

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

Автономные системы
Фазовые траектории
Элементы теории устойчивости

Учебно-методическое пособие
по курсу *Дифференциальные уравнения*

Составитель Т. С. Пиголкина

МОСКВА
МФТИ
2013

УДК 517.9

Рецензент:

Доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Абрамов*

Автономные системы. Фазовые траектории. Элементы теории устойчивости.: уч.-метод. пособие / сост.: Т. С. Пиголкина – М.: МФТИ, 2013. – 40 с.

УДК 517.9

Излагается материал по важному вопросу современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющему также прикладное значение, по автономным системам.

©Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2013
©Пиголкина Т. С., составление, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Автономная система. Фазовое пространство. Свойства фазовых траекторий	5
§ 2. Фазовые траектории на плоскости	9
§ 3. Устойчивость положения равновесия	19
§ 4. Функция Ляпунова	23
§ 5. Устойчивость по линейному приближению	25
§ 6. Устойчивость решений автономной системы. Устойчивость для неавтономных систем	31
Приложение 1	33
Приложение 2	34
Приложение 3	35
Приложение 4	36
Литература	39

Введение

В пособии излагается материал по важному вопросу современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющему также прикладное значение, — по автономным системам.

Рассматриваются свойства фазовых траекторий, виды фазовых траекторий (фазовые портреты) линейных однородных систем с постоянными коэффициентами в двумерном пространстве, исследуется устойчивость и асимптотическая устойчивость положений равновесия как линейных однородных систем с постоянными коэффициентами, так и нормальных автономных систем по линейному приближению (теорема Ляпунова).

Приведены примеры с решениями типовых задач письменного экзамена по дифференциальным уравнениям, а также задач, предлагавшихся для самостоятельной работы студентов по рассматриваемой теме.

В пособии обсуждается весь материал по этому вопросу, предусмотренный программой курса, но изложение охватывает несколько более широкий круг вопросов (теорема Четаева о неустойчивости, фазовые траектории линейной однородной системы в трехмерном пространстве, предельные циклы).

Цель методического пособия — помочь более глубокому освоению рассмотренных здесь вопросов, умению рационально решать стандартные и повышенной трудности задачи по данной теме, а также увидеть связи с вопросами, изучаемыми в смежных дисциплинах.

§ 1. Автономная система. Фазовое пространство. Свойства фазовых траекторий

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной*¹ (или *динамической*, или *консервативной*), если в неё явно не входит независимая переменная. Под независимой переменной обычно понимают время (обозначают t), а решение автономной системы интерпретируется как движение точки. Автономная система описывает закон движения, не изменяющийся с течением времени, — именно таково большинство физических законов.

Рассматриваем *нормальную* автономную систему

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

в которой все функции x_1, \dots, x_n и f_1, \dots, f_n — вещественные. Её векторная запись

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}).$$

Пусть функции $f_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы в некоторой области D пространства переменных x_1, \dots, x_n . Тогда выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, и для любого числа t_0 и любой точки $\bar{X}^0 \in D$ существует единственное решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ системы (1), удовлетворяющее условию $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{X}^0$.

Всякое решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ системы (1) — это интегральная кривая в $(n+1)$ -мерном пространстве переменных t, x_1, \dots, x_n . Если же рассматривать t как параметр, то решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$, т.е. $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, \dots , $x_n = \varphi_n(t)$, в n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n описывает некоторую кривую, для которой $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, \dots ,

¹автономия (от греческого αὐτο “сам-” + νόμος “закон”) — собственная закономерность, определяемость какого-либо явления его внутренними законами. Тем самым название “автономная” применительно к системе подчеркивает отсутствие внешних воздействий.

$x_n = \varphi_n(t)$ — её параметрическое представление. Эта кривая называется *фазовой траекторией*, а пространство \mathbb{R}^n , в котором решение автономной системы (1) интерпретируется в виде траектории, называется её *фазовым пространством*. На траектории выбирается направление движения в сторону возрастания параметра (времени) t .

В каждой точке области D своего фазового пространства система (1) задает вектор $\bar{f}(\bar{X})$, называемый вектором *фазовой скорости*.

Говорят, что на области D система (1) определяет *векторное поле* — поле фазовых скоростей. Точки, в которых $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{0}$, называются *особыми* (иногда *характеристическими*) точками векторного поля. Специфика автономной системы состоит в том, что поле фазовых скоростей не меняется с изменением времени.

Если в точке $\bar{a} \in D$ фазовая скорость равна нулю: $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{0}$, то вектор функция $\bar{X}(t) \equiv \bar{a}$ есть решение системы (1). Действительно, подставляя в систему $\bar{X}(t) \equiv \bar{a}$ получим $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{f}(\bar{a}) = \bar{0}$.

Верно и обратное, если $\bar{X}(t) \equiv \bar{a}$ есть решение, то $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{0}$, так как $\bar{f}(\bar{a}) = \frac{d\bar{X}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{0}$.

Это решение $\bar{X}(t) \equiv \bar{a}$ называется *положением равновесия* (или *точкой покоя*) автономной системы (1). Очевидно, что положение равновесия есть фазовая траектория системы (1). Таким образом, особые точки векторного поля определяют положения равновесия автономной системы — это все решения системы $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{0}$.

Теорема 1 (свойства решений автономной системы (1)).

1. Если $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ — решение системы (1), то при любом $c \in \mathbb{R}$ $\bar{X} = \bar{\varphi}(t + c)$ — также решение.
2. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают, т.е. если $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ и $\bar{X} = \bar{\psi}(t)$ — два решения системы (1), и $\bar{\varphi}(t_1) = \bar{\psi}(t_2)$, то $\bar{\varphi}(t) = \bar{\psi}(t + c)$ где $c = t_2 - t_1$.

3. (групповое свойство). Если $\bar{X} = \bar{\varphi}(t, \bar{X}^0)$ — решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $\bar{X} \Big|_{t=0} = \bar{X}^0$, то

$$\bar{\varphi}(t_1 + t_2, \bar{X}^0) = \bar{\varphi}(t_2, \bar{X}(t_1, \bar{X}^0)) = \bar{\varphi}(t_1, \bar{X}(t_2, \bar{X}^0)).$$

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что интегральные кривые системы (1) не пересекаются, а из Теоремы 1 следует, что через каждую точку области D фазового пространства проходит также одна фазовая траектория, изображающая решение системы (1). Говорят, что фазовое пространство автономной системы расслаивается на непересекающиеся траектории (для неавтономных систем это не так, см. Приложение 1).

Теорема 2. Всякая фазовая траектория системы (1) принадлежит к одному из трех типов:

- 1) положение равновесия;
- 2) замкнутая гладкая кривая (цикл) — периодическое решение с наименьшим периодом $T > 0$;
- 3) гладкая кривая без самопересечений.

Для автономной системы фазовая траектория есть проекция интегральной кривой системы на фазовое пространство. Интегральная кривая $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ — это линия в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных t, x_1, \dots, x_n , а фазовая траектория — это „видимая“ траектория движения в пространстве переменных x, \dots, x_n (см. рис. 1).

Пример 1. Малые колебания плоского маятника (без трения) описываются уравнением $\ddot{x} = -kx$, $k > 0$ (ускорение пропорционально углу отклонения). Замена $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ приводит к автономной системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -kx_1. \end{cases} \quad (2)$$

Фазовое пространство — плоскость переменных x_1 и x_2 . Начало координат — единственное положение равновесия. Поле фазовых скоростей определено на всей плоскости (см. рис. 2).

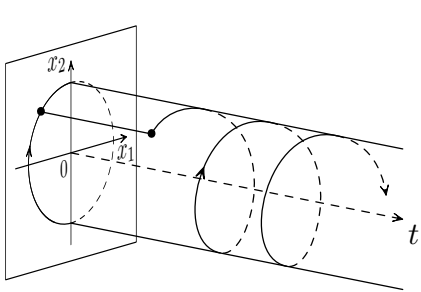


Рис. 1

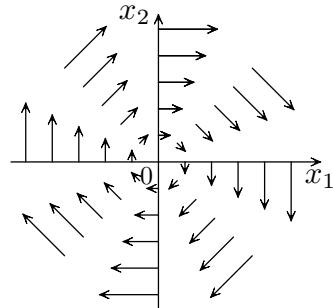


Рис. 2

Можем найти уравнение фазовых траекторий. Исключим переменную t из уравнений системы (2), получим дифференциальное уравнение $kx_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$. Его решение $kx_1^2 + x_2^2 = C$ ($k > 0$) и есть уравнение фазовых траекторий во всей плоскости. (Заметим, что функция $u(x_1, x_2) = kx_1^2 + x_2^2$ есть *первый интеграл* системы (2).)

Если не ограничиваться малыми колебаниями, то уравнение будет иное: $\ddot{x} = -k \sin x$, $k > 0$.

Та же замена приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k \sin x_1. \end{cases} \quad (3)$$

Положение равновесия находим из системы

$$\begin{cases} 0 = x_2, \\ 0 = -k \sin x_1, \end{cases}$$

что даёт $x_1 = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и $x_2 = 0$.

Имеем счетное множество положений равновесия на оси абсцисс, поле фазовых скоростей имеет период $T = 2\pi$, его вид дан на рис. 3а.

Точки $(2\pi k, 0)$ соответствуют нижнему положению равновесия, а точки $(\pi(2k + 1), 0)$ — верхнему положению равновесия.

В этом случае также легко исключается t ($k \sin x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$) и находится уравнение фазовых траекторий

во всей фазовой плоскости: $x_2^2 - 2k \cos x_1 = C$ (функция $u(x_1, x_2) = x_2^2 - 2k \cos x_1$ есть первый интеграл системы (3)). Фазовые траектории изображены на рис. 3б.

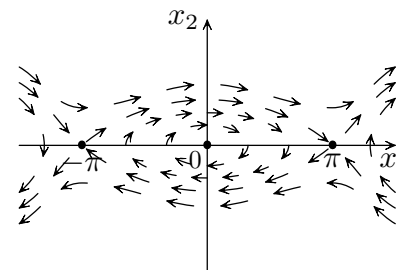


Рис. 3а

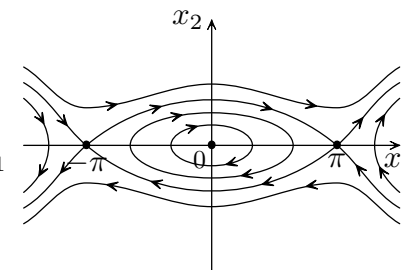


Рис. 3б

§ 2. Фазовые траектории на плоскости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (4)$$

с постоянными вещественными коэффициентами, т.е. матрица системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вещественна, $a_{ij} = \text{const}$.

Система (4) автономная, фазовое пространство P — плоскость $0x_1x_2$. Эскиз фазовых траекторий на фазовой плоскости называется фазовым портретом системы (4).

Вид и свойства решения системы (4) определяются собственными числами матрицы A , т.е. корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, что точка $(0, 0)$ есть положение равновесия системы. Оно будет единственным тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, иначе, когда оба корня характеристического уравнения отличны от нуля.

Так как коэффициенты характеристического уравнения вещественны, то возможны случаи:

- 1) собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A вещественные и различные;
- 2) собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A комплексно-сопряженные (и значит, различные);
- 3) матрица A имеет единственное вещественное собственное значение λ (т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$).

Рассматриваем важнейший случай $\det A \neq 0$ (положение равновесия единственно — точка $(0, 0)$).

I. Собственные значения λ_1 и λ_2 вещественные, различные и отличные от нуля

Существует два линейно независимых собственных вектора \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 , любое решение определено при $t \in (-\infty, +\infty)$ и имеет вид

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2, \quad (5)$$

где C_1 и $C_2 \in \mathbb{R}$.

Положим

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6)$$

тогда в базисе $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ будем иметь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что построить фазовые траектории наиболее просто на плоскости P^* , на которой векторы \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 будут взаимно перпендикулярными единичными векторами осей $0\xi_1$ и $0\xi_2$.

Отобразим аффинно фазовую плоскость P на такую вспомогательную фазовую плоскость P^* . На плоскости P^* точка $X = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2$ имеет прямоугольные декартовы координаты (ξ_1, ξ_2) , и траектории описываются уравнениями (6).

Если фазовая траектория задается уравнениями (6) при некоторых фиксированных C_1 и C_2 , то фазовыми кривыми будут

также траектории, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \xi_2 = -C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = -C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = -C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \xi_2 = -C_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Из этого следует, что достаточно построить траекторию **лишь в первом квадранте** ($C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$), а полную картину получить отражением относительно осей и начала координат.

Заметим, что при $C_1 = C_2 = 0$ из (6) получаем решение $(0, 0)$ — положение равновесия.

Если $C_1 > 0, C_2 = 0$, то фазовая траектория — положительная полуось $0\xi_1$, а при $C_1 = 0, C_2 > 0$ — положительная полуось $0\xi_2$.

Исключив переменную t из системы (6), получим

$$\xi_2 = C_0 \xi_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (8)$$

— это явный вид фазовой траектории.

II. Собственные значения λ_1 и λ_2 одного знака

Пусть, например, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$, и, значит, в первом квадранте точка $\bar{X}(t)$ и по положительным полуосям $0\xi_1$ и $0\xi_2$, и по любой фазовой траектории $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$, стремится к точке $(0, 0)$ — положению равновесия.

Из явного вида (8) фазовой траектории $\xi_2 = A \xi_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, и того, что $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, следует, что они имеют вид “параболы” (см. рис. 4). Стрелки на рисунке показывают направление движения с возрастанием t .

Таким образом, каждая фазовая траектория при $t \rightarrow +\infty$ “входит” в начало координат и в пределе касается оси ξ_1 — оси вектора \mathbf{h}_1 , соответствующего меньшему по модулю собственному значению. Полученный фазовый портрет называется *устойчивый узел*.

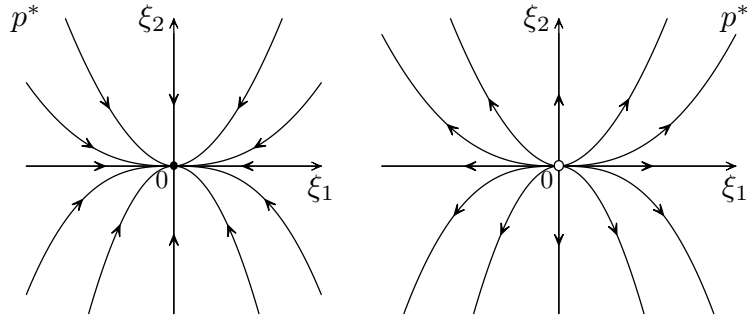


Рис. 4. Устойчивый узел,
 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

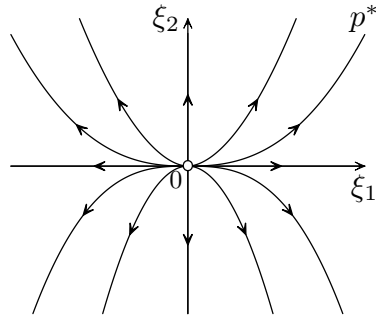


Рис. 5. Неустойчивый узел,
 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Если $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то траектории остаются прежними, но движение в противоположную сторону — от начала координат. Этот фазовый портрет (см. рис. 5) называют *неустойчивый узел*.

Рисунки 4 и 5 дают картину траекторий на вспомогательной фазовой плоскости P^* . На основной фазовой плоскости $0x_1x_2$ картина получается аффинным отображением и зависит от положения собственных векторов.

1б. Собственные значения λ_1 и λ_2 разных знаков

Строим траектории движения в первом квадранте.

Пусть, например, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, тогда $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ и движение по положительной полуоси $0\xi_1$ к началу координат. По положительной полуоси $0\xi_2$ движение от начала координат, так как $e^{\lambda_2 t} \rightarrow +\infty$.

Отношение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ отрицательное, поэтому из явного вида фазовых траекторий $\xi_2 = A\xi_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, следует, что они имеют вид “гипербол”, при этом $\xi_1 \rightarrow 0$, а $\xi_2 \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отразим траектории относительно координатных осей. Полученный фазовый портрет называется “седло” (см. рис. 6).

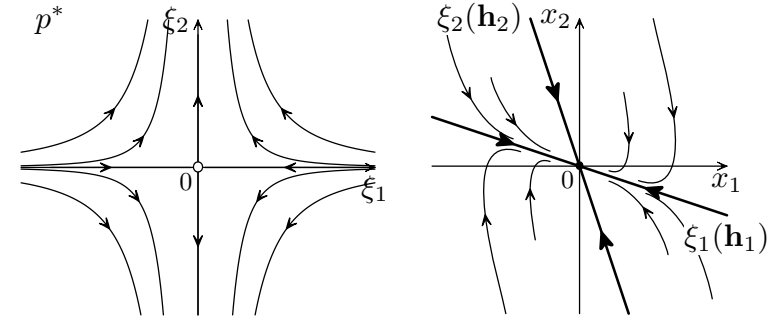


Рис. 6. Седло, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$.

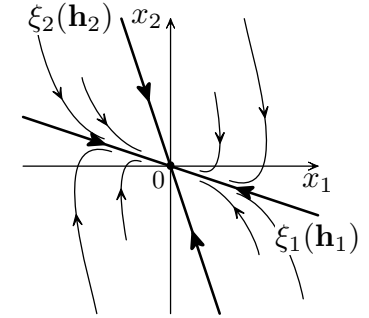


Рис. 7

Пример 2.

Уравнение малых колебаний маятника с трением (коэффициент трения $k, k > 0$) можно записать в виде

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x}, \quad k > 0. \quad (9)$$

Замена $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ приводит к автономной системе $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2 \end{cases}$ с матрицей $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix}$.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ различные и вещественные, если $k > 2$ (случай сильного трения).

Положим, например, $k = \frac{10}{3}$, тогда $\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = -3$, фазовый портрет — устойчивый узел. Собственным значениям λ_1 и λ_2 соответствуют собственные векторы $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Так как $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 0$, то в пределе при $t \rightarrow +\infty$ фазовые траектории “входят” в начало координат, касаясь оси $0\xi_1$ вектора \mathbf{h}_1 .

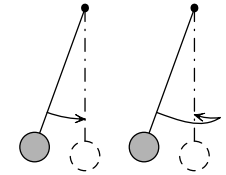


Рис. 8

На фазовой плоскости $0x_1x_2$ строим собственные векторы \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 и “искажаем” картину “устойчивый узел” в соответствии с направлением собственных векторов (см. рис. 7).

Как видим, при сильном трении маятник не совершает затухающих колебаний. Его скорость (это $x_2 = \dot{x}_1$) меняет знак не более одного раза. Движение маятника показано на рис. 8.

II. Собственные значения λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные

Матрица A — вещественная, поэтому λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, α и β — вещественные, $\beta \neq 0$. Как известно, собственные векторы можно выбрать сопряженные $\mathbf{h}_1 = \bar{U} + i\bar{V}$ и $\mathbf{h}_2 = \bar{U} - i\bar{V}$, в этом случае действительные части решений $\mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 t}$ и $\mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 t}$ совпадают, а их мнимые части отличаются только знаком. Любое вещественное решение системы (4) будет иметь вид

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \operatorname{Re}(\mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(\mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 t}), \text{ где } C_1 \text{ и } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получим, что в базисе \bar{U}, \bar{V} точка $\bar{X} = \xi_1 \bar{U} + \xi_2 \bar{V}$ имеет координаты

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t), \\ \xi_2 &= e^{\alpha t} (b \cos \beta t - a \sin \beta t), \end{aligned}$$

и после введения дополнительного аргумента

$$\begin{aligned} \xi_1 &= C e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0), \\ \xi_2 &= -C e^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_0). \end{aligned} \quad (10)$$

IIa. Оба корня чисто мнимые: $\alpha = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

В этом случае $\xi_1 = C_0 \cos(\beta t - \varphi_0)$, $\xi_2 = -C_0 \sin(\beta t - \varphi_0)$, $C_0 > 0$.

Так как $\xi_1^2 + \xi_2^2 = C_0^2$, то фазовые траектории на вспомогательной фазовой плоскости P^* , где векторы \bar{U} и \bar{V} суть взаимно ортогональные единичные векторы осей $0\xi_1$ и $0\xi_2$ есть

окружности (значит, на основной фазовой плоскости — эллипсы). Фазовая картина называется „центр“ (см. рис. 9).

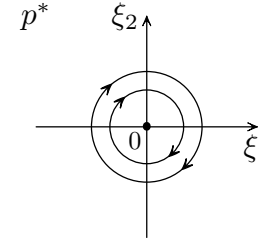


Рис. 9. Центр,
 $\lambda = \pm i\beta$

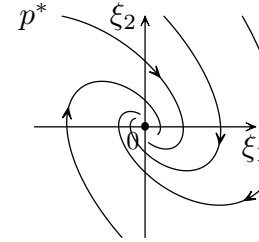


Рис. 10. Устойчивый
фокус,
 $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 < 0$

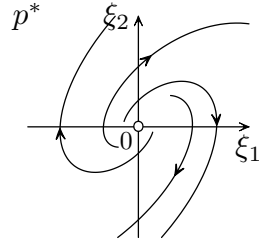


Рис. 11. Неустойчивый
фокус,
 $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 > 0$

IIб. Характеристические числа комплексные:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

Пусть $\alpha < 0$. Наличие в (10) множителя $e^{\alpha t}$, стремящегося к нулю при $t \rightarrow +\infty$, превращает замкнутые траектории в спирали, накручивающиеся на положение равновесия. Действительно, если положить $\rho = C e^{\alpha t}$, $\varphi = \beta t - \varphi_0$, то уравнение траектории (10) примет вид

$$\xi_1 = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad \xi_2 = -\rho(\varphi) \sin \varphi,$$

причем, как нетрудно получить, $\rho = C e^{\lambda \frac{\varphi + \varphi_0}{\beta}}$, а это и есть уравнение логарифмической спирали в полярных координатах.

Фазовый портрет называется *устойчивый фокус* (см. рис. 10).

При $\alpha > 0$ фазовые траектории такие же спирали, но движение происходит от начала координат, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho = +\infty$. Имеем *неустойчивый фокус* (см. рис. 11).

На основной фазовой плоскости спирали несколько искажаются. Направление движения в случае центра и фокуса определяют нахождением вектора фазовой скорости в какой-

нибудь точке. Для простоты счета точку обычно берут на одной из осей.

Пример 3. Рассматриваем (как и в Примере 2) малые колебания маятника с трением, только в случае слабого трения $k < 2$ (когда характеристические числа комплексные).

Возьмём, например, $k = \frac{8}{5}$, тогда получим $\lambda_1 = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$ и $\lambda_2 = -\frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$. Фазовый портрет — устойчивый фокус (так как $\alpha = -\frac{4}{5} < 0$), это накручивающаяся на положение равновесия $(0,0)$ спираль. Для определения направления движения находим вектор скорости в точке $A(a,0)$, $a > 0$.

Подставляем координаты $x_1 = a > 0$, $x_2 = 0$ в систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2, \end{cases} \text{ получаем } \left. \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \right|_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}.$$

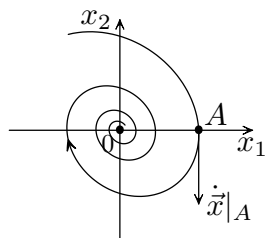


Рис. 12

Рисуем вектор и соответствующую спираль (см. рис. 12). Чем меньше коэффициент трения k , тем медленнее фазовые траектории приближаются к положению равновесия. В пределе при $k \rightarrow 0$ устойчивый фокус превращается в центр ($k = 0$), колебания становятся периодическими.

З а м е ч а н и е. Название фазового портрета однородной системы двух линейных дифференциальных уравнений (4) переносится и на положение равновесия, например в случае **IIa** положение равновесия называется центр, а в случае **IIb** — устойчивый или неустойчивый фокус.

III. Случай кратных собственных значений

Очевидно, корни вещественные. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

IIIa. Существует базис из собственных векторов \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2

Решение запишется в виде $\bar{X} = C_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + C_2 e^{\lambda t} \mathbf{h}_2$, а в базисе \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 $\bar{X} = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2$, где $\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}$ и $\xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$ — пропорциональны $e^{\lambda t}$. Фазовые траектории — лучи, фазовый портрет называется *вырожденный устойчивый узел* (при $\lambda < 0$) и *вырожденный неустойчивый узел* (при $\lambda > 0$) — см. рис. 13 и рис. 14. Иногда фазовые портреты рис. 13 и рис. 14 называют дикритическим узлом.

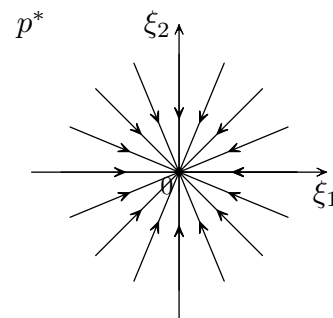


Рис. 13. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

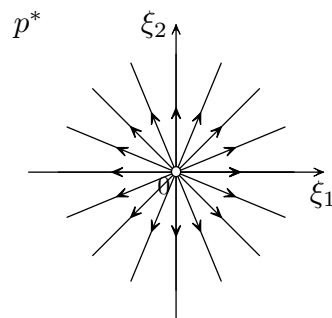


Рис. 14. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

IIIб. Существует единственный собственный вектор \mathbf{h}_1 , тогда всякое решение системы (4) может быть представлено в виде

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + C_2 e^{\lambda t} (\mathbf{h}_1 t + \mathbf{h}_2), \quad (11)$$

где вектор \mathbf{h}_2 — присоединённый, удовлетворяет системе $(A - \lambda E)\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$, при этом векторы \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 линейно независимы. В базисе $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ решение имеет вид

$$\bar{X}(t) = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2, \quad \text{где } \xi_1 = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t) \text{ и } \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Фазовая картина при $\lambda < 0$ также называется *вырожденным устойчивым узлом*, а при $\lambda > 0$ — *вырожденным неустойчивым узлом* (рис. 15 и рис. 16).

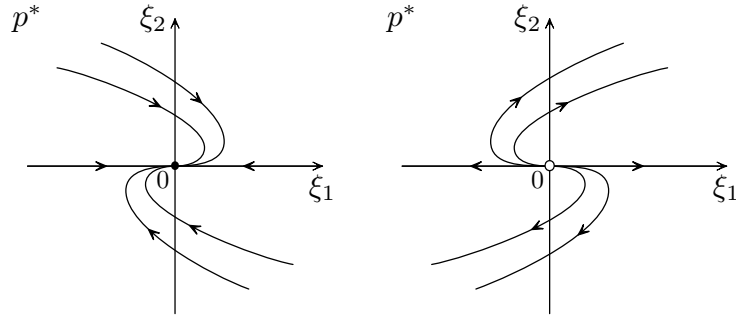


Рис. 15. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Рис. 16. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

IV. $\det A = 0$ и хотя бы одно из характеристических чисел не равно нулю.

Положение равновесия не единственно, так как система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

при $\det A = 0$ имеет бесконечно много решений.

IVa. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$. Существует базис $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ из собственных векторов, решение имеет вид

$$\bar{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + C_2 \mathbf{h}_2,$$

а в базисе \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2

$$\bar{X}(t) = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2,$$

где $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $\xi_2 = C_2$.

Все точки прямой $\xi_1 = 0$ являются положениями равновесия, фазовые траектории — прямые, параллельные оси $0\xi_1$ (см. рис. 17).

IVб. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Возможны два случая.

IVб.1. Все коэффициенты системы (4) равны нулю, тогда каждая точка фазовой плоскости есть положение равновесия,

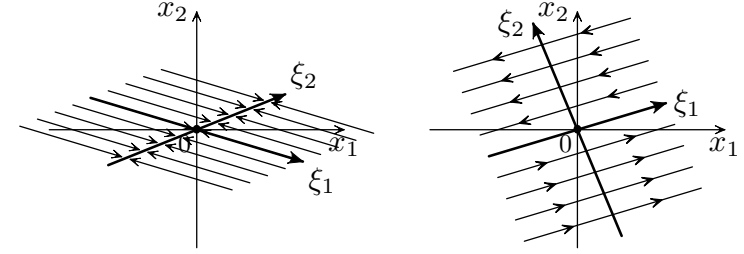


Рис. 17. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$

Рис. 18. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

IVб.2. Либо решение имеет вид (11) при $\lambda = 0$

$$\bar{X}(t) = C_1 \mathbf{h}_1 + C_2 (\mathbf{h}_1 t + \mathbf{h}_2),$$

$$\bar{X} = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \xi_2 \mathbf{h}_2,$$

где $\xi_1 = C_1 + C_2 t$, $\xi_2 = C_2$. Например, система такова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Движение происходит равномерно по любой прямой $\xi_2 = \text{const} \neq 0$. Все точки прямой $\xi_2 = 0$ являются положениями равновесия (см. рис. 18).

О фазовых траекториях линейной системы $\dot{\bar{X}} = A\bar{X}$, $n = 3$, $a_{ij} = \text{const}$, $\det A \neq 0$ см. Приложение 2.

§ 3. Устойчивость положения равновесия

Для нормальных систем доказана теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных. Из этой теоремы следует, что если рассматривать решение на некотором конечном промежутке времени, то при достаточно малых изменениях начальных данных решение на этом промежутке также изменяется мало.

Во многих конкретных процессах, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, требуется знание поведения решения при неограниченно больших измене-

ниях времени (т.е. при $t \rightarrow +\infty$). Даже в модельных задачах о движении математического маятника вблизи положения равновесия (примеры 1, 2 и 3) именно рассмотрение фазовых траекторий при неограниченном изменении времени позволило сделать вывод о движении маятника, начавшемся в точке вблизи положения равновесия (при сильном трении, слабом трении, в отсутствие трения).

Изучением решений систем дифференциальных уравнений при $t \rightarrow +\infty$ занимается теория устойчивости.

Понятие устойчивого решения было введено русским математиком А.М. Ляпуновым (1857–1918), им же были заложены основы методов исследования решений на устойчивость.

Введём понятие устойчивости положения равновесия автономной системы.

Вновь рассматриваем систему

$$\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X}), \quad (12)$$

у которой все функции $f_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы в некоторой области D фазового пространства. Пусть $\bar{X}(t) \equiv \bar{a}$ — положение равновесия (т.е. $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{0}$).

Решение системы (1) с начальным условием $\bar{X} \mid_{t=0} = \bar{X}^0$ обозначим $\bar{X}(t, \bar{X}^0)$. Очевидно, что $\bar{X}(t, \bar{a}) = \bar{a}$.

Определение 1. Положение равновесия \bar{a} называется *устойчивым по Ляпунову*, если

- 1) существует окрестность положения равновесия $U_{\delta_0}(\bar{a})$ такая, что для любой точки \bar{X}^0 этой окрестности существует решение $\bar{X}(t, \bar{X}^0)$ при $t \geq 0$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$), что если $\|\bar{X}^0 - \bar{a}\| < \delta$, то $\|\bar{X}(t, \bar{X}^0) - \bar{a}\| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

Это означает, что если в начальный момент времени точка \bar{X}^0 близка к положению равновесия, то фазовая траектория, выходящая из точки \bar{X}^0 , во все последующие моменты времени будет оставаться вблизи положения равновесия.

Определение 2. Положение равновесия \bar{a} называется *асимптотически устойчивым*, если оно

- 1) устойчиво по Ляпунову и
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}(t, \bar{X}^0) = \bar{a}$ при \bar{X}^0 достаточно близком к \bar{a} .

Это означает, что фазовая траектория, начавшаяся в достаточно близкой к положению равновесия точке, при $t \rightarrow +\infty$ стремится к положению равновесия.

Определение 3. Положение равновесия \bar{a} называется *неустойчивым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такая точка \bar{X}^0 , что $\|\bar{X}^0 - \bar{a}\| < \delta$ и такое значение $t = T > 0$, что $\|\bar{X}(T, \bar{X}^0) - \bar{a}\| > \varepsilon$.

С точки зрения введенных определений рассмотрим положения равновесия $(0, 0)$ однородной системы линейных дифференциальных уравнений с двумя переменными и постоянными коэффициентами, которые были исследованы в § 2.

Нетрудно показать (исходя из явного вида решения), что

- 1) устойчивый узел, устойчивый фокус, вырожденный устойчивый узел (в этих случаях $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$) — асимптотически устойчивые положения равновесия;
- 2) центр — устойчивое по Ляпунову, но не асимптотически устойчивое положение равновесия (в случае центра $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$);
- 3) седло, неустойчивый узел, неустойчивый фокус, неустойчивый вырожденный узел — неустойчивые положения равновесия (при этом вещественная часть *хотя бы одного* собственного значения положительна).

При $n = 2$ все положения равновесия, отвечающие условию $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, принято называть “грубыми” — это узел, фокус, седло.

Для *линейной однородной* системы из n уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} \quad (13)$$

тривиальное решение $\bar{X}(t) = \bar{0}$ является положением равновесия.

Теорема об устойчивости положения равновесия линейной системы.

1. Положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ системы (12) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части всех характеристических чисел матрицы A отрицательны.
2. Положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ системы (12) неустойчиво, если хотя бы у одного характеристического числа матрицы A вещественная часть положительна.

Рассмотрим комплексную плоскость (рис. 19)

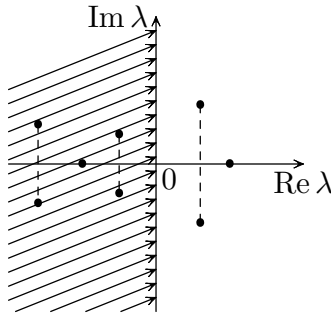


Рис. 19

Если **все** характеристические числа матрицы A лежат левее мнимой оси ($\text{Re } \lambda < 0$), то положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ асимптотически устойчиво; если хотя бы одно λ лежит правее мнимой оси, то вещественная часть этого λ положительна, и положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ неустойчиво.

Доказательство Теоремы 1 можно провести исходя из явного вида решения и получения оценки

$$\|\bar{X}(t, \bar{X}^0)\| \leq C \|\bar{X}^0\| \cdot e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Однако предпочтительней другой метод, разработанный Ляпуновым и называемый “прямым методом”, который состоит в отыскании для каждой системы (а для линейной это делается особенно просто) некоторой функции (функции Ляпунова), по свойствам которой можно делать заключение об устойчивости решения.

§ 4. Функция Ляпунова

Определение 4. Функция $V(\bar{X}) = V(x_1, \dots, x_n)$, непрерывно дифференцируемая в окрестности U точки $\bar{X} = \bar{0}$, называется положительно определённой в U , если $V(\bar{X}) > 0$ при $\bar{X} \neq \bar{0}$ и $V(\bar{0}) = 0$.

Если же $V(\bar{X}) < 0$ при $\bar{X} \neq \bar{0}$ и $V(\bar{0}) = 0$, то функция $V(\bar{X})$ называется отрицательно определённой.

Определение 5. Производной функции $V(\bar{X}) = V(x_1, \dots, x_n)$ в силу системы (12) называется выражение $\dot{V}(\bar{X}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$, где f_1, \dots, f_n — компоненты вектор-функции $\bar{f}(\bar{X})$ в системе $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$.

Для любого решения $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ системы (12) имеем $V(\bar{X}(t)) = V(\bar{\varphi}(t)) = V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dV(\bar{X}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{d\varphi_n}{dt}.$$

Поскольку для любого решения $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ имеет место $\frac{d\varphi_k}{dt} = f_k$, то $\frac{dV(\bar{X}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$ и не зависит от выбранного решения.

Производная в силу системы называется также производной по направлению векторного поля или производной Ли (в честь математика Софуса Ли).

Определение 6. Положительно определённая в окрестности U точки $\bar{X} = \bar{0}$ функция $V(\bar{X})$ называется функцией Ляпунова системы (1) $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$, если её производная в силу системы $\dot{V}(\bar{X}) \leq 0$, $\bar{X} \in U$.

Теорема Ляпунова.

1. Если в некоторой окрестности положения равновесия $\bar{X} = 0$ системы (1) существует функция Ляпунова, то положение равновесия $\bar{X} = 0$ устойчиво.
2. Если в некоторой окрестности положения равновесия $\bar{X} = 0$ производная в силу системы отрицательно определенная функция (т.е. $\dot{V}(\bar{X}) < 0$ при $\bar{X} \neq 0$ и $V(0) = 0$), то положение равновесия $\bar{X} = 0$ асимптотически устойчиво.

При $n = 2$ эта теорема имеет простой геометрический смысл. Функция Ляпунова $V(\bar{X})$ определяет поверхность, похожую на параболоид, её линии уровня, определяемые равенством $V(\bar{X}) = C$, — замкнутые линии вокруг начала координат (см. рис. 20). Пусть линия с меньшим значением C лежит внутри линии с большим значением C .

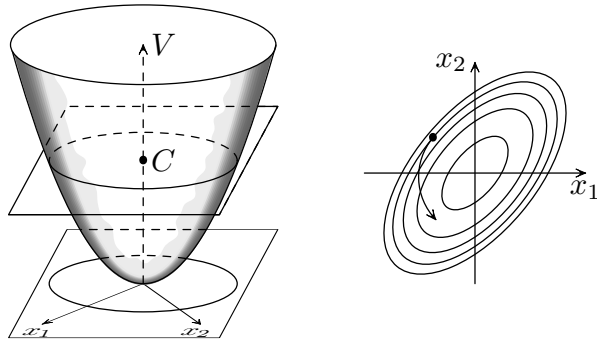


Рис. 20

При таком предположении условие $\dot{V}(\bar{X}) \leq 0$ означает, что фазовые траектории, имеющие общую точку с линией уровня $V = C$, не выходят из области, ограниченной этой линией — отсюда и следует устойчивость решения $\bar{X} = 0$.

Если же $\dot{V}(\bar{X})$ отрицательно определена, то из $\dot{V}(\bar{X}) < 0$, $\bar{X} \neq 0$, следует, что фазовые траектории пересекают линию уровня снаружи внутрь, а так как $\lim_{\bar{X} \rightarrow 0} V(\bar{X}) = 0$, то и все фазовые траектории стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Пример 4. Исследовать на устойчивость положение равновесия $(0, 0)$ двух систем

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$$

И для той и для другой системы в качестве функции Ляпунова можно взять функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$ (это положительно определенная функция).

$$\text{Для системы (I)} \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} (-x) = 2xy - 2xy = 0.$$

$$\text{Для системы (II)} \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} (y - x^3) + \frac{\partial V}{\partial y} (-x - y^3) = 2xy - x^4 - 2xy - y^4 = -(x^4 + y^4) \leq 0.$$

Для системы (I) начало координат — устойчивое положение равновесия; для системы (II) — асимптотически устойчивое, так как производная в силу системы отрицательно определенная функция обращается в ноль лишь в точке $x = y = 0$.

Всё, изложенное в этом параграфе, легко переносится на положение равновесия $\bar{a} \neq 0$. На практике для простоты вычислений ненулевое положение равновесия заменой переводят в начало координат и используют теоремы в данной формулировке.

Заметим, что общего метода построения функции Ляпунова для произвольной системы нет, однако для линейной системы функция Ляпунова существует в виде положительно определенной квадратичной формы. И эта же функция Ляпунова позволяет доказать теорему об устойчивости по линейному приближению.

§ 5. Устойчивость по линейному приближению

Рассматриваем автономную систему (1)

$$\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$$

из n уравнений, для которой $\bar{X} = 0$ — положение равновесия (т.е. $\bar{f}(0) = 0$).

Здесь мы потребуем, чтобы вектор-функция $\bar{f}(\bar{X})$ была дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности начала координат.

Разложим каждую координату вектор-функции $\bar{f}(\bar{X})$ по формуле Тейлора в окрестности $\bar{X} = \bar{0}$. Учитывая, что $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$, получим

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \Big|_{\bar{X}=\bar{0}} \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \Big|_{\bar{X}=\bar{0}} \cdot x_n + r_k(x_1, \dots, x_n).$$

В силу дважды дифференцируемости функции $f_k(x_1, \dots, x_n)$ будет справедлива оценка $|r_k(x_1, \dots, x_n)| \leq M_k \|\bar{X}\|^2$, если точка \bar{X} достаточно близка к началу координат (здесь $\|\bar{X}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$).

Система (1) примет вид

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + \bar{R}(\bar{X}), \quad (14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big|_{\bar{X}=\bar{0}} \quad \text{и} \quad \|\bar{R}(\bar{X})\| \leq M \cdot \|\bar{X}\|^2.$$

Отбросив в (14) малые слагаемые $\bar{R}(\bar{X})$, получим линейную систему

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X}. \quad (15)$$

Система (15) называется *линеаризованной* для системы (1) в окрестности точки $\bar{X} = 0$.

Теорема Ляпунова (об устойчивости по линейному приближению).

1. Пусть система $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$ такова, что $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$ и вектор-функция $\bar{f}(\bar{X})$ дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $\bar{X} = 0$. Если у матрицы A линеаризованной системы вещественные части всех собственных значений отрицательны, то положение равновесия $\bar{X} = 0$ системы $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$ асимптотически устойчиво.

2. Если в тех же предположениях хотя бы у одного собственного значения матрицы A линеаризованной системы вещественная часть положительна, то положение равновесия $\bar{X} = 0$ системы $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$ неустойчивое.

Из этой теоремы, в частности, следует, что об устойчивости по линейному приближению ответ может быть дан во всех случаях, кроме того случая, когда у матрицы линеаризованной системы есть характеристические числа чисто мнимые, а остальные имеют отрицательную вещественную часть.

Если ограничиться рассмотрением систем с двумя переменными, то вывод можно сформулировать так: если у линеаризованной системы положение равновесия есть центр, то *какой* характер будет иметь положение равновесия исходной системы — неизвестно.

В Примере 4 система (I) есть линеаризованная система в окрестности начала координат системы (II). Система (I) имеет характеристические числа $\lambda = \pm i$, положение равновесия — центр, устойчивое, но не асимптотически устойчивое.

У системы (II) положение равновесия асимптотически устойчивое.

В Примере 1 для системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k \sin x_1, \quad k > 0, \end{cases}$ линеаризованной системой в окрестности положения равновесия $(0, 0)$ будет система $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -kx_1, \quad k > 0, \end{cases}$ её собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$, положение равновесия — центр, устойчивое положение равновесия. Из уравнений фазовых траекторий нелинейной системы следует, что начало координат остается центром, устойчивым положением равновесия (см. рис. 3б).

Пример 5. Найти все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5 - 2x - 2y), \\ \dot{y} = e^{xy} - 1, \end{cases} \quad (16)$$

определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий линеаризованных систем в окрестности положения равновесия.

Положения равновесия находятся как решения системы

$$\begin{cases} \ln(5 - 2x - 2y) = 0, \\ e^{xy} - 1 = 0, \end{cases}$$

имеем два решения: $A_1(0; 2)$ и $A_2(2; 0)$.

1) Рассмотрим точку $A_1(0; 2)$. Заменой $x = u$, $y = v + 2$ отобразим точку A_1 в начало координат плоскости (u, v) , система примет вид $\begin{cases} \dot{u} = \ln(1 - 2u - 2v), \\ \dot{v} = e^{2u+uv} - 1. \end{cases}$

Точка $(0, 0)$ — положение равновесия этой системы, правые части в окрестности точки $(0, 0)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Раскладываем их по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$, оставляя члены первого порядка получаем линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u - 2v, \\ \dot{v} = 2u. \end{cases} \quad (17)$$

Матрица системы — $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, характеристические числа — $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Для системы (17) начало координат — устойчивый фокус, $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = -1 < 0$. По теореме об устойчивости по линейному приближению положение равновесия $A_1(0; 2)$ системы (16) асимптотически устойчивое.

Дадим фазовый портрет линеаризованной системы (17) на фазовой плоскости (u, v) . Вычислим вектор скорости, например, в точке $B(b, 0)$, $b > 0$, подставляя в систему (17) $u = b$, $v = 0$: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} b$ (см. рис. 21а).

Фазовый портрет — спираль, накручивающаяся на положение равновесия против часовой стрелки (см. рис. 21б).

2) Точку $A_2(2; 0)$ заменой $x = 2 + \xi$, $y = \eta$ перенесем в начало координат. После замены система примет вид $\begin{cases} \dot{\xi} = \ln(1 - 2\xi - 2\eta), \\ \dot{\eta} = e^{2\xi+\eta} - 1, \end{cases}$ и её линеаризованная система будет

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2\xi - 2\eta, \\ \dot{\eta} = 2\xi. \end{cases} \quad (18)$$

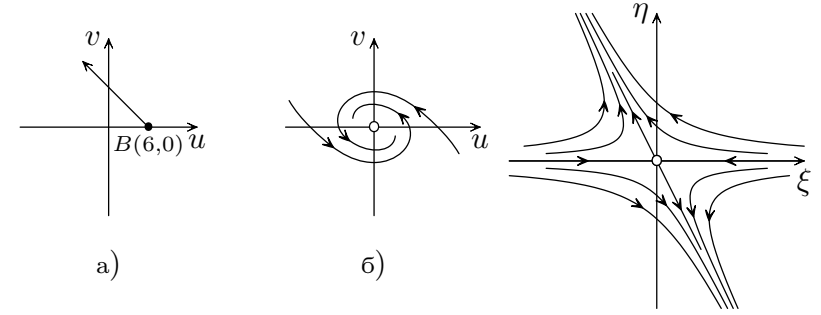


Рис. 21

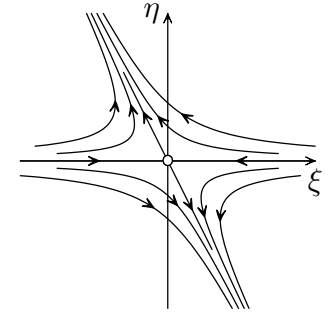


Рис. 22

Матрица системы — $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, характеристические числа — $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Для линеаризованной системы (18) положение равновесия — седло. Находим собственные векторы матрицы A :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0, \\ \lambda_2 = 2, \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_2 t} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Фазовый портрет линеаризованной системы (18) дан на рис. 22.

Поскольку $\text{Re } \lambda_2 = 2 > 0$, у исходной системы (16) положение равновесия $A_2(2; 0)$ — неустойчивое положение равновесия (по теореме об устойчивости по линейному приближению).

Пример 6. Найти положения равновесия для уравнения

$$\ddot{x} = 3x - 4\dot{x} - x^2, \quad (19)$$

определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положения равновесия.

Замена $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - x_1^2. \end{cases} \quad (20)$$

Положениями равновесия будут решения системы

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_1^2 = 0, \end{cases}$$

получаем две точки $A_1(0;0)$ и $A_2(3;0)$.

1) $A_1(0;0)$. В окрестности точки $(0;0)$ для системы (20) находим линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, её характеристические числа $\lambda_1 = -2 - \sqrt{7} < 0$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{7} > 0$. Положение равновесия и фазовый портрет — седло. Собственные векторы $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} - 2 \end{pmatrix}$, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$, $e^{\lambda_2 t} \rightarrow +\infty$. Фазовый портрет линеаризованной системы в окрестности начала координат дан на рис. 23.

Для системы (20) и, следовательно, для уравнения (19) положение равновесия $(0;0)$ неустойчивое, поскольку $\lambda_2 > 0$.

2) $A_2(3;0)$. Заменой $x_1 = 3 + \xi$, $x_2 = \eta$ переводим точку A_2 в начало координат, система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = -3\xi - \xi^2 - 4\eta. \end{cases} \quad (21)$$

Для неё линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = -3\xi - 4\eta, \end{cases}$$

матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Положение равновесия $(0;0)$ линеаризованной системы — устойчивый узел. Находим собственные векторы $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Фазовые траектории вида парабол “входят” в положение равновесия с касанием оси вектора \mathbf{h}_1 , отвечающего

меньшему по модулю характеристическому числу. Фазовый портрет показан на рис. 24.

Для системы (21) и, следовательно, для исходного уравнения (19) положение равновесия $(3;0)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия, так как $\text{Re } \lambda_1 < 0$, $\text{Re } \lambda_2 < 0$.

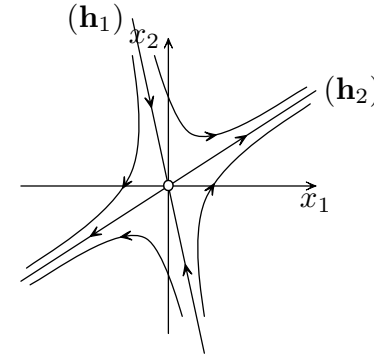


Рис. 23

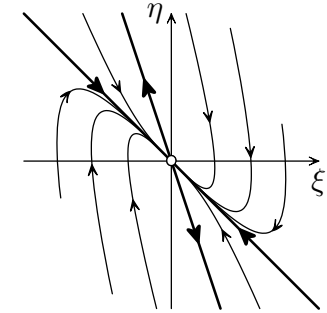


Рис. 24

§ 6. Устойчивость решений автономной системы. Устойчивость для неавтономных систем

Для автономной системы

$$\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$$

решение, удовлетворяющее условию $\bar{X} |_{t=0} = \bar{X}^0$, обозначим $\bar{X}(t, \bar{X}^0)$.

Решение $\bar{X}(t, \bar{X}^0)$ называется устойчивым по Ляпунову, если

- 1) существует окрестность положения равновесия U_{δ_0} точки \bar{X}^0 такая, что для любого ξ этой окрестности существует решение $\bar{X}(t, \bar{\xi})$ при $t \geq 0$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ ($\delta \leq \delta_0$), что для любого $\bar{\xi}$, удовлетворяющего условию, если $\|\bar{X}^0 - \bar{\xi}\| < \delta$, при всех $t \geq 0$, выполняется $\|\bar{X}(t, \bar{X}^0) - \bar{X}(t, \bar{\xi})\| < \varepsilon$.

Исследование на устойчивость решения $\bar{X}(t, \bar{X}^0)$ можно свести к исследованию на устойчивость положения равновесия некоторой другой системы.

Сделаем замену: $\bar{X}(t) = \bar{Y}(t) + \bar{X}(t, \bar{X}^0)$, для $\bar{Y}(t)$ получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Y}}(t) &= \bar{f}(\bar{Y}(t) + \bar{X}(t, \bar{X}^0)) - \frac{d\bar{X}(t, \bar{X}^0)}{dt} = \\ &= \bar{f}(\bar{Y}(t) + \bar{X}(t, \bar{X}^0)) - \bar{f}(\bar{X}(t, \bar{X}^0)) = G(t, \bar{Y}). \end{aligned}$$

Система

$$\dot{\bar{Y}}(t) = G(t, \bar{Y}), \quad (22)$$

вообще говоря, уже не является автономной, но для неё $\bar{Y}(t) \equiv 0$ является решением.

Для нормальной системы $\dot{\bar{Y}}(t) = G(t, \bar{Y})$, для которой $\bar{Y}(t) \equiv 0$ является решением (т.е. $\bar{G}(t, \bar{0}) \equiv \bar{0}$, $t \geq 0$), можно говорить об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения такой системы (определения дословно повторяют определения § 3).

Для системы (22) при условии $\bar{G}(t, \bar{0}) = 0$ можно ввести понятие линеаризованной системы.

Если функция $G(t, \bar{Y})$ дважды непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$ и $\|\bar{Y}\| < \rho_0$, то $G(t, \bar{Y}) = A(t)\bar{Y} + R(t, \bar{Y})$, $A(t)$ — матрица, $\|R(t, \bar{Y})\| \leq M\|\bar{Y}\|^2$. Система $\dot{\bar{Y}} = A(t)\bar{Y}$ называется линеаризацией системы (22) или первым приближением.

В том частном случае, когда матрица $A(t)$ постоянна, т.е. $a_{ij} = \text{const}$, теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению остается справедливой.

Пример 7. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + \frac{x^2}{1+t^2}, \\ \dot{y} = 4x - 3y - \frac{xy}{1+t^2}. \end{cases}$$

Её положение равновесия — $(0, 0)$. Легко можно увидеть, что матрица линеаризованной системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, её собственные значения $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Положение равновесия исходной системы асимптотически устойчиво.

Приложение 1

В § 1 были сформулированы теоремы, из которых следовало, что фазовые траектории автономных систем на фазовом пространстве не пересекаются, полностью заполняя фазовое пространство.

Пример 8. Рассмотрим неавтономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 2t, \end{cases}$$

решения которой легко находятся: $x_1 = t + A$, $x_2 = t^2 + B$.

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши, условия которой выполнены, следует, что интегральные кривые в пространстве переменных t , x_1 , x_2 не пересекаются.

Рассмотрим решение в плоскости переменных x_1 , x_2 . Исключая переменную t , получим явное представление: $x_2 = (x_1 - A)^2 + B$.

Эти кривые — параболы, и они пересекаются (см. рис. 25).

Как видим, для неавтономной системы поведение траекторий на плоскости переменных x_1 , x_2 может не соответствовать их поведению в пространстве (t, x_1, x_2) . И поэтому рассмотрение решений в плоскости (x_1, x_2) — фазовом пространстве, нецелесообразно.

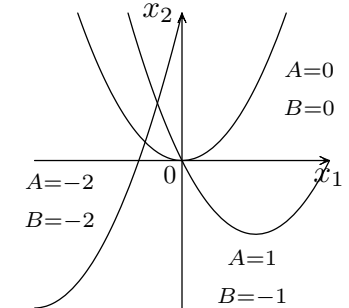


Рис. 25

Приложение 2

Фазовые траектории линейной системы, $n = 3$

(по учебнику В.И. Арнольда

“Обыкновенные дифференциальные уравнения”)

Рассматриваем линейную систему $\dot{\bar{X}} = A\bar{X}$, A — вещественная матрица размера 3×3 , $a_{ij} = \text{const}$, $\det A \neq 0$.

Характеристическое уравнение — вещественное кубическое. Оно может иметь три вещественных корня или один вещественный и два комплексно-сопряженных. Не рассматриваем случай кратных вещественных корней. Вид фазовых траекторий системы зависит от расположения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на плоскости комплексного переменного.

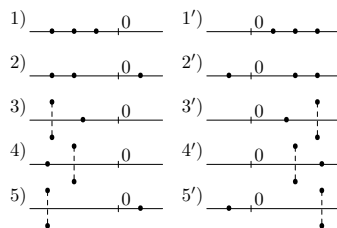


Рис. 26

Приведём несколько видов фазовых траекторий:

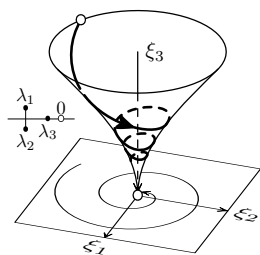


Рис. 27.

Случай $\text{Re } \lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$. Сжатие по направлению ξ_3 , вращение с более быстрым сжатием в плоскости (ξ_1, ξ_2)

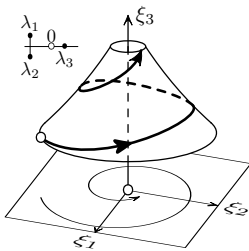


Рис. 28.

Растяжение по направлению ξ_3 , вращение со сжатием в плоскости (ξ_1, ξ_2)

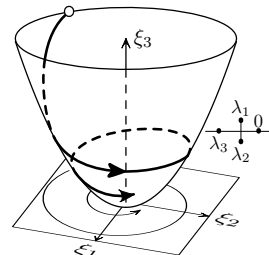


Рис. 29.

Приложение 3

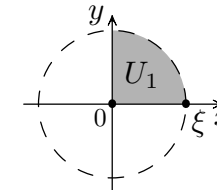
Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть U — окрестность положения равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ автономной системы $\dot{\bar{X}} = \bar{f}(\bar{X})$, $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{0}$, и пусть U_1 — область, которая содержится в U и имеет положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ своей граничной точкой. Если существует непрерывно дифференцируемая функция $V(\bar{X})$ в U_1 такая, что $\bar{V}(\bar{X}) > 0$ и производная в силу системы $\dot{\bar{V}}(\bar{X}) > 0$ для $\bar{X} \in U_1$, а $\bar{V}(\bar{X}) = 0$ в тех граничных точках области U_1 , которые лежат внутри окрестности U , то положение равновесия $\bar{X} = \bar{0}$ неустойчиво.

Пример 9. Для системы $\begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$ точка $(0, 0)$ — по-

ложение равновесия. Для линеаризованной системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ положение равновесия $(0, 0)$ — центр. Теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

Рассмотрим функцию $V(x, y) = xy(x^2 + y^2) + y^2$.

U — окрестность $x^2 + y^2 < \varepsilon$ (см. рис. 30), U_1 — часть U , лежащая в первом квадранте $x > 0, y > 0$, её граница внутри U — это $x = 0$ и $y = 0$.



$V(x, y) = xy(x^2 + y^2) > 0$ в U_1 , Рис. 30

$$V|_{x=0, y \geq 0} = 0, \quad V|_{y=0, x \geq 0} = 0,$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = 3x^2y(y + x^3) + 3xy^2(-x + y^3) = 3xy(x^4 + y^4) > 0 \text{ в } U_1.$$

Положение равновесия $(0, 0)$ — неустойчивое.

Сравним с результатом Примера 4.П, в котором рассматривалась система (П) $\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$ Для той и другой системы начало координат — положение равновесия. У них одинаковые линеаризованные системы, а различаются они только нелинейными членами. В системе Примера 4.П положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчивое, а в Примере 9 — неустойчивое.

Приложение 4

Предельные циклы

В §1 было установлено, что фазовые траектории автономной системы бывают одного из трёх типов:

- 1) положение равновесия;
- 2) замкнутая гладкая кривая (цикл) — периодическое решение с наименьшим периодом $T > 0$;
- 3) гладкая кривая без самопересечений.

Рассматриваем автономную систему $\dot{X} = \bar{f}(\bar{X})$ при $n = 2$, считая, что $\bar{f}(\bar{X})$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция в некоторой области D фазовой плоскости.

Предельным циклом системы $\dot{X} = \bar{f}(\bar{X})$ при $n = 2$ называется изолированное периодическое решение. На фазовой плоскости предельный цикл есть гладкая замкнутая кривая, вблизи которой не проходят другие периодические решения этой системы.

Пусть $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ — предельный цикл, и ω — его изображение на фазовой плоскости. По теореме Жордана простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области: внешнюю и внутреннюю. Траектории автономной системы не пересекаются, поэтому любая другая фазовая траектория, отличная от ω , по отношению к ней является либо внешней, либо внутренней.

Теорема. *И внешние, и внутренние траектории обладают тем свойством, что начинаясь вблизи ω они наматываются на ω как спирали либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$.*

Предельный цикл ω называется *устойчивым*, если траектории (и внешние и внутренние), начинающиеся вблизи ω , наматываются на ω при $t \rightarrow +\infty$ (см. рис. 31а).

Предельный цикл ω называется *неустойчивым*, если все траектории (и внешние и внутренние), начинающиеся вблизи ω , наматываются на ω при $t \rightarrow -\infty$, т.е. при $t \rightarrow +\infty$ удаляются от ω (см. рис. 31б).

Наконец, предельный цикл ω называется *полуустойчивым*, если одни (например, внешние) траектории наматываются на ω при $t \rightarrow -\infty$, а другие (внутренние) наматываются на ω при $t \rightarrow +\infty$ (см. рис. 31в).

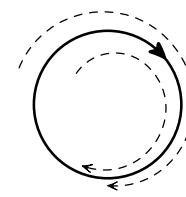


Рис. 31а.
Устойчивый
предельный
цикл

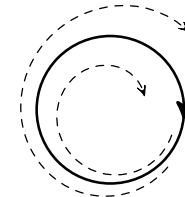


Рис. 31б.
Неустойчивый
предельный
цикл

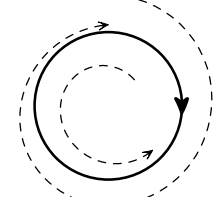


Рис. 31в.
Полуустойчивый
предельный
цикл

Пример 10. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (*)$$

Умножая первое уравнение на x , получаем $x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$, а умножив первое уравнение на y , а второе на x , а затем вычтя друг из друга, получим $x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 + y^2$.

Перейдём к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, придём к системе

$$\begin{cases} \frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2(1 - \rho^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases} \quad (**)$$

Очевидно, что $\rho = 0$ и $\rho(t) = 1$ — решения системы, т.е. точка $(0, 0)$ — положение равновесия, окружность $x^2 + y^2 = 1$ — замкнутый цикл.

Из второго уравнения системы (**) следует, что $\varphi = \varphi_0 + t$, т.е. фазовые траектории получаются на плоскости (ρ, φ) поворотом, а из первого уравнения выражаем зависимость $\rho(t)$ при $\rho \neq 0$ и $\rho \neq 1$: $\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$, $C > 0$ при $0 < \rho < 1$ и $\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - Ce^{-2t}}}$, $C > 0$ при $\rho > 1$. Из второго уравнения системы

также следует, что $\frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2)$, производная $\frac{d\rho}{dt}$ положительна при $0 < \rho < 1$ и отрицательна при $\rho > 1$. Это означает, что внутри цикла $\rho = 1$ с течением времени ρ увеличивается, а вне него с течением времени ρ уменьшается.

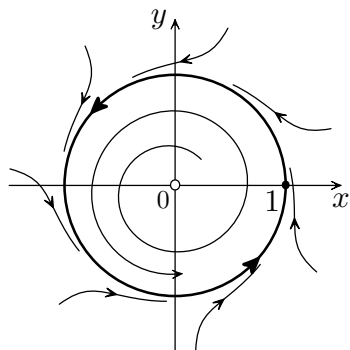


Рис. 32

Определяем скорость $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ в точке $(1, 0)$ и устанавливаем направление движения по замкнутому циклу и вблизи него. Фазовый портрет дан на рис. 32.

Точка $(0, 0)$ — неустойчивое положение равновесия.

Для фазовых траекторий, начинающихся вблизи цикла внутри него, при $t \rightarrow +\infty$, $\rho(t) \rightarrow 1$, т.е. фазовые траектории наматываются на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Для фазовых траекторий, начинающихся вблизи цикла вне него при $t \rightarrow +\infty$, $\rho(t) \rightarrow 1$, внешние фазовые траектории также наматываются на эту окружность.

Таким образом, окружность $x^2 + y^2 = 1$ есть предельный устойчивый цикл системы (*).

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
2. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Издательство МГУ, 1984.

Учебное издание

Автономные системы
Фазовые траектории
Элементы теории устойчивости

Учебно-методическое пособие
по курсу *Дифференциальные уравнения*

Составитель **Пиголкина Татьяна Сергеевна**

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *Л.В. Себова*

Подписано в печать 20.06.2013. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 2,5.
Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 200 экз. Заказ № 246.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–58–22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–84–30, e-mail: polygraph@mipt.ru