Opérateurs Vectoriels

GRADIENT

Vecteur qui pointe dans la direction du taux de variation le plus élevé de f.

$$\nabla_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

DIVERGENCE

Opérateur scalaire mesurant le taux de variation sortant d'un champ à partir d'un point donné.

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ROTATIONNEL

Vecteur qui mesure la tendance du champ à tourner autour d'un point

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

LAPLACIEN

Mesure de la somme des dérivées secondes donnant une idée de la courbure de f.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

LAPLACIEN VECTORIEL

Vecteur obtenu en appliquant l'opérateur Laplacien à chaque composante du champ vectoriel

Mesure la variation spatiale du champ vectoriel dans toutes les directions

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F})$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)$$

Opérateurs Vectoriels

Coordonnées cylindriques

Point défini par : $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

GRADIENT

Vecteur qui pointe dans la direction du taux de variation le plus élevé de f.

$$\nabla_{\varphi} = (\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \frac{\partial \varphi}{\partial z})$$

DIVERGENCE

Avec :

$$F = (F_r, F_\theta, F_z)$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

ROTATIONNEL

Vecteur qui mesure la tendance du champ à tourner autour d'un point

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e_z}$$

LAPLACIEN SCALAIRE

Mesure de la somme des dérivées secondes donnant une idée de la courbure de f.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

LAPLACIEN VECTORIEL

Vecteur obtenu en appliquant l'opérateur Laplacien à chaque composante du champ vectoriel

Mesure la variation spatiale du champ vectoriel dans toutes les directions

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F})$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} - \frac{F_r}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{F_\theta}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Opérateurs Vectoriels

Coordonnées sphériques

Point défini par : $(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$

GRADIENT

Vecteur qui pointe dans la direction du taux de variation le plus élevé de f.

$$\nabla_{\varphi} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}; \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \phi}; \frac{1}{r\sin\phi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

DIVERGENCE

Avec :

$$F = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin(\phi)u_\phi) + \frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

ROTATIONNEL

Vecteur qui mesure la tendance du champ à tourner autour d'un point

$$(\nabla\times\mathbf{F})_r = \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin(\phi)\,\mathrm{u}_\theta) - \frac{\partial\,\mathrm{u}_\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$(\nabla\times\mathbf{F})_\theta = \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial\,\mathrm{u}_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(r\sin(\phi)\,\mathrm{u}_\theta)}{\partial r}\right)$$

$$(\nabla\times\mathbf{F})_\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,\mathrm{u}_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial\,\mathrm{u}_r}{\partial\phi}\right)$$

LAPLACIEN SCALAIRE

Mesure de la somme des dérivées secondes donnant une idée de la courbure de f.

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

LAPLACIEN VECTORIEL

Vecteur obtenu en appliquant l'opérateur Laplacien à chaque composante du champ vectoriel

Mesure la variation spatiale du champ vectoriel dans toutes les directions

$$\nabla^2\vec{F} = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{F})$$

$$\nabla^2\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}F_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}F_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

Interprétation physique des opérateurs vectoriels

Gradient

- Le gradient Grad F donne la direction du plus grand changement d'une fonction scalaire f(x, y, z).
- Il pointe vers les zones où f varie le plus rapidement.

- En physique, il représente un champ de force ou de flux.

↳ **Électrostatique** : Il donne le champ électrique E.

↳ **Thermodynamique** : Il indique le flux de chaleur.

Divergence

- La divergence Div F mesure la tendance d'un champ à être une source ou un puits.

↳ **Div F > 0** : Le champ est une source (ex = robinet d'eau)

↳ **Div F < 0** : Le champ est un puits (ex = trou noir)

↳ **Div F = 0** : Le champ est incompressible (ex = champ magnétique)

Rotationnel

- Le rotationnel mesure la tendance d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

↳ **Rot F = 0** : Le champ est conservatif (provient d'un potentiel scalaire)

↳ **Rot F différent de 0** : il y a des vortex ou des tourbillons dans le champ.

- **Physique**

↳ **Mécanique des fluides** : Présence de tourbillons.

↳ **Électromagnétisme** : Apparition d'un champ électrique induit (Loi de Faraday).

Résumé

- **Gradient** : Direction du plus grand changement
- **Divergence** : Mesure les sources ou puits d'un champ.
- **Rotationnel** : Indique la notation locale d'un champ vectoriel.