Лекции по дифференциальным уравнениям. Абрамов Александр Александрович

§1. Предисловие

Перед вами – курс лекций по дифференциальным уравнениям, читаемый профессором *А.А. Абрамовым* для 2 курса студентов МФТИ. Хочется отметить, что несмотря на почтенный возраст, А.А. в душе совсем как ребёнок (и это комплимент). Он будет искренне радоваться вместе с вами каждой доказанной теореме, а его лекции практически не содержат скучных формулировок типа "для любой функции, непрерывной в точке, и имеющей непрерывную частную производную в замыкании некоторой области...". Все условия так или иначе комментируются, по возможности приводятся контрпримеры.

Вопрос: Как распечатать 120 страниц? o_O

Ответ: Есть программы, которые готовят к печати брошюры, в итоге получится всего 30. (Например, `FinePrint`, или им подобные). Думаю, те, кто готовил шпоры, уже знакомы с этой технологией.

Вопрос: Как и зачем это делалось?

Ответ: Происходило сие прямо на лекции, а потом шлифовалось в промежутках между экзаменами. Программа — `Latex` (читается *ла-тех*). А те, кто учился у *Тарасова*, в идеале даже должны уметь ею пользоваться. Кстати, довольно популярная штука среди технарей. Рисунки — `OpenOffice Draw`. Они довольно корявые, но других пока нету.

Зачем — понятия не имею. Идею мне подал один первокур с ФИВТа, который занимался примерно тем же. А потом как-то сложно было остановиться. Этот эпический труд мне помогли сделать *Саня Катруца, Женя Капаев, Наташа Харченко, Женя Вдовина, Александр Гасников*, а сам я на тот момент *Серёжа Довгаль*, студент 074 группы.

Вопрос: Если нашёл опечатку.

Ответ: Разумная мысль заключается в том, чтобы коллекционировать опечатки на `google.docs` и периодически обновлять.

Глава 1. Методы решения некоторых уравнений.

§1. Основные понятия

В этом параграфе все величины вещественные.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение: Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$f(t, y, y') = 0 \qquad (1),$$

где t – некоторая переменная, $y(t)$ – некоторая заданная функция.

Определение: Функция $y = \varphi(t)$ – решение (1), если:

1. $y(t)$ определена на некотором промежутке (α, β), $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $(\alpha, \beta]$.
2. $\varphi'(t)$ непрерывна на (α, β), $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $(\alpha, \beta]$ соответственно.
3. $f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ на (α, β), $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $(\alpha, \beta]$ соответственно.

Определение: Функция

$$y = \varphi(t, c) \qquad (2)$$

где c – параметр, то есть произвольный коэффициент, – общее решение уравнения (1), если

1. Для любого c функция (2) – решение,
2. Конкретное решение (1) может быть получено по общему решению (2) при соответствующем выборе c.

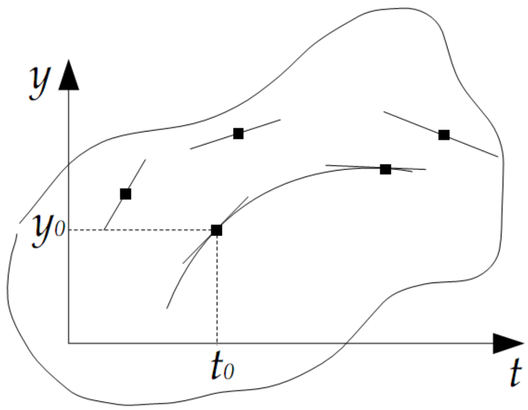
Область определения рассматриваемых функций не уточняется.

2. Уравнение, разрешенное относительно производной.

$$y' = f(t, y) \qquad (3)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.* f определена в некоторой области $G_{x,y}$ (или замкнутой области).

Определение: *Поле направлений* – множество таких кривых, что график решения огибает поле направлений (касается в каждой точке). При этом график решения – не единственный.



Задача Коши для (3)**:**

- **Первая формулировка.** Заданы числа t_0, y_0, при этом $(t_0, y_0) \in G$; G – область. Найти то решение $y(t)$ уравнения (3), которое удовлетворяет условию
$$y(t_0) = y_0 \tag{4}$$

- **Вторая формулировка.** В области G задана точка. Найти то решение уравнения (3), график которого проходит через эту точку.

Теорема: Рассмотрим в области G уравнение (3). Пусть $(t_0, y_0) \in G$. Кроме того, пусть f и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в G. Тогда:

1. Существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (4) $y(t_0) = y_0$.

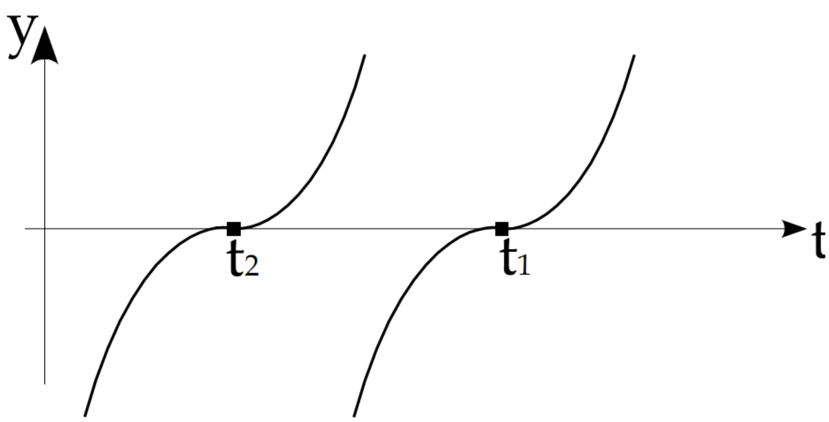
2. Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решение $(3) \wedge (4)$, то $y_1(t) = y_2(t)$ на пересечении их областей определения.

3. Пусть $y = y(x)$, $x = x(y)$, и рассматривается дифференциальное уравнение вида
$$p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, t)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (5),$$
где p и q определены в $G_{x,y}$, в каждой точке G $p \neq 0$, $q \neq 0$. Заметим: если на некотором участке $q \neq 0$, то (5) $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$. Аналогично, если $p \neq 0$, то (5) $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{q(x,y)}{p(x,y)}$.

(5) – *симметричная форма* дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Соответствующее решение: $H(x, y) = 0$, общее решение – $H(x, y, c) = 0$.

Задача Коши для (5):

В G задана точка, найти то решение, график которого проходит через эту точку.



§2. Уравнение в полных дифференциалах.

В этом параграфе все величины вещественные.

$$p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (1),$$

где p и q – определены в области G, и в любой точке G имеет место $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Определение: Уравнение (1) – уравнение в полных дифференциалах, если в G существует функция $U(x,y)$:

$$\mathrm{d}U(x,y) = p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Если (5) – уравнение в полных дифференциалах, то

$$(5) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}U(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(x,y) = c, \ \mathrm{c} = \mathrm{const}.$$

Задача Коши: x_0, y_0; $c = U(x_0, y_0)$, $U(x,y) = U(x_0,y_0)$.

Важные частные случаи (уравнения с разделяющимися переменными):

$$a(x)\,\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (2)$$

$a(x)$ определена и непрерывна на (α, β), $b(x)$ определена и непрерывна на (γ, δ).

$$A(x) \overset{def}{=} \int a(x)\,\mathrm{d}x \text{ – какая-либо из первообразных на } (\alpha,\beta),$$

$$B(x) \overset{def}{=} \int b(y)\,\mathrm{d}y \text{ – какая-либо из первообразных на } (\gamma,\delta).$$

$U(x,y) = A(x) + B(y)$. Тогда $\mathrm{d}U(x,y) = A'(x)\,\mathrm{d}x + B'(y)\,\mathrm{d}y = a(x)\,\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y$.

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x + \int b(y)\,\mathrm{d}y = c = \mathrm{const} \text{ – решение (2)}$$

Замечание: Получать $U(x,y) = A(x) + B(y)$ интегрированием уравнения (2) нельзя, так как в уравнении (2) разные слагаемые придется интегрировать по разным переменным, а такой операции нет.

$$a(x)m(y)\,\mathrm{d}x + b(y)n(x)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (3)$$

Заметим: $n(\hat{x}) = 0 \Rightarrow x = \hat{x}$ – решение (3), ибо $\mathrm{d}x = 0$, если $\hat{x} = \mathrm{const}$; $m(\hat{y}) = 0 \Rightarrow y = \hat{y}$ – решение (3);

Если в некоторой области $m(y) \neq 0$ и $n(x) \neq 0$, то в этой области

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{b(y)}{m(y)} = 0,$$

то есть уравнение с разделяющимися переменными.

Задача: $y = y'$, $G = \{-\infty < t < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$, $\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}t = 0$, $y \equiv 0$ – решение. При $y \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \mathrm{d}t = 0, \quad \ln(y) - t = c, \quad y = \pm e^c e^t,$$

$\pm e^c$ – произвольная ненулевая константа. Общее решение: $y = De^t$, D – произвольная константа.

Если заданы t_0, y_0, то $y_0 = De^{t_0} \quad \Rightarrow \quad D = y_0 e^{-t_0}$.

$$y(t) = y_0 e^{t-t_0} \text{ – решение задачи Коши.}$$

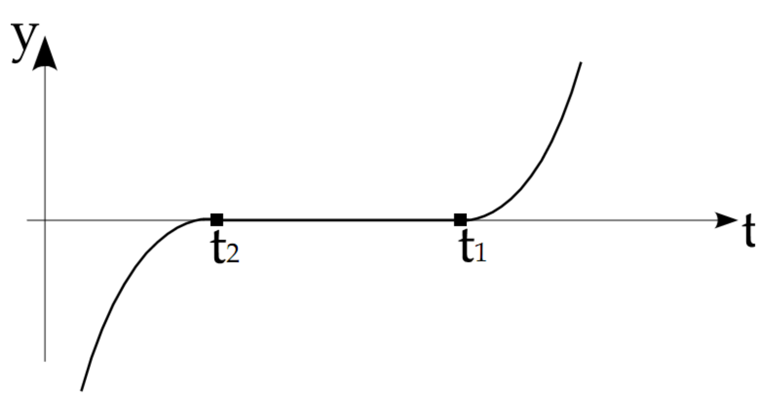
Задача: $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $G = \{-\infty < t < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt[3]{y^2}; \quad \mathrm{d}y - \sqrt[3]{2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

$y \equiv 0$ – решение. Если $y \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{y^2}} - \mathrm{d}t = 0, \quad \frac{3y}{\sqrt[3]{y^2}} - t = c; \quad y = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3.$$

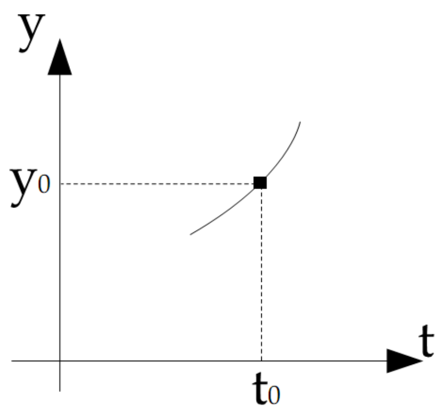
Эта функция удовлетворяет уравнению и при $y = 0$.



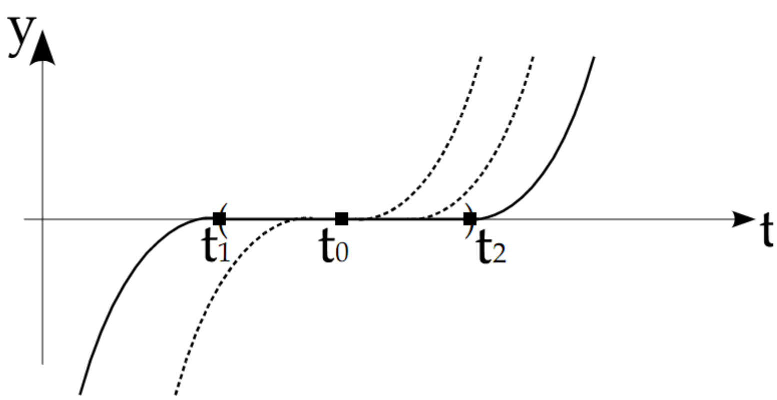
Исследование задачи Коши для второго примера.

t_0, y_0. $y(t)$: $\quad y(t_0) = y_0$.

1. $y_0 \neq 0$. В некоторой окрестности этой точки задача Коши имеет единственное решение.



2. $y_0 = 0$. В любой окрестности этой точки решение задачи Коши не единственно.



Теорема: Пусть в прямоугольнике $G = \{\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta\}$ заданы $p(x,y)$, $q(x,y)$, и, кроме того, p, q, $\dfrac{\partial p}{\partial y}$, $\dfrac{\partial q}{\partial x}$ непрерывны в G. Тогда два утверждения равносильны:

$$\Big\{\exists U(x,y)\colon\ \mathrm{d}U(x,y) = p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y\Big\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right\}$$

Доказательство:

1. $\Rightarrow$. Если $\exists U\colon\ \mathrm{d}U = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$, то $p = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

   Затем $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)$, $\quad \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$.

   Так как обе смешанные производные непрерывны, то $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$, откуда $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$.

2. $\Leftarrow$. Пусть $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$. Построим $U(x,y)$, удовлетворяющую условию. Возьмём в G точку

(x_0, y_0). Если $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = p(x,y)$, то положим

$$U(x,y) \stackrel{def}{=} \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + \varphi(y).$$

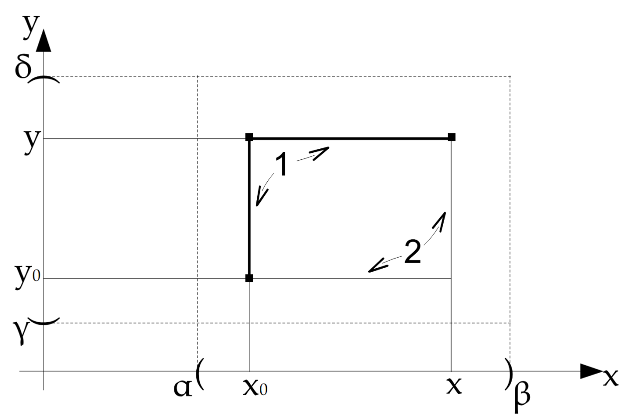
Так как должно выполняться $q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, то

$$q(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial p(\xi,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}\xi + \varphi'(y) = q(x,y) - q(x_0,y_0) + \varphi'(y).$$

$$\varphi(y)\colon \varphi'(y) = q(x_0, y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} q(x_0,\eta)\,\mathrm{d}\eta + C,\ \text{C – const.}$$

$$U(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} q(x_0,\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi,y_0)\,\mathrm{d}\xi + C, \quad C = U(x_0,y_0).$$

Геометрическая интерпретация интегрирования:



$\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$ – условие интегрируемости выражения $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$. (Клод Клеро и Леонард Эйлер)

Определение: $\varphi(x,y)$ – интегрирующий множитель выражения $p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y$, если:

1. φ не обращается в 0 в рассматриваемой области
2. в рассматриваемой области $\exists U(x,y)\colon\ \mathrm{d}U = \varphi p\,\mathrm{d}x + \varphi q\,\mathrm{d}y$.

§3. Некоторые другие простые типы уравнений первого порядка.

В этом параграфе все величины вещественные.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(\dfrac{y}{t}\right)$ — однородное уравнение.

f определена и непрерывна на (α, β). Область значений переменных t, y:

$$G = \{0 < t, \alpha < \frac{y}{t} < \beta\} \cup \{t < 0, \alpha < \frac{y}{t} < \beta\}.$$

Метод решения: $\dfrac{y}{t} = u$ – новая неявная функция, t – независимая переменная.

$$y = ut; \quad u't + u = f(u), \quad t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = f(u),$$

$$t\,\mathrm{d}u + (u - f(u))\,\mathrm{d}t = 0 \text{ – уравнение с разделяющимися переменными.}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(t)y + f(t)$ – линейное уравнение. $a(t)$, $f(t)$ определены и непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = a(t)z$ – линейное однородное уравнение, соответствующее уравнению (2).

$$\mathrm{d}z - a(t)z\,\mathrm{d}t = 0.$$

$z(t) = 0$ — решение. При $z \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} - a(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t \text{ – какая-либо первообразная.}$$

$$\ln|z| - A(t) = C, \quad z(t) = \pm e^C e^{A(t)}.$$

$\pm e^C$ — произвольная ненулевая константа. Общее решение: $z(t) = De^{A(t)}$, D — произвольная ненулевая константа.

$$y(t) = e^{A(t)}u(t)$$

$u(t)$ — новая искомая функция. Так как $y = e^A u$, то $u = e^{-A}y$.

$$(e^A u)' = a(e^A u) + f, \quad ae^A u + e^A u' = ae^A u + f, \quad e^A u' = f, \quad u' = e^{-A}f.$$

$$u = \int e^{-A(t)}f(t) + C, \quad y(t) = e^{A(t)}\Big(\int e^{-A(t)}f(t)\,\mathrm{d}t + C\Big).$$

(Метод Лагранжа вариации постоянной).

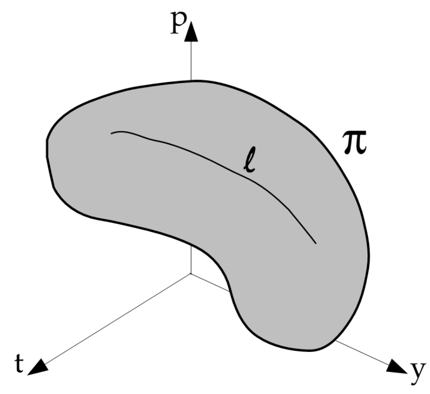
Задача: Написать формулу решения задачи Коши при $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta, y_0 = y(t_0)$. Рекомендации: $A(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $u = \int\limits_{t_0}^{t} \ldots + C$. C – ?

§4. Метод введения параметра.

В этом параграфе все величины вещественные.

$$f(t, y, y') = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим поверхность в трёхмерном пространстве (t, y, p). $\pi\colon f(t, y, p) = 0$. На этой поверхности рассмотрим кривую ℓ, соответствующую решению дифференциального уравнения. $\ell\colon \left\{ \begin{array}{l} y = y(t) \\ p = p(t) \end{array} \right\}$.



ℓ – график решения (1) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\ell \subset \pi$ и на ℓ имеет место $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$, $p = y'$.

Задача Коши для (1):

1. На π задана точка. Найти то решение уравнения (1), график которого проходит через эту точку.

2. Заданы числа t_0, y_0, p_0, удовлетворяющие условию $f(t_0, y_0, p_0) = 0$. Найти $y(t)$ — то решение, для которого $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = p_0$.

Частный случай: $y' = g(t, y)$.

Все рассматриваемые функции достаточно гладкие, области определения функций не оговариваются.

$$f(t, y, p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(\lambda, \mu) \\ y = \psi(\lambda, \mu) \\ p = \omega(\lambda, \mu) \end{array} \right.$$

Решаем уравнение $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$ в координатах λ, μ.

$$\psi'_\lambda\,\mathrm{d}\lambda + \psi'_\mu\,\mathrm{d}\mu = \omega(\varphi'_\lambda\,\mathrm{d}\lambda + \varphi'_\mu\,\mathrm{d}\mu)$$

Получили симметричную форму уравнения, разрешённого относительно производной:

$$(\psi'_\lambda - \omega\varphi'_\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + (\psi'_\mu - \omega\varphi'_\mu)\,\mathrm{d}\mu = 0$$

Примеры:

- $A(y')t + B(y')y + C(y') = 0$ — уравнение Лагранжа.

  Предполагаем $B \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид:

  $$y = k(y')t + b(y'), \quad y = k(p)t + b(p)$$

Решаем уравнение $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$ в координатах p, t. После дифференцирования:

$$k't\,\mathrm{d}p + k\,\mathrm{d}t + b'\,\mathrm{d}p = p\,\mathrm{d}t$$

$$(k't + b')\,\mathrm{d}p + (k - p)\,\mathrm{d}t = 0$$

Если находится $\hat{p}$: $k(\hat{p}) = \hat{p}$, то $p = \hat{p}$ — решение. При $k \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} + \frac{k't + b'}{k - p} = 0 \text{ — линейное уравнение.}$$

- $f(y, y') = 0$, $f(y, p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \psi(\lambda) \\ p = \omega(\lambda) \end{cases}$

  Решаем уравнение $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$ в координатах λ, t.

  $$\psi'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \omega(\lambda)\,\mathrm{d}t$$

  Если $y = \psi(\hat{\lambda}) = 0$, то $\lambda = \hat{\lambda}$ решение, $y = \psi(\hat{\lambda})$ – решение.

  При $\omega(\lambda) \neq 0 \Rightarrow t = \displaystyle\int \frac{\psi'(\lambda)}{\omega(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda + C$.

- $f(t, y') = 0$. $f(t, p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = \varphi(\lambda) \\ p = \omega(\lambda) \end{cases}$

§5. Уравнения высших степеней.

В этом параграфе все величины вещественные.

1. Понижение порядка уравнения Пусть t — независимая переменная, $y(t)$ — искомая, f — задана. Уравнение

$$f\big(t, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1}$$

называется *обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n.*

Определение: Функция $y = \varphi(t)$ — решение (1), если

1. $\varphi(t)$ определена на $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$, или $[\alpha, \beta]$.
2. $\varphi^{(k)}(t)$ непрерывна на $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$, или $[\alpha, \beta]$ соответственно.
3. $f\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0$ на $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$, или $[\alpha, \beta]$ соответственно.

Задача Коши для (1):

Заданы числа $t_0, q_0, q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющие условию $f(t_0, q_0, q_1, \ldots, q_n) = 0$. Найти $y(t)$ — решение (1), удовлетворяющее условиям $y(t_0) = q_0$, $y'(t_0) = q_1$, $\ldots$, $y^{(n)}(t_0) = q_n$.

Важный частный случай (1):

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

— уравнение, разрешенное относительно старшей производной.

Задача Коши для (2)**:** Заданы числа $t_0, q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$. Найти $y(t)$ — решение (2), удовлетворяющее условиям $y(t_0) = q_0$, $y^{(k)}(t_0) = q_k$ для $k = \overline{1, (n-1)}$.

2. Далее рассматриваем уравнение (1). Для простоты изложения f определена для $t, y, y', \ldots, y^{(n)}$ — любые. Все используемые функции достаточно гладкие (у них существуют все нужные нам производные).

Основной случай: y в уравнение не входит.

$$f(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = F(t, y', \ldots, y^{(n)})$$

Замечание: Задача понижения порядка уравнения включает в себя задачу решения уравнения первого порядка, так как понизить порядок уравнения первого порядка — значит решить его.

$y' = z$ — новая искомая функция, t — независимая переменная.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad F(t, z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0, \quad y(t) = \int z(t)\,\mathrm{d}t + C$$

3. Основная теорема. Рассматриваем преобразования (взаимно однозначные отображения) плоскости (t, y) на себя. Пусть преобразование $\varphi(t, y) = (\hat{t}, \hat{y})$ задаётся следующими формулами:

$$\hat{t} = \alpha(t, y),$$
$$\hat{y} = \beta(t, y).$$

$$\text{Ясно, что } \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{\beta_t + \beta_y y'}{\alpha_t + \alpha_y y'}$$

Определение: Уравнение *инвариантно* относительно преобразования φ, если

$$f\left(\hat{t}, \hat{y}, \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{t}}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{t}^n}\right) = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right)$$

Теорема: Пусть уравнение (1) инвариантно в переменных ξ, η относительно группы преобразований φ: $\hat{\xi} = \xi, \hat{\eta} = \eta + C$, C — произвольная константа. Тогда в переменных ξ, η уравнение (1) не зависит от η.

Доказательство:

$$f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right) = g\left(\xi, \eta, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n\eta}{\mathrm{d}\xi^n}\right)$$

$$g\left(\xi, \eta + C, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n\eta}{\mathrm{d}\xi^n}\right) = g\left(\xi, \eta, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n\eta}{\mathrm{d}\xi^n}\right)$$

Так как на месте второго аргумента может стоять любое число, то η не входит в g.

4. Некоторые конкретные типы уравнений, допускающих понижение порядка.

1. $f(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = g(y, y', \ldots, y^{(n)})$, $\eta = t$, $\xi = y$.

$\hat{t} = t + \alpha$, α — произвольная постоянная.

Назначаем y независимой переменной некоторой функции $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$ (или $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, как удобнее). Получим уравнение $(n-1)$-го порядка.

Замечание: Точки, в которых $y' = 0$, надо исследовать отдельно!

2. Уравнение, однородное относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$:

$$f(t, \sigma y, \sigma y', \ldots, \sigma y^{(n)}) = \sigma^k f(t, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

k — фиксированное, $\sigma \neq 0$.

Сделаем замену $\tilde{f} = y^{-k} f$.

$$\tilde{f}(t, \sigma y, \sigma y', \ldots, \sigma y^{(n)}) = \tilde{f}(t, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

$\hat{t} = t$, $\xi = t$, $\eta = \ln y$ (или $\ln(-y)$, если $y < 0$).

Преобразование φ задаётся формулами: $\begin{cases} \hat{y} = \sigma y \\ \hat{\xi} = \xi \end{cases}$. $\hat{\eta} = \eta + \alpha$, $\alpha = \ln \sigma$, или $\ln(-\sigma)$, если $\sigma < 0$.

Назначаем t независимой переменной некоторой функции $z = \dfrac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y'}{y}$. Получим уравнение $(n-1)$-го порядка. Точки, в которых $y = 0$, исследовать дополнительно. Возможность решения $y \equiv 0$ тоже исследовать дополнительно.

3. Уравнение, однородное относительно t, y, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 y, \ldots$, $\mathrm{d}^n y$:

$$f\left(\sigma t, \sigma y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{1}{\sigma^{n-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right) = \sigma^k f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right)$$

k — некоторое фиксированное число, $\sigma \neq 0$ — произвольное.

Делаем замену $\tilde{f} = t^{-k} f$, заменяем $f = 0$ уравнением $\tilde{f} = 0$.

$$\tilde{f}\left(\sigma t, \sigma y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{1}{\sigma^{n-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right) = \tilde{f}\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right)$$

Преобразование φ задаётся формулами: $\begin{cases} \hat{t} = \sigma t \\ \hat{y} = \sigma y \end{cases}$. Делаем замену $\xi = \dfrac{y}{t}$, $\eta = \ln t$ $\Big(\ln(-t)$ при $t < 0\Big)$ Назначаем независимой переменной $\dfrac{y}{t}$ функции $\dfrac{\mathrm{d}(\ln t)}{\mathrm{d}(y/t)}$, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка. Точки, где $t = 0$, исследовать дополнительно. Решения вида $y = Ct$, C — const, исследовать дополнительно.

Резюме к §2-5:

Если можно выписать явное выражение для $y(t) = \ldots$, используя элементарные функции, алгебраические операции, операции интегрирования, то говорят. что $y(t)$ выражается в квадратурах.

Лиувилль показал, что уравнение $y' + y^2 = a(t)$ не решается в квадратурах.

§6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$$

$$\left.\begin{array}{r} a_1, \ldots, a_n \text{ – заданные числа} \\ f(t) \text{ – заданная функция} \\ y(t) \text{ – искомая функция} \end{array}\right\} \quad \text{комплексные}$$

$$t \text{ – независимая переменная}\} \quad \text{вещественная}$$

1. Вспомогательные сведения:

$$\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t). \quad \alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$$

1. $\varphi(t)$ непрерывна $\quad\Leftrightarrow\quad$ α, β непрерывны.
2. $\varphi'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t)$
3. $\int \varphi(t) = \int \alpha(t) + i \int \beta(t)$

Определение:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots.$$

Этот ряд сходится абсолютно для любого комплексного z.

Имеет место:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
2. $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
3. $\left(e^{\varphi(t)}\right)' = \varphi'(t) e^{\varphi(t)}$, $\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$.

   В частности, $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$, λ — комплексное число.
4. $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ — Формула Эйлера-Муавра.

Определение: формула $\varphi(t)$ вида

$$g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + g_n(t) e^{\lambda_n t},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — комплексные числа, а $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ — многочлены с комплексными коэффициентами, называется *квазимногочленом*.

Замечание: Многочлен, тождественно равный нулю, степени не имеет.

Лемма 1: Рассмотрим квазимногочлен $\varphi(t) = g(t) e^{\lambda t}$, где $g(t)$ — многочлен степени m. Тогда

$$\varphi'(t) = q(t) e^{\lambda t}, \quad \int \varphi(t) = r(t) e^{\lambda t} + C,\, C = \text{const},$$

а $g(t)$, $r(t)$ — многочлены, при этом степень q равна m при $\lambda \neq 0$, и равна $m - 1$, если $\lambda = 0, m \neq 0$; степень r равна m при $\lambda \neq 0$, и равна $m + 1$, при $\lambda = 0$.

Доказательство:

- Для дифференцирования: $\left(g(t)e^{\lambda t}\right)' = g'(t)e^{\lambda t} + \lambda g(t)e^{\lambda t} = (g'(t) + \lambda g(t))e^{\lambda t}$.
- Для интегрирования:
    1. $\lambda \neq 0$. $\displaystyle\int g(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}g(t)e^{\lambda t} - \int g'(t)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,\mathrm{d}t = \ldots =$
    $\displaystyle= \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left(g(t) - \frac{g'(t)}{\lambda} + \frac{g''(t)}{\lambda^2} + \ldots + (-1)^m\frac{g^{(m)}(t)}{\lambda^m}\right) + C$
    2. $\lambda = 0$. $\int g(t)\,\mathrm{d}t = r(t) + C$, где $r(t)$ — фиксированный многочлен, C — произвольная константа.

Лемма 2: Пусть квазимногочлен $\varphi(t) = g_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + g_N(t)e^{\lambda_N t}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ попарно различные, тождественно равен нулю на каком-либо промежутке $[\alpha, \beta]$. Тогда все коэффициенты во всех g_i — нули.

Отсюда, в частности, следует, что если квазимногочлены совпадают как функции, то у них все коэффициенты одинаковые.

Доказательство: Индукция по числу слагаемых.

1. $N = 1$. $\varphi(t) = g(t)e^{\lambda t} \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$.
2. $N > 1$. $\varphi(t) = g_1(t)e^{\lambda_1 t} + \sum\limits_{i=2}^{N} g_i(t)e^{\lambda_i t}$.

   Рассмотрим функцию $\psi(t) = e^{-\lambda_1 t}\varphi(t) = g_q(t) + \sum\limits_{i=2}^{N} g_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_1)t} \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$.

   Продифференцируем это тождество m раз, где $m > \deg g_1$. Так как $(\lambda_i - \lambda_1)$ попарно различны и отличны от нуля, получим, в силу леммы 1,

   $$\psi^{(m)} = \sum_{i=2}^{N} \tilde{g}_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}, \quad \deg\tilde{g}_i = \deg g_i,\ i = \overline{2, N}$$

   По предположению индукции, коэффициенты в $\tilde{g}_i$ все равны нулю. Так как степень не менялась, то $g_i \equiv 0$. Отсюда $g_1 \equiv 0$, и все коэффициенты во всех g_i равны нулю, что и требовалось доказать.

Удобная символика. Введем в рассмотрение дифференциальный оператор $\mathcal{D}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{D}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \mathcal{D}u, \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \mathcal{D}u, \quad \text{и т.д.}$$

Пусть $b_0 + b_1\mathcal{D} + \ldots + b_m\mathcal{D}^m = \mathcal{M}(\mathcal{D})$, где $b_0, \ldots, b_m$ — комплексные числа.

Определение: $\mathcal{M}(\mathcal{D})u = b_0u + b_1u' + \ldots + b_mu^{(m)}$.

Имеет место:

1. $\mathcal{M}(\mathcal{D})(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{M}(\mathcal{D})u + \beta\mathcal{M}(\mathcal{D})v$, α и β — числа.

2. $(\mathcal{M}(\mathcal{D}) + \mathcal{N}(\mathcal{D}))u = \mathcal{M}(\mathcal{D})u + \mathcal{N}(\mathcal{D})u$
3. $(\mathcal{M}(\mathcal{D}) \cdot \mathcal{N}(\mathcal{D}))u = \mathcal{M}(\mathcal{N}(\mathcal{D})u)$ (подумайте, почему)

2. Общий метод решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_1, \ldots, a_n \text{ – заданные числа} \\ f(t) \text{ – заданная функция} \\ y(t) \text{ – искомая функция} \end{array}\right\} \text{ комплексные}$$
$$\left.\begin{array}{r} t \text{ – независимая переменная} \end{array}\right\} \text{ вещественная}$$
$$f(t) \text{ – непрерывная на } [\alpha, \beta]$$

Определение: Функция $y = \varphi(t)$ — решение уравнения (1), если:

1. $\varphi(t)$ определена на некотором промежутке $[\delta, \gamma], (\delta, \gamma), [\delta, \gamma),$ или $(\delta, \gamma]$.
2. $\varphi^{(n)}(t)$ непрерывна на $[\delta, \gamma], (\delta, \gamma), [\delta, \gamma),$ или $(\delta, \gamma]$ соответственно.
3. $\varphi^{(n)}(t) + a_1 \varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n \varphi(t) = f(t)$ на $[\delta, \gamma], (\delta, \gamma), [\delta, \gamma),$ или $(\delta, \gamma]$ соответственно.

Введём дифференциальный оператор $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^n + a_1 \mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_n$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})y = f(t) \tag{1}$$

Определение: Многочлен $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ относительно комплексного переменного — *характеристический многочлен* линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами; уравнение $\mathcal{L}(\lambda) = 0$ — *характеристическое уравнение* линейного дифференциального уравнения (1).

$\mathcal{L}(\lambda) = 0$ имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

$$\mathcal{L}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = (\mathcal{D} - \lambda_1)(\mathcal{D} - \lambda_2) \ldots (\mathcal{D} - \lambda_n),$ где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения.

$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = (\mathcal{D} - \lambda_1)\mathcal{M}(\mathcal{D}), \quad \mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{n-1} + b_1 \mathcal{D}^{n-2} + \ldots + b_{n-1}.$

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})y = f(t) \tag{1}$$

$$\big((\mathcal{D} - \lambda_1)\mathcal{M}(\mathcal{D})\big)y = f(t)$$
$$(\mathcal{D} - \lambda_1)\big(\mathcal{M}(\mathcal{D})y\big) = f(t)$$

Введём функцию U:

$$U \overset{def}{=} \mathcal{M}(\mathcal{D})y \tag{2}$$

$$(\mathcal{D} - \lambda_1)U = f, \quad U' - \lambda U = f, \tag{3}$$

причём (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases}$. Ищем U в виде $U = e^{\lambda_1 t} v$.

$$\underline{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} v} + e^{\lambda_1 t} v' - \underline{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} v} = f$$

Подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются, получаем решение:

$$v' = e^{\lambda_1 t} f; \quad v = \int e^{\lambda_1 t} f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

$$U = e^{\lambda_1 t} \left(\int e^{\lambda_1 t} f(t)\,\mathrm{d}t + C \right) \tag{4}$$

Переходим к (2). За n шагов получаем решение.

Следствие:

1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами решаются в квадратурах.

2. Исследуем задачу Коши:

$$t_0 \in [\alpha, \beta], \quad q_0, \ldots, q_{n-1} \text{ – заданные числа.}$$

Найти $y(t)$ — то решение уравнения (1), что

$$y(t_0) = q_0,\ y^{(k)}(t_0) = q_k,\ k = \overline{1, (n-1)} \tag{5}$$

Теорема: Задача (1)$\wedge$(5) имеет решение, это решение продолжимо на весь $[\alpha, \beta]$, и единственно.

$$U = \mathcal{D}^{n-1} y + b_1 \mathcal{D}^{n-2} y + \ldots + b_{n-1}$$
$$U(t_0) = q_{n-1} + b_1 q_{n-2} + \ldots + q_0.$$
$$U(t) = e^{t-t_0} U(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{t-\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

Продолжая решение на весь отрезок, получим доказательство.

3. Однородные уравнения.

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = 0,\ -\infty < t < +\infty \tag{7}$$

Замечание: $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_r t^r$ — многочлен *формальной степени* r, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — комплексные числа. При этом старший коэффициент не обязательно равен нулю.

Теорема: Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратности соответственно $k_1, \ldots, k_m$. Тогда $z(t)$ — решение (7) тогда и только тогда, когда

$$z(t) = q_1(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + q_m(t) e^{\lambda_m t}, \tag{8}$$

где $q_s(t)$ — многочлен формальной степени $k_s - 1$ с комплексными коэффициентами.

Доказательство: Используем (3) и (4). Проведём индукцию по n.

1. $n = 1$. $(7) \Rightarrow z' + a_1 z = 0 \Rightarrow z = e^{-a_1 t} C$.
2. $n > 1$. $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{M}(\mathcal{D})(\mathcal{D} - \lambda_1)$,

$$\mathcal{M}(\mathcal{D}) = (\mathcal{D} - \lambda_1)^{k_1 - 1}(\mathcal{D} - \lambda_2)^{k_2} \dots (\mathcal{D} - \lambda_m)^{k_m}$$

$$(7) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathcal{D})z = 0, \quad \Big(\mathcal{M}(\mathcal{D})(\lambda - \lambda_1)\Big)z = 0, \quad \mathcal{M}(\mathcal{D})\Big((\mathcal{D} - \mathcal{M})z\Big) = 0$$

$$(7) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}(\mathcal{D})v = 0 \\ (\mathcal{D} - \lambda_1)z = v \end{array} \right\}, \quad v = h_1(t)e^{\lambda_1 t} + \sum_{s=2}^{m} h_s(t)e^{\lambda_s t},$$

где $h_s(t)$ — произвольный многочлен формальной степени $k_s - 2$ при $k_s > 1$; $h_s(t) = 0$ при $k_s = 1$.

$$\begin{aligned} z &= e^{\lambda_1 t}\left\{\int e^{\lambda_1 t}\Big(h_1(t)e^{\lambda_1 t} + \sum_{s=2}^{m} h_s(t) \cdot e^{\lambda_s t}\Big)\,\mathrm{d}t + C\right\} = \\ &= e^{\lambda_1 t}\left\{\int \Big(h_1(t) + \sum_{s=2}^{m} h_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t}\Big)\,\mathrm{d}t + C\right\}, \ \lambda_s - \lambda_1 \neq 0 \text{ при } s \neq 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z = e^{\lambda_1 t}\left(q_1(t) + \sum_{s=2}^{m} e^{\lambda_s - \lambda_1} q_s(t) + C\right),$$

где степень $q_s(t)$ равна $k_s - 1$ при $s = \overline{1, m}$, $z = \sum\limits_{s=1}^{m} e^{\lambda_s t} q_s(t)$.

4. Неоднородные уравнения. Пусть $f(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y = f(t), \tag{1}$$

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = 0 \tag{9}$$

Утверждение: Пусть $y_*(t)$ — решение (1), $y(t) = y_*(t) + z(t)$. Тогда $y(t)$ — решение (1) тогда и только тогда, когда $z(t)$ — решение (9).

Доказательство: $\mathcal{L}(\mathcal{D})y = \mathcal{L}(\mathcal{D})(y_* + z) = \mathcal{L}(\mathcal{D})y_* + \mathcal{L}(\mathcal{D})z = f + \mathcal{L}(\mathcal{D})z$

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})y = f \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathcal{D})z = 0$$

Утверждение: Пусть $f = f_1 + \dots + f_N$, $\mathcal{L}(\mathcal{D})y_k = f_k$ при $k = \overline{1, N}$; $y = y_1 + \dots + y_N$. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{D})y = f$.

Теорема: Пусть $f(t) = g(t)e^{\mu t}$, где μ — комплексное число, $g(t)$ — комплексный многочлен степени m. Пусть μ — корень кратности k характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1), имеющее вид

$$y(t) = t^k \cdot r(t)e^{\mu t},$$

где $r(t)$ — многочлен степени m.

Доказательство: (индукция по n – суммарной кратности корней).

Докажем существование решения $\tilde{y}(t)$ вида

$$\tilde{y}(t) = \tilde{r}(t)e^{\mu t},$$

где $\tilde{r}(t)$ — многочлен степени $(m+k)$.

1. $n = 1$. $y' + a_1 y = f(t)$. По формуле (4):

$$y(t) = e^{-a_1 t}\left(\int e^{a_1 t} f(t)\,\mathrm{d}t + C\right), \text{ и т.д.}$$

   Надо отдельно рассмотреть случаи $\mu = -a_1$, $\mu \neq -a_1$. В обоих случаях, интегрируя, получаем, что утверждение выполняется.

2. $n > 1$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})y = f, \quad \Big(\mathcal{M}(\mathcal{D})(\mathcal{D}-\lambda_1)\Big)y = f, \quad \mathcal{M}(\mathcal{D})\Big(\underbrace{(\mathcal{D}-\lambda_1)y}_{\text{обозначим } \tilde{v}}\Big) = f.$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\mathcal{D})\tilde{v} = f & (a) \\ (\mathcal{D}-\lambda_1)y = \tilde{v} & (b) \end{cases}$$

   Из нашего предположения, $y(t)$ ищем в виде $y(t) = e^{\mu t}\cdot\tilde{r}(t)$, поэтому из второго равенства дифференцированием получаем:

$$\tilde{v} = e^{\mu t}\big(\tilde{r}'(t) + \underline{(\mu-\lambda_1)\tilde{r}(t)}\big). \qquad (c)$$

   Таким образом,

$$\begin{cases} \tilde{v} = e^{\mu t} h(t) \\ y = e^{\mu t}\tilde{r}(t) \end{cases}, \text{ где } h(t) \text{ и } \tilde{r}(t) \text{ – многочлены.}$$

   Возможны 2 случая:

   (a) $\lambda_1 \neq \mu$. Подчёркнутое слагаемое в (c) не обращается в 0. Рассматривая уравнение (a) степени $n-1$, по предположению индукции получаем, что $h(t)$ имеет степень $m+k$. Из (c) видно, что она также равна степени многочлена $\tilde{r}(t)$.

   (b) $\lambda_1 = \mu$. В этом случае подчёркнутое слагаемое в (c) обращается в 0. По предположению индукции, многочлен $h(t)$ имеет степень $m+k-1$, а степень многочлена $\tilde{r}(t)$ равна $m+k$, как видно из (c).

Для завершения доказательства представим $\tilde{y}(t)$ в виде

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{t^k r(t)e^{\mu t}}_{y(t)} + \underbrace{(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{k-1}t^{k-1})e^{\mu t}}_{\text{решение однородного уравнения}}.$$

Напомним, что μ — корень характеристического уравнения кратности k, $\deg r(t) = m$.

Замечание: Коэффициенты многочлена $r(t)$ ищут методом неопределенных коэффициентов.

5. Случай, когда все величины вещественны.

Пусть в (1) $a_1, \dots, a_n$ — вещественны, $f(t)$ — вещественная. Для корней характеристического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_n = 0$ возможны два случая: λ — вещественный корень, либо $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar\lambda = \alpha - i\beta$ оба являются корнями характеристического уравнения. α, β — вещественные, причём кратность этих корней одна и та же.

$$e^{\alpha \pm i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta \pm i\sin\beta)$$

Решение однородного уравнения складывается из слагаемых вида $q(t)e^{\lambda t}$, $q(t)$ — многочлен. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то слагаемое можно переписать без изменений. Если λ — комплексное, то

$$q(t)e^{\lambda t} + \tilde q(t)e^{\bar\lambda t} = \Big(A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t\Big)e^{\alpha t}$$

При этом $\max\big(\deg A(t), \deg B(t)\big)$ равна кратности корня λ в характеристическом уравнении, а формальная степень $A(t)$ равна формальной степени $B(t)$.

Для неоднородного уравнения справедлива аналогичная сформулированной в пункте 4 теорема:

Теорема: Если
$$f(t) = e^{\gamma t}\big(M(t)\cos\delta t + N(t)\sin\delta t\big),$$
$M(t)$, $N(t)$ — многочлены, $\mu = \gamma + i\delta$, μ — корень кратности k характеристического уравнения, то решение $y(t)$ надо искать в виде

$$y(t) = t^k \cdot e^{\gamma t}\Big(u(t)\cos\delta t + v(t)\sin\delta t\Big),$$

где $\max(\deg u, \deg v) = \max(\deg M, \deg N)$.

Если $SA(t), B(t), M(t), N(t), u(t), v(t)$ вещественные, то $y(t)$ — тоже вещественная.

§7. Первая краевая задача. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Задачи с сингулярно входящим малым параметром.

1.
$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{1}$$
$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\alpha < \beta$, $f(t)$ непрерывная функция, a, b — заданные числа.

a, b, $f(t)$, $y(t)$ — комплексные.

Задача Коши: $t_0 \in [\alpha, \beta]$, y_0, y_0', $y(t)$: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$.

Первая краевая задача для уравнения (1)**:** Заданы числа y_α, y_β. Найти $y(t)$ — то решение (1), которое удовлетворяет условиям

$$y(\alpha) = y_\alpha, \quad y(\beta) = y_\beta \tag{2}$$

Метод решения: представим $y(t)$ в виде $y(t) = y_*(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$, где c_1, c_2 — числа.

$$z'' + az' + bz = 0, \quad z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t), \tag{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 z_1(\alpha) + c_2 z_2(\alpha) = y_\alpha - y_*(\alpha) \\ c_1 z_1(\beta) + c_2 z_2(\beta) = y_\beta - y_*(\beta) \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\det \left\| \begin{array}{cc} z_1(\alpha) & z_2(\alpha) \\ z_1(\beta) & z_2(\beta) \end{array} \right\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists! \text{ решение } (1) \quad \Rightarrow \quad \text{решение краевой задачи } (1) \wedge (2) \ \exists!$$

Если $\det \|\cdot\| = 0$, то $\left[\begin{array}{l} \text{(4) не имеет решения} \\ \text{решение } \exists \text{ не единственное.} \end{array} \right.$

Упражнение: исследовать задачи

$$y'' - y = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \qquad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ y(\pi) = y_\pi \end{array} \tag{I}$$

$$y'' + y = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \qquad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ y(\pi) = y_\pi \end{array} \tag{II}$$

2. Все величины вещественные.

$$\varepsilon y' + ay = f(t) \tag{5}$$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $f'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, ε, a — числа, $\varepsilon \neq 0$, $a \neq 0$, ε мало, $\varepsilon \to 0$.

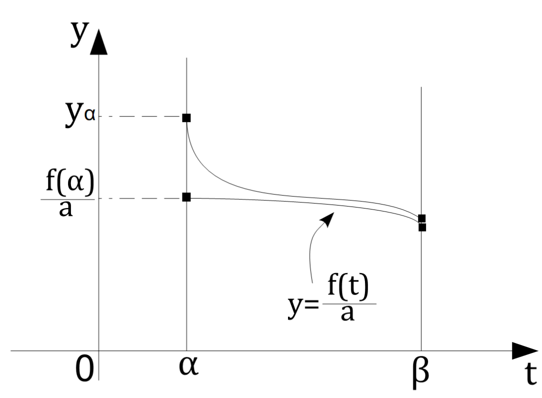
$$y(\alpha) = y_\alpha \tag{6}$$

Определение: Если выполняются указанные выше условия (ε мало), то параметр ε называется *сингулярным*, или *сингулярно входящим*.

Теорема: Пусть $\varepsilon > 0$, $a > 0$. Тогда решение $y(t)$ задачи $(5) \wedge (6)$ может быть представлено в виде

$$y(t) = \frac{f(t)}{a} + \left(y_\alpha - \frac{f(\alpha)}{a} \right) e^{-a/\varepsilon \cdot (t-\alpha)} + u(t), \tag{7}$$

где $\bigl|u(t)\bigr| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{a^2} \max |f'|$.



Доказательство: Составим функцию

$$W(t) \overset{def}{=} y(t) - \frac{f(t)}{a},$$

$$W'(t) + \frac{a}{\varepsilon}W = -\frac{f'(t)}{a} \tag{8}$$

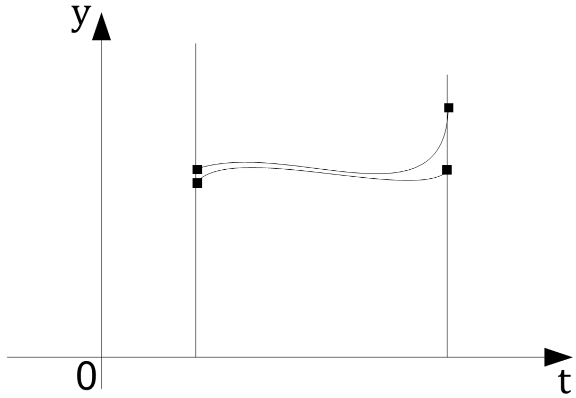
$$W(\alpha) = y_\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}$$

$$W(t) = \left(y_\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}\right)e^{-a/\varepsilon\cdot(t\alpha)} - \underbrace{\int\limits_\alpha^t \frac{e^{-a/\varepsilon\cdot(t-\tau)}f'(\tau)}{a}\,\mathrm{d}\tau}_{\text{обозначим } u(t)} \quad \text{(см. §6, (6))}$$

$$u(t) \leqslant \int\limits_\alpha^t \frac{e^{-a/\varepsilon\cdot(t-\tau)}\max|f'|}{a}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon}{a^2}\max|f'|\left(1 - e^{-a/\varepsilon\cdot(t-\alpha)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{a^2}\max|f'|$$

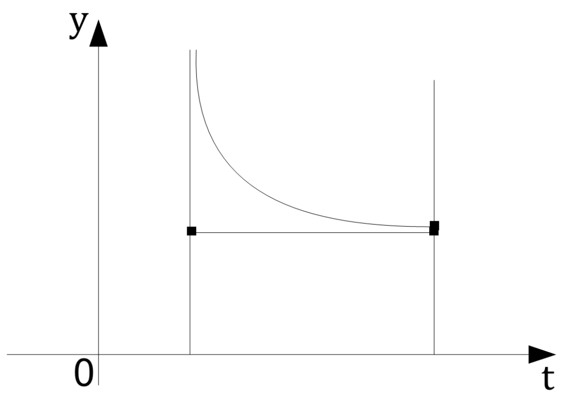
Дополнение к теореме:

Рассуждение прокатывает, если $\frac{\varepsilon}{a} > 0$, начальное условие на левом конце. Кроме того, если $\frac{\varepsilon}{a} < 0$ и начальное условие на правом конце, совершая замену $t \to -t$, теорема верна.



Если $\frac{\varepsilon}{a} < 0$, начальное условие на левом конце, или $\frac{\varepsilon}{a} > 0$ и начальное условие на правом конце, то решение на соответствующем конце быстро растёт, и это *не тот случай, который мы изучаем.*

Пример: $\varepsilon y' - y = 0$, $\varepsilon > 0$, $y'(\alpha) = 1$. Решение: $y = e^{(t-\alpha)/\varepsilon}$.



3. В этом пункте все величины вещественные.

$$\varepsilon y'' + ay' + by = f(t) \tag{9}$$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $f'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, $\varepsilon \neq 0$, $a \neq 0$.

$$y(\alpha) = y_\alpha, \qquad y(\beta) = y_\beta \qquad (10_\alpha),\ (10_\beta)$$

$$ay' + by = f(t) \tag{11}$$

Теорема: Пусть $\varepsilon > 0$, $a > 0$. Тогда для достаточно малого ε решение $y(t)$ задачи $(9) \wedge (10_\alpha) \wedge (10_\beta)$ существует и единственно. Оно может быть при $\varepsilon \to 0$ представлено в виде

$$y(t) = \hat{y}(t) + \big(y_\alpha - \hat{y}(\alpha)\big)e^{-a/\varepsilon \cdot (t-\alpha)} + u(t),$$

где $\underline{\hat{y}(t) \text{ — решение } (11) \wedge (10_\beta)}$, а $u(t) = O(\varepsilon)$. $O(\cdot)$ означает оценку, равномерную на $[\alpha, \beta]$.

Доказательство: Обозначим

$$W(t) \overset{def}{=} y(t) - \hat{y}(t)$$

Несложными вычислениями получаем равенства:

$$W'' + \frac{a}{\varepsilon}W' + \frac{b}{\varepsilon}W = -\hat{y}''(t) \qquad \left(\hat{y}'' = \frac{f' - b\hat{y}}{a}\right) \tag{12}$$

Стандартный метод решения задач: находим частное решение, затем общее решение.

Пусть $W_*(t)$ — то решение (12), для которого выполнены условия

$$W_*(\alpha) = 0, \qquad W_*'(\alpha) = 0 \tag{13}$$

Покажем, что $W_*(t) = O(\varepsilon)$. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \frac{a}{\varepsilon}\lambda + \frac{b}{\varepsilon} = 0.$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

$$\lambda_1 = -\frac{b}{a} + O(\varepsilon), \qquad \lambda_2 \to \infty \quad \big(\lambda_2\varepsilon = -a + O(\varepsilon)\big)$$

Запишем (12) в следующем виде:

$$(12) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D} - \lambda_1)(\mathcal{D} - \lambda_2)W_* = -\hat{y}'', \qquad \mathcal{D} \overset{def}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} (14) \qquad (\mathcal{D} - \lambda_1)v = -\hat{y}'' \\ (15) \qquad (\mathcal{D} - \lambda_2)W_* = v \end{cases}$$

$$\text{Из (13) и (15)} \quad \Rightarrow \quad v(\alpha) = 0 \tag{16}$$

Из (14) $\Rightarrow$ $v = O(1)$, $\quad v' = O(1)$

(15) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon W_*' + \mu W_* = \varepsilon v$, $\quad \mu = -\varepsilon\lambda_2 = a + O(\varepsilon)$

Так как $W_*(\alpha) = 0$, то используя формулу для решения уравнения (15) в виде (7), получаем $W_* = O(\varepsilon)$.

Подберём общее решение, удовлетворяющее начальным условиям: $\underline{W(t) = W_*(t) + z(t)}$.

$$\begin{cases} z'' + \dfrac{a}{\varepsilon}z' + \dfrac{b}{\varepsilon}z = 0 \\ z(\alpha) = y_\alpha - \hat{y}(\alpha), \qquad z(\beta) = -W_*(\beta) \end{cases} \tag{17}$$

$$z(t) = C_1 e^{\lambda_1(t-\alpha)} + C_2 e^{-\mu/\varepsilon\cdot(t-\alpha)}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_\alpha - \hat{y}(\alpha) \\ C_1 e^{\lambda_1(\beta-\alpha)} + C_2 e^{-\mu/\varepsilon\cdot(\beta-\alpha)} = -W_*(\beta) \end{cases} \tag{18}$$

$$\det\|\cdot\| = \det\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda_1(\beta-\alpha)} & {e^{-\mu/\varepsilon\cdot(\beta-\alpha)}}_{[\to 0]} \end{Vmatrix} \neq 0 \text{ для достаточно малых } \varepsilon.$$

Тем самым, система (18) имеет, и при том единственное, решение. Если уравнение (17) имеет единственное решение, то исходная краевая задача $(9) \wedge (10_\alpha) \wedge (10_\beta)$ для достаточно малых ε имеет единственное решение.

$$C_1 = O(\varepsilon), \qquad C_2 = y_\alpha - \hat{y}(\alpha) + O(\varepsilon)$$

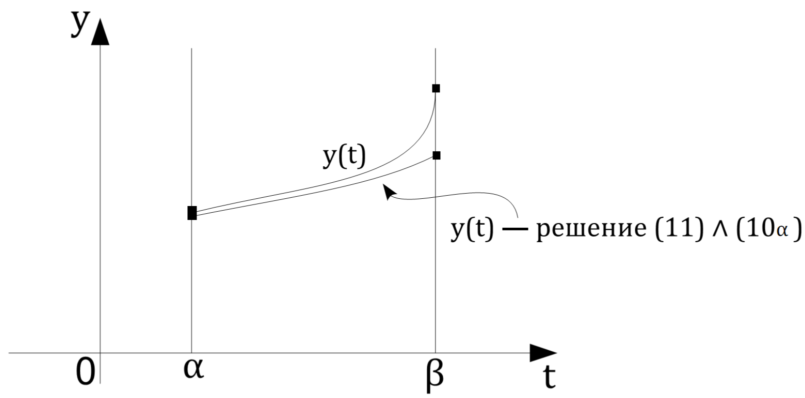
В качестве упражнения читателю предоставляется следующее:

$$q(t) \overset{def}{=} \underline{e^{-\mu/\varepsilon\cdot(t-\alpha)} - e^{-a/\varepsilon\cdot(t-\alpha)} = O(\varepsilon)}, \text{ где } \mu = a + O(\varepsilon)$$

$$u(t) = W_*(t) + C_1 e^{\lambda_1(t-\alpha)} + \big(y_\alpha - \hat{y}(\alpha)\big)q(t) + \big(C_2 - y_\alpha + \hat{y}(\alpha)\big)e^{-\mu/\varepsilon\cdot(t-\alpha)} = O(\varepsilon).$$

Справедливость последнего равенства легко проверяется раскрытием скобок. Доказательство завершено.

Замечание: Фактически рассмотрен случай $\varepsilon a > 0$. Если $\varepsilon a < 0$, то надо сделать замену $t \mapsto -t$. На рисунке изображено решение $(11) \wedge (10_\alpha)$ $\hat{y}(t)$ и $y(t)$.



§8. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Матричные функции $Q(t)$ скалярной переменной t.

t — вещественная,

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} q_{11}(t) & \dots & q_{1m}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1}(t) & \dots & q_{nm}(t) \end{Vmatrix}$$

$q_{rs}(t)$— вещественная, если нужно, комплексная (оговаривается отдельно). Введем следующие определения:

1. $Q(t)$ — непрерывна $\quad\Leftrightarrow\quad$ все q_{rs} непрерывны.
2. $\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = L(t) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}q_{rs}(t)}{\mathrm{d}t} = \ell_{rs}(t)$ для всех r, s; ℓ_{rs} — соответствующие элементы $L(t)$.
3. $\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(t)\,\mathrm{d}t = L \quad\Leftrightarrow\quad \int\limits_{\alpha}^{\beta} q_{rs}(t)\,\mathrm{d}t = \ell_{rs}$ для всех r, s; ℓ_{rs} — соответствующие элементы $L(t)$.

Замечание: Порядок сомножителей для матриц важен!

Теорема:

1. Пусть $\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$ и $\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$ существуют и $(A+B)$ определено. Тогда
$$\frac{\mathrm{d}\big(A(t)+B(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$$
2. Пусть $\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$ и $\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$ существуют и AB определено. Тогда
$$\frac{\mathrm{d}\big(A(t)B(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$$

3. Пусть $\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = Q(\beta) - Q(\alpha)$$

Обозначение:

$$\vec{x} \overset{def}{=} \begin{Vmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{Vmatrix}. \qquad \begin{array}{rcl} x_{11}, \ldots, x_{n1} \text{ – вещественные} & \Leftrightarrow & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ x_{11}, \ldots, x_{n1} \text{ – комплексные} & \Leftrightarrow & \vec{x} \in \mathbb{C}^n \end{array}$$

2.

$$\begin{cases} f_1(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_m(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0 \end{cases}$$

t — независимая переменная (вещественная); $y_1, \ldots, y_m$ — искомые функции от t. $f_1, \ldots, f_m$ — заданные функции, $y_1, \ldots, y_m$, $f_1, \ldots, f_m$ — вещественные или комплексные.

Такую систему можно свести к системе, в которую входит только первая производная. Стандартный способ такого сведения:

$$\begin{cases} f(t, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \\ u_1 = y', u_2 = y'', \ldots, u_{k-1} = y^{(k-1)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \cdots \\ u_{k-2}' - u_{k-1} \\ f(t, y, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k-1}') = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \\ \cdots \\ f_n(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\vec{y} \overset{def}{=} \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}, \quad \vec{f} \overset{def}{=} \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}$$

$$\vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}\,') = \vec{0} \tag{1}$$

Определение: Функция $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение (1), если:

1. $\vec{\varphi}(t)$ определена на некотором промежутке (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $[\alpha, \beta]$.
2. $\vec{\varphi}\,'(t)$ непрерывна на (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $[\alpha, \beta]$ соответственно.
3. $\vec{f}\big(t, \vec{\varphi}(t), \vec{\varphi}\,'(t)\big) = \vec{0}$ на (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, или $[\alpha, \beta]$ соответственно.

Важный частный случай:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \qquad \dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{2}$$

Система (2) называется нормальной формой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где каждое уравнение разрешено относительно производной.

Задача Коши для (2)**:**

Заданы t_0, $\vec{y}_0$. Найти $\vec{y}(t)$ — решение (2), удовлетворяющее условию $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

§9. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

Для определённости t меняется на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. ($t$ — вещественная). $y_1, \dots, y_n$ — искомые функции от t; $f_1, \dots, f_n$ — заданные функции; $a_{11}, \dots, a_{nn}$ — заданные числа.

a_{rs}, y_r, f_r — комплексные. $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

$$\vec{y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right\|, \quad \vec{f} = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{f}(t) \tag{1}$$

Задача Коши для (1)**:**

Заданы $t_0 \in [\alpha, \beta]$ и $\vec{y}_0$. Найти $\vec{y}(t)$ — решение (1), удовлетворяющее условию

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \tag{2}$$

Теорема: Пусть A — линейное преобразование в линейном комплексном пространстве. Пусть существует базис из собственных векторов A. Тогда в этом базисе A имеет вид $\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{matrix} \right\|$ (*диагональная матрица*), где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Замечание:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

пример матрицы, у которой не существует базиса из собственных векторов.

Теорема: Пусть A — линейное преобразование в комплексном линейном пространстве. Тогда существует базис, в котором матрица A — верхняя треугольная.

2. Общий метод решения нормальных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$A = SBS^{-1}$, где S — матрица перехода к новому базису, B — верхняя треугольная матрица,

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = SBS^{-1}\vec{y} + \vec{f}(t), \quad S^{-1}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = BS^{-1} + S^{-1}\vec{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}(S^{-1}\vec{y})}{\mathrm{d}t} = B(S^{-1}\vec{y}) + S^{-1}\vec{f}(t)$$

$S^{-1}\vec{y} = \vec{J}$ — новая искомая функция, $S^{-1}\vec{f}(t) = \vec{F}(t)$ — новая заданная функция.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = B\vec{J} + \vec{F}(t) \tag{1'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}t} = b_{11}J_1 + \ldots + b_{1n}J_n + F_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}t} = b_{22}J_2 + \ldots + b_{2n}J_n + F_2(t) \\ \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}J_{n-1}}{\mathrm{d}t} = b_{(n-1)(n-1)}J_{n-1} + \ldots + b_{(n-1)n}J_n + F_{n-1}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}t} = b_{nn}J_n + F_n(t) \end{cases} \tag{1'}$$

Порядок решения: снизу вверх

Следствия:

1. Система (1) решается в квадратурах (можно написать явное решение, содержащее заданные функции, элементарные функции, алгебраические операции и операцию интегрирования)

2. **Теорема:** Задача $(1) \wedge (2)$ имеет решение. Это решение может быть продолжено на весь отрезок $[\alpha, \beta]$, и это решение единственно.

   Доказательство:

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J}(t_0) = S^{-1}\vec{y}_0$$

$$(1') \wedge \left(\vec{J}(t_0) = S^{-1}\vec{y}_0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (1) \wedge (2)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{f}(t), \tag{1}$$

где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \mathrm{const}$; $\vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}$, $\vec{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}$

Предположение: $\vec{f}(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$; $A, \vec{f}, \vec{y}$ — комплексные.

Пусть $A = SBS^{-1}$, где S — матрица перехода к новому базису, B – верхняя треугольная. Тогда:

$$\vec{y}(t) = S^{-1}\vec{Y}(t),\ \vec{f}(t) = S^{-1}\vec{F}(t)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y_1}{\partial t} = b_{11}Y_1 + \ldots + b_{1n}Y_n + F_1(t) \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial t} = b_{22}Y_1 + \ldots + b_{2n}Y_n + F_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial Y_n}{\partial t} = b_{nn}Y_n + F_n(t) \end{cases} \tag{$1'$}$$

3. Однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассматривается уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z}, \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty \tag{3}$$

Теорема: Пусть существует базис $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ из собственных векторов $A\vec{g}_r = \lambda_r\vec{g}_r$, $r = \overline{1,n}$. Тогда $\vec{z}(t)$ – решение (3) тогда и только тогда, когда

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{g}_1 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{g}_n,$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — числа.

Доказательство: Система имеет вид: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 z_1, \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}t} = \lambda_n z_n \end{cases}$ Обозначая $S = \|\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\|$, получим $\vec{z}(t) = S\vec{Z}(t)$, или $z_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$.

$$\vec{z}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix},\ \vec{z}(t) = S\vec{Z}(t)$$

$$\|\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\| \cdot \|0 \ldots 1 \ldots 0\|^\top = \vec{g}_k \quad (\text{на } k\text{−ом месте стоит } 1)$$

Теорема: Пусть система линейных однородных дифференциальных уравнений (3) такова, что характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кратности $k_1, \ldots, k_m$. Тогда

$$\vec{z}(t) \text{ – решение (3)} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}(t) = \vec{q}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + \vec{q}_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $\vec{q}_r(t) = \vec{q}_{r_0} + \vec{q}_{r_1} t + \ldots + \vec{q}_{r_{k_r - 1}} t^{k_r - 1}$.

Доказательство:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = b_{11}z_1 + \ldots + b_{1n}z_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}t} = b_{nn}z_n \end{cases} \tag{3'}$$

$b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots$ – решения характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Доказываем утверждение в новом базисе, затем возвращаемся в старый:

$$\vec{z}(t) = S\vec{Z}(t).$$

Не сказано, что $\vec{z}(t)$ – решение. Это значит, что *выражение любого решения представимо в таком виде, но не любое такое выражение – решение.*

Чтобы найти $\vec{q}_i$ в старом базисе, используется метод неопределенных коэффициентов.

4. (1) и (3)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{f}(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z} \tag{3}$$

Теорема: Пусть $\vec{y}_*(t)$ – какое-либо решение (1), $\vec{y}(t) = \vec{y}_*(t) + \vec{z}(t)$. Тогда

$$\vec{y}(t) \text{ – решение (1)} \Leftrightarrow \vec{z}(t) \text{ — решение (3)}.$$

Теорема: Пусть

$$\vec{f}(t) = \vec{f}_1(t) + \ldots + \vec{f}_n(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}_k}{\mathrm{d}t} = A\vec{y}_k + f_k(t),\ k = \overline{1, N};\ \vec{y}(t) = \vec{y}_1(t) + \ldots + \vec{y}_n(t).$$

Тогда $\vec{y}(t)$ — решение (1).

Далее $\vec{f}(t)$ — квазимногочлен.

Теорема: Пусть

$$\vec{f}(t) = \vec{q}(t)e^{\mu t}, \text{ где}$$

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0 + t\vec{q}_1(t) + \ldots + t^n\vec{q}_n(t),\ \vec{q}_0, \ldots, \vec{q}_n, \mu \text{ — константы.}$$

Пусть μ — k-кратный корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Тогда существует решение (1), имеющее вид:

$$\vec{y}(t) = \vec{r}(t)e^{\mu t}, \text{ где}$$

$$\vec{r}(t) = r_0 + t\vec{r}_1(t) + \ldots + t^{k+n}\vec{r}_{k+n}(t),\ \vec{r}_s = \text{const}.$$

Доказательство: Перейдем к новой системе координат, где матрица преобразования имеет верхнетреугольную форму (1′). Выкладки в исходной системе координат, методом неопределенных коэффициентов.

5. Пусть все вещественно.

$\det(A - \lambda E) = 0$ имеет вещественные корни и пары комплексно сопряженных корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ одинаковой кратности.

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

Если λ — вещественное:

$$e^{\lambda t}\vec{r}(t)$$

В случае комплексных корней:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta: \quad \vec{q}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \vec{q}_2(t)e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\vec{r}(t)\cos\beta t + \vec{s}(t)\sin\beta t)$$

§10. Матричные формулы решений обыкновенной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{f}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \text{const}; \vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}, \vec{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z} \tag{2}$$

При $n = 1$ имеем такие формулы: $y(t) = e^{(t-t_0)A}y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}f(\tau)d\tau$ и $z(t) = e^{(t-t_0)A}z(t_0)$.

1. Введем понятие матричной экспоненты.

2. Докажем эти формулы.

3. Дадим удобный способ вычисления e^{tA}.

Теорема: Пусть B – произвольная комплексная $n \times n$-матрица. Тогда ряд $E + \dfrac{B}{1!} + \dfrac{B^2}{2!} + \ldots$ для каждого матричного элемента сходится и притом абсолютно.

Доказательство:

$\text{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{Vmatrix}, B^2 = \begin{Vmatrix} b_{11}^{(2)} & \ldots & b_{1n}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^{(2)} & \ldots & b_{nn}^{(2)} \end{Vmatrix} |b_{rs}| \leqslant \beta$

Оценим матричные элементы степеней: $b_{rs}^{(2)} = \sum\limits_{q=1}^{n} b_{rq}b_{qs}$; $|b_{rs}^{(2)}| \leqslant n\beta^2$

$b_{rs}^{(3)} = \sum\limits_{q=1}^{n} b_{rq}^{(2)}b_{qs}$; $|b_{rs}^{(3)}| \leqslant n^2\beta^3$, $|b_{rs}^{(m)}| \leqslant n^{m-1}\beta^m$

$\delta_{rs} + \dfrac{b_{rs}}{1!} + \dfrac{b_{rs}^{(2)}}{2!} + \ldots$; $\delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s \\ 0, r \neq s \end{cases}$

Этот ряд мажорируется рядом: $1 + \dfrac{\beta}{1!} + \dfrac{n\beta^2}{2!} + \dfrac{n^2\beta^3}{3!} + \ldots$ – сходится по признаку Д'Аламбера.

Определение: Пусть B – произвольная комплексная $n \times n$ матрица.

$$e^B \overset{def}{=} E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \ldots$$

Свойства:

1. $BC = CB \quad \Rightarrow \quad e^B \cdot e^C = e^{B+C}$
   Доказательство: Ряд для e^B и e^C формально перемножить, собрать члены при одинаковых степенях. Так можно делать, потому что ряды сходятся абсолютно.

2. $(e^B)^{-1} = e^{-B}$
   Доказательство:
   $B \cdot (-B) = -B \cdot B \Rightarrow e^B \cdot e^{-B} = e^{B-B} = e^0 = E$

Функция e^{tA} определяется следующим образом: $e^{tA} = E + \dfrac{tA}{1!} + \dfrac{tA^2}{2!} + \ldots$.

1) $e^{t_1A} \cdot e^{t_2A} = e^{(t_1+t_2)A}$, t_1A и t_2A – перестановочны;

2) $\dfrac{\mathrm{d}e^{tA}}{\mathrm{d}t} = Ae^{tA} = e^{tA}A$, степенной ряд почленно дифференцируемый.

2. Теорема: Рассмотрим уравнение (1). Пусть $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$. Тогда функция

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 e^{(t-t_0)A} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

является решением (1), удовлетворяющим

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \tag{4}$$

Каждое решение задачи (1) $\bigwedge$(4) совпадает на своём отрезке определения с функцией, задаваемой формулой (3); решение задаваемое формулой (3) определено на всём отрезке $[\alpha, \beta]$.
Для (2):

$$z(t) = \vec{z}_0 e^{A(t-t_0)}, \text{где } \vec{z}_0 = \vec{z}(t_0)$$

Доказательство: $y(t) = e^{tA}\vec{u}(t) \quad \left(\vec{u}(t) = e^{-tA}\vec{y}(t)\right)$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}(e^{tA}\vec{u})}{\mathrm{d}t} = Ae^{tA}\vec{u} + \vec{f}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{\mathrm{d}e^{tA}}{\mathrm{d}t}\vec{u} + e^{tA}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = Ae^{tA}\vec{u} + \vec{f}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{Ae^{tA}\vec{u} + e^{tA}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = Ae^{tA}\vec{u} + \vec{f}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{e^{tA}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = e^{-tA}\vec{f}\right\}$$

$$\vec{u}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\tau A} f(\tau)\mathrm{d}\tau + \vec{C},\ \vec{C} - \text{произвольная постоянная}$$

Отсюда $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{C} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{tA}e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$, так как $tA \cdot (-\tau A) = (-\tau A) \cdot tA$.

$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 = e^{t_0 A}\vec{C}$, $\vec{C} = \vec{y}_0 e^{-t_0 A}$. Таким образом,

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 e^{(t-t_0)A} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3. Алгебраический способ вычисления e^{tA}.

Вспомогательные утверждения.

1. $A = CBC^{-1} \Rightarrow e^{tA} = Ce^{tB}c^{-1}$

   Доказательство:

$$\begin{aligned} e^{tA} = &\quad E + t\frac{CBC^{-1}}{1!} + t^2\frac{CBC^{-1}CBC^{-1}}{2!} + \dots \\ = &\quad C(E + t\frac{B}{1!} + t^2\frac{B^2}{2!} + \ \dots)C^{-1} = Ce^{tB}C^{-1} \end{aligned}$$

2. $A = CLC^{-1}$, $L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Тогда $e^{tL} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$

   Доказательство:

$$e^{tL} = E + t\frac{L}{1!} + t^2\frac{L^2}{2!} + \dots, \text{ где}$$
$$L^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) \text{ и т.д.}$$

   Тогда

$$e^{tL} = \mathrm{diag}\left(1 + t\frac{\lambda_1}{1!} + t^2\frac{\lambda_1^2}{2!} + \dots, \dots, 1 + t\frac{\lambda_n}{1!} + t^2\frac{\lambda_n^2}{2!} + \dots\right) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$$

4. Жорданова форма матрицы

Определение: Упорядоченный набор векторов $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$ называется *цепочкой, соответствующей собственному значению* λ линейного преобразования , если:

$$\begin{cases} A\vec{g}_1 = \lambda\vec{g}_1,\ \vec{g}_1 \neq \vec{0} \\ A\vec{g}_2 = \lambda\vec{g}_2 + g_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\vec{g}_k = \lambda\vec{g}_k + \vec{g}_{k-1} \end{cases}$$, где векторы $\vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ — присоединенные к вектору $\vec{g}_1$.

Теорема: (Жордана) Пусть A – линейное преобразование в комплексном линейном пространстве. Тогда существует базис этого пространства, составленный из цепочек (*Жорданов базис*).

$A = \begin{Vmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N \end{Vmatrix}$, где каждая клетка J_r соответствует отдельным цепочкам.

$J_r \stackrel{def}{=} \begin{Vmatrix} \lambda_r & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_r \end{Vmatrix}$ — Жорданова клетка размера $k_r \times k_r$.

$e^{tA} = \begin{Vmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_N} \end{Vmatrix}$, так как $A^n = \begin{Vmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} J_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N^n \end{Vmatrix}$

$e^{tA} = \begin{Vmatrix} E & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} t\dfrac{J_1}{1!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t\dfrac{J_N}{1!} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} t^2\dfrac{J_1^2}{2!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^2\dfrac{J_N^2}{2!} \end{Vmatrix} + \ldots$

Найдём e^{tJ}. $J = \lambda E + Q$, где $Q = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{Vmatrix}$; $t\lambda E$ и tQ — перестановочны, поэтому

$$e^{t(\lambda E + Q)} = e^{t\lambda E} \cdot e^{tQ} = e^{t\lambda} E e^{tQ} = e^{t\lambda} \cdot e^{tQ}.$$

При каждом умножении матрицы Q на себя, «диагональ», содержащая единицы, смещается на единицу в сторону правого левого угла матрицы. Тогда $Q^{k-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, Q_k – нулевая матрица, также $Q^s = 0$ при $s \geq k$. Тогда

$$e^{tQ} = E + t\frac{Q}{1!} + t^2\frac{Q^2}{2!} + \ldots + t^{k-1}\frac{Q^{k-1}}{(k-1)!}$$

– конечная сумма и

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \left\| \begin{matrix} 1 & t/1! & \dots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t/1! \\ \text{\huge 0} & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

§11. Элементы операционного исчисления

1. Определение преобразования Лапласа.

Определение: Комплексная функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если:

1. f – определена при $0 \leqslant t \leqslant \infty$;
2. f – кусочно-непрерывна (может иметь разрывы только первого рода)
3. f – функция конечного порядка роста, то есть $\exists$ вещественные числа α, M: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, для всех $0 \leqslant t \leqslant \infty$

Теорема: Пусть $f(t)$ — оригинал, $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$, p — комплексное число, такое что $\mathfrak{Re}\, p > \alpha$. Тогда $\int\limits_0^\infty f(t)e^{pt}\mathrm{d}t$ — существует.

Доказательство:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)||e^{-pt}| \leqslant Me^{\alpha t}e^{-t\mathfrak{Re}\, p} = Me^{-(\mathfrak{Re}\, p-\alpha)t},$$

$\mathfrak{Re}\, p - \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^\infty f(t)e^{-(\mathfrak{Re}\, p-\alpha)t}\mathrm{d}t$ сходится, а следовательно по признаку сравнения существует и интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)e^{pt}\mathrm{d}t$.

Определение: Пусть $f(t)$ – оригинал, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Функция $\tilde{f}(p)$, определённая для комплексных p при $\mathfrak{Re}\, p - \alpha > 0$ формулой

$$\tilde{f}(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

называется *изображением по Лапласу* оригинала $f(t)$.

Определение: Переход от $f(t)$ к $\tilde{f}(p)$ — *преобразование Лапласа.*

Далее $\mathfrak{Re}\, p$ достаточно велико.

$$f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(t) \text{ — оригинал} \\ f(p) \text{ — соответствующее изображение} \end{cases}$$

2. Свойства преобразования Лапласа

Теорема: Пусть $f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}(p)$, γ — комплексное число. Тогда

$$\gamma f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \gamma \tilde{f}(p)$$

Теорема: Пусть $f_1(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_1(p)$, $f_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_2(p)$. Тогда

$$f_1(t) + f_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_1(p) + \tilde{f}_2(p)$$

Доказательство: Пусть выполнены условия

$$|f_1(t)| \leqslant M_1 e^{\alpha_1 t},\ |f_2(t)| \leqslant M_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Тогда по неравенству треугольника

$$|f_1(t) + f_2(t)| \leqslant M e^{\alpha t},\ \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2),\ M = M_1 + M_2$$

Теорема: Пусть $f(t)$ — оригинал,

$$F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Тогда $F(t)$ — оригинал.

Доказательство: Пусть $|f(t)| \leqslant M e^{\alpha t}$. Берём $\alpha > 0$. Тогда

$$|F(t)| = \left| \int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \int\limits_0^t M e^{\alpha\tau} = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \leqslant \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t}.$$

Теорема: Пусть $f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}(p)$. Пусть также $f(t)$ непрерывно дифференцируемая,

$$f'(t) = g(t),\ g(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{g}(p).$$

Тогда

$$\tilde{g}(p) = p\tilde{f}(p) - f(0).$$

Доказательство:

$$\tilde{g}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\underbrace{\left(e^{-pt} \cdot f(t)\right)\Big|_0^{+\infty}}_{=0} - \int\limits_0^{+\infty} -pe^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(0) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Теорема: Пусть $f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}(p)$, и выполнены следующие условия:

1. $f(t)$ — m раз непрерывно дифференцируемая, $f^{(m)}(t) = g(t)$.
2. $g(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{g}(p)$

Тогда

$$\tilde{g}(p) = p^m \tilde{f}(0) - p^{m-1} f(0) - p^{m-2} f'(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0)$$

Доказательство:

$$f^{(m-1)}(t) = \int_0^t f^{(m)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau + f^{(m-1)}(0) \text{ — оригинал}$$

$$f^{(m-2)}, \ldots, f'(t) \text{ — оригиналы.}$$

Утверждение доказывается по индукции.

Теорема: Пусть $f(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}(p)$, и выполнены следующие условия:

1. $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая.
2. $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$.
3. $\sigma > \alpha$.

Тогда при $t > 0$ имеет место

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int\limits_{-T}^{T} e^{(\sigma + i\tau)t} \cdot \tilde{f}(\sigma + i\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

При $t = 0$ правая часто даёт не $f(0)$, а $\dfrac{1}{2} f(0)$.

Теорема: Пусть $f_1(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_1(p)$, $f_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_2(p)$. Пусть кроме того, $\tilde{f}_1(p) = \tilde{f}_2(p)$.

$$\text{Тогда } f_1(t) = f_2(t)$$

Доказательство:

$$F_1(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau,\ F_2(t) = \int_0^t f_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$F_1(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{F}_1(p),\ F_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{F}_2(p)$$

$$f_1(t) = F_1'(t),\ \tilde{f}_1(p) = pF_1(p) - f_1(0) = pF_1(p)$$

$$f_2(p) = pF_2(p);\ \tilde{F}_2(p) = \frac{\tilde{f}_1(p)}{p} = \frac{\tilde{f}_2(p)}{p} = \tilde{F}_2(p) \quad \Rightarrow$$

$$F_1(t) = F_2(t), \quad f_1(t) = f_2(t)$$

3. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\varphi(t) = t^k e^{\lambda t}$, λ — комплексное, $0 \leqslant k$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\alpha > \mathfrak{Re}\,\lambda$

Найдём преобразование Лапласа функции φ.

$\varphi(t)e^{\alpha t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, $|\varphi(t)e^{\alpha t}| \leqslant M$, $|\varphi(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$.

Рассматривая p: $\mathfrak{Re}\,p > \alpha$, $\mathfrak{Re}\,(-p+\lambda)$, вычисляем

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^k e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\psi_k \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} t^k e^{-zt}\,\mathrm{d}t,\ \mathfrak{Re}\,z > 0$$

$$\psi_0(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} = \frac{1}{z}$$

$\lambda \leqslant k$:

$$\psi_k(z) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[t^k \cdot \frac{e^{-zt}}{-z}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{kt^{k-1}e^{-zt}}{-z}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{z}\psi_{k-1}(z);$$

Таким образом,

$$t^k e^{\lambda t} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}},\ \text{где } 0 \leqslant k \text{ — целое, } \lambda \text{ — комплексное.}$$

Теорема: Пусть $f(t) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \tilde{f}(p)$, $f(t)$ — квазимногочлен.

Тогда это равносильно тому, что $\tilde{f}(p)$ — правильная рациональная дробь, то есть $\tilde{f}(p) = \dfrac{q(p)}{r(p)}$, где q, r — многочлены, $\deg q < \deg r$.

Доказательство: Очевидно, $\tilde{f}(p) = \sum_s \dfrac{r_s}{(p-\lambda_s)^{k_s+1}}$

Рассмотрим функцию

$$h(t) \overset{def}{=} \sum_s \frac{\gamma_s t^{k_s} e^{\lambda_s}}{k_s!}$$

Тогда $h(t) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \tilde{f}(p) \quad \Rightarrow \quad f(t) = h(t)$

4.

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) \\ 0 \leqslant t < +\infty,\ \ a_i \text{ — комплексные} \\ y(0) = C_0,\ y'(0) = C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

Дополнительное предположение: $f(t)$ — оригинал.

Тогда $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)$ — оригиналы.

Ниже предлагается метод решения такого уравнения:

$$y(t) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \tilde{y}(p);\ y'(t) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} p\tilde{y}(p) - \underbrace{y(0)}_{=C_0}$$

$$y''(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} p^2\tilde{y}(p) - C_0 p - C_1; \dots$$

$$(5) \quad \Leftrightarrow \quad (5')\colon \begin{cases} \tilde{f}(p) = & \tilde{y}(p)p^n - C_0 p^{n-1} - C_1 p^{n-2} - \dots - C_{n-1} + \\ & + a_1\big(p^{n-1}\tilde{y}(p) - p^{n-2}C_0 - \dots\big) + \\ & + \dots \end{cases}$$

$$L(p)\tilde{y}(p) = F(p) \tag{5''}$$

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad F(p) = \tilde{f}(p) + C_0 p^{n-1} + (C_0 + a_1 C_0)p^{n-2} + \dots$$

Из $(5'')$: $\tilde{y}(p) = \dfrac{F(p)}{L(p)}$. Находя обратное преобразование Лапласа функции $\tilde{y}(p)$, получаем общее решение.

Рассмотрим теперь такую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} \\ \vec{y}(0) = \vec{C} \end{cases} \tag{6}$$

Дополнительное предположение: все $f_r(t)$ — оригиналы.

$$f_r(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \tilde{f}_r(p)$$

Тогда все $y_r(t)$ — оригиналы (см. §9)

$$\begin{Vmatrix} \tilde{f}_1(p) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(p) \end{Vmatrix} = \tilde{\vec{f}}(p); \begin{Vmatrix} \tilde{y}_1(p) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(p) \end{Vmatrix} = \tilde{\vec{y}}(p);$$

Из (6):

$$y'_r(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} p\tilde{y}_r(p) - C_r$$

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad p\tilde{\vec{y}}(p) - \vec{C} = A\tilde{\vec{y}}(p) + \tilde{\vec{f}}(p);$$

$$\tilde{\vec{y}}(p) = (pE - A)^{-1}\left(\tilde{\vec{f}}(p) + \vec{C}\right)$$

Такой приём решения задач и называется операционным методом.

5. Заключительные замечания:

Обратить внимание на ограничения. Множества рассматриваются на $(0, +\infty)$. Если не все f_r — оригиналы, то метод неприменим.

Глава 2. Элементы вариационного исчисления

В этой главе все величины вещественные.

Фиксируется класс функций $\mathcal{K}$, рассматриваются функции $F(y)$, где $y \in \mathcal{K}$, $F(y)$ – функционал.

Рассматривается такая задача: найти y: F – min. Это и составляет предмет вариационного исчисления.

§1. Простейшая задача вариационного исчисления

1.

Фиксируем отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$,

$$F(y) \overset{def}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, y(t), y'(t)\big)dt,$$

f – задана при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, y, y' – любые.

Предположение: f непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Определение: Заданы числа y_0, y_1. *Функция* $y(t)$ называется *допустимой*, если она удовлетворяет двум требованиям:

- $y'(t)$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_2]$
- $y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2$

Для того, чтобы подставить функцию в интеграл, достаточно первого условия, но мы сужаем класс функций, на которых рассматривается данный интеграл.

Определение: Допустимая функция $y(t)$ *дает минимум* F, если существует положительное число ε, такое, что для любой допустимой функции $\tilde{y}(t)$, удовлетворяющей условию

$$\underset{t}{max}|y(t) - \tilde{y}(t)| + \underset{t}{max}|y'(t) - \tilde{y}'(t)| < \varepsilon$$

имеет место $F(y) \leqslant F(\tilde{y})$

(1) Найти допустимую функцию, дающую минимум F. (Простейшая задача вариационного исчисления)

2. Возьмем $y(t)$ – любая непрерывно дифференцируемая функция, на отрезке $[t_1, t_2]$, не обязательно подчиненная граничным условиям. Составим семейство функций

$$y(t) + \alpha\eta(t),$$

где $\eta(t)$ – непр. дифф. на $[t_1, t_2]$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\omega(\alpha) \overset{def}{=} F(y(t) + \alpha\eta(t)) = \omega(0) + \alpha\omega'(0) + o(\alpha)$$

Легко сосчитать, что $\omega(0) = F(y)$,

$$\begin{aligned}\omega'(0) &= \left[\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t, y(t) + \alpha\eta(t), y'(t) + \alpha\eta'(t))dt\right]_0 \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2}(f_y\eta + f_{y'}\eta')dt \qquad \left(f_y = \frac{\partial}{\partial y}\big(f(t, y, y')\big)\right)\text{и т.д.}\end{aligned}$$

Определения и обозначения:

- $\alpha\eta(t) = \delta y$ – вариация $y(t)$. (Аналог дифференциала независимого переменного)
- $\alpha\omega'(0) = \delta F$ – первая вариация F. (Линейная часть приращения функционала, аналог первого дифференциала функции)

$$\delta F(y) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[f_y\delta y + f_{y'}(\delta y)'\right]dt$$

Так вычисляется первая вариация функционала по первому дифференциалу независимого переменного (исходной функции).

Это играет такую же роль, как при изучении экстремума в математическом анализе. Вариацией называется “малое изменение”, α – малое число.

Определение: *Вариация* δy называется *допустимой*, если

$$\delta y\big|_{t_1} = \delta y\big|_{t_2} = 0.$$

Имеет место: если $y(t)$ – допустимая функция, то для того, чтобы вариация $\delta y(t)$ была допустимая, необходимо и достаточно, чтобы $y(t) + \delta y(t)$ была допустимая.

Теорема: Пусть $y(t)$ дает минимум F. Тогда $\delta F = 0$ для любой допустимой вариации δy.

Доказательство: Рассмотрим функции $\tilde{y}(t) = y(t) + \alpha\eta(t)$, где $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Тогда для фиксированной функции η имеем:

$$\underset{t}{max}\big|\tilde{y}(t) - y(t)\big| + \underset{t}{max}\big|\tilde{y}'(t) - y'(t)\big| = \big|\alpha\big|\big\{\underset{t}{max}|\eta(t)| + \underset{t}{max}|\eta'(t)|\big\}$$

Поэтому $\omega(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha = 0$. (Для достаточно малых α получаем малое отклонение функции одна от другой.)

Поэтому $\omega'(0) = 0$, $\alpha\omega'(0) = \delta F(y) = 0$. Теорема доказана.

Теорема: Пусть $y(t)$ – дважды непрерывно дифференцируема.

Тогда $\delta F(y) = 0$ для любой допустимой вариации δy тогда и только тогда, когда $y(t)$ удовлетворяет уравнению (Эйлера)

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\dfrac{d}{dt}$ - полная производная, $\dfrac{d}{dt} f_{y'} = f_{y't} + f_{y'y} y' + f_{y'y'} y''$.

Все производные существуют и непрерывны в силу наложенного заранее ограничения.

Доказательство: Преобразуем $\omega'(0) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_y \eta + f_{y'} \eta') dt$. Для этого проинтегрируем по частям:

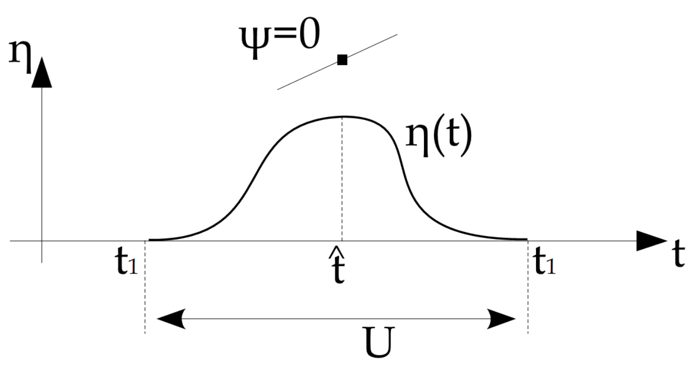
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \big(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\big) \eta dt + \underbrace{\Big[f_{y'} \eta\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t) \eta(t) dt, \quad \psi(t) = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}.$$

1) $\Leftarrow$: очевидно.

2) $\Rightarrow$: от противного. Предполагаем, что $\exists \hat{t}$: $t_1 < \hat{t} < t_2, \psi(\hat{t}) \neq 0$.

Берем U – окрестность точки $\hat{t}$ такую, что функция $\psi(t)$ сохраняет знак (напоминаем, что ψ – непрерывная функция.) Берем функцию $\eta(t)$:

- $\eta(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$
- $\eta(t) \geqslant 0$ на $[t_1, t_2]$, $\eta(\hat{t}) \neq 0$
- $\eta(t) = 0$ вне U.



На концах функция равняется 0. ($\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.)

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t) \eta(t) dt = \int\limits_U \psi(t) \eta(t) \neq 0$$

Мы пришли к противоречию, действительно выполняется уравнение Эйлера.

Определение: Каждое решение уравнения (2) называется *экстремалью* функционала F.

Замечание: Экстремалью называется не решение задачи на экстремум, а решение уравнения Эйлера!

В типичном случае это уравнение второго порядка. Для уравнений второго порядка мы получали, что общее решение зависит от двух произвольных постоянных, поэтому решая это уравнение в типичных случаях получим функцию, зависящую от двух произвольных постоянных. Эти постоянные определяются из граничных условий.

Получаем задачу

$$(2) \wedge \big\{y(t_1) = y_1\big\} \wedge \big\{y(t_2) = y_2\big\}.$$

Вовсе не утверждается, что эта задача имеет решение, или даже единственное. Но тем не менее, эта задача разумна. Пусть мы смогли решить эту задачу. Из этого *не следует*, что найденное решение будет давать минимум. (Аналогия с матанализом: если первый дифференциал равен нулю, то это ещё не экстремум)

Задача:

Дано: $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$, $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$.

$$F = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (y')^2} dt$$

Нужно найти кратчайшую кривую, соединяющую эти точки. (Функционал, дающий минимум F)

$$\underbrace{f_y}_{=0} - \underbrace{f_{y't}}_{=0} - \underbrace{f_{y'y}y'}_{=0} - f_{y'y'}y'' = 0, \quad f = \sqrt{1 + (y')^2}$$

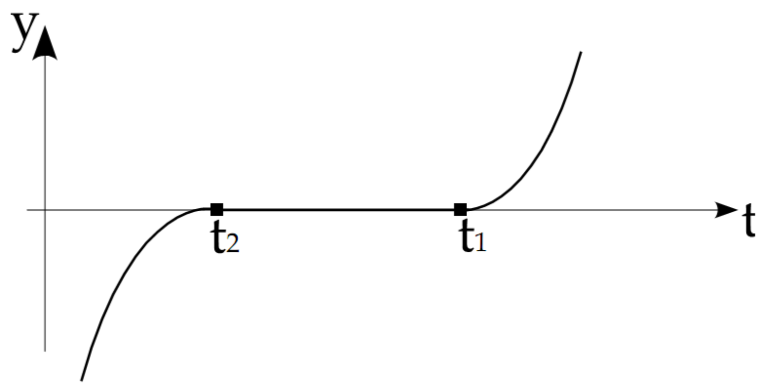
$$f_{y'y'}y'' = 0.$$

$$f_{y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

$$f_{y'y'} = \frac{1 \cdot \sqrt{1 + (y')^2} - y' \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}}{1 + (y')^2} = \frac{1 + (y')^2 - (y')^2}{(\sqrt{1 + (y')^2})^3}$$

Решением $y'' = 0$ является $y = c_1 t + c_2$, c_1, c_2 – константы. Таким образом, кратчайший путь – прямая (отрезок).

Замечание: Мы на самом деле ничего не доказали. Мы предположили, что этот путь задается однозначной функцией $y = y(t)$, то есть отбросили варианты вида



, предположили, что функция дважды непрерывно дифференцируема. При этих предположениях ответом является отрезок.

3. Функции, непрерывно дифференцируемые, удовлетворяющие данным условиям, называются допустимыми.

$$F - min. \tag{1}$$

$y(t)$ – решение (1) $\Rightarrow$

$$f_y = \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} f_{y'} = f_{y'} + f_{y'y}y' + f_{y'y'}y''$$

Случаи понижения порядка.

1. f не зависит от y, $f(t, y, y') = g(t, y')$

$$-\frac{dg'_y}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{y'}(t, y) = c - \text{const} \tag{2'}$$

2. f не зависит от t, $f(t, y, y') = g(y, y')$ Рассмотрим выражение $g - y'g_{y'}$. Найдем полную производную по t этого выражения.

$$\frac{d}{dt}(g - y'g_{y'}) = g_y \cdot y' + \underline{g_{y'} \cdot y''} - \underline{y'' \cdot g_{y'}} - y'g_{y'y}y' - y'g_{y'y'}y'' = y'\big(g_y - g_{y'y}y' - g_{y'y'}y''\big)$$

$$g_y - g_{y'y}y' - g_{y'y'}y'' = 0 \tag{2''}$$

$$\frac{d}{dt}(g - y'g_{y'}) = 0, \quad g - y'g_{y'} = c - \text{const}$$

$$(2'') \quad \Rightarrow \quad g - y'g_{y'} = \text{const}$$

$$\big\{g - y'g_{y'} = \text{const}\big\} \wedge \big\{y' \neq 0\big\} \quad \Rightarrow \quad (2'').$$

(a) $y' = 0$ в отдельных точках. Тогда $g - y'g_{y'} \quad \Leftrightarrow \quad (2'')$

(b) $y' = 0$ на некотором отрезке. При $y = y_0$ – const выражение $g - y'g_{y'}$ равно нулю. $(2'')$ выполняется, если $g_y(y_0, 0) = 0$. То есть нужно найти те y_0, для которых $g_y(y_0, 0) = 0$.

4. Случай квадратичного функционала.

f – многочлен второй степени относительно совокупности y, y'.

$$f(t, y, y') = p(t)(y')^2 + q(t)y^2 - 2m(t)y.$$

Замечание: Можно возразить, что выписаны не все члены. Но можно показать, что все функции можно привести к такому виду:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)yy'dt = \frac{1}{2}\Big[a(t)y^2(t)\Big]\Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} a'(t)y^2(t)dt,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} b(t)y'dt = \Big[b(t)y(t)\Big]\Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} b'(t)y(t)dt,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} c(t)dt \text{ не зависит от выбора } y(t).$$

Далее предполагаем, что $p'(t)$, $q(t)$, $m(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$.

Вопрос: Как выглядит уравнение Эйлера в этом случае?

Ответ:

$$2qy - 2m - 2(py')' = 0$$

$$-(p(t)y')' + q(t)y = m(t) \quad \Leftrightarrow \quad -py'' - p'y' + qy = m \tag{3}$$

Теорема: Пусть $p(t) > 0$ и $q(t) \geqslant 0$ на $[t_1, t_2]$. Пусть $y(t)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$. Тогда $y(t)$ дает минимум F.

Замечание: До сих пор я подчеркивал несколько раз, что мы выводим уравнение Эйлера, и если уравнение Эйлера выполнялось, нужно было проводить дополнительное исследование. Для конкретно этого важного частного случая такое исследование можно провести.

Доказательство: Берем нашу функцию $y(t)$, какую-то $\eta(t)$, такую, что $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, $\eta(t)$ – непрерывно дифференцируемая, α – число (любое).

$$\tilde{y}(t) \overset{def}{=} y(t) + \alpha y(t)$$

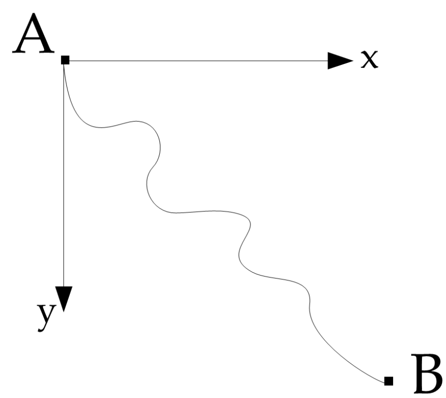
Приращение функционала представляем в виде суммы линейной части и членов более высокого порядка.

$$F(\tilde{y}) = F(y) + \underbrace{\delta F}_{=0} + \alpha^2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(p(t)(\eta')^2 + q(t)\eta^2\Big)dt \geqslant F(y)$$

Мы доказали, что функция дает минимум. Важно: имеется ввиду *глобальный* минимум. Если $\alpha\eta(t)$ не тождественно нулевая функция, то $F(\tilde{y}) > F(y)$.

Замечание: Можно ли гарантировать, что существует решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям? Пока мы не можем ответить на этот вопрос. Во втором семестре мы докажем, что уравнение (3) *имеет* решение, и притом *единственное.*

5. Задача о брахистохроне.



Замечание: В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал работу "задача о брахистохроне". Считается, что эта работа положила начало вариационному исчислению. Была рассмотрена следующая задача: в вертикальной плоскости лежат точки A, B, соединенные некоторой кривой. Под действием силы тяжести по этой кривой скатывается материальная точка. Нужно найти ту кривую, по которой время движения будет минимальным. Эту кривую он назвал брахистохрона (кривая кратчайшего времени, греч.)

Казалось бы, логичнее всего двигаться по отрезку прямой. Оказывается, это не так.

Поместим точку A в начало координат, вертикально вниз направлена ось y, где-то задана точка B.

$$A(0,0), \quad B(x_1, y_1)$$

Ограничимся кривыми, задаваемыми уравнениями $y = y(x), 0 \leqslant x \leqslant x_1$.

v – скорость, $v = v(x, y)$.

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy}, \quad T = \int\limits_{\ell} dt = \int\limits_{\ell} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad F - min$$

Неприятность заключается в том, что на левом конце особенность в нуле. Не будем обращать внимания на эту особенность, а потом посмотрим, во что это нам обойдется.

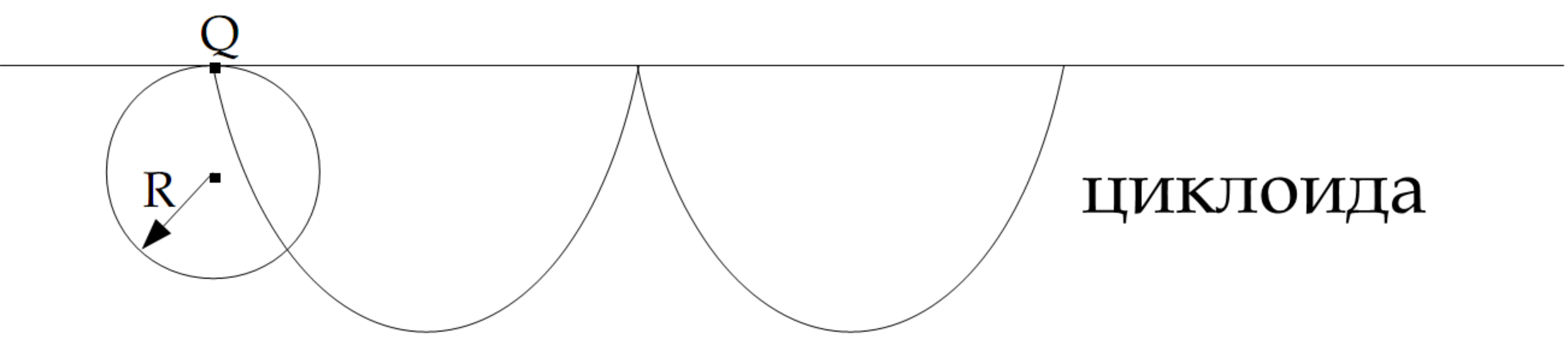
Уравнение Эйлера допускает понижение порядка, потому что подынтегральная функция не зависит от t.

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - y' \cdot \frac{2y'}{2 \cdot \sqrt{y(1+(y')^2)}} = c - \text{ const.}$$

Сразу напишем ответ (легко проверить подстановкой). Рассмотрим функции, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) + Q \\ y = R(q - \cos t) \end{cases},$$

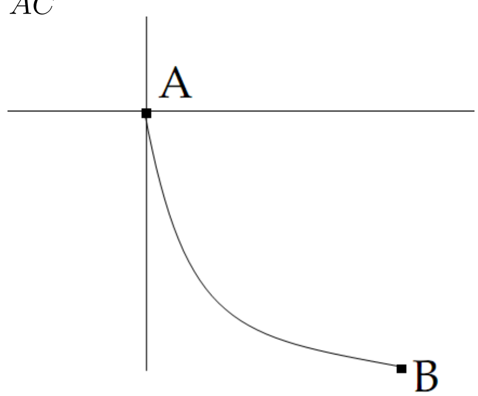
где R и Q – const, t – параметр на решение.



Эта кривая называется циклоидой. (Мы будем брать из нее кусочки)

Возьмем $Q = 0$, тогда $y(0) = 0$. $R =?$

Нарисуем циклоиду, соответствующую $R = 1$, потом изменим нашу циклоиду (растяжением или сжатием) так, чтобы $R = \dfrac{AB}{AC}$. R определена однозначно условием $y(t_1) = y_1$.



Оказывается, брахистохроной является часть циклоиды.

Замечание: Так как Бернулли жил до Эйлера, то он не мог воспользоваться тем приемом, которым пользовались мы, он делал это как-то по-другому. С другой стороны, мы тоже нестрого решили задачу, так как мы пользовались дополнительными предположениями. Путем кропотливой работы можно показать, что найденное нами решение действительно является минимальным.

Замечание: При x близком к 0, $\tau \approx 0$, $x \approx \dfrac{Rt^3}{6}$, $y \approx \dfrac{Rt^3}{2}$.

$x = o(y)$, касательная вертикальна в начальной точке.

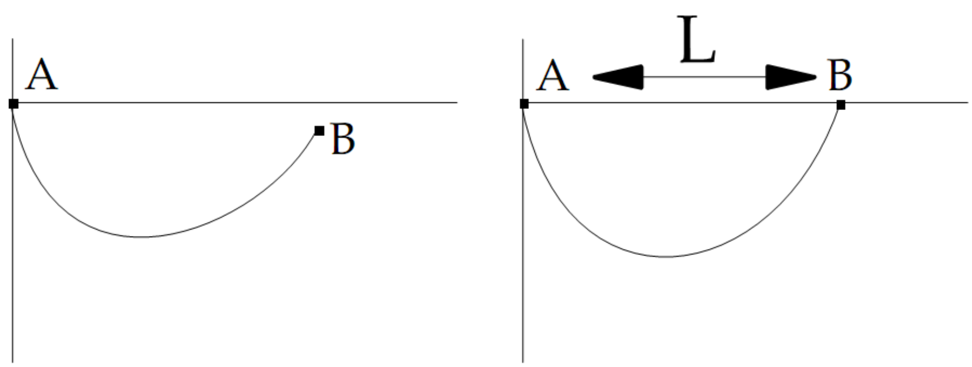
[На лекции было описано геометрическое построение R]

Дадим формулу для времени:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(q - \cos t).$$

$$t = \int\limits_0^{\tau_0} \sqrt{\frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{y}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0 \tau_0 \sqrt{2R} d\tau = \sqrt{\frac{R}{g}} \tau_0$$

Мы до сих пор рассматривали случай, когда B намного ниже точки A. Интересно рассмотреть случай, когда x_1 не мало, y_1 мало. Точка падает, разгоняется, и доходит до точки B. Таким образом, под действием силы тяжести можно передвигаться в горизонтальном направлении.



$$AB = L, \quad R = \frac{L}{2\pi}, \quad \tau_0 = 2\pi$$

$$T = \sqrt{\frac{L}{2\pi q}} \cdot 2\pi = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}$$

Замечание: L = 600 км, $\tau \approx 600$ сек ≈ 10 мин.

§2. Некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.

Замечание: В этом параграфе все используемые функции предполагаются достаточно гладкими. Если захотеть, можно четко посмотреть, где мы пользовались этими предположениями. Этого не делается, чтобы не отвлекаться от основной задачи.

1. Функционалы, зависящие от нескольких функций.

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad \vec{y}(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_m(t) \end{matrix} \right\|, \quad F(\vec{y}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, \vec{y}(t), \vec{y}\,'(t)\big) dt,$$

f — задана, определена при

$$\{t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad \vec{y}, \text{ и } \vec{y}\,' \text{ – любые}\}.$$

$$\vec{y}(t_1) = \vec{a}, \quad \vec{y}(t_2) = \vec{b},\ \vec{a},\ \vec{b} \text{ – заданы.}$$

Определение: Допустимая функция $\vec{y}(t)$ дает минимум F, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любой допустимой функции $*\vec{y}(t)$, удовлетворяющей условию

$$\max_t \big|\vec{y}(t) - *\vec{y}(t)\big| + \max_t \big|\vec{y}\,'(t) - *\vec{y}\,'(t)\big| < \varepsilon,$$

имеет место

$$F(\vec{y}) \leqslant F(*\vec{y}).$$

Здесь $|\vec{u}| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}}$, $\vec{u} = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_m(t) \end{matrix} \right\|$

$$F \text{ – } \min. \tag{1}$$

Теорема: Пусть допустимая функция $\vec{y}(t)$ дает минимум F. Тогда выполняется система уравнений (Эйлера)

$$f_{y_k} - \frac{d}{dt} f_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

$\left(\dfrac{d}{dt} \text{ — полная производная по } t\right)$.

Доказательство: Доказательство аналогично тому, что происходит в математическом анализе. Фиксируется только одна переменная. Раз достигается минимум по совокупности, значит достигается минимум по данной конкретной переменной. Отсюда следует, что соответствующая производная равна нулю. Вместо слов "переменная" используется "допустимая функция", и так далее.

Определение: Каждое решение системы (2) называется экстремалью функционала F.

Замечание: Не гарантируется, что экстремаль дает минимум.

2. Функционалы, зависящие от производных высших порядков. Фиксируем отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$, рассматриваем функционал

$$F(y) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)\big) dt.$$

f — задана, определена при $\big\{t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad y, y', \ldots y^{(m)}\big\}$ — любые.

Определение: Функция $y(t)$ называется допустимой, если

$$\begin{aligned} y(t_1) = a_0, \quad y'(t_1) = a_1, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)}(t_1) &= a_{m-1}, \\ y(t_2) = b_0, \quad y'(t_2) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)}(t_2) &= b_{m-1}, \end{aligned}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \quad b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ — заданы.

Определение: Допустимая функция $y(t)$ дает минимум F, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любой допустимой $g(t)$, удовлетворяющей условию

$$\underset{t}{max}\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| + \underset{t}{max}\big|y\,'(t) - \tilde{y}\,'(t)\big| < \varepsilon,$$

имеет место

$$F(y) \leqslant F(\tilde{y}).$$

Задача нахождения минимума:

$$F(y) – \min. \tag{3}$$

Теорема: Пусть допустимая функция $y(t)$ дает минимум F. Тогда $y(t)$ удовлетворяет уравнению (Эйлера)

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} f_{y^{(m)}} = 0. \tag{4}$$

$\left(\dfrac{d}{dt} \text{ — полная производная по } t\right)$.

Доказательство: Мы взяли нашу функцию $y(t)$. Берем какую либо гладкую функцию $\eta(t)$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} \eta(t_1) = \eta'(t_1) = \ldots = \eta^{(m-1)}(t_1) = 0, \\ \eta(t_2) = \eta'(t_2) = \ldots = \eta^{(m-1)}(t_2) = 0, \end{aligned}$$

и составляем семейство функций

$$\tilde{y} \overset{def}{=} y(t) + \alpha\eta(t), \quad \alpha \text{ – число (малое).}$$

Составляем вспомогательную функцию

$$\omega(\alpha) \overset{def}{=} F(y + \alpha\eta) = \omega(0) + \alpha\omega'(0) + o(\alpha), \quad \omega(0) = F(y)$$

$$\begin{aligned}
\omega'(0) &= \left[\frac{d}{dt}\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', \ldots, y^{(m)}+\alpha\eta^{(m)})dt\right]_{\alpha=0} \\
&= \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_{y''}\eta'' + \ldots + f_{y^{(m)}}\eta^{(m)})dt
\end{aligned}$$

$\Big($Используем обозначения $f_y = f_y(t, y, y', \ldots, y^{(m)})$ $\Big)$

Затем интегрируем по частям:

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f_y - \frac{d}{dt}f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}f_{y''} - \ldots + (-1)^m\frac{d^m}{dt^m}f_{y^{(m)}} +$$

Когда интегрируем по частям, понижаем порядок η, и,
как нетрудно сообразить, последний член будет иметь именно такой вид.
Остальные слагаемые появляются при интегрировании по частям:

$$+\Big[f_{y'}\eta\Big]_{t_1}^{t_2} + \underbrace{\Big[f_{y''}\eta'\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \underbrace{\Big[\frac{d}{dt}f_{y''}\eta\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\Big[f_{y^{(m)}\eta^{((m-1)}}\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \underbrace{\Big[\frac{d\ f_{y^{(m-1)}}}{dt}\eta^{(m-1)}\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \ldots$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t)dt = 0, \quad \psi(t) = f_y - \frac{d}{dt}f_{y'} + \ldots + (-1)^m\frac{d^m}{dt^m}f_{y^{(m)}}.$$

Покажем, что $\psi(t) = 0$. Допустим, это не так,

$$\psi(\hat{t}) \neq 0, \quad t_1 < \hat{t} < t_2.$$

[Тут нет рисунка, нарисуйте его сами]

$\psi(t)$ сохраняет знак в окрестности U точки $\hat{t}$.

$$\eta(t)\colon \eta(t) \leqslant 0 \text{ на } [t_1, t_2], \quad \eta(\hat{t}) > 0, \quad \eta(t) = 0 \text{ вне } U.$$

$\big(\eta(t)$ — гладкая!$\big)$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t)dt = \int\limits_{U} \psi(t)\eta(t)dt \neq 0.$$

Теорема доказана.

Определение: Каждое решение уравнения (4) называется экстремалью функционала F.

Замечание: Эта задача разумная. Но не утверждается, что эта задача имеет решение, или даже единственное. Если удастся найти решение, отсюда не следует, что на решении достигается минимум. (Оно лишь является кандидатом). Проблема достаточности не затрагивается.

3. Задача со свободным концом. Фиксируем отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$,

$$F(y) \stackrel{def}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, y(t), y'(t)\big)dt,$$

f — задана, определена при $\big\{t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ y,\ y' \text{ – любые}\big\}$.

Определение: Допустимая функция $y(t)$ дает минимум F, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любой допустимой функции $\tilde{y}(t)$, удовлетворяющей условию

$$\max_t \big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| + \max_t \big|y'(t) - \tilde{y}'(t)\big| < \varepsilon,$$

имеет место

$$F(y) \leqslant F(\tilde{y}).$$

Замечание: Данное определение дословно повторяет определение допустимой функции, данное в первом параграфе. Однако там "*допустимый*" подразумевало то, что функция удовлетворяет начальным условиям на обоих концах, а сейчас только на левом.

Определение: Пусть допустимая функция $y(t)$ дает минимум F. Тогда $y(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0. \tag{6}$$

и граничному условию

$$\Big[f_{y'}\Big]_{t=t_2} = 0. \tag{7}$$

Доказательство: Берем $y(t)$,

$$\eta(t) \colon \eta(t_1) = 0, \quad \alpha \text{ – число (малое).}$$

$$\tilde{y} = y(t) + \alpha\eta(t), \quad \omega(\alpha) = F(y + \alpha\eta)$$

$\omega(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$, $\omega'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_y\eta + f_{y'}\eta')dt \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_y - \frac{d}{dt} f_{y'})\eta dt + \Big[f_{y'}\eta\Big]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t)dt + \Big[f_{y'}\eta\Big]_{t=t_2}, \quad \psi = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \end{aligned}$$

Сначала возьмем $\eta(t_2) = 0$.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t)dt = 0,$$

откуда $\Big[f_{y'}\eta\Big]_{t=t_2}$. Берем $\eta(t_2) \neq 0$. Получаем

$$\Big[f_{y'}\Big]_{t=t_2} = 0.$$

Замечание: Условие (7) называется *естественным граничным условием* для F.

Некоторые итоги. Было рассмотрено несколько обобщений: когда функций много, но производные второго порядка, когда функция одна, но производных много, и когда граничное условие одно. Что делать, если встречается смешанная задача? Громоздко формулировать такую теорему, но метод решения таких задач ясен: он вытекает из приведенных выше рассуждений.

4. Обязательная задача.

Фиксируется отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$, $z(t)$,

$$F(y,z) \stackrel{def}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t,y,y',y'',z,z',z'',z''')dt.$$

Не задано никаких граничных условий. Написать систему уравнений Эйлера, вывести естественные условия. Рекомендуется это сделать, чтобы осознать, что решение первых трех пунктов дает метод для исследования более сложных случаев.

§3. Условный экстремум

В этом параграфе все функции достаточно гладкие.

1. Изопериметрическая задача.

$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $y(t)$,

$$F(y) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t,y(t),y'(t)\big)\,\mathrm{d}t,\; G(y) = \int\limits_{t_1}^{t_2} g\big(t,y(t),y'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

$F(y)$, $G(y)$ — заданные функции, f и g определены при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, y и y' — любые.

Определение: Функция $y(t)$ называется допустимой, если

$$y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2, \quad G(y) = \ell,$$

где y_1, y_2, ℓ — заданы.

Определение: Допустимая функция $y(t)$ дает минимум F, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех допустимых функций $\tilde{y}(t)$, удовлетворяющих условию

$$\max_t\big|y(t)-\tilde{y}(t)\big| + \max_t\big|y'(t)-\tilde{y}'(t)\big|$$

имеет место $F(y) \leqslant F(\tilde{y})$.

Теорема: Пусть допустимая функция $y(t)$ дает минимум F, и $y(t)$ не является экстремумом функционала G. Тогда существует число λ такое, что $y(t)$ — экстремаль функционала $H = F + \lambda G$, то есть удовлетворяет уравнению

$$h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_\psi = 0,$$

где $h = f + \lambda g$.

Доказательство: Пусть $y(t)$ — решение задачи.

$$\eta_0 \colon \eta_0(t_1) = \eta_0(t_2) = 0,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(g_y\big(t, y(t), y'(t)\big)\eta(t) + g_{y'}\big(t, y(t), y'(t)\big)\eta_0'(t) \Big) \,\mathrm{d}t \neq 0.$$

$\eta_0(t)$ существует, так как $y(t)$ не является экстремалью функционала G.

$$y(t) + \alpha\eta_0(t) + \beta\eta(t),$$

$\eta(t_1) = \eta(t_2)$, α и β — числа (малые).

$$\omega(\alpha, \beta) \overset{def}{=} F(y + \alpha\eta_0 + \beta\eta), \quad \varphi(\alpha, \beta) \overset{def}{=} G(y + \alpha\eta_0 + \beta\eta).$$

$\alpha = \beta = 0$ — решение задачи: найти минимум ω при условии $\varphi = \ell$. Тогда:

$$\exists \lambda \colon \left. \frac{\partial(\omega + \lambda\varphi)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial(\omega + \lambda\varphi)}{\partial\beta} \right|_{\alpha=\beta=0} = 0.$$

Из первого равенства следует:

$$\left. \frac{\partial(\omega + \lambda\varphi)}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=\beta=0} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} \big(f_y\eta_0 + f_{y'}n_0' + \lambda(g_y\eta_0 + g_{y'}\eta_0') \big) = 0$$

$$\lambda = -\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} f_y\eta_0 + f_{y'}\eta_0' \right) \Bigg/ \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} (g_y\eta_0 + g_{y'}\eta_0') \,\mathrm{d}t \right)$$

λ не зависит от выбора $\eta(t)$. Посмотрим, что дает второе равенство:

$$\left. \frac{\partial(\omega + \lambda\varphi)}{\partial\beta} \right|_{\alpha=\beta=0} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[(f_y + \lambda g_y)\eta + (f_{y'} + \lambda g_{y'})\eta' \big] \,\mathrm{d}t = 0.$$

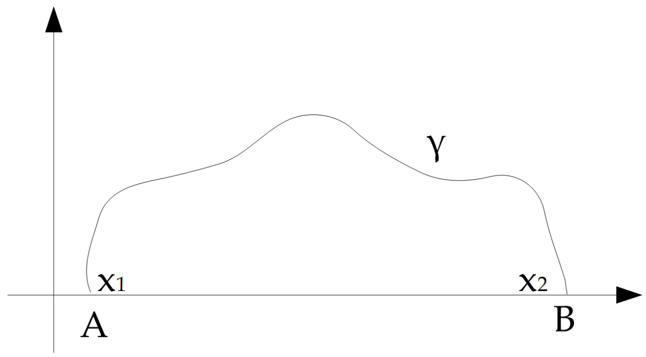
$$h = f + \lambda g, \qquad h \text{ не зависит от выбора } \eta.$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (h_y\eta + h_{y'}\eta') \,\mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{y'} = 0. \text{ (см. §1)}$$

Замечание: Мы получили уравнение Эйлера для функцонала H. В типичном случае мы получим решение в виде уравнения второго порядка, y будет функцией от t, c_1, c_2, λ,

$$y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2, \quad G(y) = \ell.$$

Задача: На плоскости заданы две точки A и B. Соединяем их отрезком, рассматриваем некоторую соединяющую их кривую γ. Надо выбрать ее так, чтобы длина кривой была постоянной, и площадь ограниченной фигуры была максимальна.



Выберем координаты так, чтобы отрезок AB лежал на оси O_x.

$$\gamma \colon y = y(x), \quad y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad x_1 < x_2.$$

$$F(y) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)dx, \quad G(x) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

$G(y) = \ell$ — задано, $F(y)$ — max.

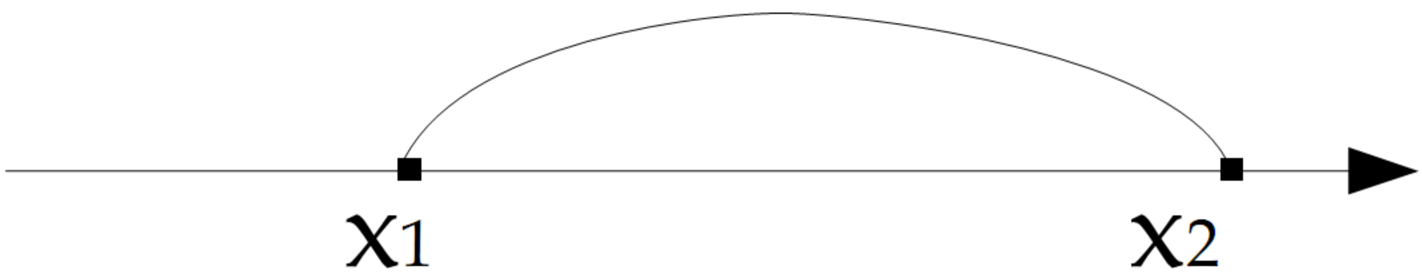
$$h = -y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}; \quad H = \int\limits_{x_1}^{x_2} \big(- y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}\big)dx$$

Решая уравнение Эйлера, получаем:

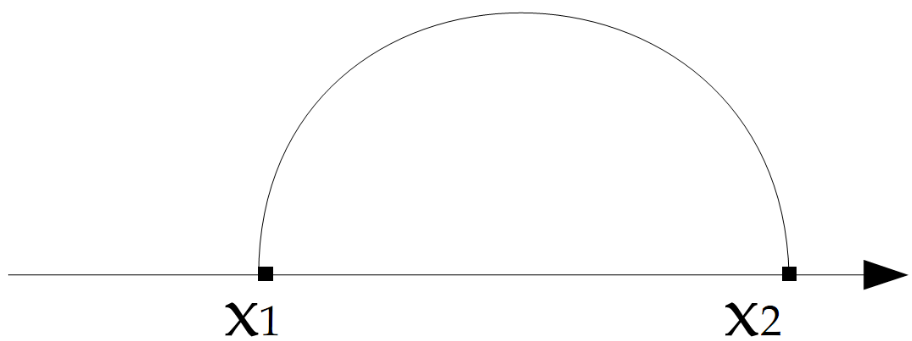
$$(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = \lambda^2$$

Если задача имеет решение, то это решение — дуга окружности. Рассмотрим несколько случаев:

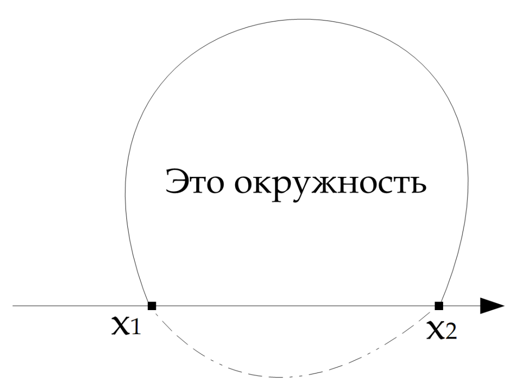
1. $\ell < x_2 - x_1$. Задача не имеет решения. (Множество допустимых функций пусто)
2. $\ell = x_2 - x_1$. Допустимая функция – только отрезок $[x_1, x_2]$.
3. $\ell > x_2 - x_1$, $\ell < \dfrac{\pi}{2}(x_2 - x_1)$. В этом случае получается дуга, которая является гладкой кривой.



4. $\ell = \dfrac{\pi}{2}(x_2 - x_1)$. Получим полуокружность, $|y'| = \infty$ на концах.



5. $\ell > \dfrac{\pi}{2}(x_2 - x_1)$. Получим дугу окружности.



Кривая не представляется уравнением какой-нибудь функции.

Замечание: Под нашу теорию подходит только случай 3). Можно показать, что решение в случаях пунктов 3), 4), 5) действительно является искомым. Данная задача является изопериметрической в буквальном смысле. Эта конкретная задача дала название всему класса задач, который мы рассматриваем, несмотря на то, что функционал G может не давать длину, а какое-нибудь другое значение. другое значение

2. Задача Лагранжа

$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $\begin{Vmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix}$,

$$F(y,z) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\bigl(t, y(t), z(t), y'(t), z'(t)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

Дана функция $g(t,y,z)$. Заданные функции f и g определены при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, остальные аргументы — любые.

Определение: Пара $\begin{Vmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix}$ допустимая, если

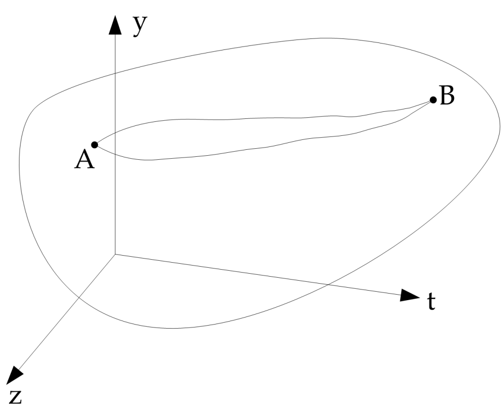
1. $g\bigl(t, y(t), z(t)\bigr) = 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.
2. $y(t_1) = y_1$, $z(t_1) = z_1$, $y(t_2) = y_2$, $z(t_2) = z_2$, где y_1, z_1, y_2, z_2 — заданы (разумеется $g(t, y_1, z_1) = 0$, $g(t_2, y_2, z_2) = 0$.)

Определение: Допустимая пара $\begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix}$ дает минимум функционала F, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой пары $\begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix}$, удовлетворяющей условию

$$\max_t \sqrt{(y(t) - \tilde{y}(t))^2 + (z(t) - \tilde{z}(t))^2} + \max_t \sqrt{(y'(t) - \tilde{y}'(t))^2 + (z'(t) - \tilde{z}'(t))^2} < \varepsilon,$$

имеет место $F(y,z) \leqslant F(\tilde{y}, \tilde{z})$.

Геометрический смысл задачи Лагранжа:



Задана поверхность П, рассматриваются кривые, соединяющие данные две точки, и лежащие на данной поверхности. Среди этих кривых надо найти ту, которая дает минимум функционала F.

Замечание: Если мы можем выразить, скажем, y через t и z, то надо это сделать и получить простейшую задачу вариационного исчисления. Сейчас мы рассматриваем общий случай, когда такая ситуация не имеет место.

Теорема: Пусть допустимая пара $\begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix}$ даёт минимум F. Пусть в каждой точке кривой $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ имеет место

$$\{\frac{\partial y}{\partial y} \neq 0\} \bigvee \{\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0\}.$$

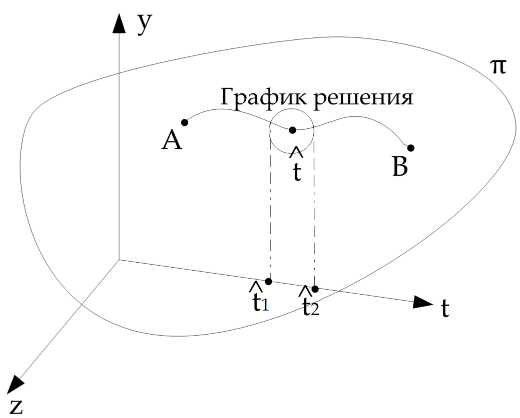
Тогда существует функция $\lambda(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ такая, что пара $\begin{Vmatrix} y \\ z \end{Vmatrix}$ является экстремалью функционала $H(y, z)$, где

$$H(y, z) \overset{def}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} h(t, y, z, y', z')\,\mathrm{d}t, \quad h = f + \lambda g.$$

То есть, удовлетворяется система уравнений

$$\begin{cases} h_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{y'} = 0, \\ h_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{z'} = 0. \end{cases}$$

Доказательство:



Поверхность задана уравнением $g = 0$. Берем любую точку $\hat{t}$ на кривой, удовлетворяющую условию $\hat{t} \in (t_1, t_2)$. Затем проведем построения в некоторой окрестности этой точки.

$$y(\hat{t}) = \hat{y}, \quad z(\hat{t}) = \hat{z}.$$

Пусть в этой точке частная производная $\dfrac{\partial g}{\partial z}(\hat{t}, \hat{y}, \hat{z})$ не равна нулю. Существует окрестность точки U точки $\hat{t}, \hat{y}, \hat{z}$, для которой $g(t, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = a(t, y)$. (Это следует из теоремы о неявной функции.)

Возьмем $\hat{t_1} < \hat{t} < \hat{t_2}$.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t, y, z, y', z')\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{\hat{t_1}} (\cdots) + \int\limits_{\hat{t_1}}^{\hat{t_2}} \hat{f}\big(t, y, y'\big)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\hat{t_2}}^{t_2} (\cdots), \text{ где}$$

$$\hat{f}(t,y,y') = f\Big(t,y,a(t,y),y',a_t(t,y)+a_y(t,y)y'\Big)$$

На отрезке $[\hat{t_1},\hat{t_2}1]$ функция $y(t)$ — экстремаль $\int\limits_{\hat{t_1}}^{\hat{t_2}} \hat{f}\,\mathrm{d}t$.

$$\hat{f}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{f}_{y'} = 0.$$

Выразим производные:

$$\hat{f}_y = f_y + f_z a_y + \underline{f_{z'}a_{ty} + f_{z'}a_{yy}y'}$$

$$\hat{f}_{y'} = f_{y'} + f_{z'}a_y.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{f}_{y'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{z'}\right)a_y + \underline{f_{z'}a_{yt} + f_{z'}a_{yy}y'}$$

По теореме о равенстве смешанных производных, подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$0 = f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'} + \left(f_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{z'}\right)a_y$$

По теореме о неявных функциях,

$$a_y = -\frac{g_y}{g_z}$$

Значит, последнее равенство можно записать в виде

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'} - \left(f_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{z'}\right)\frac{g_y}{g_z} = 0.$$

$$\frac{f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'}}{g_y} = \frac{f_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{z'}}{g_z}$$

Вопрос: Если $g_y = 0$?

Ответ: Можно трактовать равенство следующим образом: хотя бы один из знаменателей отличен от нуля; если оба знаменателя отличны от нуля, то это обычное равенство. Если один из знаменателей равен нулю, то соответствующий числитель тоже равен нулю.

Введем функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) \overset{def}{=} -\frac{f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'}}{g_y} = -\frac{f_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{z'}}{g_z}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

$h \overset{def}{=} f + \lambda g$.

$$h_y = f_y + \lambda g + y, h_{y'} = f_{y'}$$

$$h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{y'} = f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{y'} + \lambda g_y = 0$$

Первое уравнение удовлетворяется. Аналогично показываем, что удовлетворяется и второе. Теорема доказана.

Замечание: Здесь $y = y(t,c_1,c_2,c_3,c_4,\lambda(t))$, $z = z(t,c_1,c_2,c_3,c_4,\lambda(t))$. Находим параметры из граничных условий и из равенства $g(t,y,z) \equiv 0$.

Глава 3. Исследование задачи Коши

§1. Вспомогательные сведения

1. Рассмотрим матрицу A из функций a_{pq},

$$A(z_1, ..., z_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$a_{pq} = a_{qp}(z_1, ..., z_r)$ где n, m — фиксированные числа, $z_1, \dots, z_r$ — вещественные переменные, a_{pq} — вещественные или комплексные (нужно уточнить).

Определение: $A(z_1, ..., z_n)$ непрерывна $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ все a_{pq} непрерывны.

2.

Определение: Если задана функция $\vec{y}(\vec{x})$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, то

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{y_1}}{\partial \vec{x_1}} & \dots & \dfrac{\partial \vec{y_1}}{\partial \vec{x_m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \vec{y_n}}{\partial \vec{x_1}} & \dots & \dfrac{\partial \vec{y_n}}{\partial \vec{x_m}} \end{pmatrix}$$

Задача: Доказать, что если $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{z})$ $\vec{(y)} = (\vec{x}(\vec{z}))$, то $\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{z}} = \dfrac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{z}}$

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, a_{ij} — вещественные или комплексные.

Определение: *Норма матрицы*:

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Свойства:

1. Пусть $A + B$ определено. Тогда
$$|A + B| \leq |A| + |B|$$

2. Пусть AB определено. Тогда
$$|AB| \leq |A||B|$$

Доказательство:

$$C = AB,\ C = \|c_{rs}\|,\ c_{rs} = \sum_p a_{rp} b_{ps}$$

$$|c_{rs}|^2 = \sum_p a_{rp}b_{ps} \leq \sum_p |a_{rp}|^2 \sum_q |b_{qs}|^2$$

$$|C|^2 = \sum_{r,s} |c_{rs}|^2 \leq \sum_{r,s} \left(\sum_p |a_{rp}|^2 \sum_q |b_{qp}|^2 \right) = \sum_{r,p} |a_{rp}|^2 \sum_{q,s} |b_{qs}|^2 = |A|^2 |B|^2$$

3. Если α — комплексное число, то $|\alpha A| = |\alpha||A|$

4. Теорема: Пусть $\vec{f} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\vec{x}$ — вещественный, $\vec{f}$ — вещественная или комплексная, и выполнены следующие условия:

1. Функция $\vec{f}(\vec{x})$ определена в замкнутой области $\bar{G}$.
2. $\vec{f}$ и $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$ непрерывны в $\bar{G}$.
3. отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]$ лежит в $\vec{G}$

Тогда

$$|\vec{f}(\vec{b}) - \vec{f}(\vec{a})| \leq \max_{\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]} \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right| |b - a|$$

Доказательство: Рассмотрим

$$\vec{\omega}(t) \overset{def}{=} \vec{f}(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{f}(\vec{b}) - \vec{f}(\vec{a}) = \vec{\omega}(1) - \vec{\omega}(0) = \int\limits_0^1 \vec{\omega}'(t) dt = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} (\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))(\vec{b} - \vec{a}) \right) dt$$

$$|\vec{f}(\vec{b}) - \vec{f}(\vec{a})| \leq \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} (\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))(\vec{b} - \vec{a}) \right) dt \leq \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} (\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \right| |\vec{b} - \vec{a}| dt \leq \max_{\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]} \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right| |b - a|$$

5. Теорема: (**Лемма Гронуолла**).

Пусть при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ определена вещественная функция $f(t)$.

Пусть $f(t)$ непрерывна и удовлетворяет на $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ соотношению

$$f(t) \leqslant A + B \int\limits_\alpha^t f(\tau) d\tau, \tag{1}$$

где A и B - вещественные числа, $B \geqslant 0$. Тогда при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ имеет место

$$f(t) \leq A e^{B(t - \alpha)}$$

Доказательство: Из (1) получаем :

$$\underbrace{Be^{-Bt}f(t) - B^2e^{-Bt}\int\limits_\alpha^t f(\tau)d\tau}_{\frac{d}{dt}(Be^{-Bt}\int\limits_\alpha^t f(\tau)d\tau)} \leq ABe^{-Bt} \tag{2}$$

$$Be^{-Bt}\int\limits_\alpha^t f(\tau)d\tau \leq \int\limits_\alpha^t ABe^{-B\tau}d\tau = A(e^{-B\alpha} - e^{-Bt})$$

$$B\int\limits_\alpha^t f(\tau)d\tau \leq Ae^{B(t-\alpha)} - A$$

§2. О приближенных решениях.

Замечание: Далее в §2 -§5 все величины вещественны.

Пусть n фиксированное, $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}), \tag{1}$$

где $\vec{f}$ определена в замкнутой области $\vec{G}$

Определение: Функция $\vec{\varphi}(t)-$ *ε-приближенное решение* ($\varepsilon \geq 0$) уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполняется:

1. $\vec{r}(t)$ определена на некотором $[\alpha, \beta], \alpha < \beta$
2. $\vec{\varphi}(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$
3. $\vec{r}(t)$ кусочно непрерывна на $[\alpha, \beta]$
4. на $[\alpha, \beta]$ в точках непрерывности $\vec{\varphi}'(t)$ имеет место

$$\left|\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt} - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))\right| \leqslant \varepsilon$$

Теорема: Пусть $\vec{\varphi}_1(t)$ и $\vec{\varphi}_2(t)$ — два ε-приближенных решения уравнения (1). Пусть выполнены следующие условия:

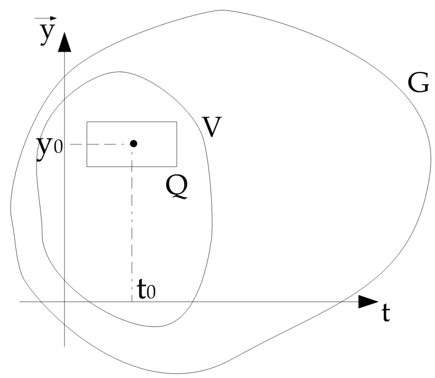
1. $\vec{\varphi}_1(t_0) = \vec{\varphi}_2(t_0) = \vec{y}_0$
2. Графики $\vec{\varphi}_1(t)$ и $\vec{\varphi}_2(t)$ не выходят из цилиндра $Q = \{|t - t_0| \le \alpha, |\vec{y} - \vec{y}_0| \le \beta\}$
3. $\vec{f}$ и $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ непрерывны в некоторой области $\vec{G}$, $Q \subset \vec{G}$

Обозначим $\mathcal{K} = \max_Q \left|\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\right|$. Тогда

$$\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_2(t) \le 2\varepsilon\alpha e^{\mathcal{K}\alpha}$$

для тех t, для которых $\vec{\varphi}_1(t)$ и $\vec{\varphi}_2(t)$ определены.

Доказательство:



$$\vec{\varphi}_1'(t) = \vec{f}(t, \vec{\varphi_1}(t)) + \vec{\delta}_1(t)$$

в точках непрерывности $\vec{\varphi}_1$,

$$|\vec{\delta}_1(t)| \le \varepsilon$$

$$\vec{\varphi}_1(t) = \vec{\varphi}_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(t, \vec{\varphi}_1(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\delta}_1(\tau)d\tau$$

$$\vec{\varphi}_2(t) = \vec{\varphi}_2(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(t, \vec{\varphi}_1(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\delta}_2(\tau)d\tau,$$

$$\left|\vec{\delta}(\tau)\right| \le \varepsilon$$

$$\vec{\varphi}_1(t)\vec{\varphi}_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\vec{f}(t, \vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}_2(\tau))\right) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\delta}_1(\tau) - \vec{\delta}_2(\tau))d\tau$$

$$z(t) = |\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_2(t)|$$

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t}(\vec{\delta}_1(\tau)-\vec{\delta}_2(\tau))d\tau\right| \leq 2\varepsilon\alpha$$

$$\left|\vec{f}(t,\vec{\varphi}_1(\tau))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}_2(\tau))\right| \leqslant \mathcal{K}\left|\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_2(t)\right| = \mathcal{K}\vec{z}(t)$$

$$\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_2(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t}\left(\vec{f}(t,\vec{\varphi}_1(\tau))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}_2(\tau))\right)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\vec{\delta}_1(\tau)-\vec{\delta}_2(\tau)\right)d\tau$$

$$z(t) \leq 2\varepsilon\alpha + \mathcal{K}\int\limits_{t_0}^{t}\vec{z}(\tau)d\tau$$

Мы взяли для определенности $t \geq t_0$.

$$z(t) \leqslant 2\varepsilon\alpha e^{\mathcal{K}(t-t_0)} \leqslant 2\varepsilon\alpha e^{\mathcal{K}\alpha}$$

§3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Замечание: В этом параграфе все величины вещественные. Далее будем иметь дело с наборами чисел вида $\left\|\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix}\right\| \stackrel{def}{=} \vec{Z}$, n — фиксированное для всего параграфа.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t,\vec{y}), \tag{1}$$

f определена в замкнутой области $\bar{G}$.

Определение: Функция $\vec{y}(t)$ — решение (1), если:

1. $\vec{y}(t)$ определена на некотором промежутке $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$,
2. $\vec{y}'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$,
3. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t,\vec{y}(t))$ на $[\alpha,\beta]$
4. Для каждого $\alpha<t<\beta$ точка $(t,\vec{y}'(t))$ — внутренняя точка $\bar{G}$.

Замечание: Что означает условие 4. Мы отбрасываем случаи, когда внутренние точки графика решения лежат на границе нашей области. Допускаются только случаи, когда они лежат внутри этой замкнутой области.

1. Теорема: Пусть $\vec{f}$, $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}$ непрерывны в $\bar{G}$. Пусть $(t_0,\vec{y_0})$ — внутренняя точка $\bar{G}$. Тогда:

1. существует $\alpha > 0$, что на отрезке $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ определено решение уравнения (1), удовлетворяющее условию
$$\vec{y}(t_0) = \vec{y_0} \tag{2}$$

2. Если $\vec{y_1}(t), \vec{y_2}(t)$ — какие-либо решения задачи $(1) \wedge (2)$, то $\vec{y_1}(t) = \vec{y_2}(t)$ на пересечении отрезков их определения.

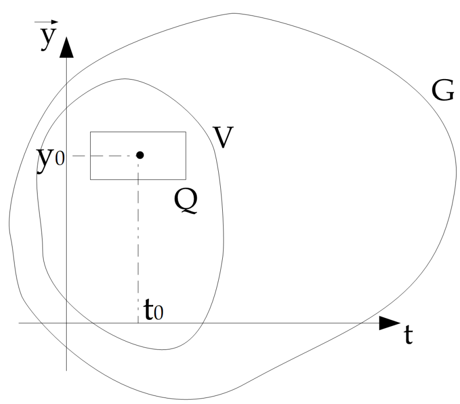
Замечание: во первых фиксируется, что при заданных предположениях задача Коши имеет решение. Пункт второй утверждает единственность этого решение. Обратите внимание: утверждение 1 носит локальный характер. Решение существует в окрестности точки. Пункт 2 же носит глобальный характер.

Доказательство:

1. Возьмём U — какая-либо окрестность $(t_0, \vec{y_0})$, такая, что $\bar{U} \subset \bar{G}$.

   Возьмём $Q\{(t, \vec{y})\colon |t - t_0| \leqslant \alpha,\ |\vec{y} - \vec{y_0}| \leqslant \beta\}$, $0 < \alpha, 0 < \beta, \alpha M \leqslant \beta, Q \in \bar{U}$, где M — максимум нормы $M = \max_{\bar{U}} |\vec{f}|$.

   Обозначим $\omega = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $K = \max_Q \left|\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\right|$. Мы будем строить решение на отрезке ω следующим образом. Берём какое-то положительное $h > 0$, и строим на нашем отрезке сетку:



$$t_k = t_0 + kh,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для зафиксированной сетки строим функцию $\vec{\varphi}(t)$: (далее всё при $t \geqslant t_0$). Если надо провести рассуждения при меньших t, надо сделать замену переменной, поменяв знак.

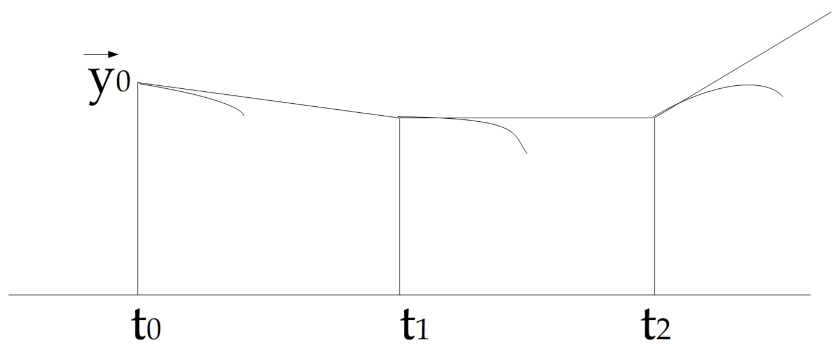
$$\vec{\varphi}(t) = \vec{y_0} + (t - t_0)\vec{f}(t_0, \vec{y_0}) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t_1) + (t - t_1)\vec{f}\,(t_1, \vec{\varphi}(t_1)) \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t_2) + (t - t_2)\vec{f}\,(t_2, \vec{\varphi}(t_2)) \text{ при } t_2 \leqslant t \leqslant t_3$$

Замечание: Мы строим такой отрезок от t_0 до t_1, который касается графика решения в точке (t_0, y_0). Мы доходим до точки t_1. Берём график решения, если он существует, в этой точке, и доходим до t_2. Задавать вопрос «почему решение существует», не нужно. Мы просто строим последовательность значений по этим формулам. Ни на какие соображения мы не ссылаемся.

$$\vec{\varphi}t_{**} - \vec{\varphi}(t_*) = \int\limits_{t_*}^{t_{**}} \vec{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t$$



$\vec{\varphi}'$ — кусочно-непрерывная функция, поэтому можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница. Поэтому

$$\left|\vec{\varphi}(t_{**}) - \vec{\varphi}(t_*)\right| \leqslant |t_* - t_{**}|M.$$

В частности,

$$\left|\vec{\varphi}(t) - \vec{y_0}\right| \leqslant |t - t_0|M \leqslant \alpha M \leqslant \beta.$$

Мы получили кривую, которая через боковые стенки нашего цилиндра не может выйти за пределы нашего цилиндра.

[Тут нет рисунка, нарисуйте его сами]

Следовательно, $\vec{\varphi}(t)$ определена при $|t - t_0| \leqslant \alpha$.

Теперь докажем, что $\vec{\varphi}(t)$ есть ε-приближённое решение (1), $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$. Давайте оценим результат подстановки

$$\sigma(t) = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))\right|$$

в точках непрерывности $\vec{\varphi}'(t)$.

$t_r < t < t_{r+1}\colon\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t_2, \vec{\varphi}(t_2)).$

$$\sigma(t) = \left|\vec{f}(t_2, \vec{\varphi}(t_2)) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))\right|$$

$|t - t_2| \leqslant h$, $|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_2)| \leqslant Mh$, $\vec{f}$ — равномерно непрерывна в Q. $\quad\Rightarrow$

$\sigma(t) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$.

$h_1, h_2, \ldots, h_s > 0, h_s \to 0$ при $s \to \infty$.

$\vec{\varphi_1}(t)$ — ε_s- приближённое решение $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$.

$$|\vec{\varphi_s}(t) - \vec{\varphi_p}(t)| \leqslant 2\varepsilon\alpha e^{k\alpha},$$

$\varepsilon = \max(\varepsilon_s, \varepsilon_p)$. Ссылаемся на теорему, доказанную во втором параграфе.

$$\vec{\varphi_s}(t_0) = \vec{\varphi_p}(t_0) = \vec{y_0}.$$

Используя критерий Коши, получаем

$$\vec{\varphi_1}(t) \rightrightarrows_{\text{на } \omega} \vec{\psi}(t) \text{ при } s \to \infty.$$

$$\vec{\psi}(t) \text{ непрерывна}, \quad \vec{\psi}(t) = \vec{y_0}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi_s}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{\varphi_s}(t)) + \delta_s(t)$$

в точках непрерывности $\vec{\varphi_s}'(t)$.

$$\vec{\varphi_s}(t) = \vec{y_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi_s}(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \delta_s(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\vec{f}(t, \vec{\varphi_s}(t)) \rightrightarrows_{\text{на } \omega} \vec{f}(t, \vec{\psi}(t)) \tag{3}$$

$$\vec{\psi}(t) = \vec{y_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\psi}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{\psi}(t)), \quad \vec{\psi}(t_0) = \vec{y_0}$$

Осталось только проверить, что всякая внутренняя точка графика является внутренней точкой области.

$$|t - t_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |\vec{\varphi}(t)| < M\alpha$$

2. Доказательство единственности решения. Докажем от противного. Пусть существуют два решения задачи (1) $\wedge$ (2) $\vec{y_1}(t)$ и $\vec{y_2}(t)$, $\vec{y_1}(\hat{t}) \neq \vec{y_2}(\hat{t})$.

   Возьмём $S = \{t\colon \vec{y_1}(t) = \vec{y_2}(t)\} \cap [t_0, \hat{t}]$.

$\hat{t}_0$ — самая правая точка замкнутого ограниченного множества S.

$$\hat{y}_1(\hat{t}_0) = \hat{y}_2(\hat{t}_0), \quad \vec{y}_1(t) \neq \vec{y}_2(t) \text{ при } \hat{t}_0 < t \leqslant \hat{t}.$$

$(\hat{t}_0), \hat{y}_1(\hat{t}_0)$ (она же $(\hat{t}_0), \hat{y}_2(\hat{t}_0)$) внутренняя точка $\bar{G}$. Для этой точки строим $\hat{Q}, \hat{M}, \hat{K}$.

[Тут нет рисунка, нарисуйте его сами]

В $\hat{Q}$ $\vec{y}_1(t)$ и $\vec{y}_2(t)$ — 0-приближённые решения (точные решения), $\vec{y}_1(\hat{t}_0) = \vec{y}_2(\hat{t}_0)$.

Поэтому $\left|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)\right| \leqslant 2\hat{\alpha} \cdot 0 \cdot e^{\hat{k}\hat{\alpha}} = 0$. Противоречие.

2. Теорема: (о продолжении решения) Пусть выполняются условия теоремы **п.1.** Пусть $\bar{G}$ ограничено. Тогда решение задачи $(1) \wedge (2)$ может быть продолжено так, чтобы концы его графика лежали на границе $\bar{G}$.

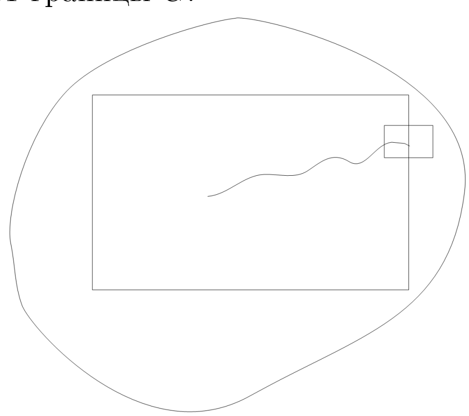
Доказательство:

$$M = \max_{\bar{G}} |\vec{f}|, \quad M > 0 \,(\text{для } M = 0 \text{ очевидно})$$

$(t_0, \vec{y_0})$; $Q = \{|t - t_0| \leqslant \alpha, |\vec{y} - \vec{y_0}| \leqslant M\alpha\}$.

$$\alpha\colon \alpha\sqrt{1 + M^2} = \rho,$$

где ρ — расстояние от $(t_0, \vec{y_0})$ от границы $\bar{G}$.



Далее $t \geqslant t_0$. Мы построили решение на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$ (см конструкцию, фигурирующую в доказательстве предыдущей теоремы).

Если правый конец достиг границы, то продолжать конструкцию незачем. Но пуст правый конец, то есть точка $(t + \alpha, \vec{y}(t + \alpha))$ не является граничной. Возьмём эту точку на рисунке. Она является внутренней, поэтому мы можем продолжить решение направо. Берём точку $(t + \alpha, \vec{y}(t_0 + \alpha))$ в качестве начальной, $[t_0 + \alpha, t_0 + \alpha + \alpha_1]$, где α_1 выбирается из следующих соображений:

$$\alpha_1\colon \alpha_1\sqrt{1 + M^2} = \rho_1,$$

где ρ_1 — расстояние от точки $(t+\alpha, \vec{y}(t_0+\alpha))$ до границы $\bar{G}$, и так далее.

В итоге получаем последовательность отрезков, на которую распространяем наше решение.

$$[t_0, t_0+\alpha], [t_0, t_0+\alpha+\alpha_1], [t_0, t_0+\alpha+\alpha_1+\alpha_2], \ldots$$

ρ_k — расстояние от точки $\Big(t_0+\alpha+\ldots+\alpha_{k-1}, \vec{y}(t_0+\alpha+\ldots+\alpha_{k-1})\Big)$.

Докажем, что эти точки стремятся к границе.

$$\sqrt{1+M^2}\sum_k \alpha_k = \sum \rho_k, \quad \sum_k \alpha_k \text{ сходится.}$$

Следовательно, $\rho_k \to 0$ при $k \to \infty$.

В утверждении теоремы сказано, что точка должна *лежать* на границе, а не просто стремиться. Мы получили решение на $[t_0, t_0+\hat{\alpha})$, где $\hat{\alpha} = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$. На этом полуотрезке имеет место формула

$$\vec{y}(t) = \vec{y_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Обратим внимание на обстоятельство:

$$\left|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \Big|t_{**} - t_*\Big| M$$

По критерию Коши существует

$$\lim_{t\to t_0+\hat{\alpha}} \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Естественным образом определяем решение по формуле:

$$\vec{y}(t_0+\hat{\alpha}) = \vec{y_0} + \lim_{t\to t_0+\hat{\alpha}} \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$\vec{y}(t) \text{ определена при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\hat{\alpha},$$

непрерывна, и на отрезке $[t_0, t_0+\hat{\alpha}]$ имеет место $\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t))$.

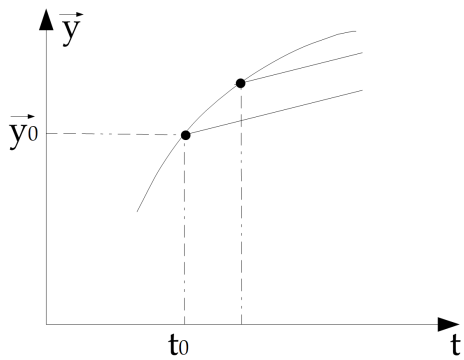
Замечание:

1. Если имеем уравнение вида

   $$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

   то заменой $z_1 = y'$, $z_2 = y''$, …, $z_{n-1} = y^{(n-1)}$ уравнение сводится к системе $y' = z_1, z_1' = z_2, \ldots, z_{n-1}' = f(t, y, z_1, \ldots, z_{n-1})$. **Обязательная задача.** Используя результаты пунктов 1 и 2, сформулировать соответствующие теоремы для уравнения (5)

2. Эта теорема может быть доказана очень многими способами. Мы выбрали метод ломаных Эйлера.



Эта построенная ломаная называется *Ломаной Эйлера.* Таким образом был предложен приближённый метод решения дифференциального уравнения. На каждом отрезке вместо решения строим отрезок, который в начальной точке имеет направление, заданное нашим дифференциальным уравнением.

Затем мы доказывали, что наше приближённое решение при $h \to 0$ становится точным.

Задача: составить программу приближённого решения задачи Коши, используя метод Эйлера приближённого решения. Можно попробовать решать задачи из задания таким способом.

3. В одной из теорем мы объединили два формально разных вопроса: существования и единственности решения задачи Коши. В более тонких исследованиях эти два вопроса разделяются. Оказывается, что если правая часть уравнения только непрерывна (раньше требовалось дифференцируемость), то хотя бы одно решение задачи Коши существует.

4. Конечно, условие в этой теореме — это достаточное условие, и вовсе не является необходимым. Рассмотрим 2 примера.

   - $y' = \sqrt[3]{y^2}$
   - $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$

   Контрольный вопрос: Почему? Какие условия теоремы не выполнены?

§4. Исследование зависимости решения от параметров, входящих в правую часть уравнения и начальных данных

В этом параграфе все величины вещественные.

Мы рассматриваем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}') \tag{1}$$

$$\vec{y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right\|, \vec{f} = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \right\|, \vec{\mu} = \left\| \begin{matrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{matrix} \right\|,$$

$\vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}')$ определена в замкнутой области $G_{t,\vec{y},\vec{\mu}}$.

Тогда мы получим, что решение зависит от параметра и начальных данных.

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y_0} \tag{2}$$

В этой параграфе мы будем изучать функцию y, как функцию всей совокупности переменных. Сначала рассмотрим зависимость решения от параметра при фиксированных начальных данных, а потом уже посмотрим, как изучить зависимость при переменных начальных данных.

1. Теорема: Пусть $\vec{f}$ и $\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}$ непрерывны в G. Пусть $\left(t_0, \vec{y_0}, \vec{\mu_0}\right)$ — внутренняя точка G. Тогда существуют положительные числа α, γ, такие, что при $|t - t_0| \leqslant \alpha$ и $|\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \gamma$ определено решение (единственное) задачи $(1) \wedge (2)$ и функция $\vec{y}(t, \vec{\mu})$ непрерывна.

Доказательство: Мы берём нашу точку $\left(t_0, \vec{y_0}, \vec{\mu_0}\right)$, и такую окрестность U, что $\bar{U} \subset \bar{G}$. Обозначим $M = \max_{\bar{U}} |\vec{f}|$. (Можно показать, что такое обозначение корректно, максимум существует).

Возьмём такой цилиндр $Q\{|t - t_0| \leqslant \alpha, |\vec{y} - \vec{y_0}| \leqslant \beta, |\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \gamma\}$ (бицилиндр), что

$$0 < \alpha, 0 < \beta, 0 < \gamma, \alpha M \leqslant \beta, Q \subset \bar{U}. K = \max_Q \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right|$$

Мы берём два значения $\vec{\mu_1}, \vec{\mu_2}$; $\vec{y}(t, \vec{\mu_1}), \vec{y})(t, \vec{\mu_2})$ — решение $(1) \wedge (2)$.

Как следует из конструкции построения этих решений, приведенных в предыдущем параграфе, эти решения определены на всём отрезке.

Посмотрим, будут ли эти решения близки, если $\vec{\mu_1}$ близко к $\vec{\mu_2}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t, \vec{\mu}_1)}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\Big(t, \vec{y}(t, \vec{\mu}_1), \vec{\mu}_1\Big)$$

$$|\vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{\mu}_1), \vec{\mu}_1) - \vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{\mu}_2), \vec{\mu}_1)| < \varepsilon, \tag{3}$$

если

$$|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2| < \delta, \text{ где } \varepsilon \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

так как $\vec{f}$ равномерно непрерывна в Q.

Тогда

$$\left| \frac{\mathrm{d}\vec{y}(t, \vec{\mu}_1)}{\mathrm{d}t} - \vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{\mu}_1), \vec{\mu}_2) \right| < \varepsilon,$$

если $|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2| < \delta$. Таким образом, обе функции являются ε-приближёнными. Одна из них является точным решением. Всё происходит в замкнутом выпуклом множестве, функции удовлетворяют одним и тем же начальным условиям, поэтому

$$|\vec{y}(t,\vec{\mu}_1) - \vec{y}(t,\vec{\mu}_2)| \leqslant 2\alpha\varepsilon e^{K\alpha}$$

Замечание: Непрерывность следует из неравенства треугольника: $|\vec{y}(t_1,\vec{\mu}_1) - \vec{y}(t_2,\vec{\mu}_2)| \leqslant |\vec{y}(t_1,\vec{\mu}_1) - \vec{y}(t_1,\vec{\mu}_2)| + |\vec{y}(t_1,\vec{\mu}_2) - \vec{y}(t_2,\vec{\mu}_2)| \leqslant 2\alpha\varepsilon e^{L\alpha} + M|t_1 - t_2|$ Теорема доказана.

2. Теорема: Пусть в дополнение к условиям предыдущей теоремы $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mu}}$ непрерывна в $\bar{G}$. Тогда функция $\vec{y}(t,\vec{\mu})$ имеет непрерывные производные $V = \dfrac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{\mu}}$ и функция V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\big(t,\vec{y}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu}\big)\right) V + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mu}}\big(t,\vec{y}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu}\big) \tag{4}$$

и начальному условию

$$V(t_0) = 0 \tag{5}$$

Замечание: Уравнение (4) называется *уравнением вариации* для уравнения (1). Оно получается из (1) формальным дифференцированием по $\vec{\mu}$. (Это всего лишь способ запомнить это уравнение. Вообще, никто не давал разрешения своевольно переставлять порядок дифференцирования.)

Замечание: V— прямоугольная матрица частных производных, которая имеет m столбцов и n строк. $(n \times m)$.

Доказательство: Рассмотрим уравнение (4), с начальными условиями (5). Это уравнение, которое удовлетворяет всем требованиям того, чтобы решение задачи Коши существовало и было единственно. Дейтсвительно, частная производная (матрица) тоже непрерывна.

$$V(t,\vec{\mu}) \text{ — решение, единственное задачи } (4) \wedge (5)$$

То, что это решение распространяется на весь отрезок $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, будет доказано позднее, при изучении линейных уравнений с переменными коэффициентами.

$|t - t_0| \leqslant \alpha, |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \leqslant \beta$. Хотим доказать, что эта функция является частной производной $\dfrac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{\mu}}$.

Берём $\vec{\mu}, \Delta\vec{\mu}$, и составляем функцию

$$\vec{z}(t,\vec{\mu},\Delta\vec{\mu}) \overset{def}{=} \vec{y}(t,\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu}) - \vec{y}(t,\vec{\mu}) - V(t,\vec{\mu})\cdot\Delta\vec{\mu}$$

Мы докажем, что $||\vec{z}|| = o(||\Delta\vec{\mu}||)$. Здесь и далее $o(\cdot), O(\cdot)$ — равномерные в Q оценки.

Если доказать, что $\vec{z} = o(||\Delta\vec{\mu}||)$, то всё будет следовать.

Напишем дифференциальное уравнения для $\vec{z}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{f}\big(t,\vec{y}(t,\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu}),\vec{\mu}+\Delta\vec{\mu}\big) - \vec{f}\big(t,\vec{y}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu}\big)}_{\Delta\vec{f}} - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\underline{V\Delta\vec{\mu}} - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mu}}\Delta\vec{\mu}$$

Оценим эту величину. Отметим, что из соотношения (3), использованного при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что $\varepsilon = O(\delta)$. Дело в том, что мы предположили, что функция дифференцируема. Тогда разность в неравенстве (3) не превосходит разницы частных производных, умноженной на ?

Поэтому (см. доказательство предыдущей теоремы)

$$\Big(\vec{y}(t, \vec{\mu} - \Delta\vec{\mu}) - \vec{y}(t, \vec{\mu})\Big) = O(|\Delta\vec{\mu}|)$$

Преобразуем:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = \Delta\vec{f} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\Delta\vec{y} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{\mu}}\Delta\vec{\mu} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\vec{z}$$

Поскольку $\vec{f}$ имеет непрерывные частные производные,

$$\left|\Delta\vec{f} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\Delta\vec{t} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{\mu}}\Delta\vec{\mu}\right| = o\Big(|\Delta\vec{y}| + |\Delta\vec{\mu}|\Big) = o\Big(|\Delta\vec{\mu}|\Big)$$

$$A(t) \overset{def}{=} \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}(t, \vec{y}(t, \vec{\mu}), \vec{\mu})$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{z} + \vec{\rho}(t), \text{ где } |\vec{\rho}(t)| = o(|\Delta\vec{\mu}|)$$

$\vec{z}(t_0) = \vec{0}$.

Надо доказать, что $\vec{z} = o(|\Delta\vec{\mu}|)$. Введём вспомогательную функцию

$$\vec{\varphi}(t) \overset{def}{=} \vec{0}$$

Эта функция, подставленная в наше дифференциальное уравнение

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} - A(t)\vec{\varphi}(t) - \vec{\rho}(t)\right| = |\vec{\rho}(t)| = o(|\Delta\vec{\mu}|),$$

даёт погрешность

$$|\vec{z}(t) - \vec{\varphi}(t)| \leqslant 2o(\Delta\vec{\mu}) \cdot \alpha e^{K\alpha} = o(|\Delta\vec{\mu}|)$$

$$|\vec{z}(t)| = o(|\Delta\vec{\mu}|).$$

Теорема доказана.

Осталось доказать, что $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t_0) = 0$. Так как мы не меняем начальных данных, то так и есть.

3. Зависимость решения от начальных данных.

Замечание: Это очень просто исследовать

Сделаем замену $\vec{y} = \vec{y_0} + \eta$, $t = t_0 + \tau$. Тогда уравнение (1) становится эквивалентным

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\eta}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{f}(t_0 + \tau, \vec{y_0} + \vec{\eta}, \vec{\mu}) \overset{def}{=} \vec{g}(\tau, \vec{\eta}, \vec{\mu})(t_0, \vec{y_0}) \qquad (1')$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\eta}(0) = \vec{0}$$

Начальные данные фиксировали, а в преобразованные данные стали параметрами.

4. Несколько дополнительных замечаний

- **Обязательная задача**. Для уравнения (стрелочек нет)

  $$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

  пользуясь тем, что оно сводится к нормальной системе $y' = z_1$, $z_1' = z_2, \dots, z_{n-2}' = z_{n-1}, z_{n-1}' = f(t, t, y, z_1, \dots, z_{n-1})$ *сформулировать* (и доказать) результаты, соответствующие теоремам пп.1-3.

- Мы привыкли к тому, что система n уравнений имеет общее решение, зависящее от n произвольных постоянных.

  [Тут нет рисунка, нарисуйте его сами]

  t_0 — фиксированное, $y_0 = C$ — параметр.

  $$\vec{y} = \vec{y}(t, \vec{C})$$

- Наложив более жёсткие ограничения на функцию $\vec{f}$, можно доказать существование и непрерывность высших производных $\vec{y}$ по $\vec{\mu}$.

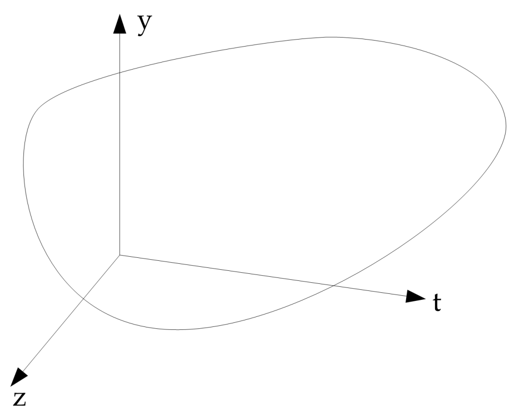
Замечание: Представьте, что дифференциальное уравнение, описывающее, например, полёт самолёта, разрывно зависит от некоторых параметров (например, веса). Малые изменения параметра влекут большие изменения решения. Поэтому теорема пункта 1 имеет фундаментальное значение для использования в практических целях.

§5. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Особые решения.

1. В этом параграфе мы рассмотрим уравнение (1), где функция $f(t, y, p)$ определена в области $G_{t,y,p}$ и непрерывна там вместе с первыми частными производными.

$$f(t, y, y') = 0 \tag{1}$$

Напомню геометрическую интерпретацию этого уравнения. В трёхмерном пространстве (t, y, p) рассматриваем множетво π, для которого $f(t, y, p) = 0$, и рассматриваем кривые ℓ, заданные уравнениями $y = y(t), p = p(t)$.



ℓ — график решения (1) $\quad\Leftrightarrow\quad \ell \in \prod \wedge \mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$ на ℓ.

Задача Коши для (1)**:** (различные формулировки)

1. На $\prod$ задана точка. Найти то решение уравнения (1), график которого проходит через эту точку.
2. Заданы числа t_0, y_0, p_0, удовлетворяющие условию $f(t_0, y_0, p_0) = 0$. Найти $y(t)$ — то решение уравнения (1), для которого выполняется (2):

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = p_0 \tag{2}$$

Замечание: Мы задаём *три* числа, чтобы исключить возможность "протыкания" прямой поверхности π в нескольких точках.

Все величины, которые рассматриваются в этом параграфе, вещественные.

Теорема: Пусть $f(t_0, y_0, p_0) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} f(t_0, y_0, p_0) \neq 0$. Тогда существует решение задачи $(1) \wedge (2)$. Если $y_1(t), y_2(t)$ — решения задачи $(1) \wedge (2)$, то $y_1(t) = y_2(t)$ в некоторой окрестности точки t_0.

[Вопрос на понимание: окрестность равномерная?]

Доказательство: В силу наших ограничений по *теореме о неявных функция* в некоторой окрестности точки t_0 соотношение $f(t, y, p) = 0$ эквивалентно

$$p = g(t, y),$$

где g непрерывна вместе с первыми частными производными. Тем самым, в некоторой окрестности нашей точки уравнение $f(t, y, y') = 0$ эквивалентно

$$y' = g(t, y) \tag{1'}$$

Начальные данные приобретают следующий вид:

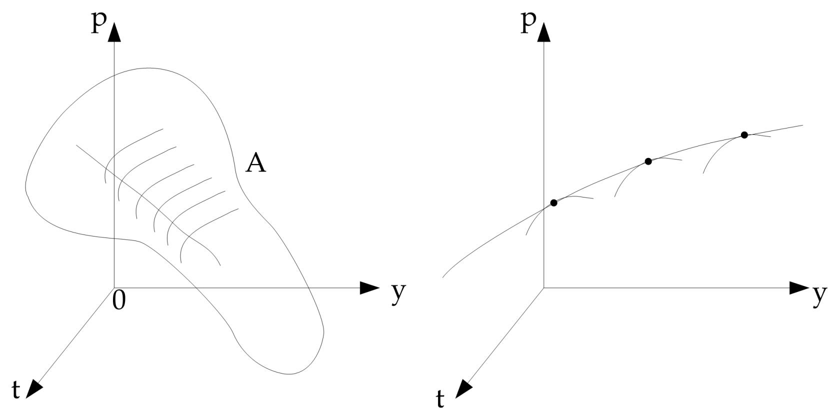
$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = p_0 \end{array} \right\} \quad\Leftrightarrow\quad y(t_0) = y_0 \tag{2'}$$

Тем самым, в некоторой фиксированной окрестности точки (t_0, y_0, p_0) используем теорему §3.

Замечание: Из доказательства видно, что окрестность фиксированная, то есть не зависит от выбора функции.

2.

Определение: Решение уравнения (1) называется *особым*, если на каждом интервале графика этого решения существуют точки, в которых нарушается единственность решения задачи Коши.



Теорема: Пусть $y = y(t)$ — особое решение (1). Тогда в каждой точке графика этого решения имеет место $f = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$. (от противного, если бы производная не равнялась нулю, то можно было бы воспользоваться предыдущей теоремой существования и единственности решения задачи Коши).

Определение: Множество точек, в которых $f = 0 \wedge \dfrac{\partial f}{\partial p}$, называется *p-дискриминантным* множеством уравнения $p = 0$. Стандартное обозначение: Δ. Тогда предыдущую теорему можно переформулировать так:

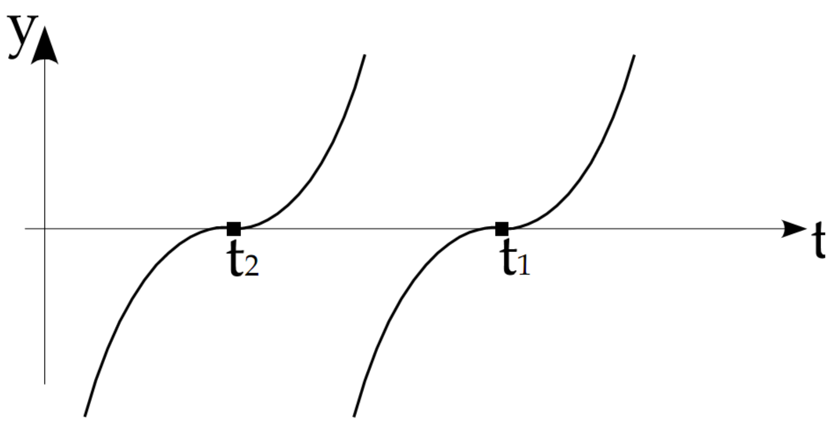
Теорема: График особого решения лежит на p-дискриминантном множестве этого уравнения.

Замечание: В типичном случае множество π — двумерное множество в трёхмерном пространстве. p-дискриминантное множество задаётся двумя уравнениями, поэтому имеет вид кривой. Кандидатами в особое решение являются какие-либо из этих кусков кривых.

Если кусок кривой является решением, то отсюда не следует, что это решение — особое. Вообще говоря, задача формулировки достаточного условия особого решения выходит за рамки программы МФТИ. Поэтому когда мы применяем эти приёмы к исследованию уравнения, необходимо всегда помнить, что эти требования являются обязательными. Для доказательства надо провести дополнительное исследование.

3. Примеры

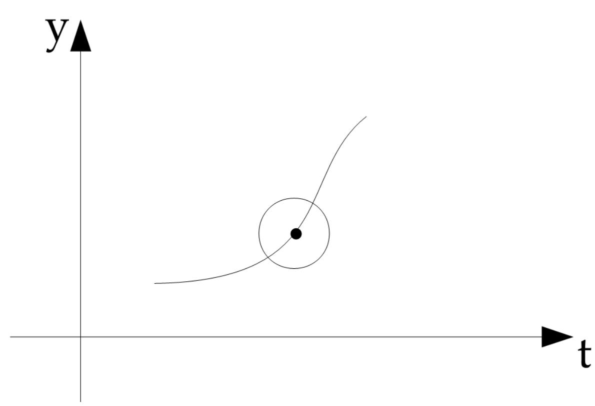
1. $y' = \sqrt[3]{y^2}$, t, y — любые. Этот пример мы решили на самой первой лекции. Решениями являются $y = \left(\dfrac{t}{3} + C\right)^3$, $y \equiv 0$.



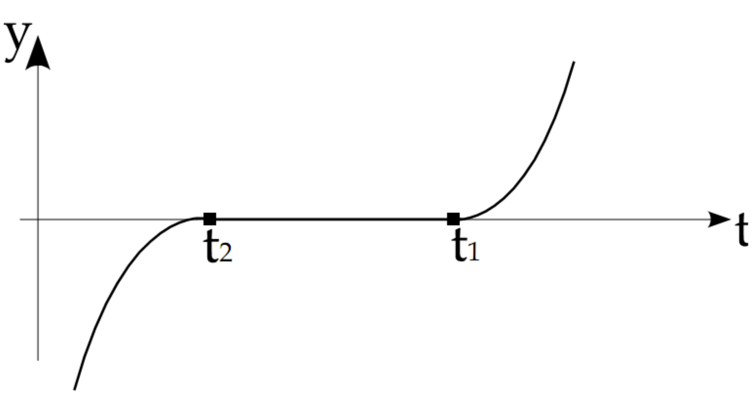
Этот пример не подходит под нашу теорию. Для того, чтобы он удовлетворял условию, возведём в куб и преобразуем:

$$(y')^3 - y^2 = 0, \quad f(t, y, p) = p^3 - y^2.$$

Если взять $y_0 \neq 0$, то решение задачи Коши единственно (локально).



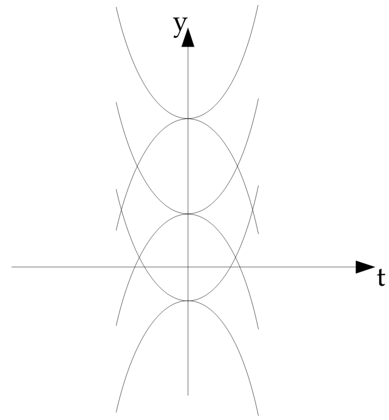
При $y_0 = 0$ решение задачи Коши не единственно.



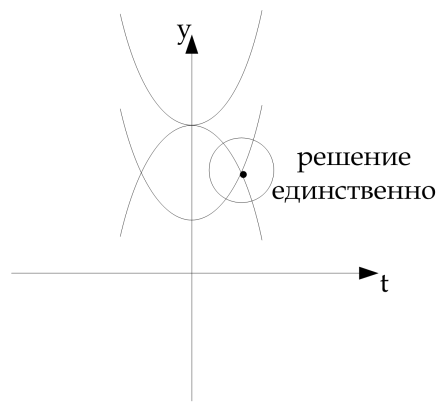
$$\Delta : \left\{ \begin{array}{c} p^3 - y^2 = 0 \\ 3p^2 = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} p = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

$y = 0$ — особое решение.

2. $(y')^2 = t^2$, t, y — любые. Это уравнение легко решается: $y = \pm t$, $y = \pm\dfrac{t^2}{2} + C$, C — const



При $p_0 = \pm t_0$ решение единственное, хотя через точку проходит два графика решения. (Касательные различны)



При $t_0 = 0$ через каждую точку проходит 4 решения

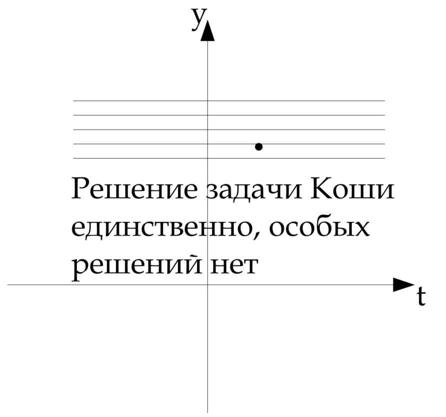
Тут имеет место нарушения единственности решения задачи Коши.

p-дискриминантное множество:

$$\left\{ \begin{array}{c} p^2 - t^2 = 0 \\ 2p = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} p = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\}$$

Особых решений нет, так как графиком дискриминантного множества является вертикальная прямая, которая не соответствует никакому решению.

3. Пример, который показывает, что все приведенные условия не являются достаточными для выделения особых решений. $(y')^2 = 0$, $y' = 0$, $y = C$ — const.



Совокупность графиков решений — множество горизонтальных прямых.

Дискриминантное множество:

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{l} p^2 = 0 \\ 2p = 0 \end{array} \right\}$$

Каждая точка плоскости принадлежит дискриминантному множеству. С другой стороны, особых решений нет.

4. **Уравнение Клеро.**

$$y = ty' + f(y'),$$

где f определена на интервале (α, β), и f'' непрерывна на (α, β), $f'' > 0$.

Замечание: *Клод Алексис Клеро.* Работал в 1 половине 18 века. Первую математическую работу (исследование геометрических свойств алгебраических кривых 4 порядка) написал в 12 лет. В 16 лет изучил кривые двоякой кривизны. В 18 лет стал адъюнктом Парижской Академии Наук. Ввёл криволинейные интегралы, понятие полного дифференциала функции нескольких переменных. Кроме того, занимался теорией формы Земли, движения Луны, и т.д.

$y = tp + f(p), \quad \mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}t$. Решаем уравнение в переменных t, p.

$$\underline{p\,\mathrm{d}t} + t\,\mathrm{d}p + f'(p) = \underline{p\,\mathrm{d}t}$$

$$(p + f'(p))\,\mathrm{d}p = 0$$

Надо рассмотреть две возможности:

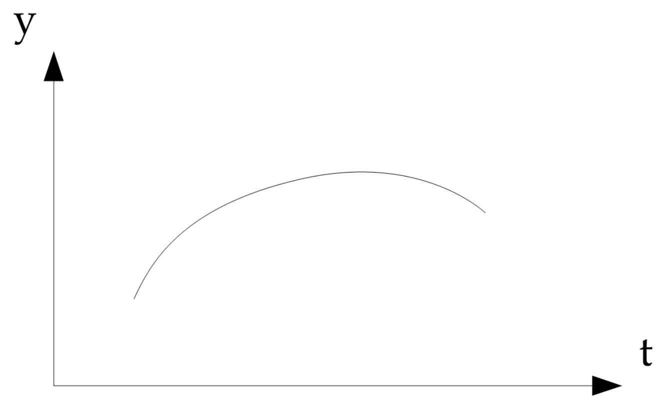
(a) $\mathrm{d}p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = C$ — const. $y = Ct + f(C)$. Мы получили семейство прямых $\ell(C)$, зависящих от параметра C. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что действительно решение.

(b) На решении $t + f'(p) = 0$.

$$t = -f'(p), \quad y = -f'(p)p + f(p) \text{ (параметрическая запись решения.)}$$

Так как $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = -f'' < 0$, то оно не обращается в 0. По теореме о неявной функции, соотношение $t = t(p) \quad \Leftrightarrow \quad p = p(t)$.

Из нашего выражения для t следует $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}p} < 0$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} < 0$.



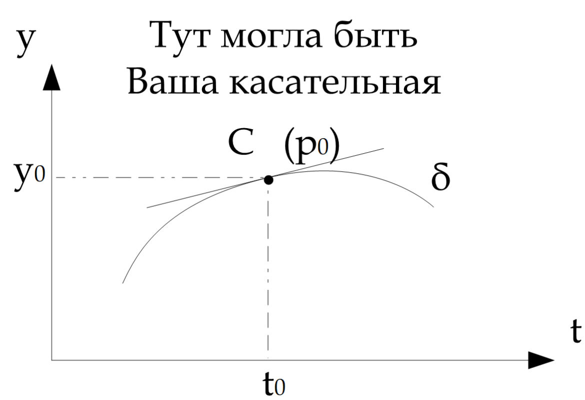
Обозначим эту кривую δ. Она выпукла вверх. Мы нашли семейство решений, и ещё одно решение. Как они связаны друг с другом? Докажем, что совокупность этих $\ell(C)$ — совокупность касательных к нашей кривой δ.

Доказательство: Задаём $t_0 = -f'(p_0)$, получаем $y_0 = -f'(p_0)p_0 + f(p_0)$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{p_0} = p\Big|_{p_0} = p_0$$

$$\ell(C);\ C = p_0,\ y = p_0 t + f(p_0),\ t_0 = -f(p_0),\ y_0 = -f'(p_0)p_0 + f(p_0),\ y_0' = C = p_0.$$

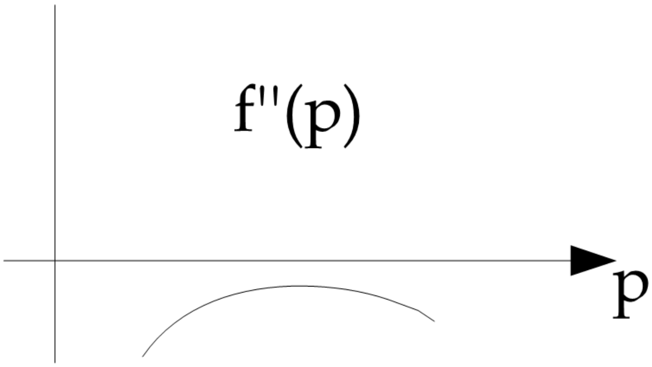
Действительно, это та же самая точка, касательная в этой точке совпадает с нашей кривой.

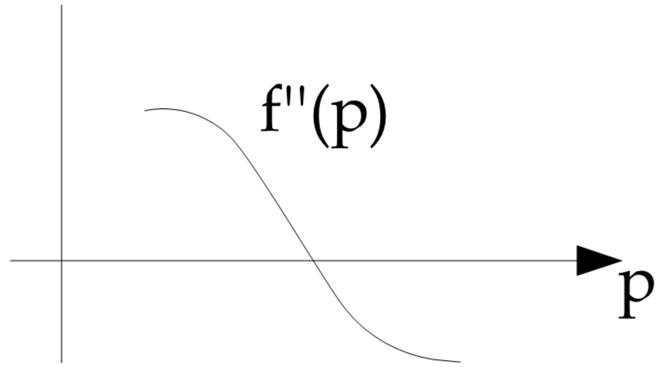


$$\Delta : \left\{ \begin{array}{c} y - t_p - f(p) = 0 \\ -t - f'(p) = 0 \end{array} \right\} \quad \Delta = \delta$$

Общая картина такая. Есть выпуклая вверх кривая δ, и берутся всевозможнные касательные к этой кривой. Множество касательных в объединении с кривой есть решение нашей задачи.

Замечание: существенно было то, что мы предположили, что $f'' > 0$. Хорошая задача: исследовать случаи





4. Мы рассмотрели одно уравнение, где есть только одна искомая функция. Рассмотрим уравнение

$$\vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}') = \vec{0},$$

Все функции достаточно гладкие. Предположим, задана точка $t_0, \vec{y_0}, \vec{p_0}$:

$$\left\{\vec{f}(t_0, \vec{y_0}, \vec{p_0}) = \vec{0}\right\} \wedge \left\{\det \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{p}}(t, \vec{y_0}, \vec{p_0}) \neq 0\right\}$$

Тогда (см §3)

$$\vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}') = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}' = \vec{g}(t, \vec{y}) \text{ и т.д.}$$

Глава 4. Автономные системы дифференциальных уравнений

§1. Основные определения и простейшие свойства

1.

Определение: Система дифференциальных уравнений $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{y})$ называется *автономной*, если $\vec{f}(t, \vec{y})$ не зависит от t.

Далее будем рассматривать систему

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{y}), \tag{1}$$

где

$$\vec{y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right\|, \ \vec{f} = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \right\|,$$

$t, \vec{y}, \vec{f}$ вещественные. $\vec{f}$ определена в области G, $\vec{f}$ и $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ непрерывна в G.

Существование решения задачи Коши следует из предыдущей главы.

Теорема: Пусть $\vec{\varphi}(t)$ — решение системы (1), C — const. Тогда

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + C) \text{ — решение (1).}$$

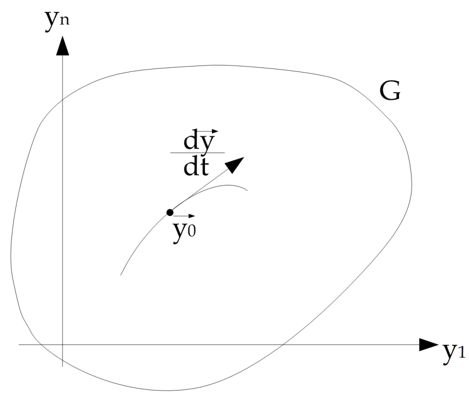
Доказательство: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\psi}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}(t+c)}{\mathrm{d}t} \underset{t+c=\tau}{=} \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t)\big) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t+c)\big) = \vec{f}\big(\vec{\psi}(t)\big)$

Теорема: Пусть $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ — решения (1). Пусть $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2)$. Тогда $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t + t_2 - t_1)$ для всех t, для которых обе части равенства определены.

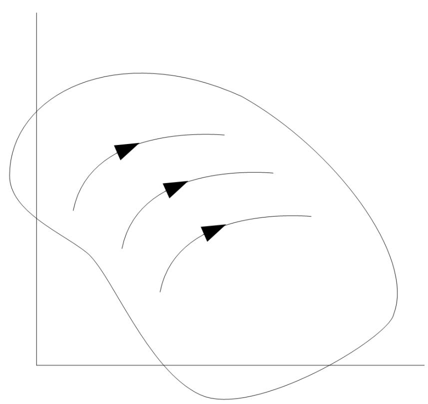
Доказательство: $\vec{\omega}(t) = \vec{\psi}(t + t_2 - t_1)$. Тогда $\vec{\omega}(t)$ — решение (1), $\vec{\omega}(t) = \vec{\psi}(t + t_2 - t_1) = \vec{\psi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}(t) \text{ – решение (1)} \\ \vec{\varphi}(t) \text{ – решение (1)} \end{array} \right\} \bigwedge \Big\{ \vec{\omega}(t_1) = \vec{\varphi}(t_1) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}(t) = \vec{\varphi}(t) \Big\}$$

в силу единственности решения задачи Коши.



Определение: Область G называется *фазовым пространством* системы дифференциальных уравнений (1), графики (в G) решений — *фазовыми траекториями*, векторы $\vec{f}(\vec{y})$ — *фазовыми скоростями*. Фазовое пространство вместе с фазовыми траекториями и фазовыми скоростями, называется *фазовым портретом* системы дифференциальных уравнений (1).



2. Положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений (1)

Определение: Точка A называется положением равновесия автономной системы дифференциальных уравнений (1), если $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ — решение (1).

Теорема: $\vec{a}$ — положение равновесия (1) $\quad\Leftrightarrow\quad \vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$.

$\Rightarrow$: $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ — решение (1), $\dfrac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{a})$. $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$

$\Leftarrow$: $\vec{y}(t) = \vec{a}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} = \vec{f}(\vec{a}) = \vec{f}(\vec{y})$.

§2. Классификация положений равновесия линейной автономной системы 2 порядка.

В качестве области определения рассматриваем всю плоскость $\vec{y}$.

1. Рассмотрим систему

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y} + \vec{b},$$

A и B — const. $\vec{y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|$, $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $b = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \right\|$.

$\vec{a}$ — положение равновесия, $\vec{y}_{\text{новое}} = \vec{y}_{\text{старое}} - \vec{a}$.

$\vec{0}$ — положение равновесия, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A\vec{y}$

Далее λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A.

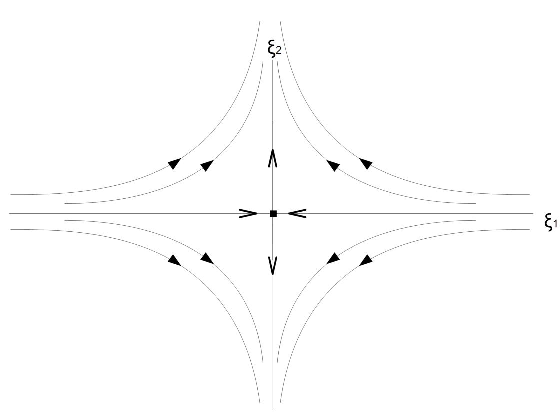
1. λ_1, λ_2 вещественные, отличны от 0, разных знаков. Тогда сущестует вещественный базис $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ из собственных векторов матрицы A.

   ξ_1, ξ_2 — координаты в этом базисе. Наша система приводится к следующему виду:

$$\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\xi_1$$
$$\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2\xi_2$$

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

   где C_1, C_2 — Const.



   Положение равновесия, соответствующее этому случаю, называется *седлом.*

2. λ_1, λ_1 отличны от нуля, различны, одного знака. Тогда существует $\vec{h}_1.\vec{h}_2$ — базис из собственных векторов A, ξ_1, ξ_2 — координаты.

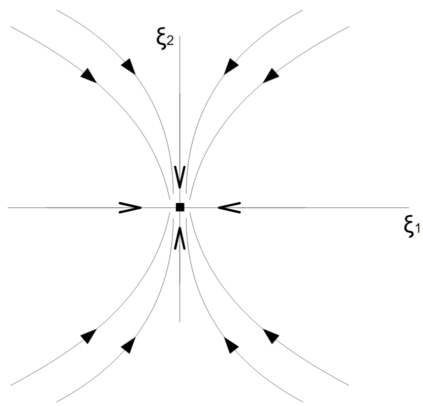
$$\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 \xi_1$$
$$\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 \xi_2$$

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где C_1, C_2 — Const.

Мы рассмотрим два разных случая.

(a) λ_1, λ_2 отрицательны, для определённости $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

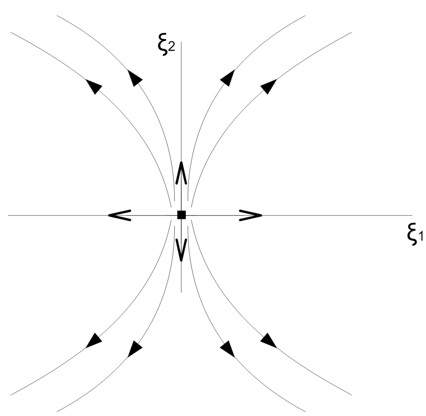


$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\xi_1(t)}{\xi_2(t)} = \frac{C_1}{C_2} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_2 t}} = 0$$

Такое положение равновесия называется *устойчивым узлом.*

(b) λ_1, λ_2 положительны, для определённости $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

В этом случае надо поменять $t \to -t$, и получается предыдущий случай. Получится та же самая картинка, движение будет осуществляться в противоположном направлении.



3. λ_1, λ_2 не вещественные, с вещественной частью, отличной от 0.

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \mu + i\nu \\ \lambda_2 = \mu - i\nu \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \mu \neq 0 \\ \nu \neq 0 \end{matrix}$$

Поскольку мы хотим рисовать вещественным мелом на вещественной доске, делаем следующее: составляем вектор

$$\vec{h}_1 = \vec{g} + i\vec{g}_2,$$

вектор, соответствующий λ_1. $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ — вещественные.

Тогда $\vec{h}_2 = \vec{g}_1 - i\vec{g}_2$ — вектор, соответствующий λ_2. $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ линейно независимы, $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ — базис, η_1, η_2 — соответствующие координаты.

В координатах η_1, η_2 наша система приведётся к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t} &= \mu\eta_1 + \nu\eta_2 \\ \frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}t} &= -\nu\eta_1 + \mu\eta_2 \end{aligned}$$

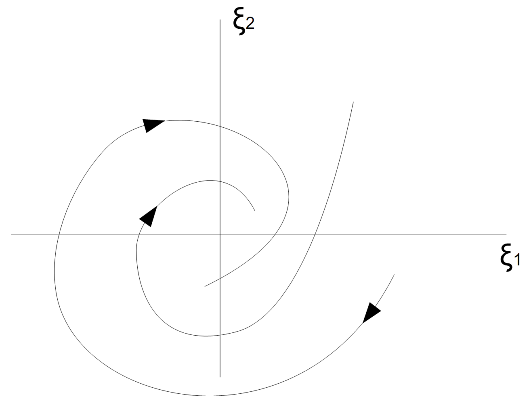
$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= C_1 e^{\mu t}\sin(\nu t + C_2) \\ \eta_2(t) &= C_1 e^{\mu t}\cos(\nu t + C_2), \end{aligned}$$

C_1, C_2 — const.

Выкладки предлагается проделать в качестве упражнения.

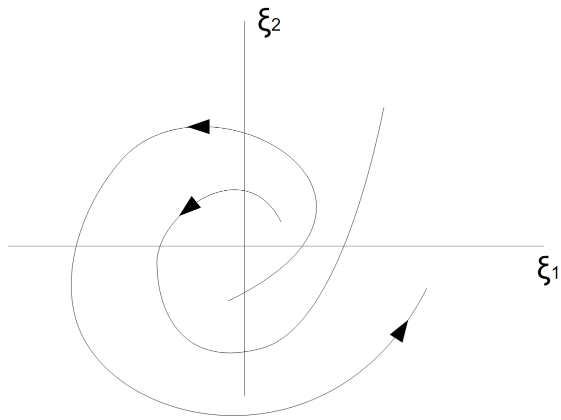
Далее для определённости $\mu > 0$. Если оно отрицательное, поменяем местами λ_1, λ_2.

(a) $\mu < 0$



Устойчивый фокус.

(b) $\mu < 0$



Неустойчивый фокус.

Весь случай целиком называется *фокус*.

4. λ_1, λ_2 невещественные, с нулевой вещественной частью.

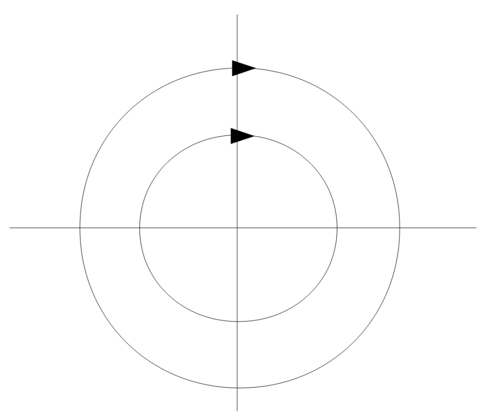
$$\lambda_1 = i\nu$$
$$\lambda_2 - i\nu$$

Как и в пункте 3), строим базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = \nu\xi_2$$
$$\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = -\nu\xi_2$$

$$\xi_1 = C_1 \sin(\nu t + C_2)$$
$$\xi_2 = C_1 \cos(\nu t + C_2)$$

Для определённости $\nu > 0$



С точки зрения выкладок это частный случай предыдущего пункта, поэтому выкладки не повторяются.

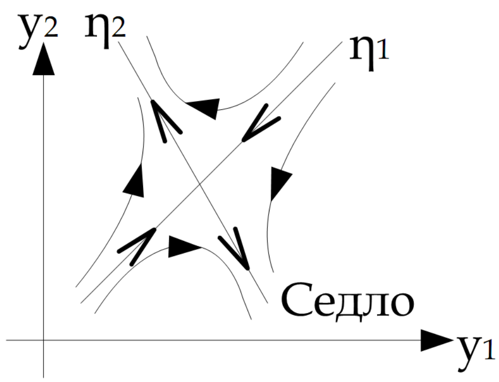
5. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0.$

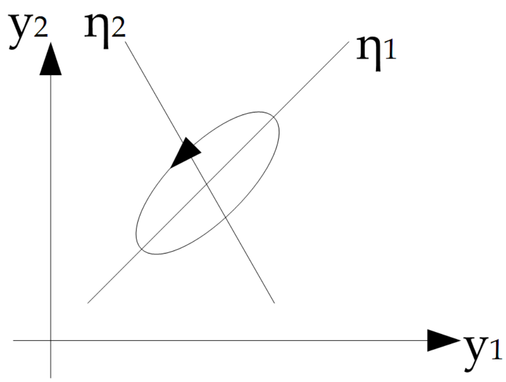
6. $\lambda_1 \lambda_2 = 0.$

Замечание: В книге Понтрягина детально разобраны все случаи.

2. Дополнительные замечания

1. Мы рисовали все картинки в том базисе, к которому мы перешли. В исходном базисе $\vec{y}_1, \vec{y}_2$, с учётом того, что была сделана замена переменной t, картники будут выглядеть так:





   Рисуя всё в исходной системе координат, надо тонко учёть всё. что связано с переходом в другую систему координат.

2. Мы провели классификацию, основываясь на предположениях о собственных значениях матрицы. Вопрос “что называется неустойчивым узлом?” Ответ в духе “эти штучки касаются и расходятся”, является неверным, так как это всего лишь картинка. Основой классификации является предположение о собственных значениях.

   Эта классификация называется *классификацией Пуанкаре* линейных однородных систем дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Все эти случаи разбиваются на два класса: 1)-3) — так называемые *невырожденные* положения равновесия, и 4)-6) — так называемые *вырожденные* положения равновесия.

   В чём смысл этого разбиения? Казалось бы, в случае 4) было получено всё, и выкладки являлись частным случаем случая 3). Дело в том, что каджое из невырожденных положений равновесия выделяется какими-либо условиями *типа неравенства*. А в определении каждого из вырожденных положений равновесия фигугирует какое-нибудь условие типа равенства.

   Это важно потому что если положение равноеися невырожденное, и мы достоаточно мало меняем исходные данные, то тип положения равновесия не меняется, потому что при достаточно малом изменении исходных параметров эти значения меняются мало (непрерывные функции), а все ограничения в виде неравенств. Значит, тип невырожденного положения равновесия не меняется при достаточно малом изменении исходных параметров.

   С другой стороны, для вырожденного положения равновесия это не выполняется. Центр может остаться центром, а может превратиться в фокус.

§3. О нелинейных автономных системах дифференциальных уравнений

1. Мы рассматриваем общую нелинейную систему

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{y}), \vec{y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right\|, \vec{f} = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{matrix} \right\|; \tag{1}$$

$t, \vec{y}, \vec{f}$ — вещественные, $\vec{f}(\vec{y})$ определена в области G, $\vec{f}$, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ непрерывна в G

Если $\vec{a}$ положение равновесия, то $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ — решение $\quad\Leftrightarrow\quad \vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$.

Часто используется следующий приём: $\vec{y} = \vec{a} + \vec{z}$, $|\vec{z}|$ мало. Тогда

$$\vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{a} + \vec{z}) = \underbrace{\vec{f}(\vec{a})}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(\vec{a})\right)}_{A} \vec{z} + \vec{g}(\vec{z}),\ |\vec{g}(\vec{z})| = o(|\vec{z}|).$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z} + \vec{g}(\vec{z}), \tag{2}$$

$A = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(\vec{a}), |\vec{g}(\vec{z})| = o(|\vec{z}|)$.

(1) $\quad\Leftrightarrow\quad$ (2).

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z} \tag{3}$$

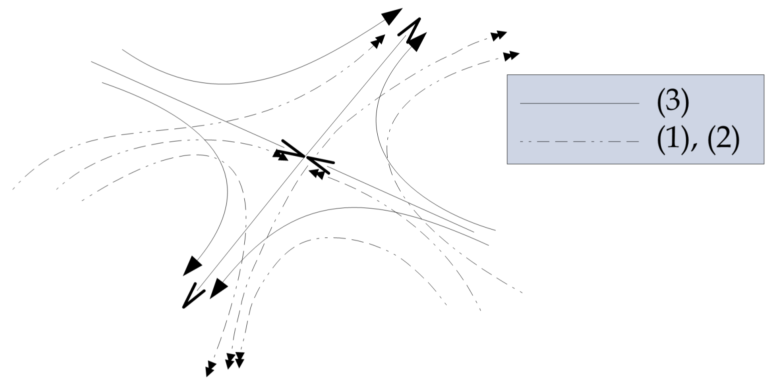
Определение: (3) получено из (1) линеаризацией в окрестности положения равновесия $\vec{a}$.

Один из основных приёмов исследования поведения решений: прежде всего изучаем уравнение (3), и выясняем нужные нам свойства на этом уравнении, затем *стараемся* перенести эти результаты на уравнение (2).

2. Пусть $n = 2$. (Линейная автономная система второго порядка).

Имеет место следующий нетривиально доказываемый факт:

Траектории уравнения (1) в окрестности положения равновесия “ведут себя”, если положения равновесия системы (3) невырожденное, качественно так же, как и траектории уравнения (3).



3. Устойчивость по Ляпунову

Определение: Решение $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ и само положение равновесия называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1. $\exists q > 0$, что при $|\vec{y}(0) - \vec{a}| < q$ решение может быть продолжено на $[0, +\infty)$,

2. для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\delta \leqslant q$, такое, что если $|\vec{y}(0) - \vec{a}| < \delta$, то $|\vec{y}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ при $0 \leqslant t < +\infty$.

Определение: Устойчивое по Ляпунову решение $\vec{y}(t) = \vec{a}$ уравнения (1), и само положение равновесия $\vec{a}$ называется *асимптотически устойчивым*, если существует такое $0 < r \leqslant q$ (обозначение q см. в предыдущем определении), что при $|\vec{y}(0) - \vec{a}| < r$ имеет место $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{y}(t) = \vec{a}$.

Упражнение: Рассмотрите те типы, которые были рассмотрены в §2, и выясните, какие из них являются устойчивыми, а какие к тому же асимптотически устойчивыми.

Прежде всего, мы исследуем систему (3).

Теорема: Пусть все собственные значения матрицы A лежат в левой полуплоскости. Тогда решение системы (3) $\vec{z}(t) \equiv \vec{0}$ устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво.

Доказательство: $\vec{z}(t) = e^{tA}\vec{z}(0)$ (см. §10 главы 1).

$$A = CBC^{-1}, \quad B = \begin{Vmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{Vmatrix}, J_s = \underbrace{\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & \lambda_s \end{Vmatrix}}_{k_s}$$

$$e^{tA} = Ce^{tB}C^{-1}, e^{tB} = \begin{Vmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_m} \end{Vmatrix},$$

$$e^{tJ_s} = e^{\lambda_s t} \left\| \begin{matrix} 1 & t!/1 & \dots & \dfrac{t^{k_s-1}}{(k_s-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t!/1 \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\|, \mathrm{Re}\lambda_s \leqslant \alpha < 0$$

Нам важно лишь только то, что там стоят *какие-то* многочлены.

$$\alpha < \tilde{\alpha} < 0, \quad |e^{tJ_s}| \leqslant |e^{\lambda_s t}| K e^{(\tilde{\alpha}-\alpha)t} \leqslant e^{\alpha t} K e^{(\tilde{\alpha}-\alpha)t} =$$

$$= K e^{\tilde{\alpha} t}; \quad |e^{tA}| \leqslant |C||e^{tB}||C^{-1}| \leqslant Q e^{\tilde{\alpha} t}.$$

Итак, имеем такую оценку: $|\vec{z}(t)| \leqslant Q e^{\tilde{\alpha} t} |\vec{z}(0)|$, $\tilde{\alpha} < 0$.

Центральная теорема этого параграфа. Мы возвращаемся к уравнениям (1), (2).

Теорема: (Ляпунов). Пусть все собственные значения матрицы $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(\vec{a})$ лежат в левой полуплоскости. Тогда решение $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ системы (1) (или, то же самое) $\vec{z}(t) = \vec{0}$ системы (2) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво.

Замечание: Доказательство нужно проводить, используя уже более тщательные оценки.

Напоминание:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A + \vec{g}(\vec{z}), \ |\vec{g}(\vec{z})| = o(|\vec{z}|). \tag{2}$$

Доказательство: $\forall 0 < \beta \, \exists \gamma > 0\colon$ из $|\vec{z}| \leqslant |\gamma|$ следует $|\vec{g}(\vec{z})| \leqslant \beta$.

Пока решение нашей задачи существует при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, и $|\vec{g}(\vec{z})| \leqslant \beta |\vec{z}|$, (см. §10 главы 1)

$$\vec{z}(t) = e^{tA}\vec{z}(0) + \int\limits_0^\beta e^{(t-\tau)A}\vec{g}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Из доказательства предыдущей теоремы заимствуем оценку:

$$|\vec{z}(t)| \leqslant Q e^{\tilde{\alpha} t}|\vec{z}(0)| + \int\limits_0^t Q e^{(t-\tau)\tilde{\alpha}}\beta|\vec{z}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

$$e^{-\tilde{\alpha} t}|\vec{z}(t)| \leqslant Q|\vec{z}(0)| + Q\beta\int\limits_0^t e^{-\tau\tilde{\alpha}}|\vec{z}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

По неравенству Гронуолла (см. §1 главы 3),

$$e^{-\tilde{\alpha} t}|\vec{z}(t)| \leqslant Q|\vec{z}(0)|e^{Q\beta t}$$

Таким образом,

$$|\vec{z}(t)| \leqslant Q|\vec{z}(0)|e^{(\tilde{\alpha}+Q\beta)t}$$

Выберем β так, чтобы $\tilde{\alpha} + Q\beta < 0$. (Чтобы отрицательное число $\tilde{\alpha}$ мало сдвинулось вправо.) Для этого надо взять соответствующее γ. Теперь взяли $\tilde{\gamma}$, обладающее таким свойством:

$Q\tilde{\gamma} < \gamma$, $\tilde{\gamma} < \gamma$.

Начальные значения подчиняются условию:

$$|\vec{z}(0)| < \tilde{\gamma} \tag{4}$$

Если для $0 \leqslant \tau \leqslant t$ решение $\vec{z}(t)$ определено, имеет место $|\vec{z}| \leqslant \gamma$ и выполняется условие (4), то

$$|\vec{z}(t)| \leqslant Q|\vec{z}(0)|e^{(\tilde{\alpha}+Q\beta)t} \tag{5}$$

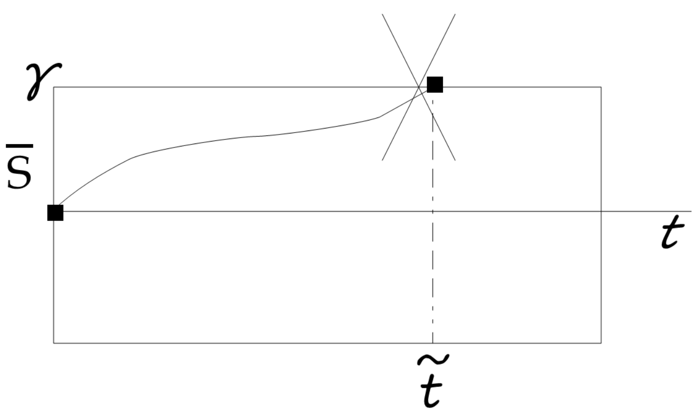
Сейчас мы докажем, что решение действительно определено, причём для всех t, и для всех решений $\vec{z}$ не выходит за указанные пределы. (Иначе говоря, эти предположения выполняются).

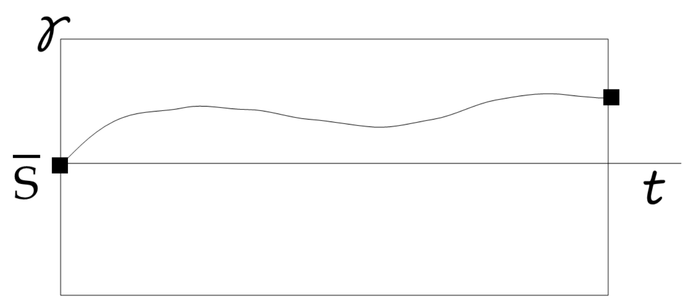
Возьмём цилиндр S, такой, что

$$S\colon \{0 \leqslant t < +\infty,\ |\vec{z}| \leqslant \gamma\}$$

Задача Коши с такими начальными данными имеет решение. Теперь докажем, что оно не выходит за пределы цилиндра.

$$\bar{S}\colon \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |\vec{z}| \leqslant \gamma\},\ 0 < T \text{ – любое}$$





Из (5) получаем, что $|\vec{z}(\tilde{t})| < \gamma$. $|\vec{z}(t)| \leqslant \gamma$.

Теорема доказана.

Замечание: Докажите, что если хотя бы одно собственное значение матрицы лежит в правой полуплоскости, то решение не является устойчивым по Ляпунову. **Подсказка:** ограничиться случаем уравнения (3).

Глава 5. Первые интегралы. Линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

В этой главе все величины вещественны.

§1. Первые интегралы.

1. Мы будем рассматривать такую систему:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathcal{F}_1(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathcal{F}_2(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathcal{F}_n(x_1,\dots,x_n)} \tag{1}$$

где $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_n$ определены в области $\underset{x_1,\dots,x_n}{G}$, непрерывны там вместе с первыми частными производными, в каждой точке G имеет место $\mathcal{F}_1 \neq 0$, или $\dots$, или $\mathcal{F}_n \neq 0$.

Возьмём $\forall \vec{a} \in G$; $\exists k\colon \mathcal{F}_k(\vec{a}) \neq 0$. Построим вспомогательную нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_k} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{F}_1}{\mathrm{d}\mathcal{F}_k} & \dfrac{\mathrm{d}x_{k+1}}{\mathrm{d}x_k} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{F}_{k+1}}{\mathrm{d}\mathcal{F}_k} \\ \dots & \dots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{k-1}}{\mathrm{d}x_k} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{F}_{k-1}}{\mathrm{d}\mathcal{F}_k} & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_k} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{F}_n}{\mathrm{d}\mathcal{F}_k} \end{array} \tag{2_k}$$

Каждое решение системы (2_k) по определению называется решением системы (1)

Теорема: Пусть на каком-либо решении (2_k) имеет место $\mathcal{F}_s \neq 0$. Тогда это решение удовлетворяет (2_s).

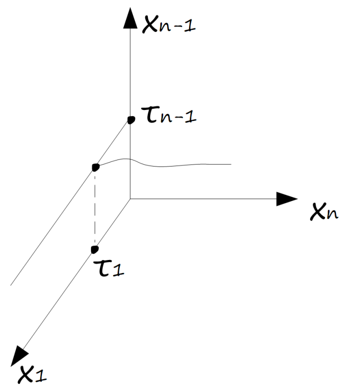
Замечание: Важно, что эти конкурирующие возможности не противоречат друг другу.

Доказательство: $x_s = \varphi(x_k)$, $\dfrac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}x_k} = \dfrac{\mathcal{F}_s}{\mathcal{F}_k} \neq 0$. По теореме о неявной функции, $x_s = \varphi(x_k) \quad \Leftrightarrow$ $x_k = \psi(x_s)$, где ψ' непрерывна.

$$\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}x_s} = \frac{\mathrm{d}x_p / \mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_s / \mathrm{d}x_k} = \frac{\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_k}{\mathcal{F}_s/\mathcal{F}_k} = \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{F}_s}.$$

Определение: Система (1) — симметричная форма записи нормальной системы дифференциальных уравнений.

Замечание: В нормальной системе предопределено, какие из переменных независимы, а какие будут искомыми функциями. В симметричной системе (1) это не указано.



Из рисунка видно, что разным точкам ставим в соответствие разные наборы независимых переменных.

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathcal{F}_1} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathcal{F}_n} = \frac{\mathrm{d}t}{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}), \quad \vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \vec{\mathcal{F}} = \begin{Vmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Замечание: Автономная система (3) не имеет положения равновесия. (Запрещено, чтобы в какой-либо точке все $\mathcal{F}_k$ обращались в 0). При рисовании фазовых траекторий стрелки рисовать не надо.

На нашей области задана функция u. Мы хотим вычислить производную этой функции вдоль решений системы. Но для этого надо знать решение. Теорема говорит, что знать это необязательно.

Теорема: Пусть $u(\vec{x})$ определена в G и непрерывна там вместе с первыми частными производными. Пусть $\vec{x}(t)$ – какое-либо решение системы (3). Тогда

$$\frac{\mathrm{d}u\big(\vec{x}(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k} \tag{4}$$

Доказательство: Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\mathrm{d}u\big(\vec{x}(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Определение: Пусть $u(\vec{x})$ определена в G и непрерывна там вместе с первыми частными производными. Функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (1), если $u(\vec{x})$ постоянна на каждом решении системы (1).

Замечание: Пример. Иногда рассматриваются с.д.у, описывающие движение механической системы. Из физических соображений вводится понятие полной энергии, и доказывается, что имеет место закон сохранения энергии. В нашем определении эта энергия есть первый интеграл той системы, про которую идёт речь.

Теорема: Пусть $u(\vec{x})$ определена в G и непрерывна там вместе с первыми частными производными. Тогда $u(\vec{x})$ — первый интеграл системы (1) в том и только том случае, когда выполняется уравнение (5):

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k} = 0 \,\forall \vec{x} \in G \tag{5}$$

Доказательство: $u(\vec{x})$ — первый интеграл системы (1) $\Leftrightarrow$ $u(\vec{x})$ постоянно на каждом решении (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}u(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t} = 0$ на каждом решении (1) $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(\vec{x}) \dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k} = 0$ на каждом решении (1) $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(\vec{x}) \dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k} = 0$ в каждой точке G.

Это был материал, относящийся к тому, что мы называем первым интегралом, и какие условия нужно наложить, чтобы функция была первым интегралом.

2. Если $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ — первые интегралы уравнения (1) и $\Phi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})\big)$ — какая-либо гладкая функция, то $\Phi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})\big)$ — тоже первый интеграл. Во втором пункте мы опишем совокупность всех первый интегралов (1).

Замечание: Мы покажем, что всегда есть несколько первых интегралов, и все остальные выражаются через них с помощью суперпозиций. Все дальнейшие исследования — локальные. Это означает, что мы фиксируем $\vec{a} \in G$, и рассматриваем всё в некоторой окрестности этой точки $\vec{a}$.

Определение: Пусть $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ — первые интегралы (1), определённые в некоторой окрестности точки $\vec{a}$, $\vec{a} \in G$. Эти первые интегралы называются *независимыми* в точке $\vec{a}$, если

$$\operatorname{Rg} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial x_n} \end{Vmatrix} = k.$$

(матрица размера $n \times k$)

Теорема: Для каждой точки $\vec{a} \in G$ существует $(n-1)$ независимых первых интегралов (1) и не существует большего числа независимых первых интегралов (1).

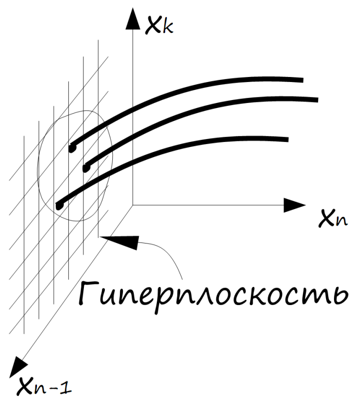
Доказательство: $u_1(\vec{x}), \ldots, u_k(\vec{x})$ — независимые в $\vec{a}$ первые интегралы (1).

$$\begin{gathered} \mathcal{F}_1(\vec{a}) \frac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial x_1} + \ldots + \mathcal{F}_n(\vec{a}) \frac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial x_n} = 0 \\ \cdots \\ \mathcal{F}_1(\vec{a}) \frac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial x_1} + \ldots + \mathcal{F}_n(\vec{a}) \frac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial x_n} = 0 \end{gathered}$$

— Система линейных автономных уравнений относительно $\mathcal{F}_1(\vec{a}), \ldots, \mathcal{F}_n(\vec{a})$, матрица системы $\left\| \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right\|$. Эта СЛАУ имеет нетривиальное решение, $\operatorname{Rg} \left\| \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right\|$, $k < n$, $k \leqslant n-1$.

$\vec{a}=\vec{0}$, $\mathcal{F}_n(\vec{a})\neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n} &= g_1(\vec{x}) \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_k} &= g_{n-1}(\vec{x}) \end{aligned} \tag{6}$$



$g_r(\vec{x})=\dfrac{\mathcal{F}_r}{\mathcal{F}_n}$ непрерывна вместе с первыми частными производными.

(6) рассмотрим в некоторой окрестности точки $\vec{a}=\vec{0}$.

Задача Коши: $x_n=0, x_1=\tau_1,\ldots,x_{n-1}=\tau_{n-1}$.

$$\left[\begin{array}{c} x_1=\varphi_1(x_n,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) \\ \cdots \\ x_{n-1}=\varphi_{n-1}(x_n,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) \end{array}\right. \tag{7}$$

Из результатов §4 Главы 3 следует, что $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ определены в некоторой окрестности $\vec{a}$ и непрерывна вместе с первыми частными производными.

$$\varphi_k(0,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})=\tau_k.$$

Поэтому $\left.\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\tau_r}\right|_{x=0}=\delta_{kr}$ (символ Кронекера, $\delta_{kr}\overset{def}{=}\begin{cases}1,\ k=r\\ 0,\ k\neq r\end{cases}$)

При этом

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{\partial(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})}\right|_{\vec{a}}=\begin{vmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

(7) $\underset{\text{в нек. окрестности } \vec{a}}{\Leftrightarrow}$ (8)

$$\begin{cases} \tau_1=p_1(\vec{x}) \\ \cdots \\ \tau_{n-1}=p_{n-1}(\vec{x}) \end{cases}, \tag{8}$$

где $p_1,\ldots,p_{n-1}$ непрерывны вместе в первыми частными производными.

Докажем, что $p_1(\vec{x}),\ldots,p_{n-1}(\vec{x})$ — именно нужные нам независимые первые интегралы (1). Ясно, что они являются первыми интегралами, осталось доказать независимость.

$$\frac{\partial(p_1,\ldots,p_{n-1})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-1})}=1\Big/\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{\partial(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})}=1/1=1\neq 0.$$

Замечание: Не нужно думать, что эти и только эти интегралы являются искомой совокупностью независимых первых интегралов. Мы построили всего лишь частный случай.

Дополнение к теореме. Графики решений системы (6) (то есть графики функций (7)) заполняют некоторую окрестность $\vec{a}$ (см. (8)).

Вопрос: Один из первых интегралов можно ли выразить через остальные?

Ответ: Нельзя, потому что первый интеграл выражается через совокупность независимых первых интегралов, причём единственным образом, следовательно, через остальные он выражен быть не может.

Замечание: Определение независимых интегралов было введено демонстративно математически. Теперь рассмотрим теорему, раскрывающую смысл этого определения.

Теорема: Пусть $u_1(\vec{x}),\ldots,u_{n-1}(\vec{x})$ — какие-либо независимые в $\vec{a}$ первые интегралы (1). Пусть $u(\vec{x})$ — первый интеграл (1), определённый в некоторой окрестности $\vec{a}$. Тогда существует функция $\Phi(u_1,\ldots,u_{n-1})$, непрерывная вместе с первыми частными производными такая, что

$$u(\vec{x})=\Phi\big(u_1(\vec{x}),\ldots,u_{n-1}(\vec{x})\big)$$

в некоторой окрестности $\vec{a}$. Функция Φ единственна в некоторой окрестности значений $u_1(\vec{a}),\ldots,u_{n-1}(\vec{a})$.

Доказательство: Для определённости $\vec{a}=\vec{0}$ Также для определённости берём

$$\left.\frac{\partial(u_1,\ldots,u_{n-1})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}\neq 0.$$

Докажем, что $\mathcal{F}_n(\vec{a})\neq 0$. Допустим противное. Пусть $\mathcal{F}_n(\vec{a})=0$.

Тогда имеет место соотношение

$$\begin{cases}\mathcal{F}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\mathcal{F}_{n-1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}=0\\ \ldots\\ \mathcal{F}_1\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+\ldots+\mathcal{F}_{n-1}\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=0\end{cases}$$

Система автономных линейных уравнений относительно $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_{n-1}$ имеет решение $\mathcal{F}_1=\ldots=\mathcal{F}_{n-1}=0$. Противоречие.

***

Тогда система приводится к виду:

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n}=g_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \ldots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}=g_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\end{matrix}\quad;$$

$g_1, \dots, g_{n-1}$ определены в некоторой окрестности $\vec{a}$ и непрерывна там вместе с первыми частными производными.

Случай $x_n = 0$:

$$\Gamma : \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \dots \\ u_{n-1} = u_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad \det \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{\vec{a}} \neq 0 \tag{9}$$

По теореме о неявных функциях,

$$(9) \underset{\text{в нек. окр. } \vec{a}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{c} x_1 = q_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ \dots \\ x_1 = q_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{array} \right.,$$

где $q_1, \dots, q_{n-1}$ непрерывны вместе со своими частными производными.

Замечание: $u_1, \dots, u_{n-1}$ создают криволинейную систему координат.

$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u\big(q_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, q_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), 0\big) =$

$\Phi(u_1, \dots, u_{n-1})$, Φ определена однозначно и непрерывна вместе с первыми частными производными. $\Box x_n = 0$.

$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})\big)$

Для этой системы рассмотрим задачу Коши:

$$x_n = 0, x_1 = \tau_1, \dots, x_{n-1} = \tau_{n-1}$$

Графики решения заполняют всю некоторую окрестность $\vec{a}$.

Вдоль каждой траектории каждый из аргументов остаётся постоянным (как первый интеграл). $u_1, \dots, u_{n-1}$ постоянны. Поэтому если равенство имело место в начале траектории, то оно имеет место в течение всей кривой.

Из того, что $u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})\big)$ при $x_n = 0$, следует, что $u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})\big)$ на каждом решении, то есть в некоторой окрестности $\vec{a}$.

***

Общая формула первых интегралов в некоторой окрестности $\vec{a}$:

$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-1}(\vec{x})\big),$$

где $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ — какие-либо независимые в $\vec{a}$ первые интегралы, функция Φ непрерывна вместе с первыми частными производными.

Замечание:

1. Если мы получили некоторое количество независимых первых интегралов $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$, то в некоторой окрестности $\vec{a}$ имеет место
$$\begin{gathered} u_1(\vec{x}) = c_1 \\ \ldots \\ u_k(\vec{x}) = c_k \end{gathered}$$
где $c_1, \ldots, c_k$ — константы. $\operatorname{Rg}\left\|\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\| = k$. По теореме о неявной функции (почему?), можно понизить порядок системы (1).

2. Рассмотрим такое уравнение:
$$p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$
в некоторой области G. p, q непрерывны вместе с первыми частными производными в каждой точке $p \neq 0$ или $q \neq 0$. Это уравнение мы рассматривали ещё на самой первой лекции. С другой стороны эта "система из одного уравнения" подходит под наш случай. ($n = 2$, $n - 1 = 1$)
$$\frac{\mathrm{d}x}{Q} = \frac{\mathrm{d}y}{P}$$
$u_1(x,y)$ — система независимых первых интегралов, $\operatorname{Rg}\left\|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)\right\| = 1.$

Всё в окрестности некоторой точки $\vec{a}$.
$$\mathrm{d}u_1(x,y) = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$
Следовательно, существует непрерывная функция $\mu(x,y)$, $\mu(x,y)$ не обращается в 0, такая, что
$$\mu p = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \mu q = \frac{\partial u_1}{\partial y}$$
Только сейчас мы доказали, что при некоторых предположениях, интегрирующий множитель всегда существует.

3. $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}z} = \vec{f}(z,\vec{y}),\ \vec{y} = \left\|\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}\right\|,\ \vec{f} = \left\|\begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}\right\| \tag{11}$$
$\vec{f}$ определена в области G и непрерывна там вместе с первыми частными производными.
$$\frac{\mathrm{d}y_1}{f_1} = \ldots = \frac{\mathrm{d}y_n}{f_n} = \frac{\mathrm{d}z}{1}$$

Система (11) имеет в каждой точке $(z_0, \vec{y}_0)$ n независимых первых интегралов (и не больше).

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}z} = \vec{f}(\vec{z}) \text{ — автономная система}$$

Пусть $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Заметим, что система $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{f_1} = \ldots = \dfrac{\mathrm{d}y_n}{f_n}$ имеет $n-1$ независимых первых интегралов.

Пусть автономная система дифференциальных уравнений рассматривается в окрестности точки не являющейся положением равновесия. Тогда в некоторой окрестности этой точки существует $n-1$ независимых первых интегралов, являющихся функциям $y_1, \ldots, y_n$ (то есть не зависящие от z).

Замечание: Эти рассуждения относятся к несовершенству терминологий: казалось бы, количество первых интегралов не изменится, так как случай автономных систем – это просто очередной частный случай.

§2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

1.

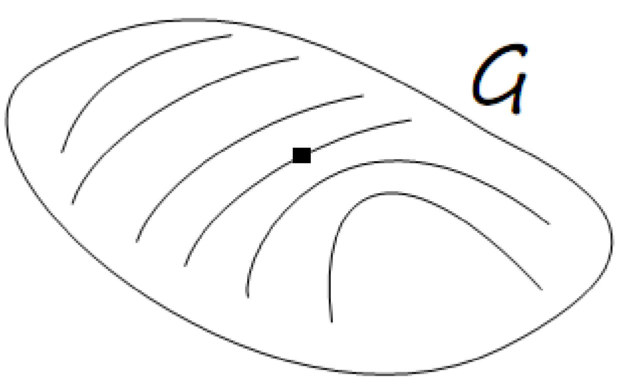
$$\mathcal{F}_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \mathcal{F}_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ определены в некоторой области $\underset{x_1,\ldots,x_n}{G}$ и непрерывны там вместе с первыми частными производными. В каждой точке G имеет место $\mathcal{F}_1 \neq 0$ или $\ldots$ или $\mathcal{F}_n \neq 0$.

Для этого уравнения составляем вспомогательную систему

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \vec{x}, \left\| \begin{matrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n \end{matrix} \right\| = \vec{\mathcal{F}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathcal{F}_1(\vec{x})} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathcal{F}_n(\vec{x})} \tag{2}$$



Область как бы расслаивается на решения.

Определение: Графики решений системы (2) называются *характеристиками* уравнения (1).

Определение: Пусть $u(\vec{x})$ непрерывна вместе с первыми частными производными, $u(\vec{x})$ называется решением (1) если $u(\vec{x})$ удовлетворяет (1) в каждой точке.

Теорема: Пусть $u(\vec{x})$ непрерывна в G вместе с первыми частными производными. Тогда $u(\vec{x})$ — решение (1) $\quad\Leftrightarrow\quad u(\vec{x})$ — первый интеграл (2).

Доказательство: (см. §1)

Общая формула решения (1) в некоторой окрестности $\vec{a}$.

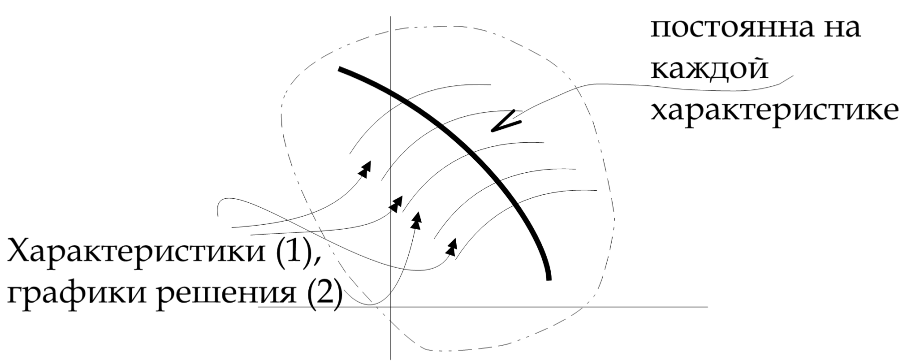
$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})\big),$$

где $u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})$ — какие-либо независимые в $\vec{a}$ первые интегралы (2) Φ непрерывна вместе с первыми частными производными.

Доказательство: (см. §1)

2. Задача Коши для уравнения (1)

В G задана $n-1$-мерная поверхность П. На П задана функция h. Найти $u(\vec{x})$ — то решение (1), которое удовлетворяет условию $u = h$ на П



В данном случае $n-1$-мерная поверхность — это одномерная кривая. Возьмём точки, лежащие на П, и проведём через эти точки характеристики.

Теорема: Пусть а G задано множество П уравнением

$$g(\vec{x}) = 0, \tag{4}$$

где $g(\vec{x})$ непрерывна вместе с первыми частными производными.

Пусть $\vec{a} \in$ П. Пусть выполняется условие

$$\mathcal{F}_1(\vec{a})\frac{\partial q}{\partial x_1}(\vec{a}) + \ldots + \mathcal{F}_n(\vec{a})\frac{\partial q}{\partial x_n}(\vec{a}) \tag{5}$$

Пусть в некоторой окрестности $\vec{a}$ задана функция $h(\vec{x})$, непрерывная вместе с первыми частными производными. Тогда в некоторой окрестности $\vec{a}$ существует и притом единственное решение (1) такое, что

$$u(\vec{x}) = h(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Pi$$

Доказательство: Мы имеем точку $\vec{a}$. Возьмём в окрестности точки $\vec{a}$ какие-либо независимые в $\vec{a}$ первые интегралы (2). Тогда, как говорилось ранее,

$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_n(\vec{x})\big).\ \Phi = ?$$

Следующий фрагмент рассуждений от ► до ◄ — на П. ►

$$\left[\begin{array}{c} u_1(x_1, \ldots, x_n) = u_1 \\ \ldots \\ u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = u_1 \\ g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Докажем, что якобиан $\left.\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1}, q)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\vec{a}}$ не равен нулю. Доказательство от противного. $\vec{x} = \vec{a}$:

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial q}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Мы знаем, что первые $n-1$ строк линейно независимы. Значит, последняя строка является линейной комбинацией предыдущих:

$$\frac{\partial q}{\partial \vec{x}} = \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{x}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \vec{x}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k \frac{\partial q}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k \left(\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) = \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k \frac{\partial u_r}{\partial x_k} =$$
$$= \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \cdot 0 = 0,$$

что противоречит (5)ю

$$(6) \underset{\text{в нек. окр. } \vec{a}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{c} x_1 = q_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ \ldots \\ x_n = q_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{array}\right. \tag{7}$$

$q_1, \ldots, q_n$ — непрерывные вместе с первыми частными производными.

$$h(\vec{x}) = h\big(q_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, q_n(u_1, \ldots, u_{n-1})\big) = \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Φ непрерывна вместе с первыми частными производными, Φ определена однозначно. ◄

Берём в G в некоторой окрестности $\vec{a}$

$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}), \ldots, u_{n-1}(\vec{x})\big).$$

$u(\vec{x})$ — некоторое решение (1).

Замечание: О геометрическом смысле (5)**.**

Как известно из курса математического анализа, математическое выражение

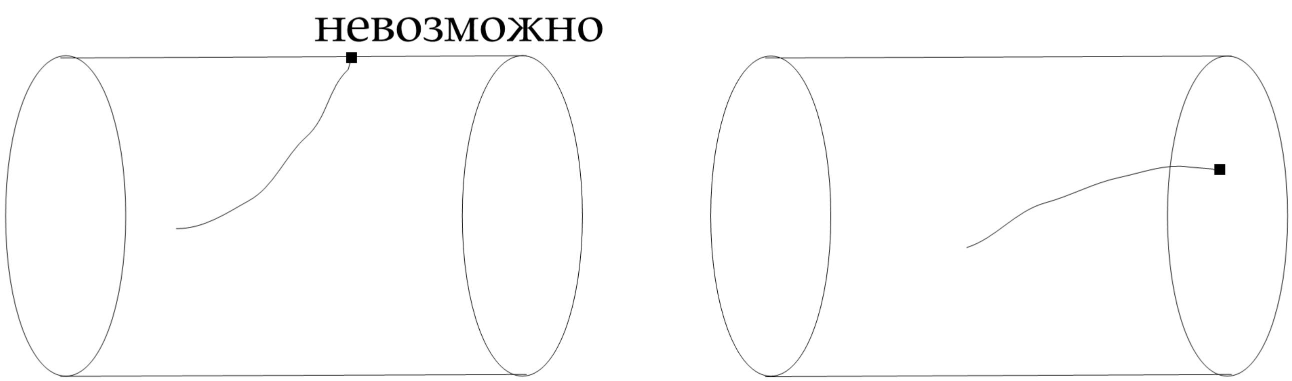
$$\left\| \frac{\partial q}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial q}{\partial x_n} \right\|$$

есть градиент функции q. П — множество уровня q. $\operatorname{grad} q$ ортогонален множеству уровня q.

$$\left(\operatorname{grad} q, \vec{\mathcal{F}}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ не касается П.}$$

Иллюстрация при $n = 2$.



Пример.

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

G — плоскость x, y с выброшенной точкой $(0, 0)$. (Точку выбрасываем, потому что в ней $\mathcal{F}_1 = 0$, $\mathcal{F}_2 = 0$.)

Составляем систему:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x},$$

откуда

$$\mathrm{d}(x^2 + y^2) = 0,\ u_1(x, y) = x^2 + y^2 \text{ – первый интеграл.}$$

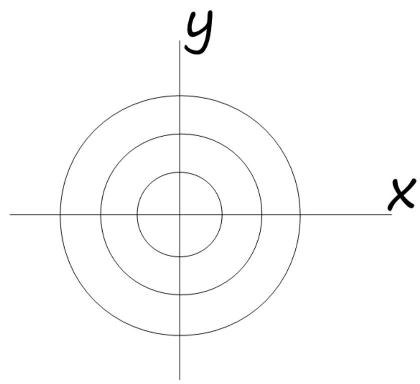
$n = 2$, $n - 1 = 1$. Надо проверить, что система из одного первого интеграла является независимой системой.

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\| = \|2x,\ 2y\|\,.$$

$$\operatorname{Rg}\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\| = 1.$$

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2) \text{ – формула общего решения.}$$

$$u_1 = c,\ x^2 + y^2 = c$$



Задача Коши: $u(x,y) = h(x)$ при $y = 0 \wedge x > 0$.

$$g(x,y) = y,\ y \cdot 0 - x \cdot 1 = -x \neq 0.$$

$$u_1(x,y) = x^2 \text{ при } x > 0\ \wedge\ y = 0$$

$$\text{на } \Pi\ x = \sqrt{u_1},\ u(x,y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ в } G.$$

Глава 6. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t),\ \vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix},\ \vec{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix} \tag{$*$}$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}; \end{Vmatrix}$$

A и $\vec{f}$ заданы, $\vec{y}(t)$ — искомая функция, t — независимая переменная. $t \in \mathbb{R}$; $A, \vec{f}, \vec{y}$ — комплексные.

$A = B + iC$, $\vec{f} = \vec{g} + i\vec{h}$, $\vec{y} = \vec{u} + i\vec{v}$;

$B, C, \vec{g}, \vec{h}, \vec{u}, \vec{v}$ — вещественные.

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} &= B\vec{u} - C\vec{v} + \vec{g} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= C\vec{u} + B\vec{v} + \vec{h} \end{aligned} \right.$$

§1. Уточнение исследования задачи Коши

Теорема: Пусть $A(t)$ и $\vec{f}(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Пусть $t_0 \in [\alpha, \beta]$ и $\vec{y}_0$ — произвольный вектор. Тогда существует и притом единственное решение уравнения $(*)$, удовлетворяющее условию

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \tag{1}$$

и определённые на всём $[\alpha, \beta]$.

Замечание: Ценность этого утверждения заключается в подчёркнутой части.

Доказательство: $|A(t)| \leqslant a_1 |\vec{f}(t)| \leqslant b$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$$

При $t \geqslant t_0$: (если не выполняется, делаем замену t на $-t$)

$$|\vec{y}(t)| \leqslant |\vec{y}_0| + \int_{t_0}^{t} \big(a|\vec{y}(\tau)| + b\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$|\vec{y}(t)| \leqslant |\vec{y}_0| + b(\beta - \alpha) + a\int_{t_0}^{t} |\vec{y}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

По неравенству Гронуолла (см. §1 Главы 3) получаем

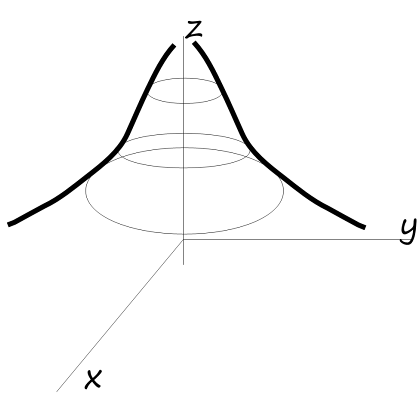
$$y(t) \leqslant \big(|\vec{y}_0| + b(\beta-\alpha)\big)e^{a|t-t_0|} \leqslant \big(|\vec{y}_0| + b(\beta-\alpha)\big)e^{a(\beta-\alpha)} = C_1$$

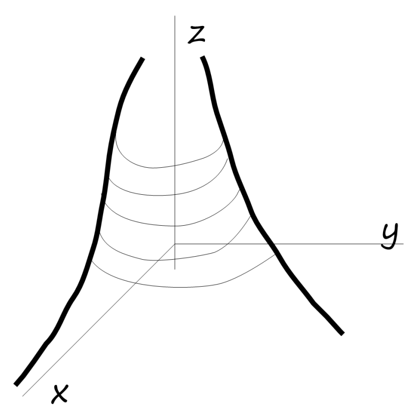
$$D\colon \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta, |\vec{y}| \leqslant C_2\}, C_2 > C_1.$$

По теореме о продолжении решения (см. Главу 3), получаем, что решение может быть продолжено на весь отрезок.

Следовательно, решение определено при $[t_0, \beta]$. Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение $y' = 1 + y^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными, его решение $y = \operatorname{tg}\,(t + c)$





§2. Системы нормальных дифференциальных уравнений (линейных) с переменными коэффициентами

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}, \vec{z} = \left\| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right\|, A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ \vec{z} \text{ и } A \text{ — комплексные, } A(t) \text{ — непрерывна на } [\alpha, \beta]$$

$(1) \cap \vec{z}(t_0) = \vec{z_0}$, где $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$, $\vec{z_0}$ — производная

Эта задача Коши имеет решение и притом единственное, определенное на всём $[\alpha, \beta]$.

Всякое решение в дальнейшем будем рассматривать на всём $[\alpha, \beta]$.

Все величины, кроме t, комплексные.

1. Простейшие свойства решений.

Теорема: Пусть $\vec{z_1}(t), \dots, \vec{z_k}(t)$ — решение (1), $c_1, \dots, c_k$ — комплексные числа, тогда

$$\vec{z}(t) = c_1\vec{z_1}(t) + \ldots + c_k\vec{z_k}(t)$$

— решение (1)

Теорема: Пусть $\vec{z}(t)$ — решение (1), $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\vec{z}(t_0) = \vec{0}$. Тогда $\vec{z}(t) \equiv \vec{0}$.

Доказательство: $\vec{W}(t) \equiv \vec{0}$ — решение $(1) \cap \vec{W}(t_0) = \vec{0}$

$\vec{z}(t)$ — решение $(1) \cap \vec{z}(t_0) = \vec{z}0$

В силу единственности решения задачи Коши $\vec{z}(t) \equiv \vec{W}(t)$.

Определение: Решения $\vec{z_1}(t), \dots, \vec{z_k}(t)$ уравнения (1) называются *линейно зависимыми*, если существуют $c_1, \dots, c_k$ $(c_1 \neq 0, \dots, c_k \neq 0)$, такие что:

$$c_1\vec{z_1}(t) + \ldots + c_k\vec{z_k}(t) \equiv \vec{0}.$$

Определение: Решения, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

Теорема: Пусть $\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}$ — линейно независимые решения (1), $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда векторы $\vec{z_1}(t_0), \dots, \vec{z_k}(t_0)$ — линейно независимые.

Доказательство: Пусть $c_1\vec{z_1}(t), \dots, c_k\vec{z_k}(t) = 0$

$\vec{W}(t) = c_1\vec{z_1}(t) + \ldots + c_k\vec{z_k}(t)$, тогда

$\vec{W}(t)$ — решение (1) и $\vec{W}(t_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{W}(t) \equiv \vec{0}$ на $[\alpha, \beta]$.

Определение: Любая совокупность n линейно независимых решений (1) называется фундаментальной системой решений (1).

Теорема: Фундаментальные системы решений существуют.

Доказательство: $t_0 \in [\alpha, \beta]$; $\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n$ — линейно независимые векторы.

Для $r = 1, \ldots, n$ определено $\vec{z}_r(t)$: решение задачи Коши (1) $\bigcap \vec{z}_r(t_0) = \vec{m}_r$ — получим n линейно независимых решений.

Если $c_1\vec{z}_1(t) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t) \equiv \vec{0} \quad \Rightarrow$

$c_1\vec{z}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t_0) = \vec{0}$, то есть

$c_1\vec{m}_1 + \ldots + c_n\vec{z}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0$

Теорема: Пусть $\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_n(t)$ — некоторая фундаментальная система решений (1); пусть $\vec{z}(t)$ — какое-либо решение (1). Тогда $\vec{z}(t)$ представляется единственным образом в виде:

$$\vec{z}(t) = c_1\vec{z}_1(t) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ - числа.

Доказательство: $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\vec{z}_1(t_0), \ldots, \vec{z}_n(t_0)$ — линейно независимы.

Следовательно, вектор $\vec{z}(t_0) = c_1\vec{z}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t_0)$, где $c_1, \ldots, c_n$ определены однозначно.

$\vec{W}(t) = c_1\vec{z}_1(t) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t)$ — решение (1)

$\vec{W}(t_0) = \vec{z}(t_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{z}(t) = c_1\vec{z}_1(t) + \ldots + c_n\vec{z}_n(t)$

Резюме:

1. Совокупность решений уравнения (1) — линейное пространство.
2. Размерность этого пространства равна n.
3. Фундаментальная система решений — базис этого пространства.
4. Зафиксируем $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Соответствие $\vec{z}(t) \leftrightarrow \vec{z}(t_0)$ — изоморфизм пространства решений и пространства столбцов высоты n.

2. Пусть $\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_n(t)$ — некоторая фундаментальная система решений (1).

Определение: $Z(t)$ — матричная функция, $Z(t) = \|\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_n(t)\|$ называется фундаментальной матрицей решений (1).

Свойства фундаментальной матрицы решений:

1. $Z(t)$ — матрица размера $n \times n$ на $[\alpha, \beta]$
2. $Z(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$
3. $\dfrac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot Z(t)$
4. $\det Z(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$

Утверждение: Пусть $Z(t)$ — матричная функция на $[\alpha, \beta]$, обладающая свойствами (1)—(4). Тогда $Z(t)$ - фундаментальная матрица решений (1).

Утверждение: Пусть $Z(t)$ — фундаментальная матрица решений (1), и $\vec{z}(t)$ — некоторое решение (1). Тогда $z(t)$ представляется единственным образом в виде

$$\vec{z}(t) = Z(t) \cdot \vec{C},\, \vec{C} = const.$$

3. Определение: Пусть $\vec{z_1}(t), \dots, \vec{z_n}(t)$ — некоторые решения (1). Определитель

$$W = \det \|\vec{z_1}(t), \dots, \vec{z_n}(t)\|$$

называется определителем Вронского или вронскианом совокупности решений $\vec{z}_1(t), \dots, \vec{z}_n(t)$

1. $W(t)$ не обращается в 0 на $[\alpha, \beta] \quad \Leftrightarrow \quad$ решения (1) $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$ — линейно независимы.
2. $W(t) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta] \quad \Leftrightarrow \quad$ решения (1) $\vec{z_1}, \dots, \vec{z_n}$ — линейно зависимы
3. $W(t_1) = 0, W(t_2) = 0$ — этого для решений (1) быть не может.

Теорема: Теорема Лиувилля-Остроградского.

Пусть $\vec{z_1}, \dots, \vec{z_n}$ — некоторые решения (1), $W(t)$ — соответствующий вронскиан, $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\sum_r a_{rr}(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right) \tag{2}$$

где $a_{rr} = \mathrm{tr} A$ — след матрицы.

Доказательство:

$$W' = \mathrm{tr} A \cdot W \tag{3}$$

$$W' = \sum_{p,q} \frac{\partial W}{\partial z_{pq}} \cdot z'_{pq} = \sum_{p,q} W_{pq} \cdot \sum_r a_{pr} z_{rq} = \sum_{p,q,r} W_{pq} a_{pr} z_{rq} = \sum_{p,r} (\sum_q W_{pq} z_{rq}) a_{pr} = \sum_{p,r} W \delta_{pr} a_{pr} = W \mathrm{tr} A$$

W_{pq} — алгебраическое дополнение z_{pq} в W

$$\sum_q W_{pq} z_{rq} = W \delta_{pr} = \begin{cases} 1, p = r \\ 0, p \neq r \end{cases}$$

Левая и правая части уравнения (2) удовлетворяют (3), и левая и правая части уравнения (2) в точках t_0 равны, поэтому в силу единственности решения задачи Коши получаем, что (2) верно для любого t.

4.

Задача: Найти уравнение, для которого данные функции являются решениями:

$\vec{z_1}(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \vec{z_2}(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ t \end{Vmatrix}$ на $[\alpha, \beta]$

$c_1\vec{z_1}(t) + c_2\vec{z_2}(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow$

$c_1 + c_2 t \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$

Значит $\vec{z_1}(t)$ и $\vec{z_2}(t)$ — линейно независимы.

$W(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{Vmatrix}$. Никакого противоречия нет, так как $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ должны быть решениями (1) $(n = 2)$.

Из этого примера следует, что не существует дифференциальных уравнений вида (1), для которых $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ являются решениями.

5.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A\vec{z},\ A = const,\ -\infty < t < +\infty \tag{4}$$

Теорема: Пусть матрица A такова, что существует базис $\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n}$ из её собственных векторов $(A\vec{g_r} = \lambda_r \vec{g_r}, r = \overline{1, n})$, тогда $e^{\lambda_1 t}\vec{g_1}, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{g_n}$ — фундаментальная система решений(4)

Теорема: Матричная функция e^{tA} — фундаментальная матрица решений.

§3. Неоднородные системы

Рассмотрим систему

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t), \tag{1}$$

$\vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}, \vec{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $A(t), \vec{f}(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{z} \tag{2}$$

t—вещественное, всё остальное комплексное.

Теорема: Пусть $\vec{y}_*(t)$ — какое-либо решение (1), $\vec{y}(t) = \vec{y}_*(t) + \vec{z}(t)$. Тогда $\vec{y}(t)$ — решение (1) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\vec{z}(t)$ — решение (2).

Доказательство: самостоятельно.

Общая формула решения (1):

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_*(t) + C_1\vec{z}_1(t) + \ldots + C_n\vec{z}_n(t),$$

где $\{\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_n(t)\}$ — какая-либо фундаментальная система решений (2), $\vec{y}_*(t)$ — какое-либо решение (1), $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные числа.

2. Метод Лагранжа вариации постоянных

Теорема: Если известна какая-либо фундаментальная система решений однородной системы (2), то решение уравнения (1) получается в квадратурах.

Доказательство: Метод получения решения. Пусть известна какая-либо фундаментальная система $\{\vec{z}_1(t), \dots, \vec{z}_n(t)\}$. «Сдвигаем» эти столбцы в единую матрицу

$$Z(t) = \|\vec{z}_1(t), \dots, \vec{z}_n(t)\|$$

Это — фундаментальная матрица решений.

$$\vec{y}(t) = Z(t)\vec{x}(t),$$

$\vec{x}(t)$ — новая искомая функция.

$$\vec{x}(t) = Z^{-1}(t)\vec{y}(t),\ Z^{-1}(t) \text{ существует.}$$

После такой замены уравнение (1) становится эквивалентным

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(Z\vec{x})}{\mathrm{d}t} = AZ\vec{x} + \vec{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\vec{x} + Z\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = AZ\vec{x} + \vec{f} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad AZ\vec{x} + Z\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = AZ\vec{x} + \vec{f} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f} = Z\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = Z^{-1}\vec{f} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}(t) = \int Z^{-1}(t)\vec{f}(t)\,\mathrm{d}t + \vec{C} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}(t) = Z(t)\Big(\vec{C} + \int Z^{-1}(t)\vec{f}(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

Под интегралом имеется в виду какая-либо фиксированная первообразная, $\vec{C}$ — произвольная постоянная.

Замечание: Метод называется методом вариации постоянных. Лагранжу пришла в голову мысль: решение неоднородного уравнения представить в виде известной матрицы, умноженной на новую искомую функцию. Неудачность названия в том, что под вариацией понимается малое изменение, а превращение постоянных в функции.

Решение задачи Коши для (1):

$$t_0 \in [\alpha, \beta],\ \vec{y}_0 \text{ – произвольный вектор.}$$

$\vec{y}(t)$ — решение $(1) \wedge \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

$$\vec{x}(t_0) = Z^{-1}(t_0)\vec{y}_0,$$

$$\vec{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Z^{-1}(t_0)\vec{y}_0.$$

Тогда

$$\vec{y}(t) = Z(t)\Big(Z^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)$$

§4. Одно линейное уравнение n-ного порядка.

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t)$$

$t \in \mathbb{R}$, $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ — комплексные.

Если ввести столбец функций $\vec{y} = \begin{Vmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \ldots \\ y^{(n-1)} \end{Vmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & & \cdots & & -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix}, \vec{f}(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{Vmatrix}$$

Рекомендуется самим проделать выкладки и получить систему. (1) $\Leftrightarrow$ $(\vec{1})$. Можно было бы писать, что это следует из предыдущих двух параграфов, но будет лучше, если читатель сам найдёт аргументацию.

1. Теорема: Пусть в уравнении (1) функции $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Пусть $t_0 \in [\alpha, \beta]$, и $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ — какие-либо числа. Тогда существует и притом единственное решение $y(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$y(t_0) = p_0,\ y'(t_0) = p_1,\ \ldots,$$

и определённое на всём отрезке $[\alpha, \beta]$. (Доказать самим, то есть посмотреть доказательство аналогичной теоремы для системы, и получить это утверждение как частный случай).

2. Однородные системы.

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)z = 0. \tag{2}$$

Теорема: Пусть $z(t)$ — решение уравнения (2), $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $z(t_0) = z'(t_0) = \ldots = z^{(n-1)}(t_0) = 0$. Тогда $z(t) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Доказательство самостоятельно.

Теорема: Пусть $z_1(t), \ldots, z_k(t)$ — какие-либо решения уравнения (2), $C_1, \ldots, C_k$ — числа,

$$z(t) = C_1 z_1(t) + \ldots + C_k z_k(t).$$

Тогда $z(t)$ — решение (2).

Доказать самим. **Замечание:** Ну что тут доказывать?! Доказывать-то нечего. *Рекомендую* провести все эти доказательства, это упражнения.

Определение: Решения $z_1(t), \ldots, z_k(t)$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $C_1, \ldots, C_k$, $C_1^2 + \ldots + C_k^2 > 0$, такие, что

$$C_1 z_1(t) + \ldots + C_k z_k(t) \equiv 0 \ \ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

В противном случае решения называются линейно независимыми.

Теорема: Пусть $z_1(t), \ldots, z_k(t)$ — решения уравнения (2), а $\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_k(t)$ — соответствующие решения уравнения $(\vec{2})$. Тогда решения $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда решения $\vec{z}_1(t), \ldots, \vec{z}_n(t)$ — линейно зависимы.

Замечание: А это уже содержательная теорема. Мы дали новое определение. Назовём решения линейно зависимыми, если линейно зависимы вектор-функции. Поэтому это утверждение должно быть доказано. А доказывается оно очень просто.

Доказательство:

$$C_1 z_1(t) + \ldots + C_k z_k(t) \equiv 0 \text{ на } [\alpha, \beta]$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} C_1 z_1'(t) + \ldots + C_k z_k'(t) \equiv 0 \\ \ldots \\ C_1 z_1^{(n-1)}(t) + \ldots + C_k z_k^{(n-1)}(t) \equiv 0 \\ C_1 \vec{z}_1(t) + \ldots + C_k \vec{z}_k(t) \equiv \vec{0} \end{gathered}$$

Обратно: $C_1 \vec{z}_1(t) + \ldots + C_k \vec{z}_k(t) \equiv \vec{0} \quad \Rightarrow \quad C_1 z_1(t) + \ldots + C_k z_k(t) \equiv 0.$

Определение: Каждый набор n линейно независимых решений (2) называется фундаментальным решением системы (2).

Теорема: фундаментальные системы решений существуют. (Доказать самостоятельно)

Теорема: Пусть $\{z_1(t), \ldots, z_k(t)\}$ — какая-либо фундаментальная система решений (2), $z(t)$ — какое-либо решение (2). Тогда $z(t)$ представляется, и притом единственным способом в виде $z(t) = c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — числа.

Доказать самостоятельно.

Определение: Пусть $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ — какие-либо решения (2). Тогда

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & \cdots & z_n(t) \\ z_1'(t) & \cdots & z_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{(n-1)} & \cdots & z^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

называется *определитель Вронского (вронскиан)*. Имеется две возможности:

- $W(t) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta] \quad \Leftrightarrow \quad$ <u>решения системы (2)</u> $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ линейно зависимы.
- $W(t)$ не обращается в 0 на $[\alpha, \beta] \quad \Leftrightarrow \quad$ <u>решения системы (2)</u> $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ линейно независимы.

Было выяснено, что других ситуаций невозможно.

Теорема: (Лиувилля-Остроградского).

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}$$

Напоминание: уравнение имеет вид $z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)z = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ -a_n & & \cdots & -a_1 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

3. Связь решений однородной и неоднородной системы.

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y = f(t), \tag{1'}$$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)z = 0 \tag{2}$$

Теорема: Пусть $y_*(t)$ — какое-либо решение $(1')$, $y_(t) = y_*(t) + z(t)$. Тогда $y(t)$ — решение $(1')$ $\Leftrightarrow$ $z(t)$ — решение (2).

Общая формула решения $(1')$:

$$y(t) = y_*(t) + C_1z_1(t) + \ldots + C_nz_n(t),$$

где $y_*(t)$ — какое-либо решения $(1')$, $\{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$ — какая-либо фундаментальная система решений (2), $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные числа.

Метод Лагранжа вариации постоянной для $(1')$**.**

$$\vec{y} = Z\vec{x},\ Z \text{ – фундаментальная матрица решений, } Z\vec{x} = \vec{f} \text{ для системы}$$

$z_1(t), \ldots, z_n(t)$ — какая-либо фундаментальная система решений (2),

$$Z = \begin{Vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{Vmatrix},$$

$x_1(t), \ldots, x_n(t)$:

$$\begin{gathered} y = z_1x_1 + \ldots + z_nx_n \\ y' = z_1'x_1 + \ldots + z_n'x_n \\ \cdots \\ y^{(n-1)} = z_1^{(n-1)}x_1 + \ldots + z_n^{(n-1)}x_n \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} z_1x_1' + \ldots + z_nx_n' = 0 \\ z_1'x_1' + \ldots + z_n'x_n' = 0 \\ \cdots \\ z_1^{(n-2)}x_1' + \ldots + z_n^{(n-2)}x_n' = 0 \\ z_1^{(n-1)}x_1' + \ldots + z_n^{(n-1)}x_n' = f(t) \end{gathered}$$

Это система линейных автономных уравнений относительно $x_1', \ldots, x_n'$. Детерминант этой системы это $W(t)$, он отличен от 0 для каждого $t \in [\alpha, \beta]$.

4. Рассмотрим уравнение

$$-\Big(p(t)y'\Big)' + q(t)y = m(t), \tag{3}$$

то есть $-py'' - p'y' + qy = m$. Также дополним его краевой задачей

$$y(\alpha) = y_1,\, y(\beta) = y_2 \tag{4}$$

Здесь $p(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, $q(t)$ и $m(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Теорема: Пусть $p(t) > 0$ и $q(t) \geqslant 0$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда задача (3)$\wedge$(4) имеет и притом единственное решение.

Доказательство: Составим вспомогательное однородное уравнение

$$-(pz')' + qz = 0 \tag{5}$$

$z_1(t), z_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (5). Тогда

$$y(t) = y_*(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{c} C_1 z_1(t_1) + C_2 z_2(t_1) = y_1 - y_*(\alpha) \\ C_1 z_1(t_2) + C_2 z_2(t_2) = y_2 - y_*(\beta) \end{array}$$

Докажем, что $D = \begin{vmatrix} z_1(t_1) & z_2(t_1) \\ z_1(t_2) & z_2(t_2) \end{vmatrix} \neq 0$. Отсюда следует, что эта система имеет, и притом единственное, решение.

Допустим противное, то есть определитель системы равен нулю.

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1 z_1(t_1) + \hat{C}_2 z_2(t_1) = 0 \\ \hat{C}_1 z_1(t_2) + \hat{C}_2 z_2(t_2) = 0 \end{array} \right.$$

Тогда система, написанная выше, имеет нетривиальное решение $z(t) = \hat{C}_1 z_1(t) + \hat{C}_2 z_2(t)$.

$$-(pz')' + qz = 0,\, z(\alpha) = z(\beta) = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta \Big(-(pz')'z + qz^2 \Big)\, \mathrm{d}t = 0$$

$$\int\limits_\alpha^\beta = \underbrace{\Big[pz'z\Big]_\alpha^\beta}_{=0} - \int\limits_\alpha^\beta (pz')^2\, \mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(p(z')^2 + qz^2\Big)\,\mathrm{d}t = 0,\ z' \equiv 0,\ z \equiv 0$$

Противоречие, z тривиальное решение.

Замечание: (См. п.4 §1 Главы 2). Там мы изучали случай квадратичного функционала, и доказали там, что для этого квадратичного функционала уравнение Эйлера имеет вид (3). Если y есть решение этого уравнения, то он даёт минимум функционала. Это была единственная теорема в этом разделе, где давались достаточные условия минимума. Имеет ли это уравнение решение? В первом семестре мы не могли этого доказать. Сейчас мы заполнили этот пробел.

§5. Теорема Штурма

Жан Франсуа Штурм — французский математик.

В этом параграфе все величины вещественные.

1. Будем рассматривать уравнения

$$y'' + a(t)y' + b(t)t = 0, \tag{1}$$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a(t), b(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Замечание: В этом параграфе будут рассматриваться осцилляционные (колебательные) свойства решений. Будет исследоваться, сколько раз нетривиальные решения могут обращаться в ноль.

Определение: Пусть $f(\hat{t}) = 0$. Тогда $\hat{t}$ называется *нулём* функции f.

Важное преобразование уравнения (1). Сделаем замену:

$$y(t) = \alpha(t)z(t),$$

где $z(t)$ — новая искомая функция, $\alpha(t)$ выбираем мы.

$$\alpha''z + \underline{2\alpha'z'} + a\alpha'z + \underline{a\alpha z'} + b\alpha z = 0$$

$\alpha(t)$ выбираем так, чтобы сумма подчёркнутых слагаемых равнялась нулю (избавляемся от членов с первой производной). Решая дифференциальное уравнение, получаем ответ:

$$\alpha = Ce^{-\int \frac{a(t)}{2}\,\mathrm{d}t}$$

C — фиксированная константа, интеграл — какая-либо фиксированная первообразная.

Возьмём какую-либо $C \neq 0, \alpha(t)$ не обращается в 0.

$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = 0$$

$$z'' + p(t)z = 0 \tag{1'}$$

Замечание: Запоминать эту формулу не нужно. Нужно запомнить идею (замену $y = \alpha z$). Для строгого обоснования преобразования потребуем ещё $a'(t)$ — непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Зачем это надо? После преобразования в уравнение войдёт вторая производная α, которая будет содержать первую производную функции a.

Дальше будем рассматривать однородные линейные уравнения второго порядка без первой производной.

2. Теорема Штурма (Теорема сравнения)

Рассмотрим на $[\alpha, \beta]$ два уравнения.

1. $z_1'' + p_1(t)z_1 = 0$

2. $z_2'' + p_2(t)z_1 = 0$

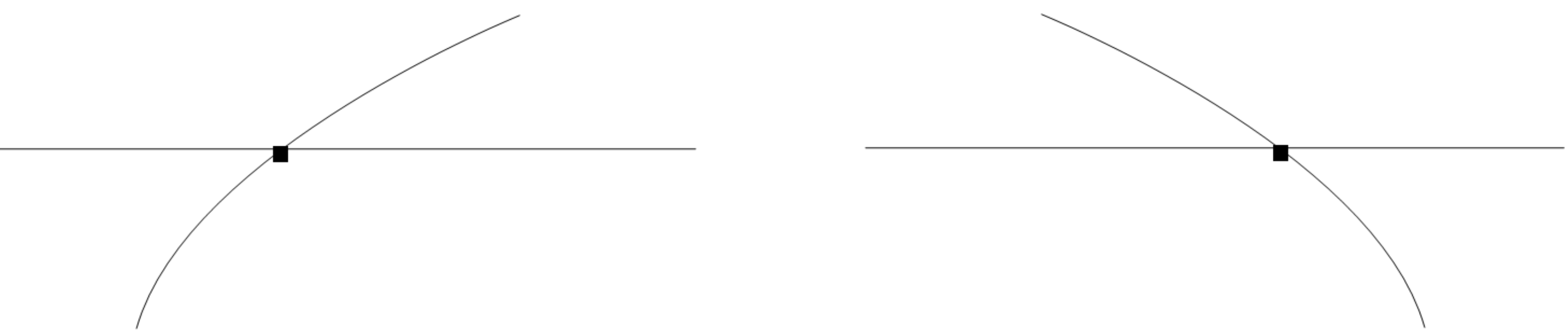
Пусть $z_1(t), z_2(t)$ — нетривиальные решения этих уравнений. Пусть кроме того, $p_1(t), p_2(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и $p_1(t) \leqslant p_2(t)$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Пусть t_1 и t_2 — соседние нули $z_1(t)$. Тогда $z_2(t)$ имеет нуль на (t_1, t_2) или $z_2(t_1) = z_2(t_2) = 0$.

Замечание: Надо обратить внимание, что “или” не разделительное, а математическое (то есть не является взаимоисключающим).

Доказательство: Докажем, что каждый нуль нетривиального решения

$$z'' + p(t)z = 0,$$

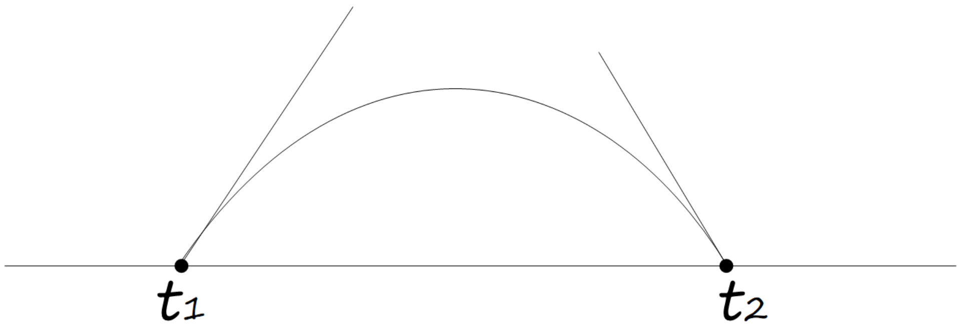
где $p(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, *изолированный*. (То есть нули не накапливаются в какой-то точке). $z(t)$, $z(\hat{t}) = 0$, $z'(\hat{t}) \neq 0$. Если $z(\hat{t}) = z'(\hat{t}) = 0$, то $z(t) \equiv 0$.



Таким образом, термин *“соседние нули”* оправдан.

Доказательство теоремы от противного.

$t_1 < t_2$, $z_1(t) > 0$ при $t_1 < t < t_2$. $z_2(t) > 0$ при $t_1 < t < t_2$, $z_2(t_2) > 0$, $z_2(t_1) \geqslant 0$. Тогда $z_1'(t_1) > 0$, $z_1'(t_1) \neq 0$.



По тем же причинам $z_1'(t_2) < 0$.

Тогда

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(z_2(t)z_1''(t) - z_1(t)z_2''(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(p_1(t) - p_2(t)\Big) z_1(t)z_2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$$z_2 z_1'' - z_1 z_2'' = (z_2 z_1' - z_1 z_2')'$$

$$\underbrace{z_2(t_2)z_1'(t_2)}_{<0} - \underbrace{z_1(t_2)z_2'(t_2)}_{=0} - \underbrace{z_2(t_1)z_1'(t_1)}_{\leqslant 0} +$$

$$+ \underbrace{z_1(t_1)z_2'(t_1)}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(p_1(t) - p_2(t)\Big) z_1(t)z_2(t)\,\mathrm{d}t}_{\leqslant 0} = 0$$

Получено противоречие $(0 < 0)$. Теорема Штурма доказана.

3.

$$z'' + p(t)z = 0 \tag{2}$$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $p(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Из теоремы Штурма следуют несколько важных утверждений:

Теорема: Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда нули $z_1(t)$ и нули $z_2(t)$ перемежаются. (Между соседними нулями z_1 если нуль z_2).

Доказательство: Прежде всего докажем, что два линейно независимых решения не могу иметь общих нулей. Действительно, если в какой-то точке $z_1(\hat{t}) = z_2(\hat{t})$, то отсюда следует, что вронскиан в этой точке равен

$$W(\hat{t}) = \begin{vmatrix} z_1(\hat{t}) & z_2(\hat{t}) \\ z_1'(\hat{t}) & z_2'(\hat{t}) \end{vmatrix} = 0, \text{ решения линейно зависимы.}$$

t_1, t_2 — соседние нули $z_1(t)$.

$$z_1'' + p(t)z_1 = 0$$
$$z_2'' + p(t)z_2 = 0$$
$$p(t) \geqslant p(t).$$

$z_2(t)$ имеет нуль на t_1, t_2. Теорема доказана.

Теорема: Пусть $p(t) \leqslant 0$. Тогда нетривиальное решение $z(t)$ уравнения (2) может иметь не более одного нуля на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Доказательство: (от противного).

$$z'' + p(t)z = 0,\ t_1, t_2 \text{ – нули } z(t)$$
$$z_2'' + 0 \cdot z_2 = 0,\ z_2(t) \equiv 1.$$

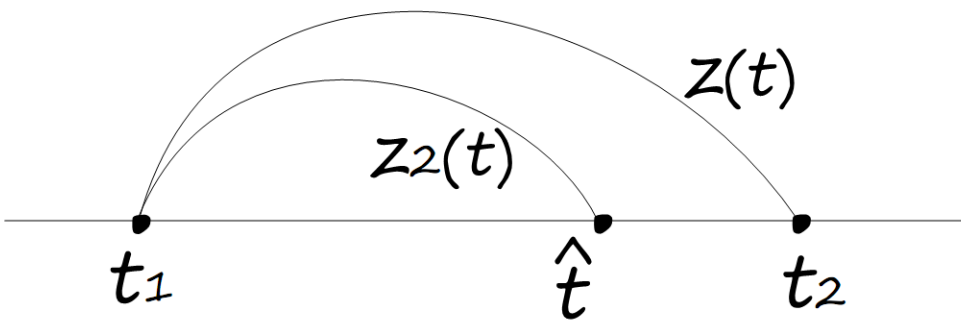
$p(t) \leqslant 0$, $z_2(t)$ имеет нуль на $[t_1, t_2]$, противоречие.

Теорема: Пусть $m \leqslant p(t) \leqslant M$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, где m, M — положительные числа. Тогда расстояние между соседними нулями нетривиального решения $z(t)$ уравнения (2) не меньше $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ и на каждом отрезке длины $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ есть нуль этого решения.

Доказательство:

1. Докажем первое из утверждений. Рассмотрим нули следующих решений:

$z'' + p(t)z = 0,$	$t_1,\ t_2$ нули $z(t)$
$z_2'' + Mz_2 = 0,$	$z_2(t) = \sin\sqrt{M}(t - t_1)$



$M \geqslant p(t) \quad \Rightarrow \quad z_2(\hat{t}) = 0,\ t_1 < \hat{t} \leqslant t_2.$

$$\sqrt{M}(\hat{t} - t_1) = \pi,\ \hat{t} - t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{M}},\ t_2 - t_1 \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

2. Второе утверждение доказать самим. Надо воспользоваться теоремой Штурма и сопоставить два уравнения системы.

4. Об уравнении Бесселя.

Замечание: Бессель — астроном, также занимавшийся математикой.

$$y'' + \frac{1}{t}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)y = 0,$$

ν — число.

Замечание: Сейчас мы изучим осцилляционные свойства этого уравнения. Прежде всего заметим, что надо рассматривать уравнение при $t > 0$ или при $t < 0$. При $t = 0$ уравнение имеет особенность. Можно изучать, как ведёт себя уравнение в окрестности особой точки, но это не та проблема, которой мы сейчас занимаемся.

Пусть, для определённости $0 < t$.

Теорема: Нетривиальное решение уравнения Бесселя имеет на $(0, +\infty)$ бесконечное число нулей. При этом расстояние между соседними нулями стремится к π "при уходе в $+\infty$".

Доказательство: Для начала, сделаем замену из п.1, $y(t) = \alpha(t)z(t)$. После подстановки в уравнение:

$$\alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z'' + \frac{\alpha' z + \alpha z'}{t} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)\alpha z = 0$$

$\alpha(t)\colon\ 2\alpha' + \dfrac{\alpha}{t} = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{2t}$

Решая уравнение, $\ln\alpha = -\dfrac{1}{2}\ln t + \underbrace{C}_{=0},\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Итак, $z = y\sqrt{t}$. $y(\hat{t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(\hat{t}) = 0$. Получаем такое уравнение:

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right) z = 0$$

Для сравнения берём уравнения:

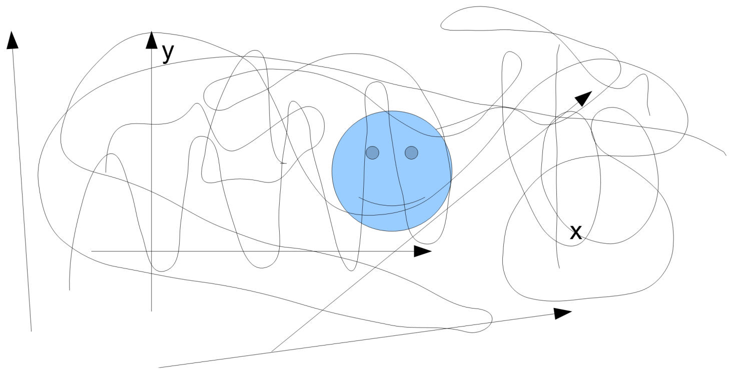
$$z_1'' + (1 - \varepsilon)z_1 = 0$$
$$z_2'' + (1 + \varepsilon)z_2 = 0$$

Второе слагаемое, стоящее внутри скобок, при достаточно больших t можно оценить так:

$$-\varepsilon < \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2} < \varepsilon$$

В первом уравнении расстояние между нулями $z_1(t)$ равно $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$. Для $z_2(t)$ — $\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

Содержание


y
x