Géométrie dans l'espace :

Espace vectoriel :

Vecteur < une direction / un sens

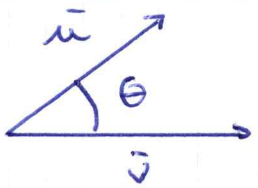
(+ une longueur |norme|)

Produit scalaire :

Def : On multiplie les vecteurs dont le resultat sera égale à la multiplication de la norme de chaque vecteurs et le cos de l'∢ entre les 2.

Resultat ⇒ nombre

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}\cdot\bar{v} &= |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\theta \\ |\bar{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \cos\theta &= \frac{u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y + u_z\cdot v_z}{|\bar{v}|\cdot|\bar{u}|} \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\text{si } \bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \\ &\text{alors } \bar{u} \perp \bar{v} \end{aligned}}$$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (u_x\cdot\bar{1}_x + u_y\cdot\bar{1}_y + u_z\cdot\bar{1}_z)\cdot(v_x\cdot\bar{1}_x + v_y\cdot\bar{1}_y + v_z\cdot\bar{1}_z)$

$= \underline{u_x\cdot v_x\cdot\bar{1}_x} + \cancel{v_x\,\bar{1}_x\,v_y\,\bar{1}_y} + \cancel{u_x\,\bar{1}_x\,v_z\,\bar{1}_z}$
$+ \cancel{u_y\,\bar{1}_y\,v_x\,\bar{1}_x} + \underline{u_y\,\bar{1}_y\,v_y\,\bar{1}_y} + \cancel{u_y\cdot\bar{1}_y\cdot v_z\cdot\bar{1}_z}$
$+ \cancel{u_z\,\bar{1}_z\,v_x\,\bar{1}_x} + \cancel{u_z\,\bar{1}_z\,v_y\,\bar{1}_y} + \underline{u_z\,\bar{1}_z\,v_z\,\bar{1}_z}$

on simplifie car $\bar{1}_x\cdot\bar{1}_y = 0$

$= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\theta \Rightarrow 1\cdot 1\cdot\cos 90 = 0$

Produit vectoriel :

Def : Vecteur ⊥ aux 2 facteurs du produit en respectant la règle dextrogyre. La norme du produit vectoriel est le produit des normes des 2 facteurs multiplié par le sin de l'∢ formé par les 2 facteurs.

Resultat ⇒ vecteur

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = \bar{w}$$

$$\Rightarrow \bar{w} \perp \bar{u} \quad \text{et} \quad w \perp \bar{v}$$

$$|\bar{w}| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin\theta$$

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = (u_x \bar{1}_x + u_y \bar{1}_y + u_z \bar{1}_z) \otimes (v_x \bar{1}_x + v_y \bar{1}_y + v_z \bar{1}_z)$$

$$= \cancel{u_x v_x \bar{1}_x \otimes \bar{1}_x} + u_x v_y \overbrace{\bar{1}_x \otimes \bar{1}_y}^{\bar{1}_z} + u_x v_z \overbrace{\bar{1}_x \otimes \bar{1}_z}^{-\bar{1}_y}$$

$$+ u_y v_x \overbrace{\bar{1}_y \otimes \bar{1}_x}^{-\bar{1}_z} + \cancel{u_y v_y} \overbrace{\bar{1}_y \otimes \bar{1}_y}^{0} + u_y v_z \overbrace{\bar{1}_y \otimes \bar{1}_z}^{\bar{1}_x}$$

$$+ u_z v_x \overbrace{\bar{1}_z \otimes}^{\bar{1}_y} u_z v_y \overbrace{\bar{1}_z \otimes \bar{1}_y}^{-\bar{1}_x} + \cancel{u_z v_z} \overbrace{\bar{1}_z \otimes \bar{1}_z}^{0}$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)\,\bar{1}_x - (u_x v_z - u_z v_x)\,\bar{1}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \cdot \bar{1}_z$$

$$\bar{1}_x \otimes \bar{1}_x = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0$$

$$\bar{1}_x \otimes \bar{1}_y = \bar{1}_z$$

$$\bar{1}_y \otimes \bar{1}_x = -\bar{1}_z$$

$$\bar{1}_z \otimes \bar{1}_x = \bar{1}_y$$

$$\bar{1}_x \otimes \bar{1}_z = -\bar{1}_y$$

$$\bar{1}_y \otimes \bar{1}_z = \bar{1}_x$$

$$1_z \otimes \bar{1}_y = -\bar{1}_x$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}}_{\text{déterminant}} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ -u_x v_z - u_z v_x \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Espace cartésien :

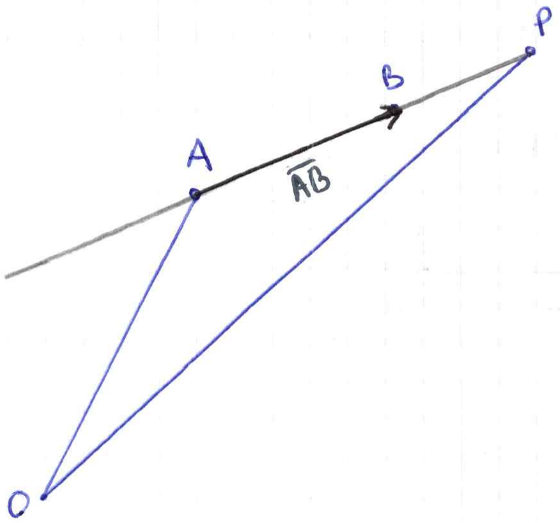
$A = (x_A , y_A , z_A)$

$B = (x_B , y_B , z_B)$

$$\bar{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Les droites :

Equation vectoriel :



$$\boxed{\begin{aligned} \bar{OP} &= \bar{OA} + \lambda \bar{AB} \\ \bar{OP} &= \bar{u} + \lambda \bar{v} \end{aligned}}$$

vecteur directeur

$\bar{OP} = \bar{OA} + \lambda \bar{AB}$

$O = (0,0,0)$

$P = (x , y , z)$

$A = (x_A , y_A , z_A)$

$B = (x_B , y_B , z_B)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\,(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda\,(y_B - y_A) \\ z = \underbrace{z_A}_{\text{point}} + \underbrace{\lambda\,(z_B - z_A)}_{\text{vecteur directeur}} \end{cases}$$

⇒ Décomposition des équations vectoriel dans un repère orthonormé.

⚠ Si $//$ ⇒ on change 1 des points

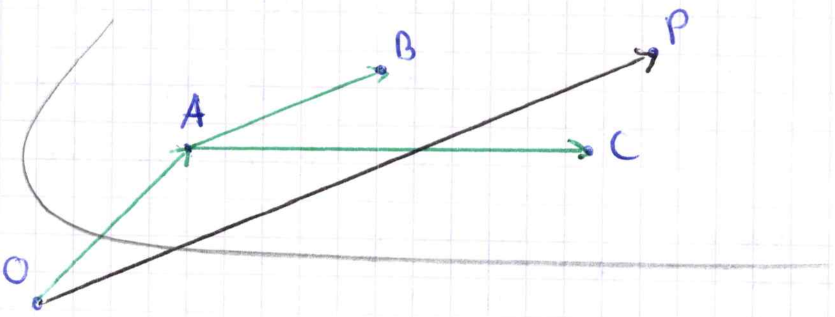
Si $\perp$ ⇒ on change le vecteur directeur

équation cartésienne :

$$\boxed{\lambda = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}}$$

<u>Les plans</u> :

équation vectorie :



$$\boxed{\bar{OP} = \bar{OA} + \lambda\,\bar{AB} + \mu\,\bar{AC}}$$

⇒ 1 plan est définis par 3 points

équation paramétrique :

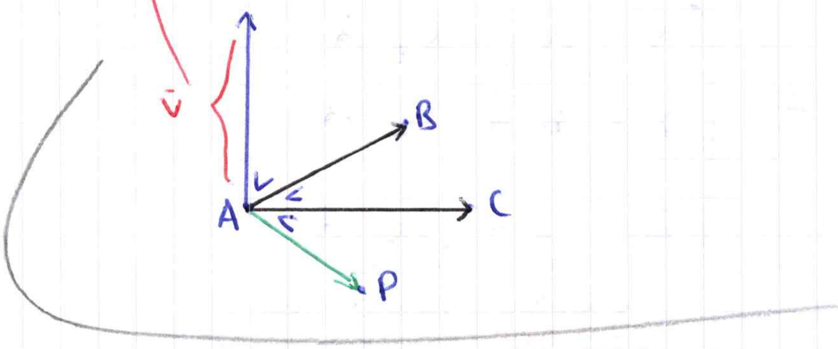
$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\,(x_B - x_A) + \mu\,(x_C - x_A) \\ y = y_A + \lambda\,(y_B - y_A) + \mu\,(y_C - y_A) \\ z = z_A + \lambda\,(z_B - z_A) + \mu\,(z_C - z_A) \end{cases}$$

équation cartésienne :

$$\pi \equiv \underbrace{a\,x + b\,y + c\,z}_{\text{vecteur normale}} = d$$

↳ donne sa position dans l'espace

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = \bar{AB} \otimes \bar{AC} \\ \bar{v} \cdot \bar{AP} = 0 \end{array}\right\} (\bar{AB} \otimes \bar{AC}) . \bar{AP} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Trouver un plan a partir de 3 points :

$A = (x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

$C = (x_C, y_C, z_C)$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{pmatrix}$$

$$\pi \equiv \underline{A}x + \underline{B}y + \underline{C}z = d$$

trouver l'équation d'une droite $\perp$ au plan π et passant par le point E

$E \,(x_E \,; y_E \,, z_E)$

$\pi = a x + b y + c z = d$

$$d \perp \pi \equiv \begin{cases} x = a + x_E \,\lambda \\ y = b + y_E \,\lambda \\ z = \underbrace{z}_{\text{vecteur normale}} + \underbrace{z_E}_{\text{coord du point E}} \,\lambda \end{cases}$$

↔ l'inverse

trouver le point d'intersection |e| une droite (d) passant par le point E et un plan (π) contenant les points A, B et C :

1) trouver l'équation cartésienne du plan :

$A = (2\,, -3\,, 2)$

$B = (1\,, 0\,, 0)$

$C = (2\,, 1\,, 0)$

$$\bar{BC} \otimes \bar{BA} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{coéf. du vecteur normal du plan}}$$

voir P.S

$-2x + 2y - 4z = d$ → on introduit le point B

$-2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = d$

$-2 = d$ → $\div -2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \div -2 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur normal}}$$

$\Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z = 1$

2) trouver les équations paramétriques de la droite ⊥ au plan π qui passe par le point E :

$E = (2, 5, 3)$

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 1\lambda \\ y = 5 - 1\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

3) trouver les coord. du point d'intersection entre la droite et le plan

$\pi \equiv x - y + 2z = 1$

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 1\lambda \\ y = 5 - 1\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

⇒ on remplace les valeurs des équations de la d dans l'équation du plan :

$(2 + 1\lambda) - (5 - 1\lambda) + 2 \cdot (3 + 2\lambda) = 1$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot -\frac{1}{3} \\ y = 5 - 1 \cdot -\frac{1}{3} \\ z = 3 + 2 \cdot -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$x = \frac{5}{3}$

$y = \frac{16}{3}$

$z = \frac{7}{3}$

P. d'intersection : $\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

trouver la distance entre un point et 1 plan :

1) trouver le vecteur normale du plan

$ax + by + cz = d$

vecteur normal $= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

2) utiliser le vecteur normal comme vecteur directeur de la droite et le faire passer par le point A (1, 2, 3)

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 2 + b\lambda \\ z = 3 + c\lambda \end{cases}$$

point

vecteur directeur (normal)

3) trouver le point d'intersection tel la droite et le plan

=> voir page 7

4) calculer le vecteur entre le point A et le point d'intersection

$A \equiv (x_A, y_A, z_A)$

P. d'inter. $\equiv (1, 2, 3)$

$\vec{AP} \equiv \begin{pmatrix} 1 - x_A \\ 2 - y_A \\ 3 - z_A \end{pmatrix}$

5) trouver la norme du vecteur $\vec{AP}$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(1-x_A)^2 + (2-y_A)^2 + (3-z_A)^2}$

trouver la distance tel 1 point et une droite:

1) Déterminer le plan qui passe par le point et ⊥ à la droite:

→ utiliser le vecteur directeur de la droite comme vecteur normal du plan

→ on remplace le point dans l'équation du plan pour trouver la valeur de d

voir P.7

2) trouver le point d'intersection entre la droite et le plan.

→ on remplace les valeurs de la droite dans l'équation du plan pour trouver λ

→ on remplace la valeur de λ dans les équations de la droite.

3) trouver la distance tel le point de base et le point d'intersection

→ trouver le vecteur entre point de base et p. d'intersection

→ Calculer sa norme

- comment trouver la distance entre un point et un plan :

1) Pour commencer, il faut trouver le vecteur normal du plan. Le vecteur normal d'un plan, c'est la valeur des coëfficients de x, y, z.

Par exemple, le vecteur normal du plan $\equiv x + 2y - z = 3$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Il faut ensuite trouver les équations d'une droite ⊥ au plan qui utilise le vecteur normal trouvé ci-dessus comme vecteur directeur et qui passe par le point.

exemple : on cherche la distance entre le plan $\equiv x + 2y - z = 3$ et le point $(1, 2, 3) = A$

La droite sera :

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + d \\ y = 2 + 2d \\ z = 3 - d \end{cases}$$

les coordonnées du point

3) A partir des équations de la droite trouvé ci-dessus, on va remplacer la valeur de x, y et z dans l'équation du plan.

$$1 \cdot (1 + d) + 2 \cdot (2 + 2d) - (3 - d) = 3$$

On résout l'équation pour trouver la valeur de d :

$$1 + d + 4 + 4d - 3 + d = 3$$

$$2 + 6d = 3$$

$$d = \frac{1}{6}$$

4) Après avoir trouvé la valeur de d, on le remplace dans les équations de la droite pour trouver le point d'intersection.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \\ y &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3} \\ z &= 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \end{aligned}\right\} B = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{17}{6}\right)$$

5) Ensuite, il faut trouver le vecteur $\vec{AB}$ pour cela, il faut soustraire la valeur de xA a xB et repéter l'opération pour y et z.

On trouve donc comme vecteur $\vec{AB}$

$$\begin{pmatrix} xB - xA \\ yB - yA \\ zB - zA \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{6} - 1 \\ \frac{7}{3} - 2 \\ \frac{17}{6} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

6) Pour finir, il faut trouver la norme de ce vecteur en utilisant la formule :

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$$

ce qui nous donne : $\frac{\sqrt{6}}{6}$ qui est la distance entre le point $(1, 2, 3)$ et le plan $x + 2y - z = 3$

Déterminer l'équation d'une droite d'un plan :

→ calculer 2 points du plan

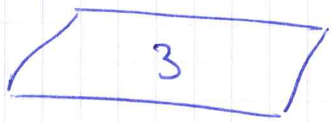
ex : $\pi \equiv x - y = 0$

$A \equiv (1,1,0) \qquad B \equiv (2,2,0)$

$$\begin{cases} x = x + (x_B - x_A) \cdot \lambda \\ y = y + (y_B - y_A) \cdot \lambda \\ z = z + (z_B - z_A) \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0\lambda \end{cases}$$

Position vectoriel de 3 plans :

3 confondus :

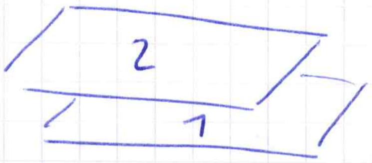


$\pi_1 \equiv x = 2$

$\pi_2 \equiv 2x = 4$

$\pi_3 \equiv 4x = 8$

2 confondus // à 1 autre :

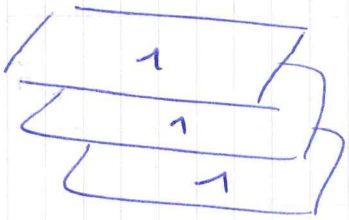


$\pi_1 \equiv x = 1$

$\pi_2 \equiv 2x = 2$

$\pi_3 \equiv 4x = 5$

3 plans // :

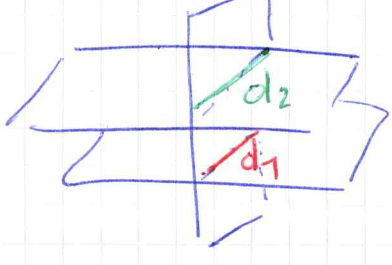


$\pi_1 \equiv x = 1$

$\pi_2 \equiv x = 2$

$\pi_3 \equiv x = 3$

2 plans // et 1 sécant :

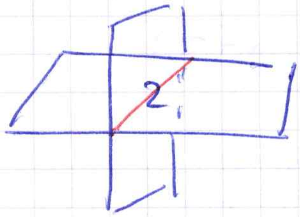


$\pi_1 \equiv x = 0$

$\pi_2 \equiv x = 2$

$\pi_3 \equiv y = 1$

2 confondus et 1 sécant :

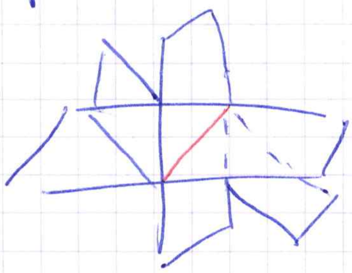


$\Pi_1 \equiv x = 1$

$\Pi_2 \equiv 2x = 2$

$\Pi_3 \equiv y = 1$

3 plans sécant (en 1 droite)

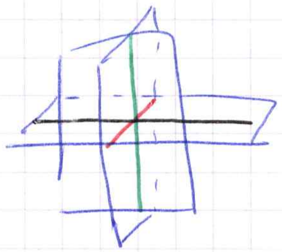


$\Pi_1 \equiv x = 1$

$\Pi_2 \equiv x + y = 2$

$\Pi_3 \equiv y = 1$

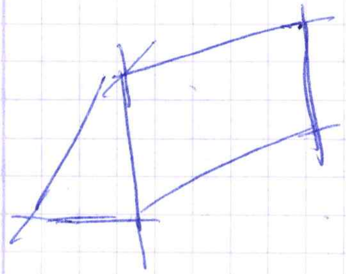
3 séquents en 3 droites et 1 point d'inter :



$\Pi_1 \equiv x = 1$

$\Pi_2 \equiv y = 1$

$\Pi_3 \equiv z = 1$



$\Pi_1 \equiv x = 1$

$\Pi_2 \equiv y = 1$

$\Pi_3 \equiv x + y = 1$

confondu $\Rightarrow$ même vecteur directeur + $\hat{m}$ d

// $\Rightarrow$ même vecteur directeur mais d $\neq$

Déterminant :

→ Calculer le déterminant → savoir si le système est dégénéré ou non dégénéré.

système dégénérer = qd $D = 0$ (pas de solution ou plusieurs solutions).

système non dégénérer = 1 solution $\neq 0$ $D \neq 0$

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}_{\text{matrice}}$$

3 plans $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

$$D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases}$$

⇒ Point d'intersection |e| les 3 plans

Si $D \neq 0$ ⇒ 1 point commun aux 3 plans

Si $D = 0$ et que x, y et $z = \frac{0}{0}$ ⇒ $\nexists$ $\emptyset$

Si $D = 0$ et que x, y et/ou $z \neq 0$ ⇒ $\ast$

1 droite

Si le déterminant $= 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - 2C_2} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 + C_3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

⚠ si on a une ligne de 0 ou 2 lignes identiques alors $= 0$.

Les groupes :

= Un ensemble muni d'une loi interne

$\forall a, b \in E \quad a * b \in E$

2 éléments de l'ensemble doivent être égal à un élément de l'ensemble.

3 axiomes :

(i) associativité (= peu importe l'ordre des 3 nombres, on peut appliquer la loi dans l'ordre qu'on veut).

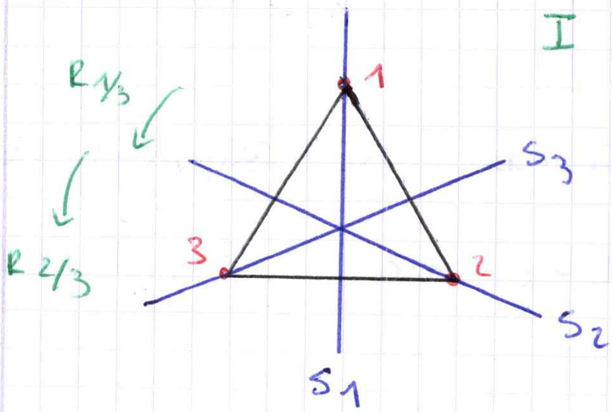
$\forall a, b, c \in E \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$

(ii) Neutre $\quad n \in E \quad \forall a \in E \quad n * a = a * n = a$

(iii) Inverse

$\forall a \in E \quad \exists a^{-1} \in E : a * a^{-1} = a^{-1} * a = n$

exemple :



Groupe = $\{I, R_{1/3}, R_{2/3}, S_1, S_2, S_3\}$

∘	I	$R1/3$	$R2/3$	S_1	S_2	S_3
I	I	$R1/3$	$R2/3$	S_1	S_2	S_3
$R1/3$	$R1/3$	$R2/3$	I	S_2	S_3	S_1
$R2/3$	$R2/3$	I	$R1/3$	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	I	$R2/3$	$R1/3$
S_2	S_2	S_1	S_3	$R1/3$	I	$R2/3$
S_3	S_3	S_2	S_1	$R2/3$	$R1/3$	I

transformation : isométries

- triangle équilatéral

$\{I, R1/3, R2/3, S_1, S_2, S_3\}$

*	a
b	
	≠
c	

*	b		c
a		≠	

si b est ≠ c alors ab ≠ ac qlq soit a

$\forall a, b, c \in E$ si $b \neq c$ alors $a * b \neq a * c$

Démonstration :

par absurdité si $b \neq c \to \exists a \in E : a * b = a * c$

$a * b = a * c$

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$ ⟩ (iii) $\exists a^{-1}$

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ ⟩ (i)

$n * b = n * c$ ⟩ (iii) $a^{-1} * a = n$

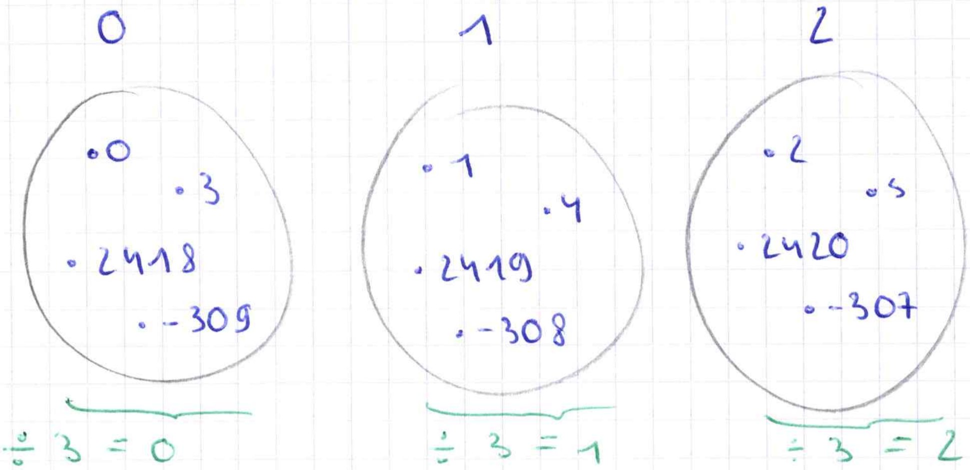
$b = c \Rightarrow$ ✗ ⟩ (ii) $n * a = a$

Modulo :

=> Ensemble de nombre dont le reste de la multiplication vaut le nombre du modulo.

$\mathbb{Z}$ = entier

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$



$\mathbb{Z}_3$, +

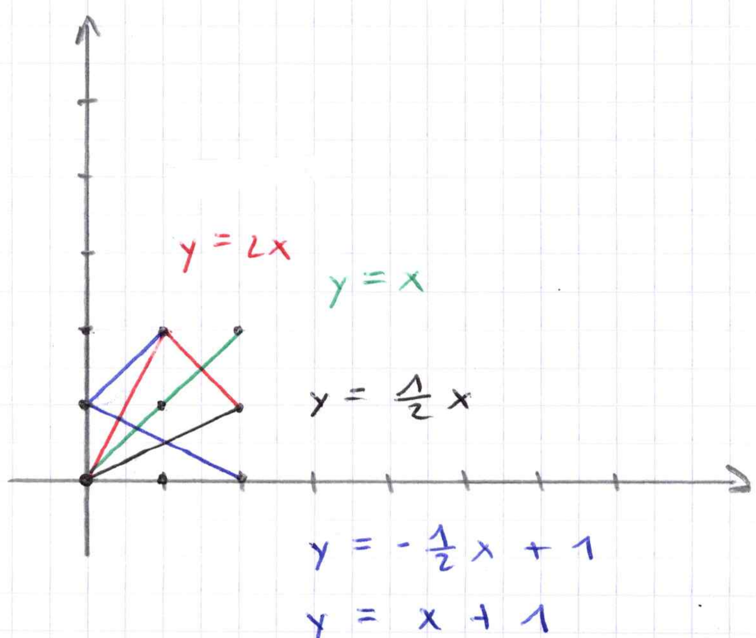
+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

→ $2 + 2 = 4 = 3 + 1$

Graphique:

$\mathbb{Z}_3$

(0,0) (1,2)
(1,0) (2,2)
(2,0)
(0,1)
(0,2)
(1,1)
(2,1)



Applications linéaires :

Espace vectoriel :

$$\bar{v} \longrightarrow \bar{v}'$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad \bar{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} v'_x = a v_x + b v_y \\ v'_y = c v_x + d v_y \end{cases}}$$

ex : $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$$\begin{cases} v'_x = v_x - 2v_y \\ v'_y = 2v_x - v_y \end{cases}$$

vecteur fixe (= vecteur qui renvoi sur lui m). ex $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \qquad (2,3) \xrightarrow{A_1} (-4,1)$$

$$A_2 \equiv \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad (-4,1) \xrightarrow{A_2} (-3,-5)$$

$$A_2 \circ A_1 (2,3) = (-3,-5)$$

Déf :

Une application, c'est la relation ~~tel~~ 2 ensembles qui relie chaque élément d'un premier à un du second.

Comment trouver les points fixes d'une application A_1 :

$$A_1 \equiv \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -x + y \\ y = y \end{cases}$$

on remplace par x et y car point fixes donc ne doivent pas changer

$$\begin{cases} 2x = y \\ y = y \end{cases}$$

tous les points qui vérifient cette équation seront fixe

ex : $(2,4) \Rightarrow A_1(2,4) \to (2,4)$

Comment trouver les points qui formeront l'image $(2,3)$ dans A_1

$$A_1 \equiv \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -x + y \\ \boxed{3 = y} \end{cases}$$

$2 = -x + 3$

$\boxed{x = 1}$

$\Rightarrow (1,3) \xrightarrow{A_1} (2,3)$

Matrice :

Appeication :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ex :

$$A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calcul matricielle : matrice . matrice :

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.2 & 1.(-2) + 1.(-1) \\ 1.1 - 1.2 & 1.(-2) - 1.(-1) \end{pmatrix}$$

⚠ $A_1 \cdot A_2 \neq A_2 \cdot A_1$

Matrice identitaire : (neutre)

=> fait que ca ne change rien

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ex : } \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse :

matrice inverse . matrice = I

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (\text{matrice inverse})$$

$$A_1 \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice inverse si $\Delta \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration matrice inverse :

matrice inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} ae + cf = 1 \\ be + df = 0 \\ ag + ch = 0 \\ bg + dh = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \xrightarrow{\times b} \\ \xrightarrow{\times a} \end{matrix} \qquad \begin{cases} abe + bcf = b \\ abe + adf = 0 \end{cases}$$

$$bcf - adf = b$$
$$f \cdot (bc - ad) = b$$
$$f = \frac{b}{bc - ad} = \frac{-b}{ad - bc}$$

inconnues

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Valeurs propres / vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda x \\ 2x - 3y = \lambda y \end{cases}$$

mise en évidence de y

$$\begin{cases} (2-\lambda)x - 2y = 0 \\ 2x - (3+\lambda)y = 0 \end{cases}$$

"

$$\begin{cases} y = \frac{2-\lambda}{2} x \\ y = \frac{2}{3+\lambda} x \end{cases}$$

$$\frac{2-\lambda}{2} = \frac{2}{3+\lambda} \Rightarrow (2-\lambda)\cdot(3+\lambda) = 2 \cdot 2$$

$$6 - \lambda - \lambda^2 = 4 \Rightarrow \underbrace{\lambda^2 + \lambda - 2 = 0}$$

⇒ équation du second degré

$$\lambda = \left< \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right. \Big\}$$ vecteur propre

↓ on remplace dans l'équation de base

$\underline{\lambda = 1}$ $\begin{cases} (2-1)x - 2y = 0 \\ 2 \cdot 1 - (3+1)y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow (4, 2)$

$\underline{\lambda = -2}$ $\begin{cases} (2-(-2))x - 2y = 0 \\ 2x - (3-2)y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow (3, 6)$

→ ce point est envoyé sur $-2x$ lui m̂

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\quad}$
$-2x$

⇒ en utilisant un D :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

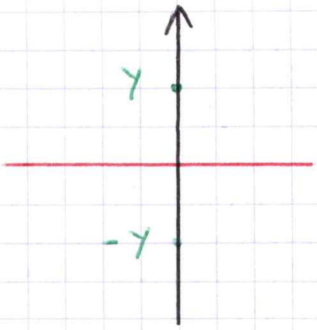
$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

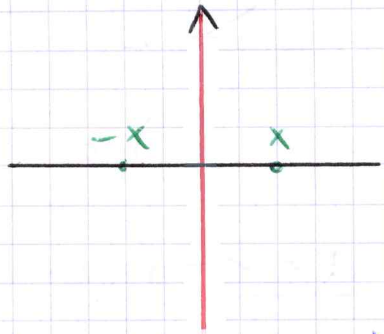
$$\begin{cases} (a-\lambda)x + bx = 0 \\ x + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

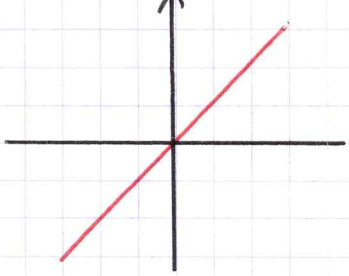
$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$
$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

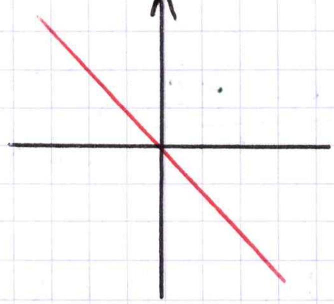
trouver la matrice de l'axe de symétrie axiale :





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Matrice d'une rotation :

rotation de $1/2$ tour $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

rotation d'un angle $\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

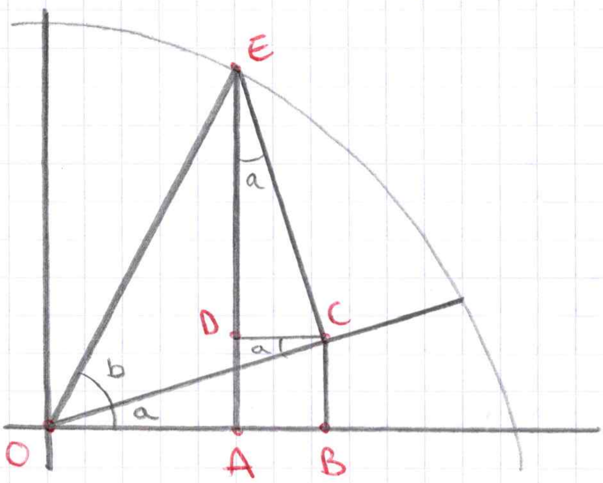
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

je skip le calcul

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}}$$

Démonstration $\cos(a+b)$:



$OA = OB - AB$

$\cos a = \dfrac{OB}{OC} \rightarrow OB = \cos a \cdot OC$

$\cos b = \dfrac{OC}{OE} \rightarrow OC = \cos b \cdot OE$

$OB = \cos a \cdot (\cos b \cdot OE)$

$AB = DC$

$\sin a = \dfrac{DC}{EC} \Rightarrow DC = EC \cdot \sin a$

$\sin b = \dfrac{EC}{OE} \Rightarrow \sin b \cdot OE = EC$

$DC = \sin a \cdot \sin b \cdot OE$

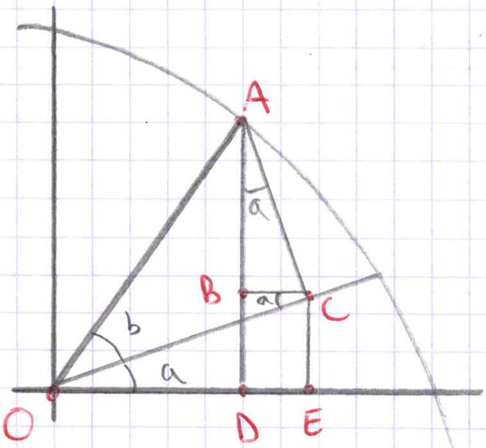
$OA = OB - AB = \cos a \cdot \cos b \cdot OE \cdot AB$

$\cos a \cdot \cos b \cdot OE - \sin a \cdot \sin b \cdot OE$

$$\frac{OA}{OE} = \cos a \cdot \cos b \cdot \cancel{OE} - \sin a \cdot \sin b \cdot \cancel{OE}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$$

Démonstration $\sin(a+b)$:



① $\frac{AB}{AC} = \cos a \rightarrow AB = \cos a \cdot AC$

$AB = \cos a \cdot AC$ ⊛

$\sin b = \frac{AC}{OA}$

$OA \cdot \sin b = AC$ ⊛⊛

⊛ et ⊛⊛ $AB = \cos a \cdot OA \cdot \sin b$

$$\boxed{\frac{AB}{OA} = \cos a \cdot \sin b}$$

②

$BD = CE$

$\frac{CE}{OC} = \sin a$

$CE = \sin a \cdot OC$ ⊛

$$\boxed{\frac{BD}{OA} = \sin a \cdot \cos b}$$

$\frac{OC}{OA} = \cos b$

$OC = OA \cdot \cos b$ ⊛⊛

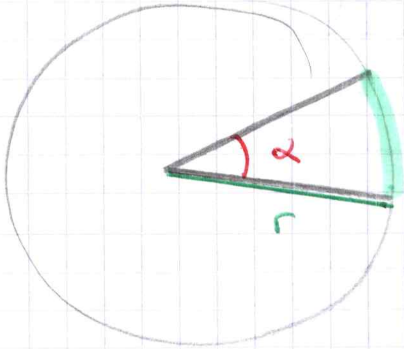
⊛ et ⊛⊛ $CE = \sin a \cdot OA \cdot \cos b$

$BD = \sin a \cdot OA \cdot \cos b$

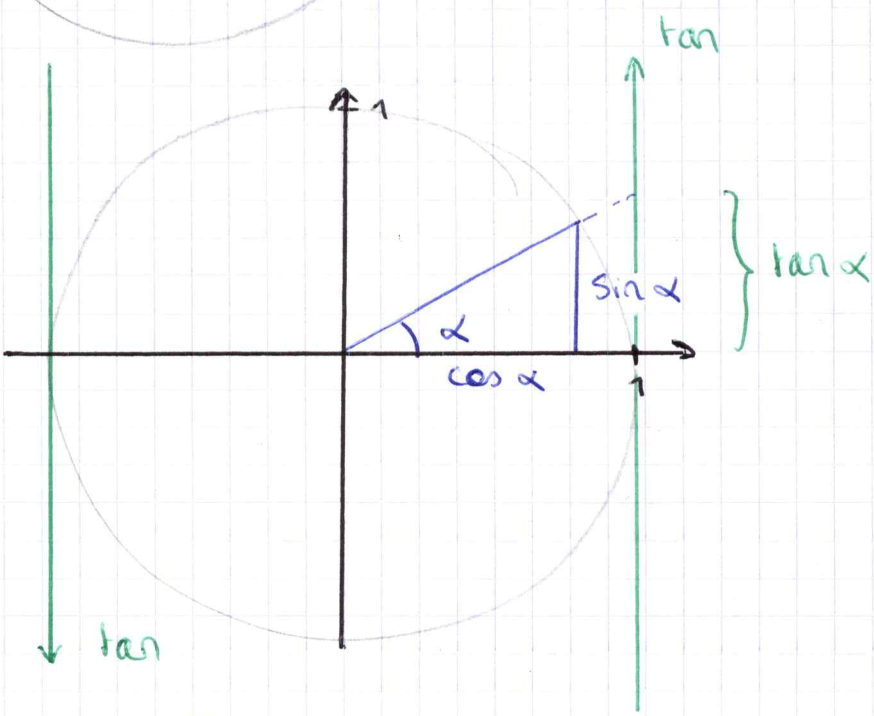
$$\sin(a+b) = \frac{AD}{OA} = \frac{AB + BD}{OA} = \boxed{\frac{AB}{OA}} + \boxed{\frac{BD}{OA}}$$

$$\sin(a+b) = \underline{\sin a \cdot \cos b} + \underline{\sin b \cdot \cos a}$$

Trigonométrie :



$= \alpha \cdot r$



$$\tan = \frac{opp}{adj} \qquad \tan = \frac{\tan\alpha}{1}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{opp}{hyp}}{\frac{adj}{hyp}} = \frac{opp}{\cancel{hyp}} \cdot \frac{\cancel{hyp}}{adj} = \frac{opp}{adj}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

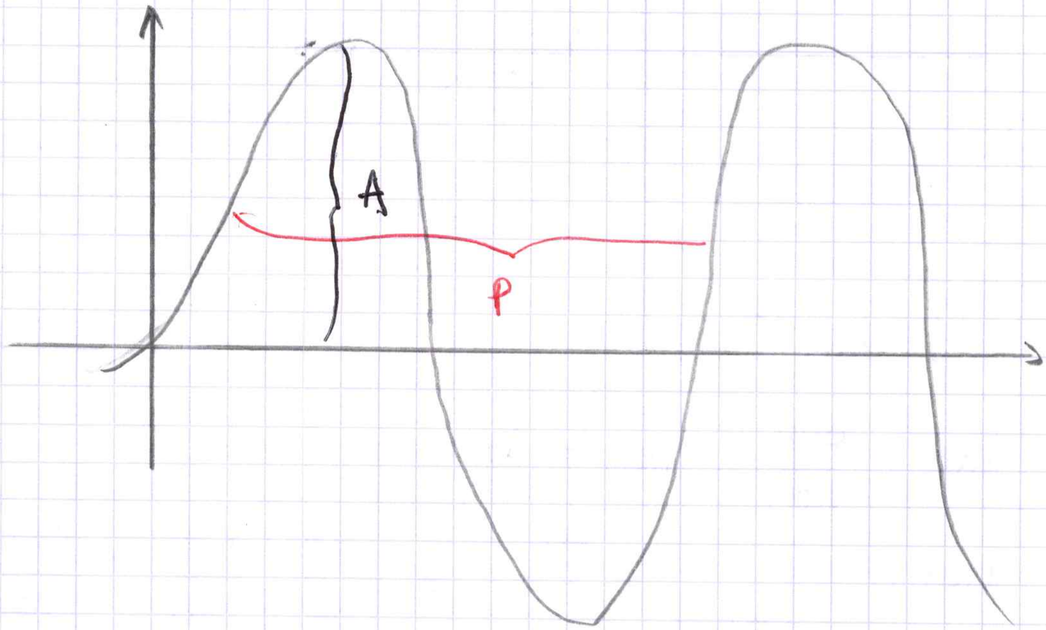
$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$= \left(\frac{opp}{hyp}\right)^2 + \left(\frac{adj}{hyp}\right)^2 = \frac{opp^2}{hyp^2} + \frac{adj^2}{hyp^2} = \frac{opp^2 + adj^2}{hyp^2}$$

$$= \frac{hyp^2}{hyp^2} = 1$$

α	0	$\pi/6$ 30	$\pi/4$ 45	$\pi/3$ 60	$\pi/2$ 90
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Fonction trigonométrique :



A = amplitude (= 1/2 |e| le max et min)

P = période

$f(\underbrace{k}_{P} x)$ $\longleftrightarrow$ $k \in]0, 1[$

     $\rightarrow\leftarrow$ $k \in]1 + \infty[$

$\underbrace{K}_{A} f(x)$ $\updownarrow$ $k \in]1, +\infty[$

     $\downarrow\uparrow$ $k \in]0, 1[$

$f(x)$ $f(x+k)$ $k > 0$ $\leftarrow$

     $k < 0$ $\rightarrow$

$f(x)$ $f(x) + k$ $k > 0$ $\uparrow$

     $k < 0$ $\downarrow$

Démonstration dérivé du sinus.

$$(\sin(x))' = \cos x$$

$$\hookrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \Delta x + \cancel{x}}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta x}{2} \hookrightarrow \Delta x \to 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x)$$

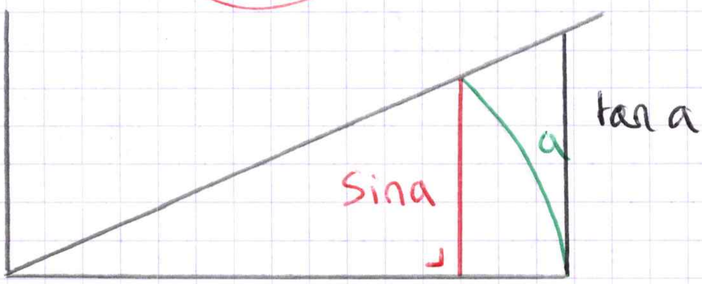
$$\hookrightarrow 1$$

$$= \cos(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to x} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$$



$$\sin a < a < \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\frac{\sin a}{\sin a} < \frac{a}{\sin a} < \frac{\frac{\sin a}{\cos a}}{\sin a}$$

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}$$

$$1 > \frac{\sin a}{a} > \cos a$$

↳ tend vers 1 car cos a = 1

Démonstrations : formules de simpson

1) $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$p = (a+b) \qquad q = (a-b)$

$$
\begin{array}{rl}
 & \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\
+ & \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\
\hline
\end{array}
$$

$$\sin(\underbrace{a+b}_{p}) + \sin(\underbrace{a-b}_{q}) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \qquad \begin{cases} p-q = 2b \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$

$p + q = 2a$

$a = \frac{p+q}{2}$

2) $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\
+ & \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\
\hline
\end{array}
$$

$$\cos(\underbrace{a+b}_{p}) + \sin(\underbrace{a-b}_{q}) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

3) $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\
- & \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\
\hline
\end{array}
$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \cdot \sin b$$

4) $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$\begin{array}{rl} & \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\ - & \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\ \hline \end{array}$$

$$\sin \underbrace{(a+b)}_{p} - \sin \underbrace{(a-b)}_{q} = 2 \sin b \cdot \cos a$$

Pour démontrer les formules de simpson utilisé les formules :

$\sin(a+b)$ ou $\cos(a+b)$ et $p = a+b$ et $q = a-b$