

Дифференциальные уравнения письмак.

Астафуров Евгений

2 мая 2020 г.

(При нахождении опечаток писать в лс *VK*).

Содержание

1 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.	2
1.1 Вронсиан W и его свойства.	2
1.2 Пример исследования функций на линейную зависимость (Задача Ф648)	2
1.3 Пример построения системы уравнений, имея частные решения (Задача Ф.22.59)	2
1.4 Формула Луивилля-Остроградского	3
1.5 Алгоритм решения линейных уравнений $n = 2$ с переменными коэффициентами	3
1.6 Пример — Задача С.9.53	3
1.7 Задача С.9.68(а)	4
1.8 Задача про уравнение Бесселя (ТЗ-2020)	5
2 Теорема Штурма	6
2.1 Формулировка теоремы	6
2.2 Неформальная трактовка теоремы	6
2.3 Задача С.10.3 + уравнение Эйлера	6
3 Положения равновесия.	7
3.1 Узел — $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ одного знака.	7
3.2 Дикритический узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 2.	7
3.3 Вырожденный узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 1	8
3.4 Седло — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ разных знаков, не равны 0.	8
3.5 Фокус — $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$	9
3.6 Центр — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$ — Устойчивое по Ляпунову.	10
3.7 Вырожденная матрица — $\det(A) = 0$	10
4 Линеаризация систем	11
4.1 Алгоритм линеаризации	11
4.2 Разложение по Маклорену	11
5 Некоторые типы дифференциальных уравнений.	12
5.1 Уравнение Бернулли (I порядок).	12
5.2 Уравнение Риккати (I порядок).	12
5.3 Уравнение Эйлера (II порядок).	12

1 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

1.1 Вронскиан W и его свойства.

Вронскиан или определитель Вронского — функция $W(f_1, \dots, f_n)(x)$, определенная для системы функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$ на промежутке I :

$$W(f_1, \dots, f_k)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_1(x) & \dots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Свойства:

1. Если функции f_1, \dots, f_n — линейно зависимы на I , то $\forall x \in I W(x) = 0$.
2. Если $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$, то f_1, \dots, f_n — линейно независимы на I .
3. Если f_1, \dots, f_n — решения однородного дифференциального уравнения n -ого порядка, то возможны только два варианта:
 - (a) $\forall x \in I W(x) = 0$, это значит, что f_1, \dots, f_n — линейно зависимы на I .
 - (b) $\nexists x_0 \in I$ т.ч. $W(x_0) = 0$, это, в свою очередь, значит, что f_1, \dots, f_n — линейно независимы.

1.2 Пример исследования функций на линейную зависимость (Задача Ф648)

Исследовать на линейную зависимость: e^x, e^{2x}, e^{3x} .

Решение:

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} = \dots = 6e^{6x},$$

следовательно функции линейно независимы.

1.3 Пример построения системы уравнений, имея частные решения (Задача Ф.22.59)

Известны три частных решения неоднородного уравнения второго порядка: $\begin{cases} y_1 = x^2, \\ y_2 = 1 - x, \\ y_3 = 1 - 3x \end{cases}$ найти решение

уравнения с начальными условиями: $\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Решение:

Известно, что разность двух частных решений есть базисное решение однородного уравнения:

$$\begin{cases} y_{10} = y_3 - y_2 = -2x, \\ y_{20} = y_1 - y_2 = x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_{10} = -x, \\ y_{20} = x^2 - 1 \end{cases}$$

Так как y_{10} и y_{20} — решения однородного дифференциального уравнения, то их вронскиан (1) должен равняться нулю. Найдем однородное уравнение из этого условия:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y & x^2 - 1 & -x \\ y' & 2x & -1 \\ y'' & 2 & 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2y + (1 - x^2)y'' - x(2y' - 2xy'') &= 0 \\ y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y &= 0 \quad \text{— Однородное.} \end{aligned}$$

Теперь получим неоднородное уравнение, подставив в однородное частное решение $y_2 = 1 - x$: $0 \cdot (x^2 - 1) - 2x(-1) + 2(1 - x) = 2$, откуда неоднородное уравнение:

$$y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y = 2.$$

Общее решение уравнения имеет вид: $y = (x^2 - 1) \cdot C_1 + C_2 \cdot x + (1 - x)$.

1.4 Формула Луивилля-Остроградского

Пусть дано однородное уравнение второго порядка:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Тогда справедлива формула Луивилля-Остроградского:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_{1o}} \right) = C_0 \cdot \frac{1}{y_{1o}^2} \cdot \exp \left(- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right), \quad (2)$$

где y — решение однородного уравнения, y_{1o} — одно из частных решений однородного уравнения, C_0 — некоторая константа. Под интегралом в практическом смысле понимается первообразная, так как вылезшая константа будет поглощена C_0 .

1.5 Алгоритм решения линейных уравнений $n = 2$ с переменными коэффициентами

Общая идея состоит в том, чтобы подобрать одно частное решение однородного, а затем, с помощью формулы Луивилля-Остроградского (2) найти второе частное решение однородного уравнения.

Пусть есть уравнение:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

1. Найти одно частное решение однородного уравнения, пробуя подстановки (в указанном порядке):

- (a) $y_{1o} = e^{ax}$,
- (b) $y_{1o} = x^k$,
- (c) $y_{1o} = P(x)$, $\deg(P) = k$ — в виде многочлена.

2. Применить формулу Луивилля-Остроградского (2) и получить решение однородного уравнения: $y_o = y_{1o}D + y_{2o}C$, где D, C — константы.

3. Воспользоваться методом вариации постоянной:

$$\begin{cases} D'(x)y_{1o} + C'(x)y_{2o} = 0, \\ D'(x)y'_{1o} + C'(x)y'_{2o} = \frac{f(x)}{a(x)}. \end{cases} \quad (3)$$

4. Подставить найденные $C(x)$ и $D(x)$ в решение однородного уравнения, тем самым получить решение неоднородного уравнения.

1.6 Пример — Задача С.9.53

Решить: $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1)$.

Решение:

Отыщем для начала частное решение однородного уравнения. Для этого попробуем замену $y = e^{ax}$:

$$a^2(x^2 + x) + a(4x + 2) + 2 = 0,$$

$$z^2x^2 + a^2x + 4ax + 2a + 2 = 0,$$

$$x^2a^2 + x(a^2 + 4a) + (2a + 2) = 0,$$

$$\begin{cases} a = -1, \\ a^2 + 4a = 0, \\ a^2 = 0 \text{ — не подходит.} \end{cases}$$

Попробуем замену $y = x^k$:

$$\begin{aligned} (x^2 + x)(k^2 - k)x^{k-2} + k(4x + 2)x^{k-1} + 2x^k &= 0, \\ xk^2 - kx + k^2 - k + 4kx + 2k + 2x &= 0, \\ x(k^2 - k + 4k + 2) + (k^2 + k) &= 0, \\ \begin{cases} k^2 + 3k + 2 = 0, \\ k + 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \boxed{k = -1}. \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение: $y_{o1} = \frac{1}{x}$.

Найдем второе частное решение с помощью формулы Луивилля-Остроградского (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(yx) &= Cx^2 \exp\left(-\int \frac{4x+2}{x^2+x} dx\right), \\ \int \frac{4x+2}{x^2+x} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2}{x+1} dx = 2 \ln x + 2 \ln x + 1, \\ \exp(-\ln x^2 - \ln(x+1)^2) &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}, \\ \frac{d}{dx}(yx) &= \frac{c}{(x+1)^2}, \text{ откуда} \\ yx &= -\frac{C}{x+1} + D = \frac{C}{x+1} + D, \\ \boxed{y = \frac{D}{x} + \frac{C}{x(x+1)}} &- \text{однородное.} \end{aligned}$$

Далее воспользуемся методом вариации постоянной (3):

$$\begin{aligned} \begin{cases} D' \frac{1}{x} + C' \frac{1}{x(x+1)} = 0, & D' = -\frac{C'}{x+1} \\ -D' \frac{1}{x^2} - C' \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{6}{x} & \\ C' = -6(x+1)^2 \Rightarrow C = -2(x+1)^3 + C_1, \\ D' = 6(x+1) \Rightarrow D = 3(x+1)^2 + D_1, \end{cases} \end{aligned}$$

следовательно, получаем решение:

$$y = \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x}.$$

1.7 Задача С.9.68(а)

Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известна его правая часть $f(x)$ и ФСР $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2, \\ y_1 = x, \\ y_2 = x^2 + 1. \end{cases}$$

Решение:

Пусть y_o — решение однородного уравнения, тогда, так как y_o, y_1, y_2 — линейно зависимы, то их вронскиан равен нулю:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x & x^2 + 1 & y_o \\ 1 & 2x & y'_o \\ 0 & 2 & y''_o \end{pmatrix} &= y''_o(x^2 - 1) - 2xy'_o + 2y_o = 0 — \text{однородное уравнение,} \\ \boxed{y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y = 1 - x^2} &— \text{исходное уравнение.} \end{aligned}$$

Далее пользуясь методом варианции постоянной (3), получаем решение данного уравнения.

1.8 Задача про уравнение Бесселя (Т3-2020).

Доказать, что уравнение бесселя не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими производными.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \nu = \text{const}, x > 0.$$

Решение:

Предположим обратное, то есть что нашлись такие y_1, y_2 ЛНЗ решения (1), тогда:

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} = C \cdot \exp \left(- \int \frac{x}{x^2} \right) = C \cdot \exp(-\ln x + D) = \frac{C}{x} + D$$

Но при $x \rightarrow 0, \frac{C}{x} \rightarrow \infty \Rightarrow (y_1y'_2 - y_2y'_1) \rightarrow \infty \Rightarrow$ противоречие с условием.

2 Теорема Штурма

2.1 Формулировка теоремы

Теорема: Пусть для любого $x \in I$ выполнено $\mathbf{q}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{Q}(\mathbf{x})$, и $\begin{cases} y(x) — решение y'' + q(x)y = 0, \\ z(x) — решение z'' + Q(x)z = 0. \end{cases}$. Пусть $x_1 < x_2$ — последовательные нули $y(x)$, тогда либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$, либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, что $z(x_0) = 0$.

2.2 Неформальная трактовка теоремы

Нули функции $y(x)$ идут не чаще нулей $z(x)$.

2.3 Задача С.10.3 + уравнение Эйлера

Показать, что каждое решение уравнения $y'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ имеет на промежутке $[0; +\infty)$ бесконечно много нулей.

Решение:

Достаточно показать, что бесконечно много нулей на интервале $x \in (1, +\infty)$. Пусть $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и $q(x) = \frac{1}{2x^2}$, очевидно, что $q(x) \leq Q(x)$. Задача свелась к тому, чтобы показать, что любое решение уравнения $z'' + q(x)z = 0$ имеет ∞ много нулей.

Решим уравнение $z'' + \frac{1}{2x^2}z = 0$ как уравнение Эйлера: $z(x) = ax^b$, $z'(x) = abx^{b-1}$, $z'' = ab(b-1)x^{b-2}$:

$$\begin{aligned} ab(b-1)x^{b-2} + \frac{ax^b}{2x^2} &= 0, \\ ab(b-1)x^{b-2} + \frac{a}{2}x^{b-2} &= 0, \\ ab^2 - ab + \frac{a}{2} &= 0, \\ a(b^2 - b + \frac{1}{2}) &= 0, \end{aligned}$$

, откуда $a = 1$, $b = \frac{1 \pm i}{2} = \alpha$. Получаем решение:

$$z(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} = e^{\frac{1 \pm i}{2} \ln(x)} = \sqrt{x} (\cos \frac{1}{2} \ln x \pm i \sin \frac{1}{2} \ln x)$$

— ∞ раз обращается в 0.

3 Положения равновесия.

[Источник.](#)

3.1 Узел — $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ одного знака.

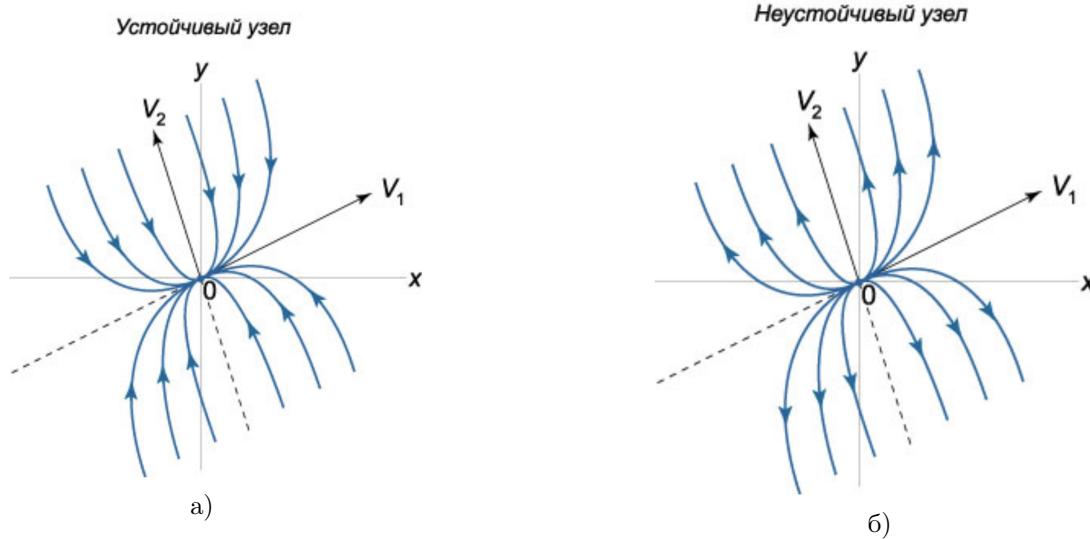


Рис. 1:

V_1 и V_2 — собственные векторы, соответствующие собственным значениям $|\lambda_1| < |\lambda_2| \in \mathbb{R}$.
Узел является асимптотически устойчивым, если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$.

Заметим, что в случае как устойчивого, так и неустойчивого узла фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению λ .

3.2 Дикритический узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 2.

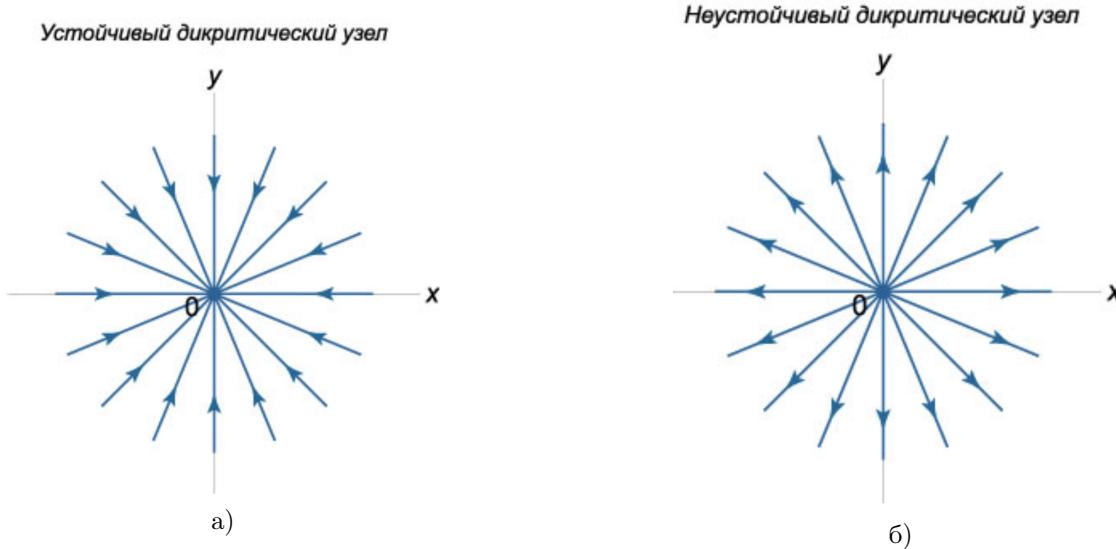


Рис. 2:

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

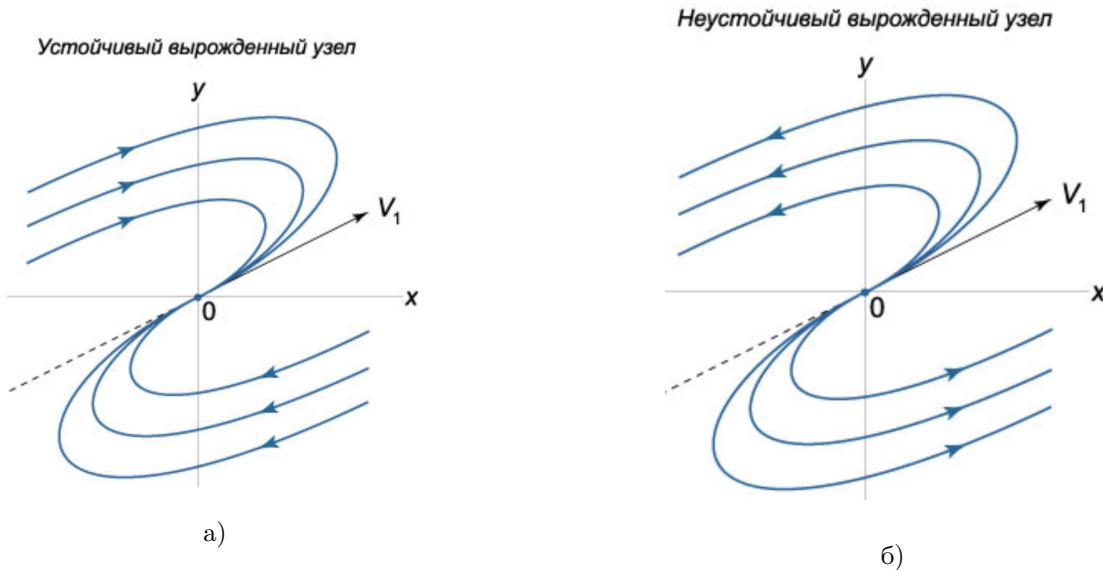
3.3 Вырожденный узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 1

Рис. 3:

Матрица A имеет лишь один собственный вектор V_1 , второй собственный вектор ищется как присоединенный к V_1 .

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

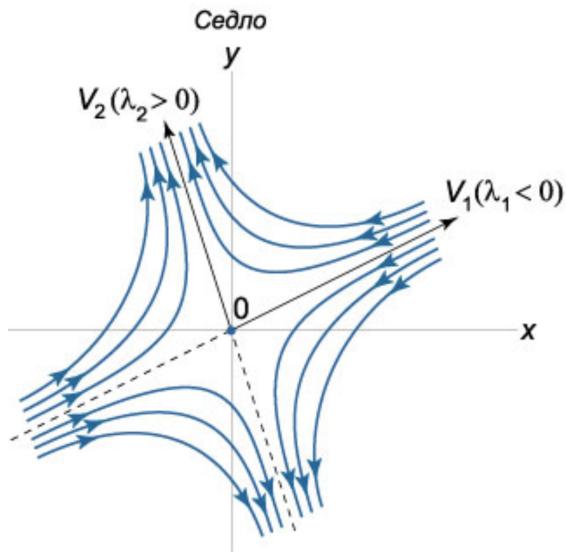
3.4 Седло — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ разных знаков, не равны 0.

Рис. 4:

Прямые, направленные вдоль векторов V_1, V_2 называются **сепаратрисами**, и являются асимптотами для остальных фазовых траекторий, имеющих форму **гипербол**.

Определение направления:

- Если прямая связана с $\lambda < 0$, то движение вдоль нее направлено **к положению равновесия**.
- Если прямая связана с $\lambda > 0$, то направление **от положения равновесия**.

3.5 **Фокус** — $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$.

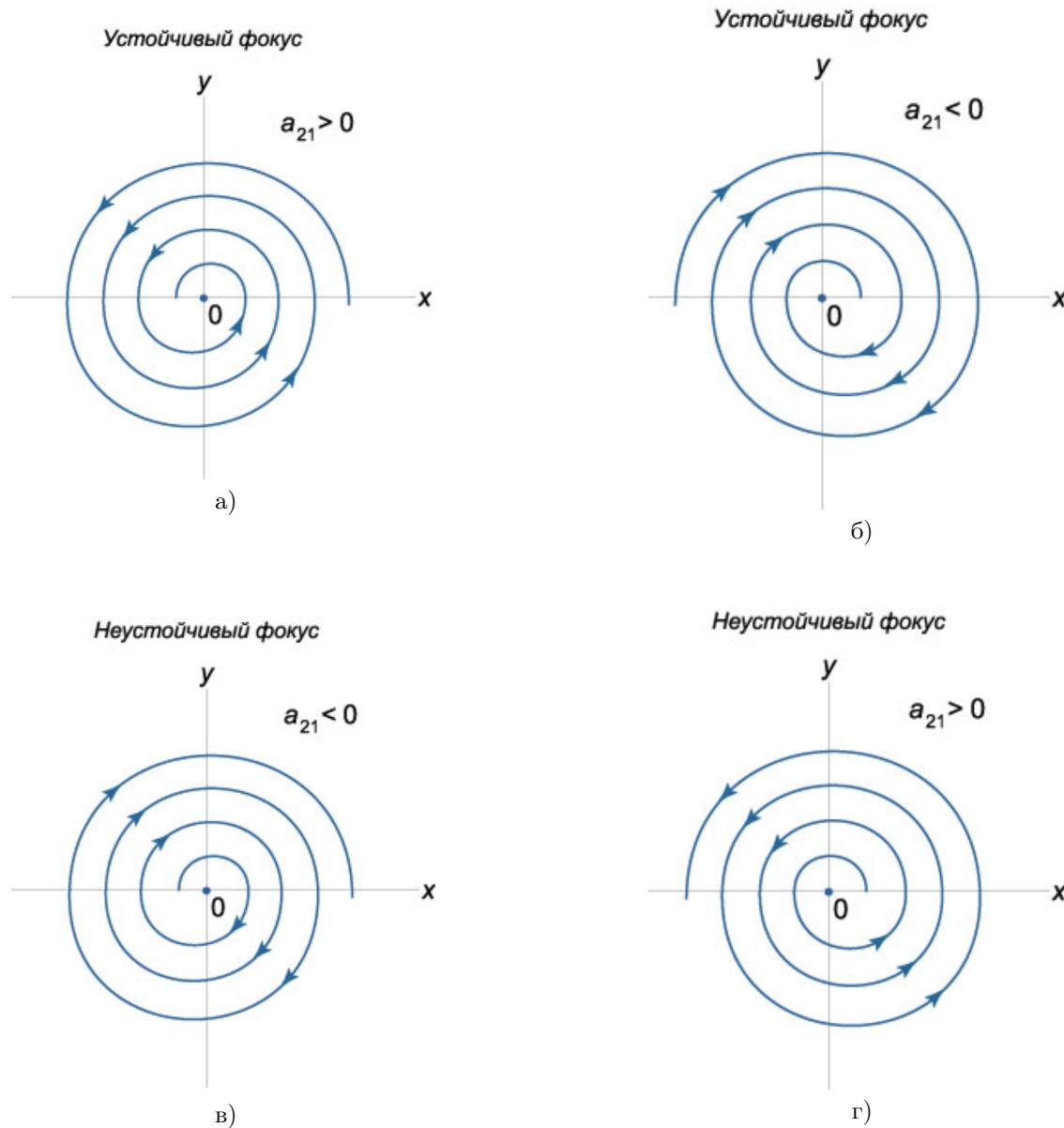
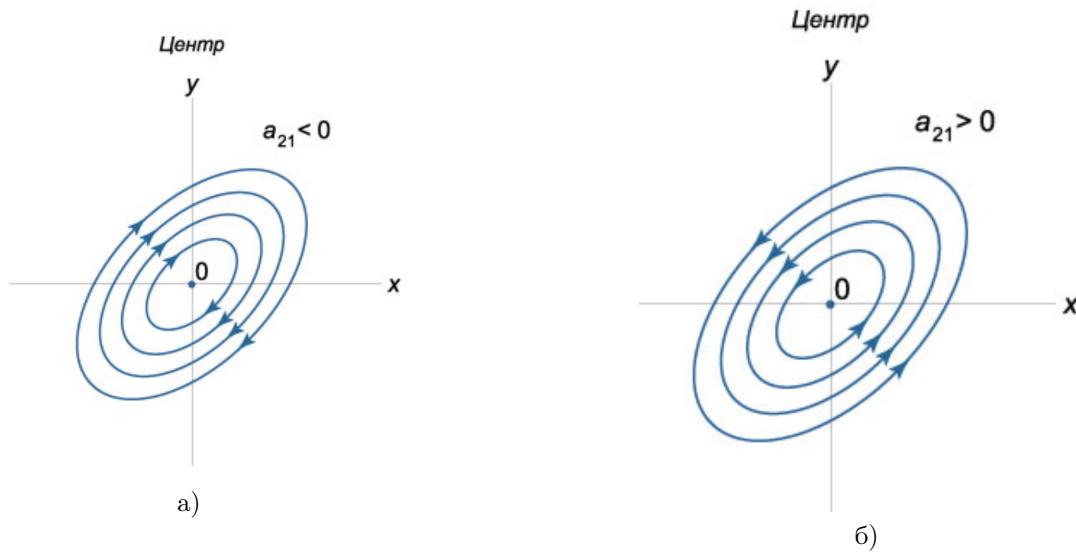


Рис. 5:

- При $Re\lambda < 0$, спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется **устойчивым фокусом**.
- При $Re\lambda > 0$ — **неустойчивый фокус**.

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица системы.

3.6 Центр — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}; Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$ — Устойчивое по Ляпунову.

В случае центра фазовые траектории представляют собой формально спирали при $Re\lambda = 0$, то есть эллипсы.

Направление вращения определяется знаком a_{21} .

3.7 Вырожденная матрица — $\det(A) = 0$.

Если матрица является вырожденной, то у нее одно или оба собственных значения равны нулю. При этом возможны следующие частные случаи:

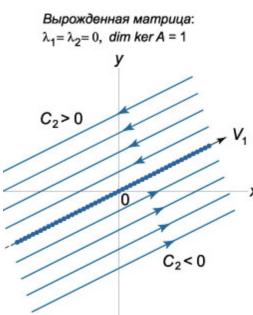


Рис. 6:

4 Линеаризация систем

4.1 Алгоритм линеаризации

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

1. Найти положения равновесия, то есть разрешить систему $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$.
2. Пусть набор $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots$ — набор положений равновесия.
3. Для каждого положения равновесия:
 - (a) Сделать замену: $\begin{cases} U = x - x_i, \\ V = y - y_i \end{cases}$ и подставить в исходную систему, получив $\begin{cases} \dot{U} = f_{1i}(U, V), \\ \dot{V} = f_{2i}(U, V). \end{cases}$
 - (b) Разложить функции $f_{1i}(U, V)$ и $f_{2i}(U, V)$ в точке $(0, 0)$, избавляясь в процессе разложения от степеней выше 1, то есть $U^2 + U + 3V \rightarrow U + 3V$.
 - (c) В результате предыдущего шага получим систему $\begin{cases} \dot{U} = a_{11}U + a_{12}V, \\ \dot{V} = a_{21}U + a_{22}V. \end{cases}$, матрица данной системы:
 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
 - (d) Найти собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A . И, если необходимо, найти собственные векторы:
 - i. Для каждого собственного значения λ_i разрешить систему: $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$.
 - ii. (Для тех, кто разучился к ГОС-у перемножать матрицы): $\begin{cases} v_1(a_{11} - \lambda_i) + v_2a_{12} = 0, \\ v_1a_{12} + v_2(a_{22} - \lambda_i) = 0. \end{cases}$
 - (e) Построить фазовую траекторию, с положением равновесия $U = V = 0$.
 - (f) Построить фазовую траекторию в изначальных координатах (x, y) , то есть сдвинуть то, что получилось на предыдущем шаге на x_i единиц вправо и y_i единиц вверх.

4.2 Разложение по Маклорену

1. $\ln(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
2. $\arcsin(x) \rightarrow x + \frac{x^3}{6} + 3\frac{x^5}{40} + \dots$
3. $e^x \rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$
4. $(1+x)^\alpha \rightarrow 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$
5. $\sin(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \dots$
6. $\operatorname{tg}(x) \rightarrow x + \frac{x^3}{3} + \dots$
7. $\arccos(x) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
8. $\operatorname{arctg}(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{3} + \dots$
9. $\operatorname{sh}(x) \rightarrow x + \frac{x^3}{6} + \dots$
10. $\operatorname{th}(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{3} + \dots$
11. $\operatorname{arcsh}(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \dots$
12. $\operatorname{arcth}(x) \rightarrow x + \frac{x^3}{3} + \dots$

5 Некоторые типы дифференциальных уравнений.

5.1 Уравнение Бернулли (I порядок).

$$y' + a(x)y = b(x)x^m, \quad (4)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные функции. Если $m = 0$, то имеем дело с линейным дифференциальным уравнением, если $m = 1$, то преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m \neq 0$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки:

$$z = y^{1-m}.$$

5.2 Уравнение Риккати (I порядок).

$$y' + b(x)y + d(x)y^2 = f(x), \quad (5)$$

где $b(x), d(x), f(x)$ — непрерывные функции.

Алгоритм решения уравнений Риккати:

1. Найти некоторое частное решение уравнения y_1 .
2. Тогда искомым решением будет $y = y_1 + U$, следовательно, задача свелась к поиску U .
3. Подставляем в исходное выражение вместо y и y' выражения $(y_1 + U)$ и $(y_1 + U)'$, и получаем уравнение Бернулли (4).
4. Находим из него U и подставляем в выражение для общего решения.

5.3 Уравнение Эйлера (II порядок).

$$x^2y'' + Axy' + By = 0, \quad x > 0, \quad (6)$$

Данное уравнение можно свести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$, в этом случае:

$$\begin{aligned} y'_x &= e^{-t}y'_t, \\ y''_{xx} &= e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t). \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем:

$$y''_{tt} + (A - 1)y'_t + By = 0.$$