El grupo fundamental

Mariano Suárez-Álvarez

22 de mayo, 2017

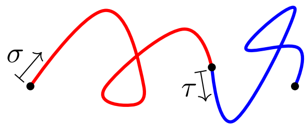
1 Curvas

1.1. Sea X un espacio topológico y escribamos I al intervalo $[0,1]$. Una ***curva*** o ***camino*** en X es una función continua $\sigma : I \to X$. Si $x = \sigma(0)$ e $y = \sigma(1)$, decimos que la curva σ ***va de x a y***, que σ ***empieza*** en x y que ***termina*** en y. Escribimos $\mathscr{C}(X; x, y)$ al conjunto de todas las curvas en X que va de x a y.

Podemos visualizar una curva $\sigma : I \to X$ en X como la descripción del movimiento de una "partícula" dentro de X: en cada instante $s \in I$ la partícula se encuentra en el punto $\sigma(s)$ de X y, en particular, comienza su movimiento en el punto $\sigma(0)$ y lo termina en el punto $\sigma(1)$.

1.2. Supongamos que σ y τ son dos curvas en X y que σ termina en el punto en el que empieza τ. Podemos definir entonces una nueva curva $\rho : I \to X$ en X poniendo, para cada $s \in I$,

$$\rho(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \tau(2s-1), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



En efecto, la condición impuesta sobre σ y τ implica que esto está bien definido y, dado eso, que es continua. Observemos que esta curva ρ empieza en el punto en el que empieza σ y que termina en el punto en el que termina τ. Llamamos a la curva ρ la ***concatenación*** de las curvas σ y ρ, y la escribimos $\sigma \star \tau$. Si x, y, $z \in X$, obtenemos de esta forma una función

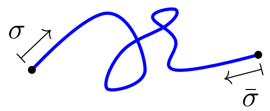
$$\star : \mathscr{C}(X; x, y) \times \mathscr{C}(X; y, z) \to \mathscr{C}(X; x, z)$$

a la que vemos como una operación entre caminos.

Si visualizamos a las curvas en X como descripciones del movimiento de una partícula dentro del espacio, la concatenación tiene una interpretación natural: si σ y τ describen el movimiento de una partícula que va desde x a y y desde y a z, respectivamente, entonces $\sigma \star \tau$ describe el movimiento de la partícula que consiste en recorrer el camino descripto por σ, pero al doble de velocidad, y luego el camino descripto por τ, otra vez al doble de velocidad.

1.3. Si σ es una curva en X que va de x a y, podemos construir una nueva curva $\bar{\sigma} : I \to X$ poniendo

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma(1 - s)$$



para cada $s \in I$. En efecto, esto define una función continua y, como $\bar{\sigma}(0) = \sigma(1)$ y $\bar{\sigma}(1) = \sigma(0)$, esta curva $\bar{\sigma}$ va de y a x. Llamamos a $\bar{\sigma}$ la ***reversión*** de σ.

Si vemos a σ como la descripción del movimiento de una partícula que va desde el punto x hasta el punto y, entonces $\bar{\sigma}$ describe el movimiento inverso.

1.4. Si x es un punto de X, entonces la función $\varepsilon_x : s \in I \mapsto x \in X$ es claramente un elemento de $\mathscr{C}(X; x, x)$, al que llamamos la ***curva constante*** en x.

2 Conexión por arcos

2.1. Si x e y son dos puntos de X, decimos que y es ***alcanzable*** desde x, y escribimos $x \rightsquigarrow y$, cuando existe una curva σ en X que va de x a y.

Lema. *La relación $\rightsquigarrow$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto X.*

Demostración. Tenemos que verificar las condiciones para que $\rightsquigarrow$ sea una relación de equivalencia:

- Si $x \in X$, entonces la función $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(s) = x$ para todo $s \in I$ es continua y es claramente una curva que va de x a x: esto muestra que $x \rightsquigarrow x$ y, por lo tanto, que la relación $\rightsquigarrow$ es reflexiva.
- Sean x e y dos puntos de X y supongamos que $x \rightsquigarrow y$, de manera que hay una curva σ en X que va de x a y. La curva $\bar{\sigma} : I \to X$ va entonces de y a x y, por lo tanto $y \rightsquigarrow x$ en X. Vemos así que la relación $\rightsquigarrow$ es simétrica.
- Finalmente, supongamos que x, y y z son puntos de X tales que $x \rightsquigarrow y$ e $y \rightsquigarrow z$, y sean σ y τ curvas en X que van de x a y y de y a z, respectivamente. Como σ termina en el punto en el que empieza τ, podemos considerar la concatenación $\sigma \star \tau : I \to X$, que es una curva en X que va de x a z, y esto muestra que $x \rightsquigarrow z$ en X y, en definitiva, que la relación $\rightsquigarrow$ es transitiva. $\square$

2.2. Como $\rightsquigarrow$ es una relación de equivalencia sobre X, podemos considerar las clases de equivalencia de los elementos de X: si $x \in X$, llamamos a la clase de equivalencia $\{y \in Y : y \rightsquigarrow x\}$ de x en X la ***componente arco-conexa de x en X***. Como pasa siempre que tenemos una relación de equivalencia sobre un conjunto, las componentes arco-conexas de X forman una partición de X.

Decimos que X es ***arco-conexo*** si posee exactamente una componente arco-conexa. Esta condición significa precisamente que cada vez que x e y son puntos de X existe al menos una curva en X que va de x a y.

2.3. Supongamos que $X = \mathbb{R}^n$. Si x e y son dos puntos de $\mathbb{R}^n$, entonces la función

$$\sigma : s \in I \mapsto (1-s)x + sy \in \mathbb{R}^n$$

es continua, así que es una curva en $\mathbb{R}^n$, y va de x a y, así que $x \rightsquigarrow y$ en $\mathbb{R}^n$. Esto muestra que $\mathbb{R}^n$ tiene una única componente arco-conexa y que, por lo tanto, es un espacio arco-conexo.

Este argumento para probar que $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo se basa en la observación de que cada vez que x e y son puntos de $\mathbb{R}^n$ entonces tenemos una curva natural que va de x a y, a saber, el segmento de recta que une a x con y, toma valores en $\mathbb{R}^n$, lo que es evidente. La misma idea se aplica en una situación un poco más general.

Decimos que un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es ***convexo*** si cada vez que x e y son puntos de X entonces el segmento de recta que une a x con y está contenido en $\mathbb{R}^n$, esto es, si se cumple que

cada vez que x, $y \in X$ y $s \in I$ se tiene que $(1-s)x + sy \in X$.

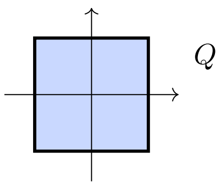
Claramente el conjunto $\mathbb{R}^n$ es convexo, pero hay muchos más. Por ejemplo, el cuadrado

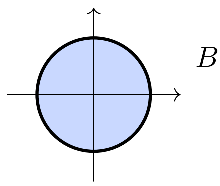
$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$$

y el disco cerrado unitario

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^2$.





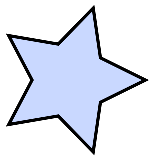
Generalizando lo hecho para $\mathbb{R}^2$, tenemos:

Proposición. *Un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo.*

Demostración. En efecto, supongamos que X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y sean x e y dos puntos de X. Como X es convexo, para cada $s \in [0,1]$ el punto $(1-s)x+sy$ de $\mathbb{R}^n$ está en X y podemos, en consecuencia, considerar la función $\sigma : s \in I \mapsto (1-s)x+sy \in X$. Esta función es claramente una curva en X que va de x a y, así que $x \rightsquigarrow y$ en X. Esto prueba que hay una única componente arco-conexa en X y que, por lo tanto, X es arco-conexo. □

Podemos extender un poco más la útilidad de los segmentos. Decimos que un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es ***estrellado*** si posee un punto $x_0 \in X$ tal que para todo $x \in X$

el segmento de recta que va de x_0 a x está contenido en X, y en ese caso llamamos a ese punto x_0 un ***mirador*** de X. Es claro que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es estrellado, pero la afirmación recíproca no vale: por ejemplo, el conjunto



es estrellado pero no convexo.

Proposición. *Un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo.*

Demostración. Sea X un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in X$ un mirador de X.

Sea $y \in X$. Como x_0 es un mirador de X, el segmento de recta que va de x_0 a y está totalmente contenido en X, así que podemos considerar la función

$$\sigma : s \in I \mapsto (1-s)x + sy \in X.$$

Ésta es continua y va de x_0 a y, así que $x_0 \rightsquigarrow y$ en X. Vemos así que todo punto de X es alcanzable desde x_0 y, por lo tanto, que $X = [\![x_0]\!]$. Así, X posee una única componente arco-conexa, la de x_0, y es, en consecuencia, un espacio arco-conexo. □

2.4. Por supuesto, no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo! Un ejemplo sencillo es el siguiente: tomemos $n = 2$ y sea

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}.$$

Los puntos $x = (-1, 0)$ e $y = (1, 0)$ están en X pero no hay ninguna curva en X de x a y, y esto nos dice que X no es arco-conexo. Para verificarlo, supongamos por el contrario que sí existe una curva $\sigma : I \to X$ que va de x a y. Hay entonces dos funciones σ_1, $\sigma_2 : I \to \mathbb{R}$ tales que $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ para todo $t \in I$, y estas funciones son continuas. Como $(\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = \sigma(0) = x = (-1, 0)$, se tiene que $\sigma_1(0) = -1$; de manera similar, de que $\sigma(1) = y$ se deduce que $\sigma_1(1) = 1$. Como σ_1 es una función continua, el Teorema de Weierstrass implica que existe $\xi \in I$ tal que $\sigma_1(\xi) = 0$. Pero entonces $\sigma(\xi) = (\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi)) = (0, \sigma_2(\xi)) \in X$: esto es absurdo, en vista de la definición del conjunto X.

Observemos que es suficiente con agregar un punto al conjunto X para obtener un conjunto arco-conexo. Por ejemplo, el subconjunto

$$Y = X \cup \{(0, 0)\}$$

de $\mathbb{R}^2$ es arco-conexo. En efecto, se trata de un conjunto estrellado, ya que el punto $(0, 0)$ es un mirador de Y.

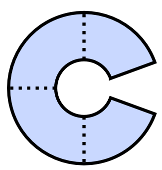
2.5. La prueba que hicimos del hecho de que un conjunto estrellado es arco-conexo se basó en la transitividad de la relación de alcanzabilidad. La misma idea nos permite probar el siguiente resultado:

Proposición. *Si X e Y son dos subconjuntos arco-conexos de $\mathbb{R}^n$ y $X \cap Y \neq \varnothing$, entonces la unión $X \cup Y$ también es un subconjunto arco-conexo de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean X e Y dos subconjuntos arco-conexos de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $x_0 \in X \cap Y$. Para mostrar que $X \cup Y$ es arco-conexo, bastará que probemos que $X \cup Y$ tiene una única componente arco-conexa, la de x_0.

Sea $y \in X \cup Y$. Si y está en X, sabemos, ya que X es arco-conexo, que existe una curva $\sigma : I \to X$ en X que va de x_0 a y y, como X está contenido en la unión $X \cup Y$, podemos considerar a σ como una curva en $X \cup Y$ que va de x_0 a y. Vemos así que en este caso se tiene que $x_0 \rightsquigarrow y$. De la misma forma, si y está en Y, entonces que Y sea arco-conexo nos dice que existe una curva σ en Y que va de x_0 a y y, viendo a esta curva como una curva en $X \cup Y$, que $x_0 \rightsquigarrow y$. En cualquier caso, entonces, se tiene que $x_0 \rightsquigarrow y$ y, por lo tanto, todo punto de $X \cup Y$ es alcanzable desde x_0. □

Esta proposición nos permite probar que el conjunto X de la figura



es arco-conexo: en efecto, es fácil ver que este conjunto puede escribirse como unión de cuatro subconjuntos estrellados X_1, X_2, X_3 y X_4 de manera tal que $X_1 \cap X_1 \neq \varnothing$, $X_2 \cap X_3 \neq \varnothing$ y $X_3 \cap X_4 \neq \varnothing$ y deducir de eso, usando la proposición, que X es arco-conexo.

3 Homotopías

3.1. Si $H : I \times I \to X$ es una función continua, para cada $t \in I$ podemos considerar la función $H_t : s \in I \mapsto H(s,t) \in X$, que es continua y, por lo tanto, que es una curva en X. La función H nos da, de esta forma, una familia $(H_t)_{t \in I}$ de curvas en X indexadas por los elementos de I. Una forma de visualizar esta situación es imaginar que tenemos una película que nos muestra como va deformándose una curva: en cada momento t la curva es H_t. La continuidad de la función H tiene como consecuencia que esta deformación es continua.

3.2. Sean x e y dos puntos de X y consideremos el conjunto $\mathscr{C}(X; x, y)$ de todas las curvas en X que van de x a y. Como sabemos ya, este conjunto es no vacío exactamente cuando x e y están en la misma componente arco-conexa de X.

Si σ y τ son dos elementos de $\mathscr{C}(X; x, y)$, decimos que σ es ***homotópica*** a τ si hay una función continua $H : I \times I \to X$ tal que

- $H_0 = \sigma$ y $H_1 = \tau$, y
- $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = y$ para todo $s \in I$,

y en ese caso escribimos $\sigma \simeq \tau$ y llamamos a la función H una ***homotopía de σ a τ***. Notemos que la primera condición dice que la familia de curvas $(H_t)_{t\in I}$ que corresponde a H empieza con la curva σ y termina con la curva τ, mientras que la segunda condición nos dice que todas las curvas de esa familia van de x a y, esto es, que $H_t \in \mathscr{C}(X; x, y)$ para todo $t \in I$.

Proposición. *Sea X un espacio topológico y sean x e y dos puntos de X. La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathscr{C}(X; x, y)$.*

Demostración. Para mostrar que $\simeq$ es una relación de equivalencia tenemos que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva, y hacemos esto en orden.

- Sea σ un elemento de $\mathscr{C}(X; x, y)$, de manera que $\sigma : I \to X$ es una función continua tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$. Definimos una función $H : I \times I \to X$ poniendo, para todo $(s,t) \in I \times I$,

  $$H(s,t) = \sigma(s).$$

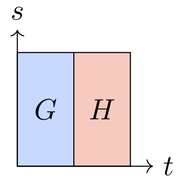
  Es inmediato verificar que se trata de una función continua y se sigue inmediatamente de su definición que $H_0 = H_1 = \sigma$ y que $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = y$ para todo $t \in I$: esto nos dice que H es una homotopía de σ a σ y, por lo tanto, que $\sigma \simeq \sigma$. Vemos así que la relación $\simeq$ es reflexiva. Notemos que la familia de curvas $(H_t)_{t\in I}$ correspondiente a la homotopía de σ en σ que construimos es *constante*: para todo $t \in I$ se tiene que $H_t = \sigma$.
- Sean σ y τ dos elementos de $\mathscr{C}(X; x, y)$, de manera que σ, $\tau : I \to X$ son funciones continuas tales que $\sigma(0) = \tau(0) = x$ y $\sigma(1) = \tau(1) = y$, y supongamos que $\sigma \simeq \tau$, esto es, que existe una función continua $H : I \times I \to X$ tal que $H_0 = \sigma$, $H_1 = \tau$ y $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = y$ para todo $t \in I$. Definimos una nueva función $G : I \times I \to I$ poniendo, para cada $(s,t) \in I \times I$,

  $$G(s,t) = H(s, 1-t).$$

  Se trata de una función continua y la correspondiente familia de curvas $(G_t)_{t\in I}$ es tal que $G_t = H_{1-t}$ para todo $t \in I$. En particular, se tiene que $G_0 = H_1 = \tau$ y $G_1 = H_0 = \sigma$, por un lado, y que $G(0,t) = x$ y $G(1,t) = y$ para todo $t \in I$: esto significa, precisamente, que la función G es una homotopía de τ a σ e implica, por lo tanto, que $\tau \simeq \sigma$. Vemos de esta forma que la relación $\simeq$ es simétrica.
- Sean finalmente, σ, τ y ρ tres elementos de $\mathscr{C}(X; x, y)$ y supongamos que $\sigma \simeq \tau$ y que $\tau \simeq \rho$, de manera que existen una homotopía $G : I \times I \to X$ de σ a τ y una homotopía $H : I \times I \to X$ de τ a ρ. Definamos una función $K : I \times I \to X$

poniendo, para cada $(s,t) \in I \times I$,

$$K(s,t) = \begin{cases} G(s,2t), & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}]; \\ H(s,2t-1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$



Esta función está bien definida, porque $G(s,1) = \tau(s) = H(s,0)$ para todo $s \in I$, y es por lo tanto continua. Es claro que $K_0 = \sigma$, que $K_1 = \rho$ y que $K(0,t) = s$ y $K(1,t) = y$ para todo $t \in I$, así que K es una homotopía de σ a ρ y, por lo tanto, tenemos que $\sigma \simeq \rho$. Esto prueba que la relación $\simeq$ es transitiva.

Con esto, la prueba de la proposición queda completa. $\square$

3.3. En vista de esta proposición, si σ es un elemento de $\mathscr{C}(X;x,y)$, podemos hablar de la clase de equivalencia de σ en $\mathscr{C}(X;x,y)$, esto es, del conjunto de todos las curvas de de $\mathscr{C}(X;x,y)$ que son homotópicas a σ. A esta clase de equivalencia la llamamos la ***clase de homotopía*** de σ.

3.4. Veamos un ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos un subconjunto convexo X de $\mathbb{R}^n$, y sean x e y dos puntos distintos de X. Como X es convexo, tenemos una curva

$$\sigma : s \in I \mapsto (1-t)x + ty \in X$$

de x a y en X. Afirmamos que

toda curva de x a y en X es homotópica a σ.

Sea, en efecto, $\tau : I \to X$ una curva en X que va de x a y. Definimos una función $H : I \times I \to X$ poniendo, para cada $(s,t) \in I \times I$,

$$H(s,t) = (1-t)\sigma(t) + t\tau(t).$$

Es claro que esta función es continua y que $H_0 = \sigma$ y $H_1 = \tau$. Como para todo $t \in I$ se tiene que

$$H(0,t) = (1-t)\sigma(0) + t\tau(0) = (1-t)x + tx = x$$

y, de manera similar, $H(1,t) = y$, esta función H es una homotopía de σ a τ y, por lo tanto, τ es homotópica a σ, como queríamos mostrar. Vemos así que $\mathscr{C}(X;x,y) = [\![\sigma]\!]$ y, por lo tanto, que hay una única clase de homotopía de curvas de x a y en X.

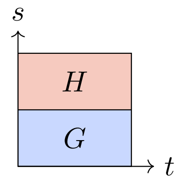
4 Propiedades algebraicas de la relación de homotopía

4.1. Para todo lo que sigue serán importantes ciertas compatibilidades entre la relación de homotopía y las operaciones de concatenación y reversión de curvas que describimos en la Sección 1. El objetivo de esta sección es probarlas.

4.2. Proposición. *Sea X un espacio topológico, sean x, y y z tres puntos de X y sean σ, $\sigma' \in \mathscr{C}(X; x, y)$ y τ, $\tau' \in \mathscr{C}(X; y, z)$. Si $\sigma \simeq \sigma'$ y $\tau \simeq \tau'$, entonces $\sigma \star \tau \simeq \sigma' \star \tau'$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma \simeq \sigma'$ y que $\tau \simeq \tau'$, de manera que existen homotopías G, $H : I \times I \to X$ de σ a σ' y de τ a τ', respectivamente. Como $G(1,t) = y = H(0,t)$ para todo $t \in I$, podemos definir una nueva función $K : I \times I \to X$ poniendo, para cada $(s,t) \in I \times I$,

$$K(s,t) = \begin{cases} G(2s,t), & \text{si } s \in [0, \tfrac{1}{2}]; \\ H(2s-1,t), & \text{si } t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

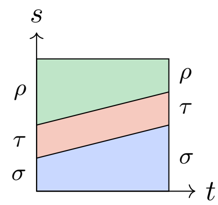


Esta función es continua, es tal que $K_0 = \sigma \star \tau$, $K_1 = \sigma' \star \tau'$, y tiene $K(0,t) = x$ y $K(1,t) = z$ para cada $t \in I$, así que se trata de una homotopía de $\sigma \star \tau$ a $\sigma' \star \tau'$. $\square$

4.3. Proposición. *Sea X un espacio topológico y sean x, y, z y w cuatro puntos de X. Si $\sigma \in \mathscr{C}(X; x, y)$, $\tau \in \mathscr{C}(X; y, z)$ y $\rho \in \mathscr{C}(X; z, w)$, entonces $(\sigma \star \tau) \star \rho \simeq \sigma \star (\tau \star \rho)$.*

Demostración. Sean $\sigma \in \mathscr{C}(X; x, y)$, $\tau \in \mathscr{C}(X; y, z)$ y $\rho \in \mathscr{C}(X; z, w)$ curvas en X y consideremos la función $H : I \times I \to X$ que en cada $(s,t) \in I \times I$ toma el valor

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma\left(\dfrac{4s}{t+1}\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \tfrac{1}{4}(1+t); \\ \tau(4s-1+t), & \text{si } \tfrac{1}{4}(1+t) \leq s \leq \tfrac{1}{4}(2+t); \\ \rho\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right), & \text{si } \tfrac{1}{4}(2+t) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

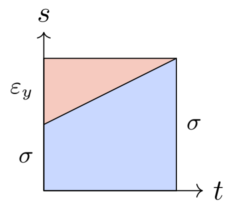


Es fácil ver que esta función está en efecto bien definida, que es continua, y que es una homotopía de la curva $(\sigma \star \tau) \star \rho$ a la curva $\sigma \star (\tau \star \rho)$: esto implica que estas dos curvas son homotópicas y, por lo tanto, que $(\sigma \star \tau) \star \rho \simeq \sigma \star (\tau \star \rho)$. $\square$

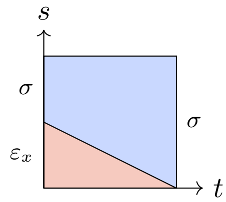
4.4. Proposición. *Sea X un espacio topológico y sean x, $y \in X$. Si $\sigma \in \mathscr{C}(X; x, y)$, entonces $\sigma \star \varepsilon_y \simeq \sigma$ y $\varepsilon_x \star \sigma \simeq \sigma$.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathscr{C}(X; x, y)$ y consideremos las funciones G, $H : I \times I \to X$ tales que para cada $(s,t) \in I \times I$ se tiene que

$$G(s,t) = \begin{cases} \sigma\left(\dfrac{2s}{t+1}\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t); \\ y, & \text{si } \frac{1}{2}(1+t) \leq s \leq 1; \end{cases}$$



$$H(s,t) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1-t); \\ \sigma\left(\dfrac{2s+t-1}{t+1}\right), & \text{si } \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq 1; \end{cases}$$

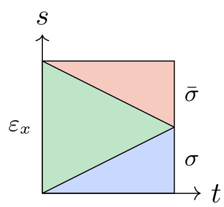


Estas funciones están bien definidas, son continuas y, de hecho, se trata de homotopías de $\sigma \star \varepsilon_y$ a σ y de $\varepsilon_x \star \sigma$ a σ, respectivamente, de manera que $\sigma \star \varepsilon_y \simeq \sigma$ y $\varepsilon_x \star \sigma \simeq \sigma$, como afirma la proposición. $\square$

4.5. Proposición. *Sea X un espacio topológico y sean x, $y \in X$. Si $\sigma \in \mathscr{C}(X;x,y)$, entonces $\varepsilon_x \simeq \sigma \star \bar{\sigma}$.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathscr{C}(X;x,y)$. Hay una función $G : I \times I \to X$ tal que para cada $(s,t) \in I \times I$ tiene

$$G(s,t) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}t; \\ \sigma(t), & \text{si } \frac{1}{2}t \leq s \leq 1 - \frac{1}{2}t; \\ \bar{\sigma}(s-1), & \text{si } 1 - \frac{1}{2}t \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Esta función es continua y es, de hecho, una homotopía de ε_x a $\sigma \star \bar{\sigma}$, así que $\varepsilon_x \simeq \sigma \star \bar{\sigma}$, como afirma la proposición. $\square$

5 El grupo fundamental

5.1. Fijemos un punto $x_0 \in X$ y, para simplificar la notación, escribimos $\Omega(X,x_0)$ en lugar de $\mathscr{C}(X;x_0,x_0)$. Los elementos de $\Omega(X,x_0)$ son curvas en X que van de x_0 a x_0 y decimos por ello que son curvas ***cerradas*** basadas en el punto x_0

La relación de homotopía $\simeq$ que describimos en la sección anterior nos da una relación de equivalencia en el conjunto $\Omega(X,x_0)$. Escribimos $\pi_1(X,x_0)$ al correspondiente cociente: los elementos de $\pi_1(X,x_0)$ son, por lo tanto, las clases de equivalencia con respecto a la relación $\simeq$ en $\Omega(X,x_0)$. Si σ es un elemento de $\Omega(X,x_0)$, escribimos $[\![\sigma]\!]$ a su clase de equivalencia y la llamamos la ***clase de homotopía*** de σ. Recíprocamente, si u es un elemento de $\pi_1(X,x_0)$, entonces existe una curva σ en $\Omega(X,x_0)$ tal que $u = [\![\sigma]\!]$: llamamos a toda tal curva un ***representante*** de u. Es importante no olvidar que cada elemento de $\pi_1(X, x_0)$ posee, en general, muchos representantes distintos.

5.2. Estamos, por fin, en posición de presentar el objeto del cual se tratan estas notas:

Proposición. *Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Existe una estructura de grupo sobre el conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con multiplicación $\cdot$ tal que si σ y τ son dos elementos de $\Omega(X, x_0)$ y $[\![\sigma]\!]$ y $[\![\tau]\!]$ son sus clases de homotopía en $\pi_1(X, x_0)$, entonces se tiene que*

$$[\![\sigma]\!] \cdot [\![\tau]\!] = [\![\sigma \star \tau]\!].$$

En este grupo

- *el elemento neutro de este grupo es la clase de homotopía $[\![\varepsilon]\!]$ de la curva constante $\varepsilon : s \in I \mapsto x_0 \in X$ en x_0, y*
- *si σ es un elemento de $\Omega(X, x_0)$, entonces el inverso de la clase de homotopía $[\![\sigma]\!]$ es la clase de homotopía de su reversión, esto es, $[\![\sigma]\!]^{-1} = [\![\bar{\sigma}]\!]$.*

Demostración. Tenemos que definir un producto

$$\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0). \tag{1}$$

Sean u y v dos elementos de $\pi_1(X, x_0)$, de manera que hay curvas σ y τ en $\Omega(X, x_0)$ tales que $u = [\![\sigma]\!]$ y $v = [\![\tau]\!]$: de acuerdo al enunciado, estamos obligados a definir el producto $u \cdot v$ como $[\![\sigma \star \tau]\!]$, pero para que esto tenga sentido es necesario que verifiquemos que la clase de homotopía $[\![\sigma \star \tau]\!]$ depende sólo de u y de v y no de los representantes σ y τ elegidos para calcularla. Así, necesitamos saber que

> *si σ y σ' son dos representantes de u y τ y τ' dos de v, entonces las clases de homotopía $[\![\sigma \star \tau]\!]$ y $[\![\sigma' \star \tau']\!]$ coinciden,*

y esto es consecuencia inmediata de lo que afirma la Proposición **4.2**.

Concluimos de esta forma que existe efectivamente un producto (1) sobre $\pi_1(X, x_0)$ tal que $[\![\sigma]\!] \cdot [\![\tau]\!] = [\![\sigma \star \tau]\!]$ para cada par de curvas σ y τ de $\Omega(X, x_0)$. Mostraremos ahora que este producto hace del conjunto $\pi_1(X, x_0)$ un grupo que satisface las dos condiciones del enunciado.

- Sean u, v y w tres elementos de $\pi_1(X, x_0)$ y sean σ, τ y ρ tres curvas de $\pi_1(X, x_0)$ tales que $u = [\![\sigma]\!]$, $v = [\![\tau]\!]$ y $w = [\![\rho]\!]$. Tenemos que

  $$(u \cdot v) \cdot w = ([\![\sigma]\!] \cdot [\![\tau]\!]) \cdot [\![\rho]\!] = [\![\sigma \star \tau]\!]) \cdot [\![\rho]\!] = [\![(\sigma \star \tau) \star \rho]\!]$$

  y

  $$u \cdot (v \cdot w) = [\![\sigma]\!] \cdot ([\![\tau]\!] \cdot [\![\rho]\!]) = [\![\sigma]\!] \cdot [\![\tau \star \rho]\!] = [\![\sigma \star (\tau \star \rho)]\!]$$

  y, de acuerdo a la Proposición **4.3**, las curvas $(\sigma \star \tau) \star \rho$ y $\sigma \star (\tau \star \rho)$ son homotópicas, de manera que $[\![(\sigma \star \tau) \star \rho]\!] = [\![\sigma \star (\tau \star \rho)]\!]$: esto implica, claro, que $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ y, en definitiva, que el producto de $\pi_1(X, x_0)$ es asociativo.

- Sea $\varepsilon_{x_0} : s \in I \mapsto x_0 \in X$ la curva constante de $\Omega(X, x_0)$, sea $e = [\![\varepsilon_{x_0}]\!]$ su clase de homotopía y mostremos que e es un elemento neutro para el producto de $\pi_1(X, x_0)$: para ello, sea $u \in \pi_1(X, x_0)$ y probemos que $u \cdot e = u$ y que $e \cdot u = u$. Sea $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ un representante de u, de manera que $u = [\![\sigma]\!]$. De acuerdo a la Proposición **4.4**, tenemos que $\sigma \star \varepsilon_{x_0} \simeq \sigma \simeq \varepsilon_{x_0} \star \sigma$, así que

  $$u \cdot e = [\![\sigma]\!] \cdot [\![\varepsilon_{x_0}]\!] = [\![\sigma \star \varepsilon_{x_0}]\!] = [\![\sigma]\!] = u$$

  y

  $$e \cdot e = [\![\varepsilon_{x_0}]\!] \cdot [\![\sigma]\!] = [\![\varepsilon_{x_0} \star \sigma]\!] = [\![\sigma]\!] = u.$$

  Esto es lo que queríamos.
- Finalmente, tenemos que probar que cada elemento de $\pi_1(X, x_0)$ tiene un elemento inverso para el producto y que, de hecho, éste está dado como en el enunciado. Sea entonces $u \in \pi_1(X, x_0)$ y sea $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ un representante para u, de manera que $u = [\![\sigma]\!]$ y pongamos $v = [\![\bar{\sigma}]\!]$. Según la Proposición **4.5**, tenemos que $\sigma \star \bar{\sigma} \simeq \varepsilon_{x_0}$ y, como $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma$, que $\bar{\sigma} \star \sigma \simeq \varepsilon_{x_0}$, y esto implica que

  $$u \cdot v = [\![\sigma]\!] \cdot [\![\bar{\sigma}]\!] = [\![\sigma \star \bar{\sigma}]\!] = [\![\varepsilon_{x_0}]\!] = e$$

  y

  $$v \cdot u = [\![\bar{\sigma}]\!] \cdot [\![\sigma]\!] = [\![\bar{\sigma} \cdot \sigma]\!] = [\![\varepsilon_{x_0}]\!] = e,$$

  de manera que u y v son mutualmente inversos en $\pi_1(X, x_0)$.

Esto completa la prueba de la proposición. □

5.3. Si X es un espacio topológico y x_0 es un punto de X, llamamos al par (X, x_0) un ***espacio punteado*** y a x_0 el ***punto base*** de este espacio punteado. La Proposición **5.2** que acabamos de probar nos dice que a cada espacio punteado (X, x_0) podemos asignarle el grupo $\pi_1(X, x_0)$. Llamamos a este grupo el ***grupo fundamental*** del espacio punteado (X, x_0).

5.4. Antes de seguir, mostremos un ejemplo.

Proposición. *Sea X un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ y sea x_0 un mirador de X. El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.*

Demostración. Para mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial alcanza con probar que tiene un único elemento, su elemento neutro e. Sea σ un elemento cualquiera de $\Omega(X, x_0)$ y sea $\varepsilon : s \in I \mapsto x_0 \in X$ el elemento constante de $\Omega(X, x_0)$, de manera que $e = [\![\varepsilon]\!]$. Hay una función $H : I \times I \to X$ tal que

$$H(s, t) = (1 - t)\sigma(t) + tx_0$$

para cada $(s, t) \in I \times I$: en efecto, la expresión que aparece a la derecha en esta igualdad denota un elemento de X cualquiera sea $(s, t) \in I \times I$ precisamente porque el conjunto X

tiene a x_0 como mirador. Como H es una homotopía de la curva σ a la curva ε, vemos así que $[\![\sigma]\!] = e$. Podemos concluir entonces que e es la único elemento de $\pi_1(X, x_0)$, como queríamos. $\square$

El ejemplo de cálculo de grupo fundamental dado por esta proposición es, en cierta forma, decepcionante: ¡el grupo que exhibe resulta ser trivial! En las secciones que siguen mostraremos ejemplos de espacios punteados con grupos fundamentales más interesantes, pero para hacerlo necesitaremos trabajar bastante más. La razón es sencilla: para mostrar que un espacio punteado tiene grupo fundamental trivial hay que mostrar, como hicimos recién, que para cada curva hay una homotopía que va de ella a la curva constante, y esto puede hacerse, en muchos casos, simplemente exhibiendo explícitamente la homotopía necesaria. Por el contrario, para mostrar que un espacio punteado tiene grupo fundamental no trivial es necesario probar que hay alguna curva cerrada en él para la que no existe *ninguna* homotopía hasta la curva constante, y esto es claramente más delicado.

6 Dependencia del punto base

6.1. Si X es un espacio topológico, para cada elección de un punto base x_0 en X construimos en la sección anterior un grupo $\pi_1(X, x_0)$. Es importante observar que este grupo depende del *par* (X, x_0) y no solamente de X. Un resultado importante, sin embargo, que enunciamos más abajo en la Proposición **6.3**, es que bajo una condición razonable dos elecciones distintas de puntos bases en X dan lugar a grupos fundamentales isomorfos. Para probar esto, empezamos por el siguiente resultado un poco más general.

6.2. Proposición. *Sea X un espacio topológico y sean x_0, $y_0 \in X$. Si $\mu \in \mathscr{C}(X; x_0, y_0)$ es una curva de x_0 a y_0, entonces hay un isomorfismo de grupos $q : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(x, y_0)$ tal que $q([\![\sigma]\!]) = [\![\mu \star (\sigma \star \bar{\mu})]\!]$ para toda curva σ de $\Omega(X, x_0)$.*

Demostración. Para ver que existe una función $q_\mu : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$ tenemos que probar que cada vez que $u \in \pi_1(X, x_0)$ y σ y τ son dos representantes de u en $\Omega(X, x_0)$ se tiene que

$$\mu \star (\sigma \star \bar{\mu}) \simeq \mu \star (\tau \star \bar{\mu}). \tag{2}$$

Esto se deduce inmediatamente de la Proposición **4.2**. En efecto, esa proposición nos dice primero que $\sigma \star \bar{\mu} \simeq \tau \star \bar{\mu}$ y, usando esto, que, en segundo lugar, vale (2).

Sean ahora σ y τ son dos elementos de $\Omega(X, x_0)$. Usando la definición de q y tres veces la Proposición **4.3** vemos que

$$\begin{aligned}
\big[\mu \star (\sigma \star \bar{\mu})\big] \star \big[\mu \star (\tau \star \bar{\mu})\big] &\simeq \mu \star \Big[(\sigma \star \bar{\mu}) \star \big[\mu \star (\tau \star \bar{\mu})\big]\Big] \\
&\simeq \mu \star \Big[\sigma \star \big[\bar{\mu} \star \big[\mu \star (\tau \star \bar{\mu})\big]\big]\Big] \\
&\simeq \mu \star \Big[\sigma \star \big[(\bar{\mu} \star \mu) \star (\tau \star \bar{\mu})\big]\Big].
\end{aligned}$$

La Proposición 4.5 nos dice que esto es

$$\simeq \mu \star \left[\sigma \star (\tau \star \bar{\mu})\right]$$

y si usamos una vez más la Proposición 4.3, podemos concluir que esto es

$$\simeq \mu \star \Big[(\sigma \star \tau) \star \bar{\mu}\Big].$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} q(\llbracket\sigma\rrbracket) \cdot q(\llbracket\tau\rrbracket) &= \Big\llbracket \left[\mu \star (\sigma \star \bar{\mu})\right] \star \left[\mu \star (\tau \star \bar{\mu})\right] \Big\rrbracket \\ &= \Big\llbracket \mu \star \left[(\sigma \star \tau) \star \bar{\mu}\right] \Big\rrbracket \\ &= q(\llbracket\sigma\rrbracket \cdot \llbracket\tau\rrbracket) \end{aligned}$$

y, en definitiva, que la función q es un homomorfismo de grupos.

Para terminar, tenemos que mostrar que la función q es un isomorfismo de grupos. La reversión $\bar{\mu}$ es un elemento de $\mathscr{C}(X; y, x)$, así que lo que ya hemos probado implica que existe un homomorfismo de grupos $r : \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ tal que cada vez que σ es un elemento de $\Omega(X, y_0)$ se tiene que

$$r(\llbracket\sigma\rrbracket) = \llbracket\bar{\mu} \star (\sigma \star \mu)\rrbracket.$$

Si $\sigma \in \Omega(X, x_0)$, entonces sabemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \star [(\mu \star (\sigma \star \bar{\mu})) \star \mu] &\simeq [\bar{\mu} \star (\mu \star (\sigma \star \bar{\mu}))] \star \mu \\ &\simeq [(\bar{\mu} \star \mu) \star (\sigma \star \bar{\mu})] \star \mu \\ &\simeq (\sigma \star \bar{\mu}) \star \mu \\ &\simeq \sigma \star (\bar{\mu} \star \mu) \\ &\simeq \sigma \end{aligned}$$

gracias a las Proposiciones 4.3 y 4.5, y esto implica que

$$r(q(\llbracket\sigma\rrbracket)) = \big\llbracket\bar{\mu} \star [(\mu \star (\sigma \star \bar{\mu})) \star \mu]\big\rrbracket = \llbracket\sigma\rrbracket,$$

de manera que $r \circ q$ es la función identidad de $\pi_1(X, x_0)$. Un cálculo similar, pero intercambiando los roles de q y de r, muestra que la composición $q \circ r$ es la función identidad de $\pi_1(X, y_0)$, así que q y r son isomorfismos inversos. □

6.3. Proposición. *Sea X un espacio topológico. Si X es arco-conexo, entonces cada vez que x_0 e y_0 son puntos de X los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, y_0)$ son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que X es arco-conexo y sean x_0 e y_0 dos puntos de X. La hipótesis implica que existe una curva $\mu \in \mathscr{C}(X; x_0, y_0)$ de x_0 a y_0 en X y entonces la Proposición 6.2 nos dice que hay un isomorfismo de grupos $q : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$. En particular, los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, y_0)$ son isomorfismos, como afirma el enunciado. □

7 Functorialidad

7.1. Sean X e Y dos espacios topológicos, sea x_0 un punto de X, sea $f : X \to Y$ una función continua y pongamos $y_0 = f(x_0)$. Si $\sigma : I \to X$ es un elemento de $\Omega(X; x_0)$, entonces la composición $f \circ \sigma : I \to X$ es un elemento de $\Omega(Y; y_0)$. La siguiente proposición nos da las dos propiedades más importantes de esta construcción.

Proposición. *Sean X e Y dos espacios topológicos, sea $f : X \to Y$ una función continua, sea $x_0 \in X$ y pongamos $y_0 = f(x_0)$. Sean además σ y τ dos elementos de $\Omega(X, x_0)$.*
(i) *Si $\sigma \simeq \tau$, entonces $f \circ \sigma \simeq f \circ \tau$.*
(ii) *Se tiene que $f \circ (\sigma \star \tau) = (f \circ \sigma) \star (f \circ \tau)$.*

Demostración. (i) Supongamos que $\sigma \simeq \tau$ y sea $H : I \times I \to X$ una homotopía de σ a τ. La función $G = f \circ H : I \times I \to Y$ es continua y tal que

- por un lado, para cada $s \in I$ es

$$G(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(\sigma(s)) = (f \circ \sigma)(s)$$

  y, de la misma forma, $G(s, 1) = (f \circ \tau)(s)$, con lo que $G_0 = f \circ \sigma$ y $G_1 = f \circ \tau$,
- y, por otro,

$$G(0, t) = f(H(0, t)) = f(x_0) = y_0$$

  y $G(1, t) = y_0$ para todo $t \in I$,

así que se trata de una homotopía de la curva $f \circ \sigma$ a la curva $f \circ \tau$: esto muestra que $f \circ \sigma \simeq f \circ \tau$, como afirma la proposición.

(ii) Sea $s \in I$. De acuerdo a la definición de $\sigma \star \tau$, tenemos que

$$(\sigma \star \tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \tau(2s - 1), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esto implica, por supuesto, que

$$\big(f \circ (\sigma \star \tau)\big)(s) = f\big((\sigma \star \tau)(s)\big) = \begin{cases} f(\sigma(2s)), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(\tau(2s - 1)), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es inmediato, ahora, que esto último coincide en todos los casos con $(f \circ \sigma) \star (f \circ \tau)$. □

7.2. La razón por la que la proposición que acabamos de probar es importante es que nos permite construir para cada función continua entre espacios topológicos un homomorfismo de grupos entre los correspondientes grupos fundamentales.

Proposición. *Sean X e Y dos espacios topológicos, sea $f : X \to Y$ una función continua, sea $x_0 \in X$ y pongamos $y_0 = f(x_0)$. Hay una función $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ tal que para cada $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ se tiene que $f_*\big(\llbracket\sigma\rrbracket\big) = \llbracket f \circ \sigma\rrbracket$, y esta función es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Definamos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Si u es un elemento de $\pi_1(X, x_0)$, entonces sabemos que existe alguna curva $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ tal que $u = [\![\sigma]\!]$ y, si queremos que lo que afirma la proposición valga, tenemos que definir $f_*(u) = [\![f \circ \sigma]\!]$. Para que esto tenga sentido, el miembro derecho de esta última igualdad tiene que depender solamente de u y no de la elección del representante σ. Esto es consecuencia de la Proposición 7.1*(i)* que acabamos de probar: si τ es otro representante de la clase u, de manera que $\sigma \simeq \tau$, entonces esa proposición nos dice que también se tiene que $f \circ \sigma \simeq f \circ \tau$ y, por lo tanto, que $[\![f \circ \sigma]\!] = [\![f \circ \tau]\!]$, como queremos.

Vemos así que efectivamente existe una función f_* con la propiedad descripta en el enunciado. Para terminar, mostremos que se trata de un homomorfismo de grupos: tenemos que probar que si u y v son dos elementos de $\pi_1(X, x_0)$ entonces vale que

$$f_*(u \cdot v) = f_*(u) \cdot f_*(v). \tag{3}$$

Observemos que en esta igualdad, el producto $\cdot$ que aparece a la izquierda es el de $\pi_1(X, x_0)$ mientras que el que aparece a la derecha es el de $\pi_1(Y, y_0)$.

Sean entonces u y v dos elementos de $\pi_1(X, x_0)$ y elijamos representantes σ y τ en $\Omega(X, x_0)$ para σ y para τ, respectivamente, de manera que $u = [\![\sigma]\!]$ y $u = [\![\tau]\!]$. Tenemos entonces, por un lado, que

$$f_*(u \cdot v) = f_*\big([\![\sigma]\!] \cdot [\![\tau]\!]\big) = f_*\big([\![\sigma \star \tau]\!]\big) = [\![f \circ (\sigma \star \tau)]\!]$$

y, por otro, que

$$f_*(u) \cdot f_*(v) = f_*([\![\sigma]\!]) \cdot f_*([\![\tau]\!]) = [\![f \circ \sigma]\!] \cdot [\![f \circ \tau]\!] = [\![(f \circ \sigma) \star (f \circ \tau)]\!].$$

Sabemos de la Proposición 7.1*(ii)* que los últimos miembros de estas dos cadenas de igualdades son iguales, así que también lo son sus primeros miembros, y esto muestra que vale la igualdad (3). La prueba de la proposición queda así completa. □

7.3. Acabamos de asignar a cada función continua un homomorfismo de grupos. Nuestro siguiente resultado es que esta asignación es *functorial*: esto significa, precisamente, que tiene las dos propiedades descriptas en la proposición siguiente:

Proposición. (i) *Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, entonces el homomorfismo de grupos $\mathsf{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ correspondiente a la función identidad $\mathsf{id} : X \to X$ es la función identidad de $\pi_1(X, x_0)$.*

(ii) *Si X, Y y Z son espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, $x_0 \in X$ y ponemos $y_0 = f(x_0)$ y $z_0 = g(y_0)$, entonces se tiene que*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0).$$

Demostración. (i) Sea X un espacio topológico, sea $x_0 \in X$ y sea $\mathsf{id} : X \to X$ la función identidad de X. Si $u \in \pi_1(X, x_0)$ y $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ es un representante para u, de manera que $u = [\![\sigma]\!]$, entonces la definición del homomorfismo id_* nos dice que

$$\mathsf{id}_*(u) = \mathsf{id}_*([\![\sigma]\!]) = [\![\mathsf{id} \circ \sigma]\!] = [\![\sigma]\!] = u.$$

Esto nos dice, claro, que la función $\mathsf{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es la función identidad de $\pi_1(X, x_0)$.

(*ii*) Sean X, Y y Z espacios topológicos, sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas, sea x_0 un punto de X y, como en el enunciado, pongamos $y_0 = f(x_0)$ y $z_0 = g(y_0)$. Queremos ver que las funciones $g_* \circ f_*$ y $(g \circ f)_*$, ambas definidas sobre $\pi_1(X, x_0)$, son iguales. Para ello, sea $u \in \pi_1(X, x_0)$ y sea $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ un representante de u, de manera que $u = [\![\sigma]\!]$. Por un lado, tenemos que

$$(g_* \circ f_*)(u) = g_*(f_*([\![\sigma]\!])) = g_*([\![f \circ \sigma]\!]) = [\![g \circ (f \circ \sigma)]\!]$$

y, por otro, que

$$(g \circ f)_*(u) = (g \circ f)_*([\![\sigma]\!]) = [\![(g \circ f) \circ \sigma]\!].$$

Como la composición de funciones es asociativa, las funciones $g \circ (f \circ \sigma) : I \to Z$ y $(g \circ f) \circ \sigma : I \to Z$ son iguales, así que sus clases de homotopía en el grupo $\pi_1(Z, z_0)$ coinciden: esto nos dice, en vista del cálculo anterior, que $(g_* \circ f_*)(u) = (g \circ f)_*(u)$ y prueba lo que queremos. □

7.4. La consecuencia más importante de la functorialidad es la siguiente:

Proposición. *Sean X e Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si $x_0 \in X$ y ponemos $y_0 = f(x_0)$, entonces el homomorfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.*

Demostración. **Hacer** □

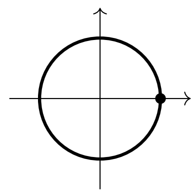
7.5. Corolario. *Sean X e Y dos espacios topológicos arco-conexos y homeomorfos. Si $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.*

Demostración. **Hacer** □

8 El grupo fundamental de la circunferencia

8.1. Escribimos S^1 a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y x_0 al punto $(1, 0) \in S^1$, esto es,

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$x_0 = (1, 0)$$



Nuestro objetivo es determinar el grupo fundamental de S^1 con respecto al punto base x_0.

8.2. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ la función tal que $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Como las funciones cos y sin son continuas y periódicas de periodo 2π, nuestra función p es continua y siempre que $s \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$p(s+n) = p(n).$$

En particular, $p(n) = p(0) = x_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y, de hecho, vale que si $s \in \mathbb{R}$ entonces

$$p(s) = x_0 \iff s \in \mathbb{Z}.$$

Como veremos, esta función p jugará un rol importante en todo lo que sigue.

8.3. Si n es un elemento de $\mathbb{Z}$, podemos definir una función $\gamma_n : I \to S^1$ poniendo, para cada $s \in I$,

$$\gamma_n(s) = p(ns).$$

Es claro que esta función es continua y calculando vemos que $\gamma_n(0) = \gamma_n(1) = x_0$, así que se trata de un elemento de $\Omega(S^1, x_0)$: podemos considerar entonces su clase de homotopía $[\![\gamma_n]\!] \in \pi_1(S^1, x_0)$. Obtenemos de esta forma una función

$$\Gamma : n \in \mathbb{Z} \mapsto [\![\gamma_n]\!] \in \pi_1(S^1, x_0).$$

Esta función nos permite describir el grupo fundamental de S^1:

Teorema. *La función* $\Gamma : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ *es un isomorfismo de grupos.*

La prueba de esto nos ocupará hasta el final de esta sección.

8.4. Nuestra primera observación es:

Proposición. *La función* $\Gamma : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ *es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Tenemos que mostrar que cada vez que m y n son elementos de $\mathbb{Z}$ entonces $\Gamma(m+n) = [\![\gamma_{m+n}]\!]$ y $\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = [\![\gamma_m]\!] \cdot [\![\gamma_n]\!] = [\![\gamma_m \star \gamma_n]\!]$ coinciden, esto es, que las curvas γ_{m+n} y $\gamma_m \star \gamma_n$ son homotópicas. Definamos $h : I \times I \to \mathbb{R}$ poniendo, para cada $(s,t) \in I \times I$,

$$h(s,t) = \begin{cases} (1-t)2ms + t(m+n)s, & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (1-t)(2ns + m - n) + t(m+n)s, & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como siempre, es importante notar que esto tiene sentido: si $s = \frac{1}{2}$ y $t \in I$, la primera parte de la definición asigna a $h(s,t)$ el valor

$$(1-t)2m\tfrac{1}{2} + t(m+n)\tfrac{1}{2} = m(1-t) + 1/2(m+n)t$$

mientras que la segunda parte le asigna el valor

$$(1-t)(2ns + m - n)\tfrac{1}{2} + t(m+n)\tfrac{1}{2},$$

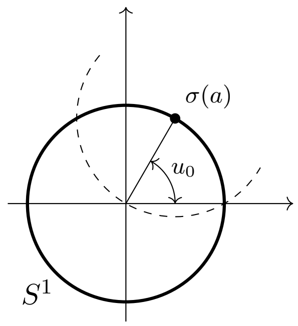


Figura 1. La situación del Lema 8.5

que es igual al anterior, como puede verse inmediatamente. Por otro lado, la función h es manifiestamente continua, así que la función compuesta $H = p \circ h : I \times I \to S^1$ también lo es. Calculando explícitamente vemos que $H_0 = \gamma_m \star \gamma_n$ y $H_1 = \gamma_{m+n}$ y que para todo $t \in I$ es $H(0,t) = H(1,t) = x_0$: esto significa que H es una homotopía de $\gamma_m \star \gamma_n$ a γ_{m+n} y, por lo tanto, que $\gamma_m \star \gamma_n \simeq \gamma_{m+n}$, como queríamos. $\square$

8.5. En segundo lugar, nos proponemos mostrar que la función Γ es inyectiva. Para ello necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Lema. *Sea $\sigma : [a,b] \to S^1$ una función continua tal que*

$$\text{siempre que } s \in I \text{ se tiene que } d(\sigma(a), \sigma(s)) < 1 \tag{4}$$

y sea $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(u_0) = \sigma(a)$. Existe una función continua $\tilde{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}(a) = u_0$ y $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Demostración. Consideremos primero el caso especial del lema en el que

$$\sigma(a) = x_0 \text{ y } u_0 = 0. \tag{5}$$

Como σ toma valores en $\mathbb{R}^2$, hay funciones $\sigma_1, \sigma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ para todo $s \in [a,b]$, y estas dos funciones son continuas. Para cada $s \in [a,b]$ el punto $\sigma(s)$ pertenece a S^1, así que

$$\sigma_1(s)^2 + \sigma_2(s)^2 = 1. \tag{6}$$

Por otro lado, la hipótesis (4) nos dice que

$$(1 - \sigma_1(s)^2 \leq (1 - \sigma_1(s))^2 + \sigma_2(s)^2 = d(\sigma(0), \sigma(s))^2 < 1,$$

y esto implica que $\sigma_1(s) > 0$. Podemos, en particular, considerar la función $\tilde{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\sigma}(s) = \arctan \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)}$$

para cada $s \in [a,b]$, ya que el denominador de la expresión que aparece a la derecha no se anula, y es claro que la función que obtenemos de esta forma es continua porque $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lo es. Mostremos que satisface las condiciones que queremos. Primero, podemos calcular directamente que

$$\tilde{\sigma}(a) = \arctan \frac{\sigma_2(a)}{\sigma_1(a)} = \arctan \frac{0}{1} = 0.$$

Sea $s \in [a,b]$. De acuerdo a las definiciones de p y de $\tilde{\sigma}$,

$$p(\tilde{\sigma}(s)) = \left(\cos \arctan \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)}, \cos \arctan \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} \right).$$

Ahora bien, para cada $\in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{7}$$

Usando la primera de estas identidades, vemos que

$$\cos \arctan \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_2(s)^2}{\sigma_1(s)^2}}} = \frac{\sqrt{\sigma_1(s)^2}}{\sqrt{\sigma_1(s)^2 + \sigma_2(s)^2}}$$

y, como $\sigma_1(s) > 0$ y vale (6), esto es

$$= \sigma_1(s).$$

De manera similar, usando la segunda de las identidades de (7) vemos que

$$\sin \arctan \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} = \frac{\frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_2(t)^2}{\sigma_1(t)^2}}} = \frac{\sigma_2(s)\sqrt{\sigma_1(s)^2}}{\sigma_1(s)\sqrt{\sigma_1(s)^2 + \sigma_2(s)^2}} = \sigma_2(s).$$

Vemos así que $p(\tilde{\sigma}(s)) = \sigma(s)$. Esto prueba que vale la proposición bajo la hipótesis adicional de que se cumplen (5).

Consideremos ahora el caso general. Sea $\sigma : [a,b] \to S^1$ una función que satisface la hipótesis (4) del enunciado y sea $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(u_0) = \sigma(a)$. Definimos una nueva función $\tau : [a,b] \to S^1$ poniendo

$$\tau(s) = \begin{pmatrix} \sigma_1(s) \cos u_0 + \sigma_2(s) \sin u_0 \\ -\sigma_1(s) \sin u_0 + \sigma_2(s) \cos u_0 \end{pmatrix}$$

para cada $s \in [a,b]$; es fácil verificar que la expresión de la derecha denota en efecto un elemento de S^1, así que esto tiene sentido. Es claro que τ es una función continua y, por otro lado, como

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(a) \\ \sigma_2(a) \end{pmatrix} = \sigma(a) = p(u_0) = \begin{pmatrix} \cos u_0 \\ \sin u_0 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$\tau(a) = \begin{pmatrix} \cos u_0 \cos u_0 + \sin u_0 \sin u_0 \\ -\cos u_0 \sin u_0 + \sin u_0 \cos u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u_0 - u_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si $s \in [a, b]$, entonces un cálculo directo muestra que

$$d(\tau(a), \tau(s)) = d(\sigma(a), \sigma(s)) < 1.$$

Esto significa que la función $\tau : [a, b] \to S^1$ satisface la condición (5) y, por lo que ya probamos, sabemos que existe una función $\tilde{\tau} : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\tau}(a) = 0$ y $p(\tilde{\tau}(s)) = \tau(s)$ para todo $s \in [a, b]$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\tau}(s) \\ \sin \tilde{\tau}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(s) \cos u_0 + \sigma_2(s) \sin u_0 \\ -\sigma_1(s) \sin u_0 + \sigma_2(s) \cos u_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Consideremos ahora la función $\tilde{\sigma} : s \in [a, b] \mapsto \tilde{\tau}(s) + u_0 \in \mathbb{R}$. Es $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\tau}(0) + u_0 = u_0$ y para cada $s \in [a, b]$ se tiene que

$$p(\tilde{\sigma}(s)) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\tau}(s) + u_0) \\ \sin(\tilde{\tau}(s) + u_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\tau}(s) \cdot \cos u_0 - \sin \tilde{\tau}(s) \cdot \sin u_0 \\ \cos \tilde{\tau}(s) \cdot \sin u_0 + \sin \tilde{\tau}(s) \cdot \cos u_0 \end{pmatrix}.$$

Usando (8), podemos escribir esto en la forma

$$\begin{pmatrix} (\sigma_1(s) \cos u_0 + \sigma_2(s) \sin u_0) \cdot \cos u_0 - (-\sigma_1(s) \sin u_0 + \sigma_2(s) \cos u_0) \cdot \sin u_0 \\ (\sigma_1(s) \cos u_0 + \sigma_2(s) \sin u_0) \cdot \sin u_0 + (-\sigma_1(s) \sin u_0 + \sigma_2(s) \cos u_0) \cdot \cos u_0 \end{pmatrix}$$

que, reordenando, es lo mismo que

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(s)(\cos u_0 \cdot \cos u_0 + \sin u_0 \cdot \sin u_0) + \sigma_2(s)(\sin u_0 \cdot \cos u_0 - \cos u_0 \cdot \sin u_0) \\ \sigma_1(s)(\cos u_0 \cdot \sin u_0 - \sin u_0 \cdot \cos u_0) + \sigma_2(s)(\sin u_0 \cdot \sin u_0 + \cos u_0 \cdot \cos u_0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_1(s) \\ \sigma_2(s) \end{pmatrix} = \sigma(s).$$

Esto significa que la función $\tilde{\sigma}$ satisface las dos condiciones del enunciado y, en consecuencia, prueba el lema. $\square$

8.6. Usando el Lema **8.5** podemos ahora probar fácilmente el siguiente resultado, que es usualmente conocido como el *Lema de levantamiento de curvas.*

Proposición. *Sea $\sigma : I \to S^1$ una curva tal que $\sigma(0) = x_0$. Existe una función continua $\tilde{\sigma} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.*

Demostración. Como la función $\sigma : I \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ es continua y su dominio es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es uniformemente continua. Esto implica que existe un número positivo δ tal que

siempre que s, $t \in I$ son tales que $|s - t| < \delta$, entonces $d(\sigma(s), \sigma(t)) < 1$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ un número entero positivo tal que $\frac{1}{n} < \delta$ y para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ pongamos $s_i = i/n$. Estos $n+1$ puntos del intervalo I lo dividen en n subintervalos

$$[s_0, s_1], \quad [s_1, s_2], \quad \dots, \quad [s_{n-1}, s_n].$$

Vamos a probar que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$

existe una función continua $\tilde{\sigma}_i : [0, s_i] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}_i(0) = 0$ y $p(\tilde{\sigma}_i(s)) = \sigma(s)$ para cada $s \in [0, s_i]$. (9)

Observemos que esta afirmación vale trivialmente cuando $i = 0$: en ese caso, podemos elegir la función $\tilde{\sigma}_0 : [0, 0] \to \mathbb{R}$ de manera que $\tilde{\sigma}_0(0) = 0$ y, de hecho, es la única elección posible. Por otro lado, que esta afirmación valga cuando $i = n$ significa, ni más ni menos, que existe una función $\tilde{\sigma} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, como afirma la proposición.

Supongamos que $j \in \{0, \dots, n-1\}$ e, inductivamente, que vale (9) cuando $i = j$, de manera que existe una función continua $\tilde{\sigma}_j : [0, s_j] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}_j(0) = 0$ y $p(\tilde{\sigma}_j(s)) = \sigma(s)$ para todo $s \in [0, s_j]$. Consideremos la función $\tau = \sigma|_{[s_j, s_{j+1}]} : [s_j, s_{j+1}] \to \mathbb{R}$ y el número $u_0 = \tilde{\sigma}_j(s_j) \in \mathbb{R}$. En vista de la forma en que elegimos el número n, se tiene que

$$s \in [s_j, s_{j+1}] \implies d(\tau(s_j), \tau(s)) < 1$$

y, por otro lado, es

$$p(u_0) = p(\tilde{\sigma}_j(s_j)) = p(\tau(s_j)).$$

El Lema 8.5 nos dice que existe una función continua $\tilde{\tau} : [s_j, s_{j+1}] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\tau}(s_j) = u_0$ y $p(\tilde{\tau}(s)) = \tau(s)$ para todo $s \in [s_j, s_{j+1}]$. Definamos ahora $\tilde{\sigma}_{j+1} : [0, s_{j+1}] \to \mathbb{R}$ poniendo, para cada $s \in [0, s_{j+1}]$,

$$\tilde{\sigma}_{j+1}(s) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_j(s), & \text{si } s \in [0, s_j]; \\ \tilde{\tau}(s), & \text{si } s \in [s_j, s_{j+1}]. \end{cases}$$

Es fácil verificar que esta función está bien definida, que es continua, que $\tilde{\sigma}_{j+1}(0) = 0$ y que $p(\tilde{\sigma}_{j+1}(s)) = \sigma(s)$ para todo $s \in [0, s_{j+1}]$: así, la afirmación (9) vale cuando $i = j+1$. Esto completa la inducción y, como dijimos arriba, la prueba de la existencia que se afirma en la proposición. □

8.7. Corolario. *La función $\Gamma : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sea σ un elemento de $\Omega(S^1, x_0)$. De acuerdo a la Proposición 8.6, existe una función continua $\tilde{\sigma} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. En particular, $p(\tilde{\sigma}(1)) = \sigma(1) = x_0$ y esto implica que $n = \tilde{\sigma}(1)$ es un elemento de $\mathbb{Z}$.

Consideremos la función $H : I \times I \to S^1$ tal que

$$H(s, t) = p\big((1-t)\tilde{\sigma}(s) + tns\big)$$

para cada $(s, t) \in I \times I$, que claramente es continua. Calculando, vemos que $H_0 = \sigma$ y $H_1 = \gamma_n$ y que $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ para todo $t \in I$, así que H es una homotopía de σ a γ_n. Vemos así que

$$[\![\sigma]\!] = [\![\gamma_n]\!] = \Gamma(n)$$

y esto nos dice que la función Γ es sobreyectiva. □

8.8. Nos queda mostrar que la función Γ es inyectiva. Para ello necesitamos un resultado similar a la Proposición 8.6 pero que nos permita «levantar» homotopías.

Proposición. *Sean σ y τ dos curvas de $\Omega(S^1, x_0)$ y sean $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\tau}(0) = 0$, $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ y $p \circ \tilde{\tau} = \tau$. Si $H : I \times I \to S^1$ es una homotopía de σ a τ, entonces existe una homotopía $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ de $\tilde{\sigma}$ a $\tilde{\tau}$.* □

La prueba de esta proposición puede hacerse siguiente la misma idea que usamos para probar la Proposición 8.6 —ir construyendo la función $\tilde{H}$ «de a pedacitos»— pero un poco más complicada en sus detalles. La omitiremos.

8.9. Con ese resultado a nuestra disposición, podemos dar el último paso hacia nuestro objetivo y así concluir la prueba del teorema.

Corolario. *La función $\Gamma : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ es inyectiva.*

Demostración. Sean m y n dos elementos de $\mathbb{Z}$ y supongamos que $\Gamma(m) = \Gamma(n)$, de manera que las curvas γ_m y γ_n son homotópicas, y sea $H : I \times I \to S^1$ una homotopía de γ_m a γ_n. Las funciones $\tilde{\gamma}_m : s \in I \mapsto ms \in \mathbb{R}$ y $\tilde{\gamma}_n : s \in I \mapsto ns \in \mathbb{R}$ son continuas y tales que $\tilde{\gamma}_m(0) = \tilde{\gamma}_n(0) = 0$, $p \circ \tilde{\gamma}_m = \gamma_n$ y $p \circ \tilde{\gamma}_n = \gamma_n$, así que la Proposición 8.8 nos dice que existe una homotopía $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ de $\tilde{\gamma}_m$ a $\tilde{\gamma}_n$. Esto implica, en particular, que

$$m = \gamma_m(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\gamma}_n(1) = n.$$

Podemos concluir, entonces, que la función Γ es inyectiva. □