МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. Е. Умнов

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА 2015, верс. 23июн2015г.

Оглавление

0.1. Введение

Одним из достаточно широко используемых средств исследования какого-либо реального объекта или процесса является математическое моделирование – построение, формализованного в терминах математических понятий, описания этого объекта или процесса, адекватно отражающего все его существенные свойства. Вполне очевидно, что наиболее предпочтительной формой математической модели является набор или система функциональных соотношений, в явном виде связывающих основные количественные характеристики, описывающие моделируемый объект или явление. Однако на практике добиться этого удается не всегда и приходится использовать более сложные, косвенные формы описания интересующих исследователя зависимостей.

Поясним сказанное примером. Пусть предметом исследования является процесс изменения (во времени) концентрации примеси в растворе. Мы предполагаем, что все внешние для данного процесса условия неизменны (или меняются пренебрежимо слабо), в силу чего интересующую нас зависимость можно считать функциональной, а ее формализованное описание имеет вид функции $K = K(t)$, где t – время, прошедшее с момента начала наблюдения, а K – величина, характеризующая уровень концентрации примеси в растворе.

Предположим, что априорное исследование процесса растворения приводит к заключению, что (с достаточно высокой точностью) скорость убывания концентрации пропорциональна величине самой концентрации и может быть оценена величиной производной по времени от функции $K(t)$. Это позволяет в качестве математически формализованного описания (то есть, модели) наблюдаемого процесса использовать равенство

$$\frac{dK}{d\,t} = -\lambda \cdot K\ , \tag{0.1.1}$$

где величина λ постоянна и положительна. При этом не трудно убедиться, что это соотношение оказывается верным равенством при

$$K(t) = C \cdot e^{-\lambda t},\ \ \forall\, C. \tag{0.1.2}$$

Полученная функция и является ответом на вопрос исследования, описанного в данном примере. Соотношение вида (0.1.1) принято называть *дифференциальным уравнением*, а функцию (0.1.2) – его *решением*.

Наличие большого числа прикладных исследований в физике, технике, экономике, биологии и других научных направлениях, в которых математическая модель содержит компоненты, связывающие искомые функциональные зависимости с их дифференциальными характеристиками, приводит к заключению о важности для процесса моделирования получения для конкретного дифференциального уравнения ответов на вопросы: «Имеет ли это дифференциальное уравнение решения?», «А, если имеет, то какими свойствами эти решения обладают?» Раздел высшей математики, позволяющий получать ответы на эти (и связанные с ними) вопросы, носит название «Теория дифференциальных уравнений». Изложению основ этой теории и посвящен настоящий курс лекций.

Ввиду большого разнообразия в способах задания связей между искомой функцией и ее производных, дадим вначале определения основных понятий, которые будут использоваться в рамках данного курса. Обратите внимание, что в разных разделах курса эти определения, по мере необходимости, могут несколько изменяться, уточняться или пополняться новыми условиями.

`Определение 0.1.1.`	*Дифференциальным уравнением* будем называть соотношение типа *равенство*, каждая часть которого может содержать как искомую функциональную зависимость, так и ее производные функции.

`Определение 0.1.2`	Если искомая зависимость, входящая в запись дифференциального уравнения, является функцией *одной* независимой переменной, то такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Если же искомая функция зависит от *нескольких* независимых переменных, то уравнение называется *уравнением в частных производных.*

Пусть искомая функция $y(x)$ зависит от одной переменной x, тогда дифференциальное уравнение, связывающее эту функцию с ее производными принято записывать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\ , \tag{0.1.3}$$

где F – известная функция от $n+2$ переменных.

`Определение 0.1.3`	*Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной от неизвестной функции $y(x)$.

В соответствии с этим определением уравнение (0.1.3) является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n. В дальнейшем, если не оговорено иное, термин «дифференциальное уравнение» будет означать обыкновенное дифференциальное уравнение.

`Определение 0.1.4`	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (0.1.3), если – функция $y(x)$ имеет в своей области определения непрерывные производные до n-го порядка включительно. – область определения и область значений функции $y(x)$ *согласуются* с областью определения функции $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}\right)$, то есть $$\left\Vert\, x \;\; y(x) \;\; y'(x) \;\; \ldots \;\; y^{(n)}(x) \,\right\Vert^{\mathrm{T}} \in \Omega \quad \forall x \in X,$$ и – уравнение (0.1.3) превращается подстановкой $y(x)$ в *верное равенство.* Множество *всех* частных решений дифференциального уравнения называется его *общим решением.*

При этом следует иметь в виду, что общее решение дифференциального уравнения лишь в ряде конкретных случаев может быть задано аналитически как функция зависящая от каких-то параметров. Например так, как формула (0.1.2) описывает общее решение уравнения (0.1.1).

Если требуется найти общее решение какого-либо дифференциального уравнения, то говорят, что нужно *решить* (или, что то же самое, *проинтегрировать*) это дифференциальное уравнение. Однако достаточно часто в процессе исследования оказывается необходимым найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Например, допустим, что среди решений уравнения (0.1.1) нас интересуют лишь те, для которых концентрация примеси в начальный момент равна 70%. Найти это решение в рассматриваемом случае несложно, выбрав в формуле (0.1.2) такое значение параметра C, при котором $K(0) = 0.7$, то есть $C = 0.7$.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, которое, возможно, с его производными, имеют в точке x_0 конкретные значения $y(x_0), y'(x_0), \ldots$, называется «*задачей Коши*», точные формулировки которой, различные для разных классов дифференциальных уравнений, будут рассмотрены в соответствующих разделах курса.

Отметим также, что задача отыскания частного решения, удовлетворяющего условиям, задаваемым для нескольких, отличных друг от друга, значений независимой переменной, носит название «*краевой задачи*». Понятно, что также могут возникать задачи отыскания частных решений, удовлетворяющих ограничениям со структурой более сложной, чем в задаче Коши или в краевой задаче.

Теперь заметим, что метод решения задач типа задачи Коши или краевой задачи, основанный на выделении нужного частного решения из общего, не всегда эффективен, а в большинстве случаев и вовсе не возможен (поскольку не всегда удается получить форму записи общего решения, пригодную для выделения частных решений). Поэтому весьма важным оказывается построение методов исследования дифференциальных уравнений, позволяющих делать заключения о свойствах (таких как: существование, единственность, непрерывность, дифференцируемость и т.п.) нужных частных решений без построения общего решения, а основанных лишь на свойствах функций, входящих в запись уравнения.

Важность этих методов обусловлена следующими факторами. Во-первых, для подавляющего большинства классов дифференциальных уравнений получение формульной записи решений затруднено или просто невозможно. Использование же численных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений корректно лишь в тех случаях, когда существование и единственность искомого решения обоснованы.

Во-вторых, при построении математических моделей неизбежно использование различных параметров, констант и других количественных характеристик, значения которых имеют определенную погрешность. Поэтому при использовании модели необходимо быть уверенным в том, что малые вариации параметров модели приводят к малым вариациям решений. Иначе говоря, необходимо обоснование свойства непрерывности решений по всем константам, используемым в формулировке модели, включая начальные, краевые и прочие ее количественные характеристики.

Детальному изучению этого направления посвящена значительная часть нашего курса, хотя вначале будут рассмотрены аналитические методы поиска общих решений для часто используемых в приложениях классов дифференциальных уравнений.

Глава 1.

Простейшие методы решения дифференциальных уравнений

1.1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Изучение методов решения дифференциальных уравнений начнем с уравнений вида

$$y' = f(x, y), \tag{1.1.1}$$

являющегося частным случаем уравнения (0.1.3) при $n = 1$.

Символическая запись (1.1.1) означает следующее. Пусть в двухмерном евклидовом пространстве E^2 с элементами, имеющими в стандартном ортонормированном базисе координатные представления $\| \; x \;\; y \; \|^{\mathrm{T}}$, задана функция двух переменных $f(x, y)$, Тогда можно дать

Определение 1.1.1	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (1.1.1), если – $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$, – $y = y(x)$ непрерывно дифференцируемая в своей области определения $X \subseteq R$ функция, причем $\| \, x \;\; y(x) \, \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \;\; \forall x \in X$, – $y'(x) = f\,(x, y(x))$, $\forall x \in X$.

Поскольку каждой упорядоченной паре чисел $\{x, y\}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку координатной плоскости с координатным представлением $\| \; x \quad y \; \|^{\mathrm{T}}$, то график функции $y = y(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1.1.1). Этот график обычно называют *интегральной кривой* [1] уравнения (1.1.1).

Рассмотрим теперь альтернативные способы записи уравнения (1.1.1). Использовав определение первого дифференциала, это уравнение можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \; , \tag{1.1.2}$$

в котором производная функция $y'(x)$ выражена в виде дроби – отношения дифференциалов переменных y и x.

Из курса математического анализа известно, что формульная запись функции может отличаться от стандартного вида – явной зависимости $y = y(x)$. Например, функция $y = y(x)$, являющаяся частным решением уравнения (1.1.1), может быть представлена обратной $x = x(y)$, если эта обратная функция существует. В этом случае $x = x(y)$ есть частное решение уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \; , \tag{1.1.3}$$

интегрирование которого может оказаться более простой задачей, чем решение уравнения (1.1.1). Пользуясь таким представлением частного решения уравнения (1.1.1), однако, следует иметь в виду, что уравнения (1.1.1) и (1.1.2), вообще говоря неравносильны – некоторые решения одного из них могут не являться решениями второго и наоборот.

[1] Слово «кривая» здесь не совсем удачное, так как график решения вполне может быть и прямой. Термин «линия», видимо, был бы более уместен.

Другой возможный способ описания частного решения уравнения (1.1.1) – задание *неявной зависимости* y от x, например, соотношением $\Phi(x,y)=0$. В силу теоремы о неявных функциях в этом случае (при выполнении естественных ограничений) оказывается справедливым равенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'_x=0\ ,$$

и уравнение (1.1.1) принимает вид

$$-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}=f(x,y)\ .$$

Иногда для описания частного решения уравнения (1.1.1) оказывается удобным использование *параметрического способа* задания функции. Пусть, например,

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad , \quad t\in\Theta\ .$$

Согласно соответствующей теореме из курса математического анализа, производная $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$, а уравнение (1.1.1) будет иметь вид

$$\frac{y'_t}{x'_t}=f\left(x(t),y(t)\right)\ .$$

Использование неявного и параметрического способов представления решений в ряде случаев может существенно упростить процедуру интегрирования уравнения (1.1.1). Соответствующие примеры будут приведены в других разделах курса.

Вместе с тем, может оказаться так, что ни один из рассмотренных выше способов описания частных решений оказывается неприменимым. Например, для уравнения $y'=e^{-x^2}$ каждое частное решение не выражается через элементарные функции, а представимо в виде

$$y(x)=\int\limits_{x_0}^{x}e^{-u^2}\,du\ ,$$

то есть, выражается с помощью операции нахождения первообразной или через определенный интеграл с переменным верхним пределом. В этом случае принято говорить, что дифференциальное уравнение *проинтегрировано в квадратурах.*

При этом отметим, что в общем случае даже сочетание конечного числа операций над элементарными функциями и их суперпозиций с операциями нахождения первообразных не позволяет получить описание частных решений уравнения (1.1.1). Жозеф Лиувилль показал, например, что уравнение $y' = y^2 + x$ не разрешимо даже в квадратурах.

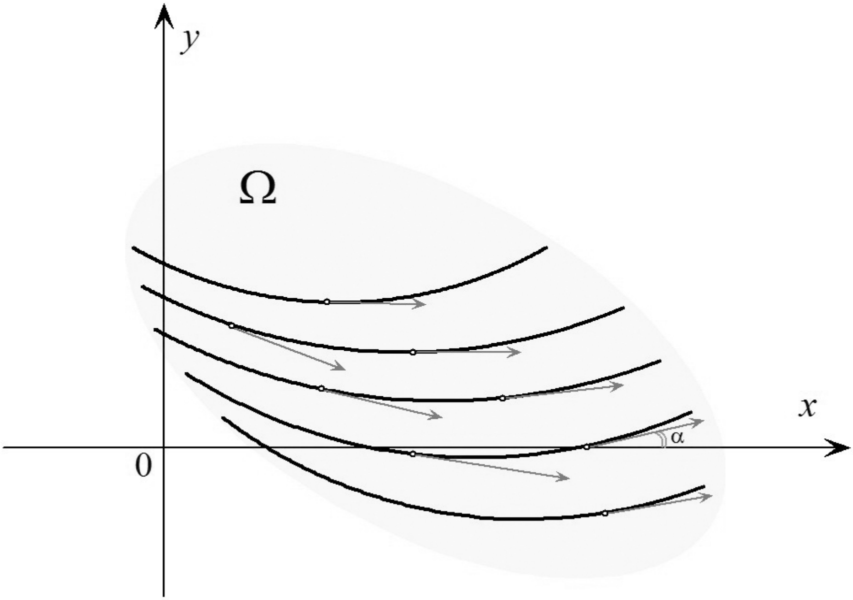


Рис. 1.1. Поле направлений дифференциального уравнения (1.1.1).

Таким образом, в общем случае явный вид решения уравнения (1.1.1) найти не удается и, ради получения хотя бы приближенного представления о его свойствах, имеет смысл выяснить геометрический смысл этого уравнения и его решений. Для этого можно поставить в соответствие каждой точке $\| \; x \quad y \; \|^{\mathrm{T}}$ множества Ω вектор с координатным представлением $\| \; 1 \quad f(x,y) \; \|^{\mathrm{T}}$.

Полученное векторное множество принято называть *полем направлений* уравнения (1.1.1). Его основные геометрические свойства определяет, называемая *теоремой существования и единственности* задачи Коши вида

$$\text{найти частное решение уравнения } y' = f(x,y),$$

$$\text{для которого } \ y(x_0)=y_0, \ \text{ с } \ \{x_0,y_0\}\in\Omega\ , \tag{1.1.4}$$

Теорема 1.1.1 (Коши) **Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области Ω, тогда**

— $\forall x_0\in X\ \exists\Delta>0$ **такое, что решение задачи Коши (1.1.4) существует** $\forall x\in \mathrm{U}_\Delta(x_0)$

и

— **если** $y=y_1(x),\ x\in X_1$ **и** $y=y_2(x),\ x\in X_2$ **два решения задачи Коши (1.1.4), причем** $x_0\in X_1\cap X_2$, **то** $y_1(x)=y_2(x),\ \forall x\in X_1\cap X_2$.

Доказательство.

Доказательство будет приведено ниже (см. следствие 4.3.1 в п.4.3).

Теорема доказана.

Из определения производной функции в точке следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha=y'=f(x,y)$$

(см. рис. 1.1). Поскольку $f(x,y)$ – функция, то интегральные кривые пересекаться не могут, а могут лишь, в крайнем случае, касаться друг друга. Если же функция $f(x,y)$ достаточно гладкая, чтобы удовлетворить условиям теоремы 1.1.1, то невозможным оказывается и касание.

Свойство интегральных кривых, заключающееся в том, что они не пересекаются и не касаются, можно использовать для построения приближенного эскиза их графиков, поскольку очевидно, что каждая из точек плоскости Oxy, для которой $f(x,y)=k$, где $k=const$, имеет касательную к интегральной кривой с одним и тем же угловым коэффициентом $k=\mathrm{tg}\alpha$. Линию, каждая точка которой имеет один и тот же угловой коэффициент называют *изоклиной.* Графическое представление семейства изоклин на плоскости Oxy позволяет делать заключения о некоторых свойствах интегральных кривых и строить эскизы их графиков, что демонстрирует

Задача 1.1.1 Для уравнения $y'=y+x$ построить эскиз интегральных кривых.

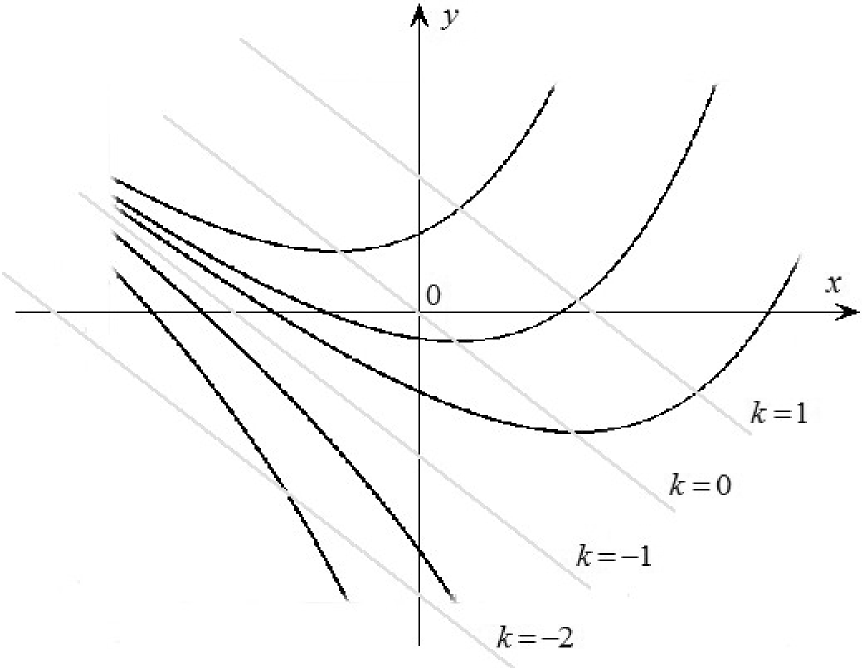


Рис. 1.2. Эскиз семейства интегральных кривых задачи 1.1.1.

`Решение:` Заметим, что в данной задаче условия теоремы 1.1.1 выполнены, а область Ω есть вся координатная плоскость Oxy. Уравнения изоклин имеют вид $y = -x + k$, следовательно, это семейство параллельных прямых, изображенных серым цветом на рис. 1.2.

Вполне очевидны следующие свойства интегральных кривых: во-первых, они возрастают в точках, где $k > 0$ и убывают там, где $k < 0$. Во-вторых, $y = -x - 1$ – частное решение исходного уравнения.

Если предположить, что функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то из условия $y' = y+x$ следует,

$$y'' = y' + 1 = y + x + 1 \ .$$

То есть, интегральные кривые выпуклы вниз в точках, для которых $y + x > -1$ (так как здесь $y'' > 0$), и, соответственно, выпуклы вверх при $y+x < -1$. При $y+x = 0$ касательные к интегральным кривым горизонтальны, а сами интегральные кривые выпуклы вниз. Следовательно, в этих точках частные решения исходного уравнения имеют минимум.

Принимая во внимание отмеченные свойства интегральных кривых, строим эскиз их графиков, который показан на рис. 1.2 черными цветом.

В завершение обсуждения геометрической интерпретации уравнения (1.1.1) отметим следующее важное обстоятельство. Теорема Коши устанавливает существование и единственность решения задачи Коши локально, лишь в некоторой, достаточно малой окрестности точки x_0. Однако, это решение может существовать и быть единственным на существенно более протяженном промежутке (содержащем x_0), чем $\mathrm{U}_\Delta(x_0)$.

Примером может служить случай, когда $y = y_1(x),\ x \in X_1$ и $y = y_2(x),\ x \in X_2$ суть два решения задачи Коши (1.1.4) с $x_0 \in X_1 \cap X_2$, но $X_1 \neq X_2$. По теореме Коши решение этой задачи имеет вид $y = y_1(x),\ x \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$. Аналогично в $X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$ решением будет $y = y_2(x)$. Таким образом, функция

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x),\ x \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2), \\ y_1(x) = y_2(x),\ \in x \in X_1 \cap X_2, \\ y_2(x),\ x \in X_2 \setminus (X_1 \cap X_2), \end{cases} \quad , \quad \forall x \in X_1 \cup X_2 \,. \tag{1.1.5}$$

есть решение задачи Коши на более широком, чем X_1 или X_2, промежутке.

В этом случае принято говорить, что функция (1.1.5) есть *продолжение решения задачи Коши* (1.1.4) с промежутка X_1 на множество $X_1 \cup X_2$. Аналогично, эта же функция является продолжением с X_2 на $X_1 \cup X_2$. Само решение $y_1(x) = y_2(x)$ называется *продолжимым.*

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения класса (1.1.1), имеющие вид

$$y' = f(x)g(y)\ , \tag{1.2.1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на промежутках X и Y соответственно, принято называть *уравнениями с разделяющимися переменными*. Эти уравнения всегда интегрируются в квадратурах.

Сначала выделим очевидный случай: если существуют, принадлежащие промежутку Y, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такие, что $g(\alpha_i) = 0$, то функции $y(x) \equiv \alpha_i, \forall i = [1, k]$ суть частные решения уравнения (1.2.1).

Если же $y \neq \alpha_i,$ (то есть $g(y) \neq 0$), то уравнение (1.2.1) равносильно уравнению

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \text{или} \quad G'_x(y(x)) = F'(x)\ ,$$

где $G'_x(y(x)) = \dfrac{y'(x)}{g(y(x))}$, а $F'(x) = f(x)$, то есть $G(y)$ и $F(x)$ суть *некоторые первообразные* функций $\dfrac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно.

Известно, что, если две дифференцируемые функции на некотором промежутке имеют равные производные, то эти функции могут отличаться только на константу. Поэтому справедливо равенство $G(y(x)) = F(x) + C$ или же, просто,

$$G(y) = F(x) + C\ , \tag{1.2.2}$$

которое определяет другое семейство частных решений уравнения (1.2.1) и, изображающих их на плоскости Oxy, интегральных кривых.

Заметим, что (при желании) для любого y из $\bar{Y}$ – подмножества Y не содержащего точек, на которых $g(y) = 0$, это равенство представимо и как $y = G^{-1}\left(F(x) + C\right)$, поскольку функция $G'(y)$ непрерывна и знакопостоянна на $\bar{Y}$, а функция $G(y)$ непрерывна и монотонна, и, следовательно, имеет обратную.

Рассмотрим теперь для уравнения (1.2.1) задачу Коши вида:

найти частное решение $y = y(x)$ уравнения (1.2.1),
для которого $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

Во-первых, если $g(y_0) = 0$, то задача (1.2.2) имеет решение $y(x) \equiv y_0$. Если же $g(y_0) \neq 0$ при $y_0 \in \bar{Y}$, то решение задачи Коши, в силу (1.2.2), будет иметь вид

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \ .$$

Обратите внимание, что в качестве константы C в формуле (1.2.2) выбрано число $G(y_0) - F(x_0)$.

Во-вторых, возможны случаи, когда решение задачи Коши не единственно, что иллюстрирует

`Задача 1.2.1` Решить задачи Коши для уравнения :

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \tag{1.2.3}$$

$$\begin{array}{ll} a) & y(1) = 1 \ , \\ b) & y(0) = 0 \ , \end{array}$$

`Решение:` Найдем вначале общее решение данного уравнения. Легко видеть, что $y(x) \equiv 0$ есть его частное решение. Если же $y(x) \neq 0$, то из $g(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ и $f(x) = 1$ следует $G(y) = \sqrt[3]{y}$ и $F(x) = x$, что дает

$$\sqrt[3]{y} = x + C \qquad \Rightarrow \qquad y = (x + C)^3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.2.3) есть совокупность частного решения $y(x) = 0$, семейства функций $y = (x + C)^3$, $\forall C \in R$ и всевозможных непрерывно дифференцируемых *функций*, составленных из подходящих фрагментов функций $y(x) = 0$ и $y = (x + C)^3$.

Например, интегральной кривой будет линия, проходящая через точки $A - (0;0) - (2;0) - C$, а линия $B - (0;0) - (2;0) - C$ интегральной кривой не является, поскольку она не есть график функции (нет однозначности в зависимости y от x).

Заметим, что в данной задаче множество Ω – это вся координатная плоскость, в любой точке которой функция $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$ непрерывна, в то время как частная производная $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ будет непрерывной лишь при $\forall y \neq 0$.

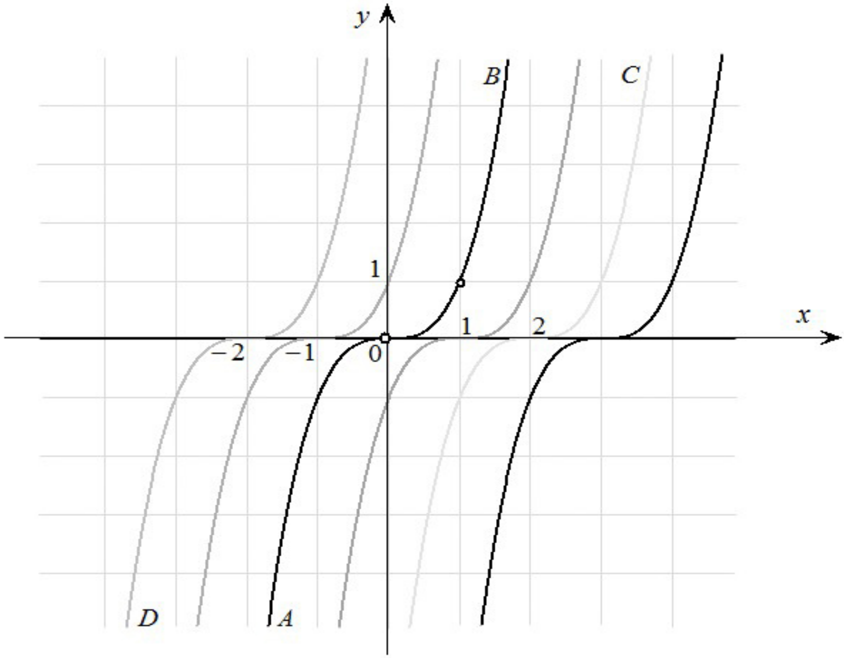


Рис. 1.3. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.2.1.

Теорема существования и единственности 1.1.1 является *локальным* достаточным условием однозначной разрешимости задачи Коши, поэтому можно утверждать, что единственным решением задачи 1.2.1a является функция $y = x^3$, в окрестности $(1 - \Delta_1, 1 + \Delta_2)$. При этом $0 \le \Delta_1 < 1$ и $1 \le \Delta_2 < +\infty$, поскольку при $\Delta_1 \ge 1$ единственность нарушается, и, следовательно, интервал $(0, +\infty)$ является максимально широким множеством *однозначной продолжимости* решения задачи Коши 1.2.1a.

Итак, решение задачи Коши 1.2.1a единственное, а задачи 1.2.1b — нет. Множество графиков решений задачи Коши во втором случае состоит из гладких интегральных кривых, собранных из «подходящих кусков» конкретных частных решений уравнения (1.2.2), при условии, что хотя бы один из этих кусков проходит через точку $(0; 0)$.

Определение 1.2.1	Дифференциальное уравнение первого порядка (1.1.1), имеющее вид (или сводящееся к виду) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\ , \tag{1.2.4}$$ называется *однородным уравнением.*

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи перехода от неизвестной функции $y(x)$ к новой неизвестной $u(x)$ по формуле $y(x) = xu(x)$.

Действительно, при такой замене $y' = xu' + u$ и уравнение (1.2.4) принимает вид

$$xu' + u = f(u)\ ,$$

в котором переменные x и u разделяются.

Задача 1.2.2 Показать, что уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad \text{с} \quad \det\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \neq 0$$

сводится к однородному при замене $x = u + x_0$ и $y = v + y_0$, где

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Как можно решить данное уравнение, если

$$\det\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} = 0\ ?$$

1.3. Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.3.1	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид $$y' + a(x)y = b(x)\ , \tag{1.3.1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ известные непрерывные при $x \in X$ функции, называется *линейным уравнением первого порядка.*

Другими словами, линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение, в которое $y'(x)$ и $y(x)$ входят линейно. Функции же $a(x)$ и $b(x)$, вообще говоря, могут быть и нелинейными.

Как и в алгебре, будем называть уравнение (1.3.1) *однородным*, если $b(x) \equiv 0$ при $x \in X$, иначе — *неоднородным.* Заметим также, что уравнение (1.3.1) можно записать в виде $y' = -a(x)y + b(x)$, откуда следует, что для него множество Ω есть полоса $\{x \in X,\ \forall y\}$, в которой выполнены условия теоремы Коши.

Позднее, в §2.1, будет показано, что запись общего решения линейного дифференциального уравнения аналогична по структуре формуле общего решения системы линейных алгебраических уравнений:

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного.

Теперь убедимся, что линейное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда интегрируется в квадратурах.

Сначала найдем общее решение $y' = -a(x)y$ – однородного уравнения. Оно имеет очевидное частное решение $y(x) = 0$, а, в случае $y(x) \neq 0$, равносильно уравнению

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx\ , \qquad \text{решение которого} \qquad \ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du + \ln\tilde{C}\ ,$$

где $\tilde{C} > 0$, а x_0 – любое фиксированное число из промежутка X. Объединение этих двух случаев дает формулу частных решений однородного уравнения

$$y(x) = C\varphi(x) \quad , \text{ где } \quad \varphi(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du}\ ,\ \forall\, C. \qquad (1.3.2)$$

Теорема 1.3.1 **Формула (1.3.2) описывает общее решение однородного уравнения (1.3.1).**

Доказательство.

Мы убедились, что при любом фиксированном C функция $C\varphi(x)$ есть частное решение однородного уравнения. Покажем теперь, что любое частное решение этого уравнения представимо в виде $C\varphi(x)$.

Пусть $z(x)$ некоторое частное решение однородного уравнения (1.3.1). Поскольку $\varphi(x) \neq 0$, то среди частных решений, задаваемых формулой (1.3.2), имеется $w(x) = \dfrac{z(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$, где x_0 – точка принадлежащая X. Функции $z(x)$ и $w(x)$ в x_0 имеют равные значения и потому являются решением задачи Коши для однородного уравнения с начальным условием $\{x_0;\ z(x_0)\}$, которое согласно теореме Коши существует и единственно на промежутке X. Откуда следует, что $z(x) = w(x), \forall x \in X$, то есть, $z(x) = C_0\varphi(x)$, где $C_0 = \dfrac{z(x_0)}{\varphi(x_0)}$.

Теорема доказана.

Затем будем искать частное решение неоднородного уравнения (1.3.1), следуя рекомендации Жозефа Лагранжа, методом *вариации постоянной*, а именно, в виде $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, задаваемое формулой (1.3.2) при $C = 1$.

Подставляя $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$ в исходное уравнение (1.3.1), получаем

$$C'(x)\varphi(x)+C(x)\varphi'(x) = -a(x)C(x)\varphi(x)+b(x) \quad \Rightarrow \quad C'(x)\varphi(x) = b(x) \ ,$$

что верно поскольку $\varphi(x)$– частное решение однородного уравнения, а, значит,

$$\varphi'(x) = -a(x)\varphi(x) \qquad \Rightarrow \qquad C(x)\varphi'(x) = -a(x)C(x)\varphi(x) \ .$$

Теперь находим $C(x) = \displaystyle\int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\,dv$, где $x_1 \in X$, а затем и

$$\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x) = \varphi(x)\int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\,dv \ .$$

Наконец, записываем общее решение неоднородного уравнения (1.3.1) как

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du} + \varphi(x)\int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\,dv \ .$$

или

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du} \cdot \int\limits_{x_1}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{v} a(t)\,dt} b(v)\,dv\ . \quad (1.3.3)$$

Данное выражение вряд ли стоит держать в памяти, достаточно помнить лишь правило:

> *общее решение неоднородного уравнения уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения уравнения, находимого методом разделения переменных, и частного решения неоднородного, получаемого методом Лагранжа (вариации постоянной).*

При этом формула (1.3.3) заслуживает некоторого пояснения. Дело в том, что это выражение содержит три произвольные константы — C, x_0 и x_1, между которыми имеется существенная разница: C есть вещественный параметр, изменение значения которого в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет получить *все* частные решения уравнения (1.3.1). Значения же величин x_0 и x_1 произвольные (из промежутка X), но фиксированные. Их изменение допустимо, оно поменяет лишь вид формулы (1.3.3), но не изменит *общего решения* уравнения (1.3.1).

Задача 1.3.1 Решить уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^p\ , \quad (1.3.4)$$

называемое *уравнением Бернулли.*

Решение: Заметим, что при $p = 0$ или при $p = 1$ уравнение (1.3.4) уже само по себе есть линейное, первого порядка. Кроме того, при $p > 0$ оно очевидно имеет тривиальное решение $y(x) = 0$.

Пусть $p \neq 0,\ p \neq 1$ и $y(x) \neq 0$, тогда исходное уравнение почленным делением на y^p сводится к равносильному уравнению

$$\frac{y'}{y^p} + a(x)\frac{1}{y^{p-1}} = b(x)\ .$$

Вводя новую неизвестную функцию $u(x) = y^{1-p}(x)$, в силу $u' = \dfrac{(1-p)y'}{y^p}$, получаем

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x) \ ,$$

– уравнение первого порядка, линейное относительно функции $u(x)$.

1.4. Уравнения первого порядка в дифференциалах

Если в уравнении (1.2.1) производную $y'(x)$ представить как отношение дифференциалов переменных y и x, то оно может быть записано в виде $dy - f(x,y)dx = 0$, что позволяет рассматривать уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4.1}$$

как формальное обобщение линейного уравнения первого порядка.

Будем предполагать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны в области $\Omega \subseteq E^2$ и не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке этой области. Последнее условие аналитически может быть сформулировано в виде

$$|P(x,y)| + |Q(x,y)| > 0 \ , \quad \forall \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \in \Omega \ .$$

Определение 1.4.1	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (1.4.1), где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, называется *линейным уравнением первого порядка в дифференциалах.*

Более общий вид уравнения (1.4.1) (по сравнению с уравнением (1.2.1)) обусловлен, во-первых, тем, что при $P(x,y) = -f(x,y)$ и

$Q(x,y) = 1$ уравнение (1.2.1) следует как частный случай из уравнения (1.4.1) и, во-вторых, тем, что переменные x и y в уравнение (1.4.1) входят равноправно, то есть, нет явного указания на то, является ли y функцией x (или, наоборот).

Более того, опираясь на известную теорему из курса математического анализа об инвариантности формы первого дифференциала, можно допустить, что и y и x одновременно являются функциями некоторой переменной t, а это, в свою очередь, позволяет дать определение решения уравнения (1.4.1), обобщающее определение (1.1.1).

Определение 1.4.2	Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\left\Vert \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\Vert$, где $t \in \Theta \subseteq R$, называется *частным решением* уравнения (1.4.1), если – $\left\Vert \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\Vert \in \Omega \; \forall\, t \in \Theta$; – $\lvert x'(t)\rvert + \lvert y'(t)\rvert > 0$ и – $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$.

Из этого определения непосредственно следует, что изображающая частное решение интегральная кривая является в области Ω гладкой линией, заданной параметрически как $\left\Vert \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\Vert \quad \forall t \in \Theta$. В отличие от уравнения (1.2.1), эта интегральная кривая не обязательно является графиком какой-либо функции $y = y(x)$, она может иметь участки, которые есть графики функции $x = x(y)$. Кроме того, поле направлений уравнения (1.4.1) может содержать векторы, параллельные оси Oy.

Рассмотрим теперь основные методы решения линейных уравнений первого порядка в дифференциалах.

1°. Пусть исходное уравнение представимо в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \ ,$$

тогда можно применить метод *разделения переменных*. Если $P_2(x) \neq 0$ и $Q_1(y) \neq 0$, то это уравнение равносильно

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{P_1(u)}{P_2(u)}\,du + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{Q_2(v)}{Q_1(v)}\,dv = 0 \ . \tag{1.4.2}$$

Кроме того, могут быть еще решения вида $y = \bar{y}$ при $Q_1(y) = 0$ и $x = \bar{x}$ при $P_2(\bar{x}) = 0$. Это следует выяснять непосредственной проверкой. И, наконец, в случае, если какие-либо интегральные кривые касаются друг друга, то исходное уравнение будет иметь составные решения, образованные из частей частных решений (1.4.2), $y = \bar{y}$ и $x = \bar{x}$.

2°. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ *однородные степени* k (то есть, $P(\alpha x, \alpha y) \equiv \alpha^k P(x, y)$), то можно использовать подстановку $y = xu$, которая приведет (как и в задаче 1.2.2) исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

3°. Рассмотрим уравнение (1.4.1), добавив к указанным в определении (1.4.1) ограничениям условие непрерывности в области Ω частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Определение 1.4.3	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (1.4.1), называется *уравнением первого порядка в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x, y)$, непрерывно дифференцируемая в области Ω такая, что $$dU \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

В сделанных предположениях очевидно, что все решения уравнения (1.4.1) удовлетворяют равенству $U(x, y) = C$. Остается только выяснить, при каких условиях на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ такая функция $U(x, y)$ существует. А, если существует, то как ее можно найти.

Необходимое условие существования такой функции является выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{1.4.3}$$

которое вытекает из такой цепочки равенств

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Следует отметить, что в случае, когда область Ω является *односвязной*, условие (1.4.3) оказывается *достаточным* для существования функции $U(x, y)$. Соответствующая теорема доказывается в курсе математического анализа. Конкретный вид функции $U(x,y)$ может быть найден из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)\ , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)\ . \end{cases} \tag{1.4.4}$$

`Задача 1.4.1` Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0\ .$$

`Решение:` Сначала проверим выполнение условия (1.4.3). Коэффициенты при дифференциалах суть непрерывно дифференцируемые функции на всей координатной плоскости и для них

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,$$

то есть данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах
Система уравнений (1.4.4) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = e^{-y}\ , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y}\ . \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $U(x,y) = xe^{-y} + C(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C'(y) = -2y \qquad \Rightarrow \qquad C(y) = -y^2\ .$$

И, окончательно, из $U(x,y) = xe^{-y} - y^2$ получаем ответ задачи:

$$xe^{-y} - y^2 = C\ .$$

4°. Пусть уравнение (1.4.1) таково, что в области Ω

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \,,$$

то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. В этом случае можно поставить задачу поиска непрерывно дифференцируемой и не равной тождественно нулю в области Ω функции $\mu(x,y)$, такой что

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \,.$$

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются в ноль одновременно в Ω, то такая функция, называемая *интегрирующим множителем*, существует (всегда!) и удовлетворяет уравнению

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu \,. \tag{1.4.5}$$

Уравнение (1.4.5) есть уравнение в частных производных первого порядка и его интегрирование, вообще говоря, более сложная задача, чем поиск решений уравнения (1.4.1). Однако, поскольку нам требуется лишь какое-нибудь частное решение, то иногда интегрирующий множитель удается найти подбором, опираясь на какие-либо особые свойства или частный вид функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. При этом может оказаться удобным разбить процедуру поиска функции $\mu(x,y)$ на последовательные шаги, каждый из которых состоит в выделении некоторого полного дифференциала или выполнения замены переменных.

Наконец, применяя метод интегрирующего множителя, следует не забывать о том, что уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ и $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ не равносильны друг другу, и в процессе решения может потребоваться дополнительное исследование.

Проиллюстрируем теперь использование этого метода.

`Задача 1.4.2` Решить уравнение

$$ydx - xdy = 2x^3 \,\mathrm{tg}\frac{y}{x}\,dx \,.$$

`Решение:` С формальной точки зрения решение данной задачи вполне допустимо описать примерно такой фразой: «Заметим, что в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $\mu(x,y) = -\dfrac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$, позволяющую преобразовать уравнение к виду $d\ln\left|\sin\dfrac{y}{x}\right| = -dx^2$». Однако, процедура решения окажется более прозрачной и понятной, если ее разбить на несколько последовательных шагов.

Вначале в левой части исходного уравнения выделим полный дифференциал от $\dfrac{y}{x}$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = 2x\,\operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx \qquad \text{или} \qquad -d\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx^2 \ .$$

Затем выполним разделение переменных $\dfrac{y}{x}$ и x^2

$$\frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}} = -dx^2 \ .$$

Отметим, что на этом этапе мы потеряли решение $y = 0$. Наконец, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$\frac{\cos\dfrac{y}{x}d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\sin\dfrac{y}{x}} = -dx^2 \qquad \text{или} \qquad \frac{d\sin\dfrac{y}{x}}{\sin\dfrac{y}{x}} = -dx^2 \ .$$

Откуда

$$d\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = d\left(-x^2\right) \qquad \text{или} \qquad \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = -x^2 + \ln\tilde{C} \ ,$$

где $\tilde{C} > 0$. Окончательно, с учетом решения $y = 0$, получаем ответ задачи

`Решение получено.`

$$\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2}\ , \ \ \forall C\ .$$

Задачу поиска интегрирующего множителя иногда можно упростить, сделав некоторые предположения о его виде. Например, можно попытаться найти интегрирующий множитель среди функций, зависящих только от одной из переменных x или y, или же в виде $\mu(f(x,y))$, где $f(x,y)$ некоторая конкретная функция, и т.п.

Подобные подходы, как показывает вычислительная практика, весьма редко приводят к желаемому результату. Более эффективными оказываются методы построения интегрирующих множителей, основанные на следующих рассуждениях.

Заметим, что, если $\mu(x,y)$ есть интегрирующий множитель уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

то есть

$$\mu P dx + \mu Q dy = du(x,y),$$

интегрирующим множителем для исходного уравнения будет являться и функция $\mu(x,y)F(u(x,y))$, где $F(u)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая функция одной переменной. Действительно,

$$\mu F(u)\,(Pdx + Qdy) = F(u)\,(\mu Pdx + \mu Qdy) = F(u)du = d\Phi(u)\,,$$

где $\Phi'(u) = F(u)$.

Иначе говоря, интегрирующих множителей бесконечно много, но поскольку для решения исходного уравнения достаточно найти только один, то этим обстоятельством можно попытаться воспользоваться. Например, представив левую часть исходного уравнения в виде

$$(P_1 + P_2)\,dx + (Q_1 + Q_2)\,dy = (P_1dx + Q_1dy) + (P_2dx + Q_2dy)$$

так, чтобы μ_1 и μ_2 – интегрирующие множители уравнений

$$P_1dx + Q_1dy = 0 \qquad \text{и} \qquad P_2dx + Q_2dy = 0, \qquad (1.4.6)$$

находились бы сравнительно легко. При этом будут справедливы равенства

$$\mu_1 P_1\,dx + \mu_1 Q_1\,dy = du_1 \qquad \text{и} \qquad \mu_2 P_2\,dx + \mu_2 Q_2\,dy = du_2.$$

Подберем теперь функции F_1 и F_2 так, чтобы

$$\mu_1 F_1(u_1) \equiv \mu_2 F_2(u_2) = M\,.$$

Решение исходной задачи в этом случае записывается в виде

$$M\,(Pdx + Qdy) = M\,(P_1dx + Q_1dy) + M\,(P_2dx + Q_2dy) =$$

$$= \mu_1 F_1(u_1)\,(P_1dx + Q_1dy) + \mu_2 F_2(u_2)\,(P_2dx + Q_2dy) =$$

$$= F_1(u_1)\,(\mu_1\,(P_1dx + Q_1dy)) + F_2(u_2)\,(\mu_2\,(P_2dx + Q_2dy)) =$$

$$= F_1(u_1)du_1 + F_2(u_2)du_2 = d\,(\Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)) = 0.$$

Откуда, окончательно

$$\Phi_1\,(u_1(x,y)) + \Phi_2\,(u_2(x,y)) = C\,. \qquad (1.4.7)$$

Практическое применение описанного метода иллюстрирует

`Задача 1.4.3` Решить уравнение

$$\left(x^3 - xy^2 - y\right)dx + \left(x^2y - y^3 + x\right)dy = 0\,.$$

`Решение:` Уравнения (1.4.6) сформируем, отнеся к первому их них слагаемые с первыми степенями независимых переменных и ко второму – слагаемые третьего порядка, получим

$$-ydx + xdy = 0 \qquad \text{и} \qquad \left(x^3 - xy^2\right)dx + \left(x^2y - y^3\right)dy\,.$$

Для первого уравнения имеем

$$-ydx + xdy = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_1(x,y) = \frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad u_1(x,y) = \frac{y}{x}.$$

Действуя аналогично для второго уравнения, находим

$$\left(x^3 - xy^2\right)dx + \left(x^2y - y^3\right)dy = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$x^2\,(xdx + ydy) - y^2\,(xdx + ydy) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\left(x^2 - y^2\right) d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_2(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2} \quad \text{и} \quad u_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}\,.$$

Теперь подберем функции $F_1(u_1)$ и $F_2(u_2)$ так, чтобы выполнялось равенство $\mu_1 F_1(u_1) = \mu_2 F_2(u_2)$, то есть

$$\frac{1}{x^2}\,F_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2-y^2}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad F_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,.$$

Откуда следует, что можно взять, например,

$$F_1\left(u_1\right) = \frac{1}{1-u_1^2} \quad \text{и} \quad F_2\left(u_2\right) \equiv 1\,.$$

Наконец, использовав соотношение (1.4.7), получим

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + \frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}} d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad d\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right|\right) = 0\,.$$

Откуда находим решения в виде

$$\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right| = C\,.$$

Завершая процедуру решения задачи, обратим внимание на то, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ исходного уравнения определены на всей плоскости E^2, а использованные интегрирующие множители – нет. Поэтому следует проверить, не являются ли решениями $x=0$ и $y=\pm x$. Непосредственная проверка показывает, что $y=\pm x$ суть также решения.

Решение получено.

1.5. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим теперь методы решения уравнений 1-го порядка, не разрешенных относительно производной. Эти уравнения согласно формуле (0.1.3) при $n=1$ и определению (0.1.4) записываются в виде

$$F\left(x,y,y'\right)=0\ , \tag{1.5.1}$$

где $F(x,y,z)$ – известная функция от трех переменных, непрерывная в непустой области $\Omega\subseteq E^3$, а $y(x)$ – искомая функция от $x\in X$.

Для дальнейших рассуждений оказывается удобным

Определение 1.5.1

Вектор-функция

$$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{array}\right.\qquad t\in\Theta\ . \tag{1.5.2}$$

называется *частным решением в параметрической форме* дифференциального уравнения (1.5.1), если

— $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы $\forall t\in\Theta$,

— $\varphi(t)\in X\ \ \forall t\in\Theta$, причем $\varphi'(t)\neq 0\ \forall t\in\Theta$, и $||\ \varphi(t)\ \psi(t)\ \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ ||^{\mathrm{T}}\in\Omega\ \ \forall t\in\Theta$,

— $F\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\ \equiv\ 0\ \ \forall t\in\Theta$.

Отметим, что в этом определении (по сравнению с определением (1.4.2)) неравенство $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$ заменено условием $\varphi'(t) \neq 0$, гарантирующем локальное существование функции $y(x)\ \forall x \in X$. При этом интегральной кривой является график частного решения $y(x)$, заданного параметрически вектор-функцией (1.5.2).

Для решения уравнения (1.5.1) в общем случае можно применить *метод введения параметра*, заключающийся при замене $y' = p$ и последующему решению алгебраическо-дифференциальной системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p\, dx. \end{array} \right. \tag{1.5.3}$$

Имеет место

`Теорема 1.5.1` **Система уравнений (1.5.3) и уравнение (1.5.1) равносильны.**

`Доказательство.`

С одной стороны, если $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \Theta$ – решение уравнения (1.5.1), то в силу

$$p(t) = y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)\ dt}{\varphi'(t)\ dt} = \frac{dy}{dx}\,,$$

оба уравнения системы (1.5.3) являются верными равенствами $\forall t \in \Theta$.

Обратно, если функции $\{\varphi(t),\ \psi(t),\ p(t)\}$ суть решение системы (1.5.3), то из $dy = p\, dx$ следует

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\ dt}{\varphi'(t)\ dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'(x) = p(t)\ ,$$

а из первого уравнения системы (1.5.3) получаем

$$F\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\ \equiv\ 0\ \ \forall t \in \Theta\ .$$

`Теорема доказана.`

Предположим теперь, что существуют непрерывно дифференцируемые функции $x = f(u, v),\ y = g(u, v)$ и $p = h(u, v)$, определенные для всех $(u,v) \in \Psi \subseteq E^2$, такие, что

$$F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \ \equiv \ 0 \ .$$

Кроме того предположим, что якобианы перехода от переменных $\{x, y, p\}$ к переменным $\{u, v\}$ не обращаются в ноль одновременно ни для какой точки в Ψ, то есть,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| + \left|\frac{\partial(y,p)}{\partial(u,v)}\right| + \left|\frac{\partial(p,x)}{\partial(u,v)}\right| > 0 \qquad \forall (u,v) \in \Psi,$$

где

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| , \qquad \frac{\partial(y,p)}{\partial(u,v)} = \det \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial p}{\partial v} \end{array} \right\| ,$$

$$\frac{\partial(p,x)}{\partial(u,v)} = \det \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial p}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right\| .$$

Отметим, что данную замену переменных можно трактовать как смену представления некоторой гладкой поверхности S в E^3 при помощи уравнения $F(x, y, p) = 0$ на ее параметрическое описание

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(u,v) \ , \\ y = g(u,v) \ , \\ p = h(u,v) \end{array} \right. \qquad \forall (u,v) \in \Psi \ . \tag{1.5.4}$$

Перейдем в записи системы (1.5.3) от переменных $\{x, y, p\}$ к переменным $\{u, v\}$. Первое ее уравнение удовлетворяется в Ψ тождественно, а второе принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = h(u,v) \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right)$$

или

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u} - h \frac{\partial f}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial g}{\partial v} - h \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv = 0 \ . \tag{1.5.5}$$

Уравнение (1.5.5) является уравнением первого порядка в дифференциалах, методы решения которых рассматривались в § 1.4. Напомним, что в общем случае уравнение такого типа не интегрируется в квадратурах. В том же случае, когда решение уравнения (1.5.5) удается представить в виде $v = g(u, C)$, где C – константа, функции

$$\begin{cases} x = f(u, g(u, C)) \ , \\ y = g(u, g(u, C)) \ , \\ p = h(u, g(u, C)) \end{cases}$$

являются решениями системы (1.5.3), а функции

$$\begin{cases} x = f(u, g(u, C)) \ , \\ y = g(u, g(u, C)) \end{cases}$$

соответственно суть параметрическая форма решений уравнения (1.5.1).

В тех случаях, когда уравнение (1.5.1) разрешимо относительно y' y или x, метод параметризации приводит к более простым, чем уравнение (1.5.5), задачам. Первый случай рассмотрен в §§ 1.1 – 1.3. Для второго и третьего случая алгоритм решения поясним на примере конкретного уравнения.

`Задача 1.5.1` Решить уравнение

$$2xy' - y = y' \ln yy' \ .$$

`Решение:` Хотя данное уравнение легко разрешимо относительно x, целесообразнее вначале умножить его обе части на y

$$2xyy' - y^2 = yy' \ln yy'$$

и выполнить замену переменной $u = y^2$

$$xu' - u = \frac{u'}{2} \ln \frac{u'}{2} \ .$$

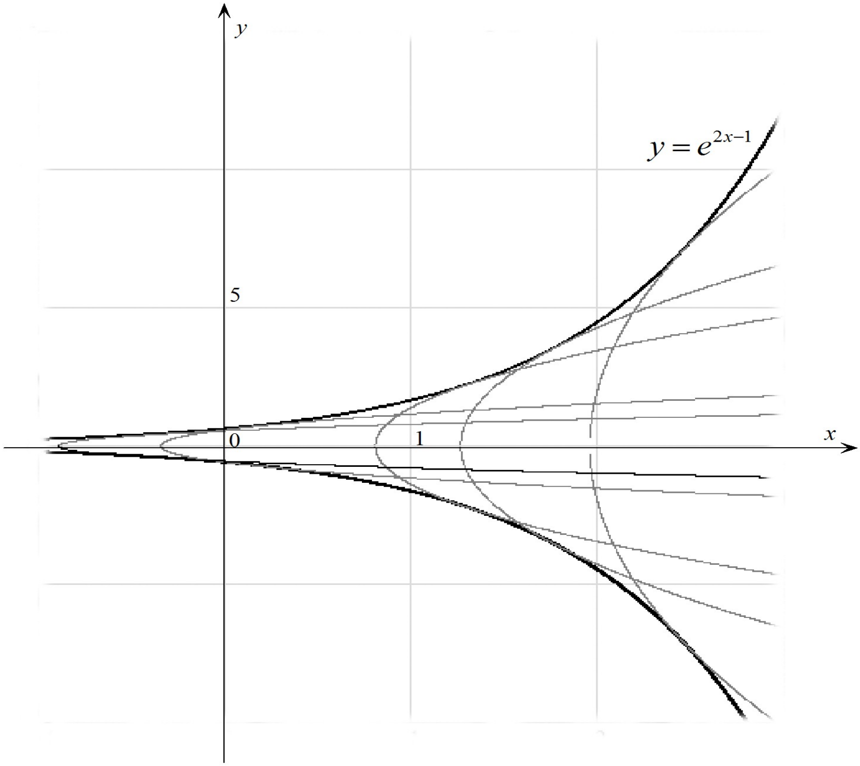


Рис. 1.4. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.5.1.

Поскольку $y = 0$ не является решением, то новое уравнение равносильно исходному.

Полученное уравнение есть, так называемое, *уравнение Клеро*, решение которого можно найти в справочниках. Однако, мы воспользуемся не шаблоном, а изложенной выше схемой.

Разрешая это уравнение относительно u и полагая $u' = p$, получаем систему (1.5.3) в виде

$$\begin{cases} u = xp - \dfrac{p}{2}\ln\dfrac{p}{2}\,, \\ du = p\,dx\ . \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Дифференцируя первое уравнение по x и подставляя в него $u' = p$, получаем

$$p'\left(x - \frac{1}{2}\ln\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0\ .$$

Теперь, либо

$$p' = 0 \quad\Longrightarrow\quad p = C\ ,\ \ \forall\, C > 0 \qquad \text{и из (1.5.6)} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2} \quad\Longrightarrow\quad y^2 = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}\ ,$$

либо

$$x - \frac{1}{2}\ln\frac{p}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad p = 2e^{2x-1}\ ,$$

что, в свою очередь, при подстановке в *первое* уравнение системы (1.5.6), дает $y^2 = e^{2x-1}$.

Интегральные кривые частных решений уравнения в задаче 1.5.1 показаны на рис. 1.4. По поводу их вида можно сделать следующие замечания.

Во-первых, кроме решений определяемых полученными формулами, как уже указывалось ранее, имеются и «составные» решения, образуемые объединением подходящих фрагментов «формульных» решений.

Во-вторых, среди интегральных кривых имеются как пересекающиеся, так и касающиеся друг друга. Условия их существования и другие свойства будут рассмотрены позднее, в § 4.6.

Сейчас лишь констатируем факт, что для уравнений вида (1.5.1) упорядоченная пара чисел $\{x_0;\ y_0\}$ может не определять вовсе, или же определять неоднозначно (даже локально!) частное решение таких уравнений. Это обстоятельство приводит к необходимости изменения постановки задачи Коши для уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной.

Определение 1.5.2	Задача Коши для уравнения $F(x,y,y')=0$, формулируется так: найти $y(x)$, при условиях $$\left\{\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \ , \\ y'(x_0)=p_0 \ , \\ F(x_0,y_0,p_0)=0 \ . \end{array}\right. \qquad (1.5.7)$$ При этом тройка чисел $\Vert\ x_0\ \ y_0\ \ p_0\ \Vert^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq E^3$ называется *начальными условиями задачи Коши.*

Число интегральных кривых, проходящих через заданную точку координатной плоскости Oxy зависит от числа решений системы (1.5.3). Может оказаться, что через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая, может – больше, чем одна. Заметим также, что единственность решения системы (1.5.3) не гарантирует единственности решения соответствующей задачи Коши, поскольку возможен случай, когда через одну точку плоскости проходят две *различные* интегральные кривые, имеющие в этой точке общую касательную. Все эти случаи демонстрирует рис. 1.4.

1.6. Методы понижения порядка уравнения

Проблемы существования и единственности решений возникают и в случае нелинейных уравнений порядка более высокого, чем первый. Поэтому представляется полезным рассмотрение специальных методов *понижения порядка*, позволяющих упрощать подобные уравнения и использовать методы рассмотренные нами ранее. Перечислим основные их них.

Порядок уравнения вида $F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ может быть понижен, если

1°. Левая часть исходного уравнения не содержит неизвестной функции и ее производных до $k-$го порядка включительно $1\le k\le n$. То есть, уравнение имеет вид
$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)}\right)=0\ .$$
В этом случае за новую неизвестную функцию принимаем $u(x)=y^{(k)}(x)$, тогда
$$y^{(k+1)}(x)=u'(x),\ \ldots\ ,y^{(n)}(x)=u^{(n-k)}(x).$$

Порядок уравнения понизился до $n-k$.

2°. Формулировка уравнения не содержит независимой переменной. Это значит, что мы имеем уравнение вида

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ .$$

Приняв за новую независимую переменную y, а за новую искомую функцию $y'(x) = u(y)$, и учитывая, что

$$y'(x) = u, \ y''_{xx}(x) = u'_x(x) = u'_y \cdot y'(x) = u'_y u, \ldots \ ,$$

понижаем порядок уравнения на единицу.

3°. Исходное уравнение является однородным относительно искомой функции и ее производных, то есть не меняется, если каждую из них умножить на $k > 0$. Порядок уравнения понизится на единицу при замене

$$y' = yu, \ y'' = y'u + yu' = yu^2 + yu', \ \ldots \ .$$

4°. Исходное уравнение таково (или же приводится к такому виду), что его левая часть является полной производной некоторого порядка. Этот метод поясним следующим примером.

`Задача 1.6.1` Понизить порядок уравнения $y'' + y = 0$.

`Решение:` Умножив обе части этого уравнения на y', получим

$$y'y'' + yy' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\, y'^2\right)' + \left(\frac{1}{2}\, y^2\right)' = 0$$

или $\left(y'^2 + y^2\right)' = 0$.

Откуда приходим к уравнению первого порядка

$$y'^2 + y^2 = \mathrm{C} \ .$$

Глава 2.

Линейные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

2.1. Линейные уравнения $n-$го порядка. Основные понятия и свойства

Определение 2.1.1	Пусть известные функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots\ a_n(x)$ и $b(x)$ непрерывны $\forall x \in X$, а искомая функция $y(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема $\forall x \in X$, тогда уравнение вида $$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots$$ $$\ldots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = b(x) \qquad (2.1.1)$$ называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка.*

Данное название оправдывается тем, что неизвестная функция $y(x)$, также как и ее производные, входят в уравнение (2.1.1) линейно. В то время как функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots\ a_n(x)$ и $b(x)$ могут быть и нелинейными. Как и раньше, в случае $b(x) \equiv 0,\ \forall x \in X$ это уравнение будем называть *однородным*, иначе – *неоднородным*.

Основные свойства решений уравнения (2.1.1) описывают следующие утверждения

Теорема 2.1.1 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (2.1.1), то $\mathrm{C}_1 y_1(x)+\mathrm{C}_2 y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\ C_1,\ C_2$.**

Доказательство.

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения однородного уравнения (2.1.1), то справедливы равенства

$$y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'(x)+a_n(x)y_1(x)=0 \quad \text{и}$$

$$y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_2'(x)+a_n(x)y_2(x)=0 \quad .$$

Умножив первое равенство на C_1, а второе на C_2, и сложив результаты умножения почленно, в силу линейности операции дифференцирования, получим

$$(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))^{(n)}+a_1(x)\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)^{(n-1)}+\ldots$$

$$+a_{n-1}(x)\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)'+a_n(x)\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)=0\ .$$

Но последнее равенство означает, что $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Покажите самостоятельно, что справедливо

Следствие 2.1.1 **Множество всех частных решений однородного уравнения (2.1.1) является линейным пространством.**

Теорема 2.1.2 **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного, а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_0(x)+y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство.

Поскольку $y_0(x)$ и $y^*(x)$ решения однородного и неоднородного уравнения (2.1.1) соответственно, то справедливы равенства

$$y_0^{(n)}(x) + a_1(x)y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y_0'(x) + a_n(x)y_0(x) = 0$$

и

$$y^{*(n)}(x)+a_1(x)y^{*(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y'^{*}(x)+a_n(x)y^*(x) = b(x).$$

Складывая эти равенства почленно и используя линейность операции дифференцирования, получаем

$$(y_0(x) + y^*(x))^{(n)} + a_1(x)\left(y_0(x) + y^*(x)\right)^{(n-1)} + \ldots$$

$$+a_{n-1}(x)\left(y_0(x) + y^*(x)\right)' + a_n(x)\left(y_0(x) + y^*(x)\right) = b(x)\ .$$

Но последнее равенство означает, что $y_0(x)+y^*(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.1.3 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство.

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения неоднородного уравнения (2.1.1), то справедливы равенства

$$y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'(x)+a_n(x)y_1(x) = b(x)$$

и

$$y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_2'(x)+a_n(x)y_2(x) = b(x).$$

Вычитая эти равенства почленно, в силу линейности операции дифференцирования, получаем

$$(y_1(x) - y_2(x))^{(n)} + a_1(x)\,(y_1(x) - y_2(x))^{(n-1)} + \ldots$$
$$+a_{n-1}(x)\,(y_1(x) - y_2(x))' + a_n(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) = 0\ .$$

Но последнее равенство означает, что $y_1(x)-y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

Следствие 2.1.2 **Общее решение неоднородного уравнения (2.1.1) есть сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство.

Пусть $y(x)$ есть произвольное частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), а $y^*(x)$ фиксированное решение этого уравнения, тогда $y(x) = (y(x) - y^*(x)) + y^*(x)$. В силу теоремы 2.1.3 $y_0(x) = y(x) - y^*(x)$ — произвольное решение однородного, то есть $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$.

Следствие доказано.

Теперь рассмотрим некоторые свойства комплексных функций вещественного аргумента.

В предположении, что вещественные числа $\alpha = \mathrm{Re}\lambda$ и $\beta = \mathrm{Im}\lambda$ являются соответственно *вещественной* и *мнимой частью* комплексного числа $\lambda = \alpha + i\beta$, дадим определение функции $e^{\lambda x}$.

Поскольку по формуле Эйлера

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x\ ,$$

то естественно комплексную экспоненту определить как

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)\ .$$

Тогда непосредственная проверка показывает, что будут выполняться соотношения $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}$ и $e^{\lambda x}\cdot e^{-\lambda x} = 1$.

Напомним также, что неотрицательное число $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ называется *модулем* комплексного числа λ. Причем справедливо соотношение

$$|e^{\lambda x}| = e^{\alpha x},$$

поскольку верны равенства

$$|e^{\lambda x}| = |e^{\alpha x}| \cdot |e^{i\beta x}|$$

и

$$|e^{i\beta x}| = \sqrt{\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x} = 1 \ .$$

Пусть функция $f(x)$, определенная $\forall x \in X$, имеет комплексные значения, тогда $f(x)$ представима как $u(x) + iv(x)$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют вещественные значения. Дадим также

Определение 2.1.2	Функция $f(x)$ называется – *непрерывной*, если непрерывны (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$, – *дифференцируемой*, если дифференцируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$, – *интегрируемой*, если интегрируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$.

Согласно определению 2.1.2 будут верны равенства

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x) \qquad \text{и}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b u(x)\, dx + i\int\limits_a^b v(x)\, dx \ ,$$

то есть, дифференцирование и интегрирование выполняются для комплекснозначной функции по обычным правилам, если считать i константой. Например, для комплексной экспоненты

$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad \text{и}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} e^{\lambda t} d\, t = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - e^{\lambda x_0}\right) , \quad \lambda \neq 0 \ .$$

Проверим справедливость первого из этих двух равенств. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\, e^{\alpha x} \right)(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \beta e^{\alpha x}\Big(-\sin\beta x + i\cos\beta x)\Big) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + i\beta e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - \frac{1}{i}\sin\beta x\right) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + i\beta e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) =$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda e^{\lambda x} \ ,$$

поскольку $\quad \left(-\frac{1}{i}\right) = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{(-1)} = i \ .$

Продемонстрируем использование приведенных выше теорем и формул на примере решения неоднородного линейного уравнения первого порядка специального вида

$$y' - \lambda y = \sum_{k=1}^{s} P_{m_k}(x)e^{\lambda_k x} \ , \tag{2.1.2}$$

где $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – некоторые комплексные константы, а

$$P_{m_k}(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m_k} x^{m_k},\ b_{m_k} \neq 0,\ k = [1, s]$$

– алгебраические многочлены степени m_k. Функции вида правой части уравнения (2.1.2) называются *квазимногочленами.*

Согласно теореме 1.3.1 общее решение однородного уравнения (2.1.2) дается формулой $y_0(x) = Ce^{\lambda x}$, $\forall C$. А в силу линейности этого уравнения по y и y' его частное решение есть сумма частных решений уравнений

$$y' - \lambda y = P_{m_k}(x) e^{\lambda_k x}\ . \tag{2.1.3}$$

Теорема 2.1.4 **При $\lambda \neq \lambda_k$ частным решением уравнения (2.1.3) является функция $y^*(x) = Q_{m_k}(x) e^{\lambda_k x}$, а при $\lambda = \lambda_k$ – функция $y^*(x) = x Q_{m_k}(x) e^{\lambda_k x}$, где $Q_{m_k}(x)$ – алгебраический многочлен степени m_k.**

Доказательство.

Используем метод вариации постоянной (а не формулу (1.3.3)!), то есть будем искать частное решение уравнения (2.1.3) в виде $y^* = \mathrm{C}(x) e^{\lambda_k x}$. Для функции $C(x)$ получается уравнение

$$C' + (\lambda_k - \lambda) C = P_{m_k}(x)\ . \tag{2.1.4}$$

При $\lambda = \lambda_k$ можем взять

$$C(x) = \int\limits_0^x P_{m_k}(u) du = x Q_{m_k}(x) \quad \Rightarrow \quad y^*(x) = x Q_{m_k}(x) e^{\lambda_k x}\ .$$

Если же $\lambda \neq \lambda_k$, то $C(x)$ находим из уравнения (2.1.4) методом неопределенных коэффициентов в виде

$$C(x) = c_0 x^{m_k} + c_1 x^{m_k - 1} + \ldots + c_{m_k - 1} x + c_{m_k} = Q_{m_k}(x)\ ,$$

и снова получаем указанный в условии теоремы вид частного решения неоднородного уравнения.

Теорема доказана.

2.2. Дифференциальные многочлены и их свойства

Определение 2.2.1	Будем говорить, что $\widehat{D} = \dfrac{d}{dx}$ – *оператор дифференцирования*, действующий в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых $\forall x \in R$ функций, со значениями в линейном пространстве функций непрерывных $\forall x \in R$, если каждой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ ставится в соответствие единственная непрерывная функция $y'(x)$. Символически действие оператора дифференцирования обозначается в виде равенств $$y'(x) = \widehat{D}y(x) \qquad \text{или} \qquad y' = \widehat{D}y\ .$$

Рассмотрим линейное уравнение $n-$го порядка (2.1.1) в случае, когда оно однородное и имеет постоянные коэффициенты

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0\ ,\ a_0 \neq 0\ . \qquad (2.2.1)$$

Используя оператор дифференцирования, это уравнение можно записать в виде

$$a_0\widehat{D}^n y + a_1\widehat{D}^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}\widehat{D}y + a_ny = 0 \quad \text{или} \quad L(\widehat{D})\ y = 0\ ,$$

где

$$\widehat{D}^k = \underbrace{\widehat{D}\widehat{D}\cdots\widehat{D}}_{k} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\right)\right)\right)}_{k} = \frac{d^k}{dx^k}\ ,$$

а $L(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – алгебраический многочлен $n-$ой степени от x.

Уравнение $L(\widehat{D})\ y = 0$ можно трактовать так: результат действия дифференциального оператора $L(\widehat{D})$ на n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$ есть функция тождественно равная нулю $\forall x \in X$. Этот оператор есть *отображение* линейного пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций в линейное пространство непрерывных функций. Покажите самостоятельно линейность этого отображения.

Введем для множества дифференциальных операторов вида $L(\widehat{D})$, называемых часто *дифференциальными многочленами*, операции сложения и умножения.

Определение 2.2.2 *Суммой дифференциальных операторов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный оператор $L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})$ такой, что

$$\Big(L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})\Big)\, y = L(\widehat{D})y + M(\widehat{D})y,$$

$$\forall y(x) \in C^n(X)\ ,$$

где $C^n(X)$ – линейное пространство n раз непрерывно дифференцируемых на X функций.

Произведением дифференциальных операторов $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный оператор $L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})$ такой, что

$$\Big(L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})\Big)\, y = L(\widehat{D})\,\Big(M(\widehat{D})y\Big)\,,$$

$$\forall y(x) \in C^n(X)\ .$$

Проверьте самостоятельно, что для операций сложения и умножения дифференциальных многочленов выполняются свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Это позволяет оперировать с ними как с обычными алгебраическими многочленами, в частности разлагать на линейные множители.

К другим полезным свойствам дифференциальных многочленов относятся соотношения, справедливость которых устанавливает

Теорема 2.2.1 **Для любого комплексного числа λ и любой функции $y(x) \in C^n(X)$ справедливы соотношения**

$$L(\widehat{D})e^{\lambda x} = L(\lambda) \cdot e^{\lambda x}\ ,$$

$$L(\widehat{D})\left(e^{\lambda x} y(x)\right) = e^{\lambda x} L(\widehat{D} + \lambda) y(x)\ .$$

Доказательство.

Первое соотношение следует из определения дифференциального многочлена и правил дифференцирования. Второе — из формулы бинома Ньютона и правила Лейбница для нахождения n−ой производной от произведения двух функций.

Действительно

$$\widehat{D}^k \left(e^{\lambda x} y\right) = \left(e^{\lambda x} y\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} y^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j \widehat{D}^{k-j} y = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^k y \; .$$

Откуда окончательно получаем

$$L(\widehat{D}) \left(e^{\lambda x} y(x)\right) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} (\widehat{D} + \lambda)^k y = e^{\lambda x} L(\widehat{D} + \lambda) y(x) \; .$$

Теорема доказана.

Заметим, что второе соотношение в формулировке теоремы 2.2.1 носит название «*Формула сдвига*».

2.3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим приведенное линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \; . \tag{2.3.1}$$

Пусть не равные друг другу числа $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_s$ суть корни его характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \; , \tag{2.3.2}$$

кратности k_1, k_2, $\ldots$, k_s соответственно. Причем, как известно из курса алгебры,

$$k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_s = n \ .$$

Тогда характеристический многочлен уравнения (2.3.1) можно представить в виде

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

а дифференциальный многочлен соответственно как

$$L(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1}(\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s} \ .$$

Докажем, что справедлива

Теорема 2.3.1 **Общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x)e^{\lambda_s x} \ , \quad (2.3.3)$$

где $P_j(x) = \sum\limits_{q=1}^{k_j} C_{jq}x^{q-1}$ **— алгебраический многочлен степени** $k_j - 1$.

Доказательство.

Вначале покажем, что каждое решение уравнения (2.3.1) имеет вид (2.3.3). Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ теорема верна в силу теоремы 1.3.1 и пусть доказываемая теорема верна при замене n на $n - 1$. Запишем дифференциальный оператор $L(\widehat{D})$ в виде

$$L(\widehat{D}) = M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s) \ ,$$

где

$$M(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1}(\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s - 1} \ .$$

В этом случае уравнение $L(\widehat{D})y(x) = 0$ можно записать как

$$M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s)y(x) = 0 \quad \text{или} \quad M(\widehat{D})u(x) = 0 \ ,$$

если

$$(\widehat{D} - \lambda_s)y(x) = u(x) \ .$$

Уравнение $M(\widehat{D})u(x) = 0$ линейное однородное, порядка $n-1$. Корнями его характеристического уравнения являются числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ кратности $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s - 1$ соответственно, если $k_s \geq 2$.

По предположению индукции его решение имеет вид:

в случае $k_s \geq 2$

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + Q_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + Q_s(x)e^{\lambda_s x} ,$$

где $Q_1(x),\ \ldots,\ Q_{s-1}(x)$ — алгебраические многочлены степени $k_1 - 1,\ \ldots, k_{s-1} - 1$, а многочлен $Q_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$.

в случае, если $k_s = 1$

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + Q_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} ,$$

то есть слагаемое с индексом s здесь отсутствует.

Найдем теперь вид функции $y(x)$ из уравнения

$$(\widehat{D} - \lambda_s)y(x) = u(x) , \tag{2.3.4}$$

или (что то же самое) из $y' - \lambda_s y = u(x)$. Это уравнение первого порядка, правая часть которого квазимногочлен. Согласно теореме 2.1.4 в случае, когда $k_s = 1$ его частное решение имеет вид

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} ,$$

а общее решение однородного (в силу теоремы 1.3.1) — $C \cdot e^{\lambda_s x}$. Сумма этих выражений дает функцию, указанную в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_s \geq 2$. По теореме 2.1.4 уравнение (2.3.4) имеет частное решение вида

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + xQ_s(x)e^{\lambda_s x} ,$$

в котором многочлен $Q_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$. Складывая эту формулу с формулой общего решения однородного уравнения (2.3.4), получаем вид общего решения уравнения (2.3.1) совпадающий с (2.3.3).

Осталось убедиться, что любая функция вида (2.3.3) есть решение уравнения (2.3.1). Для этого достаточно показать, что, если λ_0 — корень кратности k уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций

$$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\ x^2 e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_0 x} \tag{2.3.5}$$

удовлетворяет уравнению (2.3.1) $L(\widehat{D})y = 0$.

Пусть сначала $\lambda_0 = 0$. Тогда характеристический многочлен уравнения (2.3.1) будет иметь вид

$$L(\lambda) = \lambda^k \left(\lambda^{n-k} + a_1 \lambda^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k-1}\lambda + a_{n-k} \right) \ ,$$

где $a_{n-k} \neq 0$. Поэтому $L(\widehat{D}) = \widehat{D}^n + a_1 \widehat{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-k}\widehat{D}^k$. Непосредственная проверка показывает, что все функции $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{k-1}$ удовлетворяют условию $L(\widehat{D})y = 0$.

Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$. Положим $y(x) = e^{\lambda_0 x} u(x)$ и найдем результат действия оператора $L(\widehat{D})$ на функцию $y(x)$. По формуле сдвига (теорема 2.2.1) получаем

$$L(\widehat{D})y = L(\widehat{D})\left(e^{\lambda_0 x} u\right) = e^{\lambda_0 x} L(\widehat{D} + \lambda_0) u = 0 \ .$$

Характеристический многочлен $L(\lambda + \lambda_0)$ очевидно имеет корень $\lambda = 0$ кратности k, в силу чего уравнение

$$L(\widehat{D} + \lambda_0) u(x) = 0$$

удовлетворяется функциями $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{k-1}$, и функции $y(x) = e^{\lambda_0 x} u(x)$ суть решения уравнения (2.3.1).

Теорема доказана.

Следствие 2.3.1 **Если все корни характеристического уравнения (2.3.2) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ простые (то есть, кратности единица), то общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = \mathrm{C}_1 e^{\lambda_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \mathrm{C}_n e^{\lambda_n x} \ , \tag{2.3.6}$$

где $\mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2,\ \ldots,\ \mathrm{C}_n$ — произвольные комплексные константы.

Доказательство.

Очевидно следует из утверждения теоремы 2.3.1.

Следствие доказано.

Следствие 2.3.2 **Базисом в линейном пространстве решений уравнения (2.3.1) может служить любой упорядоченный набор из следующих n функций**

Таблица 2.1.

$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$e^{\lambda_s x}$
$xe^{\lambda_1 x}$	$xe^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$xe^{\lambda_s x}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$\ldots$	$\ldots$	$x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$
	$x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$		

Доказательство.

Следует из линейной независимости данного набора функций, равенства $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ и утверждения теоремы 2.3.1.

Следствие доказано.

Заметьте, что число заполненных клеток таблицы 2.1, вообще говоря, различно для разных ее столбцов, поскольку корни характеристического уравнения могут иметь разные кратности.

2.4. Выделение вещественных решений

Достаточно часто в вычислительной практике оказывается, что уравнение (2.3.1) имеет *вещественные* коэффициенты

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.4.1)$$

и требуется найти все его вещественные решения. Получим формулу общего вещественного решения этого уравнения, предполагая, что комплексные решения, определяемые формулой (2.3.3) нами уже найдены. Убедимся вначале, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.4.1 **Пусть уравнение (2.4.1) имеет комплексный корень λ_0 кратности k, тогда оно имеет корень $\overline{\lambda}_0$, причем той же кратности k.**

Доказательство.

В силу вещественности коэффициентов в уравнении (2.4.1) и согласно свойствам комплексного сопряжения

$$L(\overline{\lambda}_0) = \overline{\lambda}_0^{\,n} + a_1 \overline{\lambda}_0^{\,n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{\lambda}_0 + a_n = \overline{L(\lambda_0)} = \overline{0} = 0\ .$$

Из второго условия леммы аналогичными рассуждениями получаем

$$L'(\overline{\lambda}_0) = L''(\overline{\lambda}_0) = \ldots = L^{(k-1)}(\overline{\lambda}_0) = 0 \ \text{ и } \ L_{n-k}(\overline{\lambda}_0) \neq 0\ ,$$

что дает $L(\lambda) = (\lambda - \overline{\lambda}_0)^k L_{n-k}(\lambda)$.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.2 **Для того, чтобы комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ и $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$, являлась решением уравнения (2.4.1), необходимо и достаточно, чтобы вещественные функции $u(x)$ и $v(x)$ были решениями этого уравнения.**

Доказательство.

Следует из линейности дифференциального многочлена и равенств

$$L(\widehat{D})y(x) = L(\widehat{D})\,(u(x) + iv(x)) = L(\widehat{D})u(x) + iL(\widehat{D})v(x) = 0\ .$$

Лемма доказана.

Теперь опишем процедуру выделения вещественных решений из общего решения уравнения (2.4.1).

В силу леммы 2.4.1 для $\lambda_t = \alpha_t + i\beta_t$ — каждого невещественного (то есть, с $\beta_t \neq 0$) корня кратности k_t характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \;, \tag{2.4.2}$$

будет существовать сопряженный корень $\overline{\lambda}_t = \alpha_t - i\beta_t$, причем той же кратности. Следовательно, в таблице 2.1 для каждой базисной функции $y_{qt}(x) = x^q e^{\lambda_t x}$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, k_t - 1$, найдется функция $\overline{y}_{qt}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_t x}$. По формуле Эйлера

$$y_{qt}(x) = x^q e^{\lambda_t x} = x^q e^{(\alpha_t + i\beta_t)x} = x^q e^{\alpha_t x}(\cos\beta_t x + i\sin\beta_t x) \quad \text{и}$$

$$\overline{y}_{qt}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_t x} = x^q e^{(\alpha_t - i\beta_t)x} = x^q e^{\alpha_t x}(\cos\beta_t x - i\sin\beta_t x) \;.$$

Поэтому вещественные функции

$$u_{qt}(x) = x^q e^{\alpha_t x}\cos\beta_t x \qquad \text{и} \qquad v_{qt}(x) = x^q e^{\alpha_t x}\sin\beta_t x$$

будут, согласно лемме 2.4.2, решениями уравнения (2.4.1).

Перейдем в линейном пространстве решений от базиса, содержащегося в таблице 2.1, к новому базису, заменив каждую пару функций $\{\; y_{qt}(x),\; \overline{y}_{qt}(x) \;\}$ на пару функций $\{\; u_{qt}(x),\; v_{qt}(x) \;\}$. Заметим при этом, что из линейной независимости функций $y_{qt}(x),\; \overline{y}_{qt}(x)$ следует линейная независимость и функций $u_{qt}(x),\; v_{qt}(x)$. Проверьте это самостоятельно, использовав соотношения

$$u_{qt}(x) = \frac{y_{qt}(x) + \overline{y}_{qt}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v_{qt}(x) = \frac{y_{qt}(x) - \overline{y}_{qt}(x)}{2i} \;.$$

Новый базис состоит из n вещественных функций, которые обозначим как $\psi_j(x)$. В нем любое вещественное решение уравнения (2.4.1) представимо как некоторая вещественная линейная комбинация функций $\psi_j(x)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.4.1 **Общее вещественное решение уравнения (2.4.1) имеет вид**

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j\psi_j(x) \;,$$

где R_j — произвольные вещественные константы.

В заключение рассмотрим простой, но очень важный для физических и технических приложений пример.

Задача 2.4.1 Найти все вещественные решения уравнения $y''+\omega^2 y = 0$, если $\omega > 0$.

Решение: Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. У него есть два сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, кратности 1 каждое. Поэтому общее комплексное решение исходного уравнения будет

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}.$$

По формуле Эйлера

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x \ .$$

Значит, $u(x) = \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \cos\omega x$ и $v(x) = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \sin\omega x$.

Переходя в E^2 — в линейном пространстве решений исходного уравнения, от базиса $\left\{e^{i\omega x};\ e^{-i\omega x}\right\}$ к базису $\{\cos\omega x;\ \sin\omega x\}$, получаем окончательно

$$y(x) = R_1\cos\omega x + R_2\sin\omega x \ ,$$

где R_1 и R_2 — произвольные вещественные константы.

2.5. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x) \ , \qquad (2.5.1)$$

предполагая, что общее решение соответствующего однородного уравнения уже найдено.

Согласно следствию 2.1.2 для построения общего решения неоднородного уравнения (2.5.1) достаточно найти какое-нибудь его частное решение. Мы воспользуемся методом *вариации постоянных* (методом Лагранжа), основой которого является

Теорема 2.5.1 **Пусть общее решение однородного уравнения (2.5.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \cdots + C_n g_n(x) \ ,$$

где функции $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$ **образуют базис в пространстве частных решений однородного уравнения. Тогда неоднородное уравнение (2.5.1) имеет решение вида**

$$y^*(x) = C_1(x) g_1(x) + C_2(x) g_2(x) + \cdots + C_n(x) g_n(x) \ ,$$

где функции $\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots\ C_n(x)\}$ **находятся из системы линейных уравнений**

$$\begin{cases} C_1'(x) g_1(x) + C_2'(x) g_2(x) + \cdots + C_n'(x) g_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1'(x) + C_2'(x) g_2'(x) + \cdots + C_n'(x) g_n'(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1''(x) + C_2'(x) g_2''(x) + \cdots + C_n'(x) g_n''(x) \ = \ 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x) g_1^{(n-1)}(x) \ + \ \ldots \ + \ C_n'(x) g_n^{(n-1)}(x) \ = \ b(x) \ . \end{cases}$$

Доказательство.

Найдем выражения для производных от функции $y^*(x)$ до $n-$го порядка включительно, используя следующую процедуру.

$$\text{Если } y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k \ , \quad \text{то} \quad y'^* = \sum_{k=1}^{n} (C_k' g_k + C_k g_k') \ .$$

Потребуем, кроме того, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k' g_k \ = \ 0$, ибо в этом случае $y'^* \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} C_k g_k'$, то есть, формула для производной упрощается.

Дифференцируя еще раз, получаем что

$$y''^* = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k'' \ , \ \text{ при условии, что } \sum_{k=1}^{n} C_k' g_k' = 0 \ .$$

Эту процедуру последовательно выполняем до получения равенства

$$y^{*(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k^{(n-1)}, \ \text{ при условии, что } \sum_{k=1}^{n} C_k' g_k^{(n-2)} = 0 \ .$$

Наконец, подставляя полученные выражения для функции $y^*(x)$ и ее производных в уравнение (2.5.1), приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left(g_k^{(n)} + \ldots + a_{n-1} g_k' + a_n g_k \right) + \sum_{k=1}^{n} C_k' g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

а принимая во внимание, что каждая функция $g_k(x)$ есть частное решение *однородного* уравнения (2.5.1), получаем условие

$$\sum_{k=1}^{n} C_k' g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

которое, в совокупности с использованными ранее равенствами

$$\sum_{k=1}^{n} C_k' g_k^{(j)} = 0 \ , \quad \forall j = [0, n-2],$$

образует систему уравнений, указанную в условии теоремы.

В матричной форме данная система имеет вид

$$\begin{Vmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \ldots & g_n(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & \ldots & g_n'(x) \\ g_1''(x) & g_2''(x) & \ldots & g_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \ldots & g_n^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \ldots \\ C_n' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ b(x) \end{Vmatrix} \tag{2.5.2}$$

В § 5.3 (теорема 5.3.3) показано, что определитель основной матрицы системы (2.5.2) (называемый определителем Вронского или *вронскианом*) отличен от нуля для системы линейно независимых функций $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \dots\ g_n(x)\}$, являющихся частными решениями уравнения (2.5.1). Поэтому, в силу теоремы Крамера, функции $C'_k(x), \forall k = [1, n]$ существуют и единственны.

Теорема доказана.

Следствие 2.5.1 **Уравнение (2.5.1) интегрируется в квадратурах.**

Доказательство.

Следует из утверждения теоремы 2.5.1 и очевидной возможности представления каждой функции

$$C_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} C'_k(u)du\ , \quad \forall k = [1, n]\ ,$$

то есть, в виде интеграла с переменным верхним пределом.

Следствие доказано.

Для некоторых классов функций $b(x)$ общее решение уравнения (2.5.1) удается выразить через элементарные функции. Важный для приложений такой случай описывает

Теорема 2.5.2 **Пусть $b(x)$ квазимногочлен вида $P_m(x)e^{\mu x}$, где $P_m(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$. Тогда**

— $y^*(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, **если μ не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1), (так называемый *нерезонансный* случай),**

— **либо $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\mu x}$, если μ корень характеристического многочлена уравнения (2.5.1) кратности k (*резонансный* случай).**

`Доказательство.`

Будем искать $y^*(x)$ в виде $u(x)e^{\mu x}$. Подставим эту функцию в исходное уравнение $L(\widehat{D})y = P_m(x)e^{\mu x}$, получим (используя «формулу сдвига», теорема 2.2.1)

$$L(\widehat{D})\big(u(x)e^{\mu x}\big) = P_m(x)e^{\mu x}\ ,$$

$$e^{\mu x}L(\widehat{D}+\mu)u(x) = P_m(x)e^{\mu x}\ ,$$

$$L(\widehat{D}+\mu)u(x) = P_m(x)\ . \tag{2.5.3}$$

1°. Пусть $L(\lambda+\mu) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n$. В нерезонансном случае $L(0+\mu) = L(\mu) \neq 0$ и значит $b_0 \neq 0$, и $u(x)$ можно найти в виде многочлена

$$d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m$$

из уравнения (2.5.3), приравнивая коэффициенты при равных степенях x в его обеих частях.
Действительно, из равенств

$$b_0u + b_1u' + \ldots + b_nu^{(n)} =$$

$$= b_0(d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m) + b_1(d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m)' + \ldots$$

$$\ldots + b_n(d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m)^{(n)} =$$

$$= c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$$

получаем линейную систему алгебраических уравнений с треугольной матрицей, на диагонали которой находится ненулевое число b_0,

$$\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_0 \\ 0 & \ldots & b_0 & mb_1 \\ 0 & \ldots & p_2b_1 & q_2b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & \ldots & p_mb_{m-1} & q_mb_m \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_m \\ c_{m-1} \\ c_{m-2} \\ \ldots \\ c_0 \end{Vmatrix},$$

где p_i и q_j некоторые известные константы. Таким образом

$$d_m = \frac{c_m}{b_0}\,, \qquad d_{m-1} = \frac{c_{m-1} - mb_1d_m}{b_0}\,,\ \ldots\ .$$

Таким образом, мы приходим к виду функции $y^*(x)$, указанному в нерезонансном случае формулировки теоремы.

2°. Пусть теперь μ есть корень характеристического уравнения кратности k. Покажем, что в этом случае

$$L(\lambda+\mu) = b_k\lambda^k + b_{k+1}\lambda^{k+1} + \ldots + b_n\lambda^n \ , \tag{2.5.4}$$

причем $b_k \neq 0$.

Действительно, в резонансном случае характеристическое уравнение для уравнения (2.5.3)

$$L(\lambda+\mu) = 0 \tag{2.5.5}$$

имеет нулевой корень, поскольку

$$L(0+\mu) = L(\mu) = 0 \ .$$

Аналогично, в силу того, что μ корень кратности k, будут верны также равенства

$$L_\lambda^{(j)}(0+\mu) = L_\lambda^{(j)}(\mu) = 0 \qquad \forall\, j = [\,1, k-1],$$

$$\text{но} \quad L_\lambda^{(k)}(0+\mu) = L_\lambda^{(k)}(\mu) \neq 0 \ .$$

А это означает, что уравнение (2.5.5) имеет нулевой корень, притом той же кратности k, и, следовательно, формула (2.5.4) верная.

Уравнение (2.5.3) теперь будет иметь вид

$$\big(b_k\widehat{D}^k + b_{k+1}\widehat{D}^{k+1} + \ldots + b_n\widehat{D}^n\big)u(x) = P_m(x) \ ,$$

или

$$b_k u^{(k)}(x) + b_{k+1}u^{(k+1)}(x) + \ldots + b_n u^{(n)}(x) = P_m(x) \ , \tag{2.5.6}$$

Порядок уравнения (2.5.6) можно понизить, введя новую неизвестную функцию $w(x) = u^{(k)}$. Получаем уравнение вида

$$b_k w(x) + b_{k+1}w'(x) + \ldots + b_n w^{(n-k)}(x) = P_m(x) \ ,$$

для которого, в силу $b_k \neq 0$, мы имеем *нерезонансный* случай, поэтому $w(x) = T_m(x)$.

Наконец, из равенства $u^{(k)} = T_m(x)$, путем его последовательного k-кратного интегрирования в пределах от 0 до x, получим указанный в резонансной части формулировки теоремы вид функции $y^*(x)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.5.2 **Пусть коэффициенты уравнения (2.5.1) вещественны, а** $b(x) = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$**, где** α, β **— вещественные числа,** $A(x)$ **и** $B(x)$ **— вещественные многочлены, один из которых степени** m**, а второй степени не выше, чем** m**. Тогда уравнение (2.5.1) имеет частное решение вида**

— $y^*(x) = e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1),** (*нерезонансный* **случай),**

— **либо** $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ **– корень характеристического многочлена уравнения (2.5.1) кратности** k (*резонансный* **случай).**

Функции $C(x)$ **и** $D(x)$ **— вещественные алгебраические многочлены степени** m.

Доказательство.

Следует из утверждения теоремы 2.5.2 и правила выделения вещественного решения (теорема 2.4.1).

Следствие доказано.

Глава 3.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 3.0.1	*Нормальной системой* дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

где $t \in T$, $x_k(t)$ $k = [1, n]$ – комплекснозначные непрерывно дифференцируемые неизвестные функции вещественного аргумента, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на T функции, называемые *свободными членами*. Числа a_{ij} $\forall i, j = [1, n]$ – комплексные константы.

Данную систему уравнений часто записывают в так называемом *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + b_i(t) \,, \ \forall i = [1, n] \,, \tag{3.0.1}$$

или же в еще более простой, матричной форме $\|\dot{x}\| = \|A\| \|x\| + \|b\|$, где

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| , \ \|x\| = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{matrix} \right\| , \ \|b\| = \left\| \begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{matrix} \right\| .$$

Отметим сразу, что *задача Коши* для системы линейных уравнений (3.0.1) заключается в отыскании ее частного решения, удовлетворяющего *начальным условиям* $x_k(t_0) = x_{(0)k}$, $\forall k = [1, n]$, где $x_{(0)k}$, $t_0 \in T$ – фиксированные комплексные числа. [1] Далее (в § 4.3) будет показано, что задача Коши для системы уравнений (3.0.1) разрешима всегда и притом однозначно.

Методы решения системы уравнений (3.0.1) принципиально аналогичны методам решения линейного уравнения $n-$го порядка, поскольку линейное уравнение $n-$го порядка может быть сведено к системе вида (3.0.1) и наоборот. Иллюстрацией такого сведения, называемого *методом исключения*, может служить следующий пример.

`Задача 3.0.1` Найти вещественные решения системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1(t) & = & 4x_1(t) & - & 3x_2(t) & + & \sin t, \\ \dot{x}_2(t) & = & 2x_1(t) & - & x_2(t) & - & 2\cos t. \end{array} \right.$$

[1] Здесь и далее нижний индекс, выделенный круглыми скобками, есть номер члена некоторого множества (последовательности), а не номер координаты.

`Решение:` Продифференцировав обе части первого уравнения, получим равенство $\ddot{x}_1(t) = 4\dot{x}_1(t) - 3\dot{x}_2(t) + \cos t$. Затем подставляя в него $\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - 2\cos t$ из второго уравнения системы и $3x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 4x_1(t) - \sin t$ – из первого, приходим к линейному уравнению второго порядка $\ddot{x}_1(t) - 3\dot{x}_1(t) + 2\dot{x}_1(t) = \sin t + 7\cos t$. Его общее решение $x_1(t) = R_1\, e^t + R_2\, e^{2t} - 2\sin t + \cos t$.

Далее, опять-таки из первого уравнения исходной системы, получаем

$$x_2(t) = R_1\, e^t + \frac{2}{3}\, R_2\, e^{2t} - 2\sin t + 2\cos t,$$

где R_1 и R_2 произвольные вещественные константы.

Наконец, в матричной форме это решение можно записать так

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = R_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^t + R_2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\| e^{2t} - \left\| \begin{matrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\sin t - 2\cos t \end{matrix} \right\| .$$

Использованный метод аналогичен методу исключения при решении систем алгебраических уравнений. Применение его, как правило, целесообразно лишь для достаточно простых и низкоразмерных систем вида (3.0.1).

3.1. Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов)

Рассмотрим теперь *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\|\dot{x}\| = \|A\| \|x\| \, . \tag{3.1.1}$$

Свойства ее общего решения — совокупности всех частных решений, описываются следующим набором теорем.

Теорема 3.1.1 (Принцип супер-позиции) **Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ — частные решения системы (3.1.1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\| + C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант C_1 и C_2.**

Доказательство.

Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ — частные решения системы (3.1.1), то справедливы равенства $\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\| = \|o\|$ и $\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\| = \|o\|$, где $\|o\|$ — нулевой столбец.

Имеем

$$\|\dot{x}(t)\| - \|A\|\|x(t)\| =$$

$$= C_1\|\dot{x}_{(1)}(t)\| + C_2\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - C_1\|A\|\|x_{(1)}(t)\| - C_2\|A\|\|x_{(2)}(t)\| =$$

$$= C_1\left(\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\|\right) +$$

$$+ C_2\left(\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\|\right) = C_1\|o\| + C_2\|o\| = \|o\| .$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.1 **Множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) образует линейное пространство.**

Доказательство.

Следует из аксиоматики линейного пространства и теоремы 3.1.1.

Следствие доказано.

Предположим теперь, что $\|A\|$ – матрица системы уравнений (3.1.1), задает в $n-$мерном унитарном пространстве U^n с ортонормированным базисом линейный оператор (точнее, линейное преобразование) $\widehat{A}$. Напомним также, что ненулевой элемент $f \in U^n$ называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим *собственному значению* λ, если $\widehat{A}f = \lambda f$. В координатной форме (как показывается в курсе линейной алгебры) последнее равенство будет иметь вид

$$\|\widehat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| .$$

Ответ на вопрос: «При каких $\|f\|$ и λ вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ есть частное нетривиальное решение системы (3.1.1)?» дает

Теорема 3.1.2 **Для того, чтобы $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлся частным нетривиальным решением системы (3.1.1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а λ – соответствующим собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$.**

Доказательство.

Пусть $\|f\|$ некоторый ненулевой столбец. Подставим $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ в уравнение (3.1.1), приняв во внимание равенство $\dfrac{d}{dt}\, e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$. Получим

$$\lambda\|f\|e^{\lambda t} = \|A\|\left(\|f\|e^{\lambda t}\right) \ ,$$

то есть, $\|A\|\|f\| = \lambda\|f\|$.

Теорема доказана.

Возможный вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений устанавливает

Теорема 3.1.3 **Пусть в U^n существует базис $\left\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\right\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

— $\mathrm{C}_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + \mathrm{C}_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (3.1.1),**

— **и каждое частное решение системы (3.1.1) может быть представлено в виде** $\mathrm{C}_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C}_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + \mathrm{C}_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.

Доказательство.

Справедливость первого пункта следует из теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Докажем второй пункт. Пусть $\|x(t)\|$ некоторое частное решение системы (3.1.1). Оно (в силу условия теоремы) $\forall t \in T$ может быть разложено по базису из собственных векторов преобразования $\|A\|$

$$\|x(t)\| = D_1(t)\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|f_{(n)}\| \,. \quad (3.1.2)$$

Подставим это выражение в систему (3.1.1), получим

$$\dot{D}_1(t)\|f_{(1)}\| + \dot{D}_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + \dot{D}_n(t)\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\|A\|\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|A\|\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|A\|\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\lambda_1\|f_{(1)}\| + D_2(t)\lambda_2\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\lambda_n\|f_{(n)}\| \,.$$

Откуда получаем равенство

$$\Big(\dot{D}_1(t) - \lambda_1 D_1(t)\Big)\,\|f_{(1)}\| + \ldots + \Big(\dot{D}_n(t) - \lambda_n D_n(t)\Big)\,\|f_{(n)}\| = \|o\|.$$

В силу линейной независимости базисных элементов из него следует, что

$$\dot{D}_k(t) - \lambda_k D_k(t) = 0, \quad \forall k = [1, n] \qquad \Longrightarrow \qquad D_k(t) = C_k e^{\lambda_k t} \,,$$

что, в сочетании с равенством (3.1.2), дает требуемый формат записи решения.

Теорема доказана.

Следствие 3.1.2 **В условиях теоремы 3.1.3, линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (3.1.1), $n-$мерное.**

Доказательство.

Следует из определения конечномерного линейного пространства и теоремы 3.1.3.

Следствие доказано.

Таким образом, в тех случаях, когда из собственных векторов линейного преобразования $\widehat{A}$ можно образовать базис в U^n, общее решение системы (3.1.1) определяется теоремой 3.1.3.

В качестве *достаточных* признаков такой возможности удобно использовать следующие, доказываемые в курсе линейной алгебры, критерии.

Из собственных векторов линейного преобразования можно образовать базис в U^n, если

— если все собственные значения $\widehat{A}$ попарно различны, или,

— если матрица $\|\widehat{A}\|$ эрмитовская (то есть, $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \forall i, j = [1, n]$) в U^n (или же, в случае E^n, симметрическая).

Использование утверждения теоремы 3.1.3 можно проиллюстрировать следующим примером.

`Задача 3.1.1` Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

`Решение:` Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 .$$

Или $\quad (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0 , \quad$ откуда $\quad \lambda_1 = -2; \ \lambda_{2,3} = 1 .$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$.

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \| - 1 \ 1 \ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \ . \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1 \ 1 \ 0\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|1 \ 0 \ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимые и образуют базис в U^3 . Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| e^t + C_3 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^t,$$

где $C_1, \ C_2$ и C_3 — произвольные комплексные постоянные.

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то из общего комплексного решения можно выделить вещественные решения. В этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис. Каждую такую пару следует заменить вещественными функциями, являющимися вещественной и мнимой частью исходной пары. То есть, процедура этого выделения в точности совпадает с методом, изложенным в § 2.4, за исключением некоторых технических деталей, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

Задача 3.1.2 Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= & x_1(t) & - & x_2(t) & - & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= & x_1(t) & + & x_2(t) & & , \\ \dot{x}_3(t) &= & 3x_1(t) & & & + & x_3(t). \end{cases}$$

Решение: Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \implies (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda - 1)\left((\lambda-1)^2 + 4\right) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Опять-таки, каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$.

Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \implies \begin{cases} \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 = 0 \ , \end{cases}$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \ 1 \ -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь собственный вектор, например, для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0\ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0\ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|-2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 — произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi_+(t) = \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t}$. Найдем $\mathrm{Re}\Phi_+(t)$ и $\mathrm{Im}\Phi_+(t)$.

Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi_+(t) = \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| + i \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t\right) =$$

$$= \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \cos 2t - \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \sin 2t \right) +$$

$$+ i \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \sin 2t + \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \cos 2t \right)\ .$$

Или, сгруппировав подобные члены, получим

$$\Phi_+(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi_+(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi_+(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

где $R_1,\ R_2$ и R_3 — произвольные вещественные постоянные.

3.2. Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, порождаемого в U^n матрицей $\|A\|$.

Действительно, из курса линейной алгебры известно, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению кратности k, не меньше, чем единица, но не больше, чем k. Поэтому максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению кратности $k \geq 2$, может оказаться строго меньше, чем k. Что, в свою очередь, будет означать, что полное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\|A\|$ окажется меньше n – размерности U^n, ибо полное число корней характеристического уравнения (с учетом их кратности) всегда равно n. И, следовательно, в линейном пространстве частных решений системы уравнений (3.1.1) не удается построить базис вида, указанного в формулировке теоремы 3.1.3.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| . \tag{3.2.1}$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l. У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали равны единице, а остальные элементы нули.

Матрица $\|J_l\|$, определяющая некоторое линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в U^p, имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l, которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \dots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку rg $\|\widehat{J}_l - \lambda_0 \widehat{E}\| = l - 1$. Иначе говоря, размерность собственного подпространства равна единице и базис из собственных векторов $\|J_l\|$ в U^l не существует.

Построить в пространстве частных решений системы (3.1.1) базис, позволяющий описать ее общее решения, оказывается возможным, добавляя к собственным векторам $\|A\|$ специальные дополнительные элементы пространства U^n.

Пусть λ_0 собственное значение, а $\|h^1\|$ соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в U^n.

Определение 3.2.1	Элементы $\|h_{(1)}\|$, $\|h_{(2)}\|$, $\ldots$, $\|h_{(l)}\|$ принадлежащие U^n и являющиеся решениями уравнений $$\begin{array}{l} \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \ , \\ \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ , \\ \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \ , \end{array} \qquad (3.2.2)$$ при условии, что уравнение $\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h\| = \|h_{(l)}\|$ решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длины l, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$. Элементы $\|h_{(2)}\|$, $\|h_{(3)}\|$, $\ldots$, $\|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к собственному вектору $\|h_{(1)}\|$.

Например (покажите это самостоятельно), жорданова цепочка, построенная для матрицы вида (3.2.1) с начальным собственным вектором $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, является стандартным базисом в линейном пространстве U^l.

Заметим также, что уравнения (3.2.2) можно записать в других формах, а именно

$$\begin{array}{l} \|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \ , \\ \|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \ , \\ \|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| \ . \end{array} \qquad (3.2.3)$$

Или, если обозначить $\|\widehat{B}\| = \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|$, то в виде

$$\begin{array}{lcl} \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \ , \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^2\|h_{(2)}\| = \|o\| \ , \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^3\|h_{(3)}\| = \|o\| \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ \|\widehat{B}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \ , & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^l\|h_{(l)}\| = \|o\| \ . \end{array} \qquad (3.2.4)$$

Опишем теперь основные свойства жордановых цепочек.

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в U^n, являющихся**

— какой-либо жордановой цепочкой,

— либо объединением нескольких различных жордановых цепочек,

линейно независимое.

Доказательство.

Докажем первое утверждение.

Из соотношений (3.2.4) следует, что

$$\|\widehat{B}\|^s\|h_{(s+1)}\| = \|h_{(1)}\| \; , \quad \forall s = [1, l-1]$$

и (3.2.5)

$$\|\widehat{B}\|^r\|h_{(s+1)}\| = \|o\| \; , \quad \forall r > s, \; \forall s = [1, l-1] \; ,$$

поскольку результат умножения матрицы $\|\widehat{B}\|$ на присоединенный вектор есть или присоединенный вектор с номером на единицу меньшим, или же нулевой столбец. Действительно, $\forall s = [1, l-1]$

$$\|\widehat{B}\|^s\|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1}\|\widehat{B}\|\|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1}\|h_{(s)}\| = \dots$$

$$\dots = \|\widehat{B}\|^2\|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\|\|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \; .$$

Пусть

$$C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \dots \ + C_l\|h_{(l)}\| = \|o\| \ .$$

Покажем, что в этом случае линейная комбинация в левой части равенства тривиальная. Действительно, умножив обе части равенства на $\|\widehat{B}\|^{l-1}$, получим

$$\|\widehat{B}\|^{l-1}\left(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \dots \ + C_l\|h_{(l)}\|\right) = \|o\| \ ,$$

$$C_1\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(1)}\| + C_2\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(2)}\| + \dots + C_l\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(l)}\| = \|o\|$$

или (с учетом (3.2.5))

$$C_l\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_l = 0 \ .$$

Затем, подставив $C_l = 0$ и умножив обе части на $\|\widehat{B}\|^{l-2}$, получим

$$C_{l-1}\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_{l-1} = 0$$

и т.д.

А из тривиальности рассматриваемой линейной комбинации следует справедливость первого утверждения теоремы.

Второе утверждение доказывается аналогично.

`Теорема доказана.`

В курсе линейной алгебры (см., например, [5]) также доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

`Теорема 3.2.2 (Жордана)` **Для любого линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n существует базис (называемый *жордановым*), образованный из жордановых цепочек для всех собственных значений $\widehat{A}$.**

Рассмотрим теперь квадратную, порядка k, блочно-диагональную матрицу $\|J(\lambda_0)\|$, называемую *жордановым блоком*, отвечающего собственному значению λ_0 кратности k, с $q-$мерным собственным подпространством, вида

$$\|J(\lambda_0)\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J_{l_1}(\lambda_0)\| & \| O \| & \dots & \| O \| \\ \| O \| & \|J_{l_2}(\lambda_0)\| & \dots & \| O \| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \| O \| & \| O \| & \dots & \|J_{l_q}(\lambda_0)\| \end{array} \right\| ,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\|J_{l_s}\|,\ \|J_{l_s}\|,\ \dots,\ \|J_{l_q}\|,$ суть жордановы клетки, отвечающие собственному значению λ_0 и каждому из q линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины $l_1,\ l_2,\ \dots\ l_q$ ю

Через $\|\ O\ \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера. При этом сумма порядков жордановых клеток в блоке, равна кратности собственного значения λ_0, то есть $l_1 + l_2 + \dots + l_q = k$.

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| .$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} \ ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Следует заметить, что использование теоремы Жордана возможно потребует бо́льших затрат вычислительных усилий, чем кажется изначально. Дело в том, что жорданова цепочка, вообще говоря, может начинаться не с любого собственного вектора, отвечающего конкретному собственному значению. Например, в U^3 линейное преобразование, заданное матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

имеет троекратное нулевое собственное значение и, соответствующее ему, двумерное собственное подпространство. Убедитесь непосредственной проверкой, что для собственного вектора $\|1\ 0\ 0\|^{\mathrm{T}}$ присоединенные векторы существуют, а для $\|0\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ — нет. То есть, для построения жордановой цепочки предварительно надо найти те собственные векторы, для которых уравнения (3.2.2) разрешимы.

Определение 3.2.2	Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде $$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J(\lambda_1)\| & \| O \| & \dots & \| O \| \\ \| O \| & \|J(\lambda_2)\| & \dots & \| O \| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \| O \| & \| O \| & \dots & \|J(\lambda_m)\| \end{array} \right\| ,$$ где квадратные подматрицы $$\|J(\lambda_1)\|,\ \|J(\lambda_2)\|,\ \dots\ \|J(\lambda_m)\|$$ являются жордановыми блоками, расположенными на главной диагонали, а через $\| O \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Иначе говоря, матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены m жордановых блоков, где m число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы нули.

Жорданов блок с номером s есть квадратная подматрица порядка k_s, (k_s – кратность λ_s) состоящая из q_s жордановых клеток, где q_s – размерность собственного подпространства, отвечающего λ_s. На главной диагонали каждого блока расположено λ_s – собственное значение, которому этот блок соответствует.

Напомним, что собственным подпространством собственного значения λ_s называется совокупность *всех* [2] собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, и в курсе линейной алгебры доказывается, что

$$1 \le q_s \le k_s \;\forall\, s = [1, m]\ .$$

Причем, какое именно значение из этого диапазона имеет величина q_s – размерность собственного подпространства, зависит только от матрицы $\|A\|$.

[2] Дополненная, естественно, нулевым элементом.

Таким образом, q_s равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_s , и для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Теорема 3.2.3 **Матрица каждого линейного преобразования в U^n имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.**

Доказательство.

По определению столбцами матрицы линейного оператора в конкретном базисе служат координатные представления образов базисных элементов. Пусть базис жорданов и состоит из объединения всех жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям матрицы $\|A\|$, то есть имеет вид

$$\left\{ \dots\ ,\ \|h_{(s1)}\|,\ \|h_{(s2)}\|,\ \dots\ ,\|h_{(sl)}\|\ ,\ \dots \right\},$$

где s – номер цепочки. Тогда равенства (3.2.3) можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов по жорданову базису, которые существуют и единственны. Значит, координатное представление образа каждого базисного элемента является столбцом, у которого все компоненты нулевые, за исключением одного, равного λ_{0s}, или двух, равных 1 и λ_{0s} соответственно.

Следовательно матрица $\|A\|$ в жордановом базисе имеет жорданову форму.

Теорема доказана.

Теоремы 3.2.2 (Жордана) и 3.2.3 в совокупности утверждают, что для любого линейного преобразования в U^n имеется жорданов базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток вида (3.2.1), расположенных вдоль главной диагонали. Воспользуемся этим фактом для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{array} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в U^n к жорданову базису. Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем (как показывается в курсе линейной алгебры) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые. А, значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и с одинаковой кратностью.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ по формуле

$$\|x(t)\| = \|S\|\|y(t)\| \qquad \text{или} \qquad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} y_j(t) \;, \tag{3.2.6}$$

получим $\|S\|\|\dot{y}\| = \|A\|\|S\|\|y\|$ или $\|\dot{y}\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\|y\|$ и, окончательно,

$$\|\dot{y}\| = \|J\|\|y\|, \tag{3.2.7}$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой клетки отдельно. Например, для клетки с номером s (положив $\lambda = \lambda_s$ и $l = l_s$) имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{array} \right\|$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \;, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \;, \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4 \;, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l \;, \\ \dot{y}_l = \lambda y_l \;. \end{cases}$$

Последнюю систему удобнее решать, сделав предварительно подстановку $y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t)$. В этом случае для $u_j(t)$, $\forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \;, \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) \;, \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) \;, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) \;, \\ \dot{u}_l(t) = 0 \;. \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$
\begin{aligned}
&u_l(t) = C_l \ , \\
&u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ , \\
&u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ .
\end{aligned}
$$

Откуда

$$
\begin{aligned}
&y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ , \\
&y_{l-1}(t) = (C_l t + C_{l-1})\, e^{\lambda t} \ , \\
&y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \right) e^{\lambda t} \ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t} \ .
\end{aligned}
$$

Проведя аналогичные вычисления для всех жордановых блоков, получаем общее решение системы уравнений (3.2.7). Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид**

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t}, \quad \forall i = [1, n] \, ,$$

где $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_q$ **— все** *различные* **собственные значения матрицы** $\|A\|$, **а** $P_{ij}(t)$ **— алгебраический многочлен,**

— **степень которого на единицу меньше длины самой длинной из жордановых цепочек, отвечающих собственному значению** λ_j ,

— **и коэффициенты которого зависят от** n **произвольных комплексных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

В заключение обсуждения вопроса о построении общего решения системы (3.1.1) сделаем некоторые замечания.

Во-первых, из теоремы 3.2.4 следует, что общее решение системы (3.1.1) можно искать методом неопределенных коэффициентов, не прибегая к построению жорданова базиса.

Во-вторых, в случае вещественной матрицы $\|A\|$ выделение вещественного решения выполняется тем же методом, что был рассмотрен в § 3.1.

Наконец, для задач с невысокой размерностью, которые часто встречаются в приложениях, целесообразно использовать итоговые формулы для общих решений, записанные в удобном для запоминания формате. Приведем основные из них для $n = 2, \ 3$, исключая случаи, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.3.

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda t} + C_2 \left(\|h_{(1)}\| t + \|h_{(2)}\| \right) e^{\lambda t} \, , \tag{3.2.8}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор отвечающий собственному значению λ, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда λ_1 простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$ формула общего решения такова

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t}\ .$$

Если в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть 2 и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, то решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t}\ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна 1, то в единственной жордановой цепочке будет два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) +$$
$$+C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg)e^{\lambda t}\ .$$

Во всех формулах $C_1,\ C_2$ и C_3 — произвольные комплексные константы.

3.3. Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\|\ , \quad \forall t \in T \subset R^1\ , \qquad (3.3.1)$$

по прежнему считая коэффициенты матрицы $\|A\|$ комплексными константами. Комплекснозначную вектор-функцию $\|b(t)\|$, не зависящую от неизвестных, будем называть для краткости *неоднородностью.*

Теорема 3.3.1 **Общее решение неоднородной системы (3.3.1) представимо как сумма общего решения однородной системы (3.1.1) и частного решения той же неоднородной системы (3.3.1).**

Доказательство.

Пусть $\|x^*(t)\|$ – частное решение неоднородной системы (3.3.1). Значит $\|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\|$. Сделаем замену неизвестной $\|x(t)\| = \|y(t)\| + \|x^*(t)\|$. Тогда

$$\|\dot{y}(t)\| + \|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|y(t)\| + \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\| ,$$

и система (3.3.1) примет вид

$$\|\dot{y}(t)\| = \|A\|\|y(t)\| .$$

То есть, для $\|y(t)\|$ мы получили однородную систему, общее решение которой мы находить умеем. Откуда и следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

Достаточно часто поиск частного решения неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 3.3.2 **Пусть $\|x_{(1)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(1)}(t)\|$, а $\|x_{(2)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(2)}(t)\|$, тогда**

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (3.3.1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Доказательство.

Имеем
$$\|\dot{x}_{(1)}(t)\| = \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\|$$
и
$$\|\dot{x}_{(2)}(t)\| = \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| \; .$$
Тогда
$$\|\dot{x}(t)\| = \|\dot{x}_{(1)}(t)\| + \|\dot{x}_{(2)}(t)\| =$$
$$= \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| =$$
$$= \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \; .$$
То есть,
$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \; .$$

Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3.3.1, для решения неоднородной системы (3.3.1) необходимо (помимо решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной. Как и в случае линейного неоднородного уравнения $n-$го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах при помощи формулы общего решения однородной методом *вариации постоянных*, что доказывает

Теорема 3.3.3 **Частным решением системы (3.3.1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\|g_{(k)}(t)\| \; , \qquad (3.3.2)$$

где $\left\{ \; \|g_{(1)}(t)\|, \; \; \|g_{(2)}(t)\|, \; \; \ldots, \; \; \|g_{(n)}(t)\| \; \right\}$ некоторый базис в линейном $n-$мерном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), а функции $C_k(t)$ находятся из матричного уравнения
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \; .$$

`Доказательство.`

Подставив (3.3.2) в (3.3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| + \sum_{k=1}^{n} C_k \|\dot{g}_{(k)}\| = \|A\| \sum_{k=1}^{n} C_k \|g_{(k)}\| + \|b\| \ .$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(\|\dot{g}_{(k)}\| - \|A\| \|g_{(k)}\| \right) + \|b\| \ .$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, равны нулю, поскольку каждый базисный элемент $\|g_{(k)}\|$ есть решение однородной системы (3.1.1.) Поэтому получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) \|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \ .$$

`Теорема доказана.`

В случае, когда неоднородности в системе (3.3.1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k, $e^{\alpha t}, \cos\beta t$ и $\sin\beta t$, ее частное решение может быть найдено без использования интегрирования – *методом неопределенных коэффициентов*. Действительно, при $\gamma = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

Теорема 3.3.4 **Пусть система уравнений (3.3.1) такова, что** $\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\gamma t}$ **, где**

$$\|p(t)\| = \|a_m(t)\|t^m + \|a_{m-1}(t)\|t^{m-1} + \ldots + \|a_1(t)\|t + \|a_0(t)\| \ .$$

Тогда частное решение системы (3.3.1) имеет вид $\|q(t)\|e^{\gamma t}$, **где** $\|q(t)\|$ **– вектор-многочлен**

— **степени не выше, чем m, если γ не является корнем характеристического уравнения,**

— **или степени не выше, чем $m + l$, если γ является корнем характеристического уравнения, а l – максимальный размер жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы $\|A\|$.**

Доказательство.

Приведем матрицу $\|A\|$ к жордановой форме $\|J\|$ тем же преобразованием $\|S\|$, что было использовано в § 3.2 для однородной системы. В этом случае $\|S\|$ есть матрица перехода в пространстве U^n от исходного базиса к жорданову и справедливы соотношения

$$\|x(t)\| = \|S\|\|y(t)\|$$

и

$$\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| \ .$$

В результате вместо (3.2.6) получим для жордановой клетки, отвечающей λ – корню характеристического уравнения, систему уравнений

$$\|\dot{y}(t)\| = \|J\|\|y(t)\| + e^{\gamma t}\|\bar{p}(t)\| \ ,$$

которая заменой неизвестных по формулам $y_j(t) = e^{\lambda t}u_j(t)$, приводится к виду

$$
\begin{cases}
\dot u_1(t) = u_2(t) + \bar p_1(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\ , \\
\dot u_2(t) = u_3(t) + \bar p_2(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\ , \\
\dot u_3(t) = u_4(t) + \bar p_3(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot u_{l-1}(t) = u_l(t) + \bar p_{l-1}(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\ , \\
\dot u_l(t) = \bar p_l(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\ ,
\end{cases}
$$

где $\bar p_j(t)$ – алгебраические многочлены степени не выше, чем m. Из этой системы последовательно находим функции $u_l(t),\ u_{l-1}(t),\ ,\dots,u_2(t),\ u_1(t)$.

Если $\gamma \neq \lambda$, то

$$
u_l(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar p_l(s)e^{(\gamma-\lambda)s}ds = \bar q_l(t)e^{(\gamma-\lambda)t},
$$

причем степень многочлена $\bar q_l(t)$ такая же, что и у многочлена $\bar p_l(t)$. Для других решений ситуация аналогичная. Значит, первое утверждение теоремы справедливо.

Если $\gamma = \lambda$, то $e^{(\gamma-\lambda)t} \equiv 1$, и при каждом интегрировании степень многочлена увеличивается на единицу. После l шагов получаем многочлен степени не выше, чем $m + l$.

Из всех жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, выбираем клетку максимального размера. Ее l и определяет наибольший порядок алгебраических многочленов $\bar q_j(t)$.

Выполнив обратный переход (как в § 3.2) от функций $\|u(t)\|$ к функциям $\|x(t)\|$ по формулам

$$
\|x(t)\| = \|S\|\|y(t)\|\ ,
$$

получим второе утверждение теоремы.

`Теорема доказана.`

3.4. Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Теперь, если использовать умножение и обращение матриц, можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 3.4.1	Степенью k, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k} .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ положим $\|E\|/\|A\| = \|A\|^{-1}$ и $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k} ,$$ при $k \geq 2$.

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k \|A\|^m$.

Далее, определим для матриц, выполняемые поэлементно, операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*. То есть, дадим

Определение 3.4.2	Пусть элементами матрицы $\|A(t)\|$ являются функции $\alpha_{ij}(t),\ \forall i,j = [1,n],\ \forall t \in T$. Тогда элементами матрицы — $\lim\limits_{t \to t_0} \|A(t)\|$ будут числа $\beta_{ij} = \lim\limits_{t \to t_0} \alpha_{ij}(t)$, — $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\beta_{ij}(t) = \dfrac{d}{dt}\,\alpha_{ij}(t)$,

— $\int\limits_{t_0}^{t} \|A(u)\|\, du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\beta_{ij}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \alpha_{ij}(u)\, du$.

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

Определение 3.4.3	Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$, если $\forall i,j = [1,n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$, составленный из $ij-$х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$, сходится к $ij-$му элементу $\|B\|$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *равномерной сходимости* рядов, составленых из матриц, элементами которых являются функции. Здесь же отметим, что в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение 3.4.4	*Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle\|A\|\rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \|\alpha_{ij}\|$.

Теорема 3.4.1

Если $\Big\langle\|A_{(k)}(t)\|\Big\rangle \le a_k, \forall k = 0,1,2,\dots, \forall t \in T$ и мажорирующий числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ сходится, то матричный ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ сходится абсолютно и равномерно на множестве T.

Доказательство.

Следует из определений 3.4.3 и 3.4.4, а также соответствующих свойств функциональных рядов.

Теорема доказана.

Имеет место

Теорема 3.4.2 **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots \quad (3.4.1)$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \le \rho$ комплексной плоскости.

Доказательство.

Согласно определению 3.4.4, для любой квадратной матрицы $\|A\|$ существует неотрицательное число $M = \langle \|A\| \rangle$, для которого $|\alpha_{ij}| \le M \ \forall i, j = [1, n]$. Оценим, исходя из правила умножения матриц, норму матрицы $\|A\|^2$. Получаем

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \text{ то } \alpha_{ij(2)} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\alpha_{sj}$$

и

$$\left|\alpha_{ij(2)}\right| \ \le \ \sum_{s=1}^{n} |\alpha_{is}||\alpha_{sj}| \ \le \ nM^2 \ .$$

Действуя аналогично для бо́льших степеней матрицы $\|A\|$, по индукции получаем $\left|\alpha_{ij(k)}\right| \le n^{k-1}M^k$.

В силу определения 3.4.3 сходимость матричного ряда (3.4.1) равносильна сходимости числовых рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \alpha_{ij(k)}}{k!} = \delta_{ij} + \frac{t\alpha_{ij(1)}}{1!} + \frac{t^2\alpha_{ij(2)}}{2!} + \frac{t^3\alpha_{ij(3)}}{3!} + \dots \quad (3.4.2)$$

для всех $i, j = [1, n]$. В этой формуле слагаемое δ_{ij} есть символ Кронеккера.

Сходимость каждого из рядов (3.4.2) следует из сходимости мажорирующего числового ряда

$$1 + \frac{\rho M}{1!} + \frac{\rho^2 n M^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k n^{k-1} M^k}{k!} + \ldots ,$$

который сходится по признаку д'Аламбера (проверьте это самостоятельно!).

Наконец, используя утверждение теоремы 3.4.1, приходим к доказываемому результату.

`Теорема доказана.`

`Определение 3.4.5`	*Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$

Согласно этому определению и правилу умножения числа на матрицу, сумма матричного ряда (3.4.1) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} . \qquad (3.4.3)$$

Основные свойства матричной экспоненты описывает

`Теорема 3.4.3` **Для матричной экспоненты справедливы равенства:**

— **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$,

то $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|} e^{\|B\|}$**,**

и

— $$\frac{d}{dt} e^{t\|A\|} = \|A\| \, e^{t\|A\|} .$$

Доказательство.

Докажем первое утверждение теоремы.

Имеем, с одной стороны,

$$e^{\|A\|}\,e^{\|B\|} =$$

$$= \left(\|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \dots\right)\left(\|E\| + \frac{\|B\|}{1!} + \frac{\|B\|^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} g_{km}\|A\|^k\|B\|^m\ , \tag{3.4.4}$$

С другой стороны,

$$e^{\|A\|+\|B\|} = \|E\| + \frac{\|A\|+\|B\|}{1!} + \frac{(\|A\|+\|B\|)^2}{2!} + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} h_{km}\|A\|^k\|B\|^m\ , \tag{3.4.5}$$

поскольку из коммутируемости матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ следует справедливость матричного аналога формулы бинома Ньютона, то есть равенств вида

$$(\|A\|+\|B\|)^2 = (\|A\|+\|B\|)(\|A\|+\|B\|) =$$

$$= \|A\|^2 + \|A\|\|B\| + \|B\|\|A\| + \|B\|^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

и им подобным.
Сравним теперь значения коэффициентов g_{km} и h_{km}. Матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$, в предположении коммутативности их произведения, по алгебраическим свойствам не отличаются от чисел. Значит, вид разложений (3.4.4) и (3.4.5) не зависит от того, являются ли $\|A\|$ и $\|B\|$ числами или матрицами.

С другой стороны, разложение функции в степенной ряд, если существует, то единственно. Поэтому

$$g_{km} = h_{km},\ \ \forall k, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

и выражения (3.4.4) и (3.4.5) совпадают.

Убедимся теперь в справедливости второго утверждения теоремы.

Поскольку матричный ряд (3.4.3) сходится на множестве T равномерно, то его можно почленно дифференцировать. При этом ряд, составленный из производных членов ряда, будет сходиться к производной от суммы ряда. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \frac{d}{dt}\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots\right) =$$

$$= \|A\| + \frac{t\|A\|^2}{1!} + \frac{t^2\|A\|^3}{2!} + \frac{t^3\|A\|^4}{3!} + \dots =$$

$$= \|A\|\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots\right) =$$

$$= \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

И мы приходим к заключению о справедливости второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1 **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением однородной системы уравнений**

$$\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|,$$

с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$.

Доказательство.

Очевидно вытекает из второго утверждения теоремы 3.4.3.

Следствие доказано.

Иными словами, следствие 3.4.1 утверждает, что столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются частные решения однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия для которых суть столбцы единичной матрицы. Такие решения очевидно линейно независимые и образуют базис в $n-$мерном линейном пространстве частных решений этой системы уравнений.

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ служит формула (3.4.3). Однако ее использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей. Значительно более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм основанный на следующих двух леммах.

Лемма 3.4.1 **Если матрица $\|D\|$ диагональна, то есть имеет вид**

$$\|D\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{array} \right\| ,$$

то

$$e^{\|D\|} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{array} \right\| .$$

Доказательство.

Следует из формулы (3.4.3) и определения операции умножения матриц.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.2 **Если $\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \ , \ \ \forall t \in T \, .$$

`Доказательство.`

Имеем

$$\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \ ,$$

$$\|A\|^2 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1} \ ,$$

$$\|A\|^3 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^3\|S\|^{-1} \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|A\|^k = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^{k-1}\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1} \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ .$$

Подставляя в формулу (3.4.3) $\|A\|^k = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1}$, получаем

$$e^{t\|A\|} = \|S\|\|E\|\|S\|^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1} =$$

$$= \|S\| \left(\|E\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\|B\|^k \right) \|S\|^{-1} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \ .$$

`Лемма доказана.`

Из курса линейной алгебры известно, что, если в U^n существует базис из собственных векторов матрицы $\|A\|$, то матрица вида

$$\|D\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| \ ,$$

(где $\|S\|$ есть матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов) диагональна. Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 3.4.1), используя лемму 3.4.2, найдем искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|D\|}\|S\|^{-1} \ .$$

В случае, когда базис из собственных векторов матрицы $\|A\|$ не существует, всегда возможно, согласно теореме 3.2.2 (Жордана), перейти (при помощи невырожденной матрицы перехода $\|S\|$) к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$, то есть, иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых, размера l x l, клеток (3.2.1) вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \left\|\begin{array}{ccccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right\|.$$

Покажем теперь, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя сумму какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \text{ где}$$

$$\|J_l(0)\| = \left\|\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$ очевидно коммутируют, поэтому (согласно теореме 3.4.3)

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|} .$$

Первый сомножитель легко вычисляется при помощи леммы 3.4.1. Второй найдем при помощи формулы (3.4.3)

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k . \qquad (3.4.6)$$

Заметим, что согласно правилу умножения матриц

$$\|J_l(0)\|^2 = \left\|\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

. . . .

$$\|J_l(0)\|^{l-2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\|J_l(0)\|^{l-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

То есть, при каждом последовательном увеличении показателя k наддиагональ из единиц в $\|J_l(0)\|^k$ укорачивается на единицу и сдвигается вправо на один столбец. При $k = l$ матрица $\|J_l(0)\|^k$ оказывается нулевой и ряд (3.4.6) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых. В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \frac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (3.4.7)$$

Вычисляя аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвращаясь в исходный базис, используя формулу

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1} ,$$

получаем искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.

Проиллюстрируем изложенную теорию следующим примером.

`Задача 3.4.1` Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$.

`Решение:` Решим задачу двумя способами.

В первом способе воспользуемся следствием 3.4.1. Для этого нам нужно решить указанные в нем задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| . \tag{3.4.8}$$

Матрица $\|A\|$ имеет (проверьте это!) двукратное собственное значение $\lambda_{1,2} = 2$ и, соответствующее ему одномерное собственное подпространство, базисом в котором является собственный вектор $\|h_1\| = \|1 \;\; 1\|^{\mathrm{T}}$. По формулам (3.2.2) найдем присоединенный вектор $\|h_2\| = \|\eta_1 \;\; \eta_2\|^{\mathrm{T}}$, который в нашем случае определяется из системы линейных уравнений

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \qquad \Longrightarrow$$

$$\eta_1 - \eta_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|h_2\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Используя (3.2.8) запишем общее решение системы (3.4.8) в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = C_1 e^{2t} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + C_2 e^{2t} \left(t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right)$$

или, в координатной форме,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t}\,(t+1)\ , \\ x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} t\ . \end{array}\right.$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши.

Из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 0, \end{array} \right. \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{array} \right.$

то есть,

$$\left\| \begin{array}{c} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left(t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} t+1 \\ t \end{array} \right\| .$$

Аналогично,

из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{array} \right. \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1, \\ C_2 = -1, \end{array} \right.$

откуда

$$\left\| \begin{array}{c} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left(\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} -t \\ 1-t \end{array} \right\| .$$

Наконец, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 3.4.1, составляем искомую матрицу

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$

Во втором варианте решения задачи приведем матрицу к жордановой форме и затем воспользуемся леммами 3.4.1 и 3.4.2.

Согласно теореме 3.2.2 (Жордана) жорданов базис в рассматриваемом случае состоит из элементов $\|h_1\|$ и $\|h_2\|$. Значит $\|S\|$ – матрица перехода от исходного базиса к жорданову, будет иметь вид

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

поскольку ее столбцами служат координатные представления элементов нового базиса. Как известно, матрица перехода невырожденная, поэтому обратная ей матрица существует и единственна

$$\|S\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| .$$

Переход к жордановой форме осуществляется по правилу $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$, что дает жорданову клетку

$$\|J_2\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right\| .$$

В нашем случае $\lambda = 2$ и $l = 2$, поэтому из (3.4.7) и из $t\|J_l(\lambda)\| = \lambda t\|E\| + t\|J_l(0)\|$ следует

$$e^{t\|J_2(\lambda)\|} = e^{2t\|E\|+t\|J_2(0)\|} = e^{2t\|E\|} \cdot e^{t\|J_2(0)\|} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Наконец, по формуле $e^{t\|A\|} = \|S\|\, e^{t\|J\|}\|S\|^{-1}$ получаем

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

$$= e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$

3.5. Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление или *метод Хевисайда* является одним из наиболее эффективных алгоритмов решения линейных дифференциальных уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами. Приведем его краткое описание. [3]

Определение 3.5.1 *Оригиналом* называется функция $f(t)$ такая, что

1°. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и она непрерывна при $t \geq 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек;

2°. Для каждой $f(t)$ существуют константы M и a такие, что $|f(t)| \leq Me^{at}$ при $t \geq 0$.

Определение 3.5.2 Функция $F(p)$ (зависящая от комплексной переменной p) вида

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\, dt \qquad (3.5.1)$$

называется *изображением* функции $f(t)$ или же *преобразованием Лапласа*, что кратко записывается как $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в виде следующего набора утверждений.

Лемма 3.5.1 **В условиях определения 3.5.1, несобственный интеграл (3.5.1) сходится в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > a$ и является в этой области бесконечно дифференцируемой функцией.**

Доказательство.

Справедливость первого утверждения леммы вытекает из следующей оценки. При $a - \mathrm{Re}\, p < 0$ имеем

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\, dt \right| \leq M \int\limits_0^{+\infty} e^{(a-\mathrm{Re}\, p)t} dt < +\infty\ .$$

Лемма доказана.

[3] Строгое и полное описание этого метода можно найти, например, в [6].

Теорема 3.5.1 **Преобразование Лапласа линейно.**

Доказательство.

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, а α и β – постоянные, тогда, в силу линейности операции интегрирования,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)\ .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.2 **Изображение производной имеет вид**

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \ldots - p\, f^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0)$$

Доказательство.

Пусть $k = 1$, тогда, интегрируя по частям и используя определения 3.5.1 и 3.5.2, получаем

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f'(t)\, dt =$$

$$= e^{-p\,t} f(t)\Bigg|_{+0}^{+\infty} + \ p \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\, dt \ = \ p\,F(p) - f(+0)\ .$$

Применим индукцию. Пусть доказываемая формула верна для $k = m$. Покажем, что тогда она будет верна и для $k = m + 1$. Действительно, пусть $g(t) = f^{(m)}(t)$, тогда

$$f^{(m+1)}(t) = g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(+0) =$$

$$= p\left(p^m F(p) - p^{m-1} f(+0) - \ldots - f^{(m-1)}(+0)\right) - f^{(m)}(+0)\ .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.3 **Для любого** $s > 0$ $\qquad f(t - s) \risingdotseq e^{-p\,s} F(p)$ **.**

Доказательство.

Поскольку $f(t-s) \equiv 0$ при $t < s$, то, сделав замену переменной $t - s = u$, получим

$$f(t-s) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t-s)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,(u+s)} f(u)\,du = e^{-p\,s} F(p)\ .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.3 часто именуется *теоремой запаздывания.*

Из определения 3.5.2 следует, что изображение для каждого оригинала существует и единственно. При этом естественно возникает встречный вопрос: всегда ли по изображению можно восстановить оригинал и будет ли этот оригинал единственным? Ответ на этот вопрос дает, доказываемая в курсе ТФКП,

Теорема 3.5.4 **Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрывов, и определяется формулой**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w\to+\infty} \int\limits_{c-iw}^{c+iw} e^{tp} F(p)\,dp \qquad (3.5.2)$$

В формуле (3.5.2) интеграл берется на комплексной плоскости по любой прямой $\operatorname{Re} z = c > a$.

Рассмотрим теперь применение операционного исчисления для решения линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t)\ , \qquad (3.5.3)$$

(или $L(\widehat{D})y(t) = b(t)$) с комплексными постоянными коэффициентами, в случае, когда $b(t)$ есть квазимногочлен при $t \geq 0$. Начальные условия будем считать известными

$$y(+0) = C_1,\ y'(+0) = C_2,\ y''(+0) = C_3,\ \ldots,\ y^{n-1}(+0) = C_n\ . \quad (3.5.4)$$

Согласно теоремам 2.5.1 и 2.5.2, $y(t)$ — каждое решение этого уравнения для неотрицательных t, также есть квазимногочлен. Доопределим значения функций $b(t)$ и $y(t)$ тождественными нулями при $t < 0$. Тогда эти функции являются некоторыми оригиналами, поскольку пункт 2° определения 3.5.1 выполняется для квазимногочленов очевидным образом.

Пусть $b(t) \risingdotseq B(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применяя преобразование Лапласа (в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то есть, в которой оно существует) к обеим частям уравнения (3.5.3) и учитывая условия (3.5.3), в силу теоремы 3.5.2 получаем

$$\big(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\big)\, Y(p) - H(p) = B(p)$$

$$\text{или} \qquad L(p)Y(p) - H(p) = B(p)\ , \tag{3.5.5}$$

где $H(p) = p^{n-1}C_1 + p^{n-2}C_2 + \ldots + p\,C_{n-1} + C_n +$

$$+a_1\left(p^{n-2}C_1 + p^{n-3}C_2 + \ldots + p\,C_{n-2} + C_{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}C_0\ .$$

Уравнение (3.5.5) относительно $Y(p)$ линейное и алгебраическое. Его решение при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ есть

$$Y(p) = \frac{B(p) + H(p)}{L(p)}\ .$$

Хотя оригинал $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$ можно получить при помощи формулы (3.5.2), удобнее поступить иначе, воспользовавшись взаимной однозначностью связи оригиналов и отображений, допускающей «подбор» решений при помощи таблицы 3.1, основой которой служит

Лемма 3.5.2 **Справедливо соотношение**

$$t^k e^{\lambda t} \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}\ .$$

Доказательство.

Интегрируя изображение последовательно k раз по частям, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt =$$

$$= \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda - p} t^k \Bigg|_0^{+\infty} + \quad \frac{k}{p-\lambda} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt =$$

$$= \frac{k}{p-\lambda} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt = \ldots = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}} \,.$$

Лемма доказана.

Содержимое таблицы 3.1 получается из формулы, полученной в лемме 3.5.2, и формулы Эйлера $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Функция $Y(p)$ дробно-рациональная и всегда может быть разложена на простейшие дроби, подобные представленным в таблице 3.1.

Наконец, линейность преобразования Лапласа и взаимная однозначность сопоставления оригинала и изображения, позволяют находить решение как уравнения (3.5.1) для любого квазимогочлена $b(t)$, так и системы линейных дифференциальных уравнений.

Таблица 3.1.

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$t^k e^{\lambda t}$, $k=0,1,2,\ldots$	$\dfrac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Заметим также, что в случае, когда начальные условия не заданы, операционный метод дает *общее решение* уравнения (3.5.1), выраженное через n произвольных комплексных констант $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Следующие примеры демонстрируют практическую эффективность операционного метода.

`Задача 3.5.1` Решить задачу Коши

$$x'' + \omega_0^2 = A\cos\omega t\ ,$$

$$\text{при}\quad x(0) = x'(0) = 0\ ,$$

где $\omega_0 > 0,\ \omega > 0,$ и $A \neq 0$ — некоторые константы.

Решение: Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Воспользовавшись таблицей 3.1 и приравняв изображения от обеих частей данного уравнения, получим

$$\left(p^2+\omega_0^2\right) X(p)=\frac{Ap}{p^2+\omega^2}\,.$$

Откуда

$$X(p)=\frac{Ap}{\left(p^2+\omega_0^2\right)\left(p^2+\omega^2\right)}\,.$$

Если $\omega \neq \omega_0$ (то есть, если мы имеем *нерезонансный случай*), то, разложив найденное изображение на простейшие дроби

$$X(p)=\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}-\frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right)\,,$$

из таблицы 3.1 получаем

$$x(t)=\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right)\,.$$

Если же $\omega=\omega_0$ (*резонансный случай*), то

$$X(p)=\frac{Ap}{\left(p^2+\omega_0^2\right)^2}\,,$$

и, опять-таки по таблице 3.1, находим, что

$$x(t)=\frac{A}{2\omega_0}\,t\,\sin\omega_0 t\,.$$

Задача 3.5.2 Решить задачу Коши для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=-x-2y+2e^{-t} \\ \dot{y}=\ \ 3x+4y+\ \ e^{-t} \end{cases}\,,$$

при $x(0)=y(0)=-1$.

`Решение:` Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Поскольку собственные числа основной матрицы системы $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то изображения неизвестных будут существовать (покажите это самостоятельно!) в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2 = \max\{-1,\ 1,\ 2\}$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} p\,X - (-1) = -X - 2Y + \dfrac{2}{p+1}\,, \\ p\,Y - (-1) = \ \ 3X + 4Y + \dfrac{1}{p+1}\,. \end{cases}$$

Следовательно, для изображений неизвестных мы имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = -\dfrac{p-1}{p+1}\,, \\ -3X + (p-4)Y = -\dfrac{p}{p+1}\,, \end{cases}$$

решения которой легко находятся и имеют вид

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{-\,p^2 + 7p - 4}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}\,, \\ Y(p) = \dfrac{-\,p^2 - 4p + 3}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}\,. \end{cases}$$

Разложения этих изображений на простейшие дроби дает

$$\begin{cases} X(p) = -\dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{p-2}\,, \\ Y(p) = \quad \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{3}{p-2}\,. \end{cases}$$

Наконец, используя линейность преобразования Лапласа и таблицу 3.1, по полученным изображениям восстанавливаем оригиналы искомых функций, которые являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} - e^{t} + 2e^{2t} \ , \\ y(t) = \quad\ e^{-t} + e^{t} - 3e^{2t} \ . \end{cases}$$

Глава 4.

Задача Коши

4.1. Постановка задачи Коши

Определение 4.1.1	*Нормальной системой дифференциальных уравнений порядка* $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\begin{cases} {y_1}'(x) & = & f_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) , \\ {y_2}'(x) & = & f_2\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) , \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {y_n}'(x) & = & f_n\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \end{cases}$$ или же в векторной форме $$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}\left(x, \vec{y}(x)\right) ,$$

где $x \in [a, b]$ – независимая переменная, функции

$$\|\vec{y}(x)\| = \|\, y_1(x)\, y_2(x)\, \ldots\, y_n(x)\, \|^{\mathrm{T}}$$

суть неизвестные, а компоненты вектора $\vec{f}$

$$\| \vec{f}\,(x, \vec{y}) \| = \left\| \begin{array}{c} f_1\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \right\|$$

— заданные, непрерывные в некоторой непустой области $G \subseteq E^{n+1}$, функции от $n+1$ переменной.

Определение 4.1.2 Вектор-функция $\vec{y}^{\,*}(x)$ называется *решением задачи Коши*, если

– $\vec{y}^{\,*}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$;

– для $\vec{y}^{\,*}(x)$ верно: $\left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y}^{\,*}(x) \end{array} \right\| \in G \;\; \forall x \in [a, b]$;

– $\vec{y}^{\,*\,\prime}(x) \equiv \vec{f}(x, \vec{y}^{\,*}(x)) \; \forall x \in [a, b]$. (4.1.1)

и, кроме того, выполнены *начальные условия*

$$\vec{y}^{\,*}(x_0) = \vec{y}_0 \;, \quad x_0 \in [a, b] \;, \quad \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{array} \right\| \in G \qquad (4.1.2)$$

Рассмотрим теперь систему интегральных уравнений

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du \;. \qquad (4.1.3)$$

Вектор-функцию $\vec{y}(x)$ назовем *решением* этой системы, если

– $\vec{y}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$;

– $\vec{y}(x)$ удовлетворяет условию $\left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y}(x) \end{array} \right\| \in G \; \forall x \in [a, b]$;

– $\vec{y}(x) \equiv \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du \quad \forall x \in [a, b]$.

Для задачи Коши оказывается справедливой

Теорема 4.1.1 **Для того, чтобы вектор-функция $\vec{y}^{\,*}(x)$ являлась решением задачи Коши (4.1.1)–(4.1.2) необходимо и достаточно, чтобы $\vec{y}^{\,*}(x)$ была решением системы интегральных уравнений (4.1.3).**

Доказательство.

Пусть $\vec{y}^*(x)$ есть решение задачи Коши. Тогда интегрирование от x_0 до x тождества

$$\vec{y}\,'(x) \equiv \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \;\forall x \in [a, b]$$

дает тождество (4.1.3), поскольку верно равенство (4.1.2).

Обратно, из непрерывности подынтегральной функции в тождестве (4.1.3) следует, что его можно дифференцировать по x – верхнему пределу интегрирования. Это дает тождество (4.1.1). Наконец, из условия (4.1.3) следует при $x = x_0$, что $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Теорема доказана.

4.2. Принцип сжимающих операторов

Вначале напомним несколько определений из курса математического анализа.

Если каждому элементу x некоторого линейного пространства L поставлено в однозначное соответствие неотрицательное (называемое *нормой* x) число $\langle x \rangle$ такое, что $\forall x, y \in L$ и любого вещественного числа λ справедливы соотношения

1° $\langle \lambda x \rangle = |\lambda| \langle x \rangle$ (однородность нормы) ;

2° $\langle x + y \rangle \le \langle x \rangle + \langle y \rangle$ (неравенство треугольника) ;

3° $\langle x \rangle = 0 \iff x = o\,,$

то такое линейное пространство называется *нормированным.*

Отметим, что нормированное пространство является метрическим с метрикой (то есть, расстоянием между элементами), определяемой по формуле

$$\rho(x, y) = \langle x - y \rangle \ . \qquad (4.2.1)$$

Напомним также, что метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*, а полное (в смысле метрики (4.2.1)) нормированное линейное пространство называется *банаховым.*

Рассмотрим теперь некоторый оператор $\widehat{\Phi}$ с множеством определения U, принадлежащим банахову пространству X, и со значениями в том же пространстве. Иначе говоря, $\widehat{\Phi}$ есть *преобразование* вида

$$\widehat{\Phi}: \ \ U \subset X \to X.$$

Дадим следующие определения.

Определение 4.2.1	Элемент $x^* \in U$ называется *неподвижной точкой* преобразования $\widehat{\Phi}$, если $$\widehat{\Phi}\, x^* = x^*.$$

Определение 4.2.2	Оператор $\widehat{\Phi}$ называется *сжимающим преобразованием на множестве* U, если существует число $q \in (0,1)$, такое, что $$\left\langle \widehat{\Phi}\, x - \widehat{\Phi}\, y \right\rangle \le q \left\langle x - y \right\rangle \quad \forall x, y \in U\,.$$ Число q в этом случае называется *коэффициентом сжатия.*

Определение 4.2.3	Оператор $\widehat{\Phi}$ называется *непрерывным* на $x_0 \in U$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ справедливо неравенство $$\left\langle \widehat{\Phi} x - \widehat{\Phi} x_0 \right\rangle < \varepsilon\,.$$ При этом оператор непрерывный на каждом элементе множества U называется непрерывным на этом множестве.

Заметим, что каждый сжимающий оператор является непрерывным на множестве U, поскольку выбор δ_ε по правилу $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{q}$ обеспечивает выполнение условий определения 4.2.3. Проверьте это самостоятельно.

Иллюстрацией определений (4.2.1) и (4.2.2) может служить

Задача 4.2.1 В X – линейном пространстве функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[0,1]$, с нормой

$$\langle\, x(t)\,\rangle = \max_{t\in[0,1]} |\, x(t)\,| \,,$$

найти коэффициент сжатия и неподвижную точку для оператора $\widehat{\Phi}$, действие которого определяется формулой

$$\widehat{\Phi}x(t) = 1 + \int\limits_0^1 t^2 u\, x(u)\, du \;.$$

Решение: Рассмотрим последовательность элементов в пространстве X, заданную соотношением $x_{(k)} = \widehat{\Phi}_{km-1)}x(t)$, где k – натуральное число. Пусть $x_0(t) \equiv 1$, тогда

$$\widehat{\Phi}x_{(1)}(t) = 1 + \int\limits_0^1 t^2 u\, du = 1 + \frac{1}{2}t^2 \;.$$

Аналогично

$$\widehat{\Phi}x_{(2)}(t) = 1 + \int\limits_0^1 t^2 u \left(1 + \frac{1}{2}u^2\right)\, du = 1 + \frac{5}{8}t^2$$

и

$$\widehat{\Phi}x_{(3)}(t) = 1 + \int\limits_0^1 t^2 u \left(1 + \frac{5}{8}u^2\right)\, du = 1 + \frac{21}{32}t^2 \,.$$

Графики нескольких первых членов этой последовательности показаны на рис. 4.1.

Предположим, что данная последовательность сходится к функции $x^*(t) = 1 + At^2$ которая есть неподвижная точка рассматриваемого оператора. Число A определим из условия $x^*(t) = \widehat{\Phi}x^*(t)$, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$1 + At^2 = 1 + \int\limits_0^1 t^2 u\, \left(1 + A\,u^2\right)\, du\,.$$

Проверьте самостоятельно, что отсюда следует $A = \dfrac{2}{3}$.

Убедимся теперь в сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$. Поскольку в нашем случае метрика задается формулой

$$\rho(x,y) = \langle x(t) - y(t)\rangle \;=\; \max_{t\in[0,1]}\Big|x(t) - y(t)\Big|\,,$$

то оказывается полезной оценка: $\forall\, x(t),\, y(t) \in X$

$$\Big|\widehat{\Phi}x(t) - \widehat{\Phi}y(t)\Big| = t^2 \left|\,\int\limits_0^1 u\big(x(u) - y(u)\big)\, du\right| \leq$$

$$\leq t^2 \int\limits_0^1 u\big|x(u) - y(u)\big|\, du \leq t^2 \max_{t\in[0,1]}\big|x(t) - y(t)\big| \int\limits_0^1 u\, du =$$

$$= \frac{t^2}{2} < x(t) - y(t) > \,.$$

Наконец, при $t \in [0,1]$

$$\max_{t\in[0,1]}\Big|\widehat{\Phi}x(t) - \widehat{\Phi}y(t)\Big| \leq \frac{t^2}{2} < x(t) - y(t) >\,,$$

что окончательно дает

$$\left\langle \widehat{\Phi}x(t) - \widehat{\Phi}y(t)\right\rangle \leq \frac{1}{2}\langle x(t) - y(t)\rangle\,.$$

Решение получено

Значит, оператор $\widehat{\Phi}$ сжимающий, с коэффициентом сжатия $q = \dfrac{1}{2}$.

В общем случае оказывается справедливой (называемая в математической литературе *принципом сжимающих операторов*)

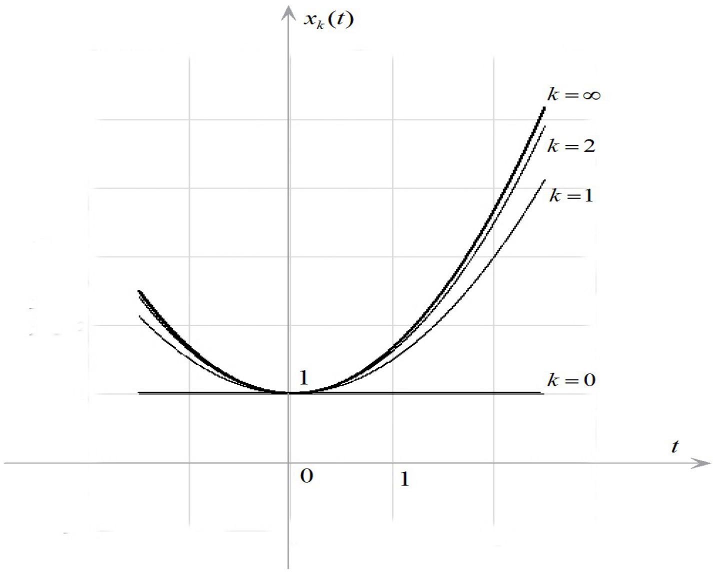


Рис. 4.1. К решению задачи 4.2.1.

Теорема 4.2.1 **Пусть оператор $\widehat{\Phi}$ является сжимающим преобразованием с коэффициентом сжатия q на $\overline{U}_r(x_0) \subset X$ – замкнутом шаре радиуса r с центром на элементе x_0. И пусть при этом выполнено условие**

$$\left\langle \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \right\rangle \leq (1-q)r\ .$$

Тогда в $\overline{U}_r(x_0) \subset X$ существует единственная неподвижная точка x^* такая, что

- **последовательность $x_{(m)} = \widehat{\Phi}\, x_{(m-1)}$, (где $m = 1, 2, \ldots$) сходится к x^*.**
- **при этом оценка скорости сходимости имеет вид $\left\langle x_{(m)} - x^* \right\rangle \leq q^m r$.**

`Доказательство.`

Вначале покажем, что вся последовательность $\{x_{(m)}\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$. Действительно, $\forall x \in \overline{U}_r(x_0)$ имеется оценка

$$\left\langle \widehat{\Phi}\, x - x_0 \right\rangle \leq \left\langle \widehat{\Phi}\, x - \widehat{\Phi}\, x_0 \right\rangle + \left\langle \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \right\rangle \leq$$

$$\leq q \left\langle x - x_0 \right\rangle + (1-q)r \leq qr + (1-q)r = r$$

Из произвольности $x \in \overline{U}_r(x_0)$ следует, что вся последовательность $\{x_m\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$.

Введем обозначение $\alpha = \left\langle \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \right\rangle$ и последовательно получим оценки

$$\left\langle x_{(1)} - x_0 \right\rangle = \left\langle \widehat{\Phi}\, x_0 - x_0 \right\rangle = \alpha\,,$$

$$\left\langle x_{(2)} - x_{(1)} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Phi}\, x_{(1)} - \widehat{\Phi}\, x_0 \right\rangle \leq q \left\langle x_{(1)} - x_0 \right\rangle = \alpha q\,,$$

$$\left\langle x_{(3)} - x_{(2)} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Phi}\, x_{(2)} - \widehat{\Phi}\, x_{(1)} \right\rangle \leq q \left\langle x_{(2)} - x_{(1)} \right\rangle = \alpha q^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\langle x_{(m+1)} - x_{(m)} \right\rangle \leq \alpha q^m\,,$$

С помощью этих оценок покажем, что последовательность $\{x_{(m)}\}$ фундаментальна в X. Действительно, в силу *неравенства треугольника*

$$\left\langle x_{(m+p)} - x_{(m)} \right\rangle \leq \left\langle x_{(m+p)} - x_{(m+p-1)} \right\rangle + \left\langle x_{(m+p-1)} - x_{(m+p-2)} \right\rangle + \ldots$$

$$\ldots + \left\langle x_{(m+1)} - x_{(m)} \right\rangle \leq \alpha \Big(q^{m+p-1} + q^{m+p-2} + \ldots + q^m \Big) =$$

$$= \frac{\alpha(q^m - q^{m+p})}{1-q} \leq \frac{\alpha q^m}{1-q}$$

или, окончательно, из условия $\alpha \leq (1-q)r$

$$\left\langle\, x_{(m+p)} - x_{(m)} \,\right\rangle \leq \frac{\alpha q^m}{1-q} \leq q^m r\,. \tag{4.2.2}$$

Из последнего неравенства следует фундаментальность последовательности $\{x_{(m)}\}$, а, вследствие полноты банахова пространства X, также и ее сходимость к некоторому элементу $x^* \in X$. Поскольку правая часть оценки (4.2.2) не зависит от p, то, перейдя в ней к пределу при $p \to +\infty$, получим требуемую оценку скорости сходимости.

Мы уже показали, что вся последовательность $\{x_{(m)}\}$ лежит в шаре $\overline{U}_r(x_0)$, тогда, положив $m = 0$ в неравенстве (4.2.2) и перейдя в $\left\langle\, x_{(p)} - x_0 \,\right\rangle \leq r$ к пределу при $p \to +\infty$, в силу замкнутости шара получим, что $x^* \in \overline{U}_r(x_0)$.

Из условия сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$ в шаре $\overline{U}_r(x_0)$ следует его непрерывность на этом множестве. Поэтому в равенстве $\widehat{\Phi}\, x_{(m-1)} = x_{(m)}$ можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить, что $\widehat{\Phi}\, x^* = x^*$. Значит x^* – неподвижная точка оператора $\widehat{\Phi}$.

Осталось убедиться в единственности $x^* \in \overline{U}_r(x_0)$. Предположим, что $\widehat{\Phi}\, x^* = x^*$ и $\widehat{\Phi}\, x^{**} = x^{**}$. Тогда, в силу сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$

$$\langle\, x^* - x^{**} \,\rangle = \left\langle\, \widehat{\Phi}\, x^* - \widehat{\Phi}\, x^{**} \,\right\rangle \leq q\, \langle\, x^* - x^{**} \,\rangle\,,$$

но это возможно лишь при $x^{**} = x^*$.

`Теорема доказана.`

4.3. Существование и единственность решения задачи Коши

В этом параграфе мы сформулируем и докажем основную теорему о существовании и единственности локального решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (см. определения 4.1.1 и 4.1.2.)

Предварительно дадим

Определение 4.3.1 Будем говорить, что вектор-функция $\vec{F}(x, \vec{y})$ при

$$\left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y} \end{array} \right\| \in G \subseteq E^{n+1}$$

удовлетворяет *условию Липшица* относительно $\vec{y}$ равномерно по $x \in [a, b]$, если $\exists L > 0$ такое, что

$$\left\langle \vec{F}(x, \vec{y}_{(1)}) - \vec{F}(x, \vec{y}_{(2)}) \right\rangle \leq L \left\langle\, \vec{y}_{(1)} - \vec{y}_{(2)} \,\right\rangle$$

$\forall \left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y}_{(1)}) \end{array} \right\| \in G$ и $\forall \left\| \begin{array}{c} x \\ \vec{y}_{(2)} \end{array} \right\| \in G$. Число L в этом случае называется *константой Липшица.*

Из курса математического анализа известно, что в нормированном конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому далее (для упрощения рассуждений) под нормой элемента $\vec{y}(x)$ рассматриваемого банахова пространства $n-$мерных вектор-функций мы будем понимать число

$$\langle\, \vec{y}(x) \rangle = \max_{k=[1,n]} \max_{x \in [a,b]} |y_k(x)| \ .$$

Тогда будет справедлива

Лемма 4.3.1 **Если $\vec{y}(x)$ непрерывная на $[a, b]$ вектор-функция, то имеет место неравенство**

$$\left\langle \int\limits_a^b \vec{y}(x)\, dx \right\rangle \leq \left| \int\limits_a^b \langle\, \vec{y}(x) \rangle \ dx \right| = \langle\, \vec{y}(x) \rangle \, |b - a| \ .$$

Доказательство.

Имеем оценку

$$\left|\int\limits_a^b y_k(x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_a^b |\,y_k(x)|\,\,dx\right| \le \left|\int\limits_a^b \langle\,\vec{y}(x)\rangle\,\,dx\right|\,,$$

которая верна $\forall k = [1, n]$.

Следовательно, она верна и для *максимальной по k* левой части и потому утверждение леммы справедливо.

Лемма доказана.

Приведем теперь доказательство теоремы Коши в ее общем варианте.

Теорема 4.3.1 (Коши) **Пусть в области $G \subseteq E^{n+1}$ вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$**

— **непрерывна;**

— **удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица равной L.**

Тогда $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ найдется $\delta > 0$ такое, что на отрезке $[\,x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\,]$ существует и притом единственное решение задачи Коши

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y})\,, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0\,.$$

Доказательство.

Согласно определению нормы для любой замкнутой области $\overline{Q} \subseteq G$ существуют числа $M > 0$ и $L > 0$ такие, что

$$\Big\langle \vec{f}(x,\vec{y}) \Big\rangle \le M \quad \forall \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{y} \end{matrix} \right\| \in G,$$

поскольку вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ непрерывна в $\overline{Q}$ и

$$\Big\langle \vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{z}) \Big\rangle \le L \big\langle\, \vec{y} - \vec{z}\,\big\rangle \quad \forall \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{y} \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{z} \end{matrix} \right\| \in G\,,$$

так как $\vec{f}(x,\vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим в E^{n+1} замкнутый цилиндр

$$\overline{Q}_r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \in [\, x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r \,] \,, \\ \langle\, \vec{y} - \vec{y}_0 \rangle \le r \;, \end{array} \right\}$$

где $\delta_r = \dfrac{r}{M + Lr}$, а положительное r берется настолько малым, чтобы $\overline{Q}_r \subset G$. Соответствующий случай с $n = 1$ показан на рис.4.2.

На множестве X_r – вектор-функций непрерывных на отрезке $[\, x_0 - \delta_r,\, x_0 + \delta_r \,]$, построим оператор, действие которого определяется формулой

$$\widehat{\Phi}\, \vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du \;. \qquad (4.3.1)$$

Тогда система интегральных уравнений (4.1.3) может быть записана в виде $\vec{y}(x) = \widehat{\Phi}\; \vec{y}(x)$. Причем этот оператор является сжимающим на замкнутом шаре радиуса r и с центром на элементе $\vec{y}_0$

$$\overline{U}_r(\vec{y}_0) \equiv \left\{ \vec{y} \in X_r \;:\; \langle\, \vec{y} - \vec{y}_0 \rangle \le r \right\} .$$

Действительно, в силу определения нормы, леммы 4.3.1 и условия Липшица справедлива оценка

$$\left\langle\, \widehat{\Phi}\vec{y} - \widehat{\Phi}\vec{z} \,\right\rangle \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left\langle\, \vec{f}(u, \vec{y}(u)) - \vec{f}(u, \vec{z}(u)) \right\rangle du \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{x_0}^{x} L \,\langle\, \vec{y}(u) - \vec{z}(u) \rangle \; du \right| \le \delta_r L \,\langle\, \vec{y}(x) - \vec{z}(x) \rangle \;.$$

Сжимаемость следует из очевидного неравенства для коэффициента сжатия $q_r = \delta_r L = \dfrac{Lr}{M + Lr} < 1$.

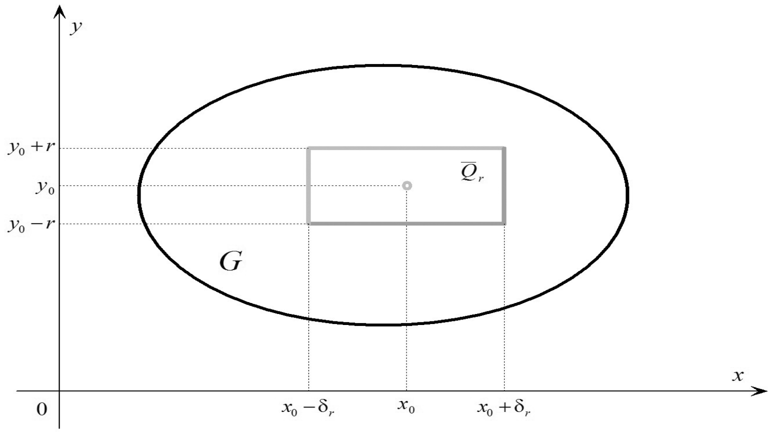


Рис. 4.2. Цилиндр $\overline{Q}_r$ в случае $n = 1$.

С другой стороны, в силу леммы 4.3.1 и ограниченности вектор-функции $\vec{f}(x, \vec{y})$ имеем

$$\left\langle \widehat{\Phi}\vec{y}_0 - \vec{y}_0 \right\rangle \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left\langle \vec{f}(u, \vec{y}_0(u)) \right\rangle du \right| \leq \delta_r M = (1 - q_r) r\,.$$

Заметим, что последнее равенство вытекает непосредственно из формулы $\delta_r = \dfrac{r}{M + Lr}$. Действительно,

$$\delta_r M = \frac{M}{M + Lr}\, r = \left(1 - \frac{Lr}{M + Lr} \right) r = (1 - q_r) r\,.$$

Согласно теореме 4.2.1 (принцип сжимающих операторов) оператор $\widehat{\Phi}$ имеет в шаре $\overline{U}_r(\vec{y}_0)$ единственную неподвижную точку $\vec{y}^*(x)$, являющуюся решением уравнения

$$\vec{y}^*(x) = \widehat{\Phi}\, \vec{y}^*(x),$$

которое в свою очередь в силу теоремы 4.1.1 есть решение исходной задачи Коши (4.1.1)–(4.1.2).

Теорема доказана.

Следствие 4.3.1 **Утверждение теоремы 1.1.1 справедливо.**

Доказательство.

Покажем вначале, что, если вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$ (с координатным представлением $\| \, f_1(\vec{x}) \, f_2(\vec{x}) \, \ldots \, f_n(\vec{x}) \, \|^{\mathrm{T}}$) непрерывно дифференцируема в выпуклой, замкнутой и ограниченной области G, то она удовлетворяет условию Липшица.

Из курса математического анализа известно (лемма Адамара), что

$$f_k(\vec{y}) - f_k(\vec{z}) = \Big(\mathrm{grad} f_k(\vec{\xi}_k), \vec{y} - \vec{z} \Big) \quad \forall k = [1, n] \ ,$$

где $\vec{\xi}_k = \lambda_k \vec{y} + (1 - \lambda_k)\vec{z}$, $\lambda_k \in [0, 1]$, то есть, $\vec{\xi}_k$ принадлежит отрезку, соединяющему $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

Тогда

$$|f_k(\vec{y}) - f_k(\vec{z})| \le \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \left| \frac{\partial f_k(\vec{\xi}_k)}{\partial x_j} \right| \le$$

$$\le M \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \le nM \left\langle \vec{y} - \vec{z} \right\rangle \ ,$$

где $M = \max\limits_{1 \le k, j \le n} \max\limits_{\vec{x} \in G} \left| \dfrac{\partial f_k(\vec{x})}{\partial x_j} \right|$.

Окончательно,

$$\Big\langle \vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{z}) \Big\rangle \le L \left\langle \vec{y} - \vec{z} \right\rangle \ ,$$

где $L = nM$.

Таким образом, из условия теоремы 1.1.1 следует выполнение условий теоремы 4.3.1. Поэтому утверждение теоремы 1.1.1, совпадающее с утверждением теоремы 4.3.1, справедливо.

Следствие доказано.

4.4. Продолжаемость локального решения задачи Коши

В заключительной части § 1.1 было введено понятие продолжения решения задачи Коши. Уточним и расширим это понятие, дав

Определение 4.4.1

Пусть вектор-функция $\vec{y}(x)$, $x \in [a,b]$ – решение задачи Коши (4.1.1)-(4.1.2). Будем говорить, что вектор-функция $\vec{z}(x)$, $x \in [a,B]$ – частное решение уравнения (4.1.1), является *продолжением вперед* решения $\vec{y}(x)$, если

$$b < B \ \text{ и } \ \vec{z}(x) \equiv \vec{y}(x),\ x \in [a,b], \ .$$

В случае, когда $B = +\infty$, решение задачи Коши называется *неограниченно продолжаемым вперед.*

Продолжаемость назад решения задачи Коши определяется аналогично для $A < a$.

Наконец, решение задачи Коши $\vec{y}(x)$ называется *непродолжаемым на промежутке* $\{a,b\}$, если для каждого другого решения $\vec{y}_1(x)$, определенного на промежутке $\{A,B\}$ и совпадающего с $\vec{y}(x)$ на $\{A,B\} \cap \{a,b\}$, оказывается, что

$$\{A,B\} \subseteq \{a,b\}.$$

Имеет место

Теорема 4.4.1

Пусть в области G выполнены условия теоремы 4.3.1 (Коши). Тогда задача Коши (4.1.1)-(4.1.2) имеет единственное непродолжимое решение, определенное на некотором максимальном интервале (α,β).

Доказательство.

Для простоты сначала рассмотрим лишь случай продолжения вперед. Пусть $\vec{y}(x)$ – локальное решение задачи Коши, существование и единственность которого следует из теоремы 4.3.1. И пусть G – замкнутая, ограниченная область. Покажем, что решение может быть продолжено вперед до γ – границы G.

Если оказалось, что $\left\| \begin{matrix} x_0+\alpha\delta_r \\ \vec{y}(x_0+\alpha\delta_r) \end{matrix} \right\| \in \gamma, \quad 0<\alpha\le 1$, то доказательство этого утверждения завершено. В противном случае положим $x_1 = x_0+\delta_r$ и решим новую задачу Коши $\vec{z}\,' = \vec{f}(x,\vec{z})\,, \quad \vec{z}(x_1) = \vec{y}(x_1)$. Находим ее решение на отрезке $[x_0, x_2]$, где $x_2 > x_1$ и т.д. В итоге мы получаем монотонно возрастающую последовательность $\{x_k\}$, которая ограничена сверху в силу ограниченности G. Значит, она имеет предел $B = \sup\limits_k \{x_k\}$, поскольку G замкнуто. В этом случае точка $\left\| \begin{matrix} B \\ \vec{z}(B) \end{matrix} \right\| \in \gamma$ и дальнейшее продолжение вперед в G невозможно.

Пусть G не является замкнутой, ограниченной областью. Аппроксимируем ее изнутри расширяющейся последовательностью замкнутых, ограниченных областей $\{\overline{U}_{(n)}\}$ с границами $\gamma_{(n)}, \forall n$ такими, что $\left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in \overline{U}_{(n)}$ и $\overline{U}_{(n)} \subset \overline{U}_{(n+1)} \subset G$. Для каждого n решение решение задачи Коши существует на отрезке $[a_n, b_n]$, причем $\left\| \begin{matrix} a_n \\ \vec{y}(a_n) \end{matrix} \right\| \in \gamma_{(n)}$ и $\left\| \begin{matrix} b_n \\ \vec{y}(b_n) \end{matrix} \right\| \in \gamma_{(n)}$.

Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывающая, а $\{b_n\}$ монотонно возрастающая. Следовательно они имеют пределы (быть может, бесконечные), равные α и β соответственно.

Таким образом, интервал (α,β) оказывается максимальным интервалом существования решения задачи Коши в области G.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что точки графика решения задачи Коши могут подходить сколь угодно близко к границе области G или же уходить в бесконечность, если область G неограничена. Иначе говоря, продолжение возможно до тех пор, пока не нарушатся условия существования и единственности, что иллюстрирует

Задача 4.4.1 Найти максимальное непродолжимое решение следующих задач Коши (при $n = 1$).

1°. $y' = 1,\ y(0) = 0,\ G = \{|y| \le 2,\ |x| \le 1\}$. В этом случае график решения $y(x) = x$ достигает границы области G, а его предельная точка $\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$ принадлежит этой границе.

2°. Пусть $y' = y^2 + 1,\ y(0) = 0$, а область $G = E^2$. Здесь максимальный интервал будет $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а непродолжаемое на нем решение задачи Коши $y(x) = \operatorname{tg} x$ стремится к $\pm\infty$ при $x \to \pm\dfrac{\pi}{2}$.

3°. $y' = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x},\ \ y\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$, а область $G = \{x > 0,\ -\infty < y < +\infty\}$. Решение задачи Коши $y(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Его предельные точки при $x \to +0$ заполняют отрезок $[-1, 1]$ на оси Oy.

4.5. Исследование зависимости решения задачи Коши от параметров

В реальных приложениях постановка задачи Коши может зависеть от некоторых параметров, значения которых a priori известны, но с некоторой, вообще говоря, ненулевой погрешностью. В этом случае важно убедиться в том, что малые вариации значений параметров приводят к малым вариациям решения. Данное свойство принято называть *корректностью* постановки задачи задачи Коши. Найдем условия, гарантирующие наличие данного свойства.

Покажем, что справедливы следующие теоремы о гладкости, непрерывной зависимости и дифференцируемости решений задачи Коши от параметров. Во-первых, имеет место

`Теорема 4.5.1 (О гладкости)` **Пусть вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ непрерывно дифференцируема в G по всем своим переменным до порядка $N \geq 1$. Тогда любое решение системы дифференциальных уравнений вида $\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y})$ имеет непрерывные производные порядка $N+1$.**

`Доказательство.`

При $N = 1$ теорема верна в силу теоремы Коши. Применим к рассматриваемой системе теорему о дифференцируемости сложной функции. Получим

$$\vec{y}\,'' = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x}.$$

То есть, существует непрерывная вторая производная от $\vec{y}$.

Пусть теперь $N = 2$. Снова применив к последнему равенству теорему о дифференцируемости сложной функции, придем к заключению о существовании непрерывной производной третьего порядка и т.д.

`Теорема доказана.`

Таким образом, чем выше степень гладкости правых частей исходной системы, тем выше степень гладкости ее решений.

Далее, будет справедлива

Теорема 4.5.2 (О непрерывности)

Пусть p – параметр. Тогда, если функции $\vec{f}(x,\vec{y},p)$ и $\dfrac{\partial \vec{f}(x,\vec{y},p)}{\partial y_i}$ $\forall i = [1,n]$ непрерывны в области G по совокупности всех своих аргументов, то решение задачи Коши

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y},p)\,, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

при $\|x_0\ \vec{y}_0\ p_0\|^{\mathrm{T}} \in G$ *непрерывно* **по совокупности переменных** $\{x,p\}$ **в некотором прямоугольнике**

$$\Pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} |\,x - x_0| \le \delta_r\,, \\ |\,p - p_0| \le \delta_p\,. \end{array} \right\}$$

Доказательство.

Рассматриваемую задачу Коши можно записать в следующем, операторном виде

$$\vec{y} = \widehat{\Phi}\vec{y}, \quad \text{где} \ \ \widehat{\Phi}\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u,\vec{y},p)\,du\ .$$

Согласно теоремам 4.2.1 (*принцип сжимающих операторов*) и 4.3.1 (*Коши*) это уравнение имеет в некоторой замкнутой, ограниченной окрестности $\vec{y}_0$ в банаховом пространстве непрерывно дифференцируемых функций единственное решение.

Покажем теперь, что в силу сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$, решение задачи Коши является непрерывной функцией p. Выберем $r > 0$ и δ_r так, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.3.1. В этом случае коэффициент сжатия оператора $\widehat{\Phi}$ будет равен q_r. По следствию 4.3.1, из условия теоремы вытекает, что $\exists L > 0$ такое, что $q_r = \delta_r L$.

Из теоремы 4.2.1 следует, что рекуррентно определенная вектор-функциональная последовательность

$$\vec{y}_{(k)}(x,p) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\Big(u,\ \vec{y}_{(k-1)}(u,p),p\Big)\,du\ ,$$

$$\vec{y}_{(0)}(x,p)=\vec{y}_0\ , \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ p \end{array} \right\| \in \Pi\ ,$$

сходится к $\vec{y}^*(x,p)$, причем (как следует из теоремы 4.2.1)

$$\left\langle\, \vec{y}_{(k)}(x,p)-\vec{y}^*(x,p)\right\rangle \le (q_r)^k r\ , \quad \text{где } q_r=\delta_r L<1\ .$$

Тогда по признаку Вейерштрасса имеет место равномерная по p сходимость

$$\vec{y}_{(k)}(x,p)\ \rightrightarrows\ \vec{y}^*(x,p)\ , \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ p \end{array} \right\| \in \Pi\ ,$$

и из непрерывности $\vec{y}_{(k)}(x,p)\ \ \forall k=0,1,2,\dots$ следует непрерывность $\vec{y}^*(x,p)$.

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает условия дифференцируемости решения задачи Коши.

Теорема 4.5.3 (О дифференцируемости) **Пусть в области G пространства $\{x,\vec{y},p\}$ вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y},p)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка $N\ge 1$ включительно.**

Тогда решение задачи Коши $\vec{y}^*(x,p)$ имеет *непрерывные частные производные* **по всем своим аргументам до порядка N. При этом частная производная $\dfrac{\partial\vec{y}^*}{\partial p}$ является решением задачи Коши для уравнения** *в вариациях по параметру p*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\vec{y}^*}{\partial p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_k}\frac{\partial y_k^*}{\partial p}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial p}$$

с начальным условием $\left.\dfrac{\partial\vec{y}^*}{\partial p}\right|_{x=x_0}=0\ .$

Доказательство.

Проведем доказательство для случая $n=1$. Согласно теореме 4.5.1 функциональная последовательность $\{y_{(k)}(x,p)\}$ при $N=1$

$$y_{(k)}(x,p) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\Big(u, y_{(k-1)}(u,p), p\Big)\, du \quad , \quad k = 1,2,3,\dots \tag{4.5.1}$$

сходится равномерно на $p \in [p - p_0, p + p_0]$ к $y^*(x,p)$ – решению задачи Коши. При условии достаточной гладкости функции $y_0(x,p)$ и в силу свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом, каждый ее член есть непрерывно дифференцируемая по p функция.

Используя теорему Лейбница, построим новую функциональную последовательность $w_{(k)}(x,p) = \dfrac{\partial y_{(k)}(x,p)}{\partial p}$, заданную реккурентным соотношением

$$w_{(k)}(x,p) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} w_{(k-1)} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du \ , \tag{4.5.2}$$

где частные производные от f по y и p вычислены в точке $\| \ u \ \ y_{(k-1)}(u,p) \ \ p \ \|^{\mathrm{T}}$. Или же в операторной форме

$$w_{(k)} = \widehat{\Psi} w_{(k-1)} \quad , \quad k = 1,2,3,\dots , \tag{4.5.3}$$

где действие оператора $\widehat{\Psi}$ задается формулой

$$\widehat{\Psi} w = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} w + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du \ .$$

В силу условий доказываемой теоремы модуль подынтегральной функции в (4.5.2) ограничен сверху числом $M > 0$ на каждом замкнутом, ограниченном подмножестве в G. Кроме того, из следствия 4.3.1 вытекает, что эта подынтегральная функция удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L > 0$. Тогда, проведя рассуждения аналогичные доказательству теоремы 4.3.1, приходим к заключению, что оператор $\widehat{\Psi}$ сжимающий в некотором цилиндре

$$\overline{Q}_r \equiv \left\{ \begin{array}{l} |\,x - x_0| \le \delta_r \,, \\ |\,y - y_0| \le r \end{array} \right\} \subseteq G \,,$$

где

$$\delta_r = \frac{r}{M + rL} \quad \text{и коэффициент сжатия} \quad \delta_r L = q_r < 1 \,,$$

причем $\left\langle\, w_{(k)} - w^* \,\right\rangle \le (q_r)^k r \;\; \forall k = 1, 2, 3, \ldots\,.$

Из последнего неравенства (по признаку Вейерштрасса) следует равномерная сходимость последовательности (4.5.3), что, в свою очередь, исходя из свойств равномерно сходящихся функциональных последовательностей, позволяет заключить, что $y^*(x, p)$ является непрерывно дифференцируемой функцией от p и неподвижной точкой $\widehat{\Psi}$ в $\overline{Q}_r$. Таким образом будет справедливо соотношение

$$\frac{\partial y^*(x,p)}{\partial p} = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y^*(u,p)}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du \;,$$

продифференцировав по x обе части которого, получим

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y^*}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \,, \quad \text{при} \quad \left.\frac{\partial y^*}{\partial p}\right|_{x = x_0} .$$

Повторяя индуктивно приведенные выше рассуждения для бо́льших значений N, приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что доказательство теоремы 4.5.3 очевидным образом обобщается на случаи $n > 1$ и векторного параметра $\vec{p}$.

Наконец, также будет верной

Теорема 4.5.4 **Если вектор-функция $\vec{f}$ имеет в области G непрерывные частные производные по всем своим аргументам, то решение задачи Коши $\vec{y}^*(x, x_0, \vec{y}_0)$ (как функция начальных условий) будет** *непрерывно дифференцируемо* **в некоторой окрестности x_0 по аргументам $x, x_0, \vec{y}_0$.**

Доказательство.

Сделаем замену переменных: $u = x - x_0$, $\vec{z} = \vec{y} - \vec{y}_0$. Тогда исходная задача Коши

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \ , \ \ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{4.5.4}$$

примет вид $\vec{z}\,' = \vec{f}(u + x_0, \vec{z} + \vec{y}_0)$, $\vec{z}(0) = \vec{o}$
или

$$\vec{z}\,' = \vec{g}(u, \vec{z}, x_0, \vec{y}_0) \ , \ \ \vec{z}(0) = \vec{o}\,. \tag{4.5.5}$$

Таким образом, в формулировке задачи (4.5.5) исходные начальные данные $x_0, \vec{y}_0$ превратились в параметры правой части дифференциального уравнения, а новые начальные условия стали независимыми от параметров.

В силу условий доказываемой теоремы, для задачи (4.5.2) оказываются справедливыми утверждения теорем 4.5.2 и 4.5.3 о непрерывной зависимости и дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. А из равносильности задач (4.5.5) и (4.5.4) следует, что эти условия будут справедливы и для исходной задачи (4.5.4).

Теорема доказана.

4.6. Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

В § 1.5 были обсуждены методы нахождения общего решения уравнений, не разрешенных относительно производной, то есть уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0\ . \tag{4.6.1}$$

Как и раньше, мы будем предполагать, что скалярная функция $F(x, y, d)$ вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой непустой области $G \subseteq E^3$.

Задачей Коши для уравнения (4.6.1), согласно определению 1.5.2, называется задача поиска решения уравнения (4.6.1), удовлетворяющего условиям

$$\begin{array}{l} y(x_0) = y_0\,, \\ y'(x_0) = d_0\,, \\ \text{где } F(x_0,\, y_0,\, d_0) = 0\,. \end{array} \qquad (4.6.2)$$

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2) дает

Теорема 4.6.1

Пусть функции $F(x,\, y,\, d)$ **и** $\dfrac{\partial F}{\partial d}$ **непрерывны в области** G **и пусть** $\left.\dfrac{\partial F}{\partial d}\right|_{(x_0,\, y_0,\, d_0)} \neq 0$ **, тогда найдется** $\delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2) существует и единственно на интервале** $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$.

Доказательство.

Согласно известной из курса математического анализа *теореме о неявной функции* уравнение $F(x,\, y,\, d) = 0$ разрешимо относительно d в форме единственной и непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $\|\, x_0\, y_0 \,\|^{\mathrm{T}}$ функции $d = f(x, y)$.

Это означает, что задача Коши (4.6.1)–(4.6.2) равносильна задаче Коши вида

$$\begin{array}{l} y'(x) = f(x, y)\,, \\ \text{где } y(x_0) = y_0\,, \end{array} \qquad (4.6.3)$$

существование и единственность решения которой были доказаны в теореме 4.3.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 4.6.1 не выполняются.

Определение 4.6.1	Точка $\| x_0 \, y_0 \|^{\mathrm{T}}$ называется *неособой*, если существует ее окрестность такая, что через эту точку в данной окрестности проходит интегральная кривая задачи (4.6.3) и притом только одна. Иначе точка $\| x_0 \, y_0 \|^{\mathrm{T}}$ называется *особой*. Решение задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2), все точки которого особые, называется *особым решением*.

Геометрически данное определение может быть интерпретировано так: в каждой точке интегральной кривой особого решения ее касается интегральная кривая другого решения уравнения (4.6.1), то есть решения не совпадающего с особым в некоторой окрестности точки касания. Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 4.6.1, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,d) = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial d}(x,y,d) = 0\,. \end{cases} \tag{4.6.4}$$

Если из этой системы исключить d, то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x,y) = 0$.

Определение 4.6.2	Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x,y) = 0$, называется *дискриминантной кривой* уравнения (4.6.1).

Из сказанного следует, что интегральная кривая особого решения обязана быть дискриминантной кривой. Обратное, вообще говоря, не верно, но, тем не менее, искать особые решения следует среди дискриминантных кривых. Проиллюстрируем этот факт следующими задачами.

Задача 4.6.1 Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

1°. ${y'}^2 = y$. Решив систему (4.6.4) $\left\{ \begin{array}{l} d^2 - y = 0\,, \\ 2d = 0 \end{array} \right.$ получим дискриминантную кривую вида $y = 0$. Это – очевидно решение.

При этом исходное уравнение также имеет решения вида $y = \left(\dfrac{x}{2} + C\right)^2$. Нетрудно убедиться, что $y = 0$ – особое решение. (См. рис. 4.3.)

2°. ${y'}^2 = x$. Из системы (4.6.4) $\left\{ \begin{array}{l} d^2 - x = 0\,, \\ 2d = 0 \end{array} \right.$ находим, что дискриминантная кривая есть $x = 0$. Данное уравнение имеет решения $y = \pm\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$, однако дискриминантная кривая $x = 0$ – не решение уравнения, а геометрическое место *точек возврата* его интегральных кривых. (См. рис. 4.4.)

3°. ${y'}^2 - 4y^3(1-y) = 0$. Система (4.6.4) в этом случае такова

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2 - 4y^3(1-y) = 0\,, \\ 2d = 0\,. \end{array} \right.$$

Значит, дискриминантная кривая задается уравнением $y^3(1-y) = 0$ и состоит из двух ветвей: $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что обе они являются решениями. Проверьте самостоятельно, что исходное уравнение также имеет решения

$$y = \frac{1}{1 + (x - C)^2}\,.$$

Заметим, что при этом на $y = 1$ единственность нарушается, а на $y = 0$ – нет. Значит, $y = 0$ – неособое решение. Наконец, поскольку $y = 1$ есть касательная к нелинейным интегральным кривым, делаем заключение, что $y = 1$ – особое решение. (См. рис. 4.5.)

В общем случае, для выделения особого решения уравнения (4.6.1) следует:

1°. Найти общее решение уравнения (4.6.1).

2°. Найти дискриминантные кривые уравнения (4.6.1), которые являются частными решениями этого уравнения.

3°. Проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (4.6.1).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п.3° следующая. Пусть $y(x,C)$ $\forall x \in [a,b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (4.6.1), а $y^+(x)$ – частное решение этого уравнение, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^+(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a,b]$ у *переопределенной* системы

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(x,C) & = & y^+(x)\ , \\ \dfrac{\partial y(x,C)}{\partial x} & = & \dfrac{d\,y^+(x)}{d\,x} \end{array} \right. \qquad (4.6.5)$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.

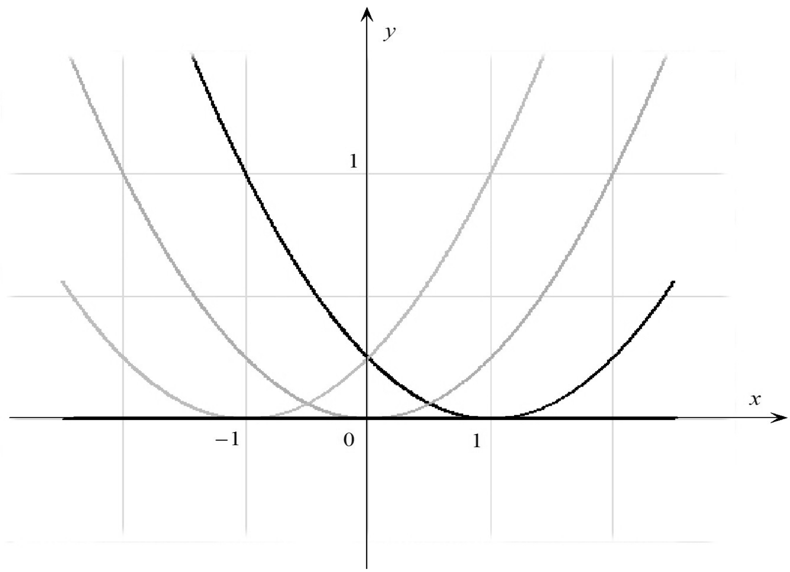


Рис. 4.3. Интегральные кривые задачи 4.6.1.(1°).

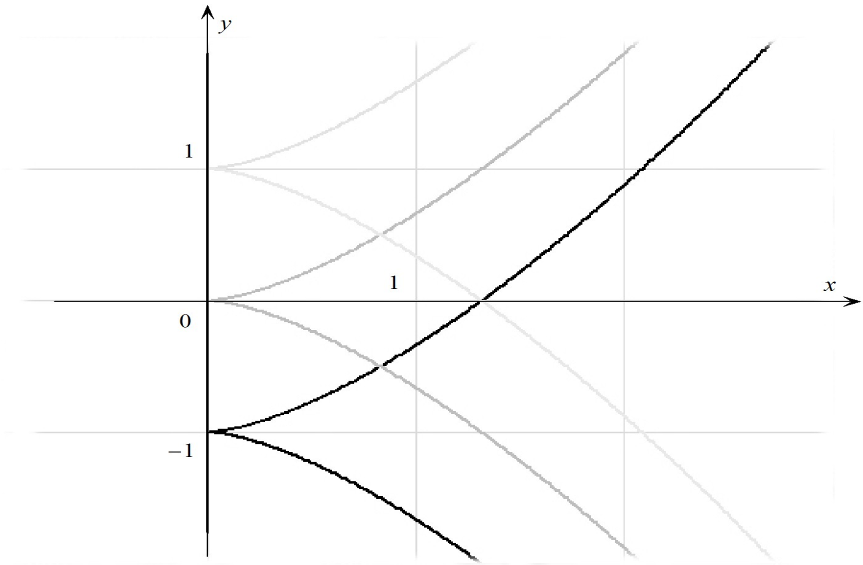


Рис. 4.4. Интегральные кривые задачи 4.6.1.(2°).

Проиллюстрируем применение описанной схемы для конкретной задачи. Методы поиска частных решений уравнений, неразрешенных относительно производной, нами рассматривались в § 1.5, здесь же мы воспользуемся (в упрощенном варианте) ранее полученным решением задачи 1.5.1.

`Задача 4.6.2` Найти особые решения уравнения

$$xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} \, .$$

`Решение:` 1°. Общее решение данного уравнения найдем методом введения параметра (см § 1.5, задача 1.5.1).

$$\left[\begin{array}{l} y(x,C) = Cx - \dfrac{C}{2} \ln \dfrac{C}{2} \quad \forall C > 0 \, , \\ y(x) = e^{2x-1} \, . \end{array} \right.$$

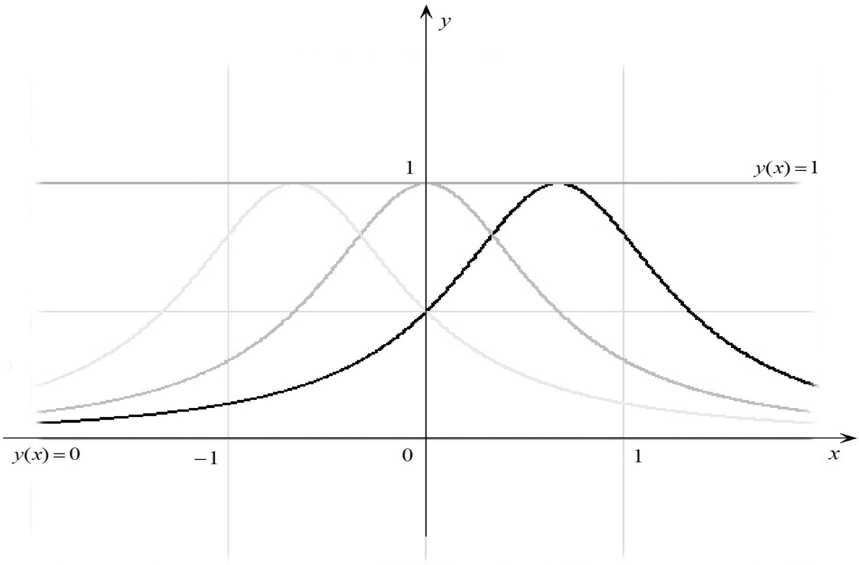


Рис. 4.5. Интегральные кривые задачи 4.6.1.(3°).

2°. Составим систему (4.6.4) для определения вида линии $D(x, y) = 0$ – дискриминантной кривой.

$$\begin{cases} xd - y - \dfrac{d}{2}\ln\dfrac{d}{2} = 0\,, \\ x - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{2} = 0\,. \end{cases}$$

Ее решением будет функция $y = e^{2x-1}$, которая очевидно есть частное решение исходного уравнения. Таким образом,

$$y(x, C) = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}\,,$$
$$y^{+}(x) = e^{2x-1}\,.$$

3°. Наконец, для проверки выполнения определения особого решения, составим систему (4.6.5).

$$\begin{cases} Cx - \dfrac{C}{2}\ln\dfrac{C}{2} = e^{2x-1}\,, \\ \\ C = 2e^{2x-1}\,. \end{cases}$$

Она совместна $\forall C > 0$, причем ее решение есть функция $\mathrm{C}(x) = 2e^{2x-1}$. Это и означает, что $y^{+}(x) = e^{2x-1}$ особое решение исходного уравнения. Вид соответствующих интегральных кривых показан на рис. 4.6.

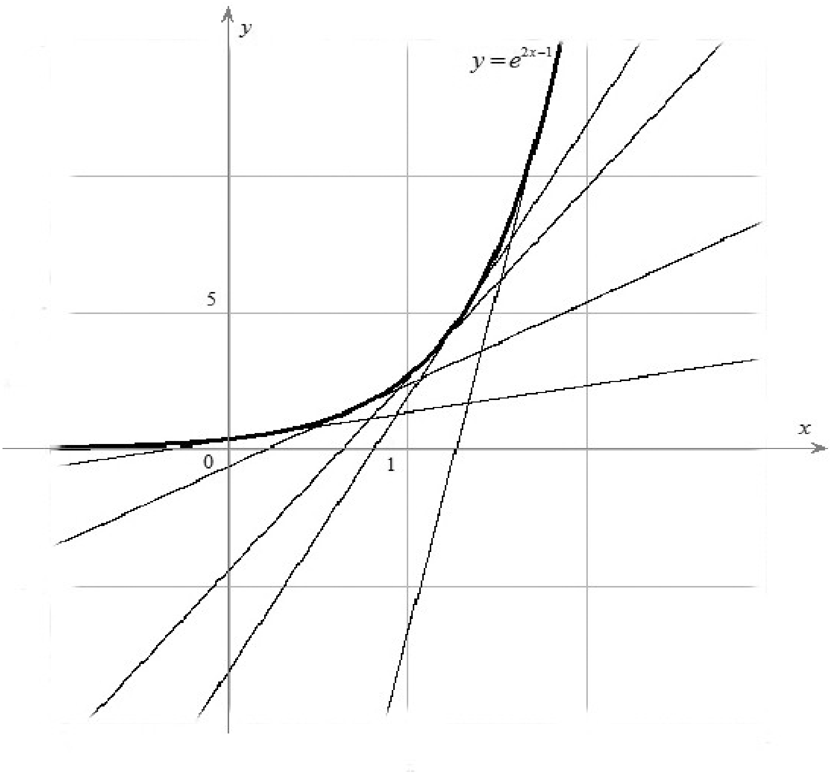


Рис. 4.6. Интегральные кривые задачи 4.6.2.

4.7. Существование и единственность решения задачи Коши в линейном и квазилинейном случаях

Пусть матрица $\| A(x) \|$ и вектор-функция $\| b(x) \|$ непрерывны для любого $x \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим следующую задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\|\vec{y}\,'\| = \| A(x) \| \| \vec{y} \| + \| b(x) \| \, , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \, , \tag{4.7.1}$$

а также, тесно с ней связанную, задачу Коши вида

$$\|\vec{y}\,'\| = \| \vec{f}(x, \vec{y}) \| \, , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \, , \tag{4.7.2}$$

для *квазилинейного* случая, когда правая часть в (4.7.2) определена $\forall x \in R$ и может расти при $\langle \vec{y} \rangle \to +\infty$ не быстрее линейной функции. Последнее условие формально означает, что $\lim\limits_{<\vec{y}> \to +\infty} \dfrac{\left\langle \vec{f}(x, \vec{y}) \right\rangle}{\langle \vec{y} \rangle} = 0$. Например, $\left\langle \vec{f} \right\rangle \sim \sqrt[k]{\langle \vec{y} \rangle}$, $k > 1$ или $\left\langle \vec{f} \right\rangle \sim \ln \langle \vec{y} \rangle$.

Рассмотрим вначале задачу (4.7.2). Имеет место

Теорема 4.7.1 **Пусть**

- **вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в непустой области $G \subseteq E^{n+1} : \{x \in (\alpha, \beta) \, , \ \vec{y} \in E^n\}$;**
- **вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ квазилинейна, т.е. в** *любой* **замкнутой области $\overline{Q} \ : \ \{x \in [\alpha_0, \beta_0] \subset (\alpha, \beta) \, , \ \vec{y} \in E^n\}$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица равной L.**

Тогда $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ *на всем интервале* (α, β) **задача Коши (4.7.2) имеет решение и притом единственное.**

Доказательство.

Пусть $x_0 \in [\alpha_0, \beta_0]$. По условию теоремы существует такое число $L > 0$, что на множестве $\overline{Q}$ справедлива оценка
$$< \vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z}) > \leq \ L \cdot < \vec{y} - \vec{z} > \ .$$

Выберем некоторое фиксированное число $\delta \in \left(0\,, \dfrac{1}{L}\right)$. Оператор
$$\widehat{\Phi}\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du\,,$$
для которого на $[x_0, x_0 + \delta]$ верна оценка
$$< \widehat{\Phi}\vec{y} - \widehat{\Phi}\vec{z} > \leq \ L\delta < \vec{y} - \vec{z} > \ .$$
сжимаюющий, поскольку в силу выбора δ имеем $L\delta < 1$. Тогда, согласно теореме 4.3.1, решение задачи Коши существует на $[x_0, x_0 + \delta]$ и единственно.

Построим теперь продолжение полученного решения на отрезок $[x_0, x_0 + 2\delta]$ при помощи интегрального уравнения
$$\vec{y}(x) = \vec{y}(x_0 + \delta) + \int\limits_{x_0+\delta}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du\,,$$
правую часть которого мы опять-таки рассматриваем как сжимающий оператор, но уже на отрезке $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]$. Заметим, что стыковка решений задач Коши на отрезках $[x_0, x_0 + \delta]$ и $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]$ в силу непрерывности $\vec{f}(x, \vec{y})$ очевидно гладкая. Таким образом, решение задачи Коши оказывается продолженным вперед на величину δ.

Нетрудно видеть, что процедура продолжения вперед, вплоть до границы множества $\overline{Q}$, может иметь лишь конечное число шагов N, поскольку величины δ и β_0 конечные. Здесь N – минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству
$$x_0 + N\delta \geq \beta_0\,.$$

Аналогично обстоит дело и с продолжением решения задачи Коши назад.

В итоге получаем, что решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$, а поскольку этот отрезок, содержащийся в интервале (α, β), произвольный, то мы приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 4.7.1 **Пусть матрица** $\| A(x) \|$ **и вектор-функция** $\| b(x) \|$ **непрерывны** $\forall x \in (\alpha, \beta)$**. Тогда** $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ *на всем интервале* (α, β) **задача Коши (4.7.1) имеет решение и притом единственное.**

Доказательство.

Если взять

$$L = \max_{x \in [\alpha_0, \beta_0]} \max_{i,j=[1,n]} | \alpha_{ij}(x) | \ ,$$

то для задачи (4.7.1) будут удовлетворены все условия теоремы 4.7.1, в силу чего утверждение следствия является справедливым.

Следствие доказано.

В заключение, следует отметить, что, в отличие от теоремы 4.3.1 (Коши), устанавливающей существование и единственность решения задачи Коши лишь *локально*, теорема 4.7.1 имеет *глобальный* характер. Кроме того, итерационная процедура

$$\vec{y}_{(k)}(x) = \widehat{\Phi} \vec{y}_{(k-1)}(x) \ , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

для квазилинейных и линейных задач сходится из *любой* начальной точки множества G, в то время как в общем случае, сходимость гарантируется лишь для начальных приближений, достаточно *близких* к точному решению задачи Коши.

Поясним это следующим примером: рассмотрим задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$ для систем

$$\begin{cases} y' = z \, , \\ z' = \dfrac{y}{x-1} + \sin x \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} y' = z \, , \\ z' = \dfrac{y}{x-1} + \sin y \, . \end{cases}$$

Решение задачи Коши для первой (линейной) системы существует и единственно (причем непродолжимое) на всем интервале $x \in (-\infty, 1)$, в то время как для второй (нелинейной) системы можно утверждать, что решение задачи Коши существует и единственно лишь на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, 1)$, содержащем точку $x = 0$.

Глава 5.

Системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Изучение *линейных* дифференциальных уравнений и систем таких уравнений традиционно выделяется в отдельное направление, поскольку эти уравнения и системы обладают рядом специфических особенностей, к которым, в первую очередь следует отнести возможность выражения их *общего* решения через *конечный* набор некоторых *частных* решений.

5.1. Нормальные линейные системы с переменными коэффициентами

Определение 5.1.1	*Нормальной системой* дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_1(t).
\end{cases}
\tag{5.1.1}
$$

где $t \in \Omega$ – вещественный аргумент, комплекснозначные $x_k(t)$, $k = [1, n]$ – неизвестные функции, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на Ω функции, называемые *свободными членами.* Комплекснозначные функции $a_{ij}(t)$ – заданы и непрерывны на Ω $\forall i, j = [1, n]$.

Пусть

$$
\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{array} \right\|,
$$

$$
\|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{array} \right\|, \quad \|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \ldots \\ b_n(t) \end{array} \right\|,
$$

тогда систему уравнений (5.1.1) можно записать в так называемом *неразвернутом* виде

$$
\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t)\,,\ \forall i = [1, n]\,,
$$

или же в еще более компактной, матричной форме

$$
\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|\,, \tag{5.1.2}
$$

Предварительно также отметим, что для случая вещественной матричной функции $\|A(t)\|$ справедлива

Лемма 5.1.1 **Пусть матрица $\| A(x) \|$ вещественная, тогда**

1°. $\operatorname{Re}\vec{x}$ **– вещественная и** $\operatorname{Im}\vec{x}$ **– мнимая части** $\vec{x}(t)$ **— решения однородной системы (5.1.2)** $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$, **также являются решениями этой системы.**

2°. $\operatorname{Re}\vec{x}$ **– вещественная и** $\operatorname{Im}\vec{x}$ **– мнимая части** $\vec{x}(t)$ **— решения неоднородной системы (5.1.2)** $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|$, **являются решениями неоднородных систем**

$$\|\operatorname{Re}\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\operatorname{Re}\vec{x}(t)\| + \|\operatorname{Re}\vec{b}(t)\| \quad \textbf{и}$$

$$\|\operatorname{Im}\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\operatorname{Im}\vec{x}(t)\| + \|\operatorname{Im}\vec{b}(t)\|$$

соответственно.

3°. Верно утверждение, обратное утверждению 2°.

Доказательство.

Доказательство следует из линейности операции дифференцирования, распределительного свойства умножения матриц и условия равенства комплексных чисел.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь основные свойства нормальных систем линейных дифференциальных уравнений.

Если записать равенство (5.1.2) в виде

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| - \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| = \|\vec{b}(t)\| \quad \text{или} \quad \left\| \frac{d}{dt} - \|A(t)\| \right\| \|\vec{x}(t)\| = \|\vec{b}(t)\| \,,$$

то его можно рассматривать как определение *дифференциального оператора* $\widehat{L}$, действующего в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\vec{x}(t)$ $t \in \Omega$, образы которых принадлежат линейному пространству непрерывных вектор-функций $\vec{b}(t)$. Иначе говоря, в операторной форме

$$\widehat{L}\vec{x}(t) = \vec{b}(t) \,, \quad \text{где} \;\; \widehat{L} = \frac{d}{dt} - \|A(t)\| \,.$$

В рассматриваемом случае для любых непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$, а также любого числа λ очевидно выполняются равенства

$$\widehat{L}\big(\vec{u}(t)+\vec{v}(t)\big)=\widehat{L}\vec{u}(t)+\widehat{L}\vec{v}(t)\ ,\quad \widehat{L}\big(\lambda\vec{u}(t)\big)=\lambda\widehat{L}\vec{u}(t)\ ,$$

из которых следует, что $\widehat{L}$ есть *отображение* и притом *линейное.*

Имеет место

Лемма 5.1.2 **Справедливы следующие утверждения.**

1°. Множество всех частных решений однородного уравнения является *линейным пространством***.**

2°. Сумма частного решения *неоднородного* **уравнения и частного решения** *однородного* **уравнения есть частное решение** *неоднородного* **уравнения.**

3°. Разность двух частных решений *неоднородного* **уравнения есть частное решение** *однородного* **уравнения.**

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_{(1)}(t),\vec{x}_{(2)}(t),\ldots,\vec{x}_{(m)}(t)$ – частные решения однородного уравнения $\widehat{L}\vec{x}(t)=\vec{o}$, тогда справедливость утверждения 1° следует из аксиоматики линейного пространства и равенства

$$\widehat{L}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{x}_{(i)}(t)\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\widehat{L}\vec{x}_{(i)}(t)\ ,$$

для любых чисел $\{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots\,,\lambda_m\}$.

Утверждения 2° и 3° проверяются непосредственно. Действительно, пусть $\vec{x}(t)$ – частное решение однородного уравнения $\widehat{L}\vec{x}(t)=\vec{o}$, а $\vec{y}(t)$, $\vec{y}_{(1)}(t)$, $\vec{y}_{(2)}(t)$ – частные решения неоднородного уравнения $\widehat{L}\vec{y}(t)=\vec{b}(t)$.

Тогда

$$\widehat{L}\big(\vec{x}(t)+\vec{y}(t)\big)=\widehat{L}\vec{x}(t)+\widehat{L}\vec{y}(t)=\vec{o}+\vec{b}(t)=\vec{b}(t) \qquad \text{и}$$

$$\widehat{L}\big(\vec{y}_{(1)}(t)-\vec{y}_{(2)}(t)\big)=\widehat{L}\vec{y}_{(1)}(t)-\widehat{L}\vec{y}_{(2)}(t)=\vec{b}(t)-\vec{b}(t)=\vec{o}\,.$$

Лемма доказана.

Убедимся теперь, что справедлива

Теорема 5.1.1 **Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений $\widehat{L}\vec{y}(t)=\vec{b}(t)$ есть сумма** *любого частного* **решения этой неоднородной системы и** *общего* **решения однородной системы $\widehat{L}\vec{y}(t)=\vec{o}$.**

Доказательство.

Предварительно еще раз отметим, что здесь термин «общее решение системы дифференциальных уравнений» обозначает лишь совокупность всех тех (и только тех!) вектор-функций, которые являются частными решениями данной системы, а не метод(ы) их нахождения.

По условию теоремы множество $\boxed{\text{Частн. реш. неоднор.}}$ состоит из одной конкретной вектор-функции $\vec{w}(t)$, которая является частным решением неоднородной системы, а множество $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$ содержит *все* вектор-функции – частные решения однородной системы. Тогда, в силу п.2° леммы 5.1.2, множество

$$\boxed{\text{Частн. реш. неоднор.}}+\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$$

состоит только из вектор-функций, являющихся частными решениями неоднородной системы. Покажем, что это множество содержит *все* частные решения неоднородной системы. Действительно, вектор-функция $\vec{v}(t)-\vec{w}(t)$, где $\vec{v}(t)$ – некоторое *произвольное* частное решение неоднородной системы, обязательно (по условию теоремы и в силу п.3° леммы 5.1.2) содержится во множестве $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$.

То есть $\vec{v}(t) - \vec{w}(t) \in$ $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$,

но тогда $\vec{v}(t) \in \vec{w}(t) +$ $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$,

что и является утверждением теоремы.

Теорема доказана.

Введем теперь понятия линейной зависимости и линейной независимости для вектор-функций.

Определение 5.1.2 Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно зависимыми* на множестве Ω, если существуют, не равные нулю одновременно, числа λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega. \tag{5.1.3}$$

Определение 5.1.3 Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно независимыми* на множестве Ω, если из условия

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Следует обратить внимание на то, что понятие линейной зависимости вектор-функций $\{\ \vec{x}_{(1)}(t),\ \vec{x}_{(2)}(t),\ \ldots,\ \vec{x}_{(m)}(t)\ \}$ на некотором множестве $t \in \Omega$ отличается от понятия линейной зависимости векторов, используемого в линейной алгебре.

Задача 5.1.1 Будут ли линейно зависимыми на R вектор-функции

$$\|\vec{x}_{(1)}(t)\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{x}_{(2)}(t)\| = \left\| \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\| ?$$

`Решение:` Алгебраические векторы $\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\|$ очевидно линейно зависимы при любом фиксированном $t \in (-\infty, +\infty)$, поскольку $t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\|$.

Однако как вектор-функции они линейно независимы, поскольку из

$$\lambda_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

(например, при $t = 1$ и $t = 2$) следует, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 0\,, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\,, \end{array} \right.$$

имеющей единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Полезным инструментом, позволяющем делать заключения о линейной зависимости или линейной независимости системы вектор-функций, служит определитель специального вида, называемый определителем Вронского.

`Определение 5.1.4` *Детерминантом Вронского* (или *вронскианом*) системы $m-$мерных вектор-функций $\{\, \vec{x}_{(1)}(t),\, \vec{x}_{(2)}(t),\, \ldots\, ,\, \vec{x}_{(m)}(t)\, \}$ называется определитель квадратной матрицы $m-$го порядка, столбцы которого суть координатные представления этих вектор-функций.

$$W(t) = \det \left\| \begin{array}{cccc} x_{1(1)} & x_{1(2)} & \ldots & x_{1(m)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} & \ldots & x_{2(m)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_{m(1)} & x_{m(2)} & \ldots & x_{m(m)} \end{array} \right\| . \qquad (5.1.4)$$

Напомним, что, как и раньше, нижний индекс в круглых скобках является номером вектор-функции, а нижний индекс без скобок – номером координаты.

Будет иметь место

Лемма 5.1.3 **Пусть $W(t)$ – вронскиан системы вектор-функций $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t) \quad t \in \Omega$. Тогда справедливы следующие утверждения**

1°. Если $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ линейно зависимы на множестве Ω, то $W(t) \equiv 0$ на Ω.

2°. Если $W(t) \not\equiv 0$ на множестве Ω, то вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ линейно независимы на Ω.

Доказательство.

Справедливость леммы следует из того, что столбцы квадратной матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда детерминант этой матрицы равен нулю.

Лемма доказана.

Утверждения, обратные утверждениям леммы 5.1.3, не верны. Убедитесь в этом, рассмотрев в качестве примера вектор-функции, указанные в условии задачи 5.1.1.

Теорема 5.1.2 **Если вектор-функции**

$$\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t) \,\}$$

являются *решениями* **однородной системы уравнений $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\|$ с** *непрерывной* **матрицей $\|A(t)\| \quad \forall t \in \Omega$, то они линейно зависимы тогда и только тогда, когда их вронскиан $W(t) \equiv 0$ на Ω.**

Доказательство.

Предположим, что $\exists t_0 \in \Omega$ такое, что $W(t_0) = 0$. Для этого t_0 столбцы вронскиана линейно зависимы, и потому существуют не равные нулю одновременно константы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t_0) = 0\,,$$

Используя эти константы, построим новую вектор-функцию

$$\vec{x}^{\,*}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t)\,. \qquad (5.1.5)$$

Она в силу леммы 5.1.2 есть решение задачи Коши для системы уравнений $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$ с начальным условием $\vec{x}^{\,*}(t_0) = \vec{o}$.

С другой стороны, функция $\vec{z}(t) \equiv \vec{o}$ есть решение задачи Коши для уравнения $\|\dot{\vec{z}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{z}(t)\|$ с $\vec{z}(t_0) = \vec{o}$. И в силу теоремы существования и единственности

$$\vec{x}^{\,*}(t) = \vec{z}(t) \equiv \vec{o}\,,$$

то есть вектор-функция (5.1.5) всюду равна нулю и решения $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Отметим, что, если вектор-функции $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ не являются решениями однородной системы дифференциальных уравнений $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$, то утверждение теоремы 5.1.2 не верно.

Проверьте самостоятельно, что, например, вектор-функции

$$\|\vec{x}_{(1)}(t)\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{x}_{(2)}(t)\| = \left\| \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\| \ ,$$

не могут составлять фундаментальную систему никакой системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}(t)x_1 + \alpha_{12}(t)x_2\,, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}(t)x_1 + \alpha_{22}(t)x_2\,, \end{cases}$$

хотя они линейно независимые вектор-функции.

Непрерывность матрицы $\|A(t)\|$ в условии теоремы также существенна, поскольку именно она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши. Иначе говоря, в случае, когда вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ хотя и являются решениями однородной системы дифференциальных уравнений, но матрица $\|A(t)\|$ не непрерывна, утверждение теоремы 5.1.2 может не быть верным.

5.2. Построение общего решения линейной системы с переменными коэффициентами

Рассмотрим теперь вопрос о построении формулы, описывающей общее решение системы дифференциальных уравнений вида (5.1.1). Вначале дадим

Определение 5.2.1 *Фундаментальной системой решений* называется совокупность n любых линейно независимых частных решений однородной системы уравнений

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\| \, . \qquad (5.2.1)$$

Лемма 5.2.1 **Фундаментальные системы для систем (5.2.1) с непрерывной матрицей $\|A(t)\|$ существуют.**

Доказательство.

В справедливости утверждения леммы убедимся непосредственным построением.

Во-первых, при некотором значении $t_0 \in \Omega$ выберем n линейно независимых $n-$мерных векторов $\{\vec{x}^0_{(1)}, \vec{x}^0_{(2)}, \ldots, \vec{x}^0_{(n)}\}$.

Далее, пусть $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ суть решения задач Коши вида

$$\|\dot{\vec{x}}_{(k)}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}_{(k)}(t)\| \, , \;\; \vec{x}_{(k)}(t_0) = \vec{x}^0_{(k)} \, .$$

Эти решения – вектор-функции $\vec{x}_{(k)}(t)$, существуют и единственны.

Они линейно независимые, поскольку их значения при $t = t_0$ линейно независимые векторы, и равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega$$

возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Лемма доказана.

Формулу для общего решения однородной системы дифференциальных уравнений вида (5.2.1) описывает

Теорема 5.2.1 **Пусть вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ являются линейно независимыми частными решениями однородной системы уравнений (5.2.1) с непрерывной матрицей $\|A(t)\| \ \ \forall t \in \Omega$, тогда общее решение этой системы имеет вид**

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{x}_{(k)}(t)\,, \tag{5.2.2}$$

где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Доказательство.

Из п.1° леммы 5.1.2 следует, что каждая линейная комбинация вида (5.2.2) является частным решением системы уравнений (5.2.1).

Покажем также, что любое решение этой системы может быть представлено в виде формулы (5.2.2).

Выберем некоторое $t_0 \in \Omega$. Из линейной независимости системы решений $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ следует (согласно теореме 5.1.2), что ее вронскиан $W(t) \neq 0$ в точке t_0. Развернутая форма равенства (5.2.2) при $t = t_0$ может быть записана как

$$\begin{cases} C_1 x_{1(1)}(t_0) + C_2 x_{1(2)}(t_0) + \ldots + C_n x_{1(n)}(t_0) = x_1(t_0)\,, \\ C_1 x_{2(1)}(t_0) + C_2 x_{2(2)}(t_0) + \ldots + C_n x_{2(n)}(t_0) = x_2(t_0)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{n(1)}(t_0) + C_2 x_{n(2)}(t_0) + \ldots + C_n x_{n(n)}(t_0) = x_n(t_0)\,. \end{cases}$$

Рассмотрим ее как систему n линейных уравнений относительно n неизвестных C_1, C_2, ..., C_n . Определитель ее основной матрицы

$$\det \begin{Vmatrix} x_{1(1)}(t_0) & x_{1(2)}(t_0) & \ldots & x_{1(n)}(t_0) \\ x_{2(1)}(t_0) & x_{2(2)}(t_0) & \ldots & x_{2(n)}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n(1)}(t_0) & x_{n(2)}(t_0) & \ldots & x_{n(n)}(t_0) \end{Vmatrix} = W(t_0) \neq 0\,.$$

Тогда, согласно теореме Крамера, значения неизвестных – констант C_1, C_2, ..., C_n определяются однозначно.
Пусть $\vec{x}(t)$ – некоторое решение системы (5.2.1), и вектор-функция $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k \vec{x}_{(k)}(t)$ также есть решение этой системы (в силу леммы 5.1.2). При $t = t_0$ оба эти решения равны, значит, по теореме единственности они должны совпадать и $\forall t \in \Omega$. Таким образом получаем, что любое решение системы (5.2.1) представимо в виде (5.2.2).

Теорема доказана.

Альтернативную формулировку доказанной теореме дает

Следствие 5.2.1 **Множество всех решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений (5.2.1) является $n-$мерным линейным пространством, базисом в котором может служить любая фундаментальная система ее решений.**

В вычислительной практике достаточно часто используют другую форму записи общего решения, основой которой служит

Определение 5.2.2 *Фундаментальной матрицей* однородной системы дифференциальных уравнений (5.2.1) называется квадратная матрица порядка n, столбцами которой служат координатные представления вектор-функций, образующих фундаментальную систему решений.

Пусть вектор-функции $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\ \forall t \in \Omega \,\}$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда, во введенных выше обозначениях фундаментальная матрица имеет вид

$$\|X(t)\| = \left\| \begin{matrix} x_{1(1)}(t) & x_{1(2)}(t) & \ldots & x_{1(n)}(t) \\ x_{2(1)}(t) & x_{2(2)}(t) & \ldots & x_{2(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n(1)}(t) & x_{n(2)}(t) & \ldots & x_{n(n)}(t) \end{matrix} \right\| ,$$

а общее решение однородной системы (5.2.1) может быть представлено в форме

$$\|\vec{x}(t)\| = \|X(t)\|\|\vec{C}\| ,$$

где $\|\vec{C}\| = \|\, C_1\, C_2\, \ldots\, C_n \,\|^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец произвольных констант в записи решения.

Отметим, что фундаментальная матрица *невырожденная*, поскольку ее детерминант является вронскианом линейно независимого набора решений системы (5.2.1) и, следовательно, отличен от нуля $\forall t \in \Omega$.

В качестве упражнения самостоятельно покажите, что также справедлива

Теорема 5.2.2 **Если $\|X(t)\|$ фундаментальная матрица системы (5.2.1), то**

1°. Матрица $\|Y(t)\| = \|X(t)\|\,\|S\|$, где $\|S\|$ – произвольная квадратная невырожденная матрица порядка n, также фундаментальная матрица этой системы.

2°. Для двух любых фундаментальных матриц $\|X(t)\|$ и $\|Y(t)\|$ системы (5.2.1) существует, и притом единственная, квадратная невырожденная матрица $\|S\|$ такая, что $\|Y(t)\| = \|X(t)\|\,\|S\|$.

Универсального способа построения фундаментальной системы решений для (5.2.1), к сожалению, до сих пор не найдено. Однако имеется возможность вычисления частных решений этой однородной системы уравнений по другим, найденным ранее, ее частным решениям.

Вначале дадим

Определение 5.2.3 Функция $\mathrm{Sp}\|A(t)\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{kk}(t)$ называется *следом* [1] квадратной матрицы $\|A(t)\|$ порядка n.

Для этого понятия оказывается справедливой

Лемма 5.2.3 **Пусть квадратная матрица $\|Q(t)\|$ в точке $t = t_0$ невырождена и дифференцируема. Тогда**

$$\frac{\dot{\det}\|Q(t)\|}{\det\|Q(t)\|} = \mathrm{Sp}\Big(\ \|\dot{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1}\Big)\ .$$

Доказательство.

Из формулы Тейлора следует, что

$$\|Q(t_0+\Delta)\| = \|Q(t_0)\| + \|\dot{Q}(t_0)\|\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\| \qquad \text{при} \ \ \Delta \to 0\,.$$

Тогда

$$\det\|Q(t_0+\Delta)\| = \det\Big[\|Q(t_0)\| + \|\dot{Q}(t_0)\|\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big] =$$

$$= \det\|Q(t_0)\| \cdot \det\Big[\|E\| + \|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \ \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big]\ . \tag{5.2.3}$$

Теперь покажем, что при $\Delta \to 0$

$$\det\Big[\|E\| + \|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \ \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big] =$$

$$= 1 \ + \ \mathrm{Sp}\Big(\|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1}\Big)\,\Delta \ + \ \mathrm{o}(\Delta)\,. \tag{5.2.4}$$

[1] От die Spur – след (*нем.*)

Действительно,

$$\det\Big[\|E\| + \|\dot Q(t_0)\|\cdot\|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big] =$$

$$= \det\left\|\begin{array}{cccc} 1+\beta_{11}\Delta+\mathrm{o} & \beta_{12}\Delta+\mathrm{o} & \dots & \beta_{1n}\Delta+\mathrm{o} \\ \beta_{21}\Delta+\mathrm{o} & 1+\beta_{22}\Delta+\mathrm{o} & \dots & \beta_{2n}\Delta+\mathrm{o} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}\Delta+\mathrm{o} & \beta_{n2}\Delta+\mathrm{o} & \dots & 1+\beta_{nn}\Delta+\mathrm{o} \end{array}\right\|,$$

$$\text{где}\quad \beta_{ij} = \Big(\|\dot Q(t_0)\|\cdot\|Q(t_0)\|^{-1}\Big)_{ij} \quad \forall i,j=[1,n]\,.$$

Из курса линейной алгебры известно, что детерминант квадратной матрицы представляется как сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n различных элементов этой матрицы, взятых *по одному* из каждой строки и каждого столбца. Значит (в рассматриваемом случае) только произведение элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, есть величина порядка $\mathrm{O}(1)$, а не $\mathrm{O}(\Delta)$ или меньшего.

Поэтому члены порядка малости Δ могут содержаться только в произведении элементов, стоящих на главной диагонали, которое равно

$$\big(1+\beta_{11}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big)\big(1+\beta_{22}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big)\dots\big(1+\beta_{nn}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big) =$$

$$= 1+\Delta\sum_{k=1}^{n}\beta_{kk}+\mathrm{o}(\Delta) = 1+\Delta\cdot\mathrm{Sp}\Big(\|\dot Q(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\Big)+\mathrm{o}(\Delta)\,,$$

что и доказывает равенство (5.2.4).

С его помощью равенство (5.2.3) может быть записано в виде

$$\frac{\det\|Q(t_0+\Delta)\| - \det\|Q(t_0)\|}{\Delta} =$$

$$= \det\|Q(t_0)\|\cdot\mathrm{Sp}\Big(\|\dot Q(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\Big) + \frac{\mathrm{o}(\Delta)}{\Delta},$$

перейдя в котором к пределу при $\Delta\to 0$, получим

$$\frac{\dot{\det}\|Q(t)\|}{\det\|Q(t)\|} = \mathrm{Sp}\Big(\ \|\dot Q(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\Big)\ .$$

Лемма доказана.

Рассмотрим снова однородную систему линейных дифференциальных уравнений (5.2.1)

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|\,.$$

Как и раньше, будем предполагать, что матрица $\|A(t)\|$ непрерывна при $t \in \Omega$.

Пусть $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ некоторый набор любых частных решений системы (5.2.1), а $W(t) = \det\|X(t)\|$ вронскиан этого набора решений. Тогда справедлива

Теорема 5.2.3 (Лиувилля - Остроградского) **Для любых t_0, $t \in \Omega$ верно соотношение (называемое** *формулой Лиувилля-Остроградского***)**

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\|A(u)\|du\right)\,, \qquad (5.2.5)$$

Доказательство.

Если частные решения $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ линейно зависимые на множестве Ω, то $W(t) \equiv 0\,,\;\; t \in \Omega$ и равенство (5.2.5) очевидно.

В случае, когда эти частные решения линейно независимые, они образуют фундаментальную систему с фундаментальной матрицей $\|X(t)\|$, то есть, вектор-функции $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ суть столбцы этой матрицы. Тогда справедливо матричное равенство

$$\|\dot{X}(t)\| = \|A(t)\|\|X(t)\|\,.$$

Далее, из

$$\|\dot{X}(t)\|\|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\|\|X(t)\|\|X(t)\|^{-1}$$

имеем

$$\|\dot{X}(t)\|\|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\|\,,$$

а, в силу леммы 5.2.3, получаем

$$\frac{\dot W(t)}{W(t)} = \frac{\dot{\det}\|X(t)\|}{\det\|X(t)\|} = \mathrm{Sp}\left(\|\dot X(t)\|\|X(t)\|^{-1}\right) = \mathrm{Sp}\|A(t)\|\,,$$

или, окончательно,

$$\frac{\dot W(t)}{W(t)} = \mathrm{Sp}\|A(t)\|\,.$$

Интегрируя это равенство по t, получаем соотношение (5.2.5).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай *неоднородной* системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\|\dot{\vec x}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec x(t)\| + \|\vec b(t)\|\,. \tag{5.2.6}$$

Общее решение соответствующей однородной системы (5.2.1) будем считать известным, а матричные функции $\|A(t)\|$ и $\|\vec b(t)\|$ – непрерывными $\forall t\in\Omega$.

Согласно теореме 5.1.1 общее решение неоднородной системы представимо как сумма частного решения неоднородной и общего решения однородной систем уравнений. Следовательно, задача построения общего решения неоднородной системы сводится к поиску частного решения неоднородной системы, для получения которого воспользуемся методом *вариации постоянных* (см. § 1.3 и теорему 2.5.1).

Пусть $\|X(t)\|$ фундаментальная матрица однородной системы (5.2.1). В этом случае будет верна

Теорема 5.2.4 **Система (5.2.6) имеет частное решение вида**

$$\|\vec x^*(t)\| = \|X(t)\|\int\limits_{t_0}^{t}\|X(u)\|^{-1}\|\vec b(u)\|\,du\,. \tag{5.2.7}$$

Доказательство.

Частное решение неоднородной системы (5.2.6) будем искать в виде

$$\|\vec x^*(t)\| = \|X(t)\|\|\vec C(t)\|\,,$$

где $\vec{C}(t)$ некоторая неизвестная заранее вектор-функция.

Подставив это выражение в (5.2.6), с учетом равенства

$$\|\dot{X}(t)\| = \|A(t)\|\|X(t)\|\,,$$

получим

$$\|A(t)\|\|X(t)\|\|\vec{C}(t)\| + \|X(t)\|\|\dot{\vec{C}}(t)\| =$$

$$= \|A(t)\|\|X(t)\|\|\vec{C}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|\,.$$

Откуда, в силу невырожденности фундаментальной матрицы,

$$\|\dot{\vec{C}}(t)\| = \|X(t)\|^{-1}\|\vec{b}(t)\|$$

и, окончательно,

$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\| \int\limits_{t_0}^{t} \|X(u)\|^{-1}\|\vec{b}(u)\|\,du\,.$$

`Теорема доказана.`

5.3. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение $n-$го порядка вида

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,, \tag{5.3.1}$$

где $a_k(t)$ и $b(t)$ непрерывны $\forall k = [0,n]\,,\ \forall t \in \Omega$ и $a_n(t) \neq 0\,,\ \forall t \in \Omega\,.$

Оно всегда может быть сведено при помощи следующей замены переменных

$$x_1(t) = y(t)\,, \quad x_2(t) = \dot{y}(t)\,, \quad x_3(t) = \ddot{y}(t)\ , \quad \ldots$$

$$\ldots\ , \quad x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t)\ , \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)\,, \tag{5.3.2}$$

к равносильной системе линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)\,, \\ \dot{x}_n(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}(t)}{a_n(t)} x_k(t) + \dfrac{b(t)}{a_n(t)}\,. \end{array}\right. \tag{5.3.3}$$

Или в матричном виде

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|\,,$$

где

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_1(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_2(t)}{a_n(t)} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\|,$$

$$\|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t)/a_n(t) \end{array} \right\| \,, \quad \|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| .$$

Формулы (5.3.2) и (5.3.3) позволяют делать заключения о свойствах уравнений вида (5.3.1) и их решений, используя результаты, полученные в §§ 5.1-5.2 для систем линейных уравнений.

Если на Ω $b(t) \equiv 0$, то есть, уравнение

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0 \tag{5.3.4}$$

является *однородным*, то система (5.3.3) также линейная, однородная и имеющая вид

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)\,, \\ \dot{x}_n(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}(t)}{a_n(t)} x_k(t)\,. \end{array}\right. \tag{5.3.5}$$

И, соответственно, матричную форму

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\| \ ,$$

Вначале убедимся, что справедлива

Лемма 5.3.1 **При замене переменных (5.3.2) линейно зависимые решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно зависимые решения системы (5.3.5), и наоборот.**

Аналогично, при замене переменных (5.3.2) линейно независимые решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно независимые решения системы (5.3.5), и наоборот.

Доказательство.

Пусть частные решения $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_k(t)$ уравнения (5.3.4) линейно зависимые, то есть существуют, не равные одновременно нулю, числа λ_1, λ_2, ... , λ_k такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i(t) \equiv 0 \, . \tag{5.3.6}$$

Дифференцируя последовательно это равенство $n-1$ раз, получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^{(m)}(t) \equiv 0 \, , \quad \text{где } m = [1, n-1] \, . \tag{5.3.7}$$

Причем равенства (5.3.6) и (5.3.7) можно записать, использовав (5.3.2), в векторном виде как

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o}, \tag{5.3.8}$$

означающее линейную зависимость вектор-функций $\{ \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots , \vec{x}_{(k)}(t) \}$ – частных решений однородной системы (5.3.5).

Обратно, пусть частные решения системы (5.3.5) $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(k)}(t)\}$ линейно зависимы, то есть, верно векторное равенство (5.3.8) при λ_i, $i = [1, k]$, не равных нулю одновременно.

Тогда, взяв из его покоординатной записи первую строку, получим (с учетом формул замены (5.3.2)) равенство (5.3.6). Значит, частные решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... , $y_k(t)$ уравнения (5.3.4) линейно зависимые.

Доказательство второй части утверждения леммы полностью аналогично доказательству первой части.

`Лемма доказана.`

Вид общего решения однородного уравнения (5.3.4) описывает

`Теорема 5.3.1` **Пусть функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... , $y_n(t)$ суть линейно независимые частные решения однородного уравнения (5.3.4). Тогда общее решение этого уравнения дается формулой**

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(t),$$

где C_1, C_2, ... , C_n – произвольные постоянные.

`Доказательство.`

Следует непосредственно из теоремы 5.2.1 и леммы 5.3.1.

`Теорема доказана.`

По аналогии с определением 5.2.1 будет уместным и

`Определение 5.3.1`	*Фундаментальной системой решений* уравнения (5.3.4) называется совокупность любых n его линейно независимых частных решений.

При этом будет иметь место

Теорема 5.3.2 **Для множества частных решений однородного уравнения (5.3.4) справедливы утверждения:**

1°. Фундаментальные системы этого уравнения существуют.

2°. Общее решение уравнения (5.3.4) есть произвольная линейная комбинация фундаментального набора решений.

3°. Множество всех частных решений однородного уравнения (5.3.4) является $n-$мерным линейным пространством, базисом в котором может служить любая фундаментальная система решений.

Доказательство.

Следует из леммы 5.2.1, теоремы 5.2.1 и леммы 5.3.1.

Теорема доказана.

Учитывая замену переменных (5.3.2), для уравнения (5.3.1) можно дать

Определение 5.3.2 *Вронскианом* системы $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}$ называется определитель вида

$$\det \left\| \begin{array}{cccc} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| ,$$

обозначаемый, как и раньше, $W(t)$.

Перечислим теперь свойства решений однородного уравнения (5.3.4), описываемые с помощью понятия вронскиана.

Теорема 5.3.3 **Пусть функции $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_n(t)$ определены и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы $\forall t \in \Omega$ и $W(t)$ их вронскиан. Тогда**

1°. Если $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_n(t)$ линейно зависимы на Ω, то $W(t) \equiv 0 \ \forall t \in \Omega$.

2°. Если $W(t) \not\equiv 0 \ \forall t \in \Omega$, то $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_n(t)$ линейно независимы на Ω.

3°. Частные решения однородного уравнения (5.3.4) $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_n(t)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда и их вронскиан тождественно равен нулю, то есть $W(t) \equiv 0 \ \forall t \in \Omega$.

4°. Если $y_1(t), y_2(t), \ldots , y_n(t)$ частные решения однородного уравнения (5.3.4), то $\forall t_0, t \in \Omega$ справедлива формула Лиувилля–Остроградского

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)}\, du \right) .$$

Доказательство.

Следует из лемм 5.1.3 и 5.3.1, теорем 5.1.2 и 5.2.3, поскольку для уравнения (5.3.3) и системы (5.3.4) имеет место равенство

$$\mathrm{Sp}\|A(t)\| = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (5.3.1). Структуру его общего решения описывает

Теорема 5.3.4 **Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5.3.1) есть сумма** *любого частного* **решения этого неоднородного уравнения и** *общего* **решения однородного уравнения (5.3.4).**

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы 5.1.1.

Теорема доказана.

Как и в случае неоднородной системы (5.3.3), частное решение неодногодного уравнения может быть найдено методом *вариации постоянных.*

Теорема 5.3.5 **Пусть частные решения однородного уравнения (5.3.4) $\{y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)\}$ образуют фундаментальную систему, тогда неоднородное уравнение (5.3.1) имеет частное решение вида**

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) y_k(t)\,, \tag{5.3.9}$$

где функции $C_k(t),\ k = [1, n]$ определяются как квадратуры решений системы линейных уравнений

$$\left\| \begin{array}{cccc} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot y_1(t) & \dot y_2(t) & \dots & \dot y_n(t) \\ \ddot y_1(t) & \ddot y_2(t) & \dots & \ddot y_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot C_1(t) \\ \dot C_2(t) \\ \dot C_3(t) \\ \dots \\ \dot C_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dfrac{b(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\| \tag{5.3.10}$$

Доказательство.

Следует из того, что метод доказательства теоремы 2.5.1 (для линейного уравнения $n-$го порядка с постоянными коэффициентами) без каких-либо ограничений применим в случае дифференциального уравнения (5.3.1).

Теорема доказана.

Проиллюстрируем практическое применение изложенной в данном параграфе теории следующим примером.

Задача 5.3.1 Найти общее решение уравнения

$$t^2\ddot{y} - t(t+3)\dot{y} + (2t+3)y = t^4$$

Решение: Поскольку общих регулярных методов отыскания частных решений уравнений типа

$$t^2\ddot{y} - t(t+3)\dot{y} + (2t+3)y = 0 \tag{5.3.11}$$

не существует, попробуем подобрать одно из частных решений в виде алгебраического многочлена степени m, то есть в виде $y(t) = t^m + \ldots$.

Подставляя это выражение в (5.3.11), получаем

$$(-m+2)t^{m+1} + \ldots = 0$$

и, приравняв нулю коэффициент при t^{m+1} , найдем, что $m = 2$. Значит, частное решение имеет смысл искать в виде $y(t) = t^2 + pt + q$. Если эту формулу подставить снова в (5.3.11), то уравнение примет вид

$$t^2(p-1) + q(2t+3) = 0\,,$$

откуда следует, что $p = 1$ и $q = 0$, то есть, одно частное решение уравнения (5.3.11) найдено:

$$y_1(t) = t^2 + t\,.$$

Поскольку найденное частное решение не равно тождественно нулю, то для отыскания $y_2(t)$ – второго частного решения уравнения (5.3.11), можно использовать формулу Лиувилля-Остроградского, приведенную в пункте 4° теоремы 5.3.3. Запишем эту формулу в виде

$$\det\left\|\begin{array}{cc} t^2+t & y_2(t) \\ 2t+1 & \dot{y}_2(t) \end{array}\right\| = C\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u+3}{u}du\right)\,,$$

что (покажите это самостоятельно!) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2(t)}{t^2+t}\right) = \frac{Cte^t}{(t+1)^2}.$$

Затем, используя равенство

$$\frac{d}{dt}\,\frac{e^t}{t+1} = \frac{te^t}{(t+1)^2},$$

получаем второе частное решение $y_2(t) = te^t$.

Нетрудно убедиться, что пара частных решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ образует фундаментальную систему для уравнения (5.3.11). Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1(t^2+t) + C_2te^t \ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные константы.

Найдем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения, в виде

$$y^*(t) = C_1(t)(t^2+t) + C_2(t)te^t \ , \tag{5.3.12}$$

то есть, используя метод вариации постоянных.

В решаемой задаче система линейных уравнений (5.3.10) записывается так

$$\left\| \begin{array}{cc} t^2+t & te^t \\ 2t+1 & (t+1)e^t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ t^2 \end{array} \right\|$$

Ее решениями являются функции

$$\dot{C}_1(t) = -1 \quad \text{и} \quad \dot{C}_2(t) = (t+1)e^{-t}\,.$$

Соответственно

$$C_1(t) = -t \quad \text{и} \quad C_2(t) = -(t+2)e^{-t}\,.$$

Теперь находим частное решение неоднородного уравнения по формуле (5.3.12)

$$y^*(t) = -t^3 - 2(t^2 + t)\,,$$

что позволяет записать общее решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y(t) = C_1(t^2 + t) + C_2te^t - t^3\ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные константы.

5.4. Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Как уже отмечалось, в большинстве случаев решения линейного уравнения с переменными коэффициентами не выражаются даже в квадратурах. Поэтому важными оказываются косвенные методы, позволяющие делать заключения о свойствах таких решений без построения их явного вида, определяемого теоремой 5.3.4.

Например, если для простого уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0\,, \tag{5.4.1}$$

имеем $a_0(t) > 0\,, t \in \Omega\,$, то (согласно известной из курса математического анализа теореме) можно утверждать, что при $y > 0$ график любого частного решения на Ω будет иметь выпуклость вверх, поскольку в этом случае

$$\ddot{y} = -a_0(t)y < 0\,.$$

Менее очевидные, но также практически полезные методы могут быть применены для исследования *нулей решений*, то есть значений независимой переменной t, для которых искомая функция принимает нулевое значение. Далее будем рассматривать линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,, \tag{5.4.2}$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)\, t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0$.

Вначале убедимся, что уравнение (5.4.2) может быть приведено к виду (5.4.1) при помощи линейной замены искомой функции по формуле $y(t) = p(t)u(t)$, где $u(t)$ – новая неизвестная функция, а

$$p(t) = \exp\left(-\frac{a_1(t)}{2a_2(t)}\right). \tag{5.4.3}$$

Действительно, если в уравнение (5.4.2) подставить $y(t) = p(t)u(t)$, то мы получим

$$\big(a_2 p\, \ddot{u} + 2a_2 \dot{p}\, \dot{u} + a_2 \ddot{p}\, u\big) + \big(a_1 p\, \dot{u} + a_1 \dot{p}\, u\big) + a_0 p\, u = 0$$

или

$$a_2 p\, \ddot{u} + \big(2a_2 \dot{p} + a_1 p\big)\dot{u} + \big(a_2 \ddot{p} + a_1 \dot{p} + a_0 p\big)u = 0\,,$$

то есть, получаем уравнение, не содержащее слагаемого с $\dot{u}$, поскольку выбранная по формуле (5.4.3) функция $p(t)$ удовлетворяет легко проверяемому равенству $2a_2\dot{p} + a_1 p = 0$.

Для уравнения (5.4.1) справедлива

Лемма 5.4.1 **Всякое ненулевое решение уравнения (5.4.1) может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке.**

Доказательство.

Предположим, что *нетривиальное* (то есть $y(t) \not\equiv 0$) непрерывно дифференцируемое решение уравнения (5.4.1) имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ бесконечное число нулей, образующих числовую последовательность $\{t_m\}$. Эта последовательность по теореме Больцано-Вейерштрасса имеет предельную точку $t^* \in [\alpha, \beta]$, причем без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{m\to\infty} t_m = t^*. \tag{5.4.4}$$

Тогда из непрерывности $y(t)$, из $y(t_m) = 0$ следует $y(t^*) = 0$.

С другой стороны, в силу $y(t_m) = y(t_{m+1}) = 0$ по теореме Ролля на каждом интервале (t_m, t_{m+1}) найдется точка θ_m такая, что $\dot{y}(\theta_m) = 0$. Тогда для непрерывно дифференцируемой $y(t)$ из (5.4.4) следует, что $\dot{y}(t^*) = 0$.

Из условий $y(t^*) = 0$ и $\dot{y}(t^*) = 0$ по теореме единственности решения задачи Коши получаем, что $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$. Однако, это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.4.1 **На отрезке, где $a_0(t) \le 0$, любое нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (5.4.1) может обратиться в нуль не более, чем в одной точке.**

Доказательство.

Пусть на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено неравенство $a_0(t) \le 0$. Согласно лемме 5.4.1 на этом отрезке у $y(t)$ может быть только конечное число нулей. Допустим, что их не меньше двух и возьмем два соседних $\alpha < \beta$.

Без ограничения общности можно считать, что решение $y(t) > 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$. Мы имеем $y(\alpha) = 0$ и $\dot{y}(\alpha) \ne 0$ (иначе возникает противоречие с теоремой единственности), поэтому $\dot{y}(\alpha) > 0$.

С другой стороны, $\ddot{y} = -a_0(t)\, y \ge 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$. Значит и $\dot{y}(t) > 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$. Но тогда $y(t)$ возрастает на $[\alpha, \beta]$ и $y(\beta) > y(\alpha) = 0$, а это противоречит сделанному предположению о том, что $y(\beta) = 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что для случая $a_0(t) > 0$ оценка числа нулей решений уравнения (5.4.1) может оказаться более сложной задачей. Например, на промежутке $[1, +\infty)$ у уравнения

$$\ddot{y} + \frac{1}{4t^2} y = 0$$

общее решение $y(t) = C_1\sqrt{t} + C_2\sqrt{t}\ln t$ имеет не более одного нуля. В то время как у уравнения

$$\ddot{y} + \frac{1}{t^2}y = 0$$

число нулей его общего решения

$$y(t) = C_1\sqrt{t}\sin(\sqrt{3}\ln\sqrt{t}) + C_2\sqrt{t}\cos(\sqrt{3}\ln\sqrt{t})$$

имеет на этом промежутке неограничено.

Теорема 5.4.2 (О чередовании нулей) **В промежутке между любыми двумя соседними нулями одного из двух линейно независимых решений уравнения (5.4.2) содержится ровно один нуль другого решения.**

Доказательство.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ два линейно независимых решения уравнения (5.4.2). У этих решений не может быть общих нулей, поскольку из $y_1(t^*) = y_2(t^*) = 0$ следует, что их вронскиан $W(t^*) = 0$ и такие решения линейно зависимые.

Предположим, что $y_2(\alpha) = y_2(\beta) = 0$ и на интервале (α, β) нет нулей $y_1(t)$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеем $y_1(t) \neq 0$ и $W(t) \neq 0$. Заметим, что в этом случае производная

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right) = \frac{\dot{y}_2(t)y_1(t) - y_2(t)\dot{y}_1(t)}{y_1^2(t)} = \frac{W(t)}{y_1^2(t)}$$

знакопостоянна и, следовательно, функция $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ строго монотонна, что невозможно при $y_2(\alpha) = y_2(\beta) = 0$.

Итак, на интервале (α, β) есть нули решения $y_1(t)$. Согласно лемме 5.4.1 их число конечное. При этом, если их больше одного, то в промежутках между ними отсутствуют нули решения $y_2(t)$, что, как показано выше, невозможно. Значит, между каждыми соседними нулями решения $y_2(t)$ имеется ровно один нуль решения $y_1(t)$.

Теорема доказана.

Для линейных уравнений порядка большего, чем два ($n > 2$) теорема 5.4.2, вообще говоря, не верна. Например, для линейно независимых решений $y_1(t) = \sin t$ и $y_2(t) \equiv 1$ уравнения $\dddot{y} + \dot{y} = 0$ чередования нулей нет.

Теорема 5.4.3 (Сравнения) **Пусть функции $a_0(t)$ и $A_0(t)$ непрерывны и таковы, что $A_0(t) \geq a_0(t) \ \ \forall t \in [\alpha, \beta]$.**

Тогда в промежутке между соседними нулями t_1 и t_2 любого нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + a_0 y = 0 \tag{5.4.5}$$

имеется по крайней мере один нуль любого нетривиального решения уравнения

$$\ddot{z} + A_0 z = 0\,, \tag{5.4.6}$$

или же $z(t_1) = z(t_2) = 0$ и $A_0(t) \equiv a_0(t)\, \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство.

Пусть $y(t_1) = y(t_2) = 0$ и, кроме того, $y(t) \neq 0\,, \quad z(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2)$. Без ограничения общности будем считать, что $y(t) > 0$ и $z(t) > 0$ на этом интервале. Тогда

$$\dot{y}(t_1) = \lim_{t \to t_1 + 0} \frac{y(t)}{t - t_1} \geq 0\,, \quad \dot{y}(t_2) = \lim_{t \to t_2 - 0} \frac{y(t)}{t - t_2} \leq 0\,.$$

В силу теоремы единственности эти производные не могут быть нулевыми и потому $\dot{y}(t_1) > 0$ и $\dot{y}(t_2) < 0$.

Умножая обе части уравнения (5.4.5) на $z(t)$, а обе части (5.4.6) на $-y(t)$ и складывая их почленно, получим

$$\ddot{y}z - \ddot{z}y = \big(A_0(t) - a_0(t)\big)y(t)z(t)\,.$$

Полученное равенство можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\big(\dot{y}z - \dot{z}y\big) = \big(A_0(t) - a_0(t)\big)y(t)z(t)\,.$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_1 до t_2 и учитывая, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$, получаем

$$\dot{y}(t_2)z(t_2) - \dot{z}(t_1)y(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(A_0(t) - a_0(t) \Big) y(t)z(t)\,dt\,.$$

Правая часть этого равенства очевидно неотрицательная, в силу

$$A_0(t) \geq a_0(t),\ y(t)z(t) > 0 \ \ \forall t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Если хотя бы одно из условий $z(t_1) = 0$ и $z(t_2) = 0$ не выполняется, то левая часть отрицательна и мы получаем противоречие, означающее, что предположение

$$z(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (t_1, t_2)$$

не верно.

Теорема доказана.

В математической литературе теоремы 5.4.2 и 5.4.3 часто именуются как *теоремы Штурма.*

Проиллюстрируем применение теоремы Штурма следующим несложным примером

Задача 5.4.1 Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + 2ty = 0 \quad \text{для} \quad t \in [20,\,45]\,. \tag{5.4.7}$$

Решение: По условию задачи $a_0(t) = 2t$. Пусть $\omega^2 \leq a_0(t) \leq \Omega^2$ на указанном в условии задачи промежутке $t \in [20,\,45]$. Сравним решения данного уравнения с решениями уравнений с постоянными коэффициентами

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0,\ \omega > 0 \ \text{ и} \tag{5.4.8}$$

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0,\ \Omega > 0\,, \tag{5.4.9}$$

решения которых представимы соответственно в виде

$$z(t) = C_1 \sin(\omega t + C_2) \quad \text{и}$$

$$z(t) = C_1 \sin(\Omega t + C_2) \ .$$

Рассмотрим вначале пару уравнений (5.4.7) и (5.4.8). Пусть t_{1z} и t_{2z} последовательные нули уравнения (5.4.8), то есть $t_{2z} = t_{1z} + \dfrac{\pi}{\omega}$, а t_{1y} и t_{2y} последовательная пара нулей уравнения (5.4.7) на промежутке $[t_{1z}, t_{2z}]$. По теореме Штурма имеем

$$t_{1z} \le t_{1y} < t_{2y} \le t_{2z} \, .$$

Откуда получаем оценки

$$t_{2y} \le t_{2z} = t_{1z} + \frac{\pi}{\omega} \le t_{1y} + \frac{\pi}{\omega}.$$

И, окончательно,

$$t_{2y} - t_{1y} \le \frac{\pi}{\omega}. \tag{5.4.10}$$

Рассмотрев пару уравнений (5.4.7) и (5.4.9), получаем путем аналогичных рассуждений оценку

$$t_{2y} - t_{1y} \ge \frac{\pi}{\Omega}. \tag{5.4.11}$$

Вернемся теперь к условию исходной задачи и рассмотрим два крайних значения параметра: ω и Ω, для которых

$$0 < \ \omega^2 = 40 \ \le \ 2t \ \le \ 90 = \Omega^2 \, , \quad \forall t \in [20, \, 45] \, .$$

Для указанного промежутка t расстояние d между соседними нулями исходного уравнения (5.4.7) в силу оценок (5.4.10) и (5.4.11) будет удовлетворять системе неравенств

$$\frac{\pi}{\Omega} \le d \le \frac{\pi}{\omega} \, .$$

Откуда получаем искомую оценку

$$0.3 < \frac{\pi}{3\sqrt{10}} \le d \le \frac{\pi}{2\sqrt{10}} < 0.5\ .$$

5.5. Решение дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Уравнение Бесселя

Известно, что решения линейных уравнений, коэффициенты которых выражаются через элементарные функции, вообще говоря, не только не являются элементарными, но и даже не представляются в квадратурах. В таком случае целесообразно попытаться искать решения в более общем, чем квадратуры, виде: а именно, в виде некоторого функционального ряда, используя для этой цели *аналитическую теорию дифференциальных уравнений.*

Одна из центральных теорем этого раздела математики утверждает, что, если все коэффициенты линейного однородного уравнения (5.3.4) *аналитичны*, то есть представимы в виде степенных рядов в некотором круге комплексной плоскости $|\,t - t_0| < R$, то каждое решение этого уравнения разлагается в этом же круге в степенной ряд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (t - t_0)^k$$

Напомним, что аналитические функции внутри круга сходимости можно дифференцировать любое число раз, и радиус круга сходимости при этом меняться не будет. [2]

В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что $t_0 = 0$. Особенности использования предлагаемого подхода рассмотрим для случая уравнения второго порядка (5.4.2) на примере следующих задач.

[2]Подробно основы теории аналитических функций рассматриваются в курсе ТФКП.

`Задача 5.5.1` Найти общее решение *уравнения Эйри*

$$\ddot{y} - ty = 0\,. \tag{5.5.1}$$

`Решение:` Решение уравнения (5.5.1) ищем в виде ряда

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k\,, \tag{5.5.2}$$

априорно предполагая его сходящимся.
Подставляя в уравнение (5.5.1), полученное формальным дифференцированием выражение

$$\ddot{y}(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2}\,,$$

получаем равенство

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^{k+1} = 0\,.$$

После замены индексов суммирования и пределов их изменения:

— в первой сумме меняем $k-2$ на m с пределами изменения $0 \le m < +\infty$,

— во второй сумме меняем $k+1$ на m с пределами изменения $1 \le m < +\infty$,

приводим уравнение к виду

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)(m+2)\alpha_{m+2} t^m - \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{m-1} t^m = 0$$

или, окончательно,

$$2\alpha_2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \Big((m+1)(m+2)\alpha_{m+2} - \alpha_{m-1} \Big) t^m = 0\,.$$

Поскольку из равенства нулю суммы сходящегося ряда следует равенство нулю всех его коэффициентов, то получаем

$$\alpha_2 = 0\,, \quad (m+1)(m+2)\alpha_{m+2} - \alpha_{m-1} = 0\,,$$

что дает рекуррентные соотношения

$$\alpha_2 = 0\,, \quad \alpha_{m+2} = \frac{\alpha_{m-1}}{(m+1)(m+2)} \quad \forall m \ge 1\,.$$

Важно отметить, что коэффициенты α_0 и α_1 пока не определены, но их значения могут быть произвольными.

Чтобы гарантировать нетривиальность построенного решения, положим $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, что равносильно заданию начальных условий для задачи Коши $y(0) = 1$ и $\dot{y}(0) = 0$. Тогда отличными от нуля будут (проверьте!) лишь коэффициенты с индексами $3k$ и мы получаем решение вида

$$y_{(1)}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\ldots\big((3k-1)\cdot 3k\big)}\,. \qquad (5.5.3)$$

Второе нетривиальное решение строится аналогично с $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. В этом случае отличными от нуля оказываются лишь коэффициенты с индексами $3k+1$, и решение имеет вид

$$y_{(2)}(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\ldots\big(3k\cdot(3k+1)\big)}\,. \qquad (5.5.4)$$

Каждый из рядов (5.5.3) и (5.5.4) сходится (по признаку д'Аламбера) при любом вещественном t. Следовательно, их можно почленно дифференцировать и непосредственной подстановкой убедиться в том, что $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ суть решения уравнения Эйри.

Эти решения представимы в виде рядов, содержащих не совпадающие по порядку степени t. Поэтому они очевидно *линейно независимые* и образуют фундаментальную систему для уравнения (5.5.1). Значит, его общее решение имеет вид

Решение получено.

$$y(t) = C_1 y_{(1)}(t) + C_2 y_{(2)}(t) \quad \forall \{C_1,\, C_2\} \in R\,.$$

Рассмотренный выше пример показывает, что в случае аналитичности функций, присутствующих в записи уравнения (5.4.2), для построения решения можно попытаться применить метод неопределенных коэффициентов. Если же коэффициенты уравнения (5.4.2) аналитичны не во всех точках $t \in \Omega$, то описываемая схема решения может усложниться. Поясним это следующим примером, дав предварительно,

Определение 5.5.1	Точка $t_0 \in \Omega$ называется *обыкновенной точкой* уравнения (5.4.2), если все коэффициенты уравнения аналитичны в этой точке. Иначе, точка $t_0 \in \Omega$ называется *особой точкой* уравнения (5.4.2).

При наличии особых точек у коэффициентов уравнения (5.4.2) упомянутая основная теорема теории аналитических функций уже не является справедливой, и его решение придется искать в более сложном, чем степенной ряд, виде.

Например, в приложениях достаточно часто возникает необходимость решения так называемого *уравнения Бесселя*:

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - p^2)y = 0\,, \tag{5.5.5}$$

где p – некоторый действительный параметр.

Попробуем искать решения уравнения Бесселя (5.5.5) в виде степенного ряда

$$y(t) = t^{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k t^k\,, \quad \alpha_0 \neq 0\,. \tag{5.5.6}$$

Подставляя это выражение в (5.5.5), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big((k+\lambda)(k+\lambda-1) + (k+\lambda) + (t^2 - p^2)\Big)\alpha_k t^{k+\lambda} = 0\,,$$

которое можно записать так

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big((k+\lambda)^2-p^2\Big)\alpha_k t^{k+\lambda}+\sum_{m=0}^{+\infty}\alpha_m t^{m+\lambda+2}=0\,.$$

Приравнивая последовательно нулю коэффициенты при всех различных степенях t, получаем систему равенств

$$\begin{aligned}
&(\lambda^2-p^2)\alpha_0=0\,,\\
&\big((\lambda+1)^2-p^2\big)\alpha_1=0\,,\\
&\big((\lambda+2)^2-p^2\big)\alpha_2+\alpha_0=0\,,\\
&\big((\lambda+3)^2-p^2\big)\alpha_3+\alpha_1=0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\big((\lambda+k)^2-p^2\big)\alpha_k+\alpha_k-2=0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,.
\end{aligned}$$

Очевидно, что из $\alpha_0\neq 0$ следует $\lambda=\pm p$. Кроме того $\alpha_1=0$, откуда и все $\alpha_{2k+1}=0\,\forall k=1,2,3,\ldots$.

Рассмотрим вначале случай, когда $\lambda=p>0$. Для коэффициентов α_{2k} $\forall k=1,2,3,\ldots$ при этом получаем формулу

$$\alpha_{2k}=\frac{(-1)^k\alpha_0}{2^{2k}(p+1)(p+2)\ldots(p+k)k!}\,,$$

которую можно записать, использовав такие известные соотношения для гамма-функции Эйлера, как

$$\Gamma(k+1)=k!\quad\text{ и }\quad\Gamma(p+k+1)=(p+1)(p+2)\ldots(p+k)\Gamma(p+1)\,,$$

в виде

$$\alpha_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\,\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)}\,.$$

Заметим, что при этом ради упрощения данной формулы было выбрано конкретное значение параметра $\alpha_0=\dfrac{1}{2^p\,\Gamma(p+1)}$. Это однако (как будет видно из дальнейшего) не приведет к потере общности рассуждений.

Для найденных значений коэффициентов α_k ряд (5.5.6) сходится по признаку д'Аламбера (проверьте это самостоятельно!) для всех вещественных t. Его предельная функция

$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\,\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)}\, t^{2k+p}\ , \quad p \geq 0 \tag{5.5.7}$$

является частным решением уравнения уравнения (5.5.5) и называется *функцией Бесселя первого рода порядка* $p \geq 0$.

При нецелом $\lambda = -p < 0$ получается другое частное решение уравнения Бесселя (5.5.5), если в формуле (5.5.7) значение p заменить на $-p$, поскольку само уравнение (5.5.5) при такой подстановке не изменится. Это решение имеет вид

$$J_{-p}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-p}\,\Gamma(k+1)\Gamma(-p+k+1)}\, t^{2k-p}\ , \quad p > 0$$

и называется *функцией Бесселя первого рода порядка* $-p$.

Функции $J_p(t)$ и $J_{-p}(t)$ при нецелом $p > 0$, очевидно, линейно независимые, поскольку представляющие их ряды начинаются со степеней t различного порядка. Значит, эти функции образуют фундаментальную систему решений и общее решение уравнения Бесселя описывается формулой

$$y(t) = C_1 J_p(t) + C_2 J_{-p}(t)\ .$$

Если $p = n$ целое, то общее решение уравнения Бесселя имеет иной вид. Дело в том, что в этом случае из свойств гамма-функции Эйлера следует, что $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ и функции Бесселя первого рода не образуют фундаментальную систему решений, поскольку они являются линейно зависимыми.

Частное решение, линейно независимое с $J_n(t)$, можно построить по формуле Лиувилля-Остроградского. Это решение, обозначаемое обычно $Y_n(t)$, называется *функцией Бесселя второго рода порядка* n. Таким образом общее решение уравнения Бесселя для целого значения p имеет вид

$$y(t) = C_1 J_p(t) + C_2 Y_p(t)\ .$$

Из свойств функции Бесселя второго рода отметим (без доказательства), что при $t \to 0$ справедливы оценки

$$Y_0(t) \sim \mathrm{C}_0 \ln t \quad \text{и} \quad Y_n(t) \sim \frac{\mathrm{C}_n}{t^n}\ , \ \ n \in \mathcal{N}\ ,$$

из которых следует, что $Y_n(t)$ неограничена в окрестности точки $t = 0$.

Рассмотрим теперь, как ведут себя ограниченные решения уравнения Бесселя при больших значениях их аргумента, то есть при $t \to +\infty$.

При помощи формулы (5.4.3), то есть замены $y(t) = \dfrac{u(t)}{\sqrt{t}}$, это уравнение может быть приведено к виду, не содержащему первой производной от неизвестной функции

$$\ddot{u} + \left(1 - \frac{p^2 - 1/4}{t^2}\right) u = 0\,, \tag{5.5.9}$$

которое можно записать как

$$\ddot{u} + u = F(t)u\,, \tag{5.5.10}$$

где $F(t) = 1 - \dfrac{p^2 - 1/4}{t^2}$.

Предположим, что функция $u(t)$ в правой части уравнения (5.5.10) нам известна, тогда это уравнение можно привести к интегральной форме методом, аналогичному использованному при доказательстве теоремы 2.5.1 *методу неопределенных коэффициентов*.

Конкретно: поскольку общее решение однородного уравнения $\ddot{u} + u = 0$ есть $C_1 \cos t + C_2 \sin t$, частное решение неоднородного уравнения (5.5.10) можно представить в виде $C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$, где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = 0\,, \\ -\dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = F(t)u(t) \end{cases}$$

в виде интегралов с переменными верхними пределами

$$C_1(t) = -\int\limits_{+\infty}^{t} F(v)u(v)\sin v\, dv \quad \text{и} \quad C_2(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} F(v)u(v)\cos v\, dv\,.$$

В результате получаем интегральное уравнение вида

$$u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \int\limits_{t}^{+\infty} \sin(t - v)F(v)u(v)\, dv\,,$$

из которого, в силу $|u(t)| \le A$ – предположения об ограниченности $u(t)$, следуют интересующие нас оценки.

$$|u(t) - C_1\cos t - C_2\sin t| = \left|\int\limits_t^{+\infty} \sin(t-v)F(v)u(v)\,dv\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^{+\infty} AF(v)\,dv\right| \le A\left|\int\limits_t^{+\infty} \frac{dv}{v^2}\right| = \frac{A}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ при } t \to +\infty\,.$$

Следовательно, уравнение (5.5.10) имеет решения

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{и} \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

при $t \to +\infty$, а, соответственно, уравнение Бесселя (5.5.5) решения

$$y_1(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) \quad \text{и} \quad y_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right).$$

Завершая обсуждение асимптотических свойств уравнения Бесселя, отметим, что данное уравнение в окрестности точки $t = +\infty$ неограниченных вещественных решений не имеет. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Использование степенных рядов для получения приближенных описаний решений дифференциальных уравнений на практике осложняется тем обстоятельством, что малые изменения в записи уравнения или в дополнительных условиях (начальных, краевых и т.д.), вообще говоря, могут приводить к не малым изменениям в решениях. В этих случаях принято говорить о нерегулярности (некорректности) постановки задачи, а сами малые изменения условий называть *сингулярными возмущениями.*

Хотя изучение свойств таких задач и методов их решений не является составной частью нашего курса, ввиду важности их для приложений представляется целесообразным рассмотреть конкретный пример задачи содержащей в своем условии сингулярное возмущение.

Задача 5.5.2 Найти $y(t,\varepsilon)$ – решение краевой задачи, где ε – малый параметр и $t \in [\,0,1]$,

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + y = F(t)\,, \tag{5.5.11}$$

при условиях

$$y(0) = 0 \quad \text{и} \quad y(1) = 1 \tag{5.5.12}$$

для

а) $F(t) = 1$,
б) $F(t) = 1 + t$.

Решение: 1°. Рассмотрим вначале случай $F(t) = 1$. В качестве частного решение уравнения (5.5.11) очевидно можно взять функцию $y(t) = 1$. Тогда его общее решение будет

$$y(t,\varepsilon) = 1 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы, а λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\varepsilon\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, равные соответственно

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\,.$$

Для определения значений констант C_1 и C_2 используем краевые условия (5.5.12), из которых следует, что

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ e^{\lambda_1}C_1 + e^{\lambda_2}C_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$C_1 = -\frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}$$

и находим решение краевой задачи

$$y(t,\varepsilon) = 1 - \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}e^{\lambda_1 t} + \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}e^{\lambda_2 t}\ ,$$

где $t \in [\,0,1]$.

2°. Исследуем теперь асимптотическое поведение найденного решения краевой задачи при $\varepsilon \to 0$. Для λ_1 и λ_2 имеем соответственно оценки

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1-4\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big) = -1 + O(\varepsilon)$$

и

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1-4\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\Big(1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big) = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon) \ .$$

Проверьте самостоятельно, что также справедливы оценки $\quad C_1 = O(\varepsilon)$, $\quad C_2 = -1 + O(\varepsilon)$, $\quad$ и

$$e^{\lambda_2 t} = \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \ , \quad t \in [\,0, 1\,], \ \ \varepsilon > 0 \ .$$

Теперь можно выписать формулу асимптотической оценки при $\varepsilon > 0$ и для решения краевой задачи

$$y(t, \varepsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \ ,$$

из которой следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} y(t, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{если} & t = 0, \\ 1, & \text{если} & t \in (\,0, 1\,]. \end{array} \right.$$

Графики функций $y(t, \varepsilon)$ для

$$\varepsilon = 0.1, \ 0.05, \ 0.025, \ 0.01, \ 0.001$$

показаны на рис. 5.1.

Исследование при $\varepsilon < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю при помощи замены переменной t на $-t$.

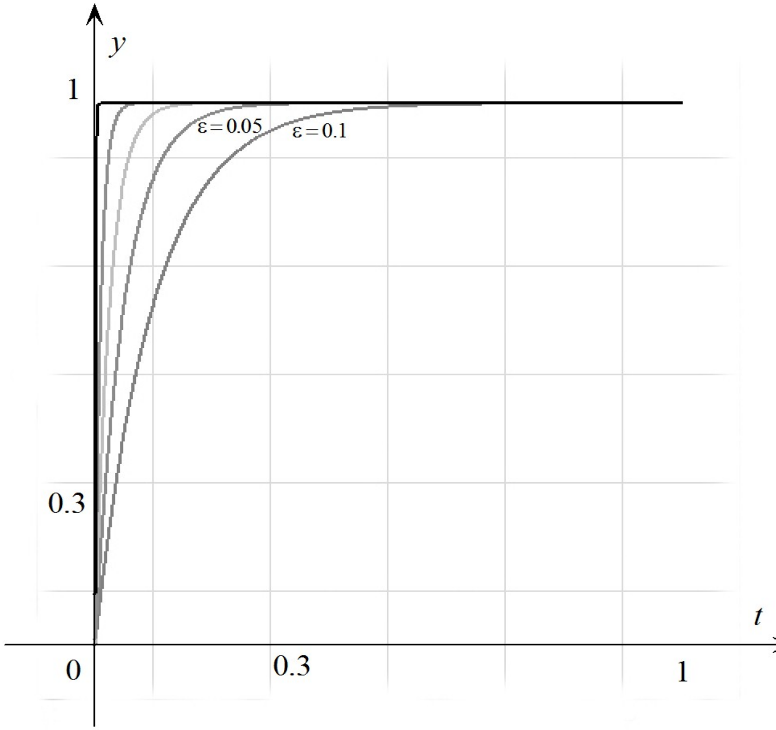


Рис. 5.1. Графики решений краевой задачи для различных $\varepsilon > 0$.

3°. Отметим важный факт, следующий из предыдущего рассмотрения: предельный переход $\varepsilon \to +0$, выполненный в *решении* задачи (5.5.11)–(5.5.12) приводит к результату, отличающемуся от результата предельного перехода в *условии* этой задачи.

Действительно, если в уравнении (5.5.11) положить $\varepsilon = 0$ и оставить лишь одно краевое условие $y(1) = 1$, то мы получим решение для уравнения первого порядка $\dot{y} + y = 1$ вида $y(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [\,0, 1\,]$. Это решение будет близко к решению задачи (5.5.11)–(5.5.12) везде на отрезке $[\,0, 1\,]$, за исключением $\varepsilon-$окрестности точки $t = 0$, где решения будут значительно отличаться.

Эту окрестность принято называть *пограничным слоем*, а отмеченное различие решений – *поведением типа пограничного слоя.* Математически природа эффекта пограничного слоя вполне очевидна: возмущенное уравнение (то есть уравнение (5.5.11) с $\varepsilon \neq 0$) есть уравнение второго порядка, в то время как невозмущенное является уравнением первого порядка, решения которого могут не удовлетворять двум различным краевым условиям.

В заключение обратим внимание на то, что эффект пограничного слоя возникает не при любом возмущении. Например, в случае б) при $F(t) = 1 + t$ решение невозмущенной задачи имеет вид $y(t) = t$ и является при этом также решением краевой возмущенной задачи при любом ε.

`Решение получено.`

Глава 6.

Системы нелинейных дифференциальных уравнений

6.1. Автономные системы уравнений и их свойства

Определение 6.1.1	*Нормальной автономной системой* дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами порядка $n \geq 2$ и неизвестной вектор-функцией $x(t)$ называется система уравнений вида $$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x \in \Omega \subseteq E^n\,, \qquad (6.1.1)$$ где вектор-функция $F(x)$ в Ω удовлетворяет условиям теоремы 4.3.1 (Коши) при $t \in T$.

Согласно данному определению независимая переменная t в условие автономной системы явно не входит. При этом отметим, что любая система вида $\dot{x} = F(t, x)$ может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной $x_{n+1}(t) = t$. Координатная форма системы (6.1.1) в этом случае пополняется $n+1$-ым уравнением $\dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1$ и принимает автономный вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = F_k(x_{n+1}, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad \forall\, k = [1, n]\,, \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1\,. \end{cases}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принято называть *фазовыми переменными.*

Пусть $x(t)$ есть некоторое частное решение системы (6.1.1), тогда вектор-функция $x(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$ параметрически задает некоторую линию в E^n, называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (6.1.1).

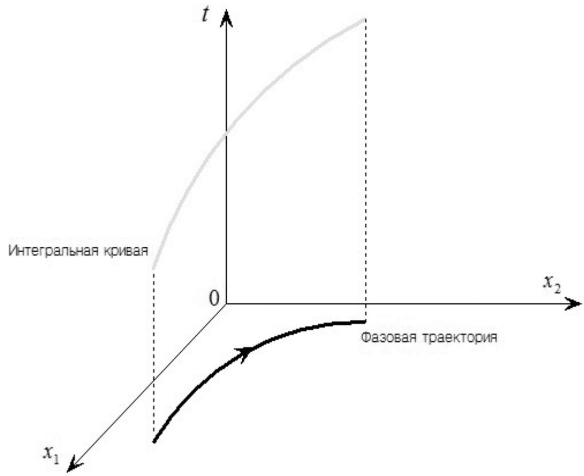


Рис. 6.1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Заметим, что фазовая траектория и интегральная кривая суть различные способы наглядного представления решений системы (6.1.1), поскольку они образованы точками пространств разных размерностей: n-мерного фазового пространства и $(n+1)$-мерного пространства, образованного векторами с координатными представлениями вида $\|\, t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \|^{\mathrm{T}}$(см. рис. 6.1).

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании координаты t.

Например, фазовые траектории и интегральные кривые автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \quad x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1\,, \end{cases}$$

каждая интегральная кривая которой есть в $E^3\{\,t, x_1, x_2\}$ винтовая (или прямая при $C_1 = 0$) линия

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(t + C_2), \end{cases}$$

в то время как фазовые траектории являются в $E^2\{x_1, x_2\}$ окружностями (или точкой) вида $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2 \quad \forall\, C_1 \geq 0$. Причем фазовой траектории с конкретным значением C_1 отвечает бесконечно много интегральных кривых с различными значениями C_2.

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

Теорема 6.1.1 **Если вектор-функция $x(t)$ есть решение автономной системы (6.1.1) при $t \in (\alpha, \beta) \subset T$, то вектор-функция $x(t + c)$ (где c такая константа, что $(\alpha - c, \beta - c) \subset T$) также является решением системы (6.1.1), но при $t \in (\alpha - c, \beta - c)$.**

Доказательство

Имеем $\dot{x}(t) \equiv F(x(t))$ при $t \in (\alpha, \beta)$. Тогда очевидно выполнение тождества $\dot{x}(t{+}c) \equiv F(x(t{+}c))$ при $t \in (\alpha{-}c,\ \beta{-}c)$, из которого и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 6.1.2 **Если фазовые траектории решений $x(t),\ t \in T_1$ и $y(t),\ t \in T_2$ автономной системы (6.1.1) имеют общую точку $a = x(t_1) = y(t_2)$, то $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$ для всех t, при которых определены обе части последнего тождества.**

Доказательство

Вектор-функция $z(t) = x(t + t_1 - t_2)$ в силу теоремы 6.1.1 является решением системы (6.1.1) для всех t таких, что $t + t_1 - t_2 \in T_1$. Кроме того,

$$z(t_2) = x(t_1) = a = y(t_2)\,.$$

Тогда по теореме единственности $z(t) \equiv y(t)$ для всех t, при которых обе части этого тождества определены.

Теорема доказана.

Из теоремы 6.1.2 следует, что фазовые траектории автономных систем либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому вектор-функцию $F(x)$ можно рассматривать в области Ω как задающую векторное поле *фазовых скоростей* , каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку $x \in \Omega$. В случае нулевой фазовой скорости используется

Определение 6.1.2

Положением равновесия или *точкой покоя* [1] системы (6.1.1) называется ее решение вида

$$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

такое, что $F(x_0) = o$.

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (6.1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве E^n, а соответствующая этому решению интегральная кривая в E^{n+1} есть прямая, параллельная оси Ot. Из определения 6.1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (6.1.1) сводится к решению конечной (не дифференциальной) системы уравнений $F(x_0) = o$.

Наконец, из теоремы 6.1.2 следует, что неособое решение не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных t. Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

[1] Используются также термины *особое решение* или *стационарное решение.*

Теорема 6.1.3 **Пусть $x(t)$, $t \in T$ – неособое решение системы (6.1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда $x(t)$ – периодическая функция.**

Доказательство

В силу условий теоремы Γ – фазовая траектория, отвечающая решению $x(t)$, есть гладкая замкнутая линия в E^n, элемент длины дуги которой равен

$$dL = |dx| = |\dot{x}(t)|dt = |F(x(t))|dt\,.$$

Рассмотрим γ – некоторую дугу линии Γ, начинающуюся в точке $x(0)$. В силу теоремы 6.1.1 для каждой ее точки остается справедливым равенство (6.1.1). В этом случае длина дуги γ для $t \in (0, P)$ при $P > 0$ определяется формулой

$$L(P) = \int\limits_0^P |F(x(t))|dt\ .$$

Поскольку точки линии Γ в своей совокупности образуют ограниченное и замкнутое множество, то для непрерывной на этом множестве функции $|F(x)|$ существуют числа m и M такие, что

$$0 < m \le |F(x)| \le M < +\infty\ .$$

Тогда в силу свойств определенного интеграла

$$mP \le L(p) \le MP.$$

Из неравенства $mP \le L(p)$ следует, что монотонно возрастающая функция $L(P)$ стремится к $+\infty$ при $P \to +\infty$.

С другой стороны, при малых $P > 0$ $L(P) \le MP < L^*$, так как дуга γ является частью линии Γ например при $P < L^*/M$, где L^* – длина Γ.

Поэтому существует (а в силу монотонности $L(P)$ единственное) число $P^* > 0$, являющееся решением уравнения

$$L(P^*) = S \qquad \text{или} \qquad S = \int\limits_0^{P^*} |F(x(t))|dt\ .$$

При $P = P^*$ γ совпадает с Γ и $x(P^*) = x(0)$, иначе γ была бы частью Γ. Значит, число P^* – наименьший положительный период вектор-функции $x(t)$.

Теорема доказана.

Из теорем 6.1.1 – 6.1.3 вытекает

Следствие 6.1.1 **Каждая фазовая траектория автономной системы (6.1.1) является либо точкой, либо незамкнутой или замкнутой линией без самопересечений.**

Доказательство

Действительно, незамкнутая траектория очевидно не имеет точек самопересечения. В случае замкнутой фазовой траектории точек самопересечения также быть не может, поскольку из равенства $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых t_1, $t_2 \in [0, P^*]$ и $|\,t_2 - t_1| < P^*$ следует, что решение $x(t)$ имеет период $P^{**} = |\,t_2 - t_1| < P^*$, что невозможно, поскольку P^* наименьший положительный период.

Следствие доказано.

Групповое свойство автономной системы (6.1.1) описывает

Теорема 6.1.4 **Пусть $x(t, \alpha)$ есть решение задачи Коши следующего вида $\dot{x} = F(x),\ x(0) = \alpha$. Тогда**

$$x(t, x(t_0, \alpha)) \equiv x(t + t_0, \alpha)$$

на любом интервале, на котором определены обе части данного тождества.

Доказательство

Вектор-функции $x(t, x(t_0, \alpha))$ и $x(t + t_0, \alpha)$ при $t = 0$ равны вектору $x(t_0, \alpha)$. По теореме единственности они совпадают для всех допустимых значений t.

Теорема доказана.

Следует отметить, что исследование поведения фазовых траекторий системы (6.1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства единообразно выполнить удается далеко не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия (соответствующие случаи будут рассмотрены в следующем параграфе). Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем, что показывает

Теорема 6.1.5 (О выпрямлении траекторий) **В малой окрестности точки $x_0 \in E^n$, не являющейся положением равновесия, система (6.1.1) может быть приведена к виду**

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1. \end{cases} \tag{6.1.2}$$

при помощи гладкой обратимой замены переменных $x = \varphi(y)$.

Доказательство

Нетрудно видеть, что решения системы (6.1.2) всегда существуют и имеют вид

$$y_1(t) = C_1\,, \;\; y_2(t) = C_2\,, \dots\,, \;\; y_{n-1}(t) = C_{n-1}\,, \;\; y_n(t) = t + C_n\,,$$

соответствующие интегральные кривые (извините за невольный каламбур) суть прямые линии в E^{n+1}.

По условию теоремы $F(x_0) \neq o$, поэтому можно считать, что конкретно $F_n(x_0) \neq 0$.

Рассмотрим в E^n гиперплоскость $x_n = x_{0n}$. Координатные представления образующих ее точек имеют вид

$$\| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_{n-1} \, x_{0n} \|^{\mathrm{T}},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ – произвольные константы. По теореме 4.3.1 (Коши) имеется некоторая, вообще говоря малая, окрестность точки x_0, в которой $x(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ – решение задачи Коши для системы (6.1.1) с начальным условием

$$x(0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = \| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_{n-1} \, x_{0n} \|^{\mathrm{T}}, \qquad (6.1.3)$$

существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по начальным условиям и очевидно проходит при $t = 0$ через точку рассматриваемой гиперплоскости.

Если сделать замену координат по формулам

$$y_1 = \xi_1, \;\; y_2 = \xi_2, \;\; \ldots \;, \;\; y_{n-1} = \xi_{n-1}, \;\; y_n = t, \qquad (6.1.4)$$

то решение системы (6.1.1) в новых координатах будет иметь вид

$$\| \, y_1 \, y_2 \, \ldots \, y_{n-1} \, y_n \|^{\mathrm{T}} = \| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_{n-1} \, t \, \|^{\mathrm{T}},$$

где ξ_k не зависят от t при $k = [1, n-1]$, который является параметрическим представлением прямой в E^{n+1}. Значит система уравнений (6.1.1) при замене (6.1.4) принимает вид (6.1.2).

Теперь остается убедиться, что для замены координат (6.1.4) будет справедлива теорема о системе неявных функций. Действительно, из (6.1.3) следует, что вектор x_0 переходит в вектор y_0 с координатным представлением

$$\| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_{n-1} \, 0 \, \|^{\mathrm{T}} = \| \, y_1 \, y_2 \, \ldots \, y_{n-1} \, 0 \, \|^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому для замены переменных $x = \varphi(y)$ в этой точке справедливы равенства

$$\begin{cases} x_i \; = \varphi_i(y_0) \; = y_{0i} \quad \forall i = [1, n-1], \\ x_n = \varphi_n(y_0) = x_{0n} \; . \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = \delta_{ij} \quad \forall i = [1, n], \ \ \forall j = [1, n-1],$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Кроме того, поскольку $x(t)$ – решение системы (6.1.1), то

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = F_i(x) \quad \forall i = [1, n].$$

Вычислим определитель матрицы Якоби для замены переменных (6.1.4)

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t)}\,.$$

Этот определитель будет равен

$$\det J = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & F_1(x_0) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & F_2(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & F_{n-1}(x_0) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & F_n(x_0) \end{array} \right\| = F_n(x_0) \neq 0.$$

Что означает применимость теоремы о системе неявных функций в рассматриваемом случае, и соответственно, приводимость системы (6.1.1) к виду (6.1.2).

`Теорема доказана.`

6.2. Устойчивость положения равновесия автономной системы

Выше было отмечено, что достижение особых точек при движении по фазовой траекториям возможно лишь при $t \to +\infty$. Это означает, что изучение поведения решений системы (6.1.1) в окрестностях таких точек требует исследования их поведения при $t \to +\infty$. Одним из самых важных пунктов этого исследования является ответ на вопрос: в каких случаях малые изменения начальных условий и правых частей системы (6.1.1) приводят к малым изменениям решений на бесконечных интервалах $(-\infty,\, \underline{T})$ и $(\overline{T},\, +\infty)$. Получением ответа на этот вопрос и занимается *математическая теория устойчивости*, в создании и развитии которой большую роль сыграли российские ученые и, в первую очередь, А. М. Ляпунов.

Пусть $x(t,a)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x(t_0) = a \in \Omega \quad \forall\, t \in [\,t_0, +\infty)\,, \tag{6.2.1}$$

а x_0 – положение равновесия (особое решение) системы (6.1.1).
Дадим следующие определения:

Определение 6.2.1	Положение равновесия x_0 называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если 1°. Найдется $\Delta > 0$ такое, что решение $x(t,a)$ задачи (6.2.1) существует на $t \in [\,t_0, +\infty)$ для любых a таких, что $\lvert\, a - x_0 \rvert < \Delta$. 2°. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ такое, что, если $\lvert\, a - x_0 \rvert \le \delta_\varepsilon$, то $\lvert\, x(t,a) - x_0 \,\rvert \le \varepsilon \quad \forall\, t \in [\,t_0, +\infty)$. Иначе положение равновесия называется *неустойчивым*.

и

Определение 6.2.2	Положение равновесия x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если 1°. Оно устойчиво по Ляпунову. 2°. При достаточно малых $\lvert\, a - x_0 \rvert$ $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t,a) = x_0$.

Для данных определений сделаем следующие замечания.

Во-первых, мы рассматриваем устойчивость по отношению лишь к *малым* отклонениям от положений равновесия.

Во-вторых, использование одних лишь определений 6.2.1 и 6.2.2 для исследования устойчивости эффективно в тех случаях, когда возможно либо построение общего решения, либо выявление таких свойств решений, как ограниченность, возрастание или убывание.

Следует также обратить внимание, что пункты 1° и 2° в определении 6.2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°. Эту особенность определения 6.2.2 иллюстрирует

`Задача 6.2.1` Устойчиво ли нулевое решение уравнения $\dot{x} = -x^2$?

`Решение:` Очевидно, что $x(t) = 0$ есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t + C}$$

где C – произвольная константа.

Заметим, что, хотя $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при $t = -C$ интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту, и $\forall C < 0$ из условия $x(0) < \delta$ условие $x(t) < \varepsilon$ при $t \in (0, +\infty)$ следовать не будет.

`Решение получено`

Наконец отметим, что понятия устойчивости и неустойчивости можно распространить как на неавтономные системы, так и на системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметров.

В главе 3 были получены формы общего решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь проблему устойчивости положений равновесия для систем (6.1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \, , \tag{6.2.2}$$

где

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{matrix} \right\| .$$

Здесь числа a_{ij} – комплексные константы.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное преобразование в унитарном пространстве U^n, имеющее собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ \lambda_n$, среди которых, быть может, имеются равные. Тогда для положения равновесия $x(t) = o$ справедлива

Теорема 6.2.1

1°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j < 0\ \ \forall\, j = [1, n]$, **то** $x(t) = o$ **асимптотически устойчиво.**

2°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j \le 0\ \ \forall\, j = [1, n]$ **и для каждого** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ **его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **устойчиво по Ляпунову.**

3°. Если имеется хотя бы одно λ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$ или хотя бы для одного λ с $\mathrm{Re}\lambda = 0$ кратность меньше размерности собственного подпространства, то $x(t) = o$ неустойчиво.

Доказательство

По теореме 3.2.4 общее решение системы (6.2.2) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{kj}(t) e^{\lambda_j t}, \quad \forall k = [1, n] \,, \tag{6.2.3}$$

где $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_q$ — все различные собственные значения матрицы $\|A\|$, а $P_{kj}(t)$ — алгебраический многочлен, степень которого на единицу меньше длины самой длинной из жордановых цепочек, отвечающих собственному значению λ_j , и коэффициенты которого выражаются через n произвольных комплексных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.
Напомним также, что для $\lambda = \alpha + i\beta$ справедливы равенства

$$P(t)e^{\lambda t} = P(t)e^{\alpha t} \left(\cos\beta t + i \sin\beta t\right) \,,$$

$$\text{причем} \quad |\cos\beta t + i \sin\beta t \,| \equiv 1 \,.$$

1°. Пусть $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall\, j = [1, n]$, тогда (известно из курса математического анализа)

$$\lim_{t\to+\infty} P_{kj}(t) e^{\lambda_j t} = 0 \,, \quad \forall k = [1, n] \,, \, \forall j = [1, q] \,.$$

Тогда каждое решение системы (6.2.2) при $t \to +\infty$ стремится к нулю и, следовательно, ограничено на $t \in [t_0, +\infty)$.

Эти утверждения очевидно верны и для фундаментальных (базисных) решений, служащих столбцами фундаментальной матрицы $\|X\|$, норма которой также оказывается ограниченной, то есть

$$\exists M > 0 \,:\, \langle \, \|X\| \, \rangle \leq M.$$

А поскольку в наших обозначениях для фундаментальной матрицы

$$\|x(t,a)\| = \|X\|\|a\| \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\|x(t,a)\|\rangle \le \langle\|X\|\rangle \langle\|a\|\rangle \ ,$$

то из $\langle\,\|a\|\,\rangle \le \delta_\varepsilon$ получаем, что $\langle\,\|x(t,a)\|\,\rangle \le \varepsilon$ при

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \qquad \forall \varepsilon > 0\,.$$

Откуда следует устойчивость $x = o$ по Ляпунову.

Наконец, из условия $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t,a) = o$ получаем, что $x = o$ устойчиво асимптотически.

2°. В этом случае слагаемые в (6.2.3), для которых $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, ограничены по тем же соображениям, что и в пункте 1°.

Слагаемым с $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ соответствуют в (6.2.3) многочлены нулевой степени, поскольку предполагается, что кратность таких собственных значений равна размерности собственного подпространства (в U^n существует базис из собственных векторов). Многочлены нулевой степени суть константы и, значит, ограничены.

Получив те же оценки, что и в случае 1°, приходим к заключению о справедливости пункта 2°.

3°. Допустим, что $\mathrm{Re}\lambda_{j^*} > 0$ для некоторого λ_{j^*}. Тогда соответствующее слагаемое в (6.2.3) неограничено на $t \in [t_0, +\infty)$. У задачи Коши (6.2.1) всегда есть вещественное неограниченное решение $x(t,a)$. Действительно, если $x(t,a)$ неограниченное и комплексное, то хотя бы одно из вещественных решений $\mathrm{Re}x(t,a)$ или $\mathrm{Im}x(t,a)$ обязательно неограниченное.

Пусть $\delta > 0$ любое и сколь угодно малое. Тогда при $C = \dfrac{\delta}{2|a|}$ решение $y(t) = Cx(t,a)$ неограниченное, для которого

$$|\,y(t_0)| = |Cx(t_0,a)| = \left|\frac{\delta}{2|a|}a\right| = \frac{\delta}{2}.$$

Значит положение равновесия $x = o$ неустойчивое.

Если же нет $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, но имеется собственное значение $\mathrm{Re}\lambda_{j^*} = 0$ для некоторого λ_{j^*}, кратность которого больше размерности собственного подпространства, то из теоремы 3.2.4 следует, что в формуле (6.2.3) имеется многочлен степени не меньшей, чем 1, старший коэффициент которого не нулевой. И, поскольку $\left| e^{\lambda_{j^*} t} \right| = 1$, это решение неограничено, а положение равновесия неустойчиво.

`Теорема доказана.`

Заметим, что хотя теорема 6.2.1 сформулирована и доказана как набор достаточных условий, несложно убедиться, что эти условия одновременно являются и необходимыми.

Вернемся теперь к рассмотрению системы (6.2.1) в предположении, что $x_0 = o$ является ее положением равновесия, то есть $F(o) = o$. Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость. При этом мы ограничимся лишь необходимыми определениями новых понятий и формулировками теорем, доказательства которых выходят за рамки нашего курса и будут заменены ссылками на соответствующие источники.

Первый подход носит название исследования *устойчивости по линейному приближению* и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x_0 = o$. Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в неразвернутом матричном виде как

$$\|F(x)\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,,$$

где матрица $\|A\|$ имеет элементы α_{ij} такие, что $\alpha_{ij} = \left\| \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| \Bigg|_{x=o}$, а вектор-функция $R(x)$ не только равна o при $x = o$, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to o} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0 \,, \qquad \text{где} \quad |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \,.$$

Тогда система уравнений (6.2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,, \tag{6.2.4}$$

и оказывается справедливой

Теорема 6.2.2 (Об устойчивости по линейному приближению)	**1°. Если матрица** $\|A\|$ **такова, что** $\mathrm{Re}\lambda_j < 0\ \ \forall j = [1, n]$, **то решение системы (6.2.4)** $x(t) = o$ **асимптотически устойчиво.** **2°. Если матрица** $\|A\|$ **имеет хотя бы одно** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, **то решение системы (6.2.4)** $x(t) = o$ **неустойчиво.** **3°. Если** $\max \mathrm{Re}\lambda_j = 0$, **то устойчивость (или неустойчивость)** $x(t) = o$ **зависит не только от матрицы** $\|A\|$, **но и от вектор-функции** $R(x)$ **.**

Доказательство

См. [2], гл. 4, § 20.

Теорема доказана.

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для для заключения о типе устойчивости положения равновесия $x = o$ системы (6.2.4). Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия.*

Положения равновесия, для которых оказываются справедливыми условия пункта 3°, называются *негрубыми положениями равновесия.* Исследование особых решений в этом случае может быть выполнено альтернативным методом, разработанным А.М.Ляпуновым, основой которого служат следующие определения и теоремы.

Определение 6.2.3	Функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(o) = 0$, называется в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ — *положительно определенной*, если $\Phi(x) > 0\ \ \forall x \in \dot{U}$; — *отрицательно определенной*, если $\Phi(x) < 0\ \ \forall x \in \dot{U}$; — *неотрицательной*, если $\Phi(x) \geq 0\ \ \forall x \in \dot{U}$; — *неположительной*, если $\Phi(x) \leq 0\ \ \forall x \in \dot{U}$.

Определение 6.2.4	*Производной в силу системы* (6.2.1) *от функции* $\Phi(x)$ называется выражение $$\dot{\Phi}(x) = \|\operatorname{grad}\Phi(x)\|^{\mathrm{T}}\,\|F(x)\| = $$ $$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j}F_j(x)\,.$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы (6.2.1) есть полная производная по t от сложной функции $\Phi(x(t))$, если $x(t)$ – решение этой системы. Причем для вычисления значений такой производной знать само решение не требуется.

Определение 6.2.5	Положительно определенная в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ функция $V(x)$ называется *функцией А.М. Ляпунова*, если $$\dot{V}(x) \le 0\,, \quad \forall x \in \dot{U}\,,$$ где $\dot{V}(x)$ – производная в силу системы (6.2.4).

Исследование системы (6.4.2) по методу Ляпунова базируется на следующих трех теоремах.

Теорема 6.2.3 (Ляпунова об устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.4) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.**

Доказательство

См. [3], гл. 4, § 6.

Теорема доказана.

Другими словами, согласно теореме 6.2.3, неположительность производной в силу системы (6.2.4) от функции Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия.

Теорема 6.2.4 (Об асимптотической устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.4) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что ее производная в силу системы (6.2.4) $\dot{V}(x)$ отрицательно определена в этой окрестности, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.**

Доказательство

См. [3], гл. 4, § 6.

Теорема доказана.

Доказательство неустойчивости положения равновесия может основываться на использовании специальной функции $W(x)$, называемой *функцией Н.Г. Четаева.*

Пусть U некоторая окрестность $x = o$, а $\Omega \subset U$ такая, что $x = o$ – граничная точка Ω.

Теорема 6.2.5 (Четаева о неустойчивости) **Если существует функция $W(x)$ непрерывно дифференцируемая на Ω такая, что**

$$W(x) > 0\,,\ \ \dot{W}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

и все точки $x^* \in \Omega$, в которых $W(x^*) = 0$, суть граничные точки Ω.
Тогда положение равновесия $x = o$ неустойчиво.

Доказательство

См. [3], гл. 4, § 6.

Теорема доказана.

Как уже отмечалось ранее, условия сформулированные в теоремах 6.2.3–6.2.5 позволяют делать заключения о типе устойчивости негрубых положений равновесия, когда теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. При этом важно, что для получения этих заключений не требуется находить решения систем вида 6.2.4.

С другой стороны, общей методики построения функций $V(x)$ и $W(x)$ не имеется, и для этой цели приходится использовать специфику решаемой задачи. Например, доказано, что функция Ляпунова всегда существует в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия. Однако, в более общем случае такие функции имеются не для любого класса систем дифференциальных уравнений.

Особенности практического применения методов Ляпунова и Четаева проиллюстрируем на примере решения двух следующих задач.

Задача 6.2.2 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^2 \,, \\ \dot{x}_2 = -x_1^5 - x_1 x_2 \,. \end{cases} \tag{6.2.5}$$

Решение:

1°. У данной системы единственное положение равновесия – начало координат. Матрица $\|A\|$ очевидно нулевая и теорема 6.2.2 не применима.

2°. Покажем, что функция $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2.4. Действительно, она положительно определенная в любой окрестности начала координат и $V(0,0) = 0$.

Ее производная в силу системы (6.2.5) равна

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\left(-x_1^3 + x_2^2\right) + 2x_2\left(-x_2^5 - x_1 x_2\right) =$$

$$= -2x_1^4 - 2x_2^6$$

и является отрицательно определенной в любой окрестности начала координат.

Тогда по теореме 6.2.4 начало координат есть асимптотически устойчивое положение равновесия для системы (6.2.5).

Решение получено

Задача 6.2.3 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5 \,, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 \,. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Решение: 1°. У системы (6.2.6) начало координат единственное положение равновесия. Матрица $\|A\|$ также нулевая и потому теорема 6.2.2 не применима.

2°. Пусть

$$U = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\},$$

$$\text{а } \Omega = \{(x_1; x_2) \in U : x_1 > x_2^2\}$$

(см. рис. 6.2). Покажем, что функция

$$W(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$$

удовлетворяет в Ω условиям теоремы 6.2.5. Действительно, здесь она положительно определенная и $W(0, 0) = 0$.

Ее производная в силу системы (6.2.6) равна

$$\dot{W}(x_1, x_2) = 2x_1\left(x_1^2 + 2x_2^5\right) - 4x_2^3 x_1 x_2^2 = 2x_1^3$$

и является положительно определенной в Ω.

Тогда по теореме 6.2.5 получаем, что начало координат есть неустойчивое положение равновесия для системы (6.2.6).

Решение получено

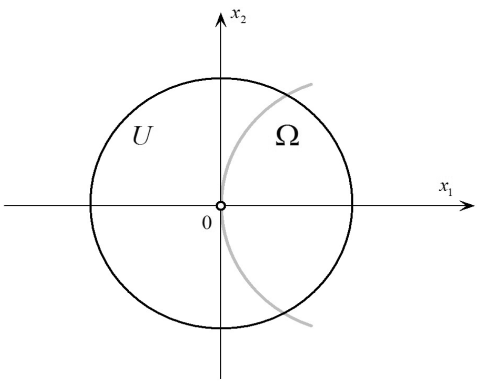


Рис. 6.2. К решению задачи 6.2.2.

6.3. Положения равновесия автономных систем второго порядка

Как уже было отмечено, теорема 6.1.5 (о выпрямлении траекторий) не применима в окрестностях положений равновесия. Исследование поведения фазовых траекторий в этих областях требует использования более сложных, специальных методов, рассмотрению которых посвящен данный параграф.

Основой этих методов является локальная линеаризация системы (6.1.1) в малой окрестности положения равновесия, а также набор условий, гарантирующий совпадение в этой окрестноси характеров поведения (или, как принято говорить, *эквивалентность*) фазовых траекторий исходной и линеаризованных систем.

Поэтому первоначальной задачей оказывается изучение характера поведения фазовых траекторий линейных систем, которое мы выполним для случая $n = 2$, то есть для случая, когда фазовое пространство есть двумерная плоскость.

Рассмотрим автономную систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \tag{6.3.1}$$

или же в развернутой и неразвернутой в матричных формах

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| \qquad \left\| \dot{X} \right\| = \|A\| \, \|X\| \, ,$$

где

$$\left\| \dot{X} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right\| , \qquad \|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| , \qquad \|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| .$$

Определение 6.3.1	Если $\det \|A\| \neq 0$, то систему (6.3.1) называют *простой*, и называют *сложной* при $\det \|A\| = 0$.

В силу определений 6.1.2 и 6.3.1 простая система (согласно теореме Крамера) имеет единственное положение равновесия – начало координат в E^2 точку $X = o$.

Для исследования характера поведения фазовых траекторий системы (6.3.1) удобно найти аналитическое представление ее общего решения, что (как было показано в § 3.1 – 3.2) требует нахождения собственных значений λ_1 и λ_2, а также собственных векторов матрицы $\|A\|$, обозначаемых далее как $\|h_1\|$ и $\|h_2\|$.

Рассмотрим последовательно следующие четыре случая.

1°. Числа λ_1 и λ_2 вещественные, различные и отличные от нуля.

В этом случае в E^2 существует базис из собственных векторов $\|h_1\|$ и $\|h_2\|$, в котором система (6.3.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = & \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 & = & \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и соответственно решения $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид

$$\begin{array}{ll} y_2 = C_2 \left(\dfrac{y_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, & \text{при } \mathrm{C}_1 \neq 0\,, \\ y_1 = 0, & \text{при } \mathrm{C}_1 = 0\,. \end{array} \tag{6.3.2}$$

Из формул (6.3.2) следует, что, если λ_1 и λ_2 одного знака, то фазовые траектории являются дугами парабол, касающимися в начале координат оси Oy_1 при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. При $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ траектории в начале координат касаются оси Oy_2.

Если λ_1 и λ_2 отрицательны, то движение с ростом t по фазовым траекториям происходит по направлению к началу координат, и положение равновесия называется *асимптотически устойчивым узлом*.

В случае, когда λ_1 и λ_2 положительны, движение происходит от начала координат (*неустойчивый узел*). Следует отметить, что координатные полуоси, равно как и само начало координат, также являются фазовыми траекториями.

Наконец, следует выполнить обратный переход к исходным переменным x_1 и x_2, который является линейным невырожденным преобразованием в E^2. Само преобразование при построении фазового портрета находить необязательно. Достаточно воспользоваться тем его свойством, что собственные векторы матрицы $\|A\|$ являются направляющими векторами прямолинейных фазовых траекторий [2].

Итоговый вид фазовых портретов для положения равновесия типа *устойчивый узел* показан на рис. 6.3А, а для положения равновесия типа *неустойчивый узел* – на рис. 6.3В.

---

[2]Это свойство следует из теоремы 3.1.2 и того факта, что для прямолинейных фазовых траекторий вектор фазовой скорости коллинеарен самой траектории.

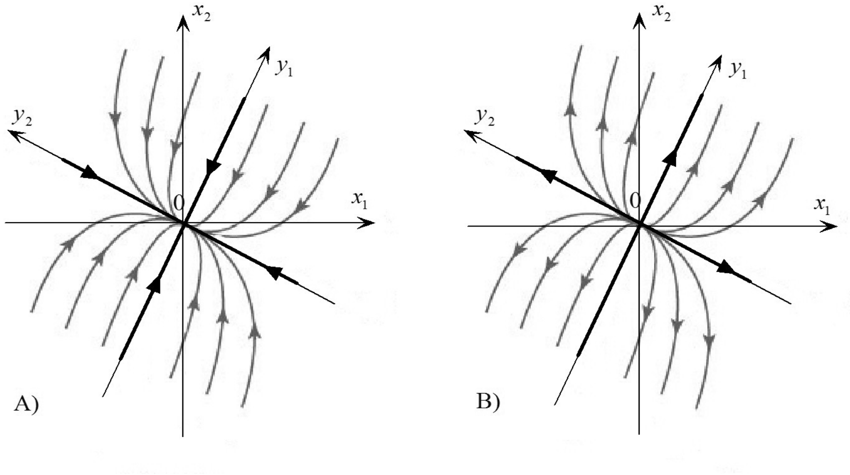


Рис. 6.3. Положение равновесия *узел*.

Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия называется *седлом*. Оно всегда неустойчиво, поскольку одно из собственных значений матрицы $\|A\|$ положительно.

В базисе из собственных векторов фазовые траектории седла (отличные от координатных полуосей и начала координат) по свойствам аналогичны ветвям гипербол. Действительно, из (6.3.2) имеем

$$\lim_{y_1 \to 0} |\, y_2| = +\infty\,, \qquad \lim_{|\, y_1| \to +\infty} y_2 = 0\,.$$

Движение по траекториям, являющихся координатными полуосями, направлено от начала координат для оси, которой соответствует $\lambda > 0$, и направлено к началу координат, если $\lambda < 0$. По остальным фазовым траекториям направление движения в каждой четверти координатной плоскости свое и определяется направлением движения по координатным полуосям (см. рис. 6.4).

Переход к исходным переменным выполняется также как и в случае узла.

2°. Собственные значения вещественные, равные и отличные от нуля.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Матрица системы (6.3.1) в жордановом базисе может оказаться диагональной, а может и нет.

В первом случае решение будет $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$. Значит, фазовые траектории суть полупрямые, исходящие из начала коор-

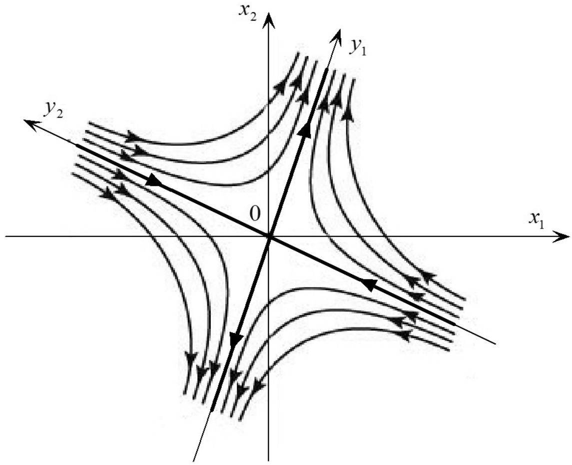


Рис. 6.4. Положение равновесия *седло.*

динат при $\lambda > 0$, или входящие в него при $\lambda < 0$. (См. рис. 6.5A) Такое положение равновесия называется соответственно *неустойчивым* или *асимптотически устойчивым дикритическим узлом.*

Во втором случае система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2 \end{cases}$$

Ее общее решение $y_1(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид (см. рис. 6.5B)

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + \frac{y_2}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2}, \quad \text{при } \mathrm{C}_2 \neq 0\,,$$

$$y_2 = 0, \qquad\qquad \text{при } \mathrm{C}_2 = 0\,.$$

Данная особая точка называется *вырожденным узлом – неустойчивым*, если $\lambda > 0$, и *устойчивым*, если $\lambda < 0$.

Переход к исходным переменным выполняется также как и в предыдущих случаях.

3°. Собственные значения невещественные и неравные друг другу.

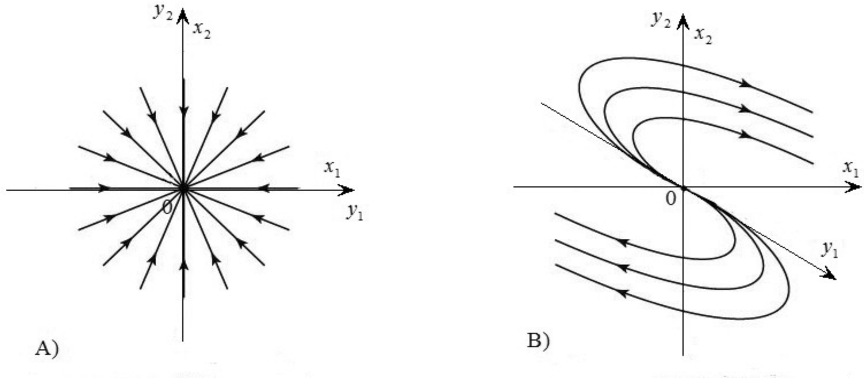


Рис. 6.5. Положения равновесия *дикритический узел* и *вырожденный узел.*

В этом случае из вещественности коэффициентов матрицы $\|A\|$ следует, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ при условии $\beta \neq 0$. Собственные векторы $\| h_1\|$ и $\| h_2\|$, отвечающие λ_1 и λ_2, комплексно сопряженные и линейно независимые элементы в унитарном пространстве U^2, поэтому

$$\| h_1\| = \|p\| + i\|q\| \qquad \text{и} \qquad \| h_2\| = \|p\| - i\|q\| ,$$

где $\|p\|$ и $\|q\|$ вещественные и линейно независимые элементы пространства E^2.

Комплекснозначная вектор-функция

$$\|x(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t}\|h_1\| = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t}\left(\|p\| + i\|q\|\right)$$

по теореме 3.1.2 является решением системы (6.3.1) при любой комплексной константе C_1. Кроме того, согласно лемме 2.4.2, решением системы (6.3.1) будет и вещественная вектор-функция $\mathrm{Re}\,\|x(t)\|$.

Найдем ее вид, представив предварительно константу C_1 в экспоненциальной форме $C_1 = \rho\, e^{i\theta}$, где $\rho \geq 0$, θ – произвольные вещественные постоянные. Из

$$\|x(t)\| = \rho e^{\alpha t + i(\beta t+\theta)}\left(\|p\| + i\|q\|\right)$$

получаем, что

$$\mathrm{Re}\,\|x(t)\| = \|p\|\,\rho\, e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) - \|q\|\,\rho\, e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta)\,.$$

В силу линейной независимости $\|p\|$ и $\|q\|$ можно утверждать, что скалярные функции

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho\, e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)\,, \\ y_2(t) = \rho\, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta) \end{cases} \tag{6.3.3}$$

задают параметрическое представление интегральных кривых системы (6.3.1) в декартовом базисе $\{\, \|p\|;\ -\|q\|\,\}$, а сами являются соответствующими декартовыми координатами.

Определение вида фазовых траекторий удобно выполнить, перейдя от декартовой системы координат к полярной по стандартным формулам

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\varphi\,, \\ y_2 = r\sin\varphi\,. \end{cases} \tag{6.3.4}$$

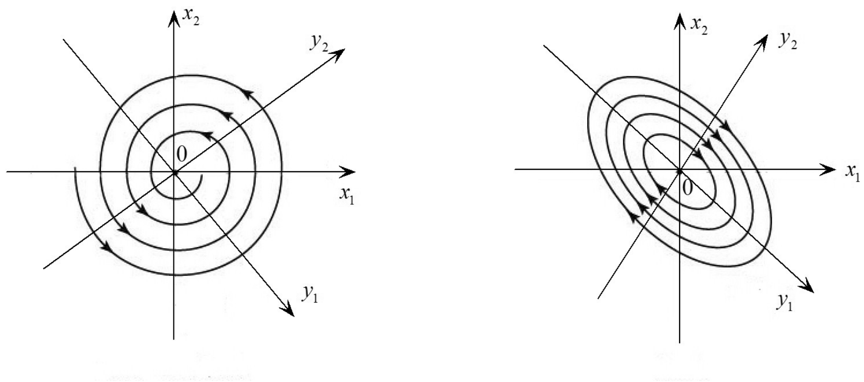


Рис. 6.6. Положения равновесия *фокус* и *центр.*

Сопоставление формул (6.3.3) и (6.3.4) позволяет получить параметрическое представление фазовых траекторий в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = \rho\, e^{\alpha t}\,, \\ \varphi = \beta t + \theta\,, \end{cases} \tag{6.3.5}$$

из которого следует, что фазовые траектории в базисе $\{\, \|p\|;\ -\|q\|\,\}$

при $\alpha > 0$ суть раскручивающиеся от начала координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*);

при $\alpha < 0$ суть скручивающиеся к началу координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *асимптотически устойчивым фокусом*);

при $\alpha = 0$ образуют систему концентрических окружностей с центром в начале координат (положение равновесия называется *центром*). Это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Следует отметить, формулы (6.3.5) дают все вещественные решения, поскольку начальная точка, для которой $y_1(0) = \rho\cos\theta$ и $y_2(0) = \rho\sin\theta$, есть произвольная точка фазовой плоскости.

Переход от базиса $\{ \|p\|; -\|q\| \}$ к исходному выполняется стандартно.

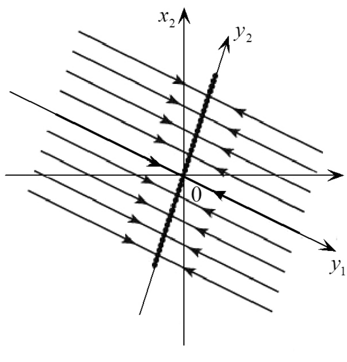
Направление движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) можно установить, найдя фазовую скорость для некоторой конкретной точки, не являющейся положением равновесия. Например из (6.3.1) следует, что в точке $\| 1 \;\; 0 \|^{\mathrm{T}}$ фазовая скорость равна вектору $\| \alpha_{11} \; \alpha_{21} \|^{\mathrm{T}}$.

Графики фазовых траекторий показаны на рис. 6.6.

4°. Определитель матрицы системы (6.3.1) равен нулю.

Если $\det\|A\| = 0$, то согласно определению 6.3.1 система (6.3.1) называется сложной и в жордановом базисе ее матрица может иметь один из трех следующих видов

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$



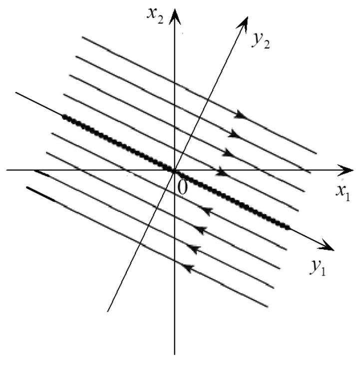


Рис. 6.7. Положения равновесия для *сложной системы.*

В первом из этих трех случаев $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ и $\lambda_2 = 0$, решение в жордановом базисе будет $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$ и $y_2(t) = C_2$. Поэтому все точки прямой $y_1 = 0$ являются положениями равновесия. При этом обе полупрямые $y_2 = C_2$ суть фазовые траектории. Движение по ним при $t \to +\infty$ идет к прямой $y_1 = 0$ при $\lambda < 0$ и от прямой $y_1 = 0$ при $\lambda > 0$.

Во втором случае решение имеет вид $y_1(t) = C_1 + C_2 t$ и $y_2(t) = C_2$. Здесь все точки прямой $y_2 = 0$ являются положениями равновесия, и каждая из прямых $y_2 = C_2$ – фазовая траектория. Движение по ним при $t \to +\infty$ идет справа налево при $\mathrm{C}_2 < 0$ и слева направо при $\mathrm{C}_2 > 0$.

Наконец, в третьем случае каждая точка фазовой плоскости есть особая точка – положение равновесия.

Примеры фазовых портретов для *сложных систем* показаны на рис. 6.7. Важно отметить, что для *сложных систем* (6.3.1) добавление в правую часть слагаемых, малых по сравнению с линейными, может радикально изменить фазовый портрет.

Рассмотрим теперь нелинейную автономную систему

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & f_1(x_1, x_2)\,, \\ \dot{x}_2 & = & f_2(x_1, x_2)\,, \end{array} \right. \tag{6.3.6}$$

где $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ – заданные вещественные дважды непрерывно дифференцируемые в области $\Omega \subseteq E^2$ функции. Найдем фазовый портрет для этой системы в окрестности некоторой точки $\| \, x_{01} \; x_{02} \, \|^{\mathrm{T}} \in \Omega$.

Без потери общности можно считать, что $\| \, x_{01} \;\; x_{02} \, \|^{\mathrm{T}} = \| \, 0 \;\; 0 \, \|^{\mathrm{T}}$, поскольку начало координат фазовой плоскости переносится в рассматриваемую точку линейной невырожденной заменой

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} y_1 & = & x_1 & - & x_{10}\,, \\ y_2 & = & x_2 & - & x_{20}\,. \end{array} \right.$$

Если начало координат не есть особая точка, то фазовой портрет можно получать, применяя теорему 6.1.5 (о выпрямлении траекторий), из которой следует, что фазовые траектории в малой окрестности начала координат суть почти прямые, непересекающиеся линии.

Допустим теперь, что начало координат является положением равновесия системы (6.3.6). Тогда из равенств $f_1(0,0) = 0$ и $f_2(0,0) = 0$ и формулы Тейлора следуют соотношения

$$\left\{ \begin{array}{lcccccc} f_1(x_1, x_2) & = & \alpha_{11} x_1 & + & \alpha_{12} x_2 & + & o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,)\,, \\ f_2(x_1, x_2) & = & \alpha_{21} x_1 & + & \alpha_{22} x_2 & + & o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,)\,, \end{array} \right.$$

где

$$\alpha_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_1 = 0,\\ x_2 = 0}} \qquad i, j = 1, 2\,.$$

Тогда система (6.3.6) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,)\,, \\ \dot x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,) \end{cases}$$

и естественно дать

Определение 6.3.2	Линейная однородная система $$\begin{cases} \dot x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2\,, \\ \dot x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \qquad (6.3.7)$$ называется *линеаризацией* системы (6.3.6) в начале координат.

Как и раньше, будем использовать обозначение

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|\,.$$

Основой для исследования поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (6.3.6) служит

Теорема 6.3.1 (О линеаризации) **Если для матрицы $\|A\|$ вещественные части собственных чисел ненулевые, особая точка в начале координат системы (6.3.6) имеет тот же тип, что и для линеаризации (6.3.7). При этом сохраняются направления подхода фазовых траекторий к особой точке, направления закручивания и устойчивость.**

Доказательство

Доказательство достаточно сложное и выходит за рамки данного курса. С ним можно ознакомиться, например, в [8], § 30.

Теорема доказана.

Продемонстрируем использование теоремы о линеаризации на примере следующей задачи.

Задача 6.3.1 Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий линеаризаций в окрестности положения равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln\left(3 + y - y^2\right), \\ \dot{y} &= \arcsin\left(x - y^2\right). \end{cases}$$

Решение: 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \ln\left(3 + y - y^2\right) &= 0, \\ \arcsin\left(x - y^2\right) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 + y + y^2 &= 1, \\ x - y^2 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= 1, \\ y_1 &= -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 &= 4, \\ y_2 &= 2. \end{cases}$$

2°. Исследуем положение равновесия – точку $M(1;\, -1)$. Вначале перенесем начало координат в особую точку M при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u &= x - 1, \\ v &= y + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= u + 1, \\ y &= v - 1. \end{cases}$$

В этом случае справедливы равенства

$$\ln\left(3 + y - y^2\right) = \ln\left(3 + (v-1) - (v-1)^2\right) = \\ = \ln\left(1 + 3v - v^2\right) = 3v + o(\sqrt{u^2 + v^2}\,),$$

$$\arcsin\left(x - y^2\right) = \arcsin\left(u + 1 - (v-1)^2\right) = \\ = \arcsin\left(u + 2v - v^2\right) = u + 2v + o(\sqrt{u^2 + v^2}\,).$$

Откуда следует, что линеаризация (6.3.7) для особой точки M имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} &= & & 3v, \\ \dot{v} &= u &+ & 2v \end{cases} \Longrightarrow \quad \|A\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det\|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det\|A - \lambda E\| = \det \left\| \begin{matrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{matrix} \right\| = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1\,,\ \ \lambda_2 = 3$, и положение равновесия M есть седло.
Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему уравнений

$$\|A - \lambda E\|\,\|h\| = \|o\|\,.$$

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\left\| \begin{matrix} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{matrix} \right\| \|h_1\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \|h_1\| = \left\| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right\| .$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$

$$\left\| \begin{matrix} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{matrix} \right\| \|h_2\| = \left\| \begin{matrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \|h_2\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| .$$

При построении эскиза фазового портрета для особой точки M учитываем, что прямолинейные фазовые траектории имеют своими направляющими собственные векторы $\|h_1\|$ и $\|h_2\|$, и являются при этом асимптотами для криволинейных траекторий.
Направления движения по прямолинейным траекториям: от начала координат для асимптоты с $\|h_2\|$, так как $\lambda_2 = 3 > 0$, и, соответственно, к началу координат для асимптоты с $\|h_1\|$, так как $\lambda_1 = -1 < 0$.
Как следствие этого факта, направления движения по криволинейным фазовым траекториям при этом оказываются однозначно определенными, поскольку в силу непрерывности они должны совпадать с направлениями движения по прямолинейным как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Итоговый вид эскиза показан на рис. 6.8А.

3°. Исследуем теперь второе положение равновесия – точку $N(\,4;\,2)$.

Вначале перенесем начало координат в особую точку N при помощи замены переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x-4\,, \\ v & = & y-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & u+4\,, \\ y & = & v+2\,. \end{array}\right.$$

В этом случае справедливы равенства

$$\begin{array}{l} \ln\left(3+y-y^2\right)=\ln\left(3+(v+2)-(v+2)^2\right)= \\ =\ln\left(1-3v-v^2\right)=-3v+o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \arcsin\left(x-y^2\right)=\arcsin\left(u+4-(v+2)^2\right)= \\ =\arcsin\left(u-4v-v^2\right)=u-4v+o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,. \end{array}$$

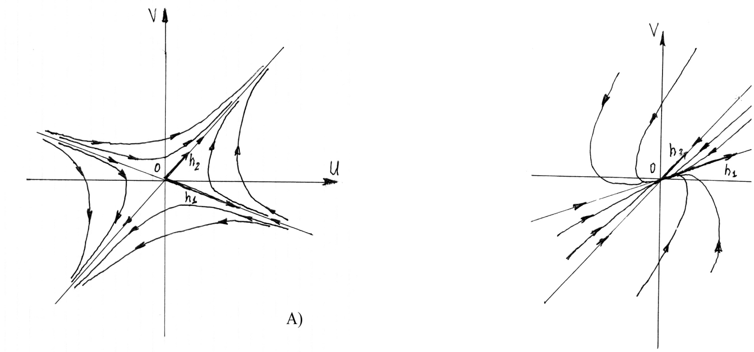


Рис. 6.8. Фазовые портреты в окрестности положений равновесия для задачи 6.3.1.

Откуда следует, что линеаризация (6.3.7) для особой точки N имеет вид

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \dot u & = & & - & 3v\,, \\ \dot v & = & u & - & 4v \end{array}\right. \qquad\Longrightarrow\qquad \|A\|=\left\|\begin{array}{cc} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{array}\right\|\,.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det\|A-\lambda E\|=0$.

$$\det\|A-\lambda E\| \;=\; \det\left\|\begin{array}{cc} -\lambda & -3 \\ 1 & -4-\lambda \end{array}\right\| \;=\; \lambda^2+4\lambda+3=0\,.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1\,,\;\; \lambda_2 = -3$, и положение равновесия N есть устойчивый узел.
Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему уравнений

$$\|A - \lambda E\|\,\|h\| = \|o\|\,.$$

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\left\|\begin{array}{cc} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{array}\right\| \|h_1\| = \left\|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\| \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \|h_1\| = \left\|\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right\|.$$

Аналогично для $\lambda_2 = -3$

$$\left\|\begin{array}{cc} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{array}\right\| \|h_2\| = \left\|\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\| \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \|h_2\| = \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right\|.$$

Исследуем теперь свойства фазовых траекторий. Это удобно сделать, перейдя в базис из собственных векторов, то есть, в базис $\{\|h_1\|;\, \|h_2\|\}$, координаты в котором обозначим как $p(t)$ и $q(t)$. В этом базисе (как было показано в § 3.1) решения линеаризованной системы (6.3.7) имеют особенно простой вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} p(t) & = & C_1e^{-t}\,, \\ q(t) & = & C_2e^{-3t}\,, \end{array}\right.$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.
При $C_1 = 0$ вид фазовых траекторий очевиден: в зависимости от C_2, это прямолинейные лучи или точка.

Исключив t из этих равенств при $C_1 \neq 0$, получим уравнения фазовых траекторий в виде

$$q = Dp^3 \quad \forall D = \text{const.}$$

То есть траектории суть дуги кубичных парабол, касающихся в нуле оси $\|h_1\|$. Направление движения по всем траекториям одинаково: к положению равновесия.

Решение получено

Итоговый вид эскиза показан на рис. 6.8В.

6.4. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть в области $\Omega \subseteq E^n$ фазового пространства задана автономная система

$$\dot{x} = F(x)\,, \tag{6.4.1}$$

где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, вещественная вектор-функция. Пусть также $x(t)\,,\quad t \in T$ – решение системы (6.4.1) на промежутке T.

Определение 6.4.1	Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (6.4.1), если $u(x(t)) \equiv const \;\; \forall t \in T$ для каждого решения $x(t)$ этой системы.

Тривиальным примером первого интеграла является функция $u(x) \equiv const$. Условия существования нетривиальных первых интегралов могут быть сформулированы с помощью понятий производной в силу системы (см. определение (6.2.4)) и функциональной независимости первых интегралов.

Определение 6.4.2	Первые интегралы $\{u_k(x)\,,\; k = [1,s]\}$ называются *функционально независимыми* в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби равен s,

то есть

$$\operatorname{rg} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\| \Bigg|_{x=a} = s\,, \quad \text{где } k = [1, s]\,, \;\; j = [1, n]\;.$$

Согласно этому определению, функциональная зависимость, исходя из известной теоремы о неявных функциях [4], означает возможность функционально выразить (локально) один первый интеграл через другой.

Следует также отметить различие понятий функциональной зависимости и линейной зависимости. Из линейной зависимости следует функциональная, но не наоборот. Пример: функции $u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ и $u_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ функционально зависимы в E^2, хотя они линейно независимы.

Критерием существования первого интеграла является

Теорема 6.4.1 **Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ являлась первым интегралом системы (6.4.1), необходимо и достаточно, чтобы $\dot{u}(x)$ – производная от $u(x)$ в силу системы (6.4.1), равнялась нулю $\forall x \in \Omega$.**

Доказательство

Пусть $x(t)$ некоторое решение системы (6.4.1). Рассмотрим функцию $v(t) = u(x(t))$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} F_j(x(t)) = \dot{u}(x(t))\,.$$

Откуда мы имеем для первого интеграла

$$u(x(t)) = const \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{u}(x(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{v}(t) = 0 \quad (6.4.2)$$

А по теореме 4.3.1 (Коши) через каждую точку Ω проходит некоторая интегральная кривая системы (6.4.1), на которой выполняются соотношения (6.4.2).

Теорема доказана.

Выясним теперь геометрический смысл первого интеграла. Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j и пусть C – любое из значений первого интеграла $u(x)$ принимаемых в Ω. Тогда уравнение $u(x) = C$ задает в E^n $(n-1)$-мерную гиперповерхность Γ, целиком состоящую из фазовых траекторий системы (6.4.1).

Действительно, пусть точка a принадлежит поверхности Γ, тогда $u(a) = C$. Поскольку $u(x)$ первый интеграл, то в любой точке фазовой траектории, проходящей через a, будет $u(x) = C$. Значит, вся эта траектория лежит на Γ.

Если известен какой-либо первый интеграл $u(x)$, у которого $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j, то система (6.4.1) может быть сведена к системе с меньшим на единицу числом неизвестных функций. Для этого следует x_j выразить при помощи уравнения $u(x) = C$ через остальные неизвестные и подставить это выражение во все (кроме j-го) уравнения исходной системы (6.4.1). Знание же $n-1$ функционально независимых первых интегралов позволяет получить решение системы (6.4.1) вообще без интегрирования.

Поскольку любая непрерывно дифференцируемая функция от нескольких первых интегралов системы (6.4.1) очевидно также является ее первым интегралом, то первых интегралов у этой системы бесконечно много. При этом однако возникает вопрос о том какое число из них может оказаться функционально независимыми. Ответ на данный вопрос находится при помощи нижеследующих рассуждений.

Система (6.4.1) в неразвернутом матричном виде записывается так:

$$\|\dot{x}\| = \|F(x)\| \;\; \forall x \in \Omega \subseteq E^n. \tag{6.4.3}$$

При гладкой обратимой замене переменных $\|x\| = \|g(y)\|$ с матрицей Якоби

$$\|G(y)\| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\| \;\; \forall i, j = [1, n]$$

и якобианом

$$\det \|G(y)\| = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \;\; \forall y \in \Omega^*,$$

в области Ω^*, являющейся образом области Ω, автономная система (6.4.3) примет вид:

$$\|\dot{y}\| = \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\| \;\; \forall y \in \Omega^* \subseteq E^n. \tag{6.4.4}$$

Система (6.4.4) непосредственно получается из (6.4.3) в силу равенств

$$\|\dot{x}\| = \|G(y)\|\|\dot{g}(y)\| = \|F(g(y))\|\,.$$

На вопрос о том, как связаны первые интегралы автономных систем (6.4.3) и (6.4.4), отвечает

Теорема 6.4.2 **Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)\,,\ x \in \Omega$ являлась первым интегралом системы (6.4.3) необходимо и достаточно, чтобы функция $v(y) = u(g(y))\,,\ y \in \Omega^*$ являлась первым интегралом системы (6.4.4).**

Доказательство

Поскольку из теоремы 6.4.1 следует, что $u(x)\,,\ x \in \Omega$ есть первый интеграл системы (6.4.3) тогда и только тогда, когда $\dot{u}(x) = 0\,,\ x \in \Omega$, а $v(y)\,,\ y \in \Omega^*$ есть первый интеграл системы (6.4.4) тогда и только тогда, когда $\dot{v}(y) = 0\,,\ y \in \Omega^*$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться лишь в том, что

$$\dot{u}(x) = \dot{v}(y) \quad \text{при } x = g(y)\ \ \forall y \in \Omega^*.$$

Действительно, в этом случае из $\dot{u}(x) = 0,\ x \in \Omega$ будет следовать, что $\dot{v}(y) = 0,\ y \in \Omega^*$, и наоборот.

Справедливость равенства $\dot{u}(x) = \dot{v}(y)$ при $x = g(y)\ \ \forall y \in \Omega^*$ проверим непосредственно. Во введенных выше обозначениях имеем

$$\dot{v}(y) = \|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}}\|\dot{y}\| = \|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}}\|G(y)\|^{-1}\|F(g(y))\| =$$

(поскольку по правилам дифференцирования сложной функции $\|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}} = \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}}\|G(y)\|$)

$$= \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}}\|G(y)\|\|G(y)\|^{-1}\|F(g(y))\| =$$

$$= \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}}\|E\|\,\|F(g(y))\| =$$

$$= \|\operatorname{grad} u(x)\|^{\mathrm{T}}\|F(x))\| = \dot{u}(x)\,.$$

Теорема доказана.

Достаточные условия существования $n-1$ функционально независимых первых интегралов системы (6.4.3), а также формулу для любого ее первого интеграла, дает

Теорема 6.4.3

Пусть точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3). Тогда

1°. В $\omega \subseteq \Omega$ – некоторой окрестности точки a, существуют $n-1$ функционально независимые первые интегралы

$$u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots,\, u_{n-1}(x)\,.$$

2°. Для любого первого интеграла $u(x)$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ такая, что

$$u(x) = \Phi(u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots,\, u_{n-1}(x))\,,\ \ x \in \omega\,.$$

Доказательство

1°. Поскольку точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3), то по теореме 6.1.5 (о выпрямлении траекторий) для a найдется окрестность ω и гладкая обратимая замена переменных $x = g(y)$ в этой окрестности такие, что система (6.4.3) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1, \end{cases} \tag{6.4.5}$$

решениями которой будут функции

$$y_1(t) = C_1\,,\ \ y_2(t) = C_2\,, \ldots\,,\ \ y_{n-1}(t) = C_{n-1}\,,\ \ y_n(t) = t + C_n\,.$$

Нетрудно видеть, что система (6.4.5) имеет $n-1$ независимых первых интегралов

$$v_1(y) = y_1,\, v_2(y) = y_2, \ldots, v_{n-1}(y) = y_{n-1}.$$

Поскольку замена переменных имеет гладкую обратную $y = h(x)$ с невырожденным якобианом, то по теореме 6.4.2 система (6.4.3) будет иметь $n-1$ независимых при $x = a$ первых интегралов вида

$$u_1(y) = h_1(x),\ u_2(y) = h_2(x), \ldots,\ u_{n-1}(y) = h_{n-1}(x).$$

2°. Всякий первый интеграл системы (6.4.5) представим в виде

$$v(y) = \Phi(v_1(y),\ v_2(y),\ \ldots, v_{n-1}(y))\,,$$

где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Поэтому в силу теоремы 6.4.2 при замене переменных $y = h(x)$ и $x = g(y)$

$$u(x) = u(g(y)) = v(y) = \Phi(h_1(x),\ h_2(x),\ \ldots, h_{n-1}(x)) =$$

$$= \Phi(u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots, u_{n-1}(x))$$

есть произвольный первый интеграл системы (6.4.3).

Теорема доказана.

Следует также иметь в виду, что теорема гарантирует существование функции Φ лишь в ω – окрестности неособой точки a, но не разом во всей области Ω. Что касается окрестностей положения равновесия, то в них первые интегралы могут как существовать, так и нет. Тут оказывается необходимым дополнительное исследование.

В заключение продемонстрируем некоторые приемы отыскания первых интегралов на примере решения следующей задачи.

Задача 6.4.1 Найти первые интегралы для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,, \\ \dot{y} &= y\,, \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 + z\,. \end{cases}$$

Решение: Исключая независимую переменную t из первых двух уравнений, получаем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, что дает $y = C_1 x$.

Значит $\dfrac{y}{x}$ есть первый интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

При поиске первых интегралов часто оказывается удобным использование *правила пропорций* (или *свойства равных дробей*):
если
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$
то
$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$
Для использования этого правила запишем исходную систему в так называемом *симметричном виде*, когда нет явного указания на то, какая из переменных является независимой. В этом случае для записи используются не производные, а дифференциалы:
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае
$$\frac{(-2x)dx}{(-2x)x} = \frac{(-2y)dy}{(-2y)y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2},$$

а это (по правилу пропорций) дает равенство полных дифференциалов
$$\frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2} = \frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} = \frac{dx}{x}.$$

Откуда в силу равенства $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2$ находим другой первый интеграл $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x}$, который очевидно независим от найденного ранее, поскольку он, в отличие от последнего, в своей записи содержит переменную z.

Решение получено

6.5. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

До сих пор в нашем курсе рассматривались дифференциальные уравнения (системы уравнений), в которых неизвестными являлись функции (вектор-функции) от одной независимой переменной. Однако в приложениях достаточно часто возникают дифференциальные уравнения, неизвестные в которых являются функциями от нескольких переменных. При этом, если такие уравнения содержат частные производные от неизвестных порядка не выше первого, то (как будет показано ниже) их решения сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому традиционно изучаются в курсах, подобному нашему. Уравнения с частными производными более высоких порядков рассматриваются в других разделах высшей математики, например, в курсе *уравнений математической физики.*

Пусть в некоторой области $G \subseteq E^{2n+1},\ n \geq 2$ определена действительная непрерывно дифференцируемая функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

такая, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)^2 \neq 0 \quad \text{в каждой точке } G\,.$$

Тогда можно дать

Определение 6.5.1	Уравнение вида $$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0 \qquad (6.5.1)$$ называется *уравнением в частных производных первого порядка* относительно неизвестной функции $u = u(x),\ x \in \Omega \subseteq E^n$, где $$\|x\| = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^{\mathrm{T}}.$$

Определение 6.5.2	Функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *решением* уравнения (6.5.1), если: 1°. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в Ω. 2°. $\forall x \in \Omega$ точка $$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \in G\,.$$ 3°. $\forall x \in \Omega$ $$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \equiv 0\,.$$

Среди уравнений вида (6.5.1) важную для приложений роль играют их специальные частные случаи: *линейные* и *квазилинейные* уравнения.

К линейным уравнениям в частных производных первого порядка относят уравнения вида

$$a_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

а *квазилинейными* называют уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\,.$$

Как легко видеть к линейным относятся уравнения, в запись которых неизвестная функция и ее производные входят линейно, а для квазилинейных уравнений линейность имеется лишь по производным.

Важно: в обоих случаях предполагается, что известные функции $a_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ удовлетворяют в Ω и в G соответственно условиям

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2(x) \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2(x, u) \neq 0\,.$$

Приступим теперь к рассмотрению методов решения уравнений (6.5.1). Поскольку алгоритмы решений для разных классов этих уравнений базируются на идеях, аналогичных друг другу, рассмотрим подробно метод решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0\,, \tag{6.5.2}$$

где $a_k(x)\ \ \forall k = [1, n]$ – известные непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2(x) \neq 0\ \ \forall\, x \in \Omega\,.$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $a(x)$ такую. что

$$\|\, a(x)\| = \|\, a_1(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n),\, a_2(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n),\, \ldots,\, a_n(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\|^{\mathrm{T}}.$$

Тогда уравнение (6.5.2) можно записать в неразвернутом матричном виде как

$$\|\, a(x)\|^{\mathrm{T}}\|\,\mathrm{grad}\, u(x)\| = 0\,.$$

Определение 6.5.3	Автономная система $$\|\,\dot{x}(t)\| = \|\, a(x)\| \tag{6.5.3}$$ называется *характеристической системой* для уравнения (6.5.2), а ее фазовые траектории *характеристиками* этого уравнения.

Связь между решением уравнения (6.5.2) и решением его характеристической системы (6.5.3) описывает

Теорема 6.5.1 **В некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in \Omega$ общее решение уравнения (6.5.2) имеет вид**

$$u(x) = \Phi\,(\, u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots,\, u_{n-1}(x)\,)\ ,$$

где $u_k(x), k = [1, n-1]$ – функционально независимые в x_0 первые интегралы характеристической системы (6.5.3), а $\Phi\,(\,\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n-1$ переменной.

Доказательство

1°. По теореме 6.4.1 каждое решение уравнения (6.5.2) является первым интегралом его характеристической системы (6.5.3), поскольку из (6.5.2) следует, что производная этого решения в силу системы (6.5.3) оказывается равной нулю.

2°. Согласно пункту 2° теоремы 6.4.3 для $u(x)$ любого первого интеграла характеристической системы (6.5.3) в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Omega$ существуют $n-1$ функционально независимых первых интегралов $\{\,u_1(x),\,u_2(x),\,\ldots,\,u_{n-1}(x)\,\}$ таких, что

$$u(x) = \Phi\,(\,u_1(x),\,u_2(x),\,\ldots,\,u_{n-1}(x)\,)\ ,$$

где $\Phi\,(\,\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n-1$ переменной.

Теорема доказана.

Таким образом можно заключить, что общее решение однородного уравнения в частных производных первого порядка содержит в своей записи произвольную непрерывно дифференцируемую функцию, в то время как, например, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t,x)$ выражается через произвольную постоянную.

Для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка правило записи общего решения полностью аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений: общее решение неоднородного уравнения есть общее решение однородного, сложенного с частным (любым!) решением неоднородного.

Выделение конкретного частного решения из общего для уравнений в частных производных осуществляется путем задания дополнительных условий: начальных, краевых, смешанных и т.д.

Рассмотрим в качестве примера *задачу Коши* для уравнения (6.5.2). Пусть непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$, $x \in \Omega \subseteq E^n$ такова, что $\operatorname{grad} g(x) \neq o \ \ \forall x \in \Omega$. Тогда уравнение $g(x) = 0$ задает в Ω гладкую $(n-1)$-мерную гиперповерхность γ, называемую *начальной поверхностью*. И пусть на этой начальной поверхности задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$. Теперь мы можем дать

Определение 6.5.4	*Задачей Коши* называется задача отыскания $u(x)$ – такого решения уравнения $$\| \, a(x)\|^{\mathrm{T}} \| \operatorname{grad} u(x)\| = 0\,, \qquad (6.5.4)$$ для которого $u(x)\Big\|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$.

Задача Коши для линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка, в отличие от случая обыкновенных линейных уравнений первого порядка, обладает следующими особенностями. Во-первых, ее решение существует и единственно не для любой гладкой начальной поверхности γ. Во-вторых, ее разрешимость имеет локальный характер.

Для уточнения условий однозначной разрешимости задачи Коши дадим

Определение 6.5.5	*Характеристической точкой* задачи Коши вида (6.5.4) называется точка $x_0 \in \gamma$ такая, что $$\dot{g}(x_0) = \| \, a(x_0)\|^{\mathrm{T}} \| \operatorname{grad} g(x_0)\| = 0\,.$$

Сравнение определений 6.5.4 и 6.5.5 дает следующую геометрическую интерпретацию: в характеристической точке вектор $a(x_0)$ касается поверхности γ. При этом оказывается справедливой

Теорема 6.5.2 **Если точка $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то в $\omega \subset \Omega$ – некоторой окрестности x_0, решение задачи Коши существует и единственно.**

`Доказательство`

Поскольку $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то $a(x_0) \neq o$. Тогда в ω – некоторой окрестности x_0, существуют $n-1$ функционально независимые первые интегралы характеристической системы (6.5.3) и общее решение уравнения (6.5.4)

$$u(x) = \Phi\,(\,u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots,\, u_{n-1}(x)\,)\ .$$

Начальное условие $u(x)\Big|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$ однозначно определяет в ω вид функции $\Phi\,(\,\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{n-1})$. Что бы убедиться в этом, вначале покажем, что в ω к системе уравнений

$$\begin{cases} u_k(x) = C_k, \quad k = [1, n-1], \\ g(x) = 0 \end{cases} \tag{6.5.5}$$

применима известная из курса математического анализа теорема *о системе неявных функций.*
Поскольку все функции входящие в условие системы (6.5.5) непрерывно дифференцируемы в ω, то достаточно показать, что якобиан

$$J = \frac{\partial\,(\,u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_{n-1},\,g\,)}{\partial\,(\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1},\,x_n\,)}\Bigg|_{x=x_0} \neq\ 0.$$

Если предположить противное, то есть, что $J = 0$, то из линейной независимости первых $n-1$ строк матрицы Якоби следует, что последняя ее строка есть нетривиальная линейная комбинация остальных строк. Значит,

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Найдем в этом случае значение $\dot g(x)$ – производной в силу системы (6.5.3), при $x = x_0$. Имеем

$$\dot g = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial g}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \dot{u}_j = 0\,,$$

поскольку все $u_j(x), \quad j = [1, n-1]$ суть первые интегралы характеристической системы (6.5.3).
Этот результат противоречит условию доказываемой теоремы о том, что x_0 не характеристическая точка задачи Коши. Поэтому $J \neq 0$, теорема о системе неявных функций применима в рассматриваемом случае и в окрестности ω существует единственное непрерывно дифференцируемое решение системы (6.5.5) $x = f\,(\,u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_{n-1})$.

Наконец, $\forall x \in \gamma \cap \omega$ справедливо равенство

$$\varphi(x) = \varphi\,(f\,(\,u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_{n-1})\,) = \Psi\,(\,u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_{n-1})\ .$$

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $f\,(\,u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_{n-1})$ известны, то функция

$$u(x) = \Psi\,(\,u_1(x),\,u_2(x),\,\ldots,\,u_{n-1}(x)\,)\ ,$$

являющаяся решением задачи Коши в ω, также известна и единственна.

Теорема доказана.

Теперь продемонстрируем особенности практического использования полученных теоретических результатов.

Задача 6.5.1 Найти общее решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y} - z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием

$$u = y \quad \text{при} \quad x = z\,.$$

`Решение:`

1°. Для данного уравнения в частных производных составляем характеристическую систему в симметричной форме

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} = -\frac{dz}{z^2}\,.$$

2°. Один из двух функционально независимых первых интегралов находим так

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = C_1.$$

3°. Другой первый интеграл попробуем найти из уравнения

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y(z-x)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{z-x}{x^2}\,dx = \frac{dy}{y}\,.$$

С учетом $z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$ – условия связи, следующего из уже найденного первого интеграла, получаем

$$\left(\frac{1}{x(C_1 x - 1)} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{dy}{y}.$$

Разложение первого слагаемого в больших скобках дает

$$\frac{1}{x(C_1 x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{C_1 x - 1} \quad \Rightarrow \quad A = -1;\ B = C_1.$$

Откуда

$$-\frac{2}{x}dx + \frac{C_1}{C_1 x - 1}dx = \frac{dy}{y}$$

$$-\ln x^2 + C_1 \ln|C_1 x - 1| = \ln|y| + \ln|\tilde{C}_2|\,.$$

Поэтому $\dfrac{C_1 x - 1}{x^2 y} = C_2$, что, с учетом равенства

$z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$, окончательно дает $xyz = C_2$.

Найденные первые интегралы очевидно функционально независимы, поскольку формула для одного из них содержит независимую переменную y, а для другого – нет. Таким образом, в силу теоремы 6.5.1, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \Phi \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z},\ xyz \right)$$

4°. Рассмотрим теперь задачу Коши. Отметим, что в данной задаче $\varphi(x, y, z) = y$, а начальная поверхность γ это плоскость $x - z = 0$, то есть $g(x, y, z) = x - z$. Составим вначале вспомогательную систему уравнений, включающую формулы первых интегралов и уравнение, задающее начальную поверхность

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} & = & C_1, \\ xyz & = & C_2, \\ x - z & = & 0. \end{array} \right. \tag{6.5.6}$$

Конкретный вид функции Ψ, дающей решение задачи Коши, можно найти, если при помощи вспомогательной системы (6.5.6) выразить независимые переменные через C_1 и C_2 и подставить эти выражения в формулу начальной поверхности. Действительно, из системы (6.5.6) получаем

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{2}{C_1}, \\ y & = & \dfrac{C_1^2 C_2}{4}, \\ z & = & \dfrac{2}{C_1}. \end{array} \right.$$

Первые интегралы (равно как и любые непрерывно дифференцируемые функции от них) сохраняют постоянные значения на траекториях характеристической системы. Поэтому те условия связи между первыми интегралами, которые имеют место на начальной поверхности, остаются верными при движении вдоль траекторий.
В нашем случае на начальной поверхности

$$u(x,y,z) = y = \frac{C_1^2 C_2}{4},$$

поэтому решением задачи Коши будет функция

Решение получено

$$\Psi(x,y,z) = \frac{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)^2 xyz}{4} = \frac{(x+z)^2 y}{4xz}.$$

Глава 7.

Введение в вариационное исчисление

7.1. Простейшая задача вариационного исчисления

Обозначим как $\mathcal{C}^1[a,b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\,(y_1,y_2)=\max_{x\in[a,b]}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{x\in[a,b]}|y_1'(x)-y_2'(x)|\quad\forall y_1,y_2\in\mathcal{C}^1[a,b]\,.$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством с нормой $\langle y\rangle=\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|+\max\limits_{x\in[a,b]}|y'(x)|$.

Пусть $F(x,y,p)$ непрерывно дифференцируемая при всех $x\in[a,b]$, $y\in(-\infty,+\infty)$ и $p\in(-\infty,+\infty)$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y)=\int\limits_a^b F\,(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{7.1.1}$$

на множестве $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]\subset\mathcal{C}^1[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a)=A$ и $y(b)=B$.

Определение 7.1.1	Будем говорить, что функционал (7.1.1) достигает на функции $y^*(x)$ *слабого локального минимума (максимума)*, если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $$\forall y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b] \ : \quad \rho\,(\, y(x),\, y^*(x)\,) < \varepsilon$$ выполняется неравенство $$J(y) \geq J(y^*) \quad (\ J(y) \leq J(y^*)\ )\ .$$ Если неравенства строгие (при $y \neq y^*$), то говорят о *строгом* экстремуме. Если же неравенства удовлетворяются *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, то экстремум называют *абсолютным.*

Задачу отыскания слабого локального экстремума называют *простейшей вариационной задачей*, или же *задачей с закрепленными концами.*

Основным инструментом при исследовании на экстремум функционала вида (7.1.1) служит его *вариация* — специальный тип функционала являющийся обобщением понятия дифференциала функции многих переменных. Для его определения нам потребуется еще одно подмножество в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$, а именно, $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ — множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций таких, что $y(a) = y(b) = 0$.

Заметим, что при любом вещественном параметре α функция $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha h(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, если $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Это свойство дает основание называть $h(x)$ *допустимым приращением* или *допустимой вариацией* $y(x)$ — аргумента исследуемого функционала (7.1.1). Наконец, рассматривая при $|\alpha| \leq \varepsilon$ множество значений функционала

$$J(y+\alpha h) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)\right) dx\,, \tag{7.1.2}$$

можно делать заключения об экстремальных свойствах исходного функционала (7.1.1) в малой окрестности функции $y(x)$ (в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$.)

Более конкретно, величину и направление изменения $J(y+\alpha h)$ (как функции параметра α при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$) можно оценивать по значению $\left.\dfrac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$. При сделанных предположениях (для малых по модулю значений α) функционал $J(y+\alpha h)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α. С другой стороны, (7.1.2) можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра α, для которого справедлива теорема Лейбница [1], утверждающая, что

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x) \right) dx\ . \quad (7.1.3)$$

Определение 7.1.2	Выражение $$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$ называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Первую вариацию принято обозначать $\delta J(y,h)$.

Обратите внимание на структурное сходство формулы (7.1.3) с формулой

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\,\omega_k\ ,$$

определяющей в E^n величину производной функции $F\left(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots\, \xi_n\right)$ по направлению $\|l\| = \|\,\omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_n\|^{\mathrm{T}}$.

Необходимое условие существования слабого экстремума, используя понятие первой вариации, формулирует

Теорема 7.1.1 **Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то** $\delta J(y^*,h) = 0 \;\; \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

[1] См., например, *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа, — М.: Высш. шк., 1981, т. 1,2.

Доказательство.

Пусть для определенности функционал $J(y)$ имеет на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ слабый локальный минимум. Тогда, согласно определению 7.1.1, в $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ существует некоторая окрестность $U_\varepsilon(y^*)$ такая, что $\forall y(x) \in U_\varepsilon(y^*)$ выполнено неравенство $J(y(x)) \geq J(y^*(x))$.

При этом $y(x)$ может быть представлена в виде $y^*(x)+\alpha h(x)$, где $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. И для непрерывно дифференцируемой по параметру α функции $J(y^*(x)+\alpha h(x))$ верно неравенство

$$J\left(y^*(x)+\alpha h(x)\right) \geq J(y^*(x)) \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b].$$

Значит функция $J(y^*(x)+\alpha h(x))$ имеет минимум в $\alpha = 0$ и, следовательно, ее производная $\delta J(y^*,h) = 0$ (в силу (7.1.3) и определения 7.1.2) для любой фиксированной функции $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

Теорема доказана.

При использовании теоремы 7.1.1 необходимо убеждаться в равенстве нулю первой вариации $\delta J(y^*,h)$ одновременно *для всех* функций $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$, что может оказаться непростой задачей. Более удобное для практического использования необходимое условие экстремума в случае простейшей вариационной задачи можно получить (следуя Лагранжу), проверив, что верна (часто называемая *основной леммой вариационного исчисления*)

Лемма 7.1.1 **Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и**

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b],$$

то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $f(x) \not\equiv 0,\ x \in [a,b]$. Тогда $\exists x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Например, пусть $f(x_0) > 0$.

В силу непрерывности $f(x),\ x \in [a,b]$ найдется $\Delta > 0$ такое, что

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \ \ \forall x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta].$$

В $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ выберем функцию $h(x) =$

$$= \begin{cases} (x - (x_0 - \Delta))^2 (x - (x_0 + \Delta))^2, & x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta], \\ 0, & x \notin [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]. \end{cases}$$

Согласно интегральной теореме о среднем имеем оценку

$$\int\limits_a^b f(x) h(x)\, dx = \int\limits_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} f(x) h(x)\, dx =$$

$$= f(\xi) \int\limits_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} h(x)\, dx \quad \geq \quad \frac{1}{2} f(x_0) \int\limits_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} h(x)\, dx > 0\ ,$$

где $\xi \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Но это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.1 позволяет получить необходимое условие простейшей вариационной задачи в следующей упрощенной форме, которую задает

Теорема 7.1.2 **Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x),\ x \in [a,b]$ есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0\ . \tag{7.1.4}$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$. С учетом формулы (7.1.3) это дает

$$0 = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) dx \; .$$

В условиях теоремы второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям

$$0 = \left. \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h(x) \right|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\, dx \; ,$$

поскольку $h(a) = h(b) = 0$.

Из непрерывности функции

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*}$$

и основной леммы вариационного исчисления (лемма 7.1.1) следует, что $y^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.1.4).

Теорема доказана.

Определение 7.1.3	Всякое решение уравнения Эйлера (7.1.4) называется экстремалью функционала $J(x, y, y')$. В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Сделанное при выводе уравнения Эйлера предположение о непрерывности второй производной допустимой экстремали оказывается излишним, если использовать, приводимою здесь без доказательства, следующую лемму.

Лемма 7.1.2 (Дюбуа-Реймона) **Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и**

$$\int\limits_a^b f(x)h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b],$$

то $f(x) \equiv const$ на $[a, b]$.

Действительно, пусть $G(x) = \int\limits_a^x \dfrac{\partial F(u, y(u), y'(u))}{\partial y} du$. Тогда, в силу теоремы 7.1.1 имеем

$$\delta J(y^*, h) = 0 = \int\limits_a^b \left(G'(x)h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) dx =$$

(интегрируя первое слагаемое по частям)

$$= G(x)h \Bigg|_a^b - \int\limits_a^b G(x)h' dx + \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - G(x) \right) h' du\,,$$

если учесть, что $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.

Применив теперь утверждение леммы Дюбуа-Реймона, получаем *интегральную форму* уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int\limits_a^x \frac{\partial F}{\partial y} du \equiv const\,.$$

Откуда, окончательно следует, что

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

Полученное условие экстремальности является необходимым, но не достаточным. Однако, в тех случаях, когда допустимая экстремаль однозначно определяется уравнением Эйлера и граничными условиями, целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремальность непосредственно по его определению. Использование этого метода иллюстрирует

Задача 7.1.1 Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 0, \ y(1) = 2 \ .$$

Решение: Заметим, что

$$J(y) = \frac{1}{4} + \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx$$

и исследование на экстремальность достаточно выполнить для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx \ .$$

Составим и решим уравнение Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y' \ , \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'' \ ,$$

следовательно,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y'' - y = 0 \ .$$

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 e^{\dfrac{x}{2}} + C_2 e^{-\dfrac{x}{2}}$$

есть множество всех экстремалей, в том числе и допустимых.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} C_1 & + & C_2 & = & 0 \ , \\ C_1 e^{\frac{1}{2}} & + & C_2 e^{-\frac{1}{2}} & = & 2 \ . \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}}\,,$$

и единственная *допустимая* экстремаль дается формулой

$$y^*(x) = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}}\,.$$

Исследуем найденную допустимую экстремаль на оптимальность. Пусть $h(x)$ – произвольная пробная функция из класса $\mathcal{C}^1_{00}[0,1]$. Оценим знак приращения функционала

$$J(y^*+h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(y^*+h)^2}{2} + 2((y^*)'+h')^2 - \frac{(y^*)^2}{2} - 2((y^*)')^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y^* h\,dx + 4\int\limits_0^1 (y^*)'h'\,dx + \int\limits_0^1 \left(\frac{h^2}{2} + 2h'^2\right) dx =$$

(проинтегрировав второй интеграл по частям и перегруппировав слагаемые)

$$= \int\limits_0^1 (y^* - 4(y^*)'')\,h\,dx + 4(y^*)'h\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \left(\frac{h^2}{2} + 2h'^2\right) dx \geq 0,$$

поскольку первый интеграл равен нулю в силу равенства $y^* - 4(y^*)'' = 0$, а проинтегрированная часть есть ноль по свойству пробной функции $h(0) = h(1) = 0$.
Таким образом, приходим к заключению о том, что допустимая экстремаль $y^*(x)$ доставляет исследуемому функционалу абсолютный минимум.

Допустимая экстремаль, находимая из уравнения Эйлера, вообще говоря, не обязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

`Задача 7.1.2` Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^\pi \left(y'^2 - \frac{25}{4} y^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 1, \ y(\pi) = 2 \ .$$

`Решение:` Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4} y = 0 \ .$$

Его общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2} \ ,$$

а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos \frac{5x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \ .$$

Возьмем $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[0, \pi]$ вида $h(x) = \dfrac{1}{n} \sin mx$, где n и m – произвольные натуральные числа. Тогда, выполнив преобразования аналогичные сделанным при решении задачи 7.1.1, получим

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) dx = \left(m^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2n^2}.$$

Откуда следует, что $\Delta J < 0$ при $m < \dfrac{5}{2}$ и $\Delta J > 0$ при $m > \dfrac{5}{2}$. Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.

7.2. Задачи вариационного исчисления с функционалами обобщенного вида

Рассмотрим теперь более общие постановки задач вариационного исчисления, а именно, случаи, когда оптимизируемый функционал представляется:

— интегралом, зависящим от производных высших порядков;

— интегралом, зависящим от нескольких неизвестных функций;

— кратным интегралом от неизвестной функции нескольких переменных;

Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим $\mathcal{C}^k[a,b]$ – множество всех k раз ($k \geq 2$) непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{x\in[a,b]} \left| y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) \right| \ ,$$

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^1[a,b] \ .$$

Ясно, что в этом случае множество $\mathcal{C}^k[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y, p_1, \ldots, p_k)$ непрерывно дифференцируемая $k+1$ раз при всех $x \in [a,b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p_i \in (-\infty, +\infty)$ $\forall i = [1,k]$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k)}(x)\right) dx \tag{7.2.1}$$

на множестве $\mathcal{C}^k_{\vec{A}\vec{B}}[a,b] \subseteq \mathcal{C}^k[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y^{(i)}(a) = A_i$ и $y^{(i)}(b) = B_i$, $\forall i = [0, k-1]$.

По аналогии с ранее использованной символикой, через $\mathcal{C}^k_{\vec{0}\vec{0}}[a,b]$ будем обозначать подмножество функций $h(x)$ в $\mathcal{C}^k[a,b]$, для которых $h^{(i)}(a) = 0$ и $h^{(i)}(b) = 0$, $\forall i = [0, k-1]$. Заметим также, что для данного класса функций справедлив аналог основной леммы вариационного исчисления.

Определение 7.2.1 Будем говорить, что функционал (7.2.1) достигает на функции $y^*(x)$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall y(x) \in \mathcal{C}^k_{AB}[a,b] \;:\quad \rho\,(\,y(x),\,y^*(x)\,) < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$J(y) \ge J(y^*) \quad (\,J(y) \le J(y^*)\,)\ .$$

Если неравенства строгие, то говорят о *строгом* экстремуме. Если же неравенства удовлетворяются *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^k_{AB}[a,b]$, то экстремум называют *абсолютным.*

Как и в случае простейшей вариационной задачи из теоремы Лейбница следует, что справедливо равенство

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}h'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}h^{(k)}(x)\right)\,dx\ , \qquad (7.2.2)$$

левая часть которого называется первой вариацией функционала (7.2.1).

Повторяя рассуждения проведенные в предыдущем параграфе, нетрудно убедиться, что равенство нулю этой первой вариации есть необходимое условие существования экстремума функционала (7.2.1). Более того, выполнив последовательное интегрирование по частям выражения стоящего в правой части (7.2.2), в силу свойств функций $h(x) \in \mathcal{C}^k_{00}[a,b]$ можно придти к заключению, что справедлива

Теорема 7.2.1 **Если $2k$ раз непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$, $\in \mathcal{C}^k_{AB}[a,b]$ является слабым экстремумом для функционала (7.2.1), то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера – Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0\ . \quad (7.2.3)$$

Эта теорема является сравнительно удобным инструментом, позволяющем выделять «подозрительные на экстремум функционала» (7.2.1) функции.

Определение 7.2.2 Всякое решение уравнения (7.2.3) называется экстремалью функционала $J(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$.
В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^k_{AB}[a,b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

Пусть $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ – множество всех вектор-функций $\vec{y}(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$, компонентами $y_k(x)$, $\forall k \in [1,n]$. В этом случае $\vec{y}'(x)$ также будет являться вектор-функцией с компонентами $y'_k(x)$, $\forall k \in [1,n]$. И пусть расстояние между вектор-функциями $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ определяется формулой

$$\rho\left(\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)\right) =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_{1k}(x) - y_{2k}(x)\right)^2} + \max_{x\in[a,b]} \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y'_{1k}(x) - y'_{2k}(x)\right)^2}$$

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]\ .$$

В этом случае множество $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y_k \in (-\infty, +\infty)$ и $p_k \in (-\infty, +\infty)$ $\forall k = [1,n]$

функция. Рассмотрим функционал

$$J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F\Big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\Big) dx \qquad (7.2.4)$$

на множестве $\vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a,b] \subseteq \vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ функций $\vec{y}(x)$, удовлетворяющих условиям $y_k(a) = A_k$ и $y_k(b) = B_k$, $\forall k = [1,n]$.

Определение 7.2.3

Будем говорить, что функционал (7.2.4) достигает на функции $\vec{y}^*(x)$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall \vec{y}(x) \in \vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a,b] \text{ таких, что } \rho\,(\ \vec{y}(x),\ \vec{y}^*(x)\ ) < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$J(\vec{y}) \geq J(\vec{y}^*) \quad (\ J(\vec{y}) \leq J(\vec{y}^*)\ )\ .$$

Если неравенства строгие, то говорят о *строгом* экстремуме. Если же неравенства удовлетворяются *для всех* функций $\vec{y}(x) \in \vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$, то экстремум называют *абсолютным.*

Покажем теперь, что справедлива

Теорема 7.2.2

Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{y}^*(x),\ \in \vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$ **является слабым экстремумом для функционала (7.2.4), то ее компоненты удовлетворяют** *системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0\,,\ \forall k \in [1,n]\ . \qquad (7.2.5)$$

Доказательство.

Присвоим в функционале (7.2.4) всем, за исключением k-ой, компонентам $\vec{y}(x)$ значения $\vec{y}^*(x)$. Получим простейшую задачу вариационного исчисления относительно $y_k(x)$.

Необходимое условие экстремальности $y_k(x)$ имеет вид k-го уравнения системы (7.2.5.) Поскольку $k \in [1, n]$ может быть любым натуральным, то все уравнения системы (7.2.5) справедливы.

Теорема доказана.

Определение 7.2.4 Всякое решение системы уравнений (7.2.5) называется экстремалью функционала

$$J(x, y, y', \ldots, y^{(k)}).$$

В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\vec{C}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Функционалы, являющиеся кратными интегралами

В большом числе важных для приложений классов вариационных задач подлежащий оптимизации функционал представляется кратным интегралом некоторого порядка. Ниже будут приведены (без полного теоретического обоснования) основные сведения, относящиеся к случаю двойного интеграла, поскольку формальное увеличение размерности не приводит к возникновению каких-либо дополнительных теоретических трудностей.

Пусть $\mathbf{C}^1(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u(x, y)$, определенных в замкнутой, ограниченной кусочно-гладкой линией $\partial\Omega$ и измеримой по Жордану области Ω, принадлежащей декартовой координатной плоскости с ортонормированным базисом.

Определим расстояние между вектор-функциями $u(x, y)$ и $v(x, y)$ формулой

$$\rho\left(u(x,y), v(x,y)\right) = \max_{(x,y)\in\Omega} |u(x,y) - v(x,y)| +$$

$$+ \max_{(x,y)\in\Omega} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right| + \max_{(x,y)\in\Omega} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right| ,$$

$\forall u(x,y), v(x,y) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$.

В этом случае множество $(C)^1(\Omega)$ является линейным нормированным пространством.

Обозначим через $\mathbf{C}_0^1(\Omega)$ подмножество функций $h(x,y) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ таких, что $h(x,y) = 0\,, \forall (x,y) \in \partial\Omega$. Тогда справедлива, обобщающая лемму 7.1.1 — основную лемму вариационного исчисления,

Лемма 7.2.1 **Пусть** $f(x,y)$ **непрерывна в** Ω **и** $\forall h(x,y) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy = 0\ ,$$

тогда $f(x,y) \equiv 0$ **в** Ω**.**

Доказательство леммы проводится «от противного» и дословно повторяет рассуждения, использованные при доказательстве основной леммы вариационного исчисления, за исключением формулы для функции $h(x,y)$.

Пусть $F(x,y,\xi,\eta,\kappa)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $(x,y) \in \Omega$ и $(\xi,\eta,\kappa) \in (-\infty,+\infty)$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx \qquad (7.2.6)$$

на множестве $\mathbf{C}_G^1(\Omega) \subseteq \mathbf{C}^1(\Omega)$ функций $u(x,y)$, удовлетворяющих условию $u(x,y) = G(x,y)\ ,\ \forall (x,y) \in \partial\Omega$, где $G(x,y)$ некоторая заданная и непрерывная на $\partial\Omega$ функция.

Определение 7.2.5

Будем говорить, что функционал (7.2.6) достигает на функции $u^*(x,y)$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall u(x,y) \in \mathbf{C}^1_G(\Omega) \text{ и } \rho\,(\,u(x,y),\, u^*(x,y)\,) < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$J(u) \geq J(u^*) \quad (\,J(u) \leq J(u^*)\,)\,.$$

Если неравенства строгие, то говорят о *строгом* экстремуме. Если же неравенства удовлетворяются *для всех* функций $u(x,y) \in \mathbf{C}^1_G(\Omega)$, то экстремум называют *абсолютным.*

В сделанных предположениях оказывается справедливой

Теорема 7.2.2

Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $u^*(x,y),\ \in \mathbf{C}^1_G(\Omega)$ **является слабым экстремумом для функционала (7.2.6), то она удовлетворяет** *системе уравнений Эйлера-Остроградского*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \kappa} = 0\,,\ \forall k \in [1,n]\,, \qquad (7.2.7)$$

где $\eta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\kappa = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, **а** $\dfrac{\partial}{\partial x}$ **и** $\dfrac{\partial}{\partial y}$ **— операторы полных частных производных.**

Определение 7.2.6

Всякое решение уравнения (7.2.7) называется экстремалью функционала

$$J\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathbf{C}^1_G(\Omega)$, она называется *допустимой экстремалью.*

7.3. Задачи вариационного исчисления с граничными условиями обобщенного вида

Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. И пусть $y(x)$ принадлежит $\mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ – множеству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций таких, что $y(a) = A$.

Определение 7.3.1 Задача отыскания слабого экстремума (то есть функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ с $y^*(a) = A$) функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b F\bigl(x, y(x), y'(x)\bigr)\, dx \qquad (7.3.1)$$

называется *задачей со свободным концом.*

Данное название отражает тот факт, что искомая функция при $x = b$ может иметь любое значение.

Необходимое условие оптимальности для задачи со свободным концом дает

Теорема 7.3.1 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ есть решение задачи со свободным концом, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0\,. \qquad (7.3.2)$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение задачи 7.3.1 – со свободным концом, то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in \mathcal{C}^1_{0-}[a,b]$, То есть такой, что $h(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a,b]$ и $h(a) = 0$.

Используя теорему Лейбница и рассуждая как при доказательстве теоремы 7.1.2, получаем

$$0 = \left.\frac{dJ(y^* + \alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} h'(x)\right)\right|_{y=y^*} dx\ .$$

Второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям. Тогда, с учетом $h(a) = 0$, приходим к равенству

$$0 = \left.\frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h(x)\right|_{x=b} + \int\limits_a^b \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{y=y^*} h(x)\,dx$$

Последнее равенство должно выполняться при любых $h(x) \in \mathcal{C}^1_{0-}[a,b]$, в том числе и для таких, что $h(b) = 0$. Тогда по основной лемме вариационного исчисления получаем, что для $y^*(x)$ справедливо уравнение Эйлера, а необходимое условие принимает вид

$$\left.\frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'}\right|_{x=b} h(b) = 0\ ,$$

что в силу произвольности $h(b)$ приводит к равенству (7.3.2).

Теорема доказана.

Определение 7.3.2	Всякое решение уравнения Эйлера (7.3.1) называется экстремалью в задаче со свободным концом. В случае, когда экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{A-}[a,b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Заметим, что аналогичное необходимое условие оптимальности может быть получено и для левого конца отрезка $[a,b]$.

В задаче со свободным концом правый конец допустимой экстремали мог находиться в любой точке прямой $x = b$. Поэтому ее обобщением естественно считать *задачу с подвижной границей,* которая заключается в поиске экстремали (7.3.1) при условии, что правый конец экстремали находится на достаточно гладкой линии $y = f(x), x \in [c, d]$ такой, что $a < c$ и $y^*(b) = f(b)$. Обратите внимание, что в такой постановке значение b является неизвестным.

Необходимое условие оптимальности в задаче с подвижной границей дает

`Теорема 7.3.2` **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x) \in \mathcal{C}^2_{A-}[a, b]$ есть решение задачи с правым концом, лежащем на линии $y = f(x)$, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,,$$

для которого $y(a) = A$, а также граничному условию при $x = b$, носящему название «*условие трансверсальности***»**

$$\left(F(x, y, y') + (f'(x) - y'(x))\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\right)\Bigg|_{x=b} = 0\,. \tag{7.3.3}$$

Доказательство этой теоремы, как и в ранее рассмотренных случаях, основано на использовании необходимого условия экстремума дифференцируемой функции одной переменной, свойств пробной функции, теоремы Лейбница и операции интегрирования по частям. Вычислительные особенности решения вариационных задач с подвижной границей демонстрирует

Задача 7.3.1 Найти допустимые экстремали для вариационной задачи с подвижной границей для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^b \left(y - y'^2\right)\, dx$$

с граничными условиями $\quad y(0) = 0, \quad y(b) = b^2 - 2$.

Решение: Отметим вначале, что в данной задаче $f(x) = x^2 - 2$. Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y', \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -2y'' ,$$

то уравнение Эйлера будет иметь вид $1 + 2y'' = 0$, а его решение

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + Cx + C_1 .$$

Откуда, из левого граничного условия $y(0) = 0$ находим, что $C_1 = 0$.

Граничное условие на правом конце является системой равенства $y(b) = b^2 - 2$ и условия трансверсальности. Иначе говоря, неизвестные величины C и b должны, во-первых, удовлетворять равенству

$$-\frac{1}{4}b^2 + Cb = b^2 - 2 , \tag{7.3.4}$$

и, во-вторых, условию трансверсальности

$$\left. \left(F(x, y, y') + (f' - y')\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right|_{x=b} = 0 ,$$

подстановка в которое конкретных условий решаемой задачи приводит к однородному уравнению вида

$$2b^2 - 4bC + C^2 = 0.$$

Последнее уравнение дает либо

$$C = (2 + \sqrt{2})b, \text{ либо } C = (2 - \sqrt{2})b.$$

В первом из этих случаев уравнение (7.3.4) вещественных решений не имеет, а во втором находится положительное значение

$$b = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{4\sqrt{2} + 3}}{\sqrt{23}},$$

составляющее совместно с $y^*(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + Cx$ решение задачи.

7.4. Условные вариационные задачи

В большом числе практически важных вариационных задач дополнительные условия (сужающие множество допустимых вариаций) не сводятся лишь к модификации оптимизируемого функционала или граничных условий, а являются ограничениями более общего вида.

Изопериметрическая задача.

Пример одной из таких задач, условно называемых *изопериметрическими*: отыскание на плоскости замкнутой линии заданной длины, ограничивающей фигуру максимально возможной площади, был известен еще в античные времена, рано как и ее решение – окружность.

Приведем возможную постановку изопериметрической задачи. Пусть функции $F(x, y, p)$ и $G(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x \in [a, b]$ и $(y; p) \in (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала по $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{7.4.1}$$

при условии

$$H(y) = \int\limits_a^b G(x, y(x), y'(x))\, dx = l\ , \tag{7.4.2}$$

где A, B и l – заданные числа. Уравнение (7.4.2) принято называть *условием связи*, а функционал (7.4.1) – *целевым функционалом.*

Метод решения изопериметрической задачи – отыскания локального слабого экстремума функционала (7.4.1) при условии (7.4.2), является аналогом метода множителей Лагранжа для задачи на условный экстремум функций многих переменных. Его основой служат функция Лагранжа

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x)) \ , \quad \lambda \in R \, .$$

и

Теорема 7.4.1 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$ есть решение изопериметрической задачи и вариация $\delta H(y^*, h) \neq 0 \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, тогда найдется такое λ, что $y^*(x)$ удовлетворяет** *уравнению Эйлера* **следующего вида**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \ .$$

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что найдется $h_0(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$ такая, что $\delta H(y^*, h_0) \neq 0$. Рассмотрим функционалы

$$u(\alpha, \alpha_0) = J(y^*(x) + \alpha h(x) + \alpha_0 h_0(x))$$

$$v(\alpha, \alpha_0) = H(y^*(x) + \alpha h(x) + \alpha_0 h_0(x))$$

как функции α и $\alpha_0 \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.

К этим функциям применимы известные теоремы о непрерывности и дифференцируемости собственных интегралов, зависящих от параметров, дающие равенства

$$u(0,0) = J(y^*) \ , \quad \frac{\partial u(0,0)}{\partial \alpha} = \delta J(y^*, h) \ , \quad \frac{\partial u(0,0)}{\partial \alpha_0} = \delta J(y^*, h_0) \ ;$$

$$v(0,0) = H(y^*)\ , \quad \frac{\partial v(0,0)}{\partial \alpha} = \delta H(y^*, h)\ , \quad \frac{\partial v(0,0)}{\partial \alpha_0} = \delta H(y^*, h_0)\ .$$

И, как их следствие, необходимое условие экстремальности $y^*(x)$, вытекающее из необходимого условия в задачах на условный экстремум и записываемое в виде тождества

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\alpha_0)}\right|_{\alpha=\alpha_0=0} \equiv 0\ , \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b].$$

Последнее равенство можно преобразовать следующим образом.

$$\begin{vmatrix} \delta J(y^*,h) & \delta H(y^*,h) \\ \delta J(y^*,h_0) & \delta H(y^*,h_0) \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ или}$$

$$\delta J(y^*,h) - \frac{\delta J(y^*,h_0)}{\delta H(y^*,h_0)} \delta H(y^*,h) \equiv 0\ .$$

В нашем случае $\delta H(y^*,h_0) \neq 0$, поэтому существует конечное $\lambda = -\dfrac{\delta J(y^*,h_0)}{\delta H(y^*,h_0)}$ такое, что

$$\delta J(y^*,h) + \lambda \delta H(y^*,h) \equiv 0\ ,$$

или же, в интегральной форме

$$\int\limits_a^b \left.\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} \right) h + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right) h' \right)\right|_{y=y^*} dx \equiv 0\,, \tag{7.4.2}$$

поскольку

$$\delta H(y,h) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y} h + \frac{\partial G}{\partial y'} h' \right) dx\,.$$

Проинтегрировав по частям в (7.4.2) слагаемое с $h'(x)$ и применив основную лемму вариационного исчисления (лемму 7.1.1), получим утверждение теоремы.

`Теорема доказана.`

Проиллюстрируем применение этой теоремы следующим примером.

Задача 7.4.1 Решить изопериметрическую задачу для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(y'\right)^2 \, dx$$

с граничными условиями $\quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$ и условием связи

$$H(y) = \int\limits_0^1 xy \, dx = 1 \, .$$

Решение: Лагранжиан в данной задаче имеет вид

$$L(x, y, y', \lambda) = (y')^2 + \lambda xy.$$

Уравнение Эйлера для него будет $2y'' - \lambda x = 0$, поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda x \ , \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = 2y' \ , \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'' \ .$$

Подставив общее решение уравнения Эйлера – уравнение экстремалей,

$$y(x) = \frac{\lambda}{12}x^3 + C_1 x + C_2$$

в условие связи и приняв во внимание граничные условия, находим, что $C_1 = \frac{9}{2}$, $C_2 = 0$ и $\lambda = -30$ и, следовательно, допустимая экстремаль имеет вид

$$y^*(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{9}{2}.$$

Выясним теперь тип найденной допустимой экстремали.

Пусть пробная функция $h(x)$ такова, что $h(0) = h(1) = 0$.

Кроме того, условие связи не должно нарушаться при варьировании, поэтому из равенства

$$\int\limits_0^1 x(y^*+h)\,dx = 1 \quad \text{должно следовать} \quad \int\limits_0^1 xh\,dx = 0\,.$$

Имеем оценку

$$\Delta J = J(y^*+h) - J(y^*) = \int\limits_0^1 \left(2(y^*)'h' + (h')^2\right)\,dx =$$

интегрируя по частям первое слагаемое и используя уравнение Эйлера $2(y^*)'' - \lambda x = 0$, получаем (с учетом свойств функции $h(x)$)

$$= 2y^{*\prime}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2(y^*)''h\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2 dx =$$

$$= -\lambda \int\limits_0^1 xh\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2 dx = \int\limits_0^1 (h')^2 dx \geq 0\,.$$

То есть, $y^*(x)$ доставляет целевому функционалу абсолютный минимум.

Рассмотренная изопериметрическая задача допускает следующее обобщение: условие связи может быть не единственным. В этом случае лагранжиан будет иметь несколько слагаемых, каждый из которых зависит от своего множителя Лагранжа. Теорема 7.4.1 обобщается на этот случай естественным образом.

Задача Лагранжа

В приложениях достаточно часто встречается класс условных вариационных задач, условия связи в которых могут задаваться для вектор-функций, и притом не обязательно в интегральной форме. Примером такой условной вариационной задачи служит так называемая *задача Лагранжа.* Приведем ее постановку.

Пусть $F(x, y, z, p, q)$ и $g(x, y, z)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции, заданные на $x \in [a, b]$ и $\{y; z; p; q\} \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть функционал

$$J(y, z) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)\Big)\, dx \qquad (7.4.3)$$

является целевым (то есть необходимо найти его слабый экстремум) на множестве пар функций $\Big\{y(x); z(x)\Big\}$ таких, что

$$\begin{aligned} & y(x), z(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]\ ; \\ & y(a) = A_1,\ y(b) = B_1,\ z(a) = A_2,\ z(b) = B_2\ ; \\ & g\Big(y(x), z(x)\Big) = 0\ ,\ \ \forall x \in [a, b]\ . \end{aligned}$$

Геометрически задача Лагранжа может быть интерпретирована следующим образом. Пусть в E^3 уравнение $g(x, y, z) = 0$ задает гладкую поверхность S, а вектор-функция $\|\ t\ \ y(t)\ \ z(t)\|^{\mathrm{T}}$ – непрерывно дифференцируемую линию L. Тогда в задаче Лагранжа требуется найти линию L, лежащую на поверхности S и проходящую через точки $\{a, A_1, A_2\}$ и $\{b, B_1, B_2\}$, на которой целевой функционал (7.4.3) достигает слабого локального экстремума.

Задача Лагранжа может быть сведена к простейшей вариационной задаче исключением при помощи соотношения $g(x, y, z) = 0$ из условий задачи одной из функций $y(x)$ или $z(x)$. Этот метод очевиден.

Однако, на практике более эффективным оказывается другой подход. Введем в рассмотрение лагранжиан вида

$$L = F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\, g(x, y, z)\,,$$

где $\lambda(x)$ некоторая непрерывная на $[a, b]$ функция. И пусть, кроме того,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 > 0 \quad \forall x \in [a, b]\ . \qquad (7.4.4)$$

Тогда справедлива

Теорема 7.4.2 **Пусть пара дважды непрерывно дифференцируемых функций** $\Big\{y^*(x); z^*(x)\Big\}$ **есть решение задачи Лагранжа, тогда существует такая функция** $\lambda(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, **что пара функций** $\Big\{y^*(x); z^*(x)\Big\}$ **удовлетворяет** *системе уравнений Эйлера* **вида**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial y'} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial z'} = 0 \ . \end{cases}$$

Доказательство.

Предположим вначале, что $g(x,y,z) = z - U(x,y)$, то есть поверхность S задается уравнением $z = U(x,y)$. Тогда целевой функционал задачи Лагранжа имеет следующий вид

$$J = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), U(x, y(x)), y'(x), \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dx}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right) dx$$

или, просто,

$$J = \int\limits_a^b G\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\, dx \ .$$

Составим для него уравнение Эйлера

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0 \ .$$

Будем теперь обозначать частные производные, записывая переменные, по которым производные берутся, в виде нижнего индекса, а производную по независимой переменной x будем обозначать штрихом. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции для левой части уравнения Эйлера имеем

$$F_y + F_z \cdot U_y + F_{z'}\left(U_{xy} + U_{yy}\right) - \left(F_{y'}\right)' - \left(F_{z'} \cdot U_y\right)' =$$
$$= F_y - \left(F_{y'}\right)' + U_y\left(F_z - \left(F_{z'}\right)'\right)\ ,$$

поскольку

$$\left(F_{z'} \cdot U_y\right)' = U_y \cdot \left(F_{z'}\right)' + F_{z'} \cdot \left(U_{xy} + U_{yy} \cdot y'\right)\ .$$

Правая часть уравнения Эйлера есть 0, поэтому, приняв во внимание, что $g_z = 1$ и $g_y = -U_y$, запишем уравнение Эйлера в виде

$$\frac{F_y - \left(F_{y'}\right)'}{g_y} = \frac{F_z - \left(F_{z'}\right)'}{g_z}.$$

Каждая из частей этого равенства есть функция от x. Если их обозначить как $-\lambda(x)$, то мы приходим к системе, указанной в условии теоремы.

В случае, когда уравнение $g(x,y,z) = 0$ не разрешимо относительно z в явном виде, можно применить (в силу условия (7.4.4)) теорему о неявных функциях, которая позволяет локально представить z как функцию от x и y.

`Теорема доказана.`

7.5. Замечания о достаточных условиях оптимальности в задачах вариационного исчисления

Формулировка достаточных условий слабого экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления основана на использовании более сложного, чем первая вариация, понятии — второй вариации целевого функционала, которого можно рассматривать как обобщение второго дифференциала функции многих переменных.

Пусть $F(x,y,p)$ трижды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y \in (-\infty,+\infty)$ и $p \in (-\infty,+\infty)$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) dx \tag{7.5.1}$$

на множестве $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b] \subset \mathcal{C}^1[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Дадим определение *второй вариации* функционала (7.5.1) по схеме аналогичной, использованной в § 7.1. Рассмотрим функцию $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha h(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, где α – вещественный параметр, а $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ – допустимая вариация $y(x)$ — аргумента исследуемого функционала (7.5.1). Как и раньше, будем рассматривать множество значений функционала

$$J(y+\alpha h) = \int_a^b F\Big(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)\Big) dx \tag{7.5.2}$$

при $|\alpha| \leq \varepsilon$.

При сделанных предположениях (для малых по модулю значений α) функционал $J(y+\alpha h)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией α. Его можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра α, для которого справедлива, упомянутая в § 7.1, теорема Лейбница, согласно которой

$$\left.\frac{d^2 J(y+\alpha h)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2(x) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} h(x)h'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2} {h'}^2(x) \right) dx\,. \tag{7.5.3}$$

Определение 7.5.1	Выражение $$\left.\frac{d^2 J(y+\alpha h)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$ называется *второй вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Вторую вариацию принято обозначать $\delta^2 J(y,h)$.

Преобразуем выражение для $\delta^2 J(y,h)$, проинтегрировав по частям второе слагаемое в подынтегральной функции (7.5.3),

$$\delta^2 J(y,h) = \int\limits_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2(x)\,dx + \left. \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} h^2(x) \right|_a^b - \int\limits_a^b h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\,dx +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2} {h'}^2(x)\,dx\,.$$

Внеинтегральное слагаемое очевидно рано нулю, поэтому в итоге мы получаем $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$

$$\delta^2 J(y,h) = \int\limits_a^b \Big(P(x){h'}^2(x) + Q(x)h^2(x) \Big)\,dx\,, \tag{7.5.4}$$

где

$$P(x) = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial {y'}^2},$$
$$Q(x) = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'(x))}{\partial y \partial y'}.$$

Выражение (7.5.4) является *квадратичным функционалом* при фиксированном $y(x)$ и $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

Как и в случае экстремальных задач для функций многих переменных, в вариационном исчислении понятие второй вариации используется для формулировки достаточных условий оптимальности целевого функционала (7.5.1.)

Определение 7.5.2

Квадратичный функционал

$$\Psi(y,h)=\int\limits_a^b\Big(P(x){h'}^2(x)+Q(x)h^2(x)\Big)\,dx\,,$$

называется *положительно определенным*, если существует $\delta>0$ такое, что

$$\Psi(y,h)\geq\delta\int\limits_a^b\Big({h'}^2(x)+h^2(x)\Big)\,dx\ \ \forall h(x)\in\mathcal{C}^1_{00}[a,b]\,.$$

Если же

$$\Psi(y,h)\leq-\delta\int\limits_a^b\Big({h'}^2(x)+h^2(x)\Big)\,dx\,,$$

то этот функционал называется *отрицательно определенным.*

Следующая теорема формулирует *достаточные* условия существования слабого экстремума, используя понятие второй вариации.

Теорема 7.5.1

Если

- $y^*(x)\in\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$**,**
- $\delta J(y^*,h)=0\ \ \forall h(x)\in\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ **и**
- **функционал $\delta^2 J(y^*,h)$, определяемый формулой (7.5.4), положительно определенный,**

то функция $y^*(x)$ – решение простейшей задачи вариационного исчисления, то есть, строгий слабый локальный минимум функционала (7.5.1).

Доказательство.

Можно найти в [1, 3]

Теорема доказана.

Непосредственный анализ знака функционала $\delta^2 J(y^*,h)$ является весьма сложной с практической точки зрения задачей. Альтернативный подход заключается в использовании уравнения Эйлера для данного функционала, которое имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dh}{dx}\right) - Qh = 0\,. \tag{7.5.5}$$

Не рассматривая в деталях рассуждения, выполненные вначале Лежандром и уточненные позднее Якоби (их можно найти, например, в [1]), отметим лишь, что исходя из этого уравнения можно показать, что справедлива

Теорема 7.5.2 **Если**

– $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$**,**

– для $y^*(x) = 0\ x \in [a,b]$ $\qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2} > 0$ **и**

– решение уравнения (7.5.5) не имеет нулей на (a,b) ,

то функция $y^*(x)$ **– решение простейшей задачи вариационного исчисления, иначе говоря, есть строгий слабый локальный минимум функционала (7.5.1).**

Доказательство.

Основная идея доказательства заключается в отыскании функции $w(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ такой, что

$$\delta^2 J(y^*,h) = \int\limits_a^b P(x)\left(h'(x) + \frac{w(x)}{P(x)}h(x)\right)^2\,dx\,.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что хотя очевидной альтернативой применению теорем 7.5.1 и 7.5.2 является использование определения экстремума функционала (7.5.1) (см., например, решение задачи 7.1.1), следует иметь в виду, что стандартные методы исследования на экстремум функций многих переменных в задачах вариационного исчисления могут иметь ограниченную применимость.

Проиллюстрируем эту особенность задач вариационного исчисления следующим примером.

Теорема 7.5.3 (Неравенство Виртингера) **Пусть функция $h(x)$**
– **непрерывна на $[0,\pi]$,**
– $h(0)=h(\pi)=0$ **и**
– **имеет производную с интегрируемым квадратом на $(0,\pi)$,**

тогда справедливо неравенство

$$I=\int\limits_0^\pi \Big(h'^2(x)-h^2(x)\Big)\ dx\ge 0\,.$$

Доказательство.

Воспользуемся соотношением

$$-1=\mathrm{ctg}^2x-\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\in(0,\pi)\ .$$

Тогда

$$I=\int\limits_0^\pi \left(h'^2(x)+h^2(x)\mathrm{ctg}^2x-\frac{h^2(x)}{\sin^2 x}\right)\ dx=$$

$$=\int\limits_0^\pi \Big(h'^2(x)+h^2(x)\mathrm{ctg}^2x\Big)\ dx-\int\limits_0^\pi \frac{h^2(x)}{\sin^2 x}dx\,.$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям, получим

$$I=\int\limits_0^\pi \Big(h'^2(x)+h^2(x)\mathrm{ctg}^2x\Big)\ dx+$$

$$+h^2(x)\mathrm{ctg}x\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi 2h(x)h'(x)\mathrm{ctg}x\,dx\,.$$

Проинтегрированная часть равна нулю, поскольку в силу условий теоремы в правой полуокрестности точки $x=0$ имеем $h(0+\Delta x)\sim\Delta x$. Аналогично, для левой полуокрестности точки $x=\pi$ используем, что $h(\pi-\Delta x)\sim\Delta x$.

Окончательно получаем

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left({h'}^2(x) - 2h(x)h'(x)\mathrm{ctg}x + h^2(x)\mathrm{ctg}^2 x \right)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(h'(x) - h(x)\mathrm{ctg}x \right)^2\, dx \geq 0\,.$$

`Теорема доказана.`

Таким образом, тот факт, что подынтегральная функция представима в виде разности полных квадратов, вообще говоря не позволяет сделать заключение об отсутствии у функционала знаковой определенности – в данном примере функции $h(x)$ и $h'(x)$ не являются независимыми.

Литература

[1] Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний. 2011.

[2] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2010.

[3] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

[4] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981, т. 1, 2.

[5] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1967.

[6] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.

[7] Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2009.

[8] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[9] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.