 0{,}7$$

$$\hat{\beta}_0 = 7 - 0{,}7 \times 2{,}5 = 5{,}25$$

$$\hat{y} = 0{,}7x + 5{,}25$$

9 Distribution de probabilités

Introduction — Probabilité

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

9.1 Loi binomiale de Bernoulli :

— p : probabilité de « réussite »
— q : probabilité d'« échec »
  $\rightarrow p + q = 1$ (100%)
— n : nombre de tentatives
— a : ce qu'on veut

Formule — Loi binomiale de Bernoulli

$$P(x = a) = C_a^n \, p^a \, q^{n-a}$$

À utiliser uniquement dans le cas d'expériences indépendantes avec remise,c'est-à-dire lorsque la probabilité de succès p reste constante à chaque essai.

Exemple — Loi binomiale de Bernouilli

Soit $P(x = 2)$ la probabilité d'obtenir exactement deux "3" lors d'un lancer de 5 dés.

$$P(x = 2) = C_2^5 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16 \quad (16\%)$$

Formule — Somme de Bernoulli

$$P(x \geq a) = \sum_{i=a}^{n} C_i^n \, p^i \, q^{n-i}$$

À utiliser dans les expériences avec remise, lorsque l'énoncé demande la probabilité de l'événement « au moins » (par exemple, au moins a succès).

Exemple — Somme de Bernoulli

Soit $P(x \geq 2)$ la probabilité d'obtenir au moins deux "3" lors d'un lancer de 5 dés.

$$P(x \geq 2) = \sum_{i=2}^{5} C_i^5 \; p^i \; q^{5-i}$$

où p est la probabilité d'obtenir un "3" sur un dé (ici $p = \frac{1}{6}$) et $q = 1 - p$.

Remarque — Combinatoire

Les coefficients binomiaux sont symétriques, c'est-à-dire que pour tout entier n et tout k entre 0 et n :

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

Cela signifie que le nombre de façons de choisir k objets parmi n est égal au nombre de façons de choisir les $n-k$ objets restants.

A. Questions possibles

— Un examen est composé de 30 questions à choix multiples (propositions dont une seule est juste).
Si un étudiant répond au hasard, quelle est la probabilité :

1. Qu'il réussisse toutes les questions ?
2. Qu'il réussisse aucune question ?
3. Qu'il réussisse exactement 14 questions ?
4. Qu'il réussisse au moins 15 questions ?

Réponses :

— $\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$

— $\left(\frac{4}{5}\right)^{30}$

— Exactement (loi binomiale de Bernoulli) $C_{14}^{30}\left(\frac{1}{5}\right)^{14}\left(\frac{4}{5}\right)^{16}$

— Au moins (somme de Bernoulli) $\displaystyle\sum_{i=15}^{30} C_i^{30}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}\left(\frac{4}{5}\right)^{30-i}$

9.2 Loi normale :

Formule — Loi normal de Gauss

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \quad \text{ou} \quad x = z \times \sigma + \bar{x}$$

Remarque — Calcul de l'air sous la courbe de Gauss

La courbe de Gauss est symétrique par rapport à la moyenne $\bar{x}$. Cela signifie que l'aire sous la courbe à gauche de $\bar{x}$ vaut toujours 0,5 (soit 50 %), et idem pour la droite.
Quand on connaît la proportion k de données inférieure à une certaine valeur x, alors l'aire entre cette valeur x et la moyenne est simplement :

$$0{,}5 - k$$

On utilise donc toujours $0{,}5 - k$ pour trouver la surface entre une valeur et la moyenne, que cette valeur soit à gauche ou à droite de la moyenne.

Exemple — Luigi Gelato

Données : On a 200 glaces. 35 glaces ont une température < -22°C, 80 glaces ont une température entre -22°C et -18°C.

Étape 1 – Traduire en probabilités :

$$P(x < -22) = \frac{35}{200} = 0{,}175 \quad P(-22 \leq x \leq -18) = \frac{80}{200} = 0{,}4$$

Ainsi, nous avons 17,5% des glaces ayant une température inférieure à -22°C et 40% entre -22°C et -18°C.

Étape 2 – Calculer les z :

— Pour -22, comme la courbe est symétrique, l'aire entre la moyenne et -22 est :

$$0{,}5 - 0{,}175 = 0{,}325$$

En regardant cette valeur dans le tableau de la loi normale centrée réduite, on trouve $z_1 \approx -0{,}93$

— Pour -18, l'aire entre la moyenne et -18 est :

$$0{,}5 - 0{,}425 = 0{,}075$$

Ainsi,

$$z_2 \approx 0{,}19$$

Étape 3 – Remplacer dans les formules :

$$\begin{cases} -0{,}93 = \dfrac{-22 - \bar{x}}{\sigma} \\ 0{,}19 = \dfrac{-18 - \bar{x}}{\sigma} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \approx -18{,}66, \quad \sigma \approx 3{,}59$$

Étape 4 – Chercher la glace la plus froide :
Nous cherchons la température de la glace la plus froide. Comme il y a 200 glaces, cela correspond à la part suivante :

$$\frac{1}{200} = 0{,}5\% = 0{,}005$$

La surface recherchée sous la courbe de Gauss est donc :

$$0{,}5 - 0{,}005 = 0{,}495$$

Le z correspondant est :

$$z_3 \approx -2{,}58$$

On remplace pour obtenir x :

$$x = z \times \sigma + \bar{x} = -2{,}58 \times 3{,}59 - 18{,}66 \approx -27{,}93°\text{C}$$

Étape 5 – Déterminer le seuil des 5 glaces les plus froides :
Il s'agit de 5 glaces sur 200, soit :

$$\frac{5}{200} = 2{,}5\% = 0{,}025$$

La surface sous la courbe de Gauss est donc :

$$0{,}5 - 0{,}025 = 0{,}475$$

On en déduit :

$$z = -1{,}96 \Rightarrow x = z \times \sigma + \bar{x} = -1{,}96 \times 3{,}59 - 18{,}66 \approx -25{,}70°\mathrm{C}$$

10 Probabilité

10.1 Axiomatique de Kolmogorov :

Vocabulaire — Axiomes

— **Ω :** univers (ensemble des issues possibles).
Exemple : L'univers d'un lancer de dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

— **$A \subset \Omega$:** A est un sous-ensemble de Ω, c'est-à-dire un événement.

— **$P(A)$:** probabilité de l'événement A, c'est-à-dire un nombre associé à A tel que :

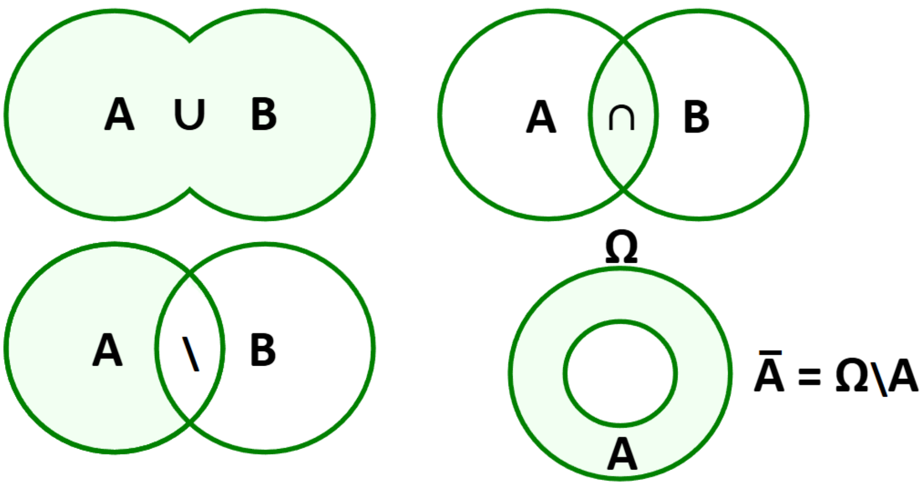
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

— $A \cup B$: L'ensemble A **ou** B (union)

— $A \cap B$: L'ensemble A **et** B (intersection)

— $A \setminus B$: L'ensemble A **sauf** B (différence)

— $A \mid B$: L'ensemble A **sachant que** B (probabilité conditionnelle)



Les trois axiomes de la probabilité

i $P(A) \in [0, 1]$
ii $P(\Omega) = 1$
iii Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Démonstration — Ensemble vide

Soit $\varnothing$ l'ensemble vide et Ω l'univers.
On a : $P(\varnothing) = 0$
Sachant que $\varnothing$ et Ω sont disjoints.
iii Par additivité :

$$P(\varnothing \cup \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$$

Mais $P(\varnothing \cup \Omega) = P(\Omega)$
Donc : $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$
Ainsi : $0 = P(\varnothing)$

Démonstration — Probabilité de l'union

Soit $P(A \cup B)$ où A et B sont deux ensembles joints.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Mais $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) \overset{iii}{=} P(A) + P(B \setminus A)$

Nous savons que : $P(B) = P((B \setminus A) \cup (B \cap A)) \overset{iii}{=} P(B \setminus A) + P(B \cap A)$

Ainsi : $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$

En remplaçant :

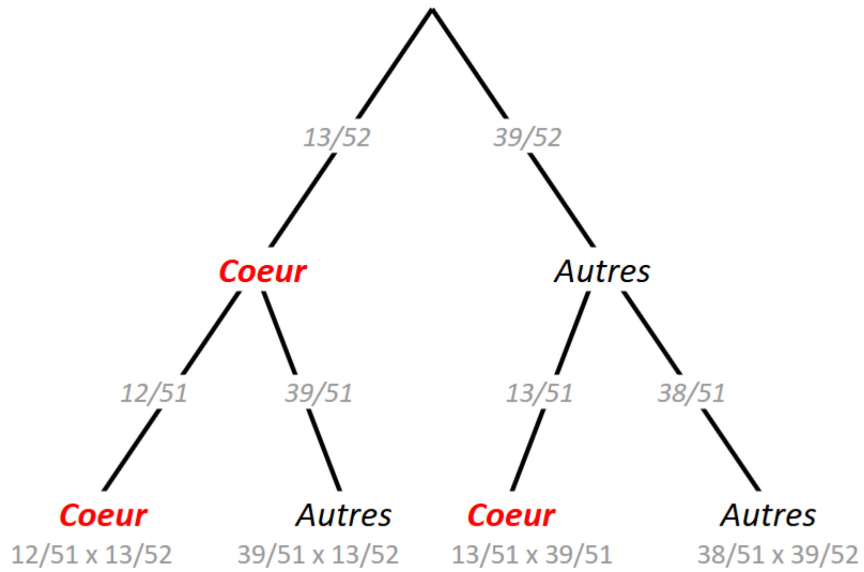
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

10.2 Probabilité conditionnelle :

Définition — Probabilité conditionnelle

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

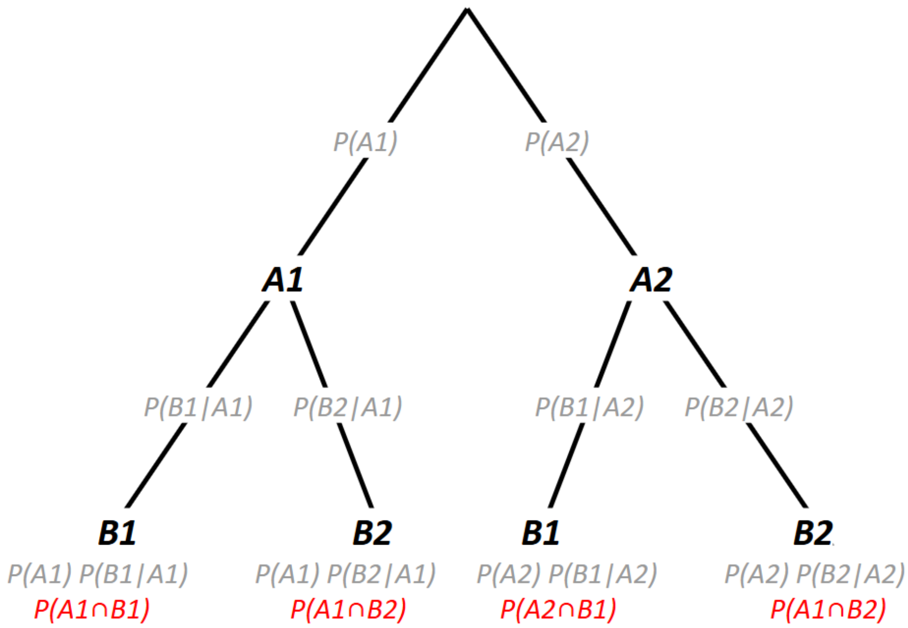
Ci-dessous se trouve un arbre de probabilités représentant les choix possibles lors de deux tirages successifs d'une carte.



Désormais, quelle est la probabilité de n'avoir qu'un seul coeur sachant que la première carte piochée fut un coeur (sur 2 tirages) ?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{39}{51} \cdot \frac{13}{52}}{\frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} + \frac{39}{51} \cdot \frac{13}{52}}$$

Ainsi, voici le cas général d'un arbre à probabilités conditionnele.



Ainsi, voici le cas général d'un arbre à probabilités conditionnelles.

Théorème de Bayes

On part de :

$$P(A_1) \cdot P(B_1 \mid A_1) = P(A_1 \cap B_1)$$

Ainsi :

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)}$$

Et donc :

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(A_1) \cdot P(B_1 \mid A_1)}{P(A_1) \cdot P(B_1 \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B_1 \mid A_2)}$$

A. Questions possibles

— Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux chiffres identiques dans un code à 5 chiffres ?

Réponse : $1 - \frac{A_{10}^5}{10^5}$

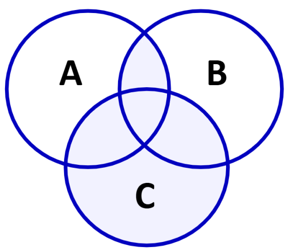
— Nous avons deux distributeurs face à nous :
- — Distributeur 1 : 3 boules rouges et 3 vertes.
- — Distributeur 2 : 4 boules rouges et 2 vertes.

On pioche une boule au hasard dans un distributeur choisi également au hasard.

1. Quelle est la probabilité de piocher une boule rouge dans le distributeur 1 ?
2. Quelle est la probabilité de piocher une boule rouge dans le distributeur 2 ?
3. Quelle est la probabilité de piocher une boule rouge (sans connaître le distributeur) ?
4. Si une boule rouge est piochée, quelle est la probabilité qu'elle provienne du distributeur 1 ?

Réponses :
- — $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- — $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- — $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$
- — $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{7}$

— Dans le diagramme ci-dessous, les cercles représentent les ensembles A, B et C. Quelle région est coloriée ?



Réponse : $(A \cap B) \cup C$

Force à vous l'équipe, ça va bien se passer !

$$\int \frac{1}{x^5}$$

$$\int \frac{1}{x^5+1}$$

Cette synthèse a été réalisée par Enzo Pisaneschi en juin 2025.
Malgré de longues relectures, il est probable que certaines erreurs aient persisté.