INTEGRACIÓN EN ESFERAS Y TOROS

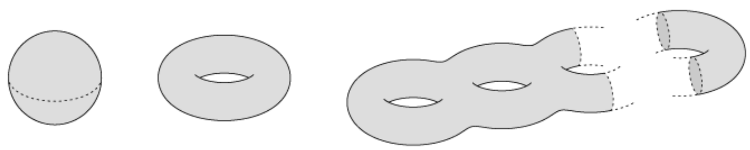
AGUSTÍN GARCÍA IGLESIAS

1. Introducción

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua y $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Un resultado fundamental de la teoría de integración es la llamada Regla de Barrow:

$$\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1}$$

que es una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo. En este curso[1] consideraremos integrales sobre dominios más generales, reemplazando intervalos (a,b) por esferas, toros y otras *variedades diferenciables* M^{n+1}



y funciones $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ por *formas diferenciales* $\omega : M \to \Lambda^n(M)$.

En este contexto, veremos como la fórmula (1) es una consecuencia directa del Teorema de Stokes:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

que también generaliza otros resultados de la teoría de integración como el Teorema de Green y el Teorema de la Divergencia de Gauss.

Nos concentraremos en un caso particular de variedades, que son aquellas descriptas como k-cubos singulares $c : [0,1]^k \to \mathbb{R}^n$.

Referencia: "Cálculo en variedades", Michael Spivak, Ed. Reverté (1988).

[1]Notas disponibles en `http://www.famaf.unc.edu.ar/∼aigarcia/monografias.htm`.

2. Cadenas

En esta sección veremos una primera aproximación a los conjuntos sobre los cuales integraremos.

Definición 2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un *k-cubo* en A es una función $c : [0,1]^k \to A$.

Ejemplo 2.2. Si $n = 0$, $[0,1]^0 = \{0\}$ y por lo tanto un 0-cubo en A es simplemente un punto $p = c(0) \in A$.

El *n-cubo típico* en $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$c = I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n, \qquad I^n(x) = x. \tag{2}$$

Una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ es un 1-cubo. Por ejemplo

$$c(t) = (t, t^2), \qquad c(t) = (t, \operatorname{sen}(t)), \qquad , c(t) = (t^2, t^3).$$

También podemos considerar curvas en $\mathbb{R}^3$, como

$$c(t) = (cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t), \qquad t \in [0,1].$$

La circunferencia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es un 1-cubo, para para $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$c(t) = (cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)), \qquad t \in [0,1].$$

Asimismo, el disco $D^1 \subset \mathbb{R}^2$ es un 2-cubo, para $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$c(r,s) = (r\cos(2\pi s), r\operatorname{sen}(2\pi s)), \qquad r, s \in [0,1].$$

En 3 dimensiones, la bola $B \subset \mathbb{R}^3$ es un 3-cubo, para

$$c(r,s,t) = (r\cos(2\pi s)\operatorname{sen}(\pi t), r\operatorname{sen}(2\pi s)\operatorname{sen}(\pi t), \cos(\pi t)), \qquad r, s, t \in [0,1].$$

Análogamente, podemos considerar el cilindro

$$c(r,s,t) = (r\cos(2\pi s), r\operatorname{sen}(2\pi s), t), \qquad r, s, t \in [0,1].$$

Si $r < R \in \mathbb{R}$, el toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ está dado por

$$c(s,t) = (\cos(2\pi s)(R + r\cos(\pi t)), \operatorname{sen}(2\pi s)(R + r\cos(\pi t)), r\operatorname{sen}(\pi t)),$$

$s, t \in [0,1]$.

Definición 2.3. Una *n-cadena* es una suma $c = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot c_i$, donde cada $c_i : [0,1]^n \to A$ es un n-cubo y cada λ_i denota un número entero, $i = 1, \dots, r$.

En este formalismo, las expresiones $c - c = 0$ y $0 \cdot c$ indicarán que se considera[2] el subconjunto vacío $\emptyset \subset A$.

Si bien la expresión $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$ denota una suma formal, este concepto adquiere mayor relevacia cuando consideramos la *frontera o borde* de un n-cubo. Intuitivamente, la frontera de un intervalo $[a,b]$ son los puntos a y b (dos 0-cubos), o mejor aún una combinación lineal de los mismos "$b - a$". Análogamente, la frontera de un cuadrado $[a,b]^2 \subset \mathbb{R}^2$ está dada por (una combinación lineal de) los segmentos que componen el borde del cuadrado.

[2]Si $\mathcal{C}$ denota el conjunto de los n-cubos en A, podemos describir a las n-cadenas como el conjunto de funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{C} \cup \emptyset$ con $f(0) = \emptyset$ y $f(n) = \emptyset$ salvo para finitos $n \in \mathbb{Z}$.

Así, dado un n-cubo, la frontera será una $n-1$-cadena ∂c. Para integrar, necesitamos otorgarle una orientación o signo a cada $n-1$ cubo que la compone. Comenzamos analizando el n-cubo típico $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ de (2).

Definición 2.4. Sea $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ el n-cubo típico. Para cada $i, \dots, n$, definimos dos $n-1$-cubos $I^n_{(i,0)}$ y $I^n_{(i,1)}$ como

$$I^n_{(i,0)} = I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}),$$
$$I^n_{(i,1)} = I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

La frontera ∂I^n se define como la $n-1$-cadena

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(I^n_{(i,0)} - I^n_{(i,1)} \right).$$

Si $n = 0$, entonces $I^n(0) = 0$ y $\partial \mathbb{I}^n = \emptyset$.

Ejemplo 2.5. Sea $I^1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ el 1-cubo típico. Entonces los 0-cubos $I^1_{(1,0)}, I^1_{(1,1)} : \{0\} \to \mathbb{R}$ están dados por $I^1_{(1,0)}(0) = I^1(0) = 0$ y $I^1_{(1,1)}(0) = I^1(1)$ y así $\partial I^1 = I^1_{(1,1)} - I^1_{(1,0)}$. Es decir, $\partial I^1(0) =$ "$1 - 0$".

Ahora podemos definir, de manera análoga, la frontera ∂c de un n-cubo cualquiera $c : [0,1]^n \to A$.

Será, entonces, una $n-1$-cadena $\partial c : [0,1]^{n-1} \to A$.

Definición 2.6. Sea $c : [0,1]^n \to A$ un n-cubo típico. Para cada $i, \dots, n$, definimos dos $n-1$-cubos $c_{(i,0)}$ y $c_{(i,1)}$ como

$$c_{(i,0)} = c \circ I^n_{(i,0)}; \qquad c_{(i,1)} = c \circ I^n_{(i,1)}.$$

La frontera ∂c se define como la $n-1$-cadena

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(c_{(i,0)} - c_{(i,1)} \right) = c \circ \partial I^n.$$

Si $c = \sum_i \lambda_i c_i$ es una n-cadena, definimos $\partial c = \sum_i \lambda_i \partial c_i$. Si $n = 0$, $\partial c = 0$.

Tenemos entonces un operador ∂ que tranforma n-cadenas en $n-1$ cadenas.

Ejercicio 2.7. Recordar la notación del Ejemplo 2.2. Si $c : I \to \mathbb{R}^2$ es la circunferencia S^1, mostrar que $\partial c = (1,0) - (1,0)$.

Si $c : I^2 \to \mathbb{R}^2$ es el disco D^1, mostrar que $\partial c = S^1 - 0$. Aquí 0 indica el 1-cubo contante $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (0,0)$.

Ejemplo 2.8. Sea $c : I^2 \to \mathbb{R}^2$ un 2-cubo. Fijemos los puntos en $\mathbb{R}^2$ dados por los vértices de I^2:

$$p_1 = c(0,0), \qquad p_2 = c(1,0), \qquad p_3 = c(1,1), \qquad p_4 = c(0,1).$$

Ahora, la frontera ∂c es la combinación de cuatro 1-cubos, es decir es la cadena:

$$\partial c(t) = -c_{(1,0)}(t) + c_{(1,1)}(t) + c_{(2,0)}(t) - c_{(2,1)}(t),$$

donde, para $t \in [0,1]$:

$$c_{(1,0)}(t) = c(0,t), \qquad c_{(1,1)}(t) = c(1,t),$$
$$c_{(2,0)}(t) = c(t,0), \qquad c_{(2,1)}(t) = c(t,1).$$

La frontera de esta cadena será una 0-cadena (puntos en $\mathbb{R}^2$): para $t = 0$,

$$\partial c_{(1,0)}(t) = c(0,1) - c(0,0) = p_4 - p_1, \quad \partial c_{(1,1)}(t) = c(1,1) - c(1,0) = p_3 - p_2,$$
$$\partial c_{(2,0)}(t) = c(1,0) - c(0,0) = p_2 - p_1, \quad \partial c_{(2,1)}(t) = c(1,1) - c(0,1) = p_3 - p_4.$$

Entonces, para $t = 0$:

$$\begin{aligned}\partial(\partial c)(t) &= -\partial c_{(1,0)} + \partial c_{(1,1)} + \partial c_{(2,0)} - \partial c_{(2,1)} \\ &= -(p_4 - p_1) + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) - (p_3 - p_4) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, $\partial\partial c = 0$. □

El ejemplo anterior es una muestra de la siguiente característica fundamental.

Proposición 2.9. *Sea c una n-cadena en A, entonces $\partial(\partial c) = 0$. En otras palabras, $\partial^2 = 0$.*

Prueba. Tomemos $i \leq j$ y sean $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Consideremos $(I^n_{i,\alpha})_{j,\beta} : [0,1]^{n-2} \to \mathbb{R}^n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(I^n_{i,\alpha})_{j,\beta}(x) &= I^n_{i,\alpha}(I^{n-1}_{j,\beta}(x)) \\ &= I^n_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{j-1}, \beta, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{j-1}, \beta, x_j, \dots, x_{n-2}).\end{aligned}$$

Análogamente, vemos que

$$(I^n_{j+1,\beta})_{i,\alpha}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{j-1}, \beta, x_j, \dots, x_{n-2}).$$

Es decir, $(I^n_{i,\alpha})_{j,\beta} = (I^n_{j+1,\beta})_{i,\alpha}$ y por lo tanto $(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha}$ para cualquier n-cubo c, $i \leq j$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(c_{(i,0)} - c_{(i,1)}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(\partial c_{(i,0)} - \partial c_{(i,1)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j[(c_{(i,0)})_{(j,0)} - (c_{(i,0)})_{(j,1)}] - [(c_{(i,1)})_{(j,0)} - (c_{(i,1)})_{(j,1)}]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{i+j}\Big((c_{(i,0)})_{(j,0)} - (c_{(i,0)})_{(j,1)} - (c_{(i,1)})_{(j,0)} + (c_{(i,1)})_{(j,1)}\Big)\end{aligned}$$

y en esta suma $(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha}$ aparecen con signos opuestos, para cada i, j y α, β. Por lo tanto $\partial(\partial c) = 0$.

Como una n-cadena es una suma de n-cubos, la propiedad vale en general. □

3. Álgebra multilineal

Sea $V = \mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores $v = (x_1, \ldots, x_n)$ en n coordendas reales. Recordemos que existe un una suma de vectores y un producto por escalares (elementos de $\mathbb{R}$) como

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (v'_1, \ldots, v'_n) &= (x_1 + v'_1, \ldots, x_n + v'_n),\\ c \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (c \cdot x_1, \ldots, c \cdot x_n).\end{aligned} \tag{3}$$

Observación 3.1. En general, un conjunto V con una suma y un producto como en (3) se llama un *espacio vectorial* (sobre $\mathbb{R}$). Muchas de las consideraciones que veremos a lo largo de esta sección también valen en ese contexto más general.

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de dice lineal (o $\mathbb{R}$-lineal) si

$$f(v + c \cdot v') = f(v) + c \cdot f(v')$$

para cada $v, v' \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

En esta sección nos concentraremos en las funciones $\mathbb{R}$-lineales $f : V \to \mathbb{R}$. Escribimos

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal}\}.$$

Ejemplo 3.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$. Entonces f es $\mathbb{R}$ lineal. Más generalmente, si $a, b \in \mathbb{R}$ (fijos), entonces $f(x, y) = ax + by$ es lineal.

Ejercicio 3.3. Comprobar las afirmaciones del Ejemplo 3.2.

Ejemplo 3.4. Sea $i = 1, \ldots, n$ y sea $e^i : V \to \mathbb{R}$ la función que toma la coordenada i-ésima. Es decir,

$$e^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Entonces e^i es $\mathbb{R}$-lineal (demostrarlo). Si

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{lugar j}}, 0, \ldots, 0) \tag{4}$$

entonces

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En general, escribimos esto como $e^i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Las funciones coordenadas e^i del Ejemplo 3.4 son suficientes para describir toda función lineal en V^*:

Teorema 3.5. *Si $f : V \to \mathbb{R}$ es lineal, existen únicos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f = a_1 e^1 + \cdots + a_n e^n.$$

Prueba. Si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Por lo tanto, si $f : V \to \mathbb{R}$ es lineal,

$$f(v) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = e^1(v)f(e_1) + \cdots + e^n(v)f(e_n).$$

Es decir,

$$f = f(e_1)e^1 + \cdots + f(e_n)e^n$$

y podemos tomar $a_i = f(e_i)$, $1 \leq i \leq n$. En cuento a la unicidad, si $f = a'_1e^1 + \cdots + a'_ne^n$, entonces

$$0 = f - f = (a_1 - a'_1)e^1 + \cdots + (a_n - a'_n)e^n.$$

Si evaluamos en algún e_i, obtenemos

$$0 = a_i - a'_i$$

y así vemos que $a_i = a'_i$ y la escritura es única. □

3.1. **Funciones multilineales.** Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ y consideremos el producto cartesiano

$$V^k = \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \text{ veces}}.$$

Definición 3.6. Una función $f : V^k \to \mathbb{R}$ se dice *multilineal, o k-lineal* si es lineal en cada coordenada: es decir si, para cada $i = 1, \ldots, k$ fijo y para cada elección de $k-1$ vectores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$, la función $f_i : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(v) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k)$$

es $\mathbb{R}$-lineal.

Ejercicio 3.7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\left((x, y), (z, w)\right) = xw - zy.$$

Mostrar que f es 2-lineal.

3.2. **El producto $\otimes$.** Si $f : V^k \to \mathbb{R}$ y $g : V^\ell \to \mathbb{R}$ son funciones lineales, definimos la función $f \otimes g : V^{k+\ell} \to \mathbb{R}$ como

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_\ell) = f(v_1, \ldots, v_k)g(v_{k+1}, \ldots, v_\ell). \tag{5}$$

Ejemplo 3.8. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones lineales.

Entonces $f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R}$ es 2-lineal:

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(v + cv', w) &= f(v + cv')g(w) = f(v)g(w) + cf(v')g(w)\\ &= (f \otimes g)(v, w) + c(f \otimes g)(v', w).\end{aligned}$$

Idem $(f \otimes g)(v, w + cw') = (f \otimes g)(v, w) + c(f \otimes g)(v, w')$.

El Ejemplo 3.8 ilustra una propiedad general de $\otimes$, como vemos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.9. Sean $f : V^k \to \mathbb{R}$ k-lineal y $g : V^\ell \to \mathbb{R}$ ℓ-lineal. Probar que $f \otimes g$ es $k + \ell$-lineal.

Teorema 3.10. *Si $f : V^k \to \mathbb{R}$ es lineal, existen únicos escalares $a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, tales que*

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}.$$

Prueba. En el Teorema 3.5 vimos el caso $k = 1$. Si $k > 1$ y $f : V^k \to \mathbb{R}$ es k-lineal, lo mismo vale en cada coordenada: si $v_i = (x_{1,i}, \ldots, x_{n,i}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_k) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i,1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{n} x_{i,k} e_{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k} x_{i,1} \ldots x_{i,k} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1}(v_1) \ldots e^{i_k}(v_k) f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \end{aligned}$$

y así

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_k} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$$

y vale el teorema con $a_{i_1,\ldots,i_k} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. La unicidad de estos coeficientes se sigue como en el Teorema 3.5, evaluando en y evaluando en $(e_{i_1}, \ldots e_{i_k}) \in V^k$. □

3.3. **Funciones alternadas.**

Definición 3.11. Una función k-lineal $f : V^k \to \mathbb{R}$ es *alternada* si

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

para todos los $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Es decir, $f : V^k \to \mathbb{R}$ es alternada si al cambiar de lugar dos vectores cambia el signo de la función.

Ejercicio 3.12. Mostrar la función f del Ejercicio 3.7 es alternada.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\Lambda^k(V) = \{f : V^k \to \mathbb{R} : f \text{ es } k\text{-lineal y alternada}\}.$$

Además, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$. Notar que $f \in \Lambda^1(V)$ si y solo si es $\mathbb{R}$-lineal (no hay lugares que cambiar), en otras palabras $\Lambda^1(V) = V^*$.

Observación 3.13. Sea $f : V \times V \to\ R$ alternada. Entonces

$$f(v, v) = 0, \text{ para todo } v \in V,$$

puesto que $f(v, v) = -f(v, v)$ por definición.

Por otro lado, si $g : V \times V \to \mathbb{R}$ es lineal y cumple que $g(v,v) = 0$ para todo $v \in V$, entonces, para $v, w \in V$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= g(v-w, v-w) = g(v,v) + g(w,w) - g(w,v) - g(v,w) \\ &= -g(w,v) - g(v,w). \end{aligned}$$

Es decir, $g(v,w) = -g(w,v)$. Por lo tanto g es alternada.

El resultado de la Observación 3.13 es una caracterización general de las funciones alternadas.

Proposición 3.14. *Sea $f : V^k \to \mathbb{R}$ multilineal. Entonces $f \in \Lambda^k(V)$ si y solo si*

$$f(v_1, \dots, v_k) = 0$$

siempre que existan $1 \leq i \neq j \leq n$ tales que $v_i = v_j$.

Prueba. Ejercicio. Notar que la implicación $\Rightarrow$ es una consecuencia directa de la Definición 3.11. Para la otra implicación, usar que

$$0 = f(v_1, \dots, v_i - v_j, \dots, v_i - v_j, \dots, v_k).$$

$\square$

Podemos definir una suma y un producto por escalares en $\Lambda^k(V)$, via:

$$\begin{aligned} (f+g)(v_1, \dots, v_k) &= f(v_1, \dots, v_k) + g(v_1, \dots, v_k), \\ (c \cdot f)(v_1, \dots, v_k) &= cf(v_1, \dots, v_k). \end{aligned} \tag{6}$$

para cada $f, g \in \Lambda^k(V)$ y $c \in \mathbb{R}$. Dejamos la comprobación de que están bien definidos como ejercicio:

Ejercicio 3.15. Sean $f, g \in \Lambda^k(V)$. Entonces $f + g \in \Lambda^k(V)$ y $c \cdot f \in \Lambda^k(V)$.

3.4. **Construcción de funciones alternadas.** Veremos dos caminos, relacionados entre sí, para obtener nuevos ejemplos de funciones alternadas, a partir de funciones multilineales.

3.4.1. *El operador* alt.

Observación 3.16. Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una función 2-lineal, y sea

$$\operatorname{alt}(f)(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \left(f(v_1, v_2) - f(v_2, v_1) \right).$$

Entonces $\operatorname{alt}(f)$ es alternada.

Prueba. En efecto, $\operatorname{alt}(f)(v,v) = 0$. $\square$

La Observación 3.16 es un caso particular de la siguiente definición general.

Definición 3.17. Sea $f : V^k \to \mathbb{R}$ una función multilineal. Se define otra función $\operatorname{alt}(f) : V^k \to \mathbb{R}$ via

$$\operatorname{alt}(f)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \tag{7}$$

Aquí $\mathbb{S}_k$ denota el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\mathbb{I}_k = \{1,\dots,k\}$, es decir

$$\mathbb{S}_k = \{\sigma : \mathbb{I}_k \to \mathbb{I}_k | \sigma \text{ es biyectiva}\}.$$

A su vez, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ denota el *signo* de la permutación[3].

Ejemplo 3.18. Sea $g : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ una función 3-lineal, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{alt}(g)(v_1,v_2,v_3) = g(v_1,v_2,v_3) &- g(v_2,v_1,v_3) - g(v_3,v_2,v_1)\\ &- g(v_1,v_3,v_2) + g(v_2,v_3,v_1) + g(v_3,v_1,v_2).\end{aligned}$$

Proposición 3.19. *Sea $f : V^k \to \mathbb{R}$ k-lineal. Entonces* $\operatorname{alt}(f) \in \Lambda^k(V)$. □

Ejercicio 3.20. Demostrar la Proposición 3.19 en el caso $k = 3$, para g como en el Ejemplo 3.18.

3.4.2. *El producto* $\wedge$. Vimos en el Ejercicio 3.15 que podemos sumar funciones multilineales y alternadas. También sabemos, de (5), que existe un producto $\otimes$ entre funciones multineales. En general, si f y g son alternadas, el producto $f \otimes g$ no será alternado.

Ejercicio 3.21. Dar un ejemplo de dos funciones lineales (y por lo tanto alternadas) $f, g : V \to \mathbb{R}$ tales que $f \otimes g$ no sea alternada.

En esta sección veremos que, no obstante, podemos definir un producto $f \wedge g$ de manera tal que si $f \in \Lambda^k(V)$ y $g \in \Lambda^\ell(V)$, entonces $f \wedge g \in \Lambda^{k+\ell}(V)$.

Ejemplo 3.22. Sean $f, g : V \to \mathbb{R}$ funciones lineales. Entonces la función $f \wedge g : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f \wedge g)(v,w) = \frac{1}{2}\big(f(v)g(w) - f(w)g(v)\big),$$

es una función alternada.

Prueba. En efecto, $(f \wedge g)(v,v) = 0$. □

Recordemos la definición del operador alt de (7) que transforma funciones lineales en funciones alternadas.

Definición 3.23. Sean $f \in \Lambda^k(V)$ y $g \in \Lambda^\ell(V)$. Entonces definimos

$$f \wedge g = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}\operatorname{alt}(f \otimes g) \in \Lambda^{k+\ell}(V).$$

Es decir,

$$f \wedge g(v_1,\dots,v_{k+\ell}) = \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+\ell)}).$$

Se puede probar que el producto $\wedge$ es asociativo. Es decir:

[3]Si escribimos la lista $(\sigma(1),\dots,\sigma(k))$ y contamos la cantidad c de cambios de lugar que debemos hacer para obtener la lista ordenanada $(1,\dots,k)$, entonces $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^c$.

Proposición 3.24. *Sean $f \in \Lambda^k(V)$, $g \in \Lambda^\ell(V)$ y $h \in \Lambda^m(V)$. Entonces*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = \frac{k!\ell!m!}{(k+\ell+m)!}\,\mathrm{alt}(f \otimes g \otimes h).$$

Prueba. Ejercicio*.

Observación 3.25. Usted dirá:

¿Para qué multiplica por $\frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}$ *si ya* $\mathrm{alt}(f \otimes g) \in \Lambda^{k+\ell}(V)$*?*

Veremos más adelante (Ejercicio 3.7) la conveniencia de *ajustar* el producto $\wedge$ con este factor.

Teorema 3.26. *Si $f \in \Lambda^k(V)$, existen únicos escalares $a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, tales que*

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1,\dots,i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Es decir, el conjunto:

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V)$. □

Ejercicio 3.27. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como en el Ejercicio 3.7. Mostrar que

$$f = e^1 \wedge e^2,$$

donde $e^1, e^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas del Ejemplo 3.4.

Corolario 3.28. $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \cdot (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)$. *Es decir, si f es n-lineal en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un único escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f = a\, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

Por otro lado, si $m > n$, $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Ejercicio 3.29. Sean $1 \leq i_1 < \dots i_k \leq n$. Probar que

$$(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1.$$

¿Cuánto valdría esta igualdad si el factor $\frac{k!\ell!}{(k+\ell)!}$ no apareciera en la defnición del producto $\wedge$? Recordar la Observación 3.25.

Ejercicio 3.30.

(1) Probar que

$$(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$$

donde A es la matriz $n \times n$ cuyas filas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

(2) Sea A como en (1). Probar que

$$(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det(A_k)$$

donde A_k es la submatriz $k \times k$ obtenida de A seleccionando solo las k columnas $i_1, \dots, i_k$.

Observación 3.31. Sea ω una n-forma en $\mathbb{R}^n$. Entonces ω separa a las distintas *bases*[4] $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ entre aquellas para las que $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ y las que $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$. Decimos que dos bases con el mismo signo tienen la misma *orientación*.

4. Formas diferenciales

Si $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto dado, vamos a decir que *el espacio tangente* a $\mathbb{R}^n$ en el punto p es el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^n$ con origen en p. En otras palabras:

Definición 4.1. El espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto p, que denotamos $\mathbb{R}^n_p$, es el conjunto de los pares (v, p), con $v \in \mathbb{R}^n$. Este espacio tiene una suma y un producto por escalares heredado de estas mismas estructuras en $\mathbb{R}^n$, a saber:

$$(v,p) + (v',p) = (v+v',p), \qquad a \cdot (v,p) = (a \cdot v, p)$$

para todo $v, v' \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$.

En particular, para cada $p \in \mathbb{R}^n$ podemos considerar el conjunto de las funciones k-lineales y alternadas $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$.

Definición 4.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Una *k-forma diferencial* en A es una función ω que asigna a cada punto $p \in A$ una función k-lineal y alternada $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$. Es decir,

$$\omega : A \to \bigsqcup_{p \in A} \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p), \text{ con } \omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p).$$

En particular, una 0-forma es una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Observación 4.3. Podemos "independizarnos" del punto p y considerar a una k-forma en A como una función $\omega : A \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ que asigna a cada punto $p \in A$ una función alternada $\omega(p) : V^k \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y sea $p \in A$. La derivada $Df(p) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p))$ se identifica con una función $df : A \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, via

$$df(p)(v) = Df(p) \cdot v.$$

Consideremos el caso particular de las funciones coordenadas

$$x^i : A \to \mathbb{R}, \qquad p = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Notar que

$$Dx^i(p) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial x_n}(p) \right) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{lugar } i}, 0, \ldots, 0)$$

[4]Una base de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que la matriz A cuyas filas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$ cumple $\det A \neq 0$. Esto permite escribir cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ de manera única como $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$, con $c_i \in \mathbb{R}$.

y por lo tanto, si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_p$ tenemos que

$$dx^i(p)(v,p) = Dx^i(p) \cdot v = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \cdot v = x_i.$$

Es decir, que las 1-formas $dx^i(p)$ coinciden en $\Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)$ con las funciones e^i definidas en el Ejemplo 3.4.

Ahora, como $df(p) \in \Lambda^1(V) = V^*$ para cada $p \in A$, el Teorema 3.5 implica que para cada p existen escalares $(df)_1(p), \ldots, (df)_n(p)$ tales que $df(p) = (df)_1(p)dx^1 + \cdots + (df)_n(p)dx^n$. En otras palabras, esto define funciones $(df)_1, \ldots, (df)_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $df = (df)_1 dx^1 + \cdots + (df)_n dx^n$. Estas funciones son bien conocidas, como indica el siguiente lema.

Lema 4.5. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$, entonces*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Prueba. En efecto, recordar que si $v = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_p$, entonces $dx^i(p)(v,p) = x_i$. Así:

$$\begin{aligned} df(p)(v,p) = Df(p)(v) &= (\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)) \cdot (x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)x_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx^1(p)(v,p) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)dx^n(p)(v,p), \end{aligned}$$

para todo $p \in A$ y todo $(v,p) \in \mathbb{R}^n_p$. Esto muestra el lema. $\square$

Así, el Teorema 3.26 puede escribirse en este contexto como:

Teorema 4.6. *Si ω es una k-forma en A, existen únicos escalares $\omega_{i_1,\ldots,i_k}(p) \in \mathbb{R}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, tales que*

$$\omega(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(p) dx^{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(p).$$

Es decir, el conjunto:

$$\{dx^{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(p) | 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$$

es una base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$. $\square$

En particular, dada una k-forma ω en A, ésta define funciones

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k} : A \to \mathbb{R}$$

para cada $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Vamos a escribir dx^i en lugar de $dx^i(p)$ cuando el punto p esté claro por el contexto. Así, escribimos

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Definición 4.7. Una k-forma $\omega : A \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable si las funciones $\omega_{i_1,\ldots,i_k} : A \to \mathbb{R}$ lo son, para todo $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$.

El Corolario 3.28 establece que, si ω es una n-forma en $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe una *única* función $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

5. El diferencial d

En lo que sigue, las k-formas que consideraremos serán diferenciales, sin explicitarlo. Es decir, a partir de ahora para nosotros "k-forma" significa "k-forma diferencial".

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, en otras palabras, una 0-forma, entonces hemos visto que podemos definir una 1-forma $df : A \to \mathbb{R}$.

En esta sección veremos como extender esto a un operador más general $d : \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n_p)$, que tranforme k-formas en $k+1$-formas.

Comenzamos con una definición general:

Definición 5.1. Sea $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ una k-forma. Entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1,\dots,i_k} (d\omega_{i_1,\dots,i_k}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Es decir, aplicamos d a las 1-formas $\omega_{i_1,\dots,i_k}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$.

El operador d tiene algunas propiedades interesantes:

Proposición 5.2.

(1) Es lineal: $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$

(2) Es (casi) multiplicativo: si ω es una k-forma y ω es una ℓ-forma:

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^{k\ell} \omega \wedge d\omega'.$$

Prueba. (1) es una consecuencia de la linealidad de la derivada, por la definición de d.

Para ver (2), notemos que la formula es válida si $\omega = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ y $\omega' = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_\ell}$, ya que $d(\omega \wedge \omega') = 0 = d\omega \wedge \omega' + (-1)^{k\ell} \omega \wedge d\omega'$. Si $\omega = f$ es una forma de orden 0 y $\omega' = g dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell}$, entonces $\omega \wedge \omega' = f g dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell}$ y

$$\begin{aligned} d(fgdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell}) &= d(fg) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell} \\ &= d(f) g dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + f d(g) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell} \\ &= d(\omega) \wedge \omega' + (-1)^{0 \cdot \ell} \omega \wedge d(\omega'), \end{aligned}$$

utilizando la regla de la derivada de un producto de funciones. El caso general ahora puede verse utilizando este hecho y (1). □

Teorema 5.3. *Sea ω una ℓ-formal diferencial. Entonces $d(d\omega) = 0$. En otras palabras $d^2 = 0$.*

Prueba. Basta verlo para ω de la forma $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell}$, usando la Proposición 5.2 (1) para el caso general. El resultado se sigue del hecho de que las derivadas cruzadas de una función C^∞ son iguales, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i<j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

usando que $dx^i \wedge dx^i = 0$ y $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

5.1. f^***.** Extendamos el Ejemplo 4.4 a un caso más general.

Observación 5.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función C^∞, y sea $p \in A$. La derivada $Df(p) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$ es una matriz $m \times n$ que se identifica con una trasformación lineal $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$Df(p)(v) = Df(p) \cdot v.$$

A su vez, podemos definir entonces una aplicación $f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$, $\omega \mapsto f^*\omega$, donde $\big(f^*(\omega)\big)(p) = f^*\big(\omega(p)\big)$. Concretamente,

$$\big(f^*(\omega)\big)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(Df(p) \cdot v_1, \ldots, Df(p) \cdot v_k). \tag{8}$$

Teorema 5.5. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable, entonces*

(1) $f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j = df^i$.
(2) $f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega'$.
(3) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*\omega$.
(4) $f^*(\omega \wedge \omega') = f^*\omega \wedge f^*\omega'$.

Prueba. (1) Si $(v, p) \in \mathbb{R}^n_p$, $v = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
f^*(dx^i)(v, p) &= dx^i(f(p))(Df(p) \cdot v) \\
&= dx^i(f(p))\Big(\sum_j \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p) \cdot x_j, \ldots, \sum_j \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(p) \cdot x_j\Big) \\
&= \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \cdot x_j = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \cdot dx^j(p)(v).
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del Lema 4.5.

(2), (3), (4): Ejercicio. □

Observación 5.6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y Df la matriz

$$Df = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}.$$

El Teorema 5.5 implica que

$$f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \det(Df)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{9}$$

Veamos el caso $n = 2$, si $f = (f^1, f^2)$, entonces

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge dx^2) &= f^*(dx^1) \wedge f^*(dx^2) \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2}dx^2\right) \wedge \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}dx^2\right) \\ &= \frac{\partial f^1}{\partial x^1}dx^1 \wedge \frac{\partial f^2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2}dx^2 \wedge \frac{\partial f^2}{\partial x^1}dx^1 \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\frac{\partial f^2}{\partial x^2} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Recordar que $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ y así $dx^i \wedge dx^i = 0$.

Ejercicio 5.7.
(1) Probar el caso general en la Observación 5.6, es decir, que vale (9).
(2) Mostrar que si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces

$$f^*(h\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f) \cdot \det(Df)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

La siguiente propiedad será de gran utilidad.

Teorema 5.8. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable, entonces*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega). \tag{10}$$

Prueba. Es claro para una forma de orden 0. También, si $\omega = dx^i$, entonces $d(dx^i) = 0$ y así $f^*(d\omega) = 0$. Por otro lado,

$$d(f^*dx^i) = d(d(f^i)) = 0$$

Luego procedemos inductivamente: si la afirmación es válida para una k-forma, $k \geq 0$, basta probarla ahora para una $k+1$-forma del tipo $\omega \wedge dx^i$, donde ω es una k-forma. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) \\ &= d(f^*(\omega \wedge dx^i)). \end{aligned}$$

Esto muestra el teorema. □

Ejercicio 5.9. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ dos funciones diferenciables y ω una k-forma en $A \subset \mathbb{R}^\ell$. Mostrar que $f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega$.

6. Integración en cadenas

Fijemos $k > 0$ y sea ω una k-forma en $I = [0,1]^k$. Entonces

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

para alguna $f : I \to \mathbb{R}$, por el Teorema 4.6.

Definimos la integral de ω sobre I como:

$$\int_I \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k.$$

Si, más generalmente, ω es una k-forma en A y $c : I \to A$ es un k-cubo, se define

$$\int_c \omega = \int_I c^*\omega.$$

Si $k = 0$, recordemos que $\omega = f : A \to \mathbb{R}$ es una función y un 0-cubo $c : \{0\} \to A$ se corresponde con la elección de un punto $p = c(0) \in A$. Definimos

$$\int_c \omega = f(p).$$

Finalmente, si $c = \sum_i \lambda_i c_i$ es una k-cadena, definimos

$$\int_c \omega = \sum_i \lambda_i \int_{c_i} \omega.$$

Definición 6.1. Decimos que una k-cadena $c : [0,1]^k \to A$ es *diferenciable* si existe un entorno abierto U de $[0,1]^k$ y una función diferenciable $C : U \to A$ tal que $C_{|[0,1]^k} = c$.

6.1. **Ejemplos.**

Ejemplo 6.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $\gamma \subset A$ una curva suave. Entonces existe un 1-cubo diferenciable $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ de modo que $c([0,1]) = \gamma$. Una 1-forma ω es una combinación $\omega(x,y) = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ para dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_c \omega = \int_0^1 f(x(t), y(t))x'(t)dt + \int_0^1 g(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Tomemos $c(t) = (t, t^2)$, $f(x,y) = 0$ y $g(x,y) = y^3$. Entonces

$$\int_c \omega = 2\int_0^1 (t^2)^3 t dt = 2\int_0^1 t^7 dt = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 6.3 (La integral de línea)**.** Sean $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ como en el Ejemplo 6.2. Supongamos que $c'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$ y consideremos la 1-forma $ds : \gamma \to \mathbb{R}$ dada por

$$ds(p) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}dx + \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}dy, \ p = c(t). \tag{11}$$

Sea $f : \gamma \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces fds es una 1-forma en γ. Se define la *integral de línea* de f sobre γ como

$$\oint_\gamma fds = \int_c fds.$$

Es decir,

$$\oint_\gamma fds = \int_0^1 f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Si $f = 1$, entonces $\oint_\gamma fds$ =longitud de γ. Si $c(t) = (t, t^2)$ como en el Ejemplo 6.2, γ es el arco de la parábola $y = x^2$ para $x \in [0,1]$ y

$$\oint_\gamma ds = \int_0^1 \sqrt{1+2t}dt = \frac{2}{6}(1+2t)^{3/2}|_0^1 = \frac{2}{6}(3\sqrt{3} - 1)$$

determina su longitud.

Ejemplo 6.4 (La integral de superficie)**.** Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, imagen de un 2-cubo diferenciable $c(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. Sean

$$c_s(s,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s,t), \frac{\partial y}{\partial s}(s,t), \frac{\partial z}{\partial s}(s,t)\right),$$
$$c_t(s,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s,t), \frac{\partial y}{\partial t}(s,t), \frac{\partial z}{\partial t}(s,t)\right)$$

y $n(s,t) = c_s(s,t) \times c_t(s,t) = (n^1(s,t), n^2(s,t), n^3(s,t))$. Entonces

$$dS(p) = N^1(s,t)dxdy + N^2(s,t)dydz + N^3(s,t)dxdz, \ p = c(s,t).$$

define una 2-forma en S, para

$$N^i(s,t) = \frac{n^i(s,t)}{\sqrt{n^1(s,t)^2 + n^2(s,t)^2 + n^3(s,t)^2}}, \ i = 1,2,3.$$

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La *integral de superficie* de f sobre S es la integral

$$\oint_S fdS = \int_c fdS$$

Si $f = 1$, entonces $\oint_S fdS$ =área de S.

7. El Teorema de Stokes

El siguiente teorema conecta el diferencial d que transforma $k-1$-formas en k-formas y el operador de frontera ∂ que transforma k-cadenas en $k-1$-cadenas.

Teorema 7.1. *Sea ω una $k-1$-forma en A y sea c una k-cadena diferenciable en A. Entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Prueba. Comenzamos con el caso $c = I^k$. Queremos ver que

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega \tag{12}$$

Podemos suponer que

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

ya que una k-forma general es una suma de k-formas de este tipo.

Analicemos el término $\int_{\partial c} \omega$. Recordemos la definición de ∂I^k y notemos que, para $\alpha = 0, 1$:

$$\begin{aligned}&\left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots dx^k)\\ &= f(x^1, \dots, \underbrace{\alpha}_{\text{lugar } j}, \dots, x^k) \left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (dx^1) \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (dx^k)\end{aligned}$$

Recordar que

$$I^k_{j,\alpha}(x^1, \dots, \widehat{x^j}, \dots, x^k) = (x^1, \dots, \underbrace{\alpha}_{\text{lugar } j}, \dots, x^k)$$

y así

$$\left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (dx^\ell) = \begin{cases} 0, & j = \ell \\ dx^\ell, & j \neq \ell, \end{cases}$$

En efecto, $\left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (dx^j) = d(I^k_{j,\alpha})^j = 0$ ya que la coordenada j de $I^k_{j,\alpha}$ es constante ($= \alpha$). Por otro lado, si $\ell \neq j$, $\left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (dx^\ell) = dx^\ell$ ya que la coordenanda ℓ de $I^k_{j,\alpha}$ es x^ℓ.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^{k-1}} \left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots dx^k)\\ &\qquad = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k, & j = i, \end{cases}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial I^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^k \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \left(\int_{[0,1]^{k-1}} \left(I^k_{j,\alpha}\right)^* (f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^k) \right) \\
&= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \Big(f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) - f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k) \Big) \, dx^1 \ldots dx^k.
\end{aligned}$$

Ahora analizamos el término $\int_c d\omega$. Primero,

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k
\end{aligned}$$

ya que los otros términos de df se anulan. Ahora, usando el *Teorema de Fubini*[5]:

$$\begin{aligned}
&\int_{I^k} d\omega = (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^k) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k \\
&\quad - (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^k) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k \\
&= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \Big(f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) - f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k) \Big) \, dx^1 \ldots dx^k \\
&= \int_{\partial I^k} \omega
\end{aligned}$$

usando la Regla de Barrow y $\int_0^1 dx^i = 1$.

Para el caso general, notar que si c es un k-cubo, entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{c \circ \partial I^k} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega, \tag{13}$$

usando el Ejercicio 5.9. Entonces

$$\int_c d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{I^k} c^*(d\omega) \overset{(10)}{=} \int_{I^k} d(c^*\omega) \overset{(12)}{=} \int_{\partial I^k} c^*\omega \overset{(13)}{=} \int_{\partial c} \omega.$$

$\square$

---

[5]Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

7.1. **Algunas consecuencias.**

Teorema 7.2 (Teorema de Green)**.** *Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por una curva diferenciable $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Sean $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Entonces*

$$\int_\gamma \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = \int_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.$$

Prueba. La función $\omega = \alpha dx + \beta dy$ es una 1-forma en $\gamma = \partial M$ que satisface

$$\begin{aligned} d\omega = d\alpha dx + d\beta dy &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= -\frac{\partial \alpha}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy \end{aligned}$$

y así el teorema es una consecuencia del Teorema 7.1. □

Si $M \subset \mathbb{R}^2$, entonces el área de M puede calcularse como $\int_M dxdy$. El Teorema de Stokes nos da una alternativa.

Corolario 7.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por una curva diferenciable $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Entonces el área de M está dada por*

$$\int_\gamma xdy.$$

Prueba. Tomamos $\alpha(x,y) = 0$ y $\beta(x,y) = x$ en el Teorema de Green. □

Ejemplo 7.4. Sea $D \subset R^2$ el disco de radio R. Sabemos que $\partial D = c_1(t)$ donde

$$c_1(t) = (R\cos(2\pi t), R\operatorname{sen}(2\pi t)), \qquad c_0(t) = (0,0); \quad t \in [0,1].$$

Entonces

$$\int_{c_1} xdy = 2\pi \int_0^1 R^2 \cos^2(2\pi t)dt = 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) \right) |_0^1 = \pi R^2,$$

lo cual coincide con el área de D.