Теория к экзамену по дифференциальным уравнениям

1 Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Рикатти.

Уравнения с разделяющимися переменными. Это уравнения вида $p_1(x)q_1(y)dx+p_2(x)q_2(y)dy=0$. Здесь p_1,p_2 – непрерывные функции, заданные на $x\in(\alpha,\beta)$, а q_-,q_2 – непрерывные функции, заданные на $y\in(\gamma,\delta)$. Полагаем, что область $G=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ не содержит особых точек уравнения (коэффиценты при dx,dy не равны нулю одновременно ни в одной точке).

В случае если $\exists x_0 : p_2(x_0)=0$, решением является $x=x_0$. Аналогично для $q_1(y)$. В случае $p_2(x_1)\neq 0, q_1(y_1)\neq 0$, в некоторой окрестности точки (x_1,y_1) уравнение будет эквивалентно уравнению с разделенными переменными $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx+\frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy=0$. Формула решения такого уравнения: $\int\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx+\int\frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy=C$. Множество составных решений получается путём склеивания интегральных кривых решений трёх рассмотренных случаев в точках их касания.

Однородные уравнения первого порядка. Так называются уравнения, которые можно записать в виде $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, где $f(\cdot)$ – непрерывная функция на заданном промежутке. Заменой $u=\frac{y}{x}$ данное уравнение сводится к эквивалентному виду $xu'+u=f(u)$. Оно эквивалентно уравнению с разделенными переменными $\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$ в случае $f(u)\neq u$. Если $f(u)=u$, уравнение принимает вид $xu'=0$. Наконец, если $f(u_k)=u_k$ для некоторых точек u_k, решениями являются прямые $u=u_k$.

Линейные уравнения первого порядка. Так называются уравнения вида $y'+a(x)y=f(x)$. В случае однородного уравнения имеем $y'+a(x)y=0$. Кроме решения $y=0$ имеем $\frac{dy}{y}=-a(x)dx\Rightarrow ln|y|=-\int a(x)dx+\ln C_1\Rightarrow y=Ce^{-A(x)}$. Неоднородное уравнение решается с помощью вариации постоянной (метод Лагранжа). Сделаем замену $y=c(x)e^{-A(x)}$. Отсюда $c'(x)e^{-A(x)}=f(x)\Rightarrow c(x)=\int e^{A(x)}f(x)dx+D$. Таким образом, решение неоднородного уравнения примет вид $y=De^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int e^{A(x)}f(x)dx$. Первое слагаемое является общим решением однородного уравнения, а второе – частным решением неоднородного.

Уравнение Бернулли. Так называют уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)y^m$. $y=0$ является одним из решений при $m>0$. Если $y\neq 0$, разделим уравнение на $y^m : y'y^{-m}+a(x)y^{1-m}=b(x)$. Делаем замену $z=y^{1-m}$. Тогда $z'=(1-m)y^{-m}y'$ и уравнение можно записать в виде $z'+(1-m)a(x)z=(1-m)b(x)$ – линейное уравнение относительно z.

Уравнение Риккати. Так называют уравнение вида $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$. Уравнения такого вида разрешимы в квадратурах лишь в исключительных случаях. Если известно какое-либо решение уравнения Риккати $y_0(x)$, то замена $y(x)=z(x)+y_0(x)$ даёт уравнение Бернулли для $z(x)$. $z'=a(x)z^2+[2a(x)y_0(x)+b(x)]z$.

Уравнения в полных дифференциалах. Рассмотрим уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. Пусть $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области G, которая не содержит особых точек уравнения. Данное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах если существует непрерывно дифференцируемая функция $u : du=Pdx+Qdy$. Все решения такой системы и только они имеют вид $u(x,y)=C$, где C – произвольная постоянная.

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\left(=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$. В случае когда область G односвязна (любую окружность можно стянуть в точку), это условие является также достаточным.

Интегрирующий множитель. Пусть задано уравнение $Pdx + Qdy = 0$, для которого $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Интегрирующим множителем называется непрерывно дифференцируемая в G функция $\mu(x,y) \neq 0$ такая что $\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$ является уравнением в полных дифференциалах. Если множитель существует, он должен удовлетворять соотношению $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. Отсюда получаем уравнение в частных производных $P\dfrac{\partial \mu}{\partial y} - Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mu$. В общем случае эта задача не проще интегрирования исходного уравнения, но нас интересует любое частное решение и его можно искать, например, в виде $\mu = \mu(x)$.

2 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно первой производной.

Общий вид уравнения первого порядка, не разрешенного относительно первой производной: $F(x, y, y') = 0$. Здесь $F(\cdot)$ – непрерывная функция, заданная в области G. Параметрическим решением данного уравнения называется вектор-функция $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где φ, ψ – непрерывно дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$ такая что $F\left[\varphi(t), \psi(t), \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] = 0$. При $x = t$ получаем определение явного решения $y = \psi(x)$.

Положим $y' = p$ и рассмотрим систему:

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{1}$$

Исходное уравнение эквивалентно данной системе. Пусть $F(x, y, p) = 0$ определяет в R^3 поверхность, для которой также известно параметрическое представление $x = x(u, v), y = y(u, v), p = p(u, v)$. Также потребуем, чтобы параметризация была невырожденной: $\left[\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(y,p)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(p,x)}{D(u,v)}\right]^2 > 0$. В таком случае второе уравнение системы запишется в виде $\dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv = p(u,v)\left[\dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv\right]$ или $\left[\dfrac{\partial y}{\partial u} - p\dfrac{\partial x}{\partial u}\right]du + \left[\dfrac{\partial y}{\partial v} - p\dfrac{\partial x}{\partial v}\right]dv = 0$. Переход от исходного уравнения к уравнению такого вида (симметричное относительно u и v) называется общим методом введения параметров.

На практике обычно удаётся разрешить уравнение относительно x или y и ввести параметры $v = p$ и $y = u$ или $x = u$, что приведёт соответственно к уравнениям $\left(\dfrac{\partial y(x,p)}{\partial x} - p\right)dx + \dfrac{\partial y(x,p)}{\partial p}dp = 0$ или $\left(1 - p\dfrac{\partial x(y,p)}{\partial y}\right)dx - p\dfrac{\partial x(y,p)}{\partial p}dp = 0$.

3 Методы понижения порядка для дифференциальных уравнений.

Общий вид уравнения: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

1. Пусть уравнение не содержит $y : F(x, y', y'') = 0$. Делаем замену $y' = z$ и получаем уравнение $F(x, z, z') = 0$.

2. Пусть уравнение не содержит $x : F(y, y', y'') = 0$. Возьмём y за независимую переменную и $z(y) = y'$. Тогда $z'z = z'y' = y''$. Получаем уравнение первого порядка $F(y, z, zz') = 0$. При этом следует проверить, является ли решением $y = \text{const}$.

3. $F(x, y, y_1, y_2)$ называется однородной степени m относительно y, y_1, y_2 если $\forall x, t : (x, ty, ty_1, ty_2) \in G \hookrightarrow F(x, ty, ty_1, ty_2) = t^m F(x, y, y_1, y_2)$, где m – некоторое фиксированное число. Если $F(x, y, y', y'')$ – однородная функция, то его порядок можно понизить заменой $y' = yz$. Тогда $F(x, y, y', y'') = F(x, y, yz, y(z^2 + z')) = y^m F(x, 1, z, z^2 + z') = 0$.

4. Пусть $F(x, y, y', y'') = \dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y')$. Тогда уравнение называется уравнением в точных производных и оно эквивалентно $\Phi(x, y, y') = C$.

5. Функция $F(x, y, y_1, y_2)$ называется обобщенно однородной степени m если существует такое число k, что $F(tx, t^k y, t^{k-1}y', t^{k-2}y'') = t^m F(x, y, y_1, y_2)$. Порядок данного уравнение понижается заменой $x = e^u, y = ve^{ku}$.

4 Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффицентами.

Для любого комплексного числа λ имеет место $L(D)(e^{\lambda x}) = L(\lambda)e^{\lambda x}$, где L – многочлен, D – оператор дифференцирования. $L(\lambda)$ называется характеристическим многочленом дифференциального многочлена $L(D)$. Если λ_k – корни характеристического многочлена, то можно записать $L(D) = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_n)$. Учтём, что $L(D)[e^{\lambda x}y(x)] = e^{\lambda x}L(D+\lambda)y(x)$ – формула сдвига, которая следует из формулы Лейбница.

Пусть есть линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффицентами: $y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = f(x)$. С помощью дифференциального многочлена его можно кратко записать в виде $L(D)y(x) = 0$.

Теорема. Путь характеристическое уравнение $L(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ кратности $k_1, \dots, k_m$. Тогда:

1. Любая функция вида $y(x) = P_1e^{\lambda_1 x} + \dots + P_me^{\lambda_m x}$, где P_i – многочлен степени $k_i - 1$, является решением уравнения.

2. Если $y(x)$ – какое-либо решение уравнения, то оно единственным образом представимо в указанном выше виде.

Доказательство.

1. Пусть λ_0 – корень кратности k характеристического многочлена. Тогда $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ являются решениями уравнения. Действительно, в случае $\lambda_0 = 0$ имеем $L(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-k}D^k$ и функции $1, x, \dots, x^{k-1}$, очевидно, удовлетворяют уравнению. В противном случае сделаем замену $y = e^{\lambda_0 x}z$. Тогда по формуле сдвига $L(D)y = e^{\lambda_0 z}L(D+\lambda_0)z$. Характеристический многочлен $L(D+\lambda_0)$ имеет корень 0 кратности k, откуда следует обозначенное утверждение. Вместе с принципом суперпозиции (если f_1, f_2 являются решениями линейного однородного уравнения, то любая их линейная комбинация также является решением данного уравнения) это доказывает первый пункт.

2. Проведём доказательство с помощью математической индукции. При $n = 1$ имеем уравнение $y' + a_1y = 0$, откуда $y = Ce^{-a_1x}$. При некотором единственном значении C, данная формула содержит и указанное решение. Пусть теперь всякое решение записывается единственным образом для уравнения порядка $n-1$. Тогда $L(D) = (D-\lambda_1)^{k_1}\dots(D-\lambda_m)^{k_m}$. Уравнение $L(D)y = 0$ эквивалентно системе:

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)y = z \\ M(D)z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   В силу предположения индукции каждое решение второго уравнения имеет единственный вид $z(x) = Q_1e^{\lambda_1 x} + \dots + Q_me^{\lambda_m x}$. Варьируя постоянную в первом уравнении, придем к выводу, что его решение имеет вид $y = e^{\lambda_1 x}\left(C + \int e^{-\lambda_1 x}z(x)dx\right)$. Учтём, что $\displaystyle\int x^le^{\lambda x}dx = P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ – полином степени не выше $l+1$. Отсюда следует, что решение уравнения можно представить в обозначенном виде.

   Предположим, что для какого-то решения существует две записи. Пусть $y(x) = \sum P_k(x)e^{\lambda_k x} = \sum \tilde{P}_k(x)e^{\lambda_k x}$. Тогда $\sum[P_k - \tilde{P}_k]e^{\lambda_k x} = 0$. Но это верно только если соответствующие многочлены тождественно равны нулю. Для доказательства по индукции следует домножить уравнение на $e^{-\lambda_1 x}$ и $N+1$ раз продифференцировать, где N – степень P_1.

5 Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффицентами и правой частью в виде квазимногочлена.

Данные уравнения имеют вид $y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \dots + a_ny(x) = f(x)$. Если известно его частное решение $y_0(x)$, то заменой $y(x) = z(x) + y_0(x)$ оно сводится к однородному. Действительно, $L(D)y = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x)$. Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения складывается из общего решения однородного и частного решения неоднородного.

В общем случае: Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и y_1 – какое-либо решение при $f(x) = f_1(x)$, а y_2 – при $f(x) = f_2(x)$. Тогда $y_1 + y_2$ является решением исходного уравнения.

Квазимногочлен – функция $f(x) = e^{\mu x}P_m(x)$, где μ – комплексное число, P_m – многочлен степени m.

Рассмотрим уравнение $L(D)y(x) = e^{\mu x}P_m(x)$. Если μ является корнем характеристического многочлена, то говорят, что имеет место резонансный случай.

Теорема. Для уравнения существует и единственно решение вида $y(x) = x^k Q_m e^{\mu x}$, где Q_m – многочлен одинаковой с P_m степень m, а число k равно кратности корня μ характеристического многочлена.

Доказательство. Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = e^{\mu x} z$ получаем $L(D)y = e^{\mu x} L(D + \mu)z = e^{\mu x} P_m(x)$. Таким образом, доказательство остаётся привести для случая $L(D)y = P_m(x)$. В нерезонансном случае подстановка многочленов в уравнение приводит к линейной алгебраической системе с числами a_n на диагонали, поэтому все коэффиценты определяются однозначно.

В резонансном случае $L(D) = D^n + \cdots + a_{n-k}D^k$. Сделаем замену $D^k y = z$. Получим систему $(D^{n-k} + \cdots + a_{n-k})z = P_m(x)$, для которой имеет место нерезонансный случай и имеется решение $R_m(x)$. Таким образом, $D^k y = R_m(x)$. При нулевых начальных условиях существует и единственно решение вида $y(x) = x^k Q_m(x)$.

6 Общее решение линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффицентами в случае, когда существует базис из собственных векторов матрицы системы.

В матричном виде нормальная линейная однородная система имеет вид $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Очевидно, что система имеет тривиальное решение $x = 0$. Если искать решение в виде $x = e^{\lambda t} h$, приходим к тому, что λ – собственное число преобразования A, а h – соответствующий ему собственный вектор.

Теорема. Пусть существует базис из собственных векторов $h_1, \ldots, h_n$ линейного преобразования A и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – соответствующие им собственные числа. Тогда:

1. Вектор-функция $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} h_n$ является решением системы.
2. Если $x(t)$ – решение системы, то найдутся $C_1, \ldots, C_n$, при которых $x(t)$ задаётся формулой выше.

Доказательство. Первый пункт следует из принципа суперпозиции и указанного выше случая $x = e^{\lambda t} h$.

Пусть $x(t)$ – произвольное решение. Так как h образуют базис, получаем $x(t) = \zeta_1(t)h_1 + \cdots + \zeta_n(t)h_n$. Подставляя в систему, получим $\dot{\zeta}_1 h_1 + \cdots + \dot{\zeta}_n h_n = \lambda_1 \zeta_1 h_1 + \cdots + \lambda_n \zeta_n h_n$. Так как h линейно независимы, получаем $\dot{\zeta}_k = \lambda_k \zeta_k \Rightarrow \zeta_k = C_k e^{\lambda_k t}$.

7 Общее решение линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффицентами в случае, когда не существует базис из собственных векторов матрицы системы.

Теорема. Пусть жорданов базис R^n состоит из S жордановых цепочек $h_1, \ldots, h_{k_j}$ длин k_j для собственных значений λ_j. Тогда:

1. Вектор-функция вида $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{S} e^{\lambda_j t}[C_1 P_1(t) + \cdots + C_{k_j} P_{k_j}(t)]$, где $P_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_j$, является решением системы.
2. Для любого решения $x(t)$ найдётся набор C_k, при котором $x(t)$ задаётся формулой выше.

Доказательство.

1. При $k = 1$ утверждение доказано ранее. Пусть $k \geq 2$, тогда $\dot{P}_r(t) = P_{r-1}(t)$. Из определения жордановой цепочки следует, что $AP_r(t) = \lambda P_r(t) + P_{r-1}(t)$. Получаем $\dot{x}_r - Ax_r = \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t} \dot{P}_r - e^{\lambda t} AP_r = 0$.
2. Пусть $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{S} [\zeta_1 h_1 + \cdots + \zeta_{k_j} h_{k_j}]$ – разложение решения $x(t)$ по жордановому базису. После подстановки в исходное уравнение с использованием определения жордановой цепочки приравниваем коэффиценты при h_k. Получаем систему, решая которую получаем искомое представление.

8 Отыскание решений нормальной линейной неоднородной системы уравнений с постоянными коэффицентами в случае, когда свободный член является векторным квазимногочленом.

Принцип суперпозиции: Рассмотрим систему $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$. Если $f = f_1 + f_2$, а x_1, x_2 – решения для f_1 и f_2 соответственно, то $x_1 + x_2$ является решением для исходного уравнения.

Векторный квазимногочлен – функция $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$.

Теорема 1. Пусть $f(t) = e^{\mu t}[P_m^1 h_1 + \dots + P_m^k h_k]$, $h_1, \dots, h_k$ – некоторая жорданова цепочка. Тогда для системы существует и единственно решение:

$$x(t) = \begin{cases} e^{\mu t} Q_m(t), \mu \neq \lambda \\ t e^{\mu t} Q_{m+k-1}(t), \mu = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Ищем решение в виде $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} \zeta_j h_j$. Подставляем в систему и используем определение жордановой цепочки. Получаем:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \lambda \zeta_1 + \zeta_2 + e^{\mu t} P_m^1(t) \\ \dots \\ \dot{\zeta}_{k-1} = \lambda \zeta_{k-1} + \zeta_k + e^{\mu t} P_m^{k-1}(t) \\ \dot{\zeta}_k = \lambda \zeta_k + e^{\mu t} P_m^k(t) \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему снизу вверх, получаем требуемое утверждение.

Теорема 2. Если $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$, то для системы всегда существует решение вида $x(t) = e^{\mu t} Q_{m+k}(t)$, где k – наибольшая длина жордановой цепочки для собственного значения μ.

Доказательство. Разложим вектор-многочлен $P_m(t)$ по жорданову базису. Из принципа суперпозиции частное решение системы является суммой решений, рассматриваемых по различным жордановым цепочкам. Отсюда и из предыдущей теоремы следует указанное утверждение.

9 Экспонента квадратной матрицы; матричные формулы решения задачи Коши для нормальных линейных систем с постоянными коэффицентами.

Матричной экспонентой называется сумма абсолютно сходящегося ряда $e^{tA} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$.

Лемма 1. Для любой матрицы A матричный ряд, указанный выше, абсолютно сходится.

Доказательство. Пусть $\forall i, j \hookrightarrow |a_{ij}| \leq M$. Тогда $|a_{ij}^{(2)}| \leq \sum\limits_{p=1}^{n} |a_{ip}| \cdot |a_{pj}| \leq nM^2$. По индукции $|a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} M^k$. Отсюда следует, что ряд, соответствующий элементу матричной экспоненты мажорируется рядом $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} |t|^k M^k}{k!}$. $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|t| n M}{k} \to 0$. Таким образом, ряд сходится по признаку д'Аламбера.

Лемма 2. Если A и B перестановочные квадратные матрицы, то $e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)}$.

Доказательство. Из $AB = BA$ имеем формулу бинома $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = n! \sum\limits_{k+m=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!}$. Отсюда $e^{t(A+B)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} = e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}$.

Лемма 3. Если $A = HBH^{-1}$, то $e^{tA} = He^{tB} H^{-1}$.

Доказательство. Прямо следует из $A^k = HB^k H^{-1}$.

Из этой леммы можно найти способ вычисления матричной экспоненты для произвольной матрицы. Пусть J – матрица A в жордановом базисе. Каждую клетку в таком разложении следует заменить на соответствующую ей экспоненту. Клетку можно представить в виде $tJ_k(\lambda) = t\lambda E_k + tJ_k(0)$. Так как первая матрица диагональна, она перестановочна с любой другой и матричную экспоненту можно записать в виде $e^{tJ_k(\lambda)} = e^{\lambda t} e^{tJ_k(0)}$. Матрицу $e^{tJ_k(0)}$ находят с помощью матричного ряда. При возведении этой матрицы в степень единицы смещаются на одну диагональ вверх. Таким образом:

$$e^{tJ_k(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{t^1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть задана система $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$.

Теорема. Общее решение системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ задаётся формулой $x(t) = e^{tA}c + e^{tA}\int e^{-tA}f(t)dt$.

Доказательство. Сделаем замену $x(t) = e^{tA}y(t)$. Получаем $e^{tA}Ay(t)+e^{tA}\dot{y}(t) = Ae^{tA}y(t)+f(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = e^{-tA}f(t)$, что и даёт итоговый вид.

Для задачи Коши $x(t_0) = x_0$ имеем таким образом $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + e^{tA}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-tA}f(t)dt$.

10 Простейшая задача вариационного исчисления.

$F(x, y, p)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим интеграл $J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$ на множестве функций $y(x) \in C_1[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = A, y(b) = B$. Такие функции будем называть допустимыми.

Функция $\hat{y}(x) \in M$ даёт слабый локальный минимум функционала если $\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in M : ||y(x) - \hat{y}(x)|| < \varepsilon \hookrightarrow J(y) \geq J(\hat{y})$. Задача нахождения слабого локального экстремума функционала, указанного выше называется простейшей вариационной задачей.

Пусть $\dot{C}_1[a, b]$ – множество непрерывно дифференцируемых функций, Для которых $y(a) = y(b) = 0$. Рассмотрим семейство функций $y(x, a) = y(x) + ah(x) \in M$. По формуле Лейбница можно записать $\frac{d}{da}J[y(x) + ah(x)]|_{a=0} = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}h + \frac{\partial F}{\partial y'}h'\right] dx$.

Вариацией будем называть любую функцию $h \in \dot{C}_1[a, b]$. Выражение выше называется первой вариацией функционала J и обозначается $\delta J[y, h(x)]$.

Теорема 1. Если $\hat{y} \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо $\delta J(\hat{y}, h) = 0$ для любой допустимой h.

Доказательство. Пусть для определённости на $\hat{y}$ достигается минимум. Тогда $\Phi(a) = J(\hat{y} + ah) \geq J(\hat{y}) = \Phi(0)$ в некоторой окрестности. Это значит, что дифференцируемая функция $\Phi(a)$ имеет минимум в точке 0 и $\delta J(\hat{y}, h) = \Phi'(0) = 0$.

Лемма Лагранжа. Если $f(x) \in C[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = 0$ для любого $h(x) \in \dot{C}_1[a, b]$, то $f(x) = 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) > 0$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \hookrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$. Возьмём $h(x)$ равной нулю вне этой окрестности и равной $((x - x_0)^2 - \varepsilon^2)^2$ в ней. Тогда по интегральной теореме о среднем $\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = f(\zeta)\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h(x)dx > 0$, что противоречит условию леммы.

Теорема 2. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо функция $\hat{y}$ на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$.

Доказательство. Проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее h' в вариации и получим уравнение Эйлера под интегралом. Необходимость получаем из леммы Лагранжа.

Всякое решение уравнения Эйлера называют экстремалью функционала.

11 Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: задача со свободным концом, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков.

Задача со свободным концом. Так называется простейшая вариационнная задача, у которой не зафиксировано значение $y(b)$ или $y(a)$.

Теорема. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x) \in M$ является решением задачи со свободным концом, то $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера и граничному условию $\left.\dfrac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0$.

Доказательство. Интегрируя по частям вариацию функционала, получаем требуемое утверждение.

Функционалы, зависящие от нескольких переменных. Рассмотрим простейшую вариационную задачу, в которой $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Теорема. Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\hat{y}(x) \in M$ даёт слабый локальный экстремум функционала, то $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a, b]$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера $\dfrac{\partial F}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$.

Доказательство. Фиксируя все компоненты, кроме k-ой в функционале, получаем простейшую задачу вариационного исчисления для каждой компоненты в отдельности.

Функционалы, содержащие производные высших порядков. Рассмотрим пространство $\dot{C}_k[a, b]$, состоящее из k раз непрерывно дифференцируемых функций таких что $\forall j \in [0, k-1] \hookrightarrow h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0$.

Лемма. Если $f(x) \in C[a, b]$ и $\forall h(x) \in \dot{C}_k[a, b] \hookrightarrow \int\limits_a^b f(x)h(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Аналогично основной лемме вариационного исчисления, но теперь берём функцию $h(x) = ((x - x_0)^2 - \varepsilon^2)^{2k}$.

Теорема. Пусть $\hat{y}(x) \in M$ является $2k$ раз непрерывно дифференцируемой функцией и дает слабый локальный экстремум функционала $J(y) = \int\limits_a^b F[x, y, y', \ldots, y^{(k)}]dx$. Тогда $\hat{y}(x)$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона. $\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i \dfrac{d^i}{dx^i}\dfrac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = 0$.

Доказательство. Получаем, если распишем вариацию действия и проинтегрируем каждое слагаемое столько раз, сколько нужно чтобы избавиться от $h^{(i)}$. Проинтегрированные члены обратятся в нуль из-за граничных условий, в результате чего, применив обозначенную лемму, получаем требуемое равенство.

12 Изопериметрическая задача.

Пусть функции $F(x, y, p)$ и $G(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим интеграл $J(y) = \int\limits_a^b F[x, y, y']dx$ на множестве функций $M = \{y \in C_1[a, b] : y(a) = A, y(b) = B, K(y) = \int\limits_a^b G[x, y, y']dx = l\}$. Условие $K(y) = l$ называют условием связи.

Изопериметрической задачей называют задачу нахождения слабого локального экстремума функционала, заданного выше. Введём в рассмотрение функцию $L(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$. Она называется лагранжианом, а параметр λ – неопределенным множителем Лагранжа.

Теорема. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая допустимая функция $\hat{y}(x)$ является решением изопериметрической задачи и пусть вариация $\delta K[\hat{y}, h(x)] \neq 0$ для всех $h(x) \in \dot{C}_1[a, b]$. Тогда найдётся такой множитель Лагранжа λ, что $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера вида $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что найдётся $h_0 : \delta K(y, h_0) \neq 0$. Рассмотрим функции $u = J[y + ah + bh_0], v = K[y + ah + bh_0]$. В таком случае имеет место $\left.\frac{\partial(u, v)}{\partial(a, b)}\right|_{a=b=0} = \begin{vmatrix} \delta J(y, h) & \delta K(y, h) \\ \delta J(y, h_0) & \delta K(y, h_0) \end{vmatrix}$. Покажем, что этот якобиан равен нулю. Если это не так, то $u = u(a, b), v = v(a, b)$ однозначно разрешимо относительно a, b в некоторой окрестности $a = b = 0$. В таком случае разрешима система $u(a, b) = u(0, 0) - \varepsilon, v(a, b) = v(0, 0)$. То есть, найдутся a, b такие, что $J(\hat{y} + ah + bh_0) = J(\hat{y}) - \varepsilon < J(\hat{y}), K(\hat{y} + ah + bh_0) = l$. Это противоречит предположению, что на $\hat{y}$ достигается минимум. Таким образом, обозначенный якобиан равен нулю. Можем взять $\lambda = -\frac{\delta J(y, h_0)}{\delta K(y, h_0)}$ и получить требуемое утверждение, расписав определитель в интегральной форме.

13 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Задача Коши – задача поиска решения векторного уравнения $y'(x) = f(x, y)$ при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$. Система уравнений вида $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\zeta, y(\zeta))d\zeta$ называется системой интегральных уравнений.

Лемма об эквивалентности. Вектор-функция $y(x)$ является решением задачи Коши тогда и только тогда когда она является решением системы интегральных уравнений.

Доказательство. Получаем путём дифференцирования/интегрирования соответствующих обозначений в определениях решений.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет на каждом компакте области G условию Липшица по y равномерно по x и пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:

1. Найдётся окрестность x, в которой решение существует.
2. Решение задачи единственно в том смысле, что любые два решения равны на пересечении их промежутков определения.

Доказательство. Будем доказывать теорему для эквивалентной системы интегральных уравнений. Рассмотрим цилиндр $G_{pq} = \{|x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\}$. Этот цилиндр – компакт и в нём выполняется условие Липшица, а также $|f(x, y)| \leq M$. Будем строить решение методом последовательных приближений Пикара при $|x - x_0| \leq \delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_k = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[\zeta, y_{k-1}(\zeta)]d\zeta$$

Покажем по индукции, что y_k непрерывна и лежит в G. Для y_1 это верно: $|y_1 - y_0| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |f[\zeta, y_0]|d\zeta \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq q$. Аналогичным образом видим, что это верно для всех y_k.

Покажем, что последовательность y_k сходится равномерно при $|x - x_0| \leq \delta$. Это эквивалентно равномерной сходимости ряда $y_0 + \sum[y_{k+1} - y_k]$. Рассмотрим $|y_{k+1} - y_k| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |f[\zeta, y_k] - f[\zeta, y_{k-1}]|d\zeta \leq L\int\limits_{x_0}^{x} |y_k(\zeta) - y_{k-1}(\zeta)|d\zeta$. Сделаем индукционное предположение $|y_k - y_{k-1}| \leq \frac{L^{k-1}M(x - x_0)^k}{k!}$. Отсюда получаем $|y_{k+1} - y_k| \leq \frac{L^k M(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$. Ряд из таких элементов сходится, отсюда следует, что y_k сходится равномерно к некоторой функции из того же цилиндра G_{pq}.

Из условия Липшица следует, что $f(x, y_k) \rightrightarrows f(x, y)$. Переходя к пределу, получаем, что $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[\zeta, y(\zeta)]d\zeta$. Откуда следует, что y действительно является решением системы при $|x - x_0| \le \delta$.

Наконец, докажем единственность решения. Рассмотрим два решения y_1, y_2. Для них имеет место $|y_1(x) - y_2(x)| \le L \int\limits_{x_0}^{x} |y_1(\zeta) - y_2(\zeta)|d\zeta$. Равенство этой величины нулю следует из леммы:

Лемма Гронуолла. Пусть $y(x) \le A + B \left| \int\limits_{x_0}^{x} y(\zeta)d\zeta \right|, A \ge 0, B > 0$. Тогда $y(x) \le Ae^{B|x-x_0|}$.

Доказательство. Пусть $g(x) = \int\limits_{x_0}^{x} y(\zeta)d\zeta$. Отсюда получаем $g'(x) = y(x)$. Отсюда $g'(x) \le A + Bg(x)$. Умножив обе части на $e^{-B(x-x_0)}$, интегрируя и подставляя в исходное неравенство, получаем требуемый результат.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ с заданными начальными условиями.

Теорема 2. Пусть $f(\cdot)$ непрерывна в области G, удовлетворяет на каждом компакте G условию Липшица по $y_1, \dots, y_n$ равномерно по x и $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:

1. Найдётся окрестность x_0, в которой решение задачи Коши существует.
2. Любые два решения равны на пересечении их промежутков определения.

Доказательство. Сделаем замену $y_2 = y', y_k = y'_{k-1}$ и получим нормальную систему уравнений с эквивалентным множеством решений. Таким образом, данная теорема верна в силу теоремы 1.

14 Теорема о продолжении решений нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и следствия из нее (доказательство для одного уравнения n-го порядка)

Пусть y_1 задано на I_1 и y_2 задано на I_2 – решения нормальной системы. Если $I_1 \subseteq I_2$ и $y_1 = y_2$ на I_1, то y_2 – продолжение решения y_1 с I_1 на I_2. Будем называть решение непродолжимым если не существует решения, являющегося его продолжением.

Теорема. Пусть выполнены условия теоремы о единственности и существовании. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ задача Коши имеет единственное непродолжимое решение, определённое на некотором максимальном интервале (a, b).

Доказательство. Будем рассматривать только продолжение вперёд. Пусть G – замкнутая ограниченная область. Если $(x_0 + a\delta, y(x_0 + a\delta)) \in \partial G$, то доказательство завершено. Иначе перейдём в точку $x_1 = x_0 + \delta$ и решим новую задачу Коши в ней. Получаем возрастающую последовательность x_k, которая ограничена сверху и имеет предел $B = \sup\{x_k\}$ в силу того, что G замкнуто. Точка $(B, y(B))$ лежит на границе, значит, продолжение задачи невозможно.

Пусть G не является ограниченной замкнутой областью, в таком случаее аппроксимируем её вложенной последовательностью таких множеств изнутри. Для каждого n решение будет существовать на отрезке $[a_n, b_n]$ и касаться границы n-ой области на краях. Последовательности a_n и b_n монотонно убывающая и возрастающая соответственно, следовательно, они имеют пределы, возможно бесконечные, равные a и b. Таким образом, интервал (a, b) является максимальным интервалом существования решения в G.

15 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференцируемость решения по параметрам, уравнение в вариациях.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы $y' = f(x, y, \lambda), y(x_0, \lambda) = y_0$.

Теорема 1. Путь вектор-функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x, λ для $|\lambda - \lambda_0| \le r$. Тогда найдётся $\delta > 0$, что решение $y(x, \lambda)$ задачи Коши является непрерывной функцией при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$.

Доказательство. Доказательство повторяет схему доказательства теоремы о существовании решения задачи Коши.

Теорема 2. Если $\forall (x, y) \in G, |\lambda - \lambda_0| \le r$ функции $f(x, y, \lambda), \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ непрерывны и $(x_0, y_0) \in G$, то найдётся δ такое что при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$ для решения $y = y(x, \lambda)$ задачи Коши:

1. Частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda_i}$ непрерывны.
2. Смешанные производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda_i}$ непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.
3. Частная производная $z_i(x, \lambda) = \dfrac{\partial y}{\partial \lambda_i}$ удовлетворяет уравнению в вариациях по параметру λ: $\dfrac{\partial z_i}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} z_i + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ и начальному условию $z_i(x_0, \lambda) = 0$.

16 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешённого относительно производной. Особое решение.

Рассмотрим уравнение $F(x, y, y') = 0$, где $F(\cdot)$ – заданная в некоторой области непрерывная функция. Задача Коши – найти решение, проходящее через точку (x_0, y_0, p_0).

Теорема. Пусть в области G функция $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируема и пусть $\dfrac{\partial F}{\partial p} \ne 0$. Тогда найдётся окрестность x_0, в которой решение существует и единственно.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что выполняются условия теоремы о неявной функции $p = f(x, y)$. Рассмотрим задачу Коши $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ в некотором прямоугольнике V. Так как V – выпуклая область и в ней $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ – непрерывная ограниченная функция, $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица в прямоугольнике. Таким образом, решение данной задачи существует и единственно и является также и решением к исходной.

Решение уравнения называется особым решением, если каждая точка $(x_0, y(x_0))$ его интегральной кривой является точкой локальной неединственности решения задачи Коши. Для особого решения необходимо $F(x_0, y_0, p_0) = \dfrac{\partial F}{\partial p} = 0$.

17 Автономные системы диф. уравнений. Свойства фазовых траекторий нормальных автономных систем. Теорема о выпрямлении траектории.

Нормальная автономная система: $\dot{x}(t) = f(x)$. Считаем, что она удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности.

Теорема 1. Если решение $x = x(t), t \in I$ автономной системы таково, что определяемая им траектория все время остаётся в некотором компакте K, то необходимо $I = (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Непродолжимое решение покидает любой компакт. Рассмотрим цилиндр на $K \times [t_1, t_2]$. Из условий теоремы кривая не может покинуть его через боковую сторону, поэтому она проходит через нижнюю и верхнюю для произвольных t_1, t_2. Поэтому $I = (-\infty, +\infty)$.

Свойство 1. Если $\varphi(t)$ решение системы при $t \in (a, b)$, то $\varphi(t+c)$ – решение системы при $t \in (a-c, b-c)$.

Свойство 2. Если две фазовые траектории имеют общую точку $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, то $\psi(t) = \varphi(t + t_1 - t_2)$ для $t \in I_1 \cap I_2$.

Теорема 2. Точка x_0 является положением равновесия в том и только в том случае когда фазовая скорость $f(x_0) = 0$.

Доказательство. Проверяется подстановкой.

Теорема 3. Всякая фазовая траектория принадлежит одному из трёх типов:

1. Положение равновесия.
2. Замкнутая траектория.
3. Траектория без самопересечений.

Доказательство. Если $x(t, x_0)$ – решение системы и x_0 не является положением равновесия и соответствующая траектория пересекает саму себя, то $x(t, x_0)$ – периодичная вектор-функция. Пусть $x(t_1) = x(t_2)$ и $\forall t \in (t_1, t_2) \hookrightarrow x(t) \neq x(t_1)$. Тогда в силу свойства 1 $x(t) = x(t + t_2 - t_1) = x(t + T)$ при $t \in [t_1 - T, t_2 - T]$. По свойству 2 $x(t + T)$ является единственным продолжением $x(t)$ из $[t_1, t_2]$ на $[t_1 - T, t_1]$. Аналогично в другую сторону. Таким образом имеем продолжение с $[t_1, t_2]$ на $[t_1 - T, t_2 + T]$. Продолжая процесс на всю ось, получаем, что решение даёт замкнутую траекторию.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция в области G и пусть точка a является обыкновенной точкой системы. Тогда найдутся окрестность этой точки и гладкая обратимая замена переменных в окрестности, что в ней система примет вид $\dot{y}_i = 0$, а траектории системы в этой окрестности перейдут в отрезки прямых.

18 Классификация положений равновесия линейной автономной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия для автономных нелинейных систем второго порядка.

Рассмотрим систему уравнений второго порядка $\dot{x} = Ax$. Система называется простой если матрица невырождена. Положения равновесия являются корнями линейной системы $Ax = 0$. Если система простая, то $x = 0$ – единственное решение.

1. Пусть собственные числа действительны. Тогда все решения задаются формулой $x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$. Координаты точки в базисе из собственных векторов будут равны $(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$. Картина траекторий симметрична относительно осей, поэтому будем считать, что обе координаты положительны.
   (a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Пусть $c_1 > 0, c_2 > 0$. Тогда $\zeta_2 = c\zeta_1^a, a > 1$. Отсюда следует, что фазовые траектории представляют собой кривые типа ветвей параболы, касающиеся ζ_1 в начале координат. Положение называется устойчивый узел.
   (b) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Исследуется аналогично. Неустойчивый узел.
   (c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Исследуется аналогично, кривые в виде гипербол. Седло.
   (d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, существует базис из собственных векторов. Общее решение имеет вид $x = e^{\lambda t}(c_1 h_1 + c_2 h_2)$. Каждое решение описывает луч, входящий или выходящий из положения равновесия. Положение равновесия – дикритический (звёздный) узел.
   (e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, существует базис из собственного вектора и присоединённого к нему. $\zeta_1 = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \zeta_2 = c_2 e^{\lambda t}$. Точки равновесия называются соответственно вырожденными устойчивым и неустойчивым узлами.
2. Пусть λ_1, λ_2 – комплексные. В таком случае они сопряжены. Пусть $h = h_1 \pm i h_2$ – собственные векторы. Действительное решение будет иметь вид $x = c e^{\lambda_1 t} h + \bar{c} e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{h}$. Если $\lambda = \mu \pm i\nu$, то решение можно переписать в виде $x = 2|c|e^{\mu t}[\cos(\varphi + \nu t)h_1 + \sin(\varphi + \nu t)h_2]$ или в полярных координатах $r = 2|c|e^{\mu \frac{\psi - \varphi}{\nu}}$. В случае $\mu \neq 0$ фазовые траектории – логарифмические спирали, а при $\mu = 0$ – эллипсы.

   Направление закручивания спирали можно определить по фазовым скоростям. Положения равновесия в случае спиралей называются устойчивыми или неустойчивыми фокусами. В случае эллипсов положение равновесия называется центром.

Рассмотрим теперь случай сложной системы. Случай $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ означает, что все точки ζ_2 являются положениями равновесия. А все лучи $\zeta_2 = c$ являются траекториями. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то либо решением является вся плоскость в случае нулевой матрицы A, либо есть базис из h_1 и присоединённого к нему h_2. В таком базисе решения имеют вид $\zeta_1 = c_1 + c_2 t, \zeta_2 = c_2$ и все точки прямой $\zeta_2 = 0$ являются положениями равновесия. Каждая из прямых $\zeta_2 = c$ является траекторией.

Качественно эквивалентными будем называть такие системы, для которых существует взаимнооднозначное и взаимно непрерывное отображение, при котором каждая траектория первой системы с сохранением ориентации переходит в траекторию другой системы. Существует четыре типа качественно эквивалентных автономных систем: устойчивые, неустойчивые, центры и сёдла. Пусть $x = 0$ – положение равновесия нелинейной системы. В ней можно рассмотреть линеаризованную систему (с разложением до первого члена).

Теорема. Если линеаризация нелинейной системы в начале координат является простой автономной системой и $x = 0$ не является центром для системы, то в окрестности $x = 0$ нелинейная система и её линеаризация качественно эквивалентны.

19 Первые интегралы автономных систем диф. уравнений. Критерий первого интеграла.

Непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$ называется первым интегралом если $u(x(t)) = \text{const}$ для каждого решения $x = x(t)$ автономной системы $\dot{x}(t) = f(x)$. Значение постоянной зависит только от выбора траектории.

Пусть $u(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция в G. Производной u в силу автономной системы называют скалярное произведение $(f(x), \text{grad } u(x))$ и обозначается через $\dot{u}(x)$.

Теорема 1. Непрерывно дифференцируемая в G функция $u(x)$ является первым интегралом системы в том и только в том случае, когда $\dot{u}(x) = 0$.

Доказательство. Получаем из правила дифференцирования сложной функции.

Теорема 2. Если система имеет независимые в точке a первые интегралы $u_1, \ldots, u_k$, то в некоторой окрестности этой точки порядок системы можно понизить на k единиц.

Доказательство. Будем считать, что отличен от нуля минор из первых k столбцов матрицы Якоби $u'(a)$. Сделаем замену $y_i = u_i(x)$ для $i \in [1, k]$ и $y_i = x_i$ для остальных. Эта замена является гладкой и обратимой. Отсюда получаем $\dot{y}_i = 0, i \in [1, k]$ и $\dot{y}_i = F_i(y)$. Первые k уравнений дают решения $y_i = c_i$. Остаётся система порядка $(n - k)$.

20 Теорема о числе независимых первых интегралов автономной системы дифференциальных уравнений.

Теорема. Пусть точка a не является положением равновесия автономной системы. Тогда в некоторой окрестности этой точки существуют $(n-1)$ независимые в точке a первые интегралы системы. Кроме того если $u(x)$ – какой-либо первый интеграл в этой окрестности, то найдётся непрерывно дифференцируемая функция такая что $u(x) = F[u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)]$.

Доказательство. По теореме о выпрямлении найдётся гладкая и обратимая замена такая, что уравнения примут вид $\dot{y}_i = 0, \dot{y}_n = 1$. При такой замене имеем $y_i = c_i$, которые и станут первыми интегралами. Всякий первый интеграл новой системы является непрерывно дифференцируемой функцией этих переменных. Откуда получается второе утверждение теоремы.

21 Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Формула общего решения. Теорема существования и единственности задачи Коши.

Рассмотрим уравнение $F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$. $F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция в области G такая что в каждой точке G верно $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$. Такое уравнение называется уравнением в частных производных первого порядка относительно неизвестной $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Уравнение называется линейным если неизвестная функция и все её частные производные входят в уравнение линейно. Уравнение называют однородным если в него не входят свободный член и u.

Рассмотрим линейные уравнения. Если ввести вектор-функцию $a(x)$ коэффицентов при частных производных, уравнение сокращённо запишется в виде $(a(x), \mathrm{grad}\ u(x)) = 0$.

Автономная система $\dot{x}(t) = a(x)$ называется характеристической системой уравнения, а траектории системы – характеристиками уравнения. Условие неравенства нулю суммы частных производных означает отсутствие положений равновесия.

Теорема 1. В некоторой окрестности точки b все решения имеют вид $F[u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)]$. Где u_j – независимые в точке b первые интегралы характеристической системы, а $F(\cdot)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Следует из теорем для первых интегралов автономной системы.

Функция $u = F[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ называется общим решением уравнения в окрестности точки b.

Пусть уравнение $g(x) = 0$ задаёт в области гладкую $(n-1)$ мерную поверхность ($g(x)$ – непрерывно дифференцируемая и $\mathrm{grad}\ g(x) \neq 0$). Она называется начальной поверхностью. Пусть также задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$. Укажем начальное условие $u(x)|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ называется начальным значением $u(x)$.

Задача Коши – найти решение, которое удовлетворяет начальному условию.

Теорема 2. Пусть $\dot{g}(M_0) = (a(M_0), \mathrm{grad}\ g(M_0)) \neq 0$ тогда в некоторой окретности точки M_0 решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Так как $a(M_0) \neq 0$, в некоторой окрестности существуют $(n-1)$ независимые первые интегралы. Рассмотрим систему уравнений $u_k(x) = u_k, g(x) = 0$. Эту систему можно однозначно разрешить относительно x. Покажем, что $\left.\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1}, g)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$. Пусть якобиан равен нулю. Первые $(n-1)$ строк у него линейно независимы, значит, последняя является линейной комбинацией остальных. Отсюда получаем, что $\dot{g}(M_0) = 0$, что противоречит предположению теоремы. Таким образом обозначенная система допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение $x = w(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Откуда находим решение $u(x) = \varphi(w(u_1, \ldots, u_n))$.

22 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффицентами и для линейного уравнения n-го порядка.

Рассмотрим нормальную систему $y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Теорема. Пусть матрица $A(x)$ и вектор-функция $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и пусть $x_0 \in [a, b]$ и y_0 – произвольный вектор. Тогда решение задачи Коши существует и единственно на $[a, b]$.

Доказательство. По лемме об эквивалентности задача Коши эквивалентна системе уравнений $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} [A(\zeta)y(\zeta) + f(\zeta)]d\zeta$. Существование доказываем методом последовательных приближений. Все приближения непрерывны на $[a, b]$. Установим равномерную сходимость ряда $y_0 + \sum\limits_{i=0}^{\infty}[y_{i+1}(x) - y_i(x)]$. Из непрерывности $A(x)$ и $f(x)$ следует $|a_{ij}(x)| \leq K, |f(x)| \leq M$. Тогда норма матрицы $||A(x)|| \leq nK$. Учитывая $|A(x)y_0| \leq ||A(x)|| \cdot |y_0| \leq nK|y_0|$, получаем $|y_1(x) - y_0(x)| \leq (nK|y_0| + M)(b - a) = C$. Методом мат. индукции можно показать, что $|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq C(nK)^i \dfrac{|x - x_0|^i}{i!}$. Таким образом указанный ряд сходится, значит, сходится равномерно и последовательность приближений, предел которой и есть искомым решением.

23 Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица и структура общего решения нормальной линейной однородной системы уравнений с переменными коэффицентами. Фундаментальная система решений и структура общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка.

Теорема 1. Пусть y_j – решения линейной однородной системы. Они линейно независимы на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in [a, b]$ векторы $y_j(x_0)$ линейно независимы.

Доказательство. Предположим, y_j линейно независимы, но $y_j(x_0)$ линейно зависимы. Тогда линейная комбинация с теми же коэффицентами y_j удовлетворяет начальному условию $y_0 = 0$. Но такое решение единственно и равно тождественно нулю. Получаем противоречие.

Любая система n линейно независимых решений на $[a, b]$ называется фундаментальной системой решений.

Теоерма 2. Для системы существует бесконечное множество фундаментальных систем решения.

Доказательство. Различные решения получаются при различных начальных значениях.

Теорема 3. Любое решение системы единственным образом раскладывается в линейную комбинацию фундаментальных решений.

Доказательство. Раскладываем начальные значения по начальным значениям фундаментальной системы и получаем коэффиценты линейной комбинации для системы.

24 Вронскиан и формула Лиувилля-Остроградского для решений линейного однородного уравнения n-го порядка.

Определителем Вронского называется определитель $W(x) = W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$. Решения $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы тогда и только тогда когда $W(y_1, \dots, y_n) = 0$ на $[a, b]$.

Теорема. Пусть $W(x)$ – вронскиан решений y_j системы и $x_0 \in [a, b]$. Тогда имеет место формула Лиувилля-Остроградского $W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} \text{tr } A(\zeta)d\zeta}$, $\text{tr } A(\zeta) = a_{11}(\zeta) + \dots + a_{nn}(\zeta)$.

Доказательство. Покажем, что $W'(x) = trA(x)W(x)$. Можно выразить $W(x) = \sum\limits_{p,q=1}^{n} \dfrac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}(x)} y'_{pq}(x)$. Рассмотрим разложение W по строке $W(x) = \sum\limits_{r=1}^{n} y_{pr}(x)W_{pr}(x)$. Отсюда $\dfrac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}} = W_{pq}(x)$. Для каждой вектор-функции имеем $y'_q(x) = A(x)y_q(x)$. Подставляя найденные выражения, получим $W'(x) = \sum\limits_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum\limits_{q=1}^{n} y_{rq}(x)W_{pq}(x)$. Отсюда получаем требуемое утверждение.

25 Метод вариации постоянных для нормальной линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

Рассмотрим систему $y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$.

Теорема. Если $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица линейной однородной системы, то общее решение линейной неоднородной системы при всех $x \in [a, b]$ задаётся формулой $y(x) = \Phi(x) \cdot d + \Phi(x) \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\zeta) f(\zeta) d\zeta$.

Доказательство. Считаем $y(x) = \Phi(x)c(x)$. Потери решений не происходит, так как $\det \Phi(x) \neq 0$. Функцию $c(x)$ находим подстановкой $y(x)$ в исходную систему. Получаем $c'(x) = \Phi^{-1}(x)f(x)$.

26 Теорема Штурма и следствия из неё.

Пусть заданы уравнения $y'' + q(x)y = 0, z'' + Q(x)z = 0$.

Теорема. Пусть $q(x) \leq Q(x)$ и пусть $y(x)$ – какое-либо нетривиальное решение первого уравнения, а $z(x)$ – нетривиальное решение второго. Если x_1, x_2 – последовательные нули $y(x)$ то либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$: $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $y(x) > 0$ на (x_1, x_2). Тогда $y'(x_1) > 0, y'(x_2) < 0$. Производные не равны нулю, иначе бы решение было тривиальным в силу теоремы о существовании и единственности. Из исходных уравнений можно получить $y''z - z''y = (Q - q)yz$ или $(y'z - z'y)' = (Q - q)yz$. Интегрируя с учётом $y(x_1) = y(x_2) = 0$, получим $y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2}[Q(x) - q(x)]y(x)z(x)dx$. Полагая $z(x) > 0$ и допуская, что теорема неверна, получим несколько случаев, разбор которых приводит к противоречию.

Таким образом, нули z идут не реже, чем нули y.

Следствие 1. Если $q(x) \leq 0$, то всякое его решение имеет не более одного нуля.

Следствие 2. Пусть y_1, y_2 – два линейно независимых решения. Если x_1, x_2 – нули y_1, то между ними есть ровно один нуль y_2.

Следствие 3. Если некоторое решение y имеет бесконечное число нулей, то и каждое решение z имеет бесконечное число нулей.

27 Устойчивость по Ляпунову положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия автономной системы.

Система устойчива по Ляпунову если для любой ε окрестности найдётся δ окрестность такая что при начальном положении в δ окрестности траектория не покинет ε окрестность.

Асимптотически устойчивым называется положение равновесия, устойчивое по Ляпунову такое что существует окрестность, в которой $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$.

Исследуем устойчивость системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Теорема 1. Если все действительные части собственных чисел A отрицательны, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если все действительные части собственных чисел неположительны и для каждого $\lambda = 0$ число линейно независимых собственных векторов равно кратности λ, то $x = 0$ – устойчивое по Ляпунову положение равновесия.