Дифференциальные уравнения ФПМИ.

Астафуров Евгений

10 мая 2020 г.

(При нахождении опечаток писать в лс *VK*).

Содержание

1 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

1.1 Вронскиан W и его свойства.

Вронскиан или **определитель Вронского** — функция $W(f_1, ..., f_n)(x)$, определенная для системы функций $f_1(x), ..., f_n(x)$ на промежутке I:

$$W(f_1, ..., f_k)(x) = det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Свойства:

1. Если функции $f_1, ..., f_n$ — линейно зависимы на I, то $\forall x \in I\ W(x) = 0$.
2. Если $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$, то $f_1, ..., f_n$ — линейно независимы на I.
3. Если $f_1, ..., f_n$ — решения однородного дифференциального уравнения n-ого порядка, то возможны только два варианта:
   (a) $\forall x \in I\ W(x) = 0$, это значит, что $f_1, ..., f_n$ — линейно зависимы на I.
   (b) $\nexists x_0 \in I$ т.ч. $W(x_0) = 0$, это, в свою очередь, значит, что $f_1, ..., f_n$ — линейно независимы.

1.2 Пример исследования функций на линейную зависимость (Задача Ф648)

Исследовать на линейную зависимость: e^x, e^{2x}, e^{3x}.

Решение:

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} = ... = 6e^{6x},$$

следовательно функции линейно независимы.

1.3 Пример построения системы уравнений, имея частные решения (Задача Ф.22.59)

Известны три частных решения неоднородного уравнения второго порядка: $\begin{cases} y_1 = x^2, \\ y_2 = 1 - x, \\ y_3 = 1 - 3x \end{cases}$ найти решение уравнения с начальными условиями: $\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Решение:

Известно, что разность двух частных решений есть базисное решение однородного уравнения:

$$\begin{cases} y_{10} = y_3 - y_2 = -2x, \\ y_{20} = y_1 - y_2 = x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_{10} = -x, \\ y_{20} = x^2 - 1 \end{cases}$$

Так как y_{10} и y_{20} — решения однородного дифференциального уравнения, то их вронскиан (1) должен равняться нулю. Найдем однородное уравнение из этого условия:

$$det \begin{pmatrix} y & x^2 - 1 & -x \\ y' & 2x & -1 \\ y'' & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2y + (1 - x^2)y'' - x(2y' - 2xy'') = 0$$

$$y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y = 0 \text{ — } \textbf{Однородное.}$$

Теперь получим неоднородное уравнение, подставив в однородное частное решение $y_2 = 1 - x$: $0 \cdot (x^2 - 1) - 2x(-1) + 2(1 - x) = 2$, откуда неоднородное уравнение:

$$y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y = 2.$$

Общее решение уравнени имеет вид: $y = (x^2 - 1) \cdot C_1 + C_2 \cdot x + (1 - x)$.

1.4 Формула Луивилля-Остроградского

Пусть дано однородное уравнение второго порядка:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Тогда справедлива формула *Луивилля-Остроградского*:

$$\frac{d}{dx}(\frac{y}{y_{1o}}) = C_0 \cdot \frac{1}{y_{1o}^2} \cdot exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right), \tag{2}$$

где y — решение однородного уравнения, y_{1o} — одно из частных решений однородного уравнения, C_0 — некоторая константа. Под интегралом в практическом смысое понимается первообразная, так как вылезшая константа будет поглощена C_0.

1.5 Алгоритм решения линейных уравнений $n = 2$ с переменными коэффициентами

Общая идея состоит в том, чтобы подобрать одно частное решение однородного, а затем, с помощью формулы Луивиля-Остроградского (2) найти второе частное решение однородного уравнения.

Пусть есть уравнение:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

1. Найти одно частное решение однородного уравнения, пробуя подстановки (в указанном порядке):
   (a) $y_{1o} = e^{ax}$,
   (b) $y_{1o} = x^k$,
   (c) $y_{1o} = P(x)$, $deg(P) = k$ — в виде многочлена.
2. Применить формулу Луивилля-Остроградского (2) и получить решение однородного уравнения: $y_o = y_{1o}D + y_{2o}C$, где D, C — константы.
3. Воспользовоться методом вариации постоянной:
$$\begin{cases} D'(x)y_{1o} + C'(x)y_{2o} = 0, \\ D'(x)y'_{1o} + C'(x)y'_{2o} = \frac{f(x)}{a(x)}. \end{cases} \tag{3}$$
4. Подставить найденные $C(x)$ и $D(x)$ в решение однородного уравнения, тем самым получить решение неоднородного уравнения.

1.6 Пример — Задача С.9.53

Решить: $x(x + 1)y'' + (4x + 2)y' + 2y = 6(x + 1)$.

Решение:

Отыщем для начала частное решение однородного уравнения. Для этого попробуем замену $y = e^{ax}$:

$$a^2(x^2 + x) + a(4x + 2) + 2 = 0,$$
$$z^2x^2 + a^2x + 4ax + 2a + 2 = 0,$$
$$x^2a^2 + x(a^2 + 4a) + (2a + 2) = 0,$$
$$\begin{cases} a = -1, \\ a^2 + 4a = 0, \\ a^2 = 0 — \textbf{не подходит.} \end{cases}$$

Попробуем замену $y = x^k$:

$$(x^2+x)(k^2-k)x^{k-2} + k(4x+2)x^{k-1} + 2x^k = 0,$$
$$xk^2 - kx + k^2 - k + 4kx + 2k + 2x = 0,$$
$$x(k^2 - k + 4k + 2) + (k^2 + k) = 0,$$
$$\begin{cases} k^2 + 3k + 2 = 0, \\ k + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -1}.$$

Таким образом, частное решение: $y_{o1} = \frac{1}{x}$.

Найдем второе частное решение с помощью формулы Луивилля-Остроградского (2):

$$\frac{d}{dx}(yx) = Cx^2 exp\left(-\int \frac{4x+2}{x^2+x}dx\right),$$
$$\int \frac{4x+2}{x^2+x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{2}{x+1}dx = 2\ln x + 2\ln x + 1,$$
$$exp(-\ln x^2 - \ln{(x+1)^2}) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2},$$
$$\frac{d}{dx}(yx) = \frac{c}{(x+1)^2}, \text{ откуда}$$
$$yx = -\frac{C}{x+1} + D = \frac{C}{x+1} + D,$$
$$\boxed{y = \frac{D}{x} + \frac{C}{x(x+1)}} - \textbf{однородное.}$$

Далее воспользуемся методом вариации постоянной (3):

$$\begin{cases} D'\frac{1}{x} + C'\frac{1}{x(x+1)} = 0, \quad D' = -\frac{C'}{x+1} \\ -D'\frac{1}{x^2} - C'\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{6}{x} \end{cases},$$
$$C' = -6(x+1)^2 \;\Rightarrow\; C = -2(x+1)^3 + C_1,$$
$$D' = 6(x+1) \;\Rightarrow\; D = 3(x+1)^2 + D_1,$$

следовательно, получаем решение:

$$y = \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x}.$$

1.7 Задача С.9.68(а)

Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известна его правая часть $f(x)$ и ФСР $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2, \\ y_1 = x, \\ y_2 = x^2 + 1. \end{cases}$$

Решение:

Пусть y_o — решение однородного уравнения, тогда, так как y_o, y_1, y_2 — линейно зависимы, то их вронскиан равен нулю:

$$det\begin{pmatrix} x & x^2+1 & y_o \\ 1 & 2x & y_o' \\ 0 & 2 & y_o'' \end{pmatrix} = y_o''(x^2-1) - 2xy_o' + 2y_o = 0 \text{ — однородое уравнение,}$$
$$\boxed{y''(x+2-1) - 2xy' + 2y = 1 - x^2} \text{ — исходное уравнение.}$$

Далее пользуясь методом варианции постоянной (3), получаем решение данного уравнения.

1.8 Задача про уравнение Бесселя (Т3-2020).

Доказать, что уравнение бесселя не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими производными.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,\ \nu = const,\ x > 0.$$

Решение:
Предположим обратное, то есть что нашлись такие y_1, y_2 ЛНЗ решения (1), тогда:

$$W(y_1, y_2)(x) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = C \cdot exp\left(-\int \frac{x}{x^2}\right) = C \cdot exp\left(-\ln x + D\right) = \frac{C}{x} + D$$

Но при $x \longrightarrow 0$, $\frac{C}{x} \longrightarrow \infty \Rightarrow (y_1y_2' - y_2y_1') \longrightarrow \infty \Rightarrow$ противоречие с условием.

2 Теорема Штурма

2.1 Формулировка теоремы

Теорема: Пусть для любого $x \in I$ выполнено $\mathbf{q(x)} \leq \mathbf{Q(x)}$, и $\begin{cases} y(x) - \text{решение } y'' + q(x)y = 0, \\ z(x) - \text{решение } z'' + Q(x)z = 0. \end{cases}$. Пусть $x_1 < x_2$ — последовательные нули $y(x)$, тогда либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$, либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, что $z(x_0) = 0$.

2.2 Неформальная трактовка теоремы

Нули функции $y(x)$ идут не чаще нулей $z(x)$.

2.3 Задача С.10.3 + уравнение Эйлера

Показать, что каждое решение уравнения $y'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ имеет на промежутке $[0; +\infty)$ бесконечно много нулей.

Решение:

Достаточно показать, что бесконечно много нулей на интегрвале $x \in (1, +\infty)$ Пусть $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и $q(x) = \frac{1}{2x^2}$, очевидно, что $q(x) \leq Q(x)$. Задача свелась к тому, чтобы показать, что любое решение уравнения $z'' + q(x)z = 0$ имеет ∞ много нулей.

Решим уравнение $z'' + \frac{1}{2x^2}z = 0$ как уравнение **Эйлера**: $z(x) = ax^b$, $z'(x) = abx^{b-1}$, $z'' = ab(b-1)x^{b-2}$:

$$
\begin{gathered}
ab(b-1)x^{b-2} + \frac{ax^b}{2x^2} = 0, \\
ab(b-1)x^{b-2} + \frac{a}{2}x^{b-2} = 0, \\
ab^2 - ab + \frac{a}{2} = 0, \\
a(b^2 - b + \frac{1}{2}) = 0,
\end{gathered}
$$

, откуда $a = 1$, $b = \frac{1 \pm i}{2} = \alpha$. Получаем решение:

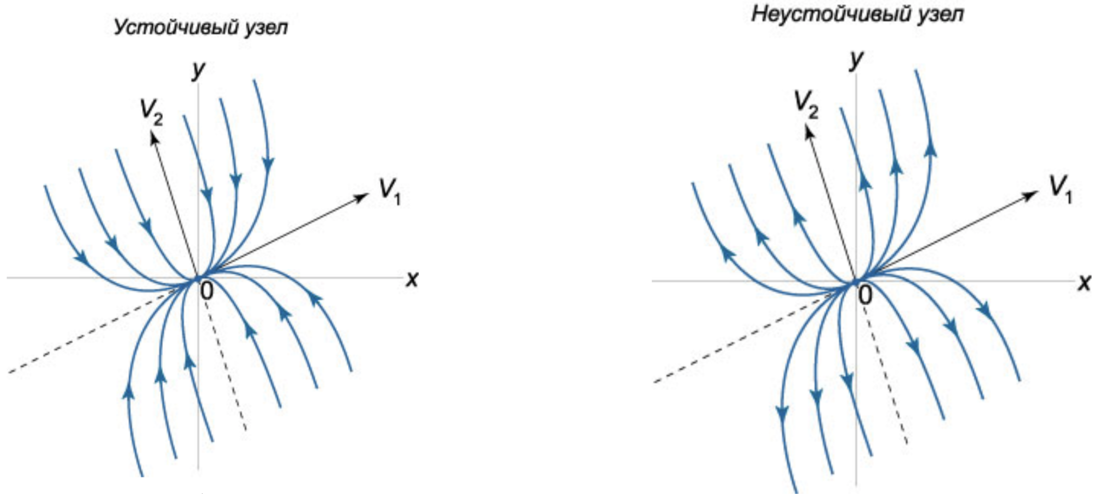
$$z(x) = x^\alpha = e^{\alpha ln(x)} = e^{\frac{1\pm i}{2} ln(x)} = \sqrt{x}(\cos\frac{1}{2}\ln x \pm i \sin\frac{1}{2}\ln x)$$

— ∞ раз обращается в 0.

3 Положения равновесия.

Источник.

3.1 Узел — $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ одного знака.



а)

б)

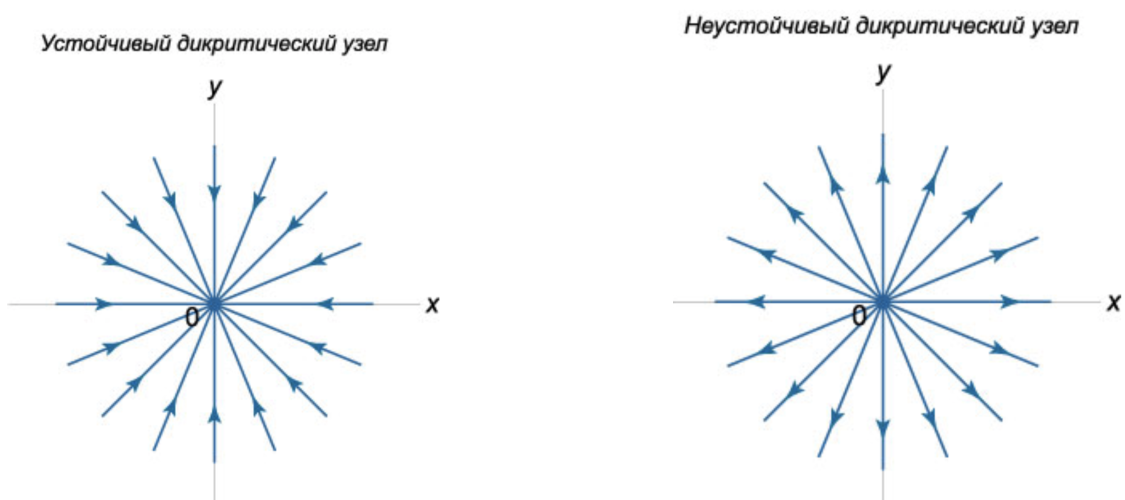
Рис. 1:

V_1 и V_2 — собственные векторы, коответствующие собственным значениям $|\lambda_1| < |\lambda_2| \in \mathbb{R}$

Узел является ассимптотически устойчивым, если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$.

Заметим, что в случае как устойчивого, так и неустойчивого узла фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению λ.

3.2 Дикритический узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 2.



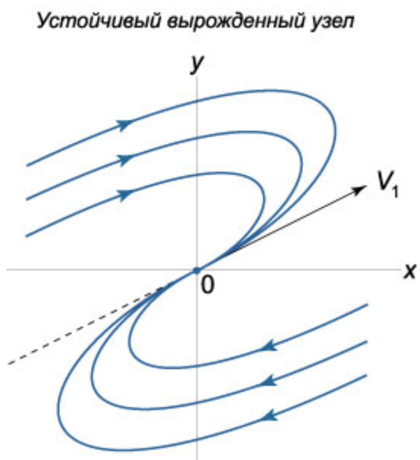
а)

б)

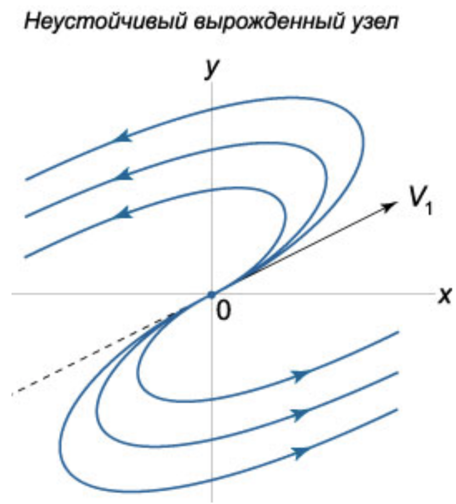
Рис. 2:

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

3.3 Вырожденный узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 1



а)



б)

Рис. 3:

Матрица A имеет лишь один собственный вектор V_1, второй собственный вектор ищется как присоединенный к V_1.

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

3.4 Седло — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ разных знаков, не равны 0.

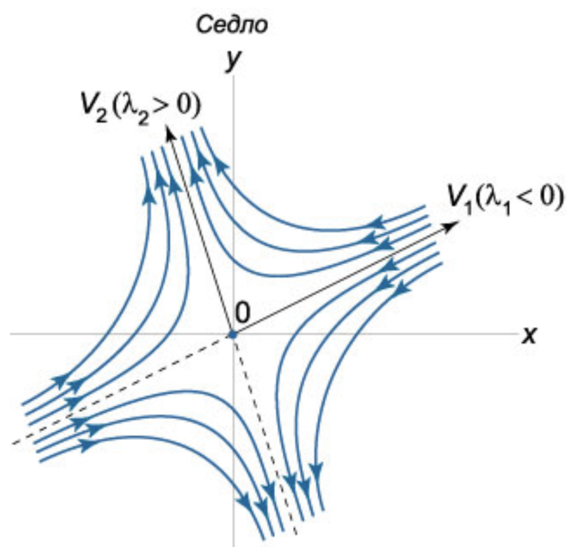


Рис. 4:

Прямые, направленные вдоль векторов V_1, V_2 называются сепаратиссами, и являются ассимптотами для остальных фазовых траекторий, имеющих форму *гипербол*.

Определение направления:

- Если прямая связана с $\lambda < 0$, то движение вдоль нее направлено **к положению равновесия**.
- Если прямая связана с $\lambda > 0$, то направление **от положения равновесия**.

3.5 Фокус — $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$.

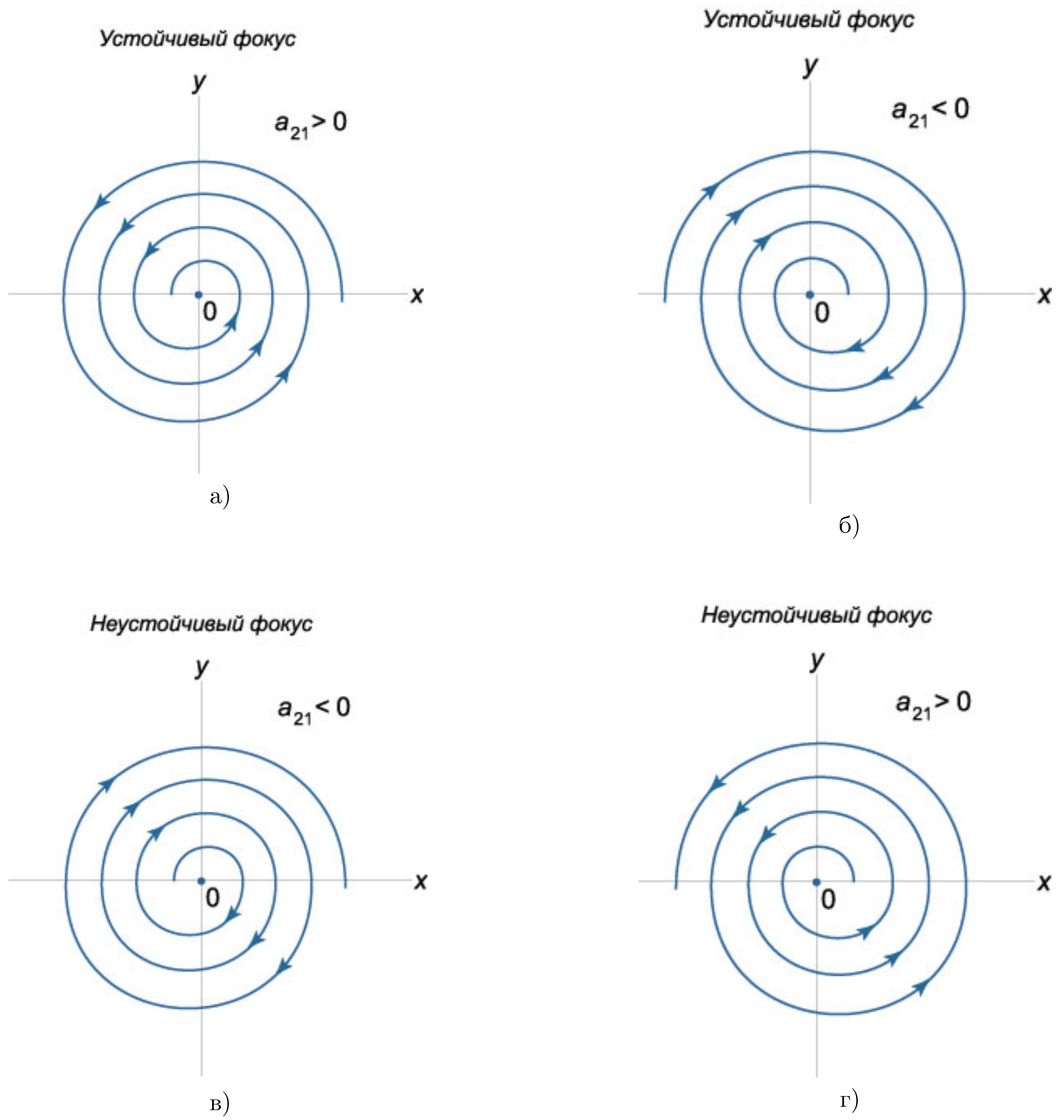
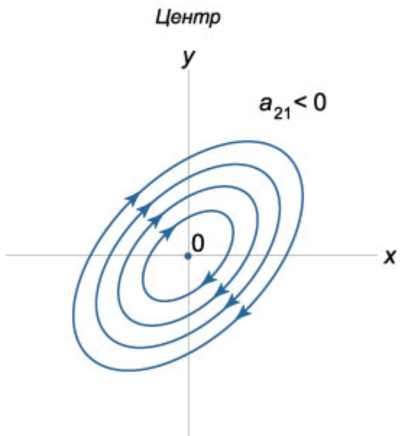


Рис. 5:

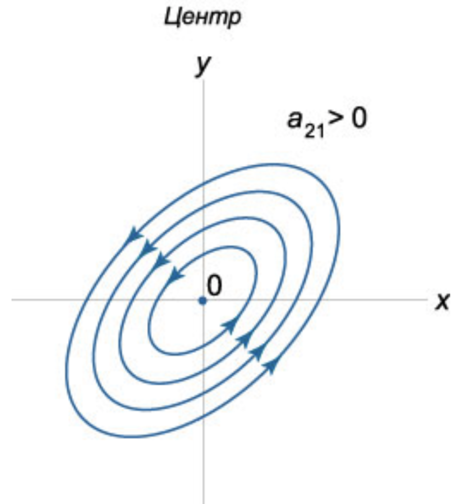
- При $Re\lambda < 0$, спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется **устойчивым фокусом**.
- При $Re\lambda > 0$ — **неустойчивый фокус**.

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица системы.

3.6 Центр — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$ — Устойчивое по Ляпунову.



а)



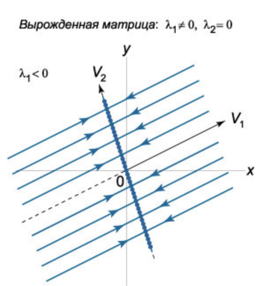
б)

В случае центра фазовые траектории представляют собой формально спирали при $Re\lambda = 0$, то есть эллипсы.

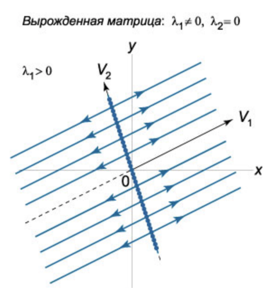
Направление вращения определяется знаком $a_2 1$.

3.7 Выражденная матрица — $det(A) = 0$.

Если матрица является вырожденной, то у нее одно или оба собственных значения равны нулю. При этом возможны следующие частные случаи:



а)



б)

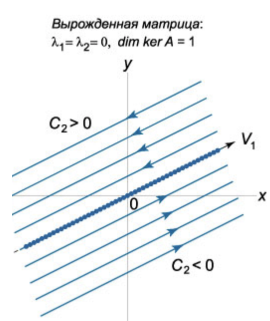


Рис. 6:

4 Линеаризация систем

4.1 Алгоритм линеаризации

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

1. Найти положения равновесия, то есть разрешить систему $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$.
2. Пусть набор $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots$ — набор положений равновесия.
3. Для каждого положения равновесия:
   (a) Сделать замену: $\begin{cases} U = x - x_i, \\ V = y - y_i \end{cases}$ и подставить в исходную систему, получив $\begin{cases} \dot{U} = f_{1_i}(U, V), \\ \dot{V} = f_{2_i}(U, V). \end{cases}$
   (b) Разложить функции $f_{1_i}(U, V)$ и $f_{2_i}(U, V)$ в точке $(0, 0)$, избавляясь в процессе разложения от степеней выше 1, то есть $U^2 + U + 3V \longrightarrow U + 3V$.
   (c) В результате предыдущего шага получим систему $\begin{cases} \dot{U} = a_{11}U + a_{12}V, \\ \dot{V} = a_{21}U + a_{22}V. \end{cases}$, матрица данной системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
   (d) Найти собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A. И, если необходимо, найти собственные векторы:
      i. Для каждого собственного значения λ_i разрешить систему: $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$.
      ii. (Для тех, кто разучился к ГОС-у перемножать матрицы): $\begin{cases} v_1(a_{11} - \lambda_i) + v_2 a_1 2 = 0, \\ v_1 a_{12} + v_2(a_{22} - \lambda_i) = 0. \end{cases}$
   (e) Построить фазовую траекторию, с положением равновесия $U = V = 0$.
   (f) Построить фазовую траекторию в изначальных координатах (x, y), то есть сдвинуть то, что получилось на предыдущем шаге на x_i единиц вправо и y_i единиц вверх.

4.2 Разложение по Маклорену

1. $\mathbf{ln(1 + x)} \longrightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$
2. $\mathbf{arcsin(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{6} + 3\frac{x^5}{40} + \ldots$
3. $\mathbf{e^x} \longrightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$
4. $\mathbf{(1 + x)}^\alpha \longrightarrow 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \ldots$
5. $\mathbf{sin(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{6} + \ldots$
6. $\mathbf{tg(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{3} + \ldots$
7. $\mathbf{arccos(x)} \longrightarrow \frac{\pi}{2} - arcsin(x)$
8. $\mathbf{arctg(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{3} + \ldots$
9. $\mathbf{sh(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{6} + \ldots$
10. $\mathbf{th(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{3} + \ldots$
11. $\mathbf{arcsh(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{6} + \ldots$
12. $\mathbf{arcth(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{3} + \ldots$

5 Некоторые типы дифференциальных уравнений.

5.1 Уравнение Бернулли (I порядок).

$$y' + a(x)y = b(x)x^m, \tag{4}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные функции. Если $m = 0$, то имеем дело с линейным дифференциальным уравнением, если $m = 1$, то преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m \neq 0$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки:

$$z = y^{1-m}.$$

5.2 Уравнение Риккати (I порядок).

$$y' + b(x)y + d(x)y^2 = f(x), \tag{5}$$

где $b(x), d(x), f(x)$ — непрерывные функции.

Алгоритм решения уравнений Риккати:

1. Найти некоторое частное решение уравнения y_1.
2. Тогда искомым решением будет $y = y_1 + U$, следовательно, задача свелась к поиску U.
3. Подставляем в исходное выражение вместо y и y' выражения $(y_1 + U)$ и $(y_1 + U)'$, и получаем уравнение Бернулли (4).
4. Находим из него U и подставляем в выражение для общего решения.

5.3 Уравнение Эйлера (II порядок).

$$x^2y'' + Axy' + By = 0,\ x > 0, \tag{6}$$

Данное уравнение можно свести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$, в этом случае:

$$y'_x = e^{-t}y'_t,$$
$$y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t).$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем:

$$y''_{tt} + (A-1)y'_t + By = 0.$$

6 Первые интегралы

6.1 Поиск первых интегралов.

Пусть в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ задана автономная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z), \\ \dot{z} = f_3(x, y, z). \end{cases} \tag{7}$$

Решения системы 7 можно найти с помощью *первых интегралов*:

Определение (ПИ)

Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $U(x, y, z)$ называется *первым интегралом* системы (7), если $U(\overrightarrow{\varphi}(t)) \equiv Const$ (то есть первый интеграл постоянен вдоль каждой фазовой траектории).

Критерий ПИ

Непрерывно дифференцируемая функция $U(x, y, z)$ является первым интегралом системы (7) $\iff \forall (x, y, z) \in \Omega$ выполнено

$$\frac{\partial U}{\partial x} f_1 + \frac{\partial U}{\partial y} f_2 + \frac{\partial U}{\partial z} f_3 = 0. \tag{8}$$

Количество независимых *ПИ* системы

Если точка $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ не является положением равновесия автономной системы, то в ее окрестности существует $\mathbf{n-1}$ независимых первых интегралов.

Поиск *ПИ*

При поиске ПИ применяется так называемый метод интегрирующих комбинаций, который заключается в том, что мы, "глядя"на функции стоящие в правых частях уравнений, пытаемся подобрать такую комбинацию этих уравнений, которая позволяла бы выделить функции, являющиеся производными от более сложных функций.

Перечислим некоторые способы такого поиска:

1. Запись системы (7) в *симметричном виде*:
$$dt = \frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}. \tag{9}$$
2. *Свойство равных дробей.* Так как $dx = f_1 dt$, а $dy = f_2 dz$, то $dx + dy = (f_1 + f_2)dt$, из этого принципа вытекает:
$$dt = \frac{d(x+y)}{(f_1 + f_2)} = \frac{d(x-y)}{(f_1 - f_2)} = \frac{d(x+y+z)}{(f_1 + f_2 + f_3)} = \dots \tag{10}$$
3. Пусть найден U_1 для системы (9). Тогда при поиске U_2, можно использовать выражение, полученное для U_1, считая его константой, а затем, подставить выражение для U_1 в полученное выражение для U_2.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y, \\ \dot{y} = z + x - 3y, \\ \dot{z} = -2z. \end{cases}$$

1. Сложим три уравнения: $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, следовательно $\boxed{x + y + z = Const = U_1}$.
2. Заметим, что $dt = \frac{d(x-3y+z}{-4(x-3y+z)} = \frac{dz}{-2z}$, проинтегрировав, получим: $2 \ln z = \ln{(x - 3y + z)} + Const$, значит $\boxed{U_2 = \dfrac{z^2}{x - 3y + z}}$.

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2z^2 + x, \\ \dot{y} = -4xyz^2 + y, \\ \dot{z} = -4xz^3 + z. \end{cases}$$

1. Выпишем первое и третье уравнения и перемножим их "крест накрест":

$$\frac{dx}{2x^2z^2 + x} = \frac{dz}{z - 4xz^3} \quad \Longrightarrow \quad zdx - 4xz^3dx - 2x^2z^2dz - xdz = 0 \Big| : z^2$$

$$\frac{dx}{dz} - \frac{x}{z^2} - 2(2xzdx + x^2dz) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\left(\frac{x}{z}\right) + d(-2x^2z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{x}{z} - 2x^2z = Const = U_1}.$$

2. Выпишем второе и третье уравнения и сократим общую часть в знаменателе:

$$\frac{dy}{y(-4xz^2 + 1)} = \frac{dz}{z(-4xz^2 + 1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \Longrightarrow \quad y = z \cdot Const \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_2 = \frac{z}{y}}.$$

Пример 3

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz, \\ \dot{z} = -\frac{y}{x}. \end{cases}$$

1. Выпишем 1 и 3 уравнения, сократим общую часть в знаменателе:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{xdy}{-y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = -2dz \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x} = -2z + Const \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2z - \frac{1}{x} = U_1}.$$

2. Преобразуем второе уравнение, учитывая, что $2xz = U_1x + 1$:

$$\frac{dy}{1 - y^2 - (U_1x + 1)} \quad \Longrightarrow \quad -y^2dx - U_1xdx = 2xydy \quad \Longrightarrow \quad d(y^2x) + d\left(\frac{U_1x^2}{2}\right) = 0$$

$$U_2 = y^2x + U_1\frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_2 = y^2x + zx^2 - \frac{x}{2}}.$$

6.2 Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть задана система

$$\begin{cases} f_1\frac{\partial U}{\partial x} + f_2\frac{\partial U}{\partial y} + f_3\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ U = F_1, \quad \text{при } F_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Алгоритм решения

1. Выписать характеристическую систему
$$\begin{cases} \dot{x} = f_1, \\ \dot{y} = f_2, \\ \dot{z} = f_3. \end{cases}$$

2. Найти два первых интеграла U_1 и U_2 для этой системы (6.1).

3. Общим решением (11) будет:

$$U = F(U_1, U_2), \text{ где } F \text{ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.}$$

4. Затем, из системы ниже нужно выразить x, y и z через U_1 и U_2 и подставить в выражение $U = F_1$ (11). После того, как мы получим выражение U через U_1 и U_2, нужно подставить выражения для U_1 и U_2 в U.

$$\begin{cases} \ldots = U_1, \\ \ldots = U_2, \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

Получившееся выражение для U и будет являтся решением задачи Коши (11).

Пример 1

$$\begin{cases} (z - x + 3y)\frac{\partial U}{\partial x} + (z + x - 3y)\frac{\partial U}{\partial y} - 2z\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ U = \frac{4y}{z}, \text{ при } x - 3y = 0. \end{cases}$$

1. Выпишем характеристическую систему и найдем первые интегралы (подробно разобрано тут 6.1).

2. Общим решением будет
$$U = F\left(x + y + z, \frac{z^2}{x - 3y + z}\right).$$

3. Решим задачу Коши:

   (a) Выразим x, y, z через U_1 и U_2 из системы:
   $$\begin{cases} x + y + z = U_1, \\ \frac{z^2}{x-3y+z} = U_2, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

   (b) Получим, что $y = \frac{1}{4}(U_1 - U_2)$ и $z = U_2$. Подставим найденные выражения в $U = \frac{4y}{z}$:
   $$U = \frac{4y}{z} = \frac{U_1 - U_2}{U_2}.$$

   (c) Подставим выражения для U_1 и U_2 и получим ответ.

7 Вариационное исчисление

7.1 Алгоритм решения варианционной задачи

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \tag{12}$$

где $a < b \in \mathbb{R}$ — заданные числа, а $F(x, y, y')$ — заданная вещественнозначная неперрывно дифференцируемая функция $\forall x \in [a, b]$ $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ $\forall y' \in (-\infty, +\infty)$.

Решим простейшую вариационную задачу:

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \\ y(a) = c_1, \\ y(b) = c_2. \end{cases} \tag{13}$$

1. Сначала нужно найти экстремаль $y(x)$ из уравнения

   $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'},$$

   причем $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ищется при условии того, что y' свободная переменная (то же самое и с y). При нахождении $\frac{d}{dx}$ считаем, что $y' = y'(x)$, $y = y(x)$.

   Чаще всего при решении возникает либо линейное уравнение с постоянными (переменными) коэффициентами, либо уравнение Эйлера (5.3).

2. После того, как выражена $y(x)$ (называется экстремалью), нужно найти допустимую экстремаль. Для этого нужно найти константы C_1 и C_2 (которые сидят в выражении для $y(x)$) из граничных условий: $y(a) = c_1$ и $y(b) = c_2$ (c_1 и c_2 — заданные числа). Допустимую экстремаль принято обозначать $\hat{y}$.

3. Далее нужно выяснить, дает ли экстремаль $\hat{y}$ минимум, максимум или не является экстремумом вовсе. Для этого нужно определить знак выражения $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$, где h — произвольная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, такая, что $h(a) = h(b) = 0$.

   Бывает удобно пользоваться записать ΔJ в виде:

   $$\Delta J = \underbrace{\delta J(\hat{y}, h)}_{=0} + \int\limits_a^b F(x, h, h')dx.$$

   А так же тем, что:

   $$\int\limits_a^b f(x)hh'dx = \underbrace{f(x)\frac{h^2}{2}\Big|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{h^2}{2}f'(x)dx.$$

   Так же можно пользоваться тем, что:

   $$\int\limits_a^b h^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int\limits_a^b (h')^2dx.$$

4. В случае, если требуется показать, что ΔJ дает разные знаки для разных допустимых h, бывает полезен прием представления h в виде тригонометрической функции, такой, что $h(a) = h(b) = 0$ (пример будет разобран ниже).

5. В случае, если нужно решить задачу со свободным концом (то есть отсутствием одного граничного условия), недостающим "граничным"условием, для нахождения констант C_1 и C_2 будет:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0, \text{ если отсутствует граничное условие на y(b)},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = 0, \text{ если отсутствует граничное условие на y(a)},$$

Либо, если граничные условия отсутствуют вообще (задача со свободными концами), то константы находятся из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Пример

Показать, что допустимая экстремаль не дает экстремума функционала

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y\right] dx, \\ y(0) = 4, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

1. Найдем экстремаль:

   - $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{9}{2}y + 18,$
   - $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y',$
   - $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$

   $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4y'' + 9y = 36$$

   Решением однородного будет $y = C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2\cos\frac{3}{2}x$. Частным решением, очевидно, будет являтся $y_{\text{ч.}} = 4$. Следовательно:

   $$y = C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2\cos\frac{3}{2}x + 4.$$

2. Найдем допустимую экстремаль:

   $$\begin{cases} y(0) = 4, \\ y(\pi) = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} C_2 + 4 = 0, \\ -C_1 + 4 = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

   Следовательно:

   $$\boxed{\hat{y} = 4\sin\frac{3}{2}x - 4C_2\cos\frac{3}{2}x + 4.}$$

3. Исследуем функционал на экстремум:

   $$\Delta J = \underbrace{\delta J(\hat{y}, h)}_{=0} + \int\limits_0^\pi \left[(h')^2 - \frac{9}{4}h^2\right] dx.$$

   Покажем, что ΔJ меняет свой знак в зависимости от h. Для отрезка $[0, \pi]$ удобнее всего взять тригонометрическую функцию, образующую ноль но концах отрезка. Такой функцией будет $h = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\Delta J = \int\limits_0^{\pi} \left[k^2 \cos^2 kx - \frac{9}{4} \sin^2 kx\right] dx = \int\limits_0^{\pi} \left[k^2 \left(\frac{1 + \cos 2kx}{2}\right) - \frac{9}{4} \left(\frac{1 - \cos 2kx}{2}\right)\right] dx$$

$$\Delta J = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}(k^2 - \frac{9}{4})dx = \frac{\pi}{2}(k^2 - \frac{9}{4}).$$

Таким образом, если $k^2 > \frac{9}{4}$, то $\Delta J > 0$, а если $k^2 < \frac{9}{4}$, то $\Delta J < 0$. Следовательно экстремума нет.