Otimização - Trabalho 1

Enzo Maruffa - GRR20171626

Julho de 2022

1 Introdução

A Programação Linear (PL) é uma área que estuda problemas matemáticos onde busca-se otimizar - maximizar ou minimizar - uma certa fórmula, considerando um conjunto de restrições. As restrições precisam cumprir certos requisitos para que o problema enquadre-se de fato na PL, sendo assim resolvível. O ato de transformar um problema existente em um problema de PL é a **modelagem**. A qualidade da modelagem está diretamente relacionada a qualidade da solução, uma vez que um problema mal-modelado pode resultar em soluções absurdas (como, por exemplo, a sugestão que uma dieta composta puramente por vinagre é a ideal).

2 Contextualização do Problema

O problema proposto é o de despacho hidrotérmico do sistema elétrico de uma cidade. Resumidamente, uma cidade é abastecida por duas fontes: uma usina hidrelétrica e uma termoelétrica. A cidade possui demandas mensais de energia, que variam de mês para mês. O objetivo é **minimizar o custo da produção de energia**, sendo que:

- O custo da termoelétrica é proporcional a quantidade de energia produzida.
- O custo da hidrelétrica é proporcional a variação de água no reservatório.
- Existe uma previsão mensal da entrada de água no reservatório.
- Existe um máximo de energia produzido pela hidrelétrica por mês.
- O reservatório possui um volume inicial de água, além de um volume mínimo e máximo que não podem ser ultrapassados.

Assim, a atividade proposta é a criação de um programa capaz de receber uma especificação de entrada contendo as informações necessárias para o cálculo acima, sendo a resposta um programa linear que pode ser processado pelo `lp_solve`, um *solver* de PL.

3 Modelagem

Para a modelagem do problema, foram definidas as seguintes variáveis utilizadas no programa linear:

Variáveis que representam um parâmetro de entrada

- v_0: Volume inicial do reservatório
- CT: Fator de custo da termoelétrica, associado a geração de um MWatt.
- CA: Fator de custo da hidrelétrica, associado a variação de $1m^3$ de água no reservatório.
- t_{max}: Produção máxima mensal da hidrelétrica.
- y_i: Produção de água em um mês i.
- k: Constante que representa de quantos MWatt são produzidos a cada m^3 utilizado

Variáveis a serem determinadas
Considerando um mês i:

- p_{ti} Produção da termoelétrica no mês i
- p_{hi} Produção da hidrelétrica no mês i
- v_i Volume de água no reservatório no final de um mês i
- dv_i Diferença de volume de um mês i para seu mês anterior, *i-1* [1]
- w_{pi} Volume de água utilizado para a produção da hidrelétrica no mês i
- c_{ti} Custo de produção da termoelétrica no mês i [1]
- c_{hi} Custo de produção da hidrelétrica no mês i [1]
- p_i Produção total de energia no mês i [1]
- c_i Custo total no mês i [1]

[1]Nota-se que algumas variáveis acabam sendo redundantes (em outras palavras, poderiam ter seu valor deduzido a partir de outras). Optou-se por realizar a definição individual de cada, aumentando consideravelmente a legibilidade e compreensão dos resultados da solução do PL.

Função objetivo e restrições

Com as definições acima, estabelece-se a função objetivo como:

$$min \sum_{1}^{m} c_i$$

sendo m o índice do último mês que deve ser calculado, considerando as seguintes restrições:

- $v_i, p_{ti}, p_{hi}, c_{ti}, c_{hi}, p_i \geq 0, \forall i \in]0, m]$: Em todos os meses, o volume final, a produção da termoelétrica e da hidrelétrica, o custo da termoelétrica e da hidrelétrica e a produção de um mês deve ser maior ou igual a 0
- $p_i = p_{ti} + p_{hi}, \forall i \in]0, m]$: A produção de um mês i é igual a produção da hidrelétrica somada a da termoelétrica no mesmo mês.
- $c_{ti} = p_{ti} * CT, \forall i \in]0, m]$: O custo associado a termoelétrica em um mês i é igual a produção da termoelétrica no mês multiplicado pelo fator de custo, CT.
- $c_{hi} = |dv_i| * CA, \forall i \in]0, m]$: O custo associado a hidrelétrica em um mês i é igual a variação de volume da hidrelétrica no mês multiplicado pelo fator de custo, CA.
- $dv_i = v_i - v_i - 1, \forall i \in]0, m]$: A diferença de volume em um mês i é igual ao volume do mês atual menos o volume no mês anterior.
- $p_{hi} < t_{max}, \forall i \in]0, m]$: A produção da hidrelétrica em um mês i deve ser menor que o máximo da hidrelétrica.
- $v_i \leq v_{max}, \forall i \in]0, m]$: O volume em um mês i nunca deve ser maior que o máximo de volume.
- $v_i \geq v_{min}, \forall i \in]0, m]$: O volume em um mês i nunca deve ser menor que o mínimo de volume.
- $v_i = v_i - 1 + y_1 - w_{pi}, \forall i \in]0, m]$: O volume de um mês i é o volume do mês anterior, somado a afluência do mês atual e reduzido da quantidade de água usada para a produção.
- $w_{pi} \leq v_{i1} + y_1, \forall i \in]0, m]$: A quantidade de água utilizada para a produção da hidrelétrica em um mês i deve ser, no máximo, o volume resultante do mês anterior somado a afluência do mês atual.
- $p_{hi} = w_{pi} * k, \forall i \in]0, m]$: A produção da hidrelétrica em um mês i é igual a quantidade de água utilizada de um mês i multiplicado pela relação de quantos MWatt são produzidos a cada m^3 utilizado.
- $p_i \geq d_i, \forall i \in]0, m]$: A produção total de um mês i deve ser maior ou igual a demanda em um mês i.
- $c_i = c_{ti} + c_{hi}$: O custo da produção de um mês i é igual ao custo da termoelétrica no mês i somado ao custo da hidrelétrica no mesmo mês.

4 Implementação

Para a implementação da solução, utilizou-se a linguagem Python. A linguagem ofereceu um ferramental flexível para a manipulação do arquivo de entrada e geração das restrições. O arquivo com o código-fonte e executável pode ser encontrado no caminho `fontes/despacho.py`, sendo um exemplo de sua invocação: `python3 despacho.py < ../entradas/1.input`[A].

Além disso, observa-se que uma das restrições possui um módulo. Naturalmente, o simplex não é um método capaz de processar o módulo como entrada. Para contornar, toda instância de dv_i foi substituída pela expressão $dv\_P_i - dv\_N_i$. A diferença das duas variáveis acaba sendo equivalente a expressão de módulo, sendo dv_P_i a parte positiva (ou seja, adição no volume) e dv_N_i a parte negativa (ou seja, redução no volume). O simplex garante, por consequência, que a solução ótima sempre possuirá apenas um ou outro elemento diferente de 0 (sendo que ambos podem ser 0, caso não exista diferença de volume).

5 Resultados

A implementação gerou soluções ótimas para todos os casos testados, sendo a saída executada com sucesso pelo programa `lp_solve` e os valores da função objetivo atingindo o ótimo. A solução ótima encontrada para o problema fornecido na especificação do trabalho[A] é um custo total de \$175.50. A solução encontrada pelo programa linear gerado utilizando o programa desenvolvido é equivalente no valor da função objetivo, apenas alterando o "caminho" até lá (produzir mais energia de certa fonte em meses diferentes). A relação de exemplos pode ser encontrada no Apêndice [A]. Dois exemplos adicionais foram utilizados para teste[A, A], sendo que ambos também tiveram a solução ótima encontrada: \$210 para o Exemplo 2[A], sendo que o volume da hidrelétrica manteve-se constantemente no mínimo (ideal, considerando que `CA` é \$0. Já para o Exemplo 3[A], o custo manteve-se em \$0 (ou seja, o volume do reservatório manteve-se igual e a termoelétrica gerou todo o resto da energia necessária. Tanto para o Exemplo 4[A] quanto para o Exemplo 5[A], os resultados foram equivalentes ao resultado ótimo.

A Apêndice: Exemplos de Entrada e Saída

Neste apêndice, elenca-se alguns exemplos de entrada e saída utilizados para verificar a corretude da solução desenvolvida.

Exemplo 1: Fornecido na especificação do trabalho

- Caminho do arquivo de entrada: `entradas/1.input`
- Caminho do arquivo com informações de saída: `entradas/1.output`

- Resumo: exemplo fornecido na especificação, com 3 meses de duração.

Exemplo 2: Gerado pelo autor

- Caminho do arquivo de entrada: `entradas/2.input`
- Caminho do arquivo com informações de saída: `entradas/2.output`
- Resumo: semelhante ao exemplo fornecido na especificação, com 3 meses de duração. Custo Ambiental (`CA`) é \$0. `k` é 1.

Exemplo 3: Gerado pelo autor

- Caminho do arquivo de entrada: `entradas/3.input`
- Caminho do arquivo com informações de saída: `entradas/3.output`
- Resumo: semelhante ao exemplo fornecido na especificação, com 3 meses de duração. Custo de geração da termoelétrica (`CT`) é \$0. `k` é 1.

Exemplo 4: Fornecido posteriormente pelo professor

- Caminho do arquivo de entrada: `entradas/4.input`
- Caminho do arquivo com informações de saída: `entradas/4.output`
- Resumo: a hidrelétrica gera toda a água sem variação de volume, tendo assim custo \$0.

Exemplo 5: Fornecido posteriormente pelo professor

- Caminho do arquivo de entrada: `entradas/5.input`
- Caminho do arquivo com informações de saída: `entradas/5.output`
- Resumo: semelhante ao exemplo fornecido na especificação, com 3 meses de duração. Porém, não existe entrada de água. Assim, a termoelétrica torna-se responsável por toda a produção de energia.