§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение

$$F(x,\ y,\ y')=0, \qquad (1.1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathrm{R}^3$ и зависит от y'.

Решением уравнения (1.1) на интервале $I=(a,b)$ называется функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x)\in C^1(a,b)$;
2. $(x,\ \varphi,\ \varphi')\in G$ при $\forall x\in(a,b)$;
3. $F(x,\ \varphi,\ \varphi')=0$ для $\forall x\in(a,b)$.

График решения называют *интегральной кривой*.

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.1) называется решение, зависящее от произвольной постоянной C: $y=\varphi(x,\ C)$. При этом любому значению постоянной соответствует решение, и для любого решения найдется соответствующая постоянная.

Общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения (1.1) называется соотношение, связывающее независимую переменную *x*, решение *y* и произвольную постоянную C

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \qquad (1.3)$$

Значения произвольной постоянной C можно найти при определенных требованиях к функции $F(x,\ y,\ y')$, используя *начальные условия*

$$y(x_0)=\hat{y}_0. \qquad (1.4)$$

Задача Коши при этом формулируется следующим образом: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.4).

Если $F(x_0,\, y(x_0),\, y'(x_0)) = 0$ и $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0,\, y(x_0),\, y'(x_0))} \neq 0$, то по теореме о существовании неявной функции уравнение (1.1) можно разрешить относительно старшей производной и представить в *нормальной форме*

$$y' = f(x,\, y). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*.

Наряду с дифференциальным уравнением вида (1.5) рассматриваются уравнения *в дифференциалах*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,. \tag{1.6}$$

1.2. Автономные уравнения

Уравнения (1.5) называется *автономным*, если его правая часть не зависит явным образом от x

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{2.1}$$

Если $f(y^*) = 0$, то функция

$$y(x) \equiv y^* \tag{2.2}$$

является решением уравнения (2.1).

Если $f(y) \neq 0$, то получаем уравнение $\dfrac{dy}{f(y)} = dx$ и, интегрируя его, имеем

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C\,. \tag{2.3}$$

Если обозначить $\int \dfrac{dy}{f(y)} = F(y)$, то получим уравнение

$$F(y) = x + C\,, \tag{2.3a}$$

которое определяет y как неявную функцию x.

З а м е ч а н и е 2.1. Все решения уравнения (2.1) выражаются формулами (2.2) и (2.3).

1.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x), \tag{3.1}$$

а также

$$M(x)N(y)dx + L(x)R(y)dy = 0. \tag{3.2}$$

называются уравнениями *с разделяющимися переменными*.

З а м е ч а н и е 3.1. Автономное уравнение (2.1) есть частный случай уравнения с разделяюшимися переменными при $g(x) \equiv 1$.

З а м е ч а н и е 3.2. Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ есть частный случай уравнения с разделяюшимися переменными при $f(y) \equiv 1$.

Если в (3.1) $f(y^*) = 0$, то функция

$$y(x) \equiv y^* \tag{3.3}$$

является решением уравнения (3.1).

Если $f(y) \neq 0$, то получаем уравнение *с разделенными переменными*

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx \tag{3.4}$$

и, интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + C. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 3.2. Все решения уравнения (3.1) выражаются формулами (3.3) и (3.5).

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=h(ay+bx+c). \tag{3.5}$$

Если $b=0$, уравнение (3.5) является автономным. Если $a=0$, то это уравнение с разделяющими переменными вида (3.1), где $f(y)\equiv 1$, а $g(x)=h(bx+c)$.

Утверждение 3.1. Пусть в (3.5) $a\cdot b\neq 0$. Заменой искомой функции $z(x)=ay+bx+c$ уравнение (3.5) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

① При указанной замене $\frac{dz}{dx}=a\frac{dy}{dx}+b$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}-\frac{b}{a}$.

Уравнение (3.5) принимает вид $\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}-\frac{b}{a}=h(z)$ или $\frac{dz}{dx}=ah(z)+b$. Последнее является автономным, т.е переменные разделяются.❶

Аналогичный прием можно применять и к более широкому классу уравнений.

Утверждение 3.2. Пусть в (1.5) $f(x,\, y)=f\left(\frac{a_1y+b_1x+c_1}{a_2y+b_2x+c_2}\right)$ и $a_1b_2=a_2b_1$. Тогда уравнение можно привести соответствующей заменой к уравнению с разделяющимися переменными.

② Пусть $a_1=0$. Если при этом $a_2=0$, то имеем частный случай уравнения с разделяющимися переменными. Если же $a_2\neq 0$, то $b_1=0$, и уравнение имеет вид (3.5).

Случай $a_2=0$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$.

Если $b_1=0$, то из условия утверждения и $b_2=0$, т.е наше уравнение является автономным, а следовательно, с разделяющимися переменными.

Если $b_1\neq 0$, то проведем замену $z(x)=a_1y+b_1x+c_1$. Тогда $z'=a_1y'+b_1$, и $y'=\frac{z'-b_1}{a_1}$. Кроме того из $a_1b_2=a_2b_1$, записанного в виде $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$, имеем $a_2=\lambda a_1$ и $b_2=\lambda b_1$. И знаменатель дроби в правой части уравнения можно записать как $a_2 y + b_2 x + c_2 \;=\; \lambda a_1 y + \lambda b_1 x + c_2 \;=\; \lambda a_1 y + \lambda b_1 x + \lambda c_1 - \lambda c_1 + c_2 \;=\; \lambda z - \lambda c_1 + c_2$.

Уравнение в новых переменных принимает вид $z' = b_1 + a_1 f\left(\dfrac{z}{\lambda z + c_2 - \lambda c_1}\right)$ - уравнение с разделяющимися переменными. ❷

1.4. Однородные уравнения.

1.4.1. Напомним, что функция $f(x,\, y)$ называется *однородной функцией степени (порядка) m*, если при любом значении $k > 0$ выполняется

$$f(kx,\, ky) = k^m f(x,\, y), \tag{4.1}$$

где m - произвольное действительное число.

Уравнения (1.5), разрешенные относительно производной (в нормальной форме), где $f(x,\, y)$ - однородная функция нулевого порядка, или уравнения в дифференциалах(1.6), где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одного порядка называются *однородными*.

К ним применяется следующий алгоритм решения:

1. Вводим новую функцию $z(x)$ по формуле

$$z(x) = \frac{y}{x} \text{ или } y = z(x)\cdot x, \tag{4.2}$$

тогда

$$y' = z'\cdot x + z \text{ или } dy = xdz + zdx. \tag{4.3}$$

Производную (4.3) подставляем в уравнение (1.5) или (1.6), соответственно.

2. В новых переменных x и z получаем уравнение с разделяющимися переменными.
3. Находим общее решение (или общий интеграл) полученного уравнения.
4. В полученном решении проводим обратную замену $z = \dfrac{y}{x}$ и выписываем решение исходного однородного уравнения.

Утверждение 4.1. Пусть в (1.5) $f(x,y)=f\left(\dfrac{a_1y+b_1x+c_1}{a_2y+b_2x+c_2}\right)$ и $a_1b_2\neq a_2b_1$. Тогда уравнение можно привести к однородному, перенеся начало координат в точку пересечения прямых $a_1y+b_1x+c_1=0$ и $a_2y+b_2x+c_2=0$.

① Система уравнений $\begin{cases} a_1y+b_1x+c_1=0, \\ a_2y+b_2x+c_2=0 \end{cases}$ имеет единственное решение $x=\alpha$, $y=\gamma$, т.к. согласно условию ее определитель отличен от нуля.

Замена $\xi=x-\alpha$, $\eta=y-\gamma$ ($x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\gamma$) приводит е к виду $\dfrac{d\eta}{d\xi}=f\left(\dfrac{a_1\eta+b_1\xi}{a_2\eta+b_2\xi}\right)$, правая часть которого является однородной функцией нулевого порядка.❶

1.4.2. Функция $f(x,y)$ называется *квазиоднородной функцией степени (порядка) m*, если при некоторых α и β для всех $k>0$ выполняется

$$f\left(k^{\alpha}x,\, k^{\beta}y\right)=k^{m}f(x,y), \tag{4.4}$$

Квазиоднородные степени называются *весами* и складываются при умножении функций: например $5x^2y$ имеет вес $2\alpha+\beta$ (x имеет вес α, y - вес β).

Дифференциальное уравнение (1.5) называется *квазиоднородным* (с весами α и β), если его правая часть $f(x,y)$ является квазиоднородной функцией (с весами α и β) степени $m=\beta-\alpha$: $f\left(k^{\alpha}x,\, k^{\beta}y\right)=k^{\beta-\alpha}f(x,y)$.

Заменой $y=z^{\beta/\alpha}$ квазиоднородное уравнение приводится к однородному. На практике более удобно использовать замену $y=u(x)x^{\beta/\alpha}$, приводящую квазиоднородное уравнение сразу к уравнению с разделяющимися переменными.

З а м е ч а н и е 4.1. Часто начинают решение с замены $y=z^{m}$, где число m заранее не известно.

1.5. Линейные уравнения первого порядка.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x) \tag{5.1}$$

называется *линейным уравнением первого порядка*.

Одним из методов его решения является *метод Лагранжа* (*метод вариации постоянной*).

Сначала рассматривается *линейное однородное уравнение*

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=0. \tag{5.2}$$

Его решение имеет вид $y=Ce^{-\int a(x)dx}$. Решение исходного уравнения (5.1) будем искать в виде таком же, как и решение однородного уравнения, но заменив произвольную постоянную на неизвестную функцию $C(x)$

$$y=C(x)e^{-\int a(x)dx}. \tag{5.3}$$

Затем (5.3) подставляем в неоднородное уравнение (5.1), получив для определения функции $C(x)$ уравнение $\frac{dC}{dx}=b(x)e^{\int a(x)dx}$. Откуда $C(x)=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+c$, где c - произвольная постоянная. Подставляя полученное выражение в (5.1), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения в виде

$$y=e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+ce^{-\int a(x)dx} \tag{5.4}$$

1.6. Уравнения, приводящиеся к линейным

1.6.1. Уравнение Бернулли. Это уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)y^m, \tag{6.1}$$

где m - любое число, $m\neq 0$, $m\neq 1$ (при $m=0$ и $m=1$ уравнение (6.1) является линейным).

Уравнение (6.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{y^m}\frac{dy}{dx}+\frac{a(x)}{y^{m-1}}=b(x),\ y\neq 0,$$

которое заменой $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$ приводится к линейному уравнению.

1.6.2. Уравнение Риккати. Это уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x)y^2 = c(x). \tag{6.2}$$

В общем случае (6.2) не решается в квадратурах.

З а м е ч а н и е 6.1. При $b(x) = 0$ (6.2) является линейным уравнением, а при $c(x) = 0$ - уравнением Бернулли с m=2.

Утверждение 6.1. Пусть известно частное решение y_p уравнения Риккати (6.2). Замена $y = z(x) + y_p$ сводит его к уравнению Бернулли.

➀ Действительно

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy_p}{dx} + a(x)z + a(x)y_p + b(x)z^2 + 2b(x)zy_p + b(x){y_p}^2 = c(x),$$

откуда $$\frac{dz}{dx} + \left(a(x) + 2b(x)y_p\right)z + b(x)z^2 = 0.$$ ❶

1.7. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

1.7.1. Уравнение (1.6) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть есть дифференциал некоторой функции

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = df(x, y). \tag{7.1}$$

В этом случае оно легко интегрируется: $f(x, y) = C$. Полученное соотношение определяет y, как неявную функцию x.

Теорема 7.1. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение (7.1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},\ (x,y)\in D. \qquad (7.2)$$

Если область D – односвязная, то условие (7.2) является достаточным.

В этом случае, учитывая, что $df = f_x dx + f_y dy$, $f_x = P$, а $f_y = Q$, функцию $f(x,y)$ можно найти из условия (7.2), например: $f(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$, где

$$f_y = Q = \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y).$$

Замечание 7.1. При выделении полных дифференциалов полезно использовать формулы $d(x\cdot y)=ydx+xdy$, $d\frac{x}{y}=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, $dy^a = ay^{a-1}dy$, $d\ln y=\frac{dy}{y}$ и т.д.

1.7.2. Уравнение в дифференциалах не всегда является уравнением в полных дифференциалах.

Интегрирующим множителем для уравнения (7.1) называется функция $\mu(x,y)\neq 0$, после умножения на которую уравнение (7.1) превращается в уравнение в полных дифференциалах.

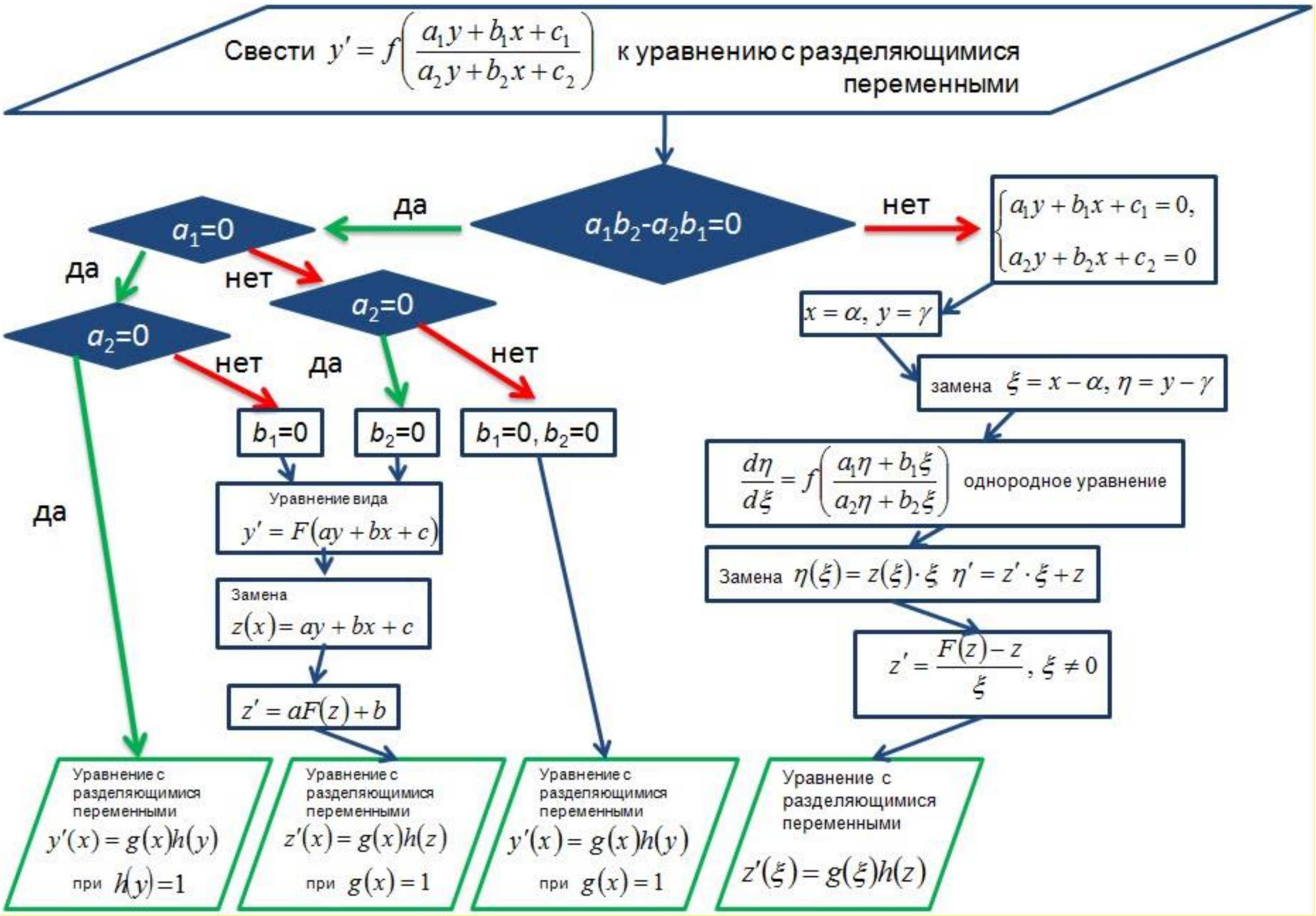
Уравнение для нахождения интегрирующего множителя

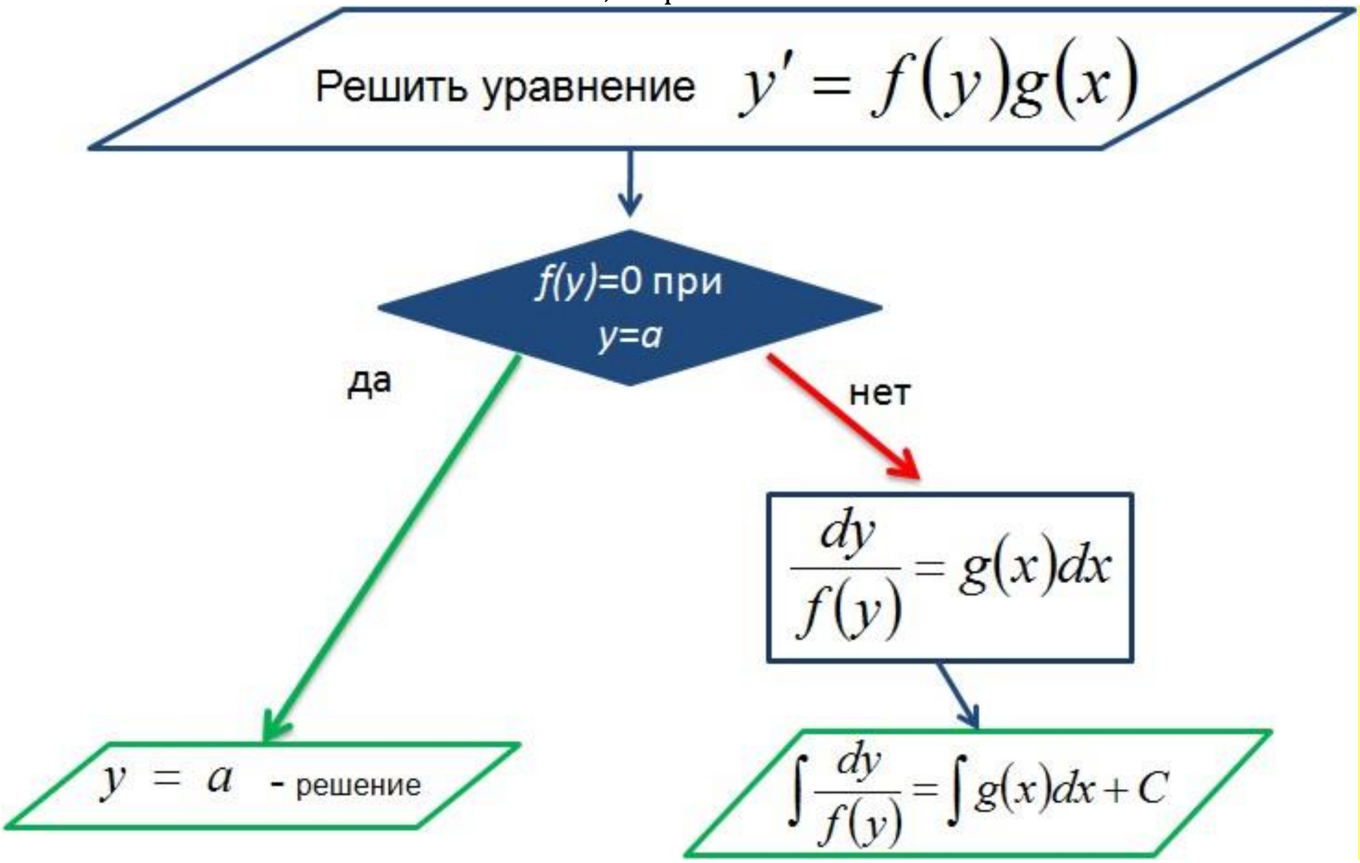
$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \qquad (7.3)$$

Замечание 7.2. Общего подхода, позволяющего найти интегрирующий множитель для произвольного уравнения (7.1) в предположении, что он существует, нет. Задача отыскания интегрирующего множителя для конкретных уравнений носит скорее творческий характер, и возможность ее решения зависит от умения и навыков исследователя.

Замечание 7.3. В общем случае уравнение (7.3) является уравнением в частных производных $\mu(P_y - Q_x)=Q\mu_x - P\mu_y$. Поиск интегрирующего множителя упрощается, если $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$. При этом уравнение (7.3) принимает вид $\mu P_y = \mu_x Q+\mu Q_x$ или $\mu_y P+\mu P_y=\mu Q_x$, соответствественно, т.е. является линейным уравнением в частных производных первого порядка.

1.8. Схемы решений.




Решить уравнение $y' = f(y)g(x)$
$f(y)$=0 при
$y=a$
да
нет
$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$
$y = a$ - решение
$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + C$

1.9. Литература.

1. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. (Гл. 1 §1, 2).
2. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /Под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (Гл. 1 §1, 2, 3, 4).
3. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985. (Гл. 1 §1,2).
4. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. (Гл. 1 §1, 2).
5. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992. (§2, 4, 5, 6)

1.11. Примеры решения задач

Пример 11.1. Решить уравнение $y' = -2xy^2$.

① Это уравнение, разрешенное относительно производной (в нормальной форме), с разделяющимися переменными.

$\boxed{y(x) = 0}$ - решение.

При $y(x) \neq 0$ имеем $\dfrac{dy}{y^2} = -2x\,dx$ - уравнение с разделенными переменными.

$-\dfrac{1}{y} = -x^2 - C$ и $\boxed{y = \dfrac{1}{x^2 + C}}$ - однопараметрическое семейство решений.

Ответ: $y(x) = 0$, $y = \dfrac{1}{x^2 + C}$. ❶

Пример 11.2. Решить уравнение $y' = \cos(y - x)$.

② Это уравнение, разрешенное относительно производной (в нормальной форме), вида (3.5). Заменой $z = y - x$ ($y = z + x$) оно приводится к уравнению $z' + 1 = \cos z$ или $z' = \cos z - 1$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

☐ При $\cos z - 1 \neq 0$ получаем $\dfrac{dz}{\cos z - 1} = dx$ - уравнение с разделенными переменными. Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx$, или $\displaystyle\int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = \int dx$ откуда $\operatorname{ctg}\dfrac{z}{2} = x + C$. Проводя обратную замену, получаем $\boxed{\operatorname{ctg}\dfrac{y - x}{2} = x + C}$.

☐ При $\cos z - 1 = 0$ решение $\boxed{z = 2\pi k}$, $k \in \mathrm{Z}$. Заметим, что в этом случае $dz = 0$.

Ответ: $y = x + 2\operatorname{arcctg}(x + C)$, $y = x + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. ❷

Пример 11.3. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2e^{x/y}}{x^2}$.

③ $\dfrac{kxky+(ky)^2e^{kx/ky}}{(kx)^2}=k^0\,\dfrac{xy+y^2e^{x/y}}{x^2}$ однородная функция нулевой степени, следовательно, уравнение однородное. Произведем замену $y=z(x)\cdot x$. Т.к. $dy=xdz+zdx$, $x\dfrac{dz}{dx}+z=z+z^2e^z$ или $x\dfrac{dz}{dx}=z^2e^{1/z}$ - уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя уравнение с разделенными переменными $\dfrac{dz}{z^2}e^{-1/z}=\dfrac{dx}{x}$, получим решение $e^{-1/z}=\ln|x|+C$.

Ответ: $e^{-x/y}-\ln|x|=C$. ❸

Пример 11.4. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x-y-2}{x+y-4}$.

④ Согласно утверждению 4.1с помощью замены $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\gamma$, где

$\begin{cases}2\alpha-\gamma-2=0,\\ \alpha+\gamma-4=0,\end{cases}$ уравнение приводится к однородному.

Из системы $\alpha=2$ и $\gamma=2$, т.е. $x=\xi+2, y=\eta+2$.

$\dfrac{d\eta}{d\xi}=-\dfrac{2\xi-\eta}{\xi+\eta}$ - однородное . Замена $\eta=z(\xi)\cdot\xi$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z+\xi\frac{dz}{d\xi}=-\frac{2-z}{1+z} \text{ или } \xi\frac{dz}{d\xi}=-\frac{2-z}{1+z}-z=-\frac{2+z^2}{1+z}.$$

$-\dfrac{1+z}{2+z^2}dz=\dfrac{d\xi}{\xi}$ - уравнение с разделенными переменными.

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left(2+z^2\right)=\ln|\xi|+C_1,\ C_1\in\mathrm{R}.$$

$$C_2-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}=\ln\left(\xi^2\left(2+z^2\right)\right),\ C_2=-2C_1.$$

Потенцируя, получаем $\xi^2\left(2+z^2\right)=Ce^{-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}}$, $C\in(0,+\infty)$.

Производя обратную замену $2\xi^2+\eta^2=Ce^{-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\eta}{\xi\sqrt{2}}}$, получаем

$$2(x-2)^2+(y-2)^2=Ce^{-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{y-2}{(x-2)\sqrt{2}}}$$

Ответ: $2x^2+y^2-8x-4y+12=Ce^{-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{y-2}{(x-2)\sqrt{2}}}$. ❹

Пример 11.5. Решить уравнение $y'=x+\dfrac{x^3}{y}$.

⑤ Это уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными. Также оно не является однородным.

Проверяем правую часть уравнения на квазиоднородность: $\alpha=3\alpha-\beta$ - при $\beta=2\alpha$ правая часть квазиоднородная функция.

Делаем замену $y=z^{\beta/\alpha}=z^2$: $2zz'=x+\dfrac{x^3}{z^2}$ или $z'=\dfrac{x}{2z}+\dfrac{x^3}{2z^3}$. Правая часть последнего уравнения - однородная функция нулевой степени.

Производим замену $z=u(x)\cdot x$. При этом $z'=u'\cdot x+u$. Получаем уравнение $xu'+u=\dfrac{1}{2u}+\dfrac{1}{2u^3}$ или $xu'=-\dfrac{2u^4-u^2-1}{2u^3}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$\dfrac{2u^3du}{(2u^2+1)(u^2-1)}=-\dfrac{dx}{x}$ - уравнение с разделенными переменными.

Произведем замену искомой функции $v=u^2$, $dv=2udu$. Уравнение примет вид $\dfrac{vdv}{(2v+1)(v-1)}=-\dfrac{dx}{x}$ или $\dfrac{dv}{2v+1}+\dfrac{dv}{v-1}=-3\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем: $\dfrac{1}{2}\ln|2v+1|+\ln|v-1|=-3\ln|x|+C_1$ или $(2v+1)(v-1)^2x^6=C$.

Проведем обратные замены: $(2u^2+1)(u^2-1)^2x^6=C$, $\left(2\left(\dfrac{z}{x}\right)^2+1\right)\left(\left(\dfrac{z}{x}\right)^2-1\right)^2x^6=C$, $(2z^2+x^2)(z^2-x^2)^2=C$, $(2y+x^2)(y-x^2)^2=C$.

Ответ: $(2y+x^2)(y-x^2)^2=C$. ❺

Пример 11.6. Решить уравнение $xy' = 2y - 2x^4$.

⑥ Исходное уравнение линейное. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $xy' = 2y$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$ - уравнение с разделенными переменными.

Его решение $\ln|y| = 2\ln|x| + C_1$ или после потенцирования $y = Cx^2$.

Решение неоднородного уравнения ищем методом Лагранжа, полагая произвольную постоянную функцией от независимой переменной x: $y = C(x)x^2$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем $x\left(C(x)x^2\right)' = 2C(x)x^2 - 2x^4$ или $C'x^3 + 2Cx^2 = 2Cx^2 - 2x^4$. Откуда получаем дифференциальное уравнение для нахождения $C(x)$: $C'(x) = -2x$. Таким образом, $C(x) = -x^2 + c$, где c - произвольная постоянная, а $y = \left(-x^2 + c\right)x^2$.

Ответ: $y = -x^4 + cx^2$.❻

Пример 11.7. Решить задачу Коши $2y'\sin x - 2y\cos x = -y^3$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

⑦ Это уравнение Бернулли.

Стандартная замена $z = \frac{1}{y^2}$, $z' = -\frac{2}{y^3}y'$ переводит уравнение $-\frac{2y'\sin x}{y^3} + \frac{2y\cos x}{y^3} = 1$ в $z'\sin x + 2z\cos x = 1$ – неоднородное линейное уравнение первого порядка по z, которое решаем методом Лагранжа вариации постоянной.

1) Сначала решаем однородное уравнение: $z'\sin x + 2z\cos x = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$z \neq 0$ $\frac{dz}{z} = -\frac{2\cos x dx}{\sin x}$ дает $\ln|z| = -2\ln|\sin x| + \ln C_0$ и $z = \frac{C}{\sin^2 x}$.

2) Полагая $C = C(x)$, подставляем $z = \frac{C(x)}{\sin^2 x}$ в линейное неоднородное уравнение

$\frac{C'}{\sin^2 x}\sin x - \frac{2C\cos x}{\sin^3 x}\sin x + 2\frac{C}{\sin^2 x}\cos x = 1$, что дает $C' = \sin x$, т.е. $dC = \sin x dx$ и $C(x) = -\cos x + C_1$

3) Используя найденное значение $C(x)$, получаем

$z = \frac{-\cos x + C_1}{\sin^2 x}$, т.е. $y^2 = \frac{1}{z} = \frac{\sin^2 x}{-\cos x + C_1}$.

Для определения постоянной C_1 используем начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, что дает $y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{C_1}$ и $C_1 = 1$ и $y = \pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$, т.к. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, то выбираем знак минус: $y = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Ответ: $y = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.❼

Пример 11.8. Решить уравнение $y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x$.

⑧ Это уравнение Риккати. Если известно какое-либо его частное решение, то, согласно утверждению 6.1, это уравнение можно свести к уравнению Бернулли.

1) Попробуем подобрать частное решение вида $y_p = ae^x$.

Подставляя в уравнение, имеем $ae^x + e^{-x}\left(ae^x\right)^2 + ae^x = 3e^x$, откуда $a^2 + 2a = 3$, и значение $a = 1$ подходит. Итак, $y_p = e^x$.

2) Проводим замену искомой функции $y = u + y_p = u + e^x$. Получаем

$u' + e^{-x}u^2 + 2u + u = 0$ или $u' + 3u + e^{-x}u^2 = 0$ - уравнение Бернулли.

Отметим, что $u = 0$ - решение однородного уравнения.

Стандартная замена $z = \frac{1}{u^{2-1}} = \frac{1}{u}$, $z' = -\frac{1}{u^2}u'$ при $u \neq 0$ переводит уравнение $\frac{u'}{u^2} + \frac{3}{u} + e^{-x} = 0$ в $z' - 3z = e^{-x}$ – неоднородное линейное уравнение первого порядка по z, которое решаем методом Лагранжа вариации постоянной.

3) Сначала решаем однородное уравнение: $z' - 3z = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$z \neq 0$ $\frac{dz}{z} = 3dx$ дает $\ln|z| = 3x + C_1$ и $z = Ce^{3x}$.

4) Полагая $C = C(x)$, подставляем $z = C(x)e^{3x}$ в линейное неоднородное уравнение $\left(C(x)e^{3x}\right)' - 3C(x)e^{3x} = e^{-x}$ или $C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = e^{-x}$, т.е. $C'e^{3x} = e^{-x}$. Это дает $C' = e^{-4x}$, т.е. $dC = e^{-4x}dx$ и $C(x) = -\frac{e^{-4x}}{4} + C_1$

4) Используя найденное значение $C(x)$, получаем $z = \left(-\frac{e^{-4x}}{4} + C_1\right)e^{3x}$ или

$z = \frac{Ce^{3x} - e^{-x}}{4}$, т.е. $u = \frac{1}{z} = \frac{4}{Ce^{3x} - e^{-x}}$. И $y = \frac{4}{Ce^{3x} - e^{-x}} + e^{x}$.

Ответ: $y = \frac{4}{Ce^{3x} - e^{-x}} + e^{x}$.❽

Пример 11.9. Решить уравнение $\left(2x + y^3\right)dx + 3xy^2dy = 0$.

⑨ Это уравнение в дифференциалах. Переменные не разделяются, однородным оно не является.

Заметим, что $P(x, y) = 2x + y^3$, $P_y = 3y^2$, а $Q(x, y) = 3xy^2$ и $Q_x = 3y^2$. Таким образом, согласно теореме 7.1, исходное уравнение - уравнение в полных дифференциалах.

Найдем его решение $f(x,y) = C$, пользуясь тем, что $df = f_x dx + f_y dy$, и $f_x = P$, а $f_y = Q$.

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = x^2 + xy^3 + \varphi(y).$$

Тогда $f_y = 3xy^2 + \varphi'(y) = 3xy^2$, т.е $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi(y) = C_1$.

Откуда $f(x,y) = x^2 + xy^3 + C_1$.

Ответ: $x^2 + xy^3 = C$.❾

Пример 11.10. Решить уравнение $\left(x^2+y^2+x\right)dx+ydy=0$.

⑩ Это уравнение в дифференциалах. Переменные не разделяются, однородным оно не является. И даже не квазиоднородное.

I способ.

$P(x,\, y)=x^2+y^2+x$, $P_y=2y$, а $Q(x,\, y)=y$ и $Q_x=0$. Таким образом, исходное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Попробуем найти интегрирующий множитель. Т.к. $P_y\neq 0$, $Q_x=0$, то разумно его искать в $\mu=\mu(x)$. Приэтом уравнение (7.3) принимает вид, согласно замечанию 7.3,

$\mu_x Q+\mu\left(Q_x-P_y\right)=0$

или, в нашем случае,

$y\mu_x-2y\mu=0$, т.е. $\mu_x-2\mu=0$

- однородное линейное уравнение первого порядка. Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\mu}{\mu}=2dx.$$

Откуда $\ln|\mu|=2x+C_1$ или $\mu=Ce^{2x}$.

Выбирая значение $C=1$, получим интегрирующий множитель $\mu=e^{2x}\neq 0$.

Теперь наше уравнение имеет вид $\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy=0$, где $\tilde{P}(x,\, y)=\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x}$, $\tilde{P}_y=2ye^{2x}$, а $\tilde{Q}(x,\, y)=ye^{2x}$ и $\tilde{Q}_x=2ye^{2x}$. Таким образом, согласно теореме 7.1 новое уравнение - уравнение в полных дифференциалах.

Найдем его решение $f(x,y)=C$, пользуясь тем, что $df=f_x dx+f_y dy$, и $f_x=\tilde{P}$, а $f_y=\tilde{Q}$.

$$f(x,y)=\int\tilde{Q}(x,y)dy+\varphi(x) = \frac{y^2}{2}e^{2x}+\varphi(x).$$

Тогда $f_x=y^2e^{2x}+\varphi'(x)=\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x}$, т.е $\varphi'(x)=\left(x^2+x\right)e^{2x}$ и

$$\varphi(x)=\int\left(x^2+x\right)e^{2x}dx = \int x^2e^{2x}dx+\int xe^{2x}dx = \frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int 2xe^{2x}dx+\int xe^{2x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{2x}}{2}+C_1.$$

Откуда $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}e^{2x}+C_1$.

II способ.

Воспользуемся методом выделения интегрируемых комбинаций (см. замечание 7.1).

Заметим, что $xdx+ydy=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$. Тогда исходное уравнение принимает вид $\left(x^2+y^2\right)dx+\dfrac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)=0$ - уравнение с разделяющимися переменными. Чтобы подчеркнуть это, можно провести замену $z(x)=x^2+y^2$, тогда уравнение принимает вид $zdx+\dfrac{1}{2}dz=0$. Из него получим $\dfrac{dz}{z}=-2dx$ - уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, получим $\ln|z|=-2x+C_1$ или $z=Ce^{2x}$.

Производя обратную замену, находим $x^2+y^2=Ce^{2x}$ или $\left(x^2+y^2\right)e^{2x}=C$.

Ответ: $\left(x^2+y^2\right)e^{2x}=C$.❿