§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1. Основные понятия

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (2.1)$$

где $x \in \mathrm{R}$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные числа, причем $a_0 \neq 0$; $f(x)$ – известная функция, не равная тождественно нулю. Уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.2)$$

называется *однородным*.

Теорема 1.1. Общее решение линейного неоднородного уравнения (2.1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (2.2) и любого частного решения неоднородного уравнения (2.1):

$$y(x) = y_o(x) + y_ч(x). \qquad (2.3)$$

2.2. Общее решение однородного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (2.2) называется совокупность n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ этого уравнения.

Теорема 2.1. Однородное линейное дифференциальное уравнение (2.2) имеет фундаментальную систему решений.

Теорема 2.2. Общее решение однородного уравнения (2.2) представляет собой произвольную линейную комбинацию частных решений, входящих в фундаментальную систему решений,

$$y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \qquad (2.4)$$

Далее мы будем рассматривать уравнения с вещественными коэффициентами, их решения будем искать в вещественной форме.

Характеристическим уравнением, соответствующим однородному уравнению (2.2), называется алгебраическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (2.5)$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения (2.5), вообще говоря, комплексные.

Теорема 2.3.

1) Каждому вещественному простому корню λ характеристического уравнения (2.5) соответствует частное решение однородного уравнения (2.2), имеющее вид $y = e^{\lambda x}$.

2) Каждому вещественному корню λ кратности k $(k \geq 2)$ соответствует k линейно независимых частных решений однородного уравнения $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ... , $x^{k-1}e^{\lambda x}$. Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2.2) имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\lambda x}, \qquad (2.6)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные постоянные.

Теорема 2.4. Паре невещественных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два линейно независимых вещественных частных решения однородного уравнения (2.2) $\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и

$\operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые включают в фундаментальную систему решений, вместо функций $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2.2) представляется в виде

$$y(x) = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{2.7}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Теорема 2.5.

1) Если $\lambda = \alpha + i\beta$, где α и β – вещественные, $\beta \neq 0$, а $i^2 = -1$, является корнем характеристического уравнения (2.5), то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также корень этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами).

2) Если среди корней характеристического уравнения (2.5) есть корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k $(k \geq 2)$, то и комплексно сопряженный ему корень $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ имеет ту же кратность k. Этим $2k$ невещественным корням соответствуют $2k$ линейно независимых частных вещественных решений однородного уравнения (2.2)

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, ... , $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, ... , $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (2.2) имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} y(x) = &\left(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ &+\left(D_1 + D_2x + \ldots + D_kx^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}, \tag{2.8}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$, $D_1, D_2, \ldots, D_k$ – произвольные постоянные.

Так можно построить совокупность решения, являющуюся общим решением уравнения (2.2).

2.3. Частное решение неоднородного уравнения с правой частью специального вида

Пусть правая часть $f(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, т.е. является суммой функций вида

$$g(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right), \text{ т.е. } g(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}\widetilde{P}_k(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}\widetilde{Q}_k(x)$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$, $\widetilde{P}_k(x)$, $\widetilde{Q}_k(x)$ – многочлены действительной переменной x с, вообще говоря, комплексными коэффициентами.

В этом случае для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

Пусть правая часть уравнения (2.1) имеет вид $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ – многочлен степени m, γ – комплексное или вещественное число.

Теорема 3.1. Если γ не является корнем характеристического уравнения (2.5), то говорят, что имеет место *нерезонансный случай*; частное решение неоднородного уравнения (2.1) ищется в виде

$$y_ч = Q_m(x)e^{\gamma x}, \tag{2.9}$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.

Если γ является корнем (2.5) кратности s, то говорят, что имеет место *резонанс* кратности s; частное решение (2.1) ищется в виде

$$y_ч = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}. \qquad (2.10)$$

Напомним, что корень уравнения λ^* (2.5) называется *корнем кратности k*, если полином $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ делится на многочлен $(\lambda-\lambda^*)^k$, но не делится на многочлен $(\lambda-\lambda^*)^{k+1}$.

Для определения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ следует (2.9) или (2.10) подставить в (2.1), сократить на $e^{\gamma x}$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. Из получившейся системы алгебраических уравнений найдем эти коэффициенты.

Теорема 3.2. Пусть коэффициенты левой части уравнения (2.1) вещественны, а его правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$.

Если $\gamma = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (2.5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (2.1) ищется в виде

$$y_ч = (R_p \cos\beta x + T_p \sin\beta x)e^{\alpha x}, \qquad (2.11)$$

где $p = \max\{m, n\}$ **– наибольшей из степеней многочленов** $P_m(x)$ **и** $Q_n(x)$**,** R_p **и** T_p – многочлены степени не выше p.

Если $\gamma = \alpha + i\beta$ является корнем (2.5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (2.1) ищется в виде

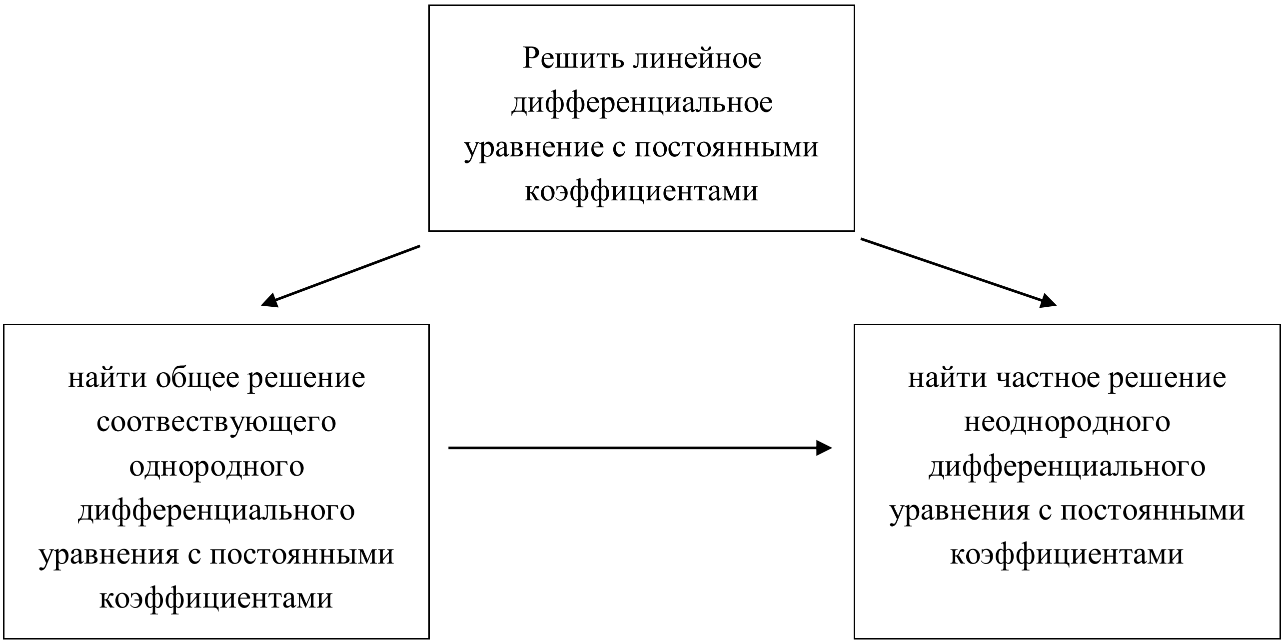
$$y_ч = x^s (R_p \cos\beta x + T_p \sin\beta x)e^{\alpha x}. \qquad (2.12)$$

Чтобы найти коэффициенты многочленов R_p и T_p, надо подставить (2.11) или (2.12) в уравнение (2.1), приравнять коэффициенты при подобных членах и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Теорема 3.3. Если правая часть уравнения (2.1) представима в виде суммы нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_l(x)$, то частное решение неоднородного уравнения (2.1) состоит из суммы частных решений y_i неоднородных уравнений

$$a_0 y_k^{(n)} + a_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_k' + a_n y_k = f_k(x) \quad (k = \overline{1,l}).$$

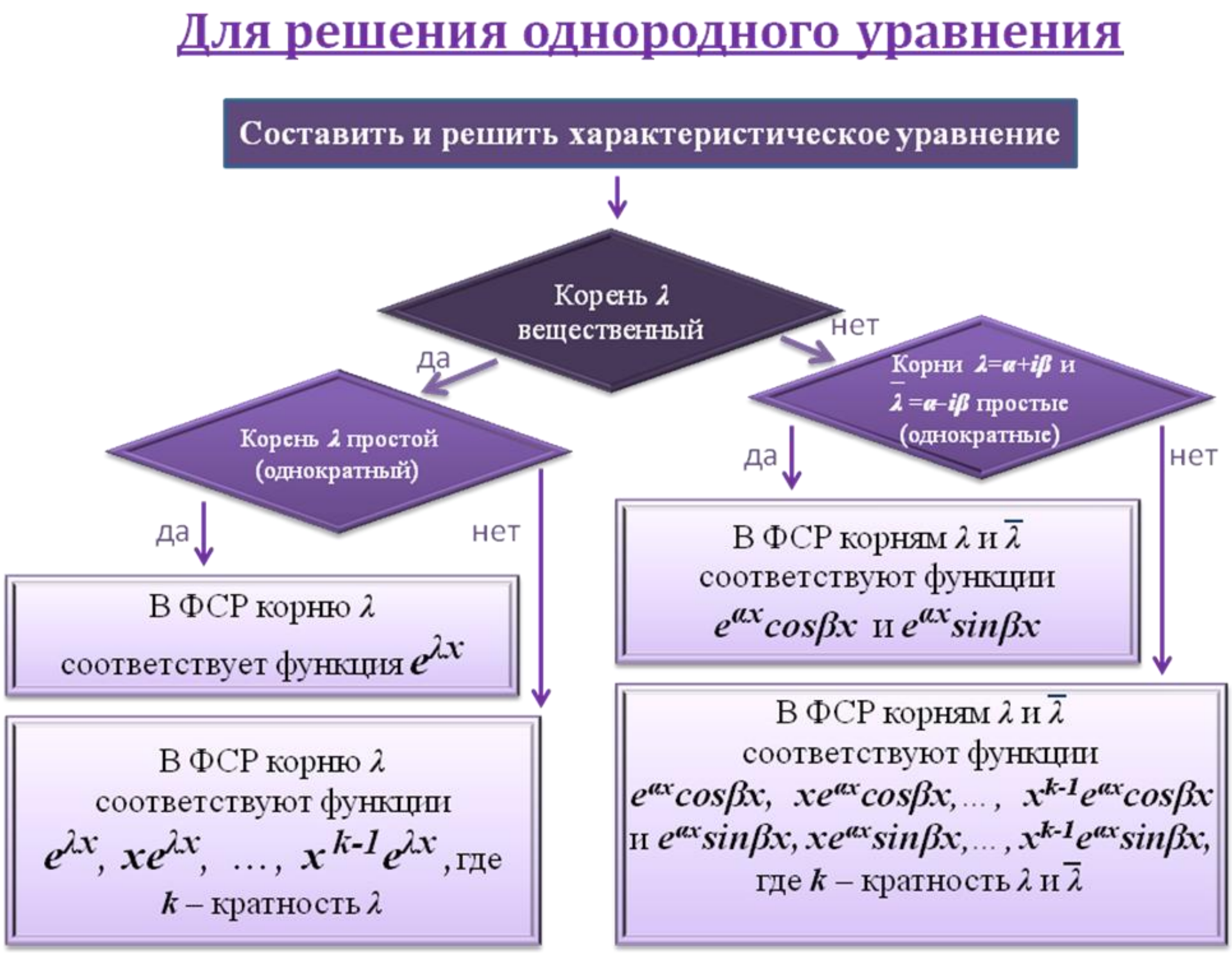
2.4. Схема решения.



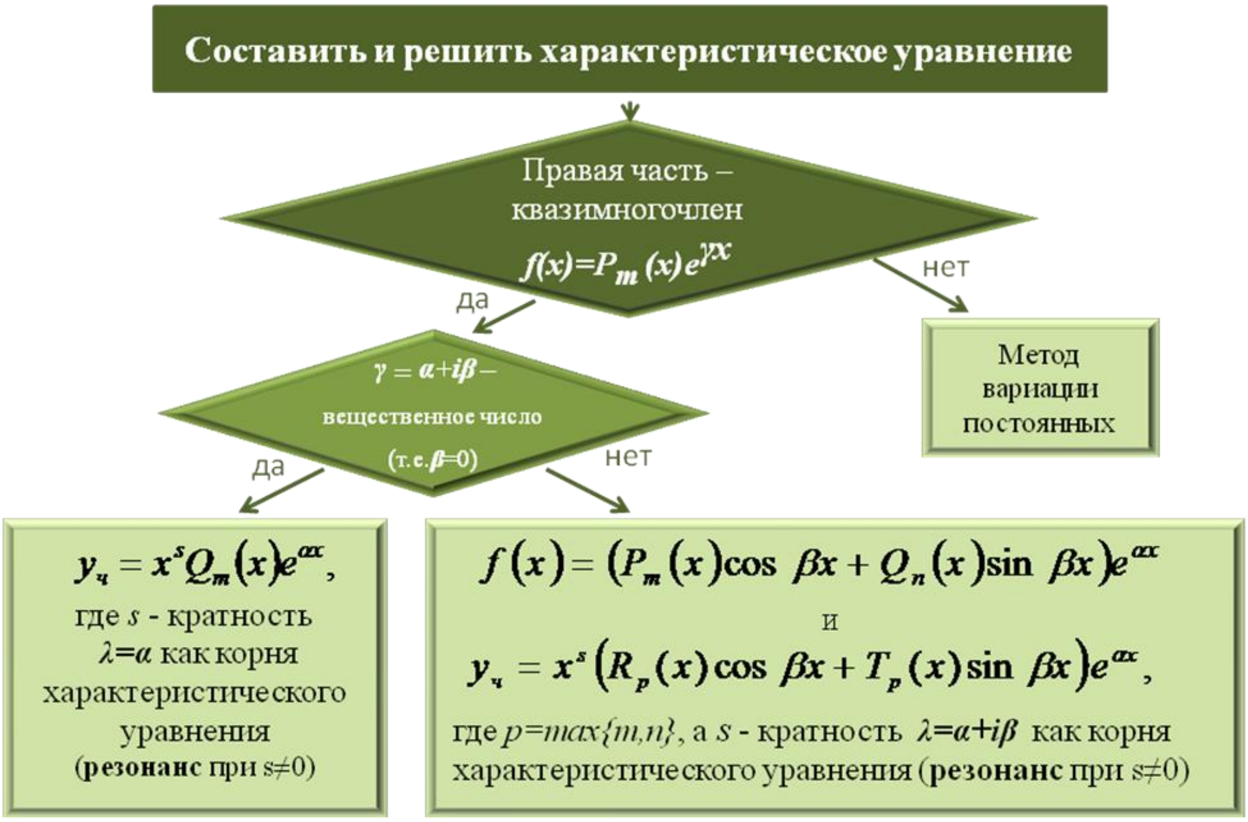
Ответ = общее решение однородного + частное решение неоднородного

уравнения с постоянными коэффициентами

Итак, суммируя вышеизложенное, пошаговые процедуры отыскания общего решения однородного уравнения с постоянными коэффициентами и частного решения неоднородного уравнения мы можем проиллюстрировать двумя подробными схемами:



Для отыскания частного решения неоднородного уравнения



2.5. Литература.

1. *Ипатова В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н.*. Дифференциальные уравнения. Методы решений: - Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. (§1)
2. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. (Гл. 2 §1, 2, 3).
3. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /Под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (Гл. 2 §8).
4. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985. (Гл. 3 §7).
5. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. (Гл. 3 §11).
6. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992. (§11)

2.6. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах в МФТИ

Пример 2.1. Найдите общее решение уравнения $y^{IV}+4y''=8e^{2x}+8x^2$ в вещественном виде.

① Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y^{IV}+4y''=0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^4+4\lambda^2=0$.

Его корни $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=2i$, $\lambda_4=-2i$.

$\lambda_{1,2}=0$ (кратности два) соответствуют частные решения $y_1=e^{0x}=1$ и $y_2=xe^{0x}=x$, корням $\lambda_{3,4}=\pm 2i$ – решения $y_3=\cos 2x$ и $y_4=\sin 2x$.

Общее решение однородного уравнения в вещественной форме

$$y_o=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – вещественные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x)=8e^{2x}+8x^2$, т.е. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=8e^{2x}$, $f_2(x)=8x^2$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x)=8e^{2x}=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=8$, т.е. $m=0$, $\gamma=2$. Таких корней у характеристического уравнения нет, следовательно, кратность корня $s=0$. Т.о. частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x)=ae^{2x}$.

Подставляя $y_{ч_1}(x)=ae^{2x}$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_1(x)$, получаем

$$16ae^{2x}+4\cdot 4ae^{2x}\left(=32ae^{2x}\right)=8e^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при e^{2x}, имеем

$$32a=8,\ a=\frac{1}{4} \text{ и } y_{ч_1}=\frac{1}{4}e^{2x}.$$

$f_2(x)=8x^2=8x^2e^{0x}=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=8x^2$, следовательно $m=2$, $\gamma=0$ (что соответствует $\lambda_{1,2}=0$) – резонансный случай, кратность корня $s=2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2}=x^2Q_2e^{0x}=x^2\left(ax^2+bx+c\right)$.

Подставляя $y_{ч_2}=ax^4+bx^3+cx^2$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)\equiv f_2(x)$, получаем

$$24a+4\left(12ax^2+6bx+2c\right)=8x^2.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях x, имеем

$$\begin{array}{lll} x^2: & 48a & =8, \\ x^1: & 24b & =0, \\ x^0: & 24a+8c & =0; \end{array} \quad \text{это дает } a=\frac{1}{6},\ c=-3a=-\frac{1}{2} \text{ и}$$

$$y_{ч_2} = x^2\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x) = y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения**.**

$$y = y_o + y_ч = C_1 + C_2x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$$ ❶

Пример 2.2. Найдите общее решение уравнения $y''' + 3y'' + y' - 5y = 10e^x - 5x$ в вещественном виде.

② Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$.

Корень $\lambda_1 = 1$ – угадываем. $(\lambda^2 + 4\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$ дает $\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$.

Корню характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x$, корням $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ – решения $y_2 = e^{-2x}\cos x$ и $y_3 = e^{-2x}\sin x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o = C_1e^x + C_2e^{-2x}\cos x + C_3e^{-2x}\sin x,$$

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x) = 10e^x - 5x$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 10e^x$, $f_2(x) = -5x$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x) = 10e^x = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = 10$, т.е. $m = 0$, $\gamma = 1$ (что соответствует $\lambda_1 = 1$) – резонансный случай, кратность корня $s = 1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1} = x^1Q_0e^x = xae^x$.

Подставляя $y_{ч_1}(x) = axe^x$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x)$, получаем $10ae^x = 10e^x$.

Приравнивая выражения при одинаковых функциях, имеем

$10a = 10$, $a = 1$ и $y_{ч_1} = xe^x$.

$f_2(x) = -5x = -5xe^{0x} = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = -5x$, т.е. $m = 1$, $\gamma = 0$ (таких корней у характеристического уравнения нет), т.е. кратность корня $s = 0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2} = x^0Q_1e^{0x} = ax + b$.

Подставляя $y_{ч_2} = ax + b$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) \equiv f_2(x)$, получаем $0 + 3\cdot 0 + a - 5(ax + b) = -5x$. Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем

$$\begin{aligned} x^1 &: \quad -5a = -5, \\ x^0 &: \quad a - 5b = 0; \end{aligned}$$ это дает $a = 1$, $b = \frac{1}{5}a = \frac{1}{5}$ и $y_{ч_2} = x + \frac{1}{5}$.

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x) = y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x) = xe^x + x + \frac{1}{5}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_o + y_ч = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}\cos x + C_3 e^{-2x}\sin x + xe^{x} + x + \frac{1}{5}.$$ ❷

Пример 2.3. Найдите общее решение уравнения $y''' + 4y'' + y' + 4y = 34\sin x + \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$ в вещественном виде.

③ Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения: $y''' + 4y'' + y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_{2,3} = \pm i$.

$\lambda_1 = -4$ соответствует частное решение $y_1 = e^{-4x}$, корням $\lambda_{2,3} = \pm i$ – решения $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x,$$

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x) = 34\sin x + \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 34\sin x$, $f_2(x) = \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x) = 34\sin x = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$, $P_m(x) = 0$, $Q_n(x) = 34$, $p = \max\{m, n\} = 0$, $\gamma + \beta i = i$ – корень характеристического уравнения резонансный случай, кратность корня $s = 1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x) = x(a\sin x + b\cos x)$.

Подставляя $y_{ч_1}(x) = x(a\sin x + b\cos x)$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x)$, получаем $8(a\cos x - b\sin x) - 2(a\sin x + b\cos x) = 34\sin x$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$, имеем

$$\begin{aligned} \cos x:&\quad 8a - 2b = 0,\\ \sin x:&\quad -8b - 2a = 34; \end{aligned} \quad \text{это дает} \quad \begin{aligned} a &= -1,\\ b &= -4 \end{aligned} \quad \text{и} \quad y_{ч_1} = -x\sin x - 4x\cos x.$$

$f_2(x) = \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x} = P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x) = 34x + \frac{13}{4}$, т.е. $m = 1$, $\gamma = 4$ не является корнем характеристического уравнения, кратность корня $s = 0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2} = x^0 Q_1 e^{4x} = (ax + b)e^{4x}$.

Подставляя $y_{ч_2} = (ax + b)e^{4x}$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) \equiv f_2(x)$, получаем

$$48a + 64(ax + b) + 32a + 64(ax + b) + a + 4(ax + b) + 4(ax + b) = 34x + \frac{13}{4}.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем

$$\begin{aligned} x^1:&\quad 136a = 34,\\ x^0:&\quad 136b + 81a = \frac{13}{4}; \end{aligned} \quad \text{это дает } a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{8} \text{ и } y_{ч_2} = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2} = -x\sin x - 4x\cos x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_o + y_ч = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x - -x\sin x - 4x\cos x + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$ ❸