Билеты к экзамену по курсу «Математические методы аналитической механики» (ФПМИ)

TeX: Астафуров Евгений

4 июня 2020 г.

Содержание

1 Постулаты классической механики. Понятие силы. Инерциальные системы отсчёта и законы Ньтона. Группа преобразований Галилея, инвариантность уравнений механики.

1.1 Постулаты и аксиомы классической механики

1. Первая группа аксиом, определяющих поведение объектов (точки, прямые, плоскости) целиком задействована из Евклидовой геометрии.
2. Объекты в $\mathbb{E}^3$ полагаются зависящими от времени; отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ называется *движением.*
3. *Материальная точка* — геометрическая точка, которой поставлена в соответствие величина m, называемая *массой* (масса полагается независящей ни от времени, ни от положения в пространстве). Материальная точка однохначно задается парой $\mathbf{r}, m$, где $\mathbf{r}$ — вектор в евклидовом пространстве, отнесенный к какой либо декартовой системе координат.
4. Каждой паре материальных точек может быть поставлена пара векторов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (называемых *силами*), причем эти векторы удовлетворяют соотношению $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

1.2 Законы Ньютона. Инерциальные СО

Перечислим три закона Ньютона:

1. Существуют *инерциальные* СО.
2. Существуют СО, в которых выполнено
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$
причем такие СО называются инерциальными.
3. В инерциальной СО, если равнодействующая сил на материальную точку равна нулю, то данная материальноя точка движется равномерно и прямолинейно.

1.3 Группа преобразований Галилея. Инвариантность уравнений механики

Определение 1. *Принцип относительности Галилея* — все уравнения и законы механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета.

Определение 2. Преобразования, осуществляющие переход от одной инерциальной СО к другой, носят названия *преобразований Галилея* и могут быть записаны в следующем виде: $\{t, \mathbf{r}\} \to \{t', \mathbf{r}'\} : \begin{cases} t' = t + \tau \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}t + A\mathbf{r} \end{cases}$, где постоянные $\mathbf{r}_o$ и τ характеризуют смещение начала отсчета координат и времени, а постоянная $\mathbf{v}$ характеризует равномерное и прямолинейное движение новой СО относительно старой, матрица A — матрица поворота осей новой системы координат относительно старой. Совокупность этих независимых коэффициентов представляет собой *группу преобразований Галилея.*

Утверждение 1. *Законы классической механики инвариантны относительно группы преобразований Галилея.*

2 Кинематика точки. Траектория, скорости и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах (с испольованием комплекснозначных функций).

2.1 Траектория, скорость и ускорение

Определение 3. Движение материальной точки задается явной функцией от времени $\mathbf{r}(t)$, что эквивалентно заданию трех скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$ при рассмотрении в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

причем кривая, которую описывает $\mathbf{r}(t)$ называется *траекторией точки.*

Определение 4. *Скоростью* материальной точки называется вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Определение 5. *Ускорением* материальной точки называется величина $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$. Модуль усокрения $w = |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$, а направление задается косинусами:

$$\cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \frac{\ddot{z}}{w}.$$

2.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Помимо декартовых координа $x(t), y(t)$, движение может быть задано в полярных координатах (Рис. 1): пусть заданы функции $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, найдем скорость и ускорение точки P.

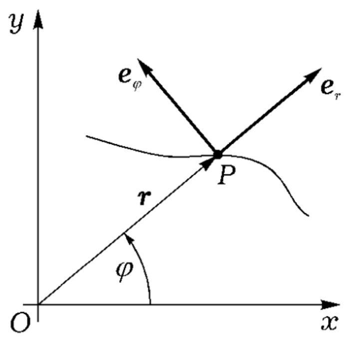

Рис. 1: Движение в полярной СК

Определение 6. *Радиальной осью* называется ось, направленная вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Определение 7. *Трансверсальной осью* называется ось, направленная вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_\varphi$, который образован поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки вектора $\mathbf{e}_r$.

Так как $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, в системе координат Oxy имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) \\ \mathbf{w} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi, (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi). \end{cases} \tag{1}$$

Определение 8. Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсвальную оси называются соответственно *радиальными* и *трансверсальными* скоростями (для ускорений аналогично).

$$v_r = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) \quad v_\varphi = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi).$$

3 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки. Уравнения Френе-Серре.

3.1 Естественный трехгранник

Пусть задан закон движения материальной точки $x(t), y(t), z(t)$. Выберем на траектории произвольную точку s в момент времени $t = 0$, тогда $s = s(t)$. Рассматривая s в качестве нового параметра для траектории, получим выражение для скорости:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}[s(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{st} = \boldsymbol{\tau}\dot{s},$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ определяет направление касательной к траектории в рассматриваемой точке. Вычислим ускорение точки:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \tag{2}$$

Определение 9. *Вектором кривизны* называется вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ (см. 2). Он связан с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ и *радиусом кривизны* ρ следующим соотношением:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}.$$

Тогда формула (2) перепишется в виде:

$$\boxed{\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}} \text{ — Ускорение точки.} \tag{3}$$

Определение 10. *Естественным (сопровождающим) трехгранником* называется набор векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, где последний вектор дополняет первые два таким образом, чтобы получившийся базис из трех векторов был правым.

Исходя из вышесказанного можем записать выражения для скорости и ускорения в осях трехгранника:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ v^2/\rho \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

3.2 Теорема Гюйгенса и разложении ускорения точки

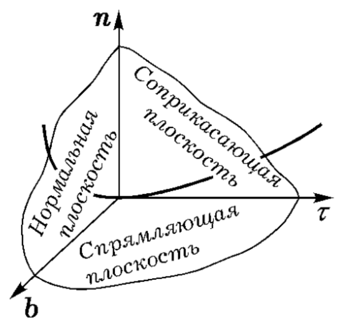

Рис. 2: Сопровождающий трехгранник

Сформулируем теорему:

Теорема 1 (*Теорема Гюйгенса*)**.** *Исходя из формулы (3), ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости. Его можно записать в виде:*

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{w}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{w}_\tau$ *— касательное ускорение,* $\mathbf{w}_n$ *— нормальное ускорение точки.*

3.3 Уравнения Френе-Серре

Рассмотрим вектор кривизны (9) в сопровождающем трехграннике: $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Из выражения

$$\frac{d(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau})}{ds} = (2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}) = (2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}) = 0,$$

откуда получаем, что векторы первой и второй производной $\boldsymbol{\tau}$ ортогональны, следовательно вторая производная направлена по главной нормали:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}} \text{ — Первая формула Френе-Серре.} \tag{5}$$

Рассматривая вектор $\mathbf{b}$ и выполяняя с ним те же действия, что и с вектором $\boldsymbol{\tau}$, приходим ко второй формуле Френе-Серре (коэффициент χ — *кручение* кривой линии):

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}} \text{ — Вторая формула Френе-Серре.} \tag{6}$$

Теперь найдем производную нормали по длине дуги:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d[\mathbf{b}\times\boldsymbol{\tau}]}{ds} = [\frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\boldsymbol{\tau}] + [\mathbf{b}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}] = -\chi\underbrace{[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}]}_{-\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho}\underbrace{[\mathbf{b}\times\mathbf{n}]}_{-\boldsymbol{\tau}},$$

откуда следует третья формула Френе-Серре:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \chi\mathbf{b} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau}} \text{ — Третья формула Френе-Серре.} \tag{7}$$

4 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических координатах.

4.1 Криволинейные координаты точки

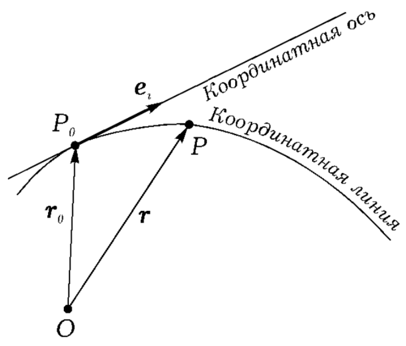

Рис. 3: Оси в криволинейных координатах

Введем определение:

Определение 11 (*Криволинейные координаты*)**.** Всякие три числа q_1, q_2, q_3, однозначно определяющие положение точки в пространстве называются *криволинейными координатами.* Движение считается заданным, если заданы функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Утверждение 2. *Связь между декартовыми и криволинейными координатами дается формулой*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1(t))\mathbf{i} + y(q_2(t))\mathbf{j} + z(q_3(t))\mathbf{k}. \tag{8}$$

Определение 12 (*Координатная линия*)**.** Рассмотрим произвольную точку P_0 (Рис. 3) с координатами q_{10}, q_{20}, q_{30}. *Первой координатной линией* называется кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\cdot, q_{20}, q_{30})$, получающуюся из (8) при фиксированных $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ и переменном q_1. Аналогично получаются *вторая* и *третья координатные линии.*

Определение 13 (*Координатная ось*)**.** Касательную к координатной линии в точке P_0 называют *координатной осью* (соответственно *первой*, *второй* и *третьей*). Единичный $\mathbf{e}_i$ вектор i-ой координатной оси может быть записан в виде

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \text{ где } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\mathbf{k}. \tag{9}$$

4.2 Коэффициенты Ламе

Определение 14 (*Коэффициенты Ламе*)**.** Коэффициент H_i в формуле (9) называется i-ым *коэффициентом Ламе* и равен

$$\boxed{H_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}} \text{ — Коэффициент Ламе.} \tag{10}$$

4.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Утверждение 3 (*Скорость в КК*)**.** *Из того, что* $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dq_3}\frac{dq_3}{dt} = v_{q_1}\mathbf{e}_1 + v_{q_2}\mathbf{e}_2 + v_{q_3}\mathbf{e}_3$ *следует, что проекции скоростей на координатные оси (опр. 13) равны:*

$$\boxed{v_{q_i} = H_i \dot{q}_i} \text{ — \textit{Проекция скорости на координатную ось.}} \tag{11}$$

Утверждение 4 (*Ускорение в КК*)**.** *(Вывод см. Маркеев стр. 28) Проекция ускорения на i-ую координатную ось равно*

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{d\dot{q}_i}\right) - \left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dq_i}\right)\right]} \text{ — \textit{Проекция ускорения на координатную ось}} \tag{12}$$

Если ввести обозначение $T = \frac{v^2}{2}$, то выражение для w_{q_i} можно записать в следующем виде

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)} \text{ — \textit{Проекция ускорения на координатную ось (T).}} \tag{13}$$

4.4 Скорость и ускорение точки в циллиндрических координатах

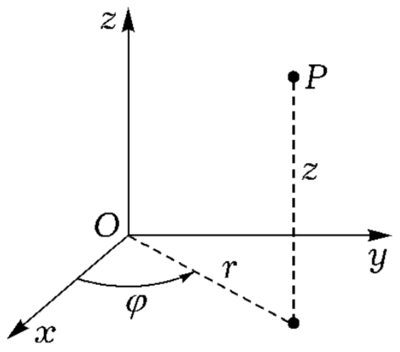

Рис. 4: Циллиндрические координаты

Положим $\begin{cases} q_1 = r, \\ q_2 = \varphi, \\ q_3 = z, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$ Коэффициенты Ламе:

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1.$$

Из формулы (11) получаем:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Так же $T = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2)$, а значит по формуле (13) имеем:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

5 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса).

5.1 Кинематика твердого тела

Определение 15 (*Абсолютно твердое тело*)**.** *Абсолютно твердое тело* — такая механическая система, у которой взаимные расстояния между всеми точками постоянны.

Определение 16 (*Поступательное движение*)**.** *Поступательным* назовем такое движение, при котором перемещения всех его точек геометрически равны.

Определение 17 (*Вращение*)**.** Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг некоторой неподвижной прямой называется *вращением.*

Определение 18 (*Винтовое перемещение*)**.** *Винтовым перемещением* называется совокупность поступательного перемещения и вращения вокруг неподвижной прямой, вдоль которой происходит поступательное перемещение.

5.2 Углы конечного вращения. Углы Эйлера

С любым твердым телом может быть жестко связан координатный трехгранник (*триэдр*) xyz (Рис. 5), в котором все точки тела неподвижны. Обычно начало триэдра помещается в неподвижную точку твердого тела (ТТ).

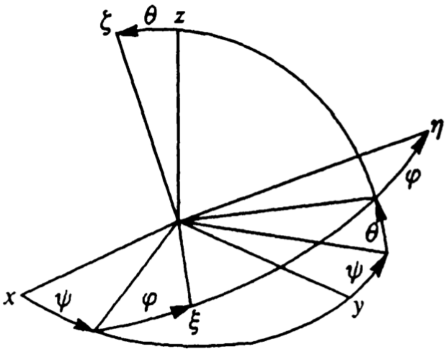

Рис. 5: 3-1-3

Определение 19 (*Ориентация ТТ*)**.** *Ориентация ТТ* определяется как ориентация одного триэдра (жестко связанного с ТТ) относительно другого, принимаемого за неподвижный.

Определение 20 (*Углы конечного вращения*)**.** Три числа ψ, θ, φ, определяющие ориентацию ТТ, не являются *наблюдаемыми* (как это имело место в случае декартовых координат и материальной точки). Углы ψ, θ, φ называют *углами конечного вращения.*

Определение 21 (*Углы Эйлера*)**.** Существует, однако, множество различных способов задать поворот ТТ с помощью углов конечного вращения ψ, θ, φ, но самым распространенным является способ углов Эйлера, так называемый метод «3-1-3»:

- Первый поворот совершается вокруг оси номер три (оси z) на угол ψ (Рис. 5) — *угол прецессии.*
- Второй поворот совершается вокруг оси номер один (оси x) на угол θ (поворачиваем триэдр, получившийся на первом шаге) — *угол нутации.*
- Третий поворот совершается вокруг оси номер три (оси z) на угол φ (поворачиваем триэдр, получившийся на втором шаге) — *угол собственного вращения.*

5.3 Векторно-матричное задание движения ТТ

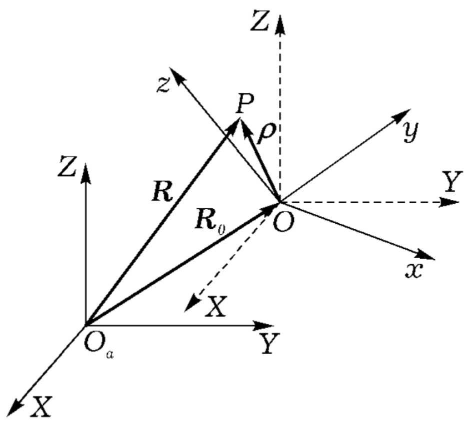

Рис. 6:

Пусть $O_\alpha XYZ$ — абсолютная система координат (Рис. 7), O — произвольная фиксированная точка ТТ, $OXYZ$ — система координат, полученная из $O_\alpha XYZ$ при помощи поступательного перемещения, а $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с ТТ.

Пусть P — некоторая точка ТТ и $\boldsymbol{\rho}$ — ее радиус-вектор в системе координат $Oxyz$. Тогда если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки P в системе координат $OXYZ$, то векторы $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$ связны соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к $OXYZ$. Тогда радиус вектор точки P твердого тела в абаолютной системе координат $O_\alpha XYZ$ задается:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}. \tag{14}$$

5.4 Угловая скорость и угловое ускорение ТТ. Формулы Эйлера и Ривальса

Определение 22 (*Угловая скорость*)**.** Существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый *угловой скоростью* тела, с помощью которого скорость точки P (Рис. 7) может быть представлена в виде

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]} \text{ — Скорость ТТ,} \tag{15}$$

где $\mathbf{v}_O$ — скорость полюса O, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ от полюса не зависит.

Утверждение 5 (*Формула Эйлера*)**.**

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]} \text{ — } \textit{Формула Эйлера.} \tag{16}$$

Определение 23 (*Угловое ускорение*)**.** Чтобы найти ускорение $\mathbf{w}$ точки P твердого тела, продифференцируем выдажение (15), получим:

$$\boxed{\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}]} \text{ — Ускорение ТТ,} \tag{17}$$

где величина $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется *угловым ускорением.*

Утверждение 6 (*Формула Ривальса*)**.** *Подставляя в (17) формулу Эйлера (16), пполучаем*

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]} \text{ — } \textit{Формула Ривальса.} \tag{18}$$

6 Комплексная форма описания плоско-параллельного движения точки и твёрдого тела. Мгновенные центры скоростей и ускорений.

6.1 Комплексная форма описания плоско-параллельного движения точки и твёрдого тела

При аналитическом решении некоторых задач кинематики плоского движения может быть использован метод комплекснозначных функций. Будем рассматривать плоскость движения как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Тогда положение любой точки на ней с радиус-вектором $\mathbf{r}$ задается комплексным числом z.

- Переход в декартову систему координат фактически означает запись числа z в алгебраической форме $z = x + iy$.
- Переход в полярную систему координат означает запись в показательной форме $z = \rho e^{i\varphi}$. Это можно интерпретировать как результат поворота точки оси абсцисс с координатой ρ на угол φ вокруг начала координат. При необходимости выделить действительную и мнимую части нужно перейти к тригонометрической форме записи $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть движение точки описывается комплексно-значной функцией $z(t)$ вещественного аргумента t. Тогда кинематические характеристики движения (скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$) суть первая и вторая производные функции $z(t)$ по t, то есть так же являются комплекснозначными функциями вещественного аргумента.

Определение 24 (*Радиальная и трансверсальная компонента* $\mathbf{v}$)**.** Так как $\dot{z}(t) = \mathbf{v}(t) = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi})e^{i\varphi}$, то вещественная часть множетеля при $e^{i\varphi}$ — *радиальная* состовляющая вектора скорости, а мнимая часть множетеля при $e^{i\varphi}$ — *трансверсальная* состовляющая вектора скорости.

Определение 25 (*Радиальная и трансверсальная компонента* $\mathbf{w}$)**.** Так как $\ddot{z}(t) = \mathbf{w}(t) = \left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + i(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\right] e^{i\varphi}$, то вещественная и мнимая части множетеля при $e^{i\varphi}$ – суть *радиальная* и *трансверсальная* состовляющие вектора ускорения $\mathbf{w}$.

7 Понятие гиперкомплексной числовой системы. Алгебра кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте.

7.1 Алгебра кватернионов

Определение 26 (*Кватернион*)**.** *Кватернионы* представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа и записываются выражениями следующего вида

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ — компоненты кватерниона Λ, а i_1, i_2, i_3 — кватернионные единицы.

Определение 27 (*Кватернионное сложение*)**.** Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры: если $\begin{cases} \Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 \\ M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3, \end{cases}$ то

$$\Lambda + M = (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k + \mu_k) i_k.$$

Определение 28 (*Произведение кватерниона на скаляр*)**.** Произведение кватерниона Λ на скаляр a определятся «поэлементно»

$$a\Lambda = a\lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} a\lambda_k i_k.$$

Определение 29 (*Произведение кватернионов*)**.** Правила умножения кватернионных единиц определяется следующей таблицей:

$i_k \circ i_k = -1$
$i_1 \circ i_2 = i_3$
$i_2 \circ i_3 = i_1$
$i_3 \circ i_1 = i_2$
$i_2 \circ i_1 = -i_3$
$i_3 \circ i_2 = -i_1$
$i_1 \circ i_3 = -i_2$

В связи с этими правилами можно использовать такую интерпретацию кватернионов, при которой элементы i_1, i_2, i_3 отождествляются с единичными векторами, образующими в трехмерном пространстве правую тройку. Тогда по аналогии с комплексными числами, кватернион Λ можно представить как сумму скалярной λ_0 и векторной части $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}.$$

Утверждение 7 (*Формула умножения кватернионов*)**.**

$$\boxed{\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}] - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu})} \tag{19}$$

Определение 30 (*Сопряженный кватернион*)**.** По аналогии с комплексными числами, определяется сопряженный кватернион $\widetilde{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$ к кватерниону $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$.

Определение 31 (*Норма кватерниона*)**.** *Нормой* кватерниона называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение:

$$\|\Lambda\| = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2.$$

Если $\|\Lambda\| = 1$, то такой кватернион называется *нормированным*. Норма произведения кватернионов: $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$.

Определение 32 (*Обратный кватернион*)**.** Кватернионом, *обратным* к Λ называется кватернион Λ^{-1}, определяемый из условия

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1.$$

Домножим обе части $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$ на $\widetilde{\Lambda}$ слева и получим:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\widetilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|}.$$

7.2 Кватернионный способ задания ориентации ТТ

Теорема 2 (*О положении ТТ*)**.** *Пусть базис* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ *связан с ТТ, а базис* $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ *— неподвижен. Произвольное положение ТТ с неподвижной точкой задается нормированным кватернионом* Λ *по формулам:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \Lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \widetilde{\Lambda}, \\ \mathbf{e}_2 = \Lambda \circ \mathbf{i}_2 \circ \widetilde{\Lambda}, \\ \mathbf{e}_3 = \Lambda \circ \mathbf{i}_3 \circ \widetilde{\Lambda} \end{cases} \tag{20}$$

7.3 Теорема Эйлера о конечном повороте тела с неподвижной точкой

Теорема 3. *Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси* $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}$ *на угол* $\theta = 2\arccos\lambda_0$*, где* $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ *— нормированный кватернион, задающий положение тела.*

□ Запишем кватернион Λ в тригонометрической форме: $\Lambda = \cos\varphi + \mathbf{e}\sin\varphi$, где $\cos\varphi = \lambda_0$ и $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}$. Дополним вектор $\mathbf{e}$ единичными векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ до правой тройки таким образом, чтобы вектор $\mathbf{r}$ оказался в плоскости векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{j}$. Тогда $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta)$. Учитывая, что из условия ортогональности векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{j}$ следует равенство $\mathbf{j} \circ \widetilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{j}$, по теореме о положении твердого тела получим

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}|(\Lambda \circ \mathbf{e} \circ \widetilde{\Lambda}\cos\beta + \Lambda \circ \mathbf{j} \circ \widetilde{\Lambda}\sin\beta) = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + (\mathbf{j}\cos 2\varphi + \mathbf{k}\sin 2\varphi)\sin\beta),$$

сравнивая полученное выражение с вектором $\mathbf{r}$, получаем требуемое. ■

8 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой.

8.1 Формулы сложения поворотов твердого тела в кватернионах

Пусть кватернион Λ задает поворот тела из базиса $\mathbf{I}$ в базис $\mathbf{I}'$, а кватернион M — из базиса $\mathbf{I}'$ в базис $\mathbf{I}''$. В результате двух указанных поворотов начальное положение $\mathbf{r}$ точки тела преобразуется в конечное положение $\mathbf{r}''$ по формуле:

$$\mathbf{r}'' = M \circ \mathbf{r}' \circ \widetilde{M} = M \circ \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \widetilde{\Lambda} \circ \widetilde{M} = N \circ \mathbf{r} \circ \widetilde{N},$$

где $N = M \circ \Lambda$ — кватернион результирующего поворота.

По индукции можно показать, что в случае n последовательных поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, формула сложения имеет вид:

$$N = \Lambda_n \circ \ldots \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1.$$

8.2 Параметры Родрига-Гамильтона

Запишем единичный кватернион в форме $\Lambda = \lambda_0 + \lambda \mathbf{e}$, где $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$, а вектор $\mathbf{e}$ — единичный вектор, задающий направление вектора $\boldsymbol{\lambda}$.

Так как кватернион Λ — единичный, то $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$. Два скаляра, удовлетворяющих уравнению единичной окружности всегда могут быть представлены в таком виде, что

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Теорема 4 (*О повороте базиса*)**.** *Поворот, определяемый кватернионом $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ — есть поворот вокруг вектора $\mathbf{e}$ на угол φ.*

□ Доказательство состоит в непосредственном вычислении матрицы поворота A по заданному кватерниону Λ. Между всеми ортогональными матрицами ($\det A = 1$) и всеми поворотами твердого тела существует взаимнооднозначное соответствие. Действительно, рассмотрим образ первого единичного вектора триедра xyz:

$$\mathbf{i}' = A\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

то есть образом первого орта является первый столбец матрицы A (аналогично для остальных).

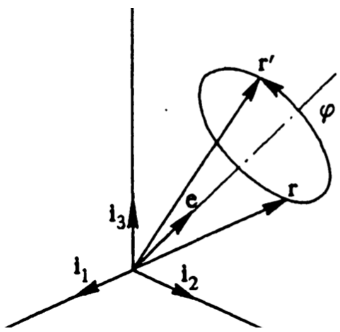

Рис. 7:

Столбцы матрицы A представляют собой образы ортов исходного базиса. Вычислим эти образы. При этом исходный базис выберем так: $\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \perp \mathbf{e}$. Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_1 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) = \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{i}_2' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_2 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) = \mathbf{i}_2\cos\varphi + \mathbf{i}_3\sin\varphi, \\ \mathbf{i}_3' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_3 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) = -\mathbf{i}_2\sin\varphi + \mathbf{i}_3\cos\varphi. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. ■

Таким образом, в записи единичного кватерниона $\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$, вектор $\mathbf{e}$ есть единичный вектор оси *Эйлерова* поворота, а φ — угол этого поворота.

Определение 33 (*Параметры Родрига-Гамильтона*)**.** В покомпонентной записи кватернион $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ имеет вид

$$\Lambda = \left\{\cos\frac{\varphi}{2}, x\sin\frac{\varphi}{2}, y\sin\frac{\varphi}{2}, z\sin\frac{\varphi}{2}\right\}, \tag{21}$$

коэффициенты которого носят название параметров *Родрига-Гамильтона* конечного поворота.

Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой — 7.3.

9 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела.

9.1 Уравнения Пуассона

Рассмотрим движение тела с неподвижной точкой O относительно базиса $\mathbf{I}$. Моментам времени t и $t+\Delta t$ соответствуют положения связанного с телом базиса $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{E}(t+\Delta t)$.

По теореме Эйлера о конечном повороте (7.3) указанные положения можео совместить одним поворотом вокруг некоторой оси $\mathbf{e}(t,\Delta t)$ на некоторой угол $\Delta\varphi(t,\Delta t)$.

Угловой скоростью твердого тела относительно базиса $\mathbf{I}$ в момент времени t называется предел

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi(t,\Delta t)}{\Delta t}\mathbf{e}(t,\Delta t). \tag{22}$$

Найдем выражение для вектора угловой скорости через кватернион $\Lambda(t)$, задающий положение ТТ относительно базиса I. Из формулы сложения поворотов (8.1) $\Lambda(t+\Delta t) = \delta\Lambda\circ\Lambda(t)$, где $\delta\Lambda$ — кватернион, который соответствует перемещению тела из положения $\mathbf{E}(t)$ в положение $\mathbf{E}(t+\Delta t)$. Исходя из теоремы номер (4) кватернион $\delta\Lambda$ запишется в виде

$$\delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \mathbf{e}(t,\Delta t)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 1 + \mathbf{e}(t,\Delta t)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} + O((\Delta\varphi)^2).$$

Найдем $\dot\Lambda$, для этого посчитаем следующую разность:

$$\Delta\Lambda = \Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t) = \delta\Lambda\circ\Lambda(t) - \Lambda(t) = (\delta\Lambda - 1)\circ\Lambda(t),$$

откуда следует

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta\Lambda - 1}{\Delta t}\circ\Lambda(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda(t). \tag{23}$$

Утверждение 8 (*Уравнения Пуассона*)**.** *Из формулы (23) следуют два уравнения*

$$\boxed{\begin{cases}\dot\Lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda(t),\\ \boldsymbol{\omega} = 2\dot\Lambda\circ\widetilde{\Lambda}.\end{cases}} \text{ — \textit{Уравнения Пуассона}} \tag{24}$$

где кватернион $\Lambda(t)$ задает положение твердого тела относительно базиса $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\omega}$ *— угловая скорость твердого тела относительно базиса* $\mathbf{I}$.

9.2 Прецессионное движение твердого тела

Формально про прецессионное движение — билет 22.

Определение 34 (*Прецессионное движение*)**.** Движение ТТ с неподвижной точкой называется *прецессионным*, если некоторая фиксированная в ТТ ось $\mathbf{e}$ (проходящая через неподвижную точку), совершает движение по поверхности неподвижного кругового конуса. Если составляющие угловой скорости не зависят от времени, то такая прецессия называется *регулярной.*

Пусть ось $\mathbf{e}$ — фиксированная в теле ось, а ось $\mathbf{i}$ — ось конуса (по поверхности которого движется ось тела $\mathbf{e}$). Пусть угол между осями $\mathbf{e}$ и $\mathbf{i}$ равен θ, и он, очевидно, не зависит от времени, следовательно $(\mathbf{i}\cdot\dot{\mathbf{e}}) = 0$, отсюда, с учетом формулы $\dot{\mathbf{e}} = [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]$ (16), получаем $(\mathbf{i}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]) = 0$, то есть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела раскладывается на ось конуса $\mathbf{i}$ и ось тела $\mathbf{e}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1(t)\mathbf{i} + \omega_2(t)\mathbf{e}.$$

Определение 35 (*Оси прецессии и собственного вращения*)**.** Ось конуса $\mathbf{i}$ называется *осью прецессии*, а ось тела $\mathbf{e}$ (которая совершает вращение по поверхности конуса) называется *осью собственного вращения.*

Определение 36 (*Угловые скорости прецессии и собственного вращения*)**.** Проекция угловой скорости ТТ на ось прецессии ω_1 называется *угловой скоростью прецессии.* Проекция угловой скорости ТТ на ось собственного вращения ω_2 называется *угловой скоростью собственного вращения.*

10 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось. Представление винтового движения твёрдого тела с помощью дуальных чисел.

10.1 Кинематические инварианты

1. В определении угловой скорости ТТ (22), $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора полюса P. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *первым кинематическим инвариантом.*

2. Из определения (22) следует, что для любых двух точек тела A и B, скалярные произведения их скоростей на вектор $\boldsymbol{\omega}$ одинаковы. *Вторым кинематическим инвариантом* будем называть скалярное произведение скорости точки тела на угловую скорость тела: $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$.

10.2 Дуальные числа и их свойства

Рассмотрим трансцендентное расширение поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ в виде $z = a + bE$, где трансцендентный элемент $E \notin \mathbb{R}$ обладает свойством:

$$E^2 = p + qE, \;\; p, q \in \mathbb{R}.$$

Определение 37 (*Алгебра дуальных чисел*)**.** Если $(E - \frac{q}{2})^2 = p + \frac{q^2}{4} = 0$, полагая $\varepsilon = \frac{E - \frac{q}{2}}{k}$, $(\varepsilon^2 = 0)$ получаем расширение $\mathbb{R}$ в виде алгебры *дуальных чисел.* Для дуального числа $A = a + \varepsilon b$ имеет место представление

$$A = a + \varepsilon b = a[1 + \varepsilon(b/a)] = a[1 + \varepsilon p(A)],$$

где a — главная часть, $b = \operatorname{mom} A$ — моментная часть, $b/a = p(A)$ — параметр дуального числа A.

Действия над дуальными числами:

- Ассоциативны по отношению к умножению: $(a_1 + \varepsilon b_1)(a_2 + \varepsilon b_2) = (a_1 a_2) + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

- Дистрибутивны по отношению к сложению: $(a_1 + \varepsilon b_1) + (a_2 + \varepsilon b_2) = (a_1 + a_2) + \varepsilon(b_1 + b_2)$.

Любая аналитическая функция, представимая степенным рядом своего аргумента, может рассматриваться как дуальная функция дуального аргумента $\Phi = \varphi + \varepsilon\psi$. В частности

$$\cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\psi\sin\varphi, \qquad \sin\Phi = \sin\varphi + \varepsilon\psi\cos\varphi.$$

P.S.

Проще говоря, дуальные числа — гиперкомплексные числа вида $a + \varepsilon b$, где ε — абстрактный элемент, квадрат которого равен нулю. Любое дуальное число однозначно определяется такой парой чисел a, b.

В отличии от комплексных чисел, алгебра дуальных чисел содержит в себе делители нуля, причес все они имеют вид $a\varepsilon$. Плоскость всех дуальных чисел представляет собой «альтернативную комплексную плоскость».

10.3 Описание винтового движения

Определение 38 (*Винтовое движение ТТ*)**.** Винтовым движением ТТ называют движение, при котором помимо вращения вокруг неподвижной оси имеет место его поступательное перемещение вдоль этой оси.

Для описания винтового движение вводится понятие *дуального угла*, характеризующего взаимное расположение двух скрещивающихся прямых:

Определение 39 (*Дуальный угол*)**.** Дуальный угол характеризует взаимное расположение двух скрещивающихся прямых. Мерой дуального угла является дуальное число $\Phi = \varphi + \varepsilon s$. Рассмотрим две скрещивающиеся прямые и единичный вектор $\mathbf{e}$, задающий общий перпендикуляр. Тогда главная часть числа Φ (величина φ) определяет угол поворота одной из прямых вокруг вектора $\mathbf{e}$, в результате которого прямые станут параллельными, а моментная часть числа Φ (величина s) — смещение этой прямой, в результате которого прямые совпадут.

P.S. Числа φ и s считаются положительными, если вращение и перемещение совершаются в положительном направлении оси $\mathbf{e}$.

P.S. Очевидно, что если прямые пересекаются под углом φ, то дуальный угол Φ становится вещественным. А если прямые параллельны, то дуальный угол содержит только моментную часть.

Утверждение 9 (*Представление винтового движения ТТ с помощью дуальных чисел*)**.** *Винтовое движение можно представить в виде композиции вращения вокруг оси с вектором* $\mathbf{e}$ *на угол* φ *и смещения на величину* s *вдоль этой же оси. В терминах кватернионах, получаем так называемый дуальный кватернион* $\Lambda_\Phi = \cos\frac{\Phi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\Phi}{2}$, *где* $\Phi = \varphi + \varepsilon s$ *— дуальное число.*

$$\boxed{\Lambda_\Phi = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon\frac{s}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \left(1 + \varepsilon\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \Lambda_\varphi \circ \Lambda_{\mathbf{s}} = \Lambda_{\mathbf{s}} \circ \Lambda_\varphi}. \tag{25}$$

11 Несвободные системы. Связи и их классификация. Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы. Число степеней свободы системы. Теорема Фробениуса о голономности дифференциальной связи в $\mathbb{R}^3$ (только формулировка).

11.1 Несвободные системы. Связи и их классификация

Определение 40 (*Несвободная система*)**.** Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой прямоугольной системы координат, предполагаемой неаодвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\mathbf{r}_\nu$ и скоростями $\mathbf{v}_\nu$ ее точек. *Связями* называются ограничения, накладываемые на величины $\mathbf{r}_\nu$ и $\mathbf{v}_\nu$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах. Если на систему наложены связи, то она называется *несвободной.*

Приведем примеры несвободных систем:

1. Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи (*удерживающая, геометрическая*).

2. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$ (*удерживающая, геометрическая*).

3. Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь в этом случае задается соотношением $l^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geqslant 0$ (*неудерживающая*)

Определение 41 (*Виды связей*)**.** В общем случае связь задается соотношением

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = f(r_1, \ldots, r_N, v_1, \ldots, v_N, t) \geqslant 0. \tag{26}$$

- (**Удерживающая**) Если в неравенстве (26) реализуется только знак равенства, то такая связь называется *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей).*

- (**Неудерживающая**) Если в неравенстве (26) реализуется как знак равенства, так и знак неравенства, то такая связь называется *неудерживающей (односторонней, освобождающей).* Системы с неудерживающими связями далее не рассматриваются.

- (**Геометрическая**) Если уравнение связи можнозаписать в виде $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то такая связь называется *геометрической (конечной,голономной).*

- (**Дифференциальная**) Если в уравнение связи $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ входят проекции скоростей $\mathbf{v}_\nu$, то связь называется *дифференциальной (кинематической).*

- (**Интегрируемая**) Дифференциальную связь $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и времени (как в случае геометрической связи).

- (**Неинтегрируемая**) Если дифференциальную связь $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ нельзя представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем, то ее называют *неинтегрируемой (неголономной).*

P.S.

Если на система материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной.* Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной.*

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи линейны относительно проекций $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ скоростей точек системы. Таким образом, в дальнейшем мы будем изучать движение свободных механических систем или несвободных систем со связями, аналитическое представление которых имеет вид:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{27}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu) + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{28}$$

Векторы $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ и t. В частных случаях r и s могут быть равны нулю.

Определение 42 (*Стационарные или склерономные связи*)**.** Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если переменная t не входит в уравнения (27).

Дифференциальные связи называются *стационарными* или *склерономными*, если функция $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ (28) не зависит явно от t, а функции a_β тождественно равны нулю.

Определение 43 (*Склерономные система*)**.** Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи.

Определение 44 (*Реономная система*)**.** Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

11.2 Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы.

Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, задаваемом радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}^*_{\nu 0}$, а скорости точек имеют некоторые конкретные возможные значения $\mathbf{v}^*_{\nu 0}$. Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиусов-вектором $\mathbf{r}_\nu$ точек системы для моментов времени t, следующих за t^*. Если обозначить за dt приращение времени $t - t^*$, то приращения радиус-векторов точек системы можно представить в виде:

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}^*_{\nu 0}dt + \frac{1}{2}\mathbf{w}^*_{\nu 0}(dt)^2 + \ldots, \tag{29}$$

где $\mathbf{w}^*_{\nu 0}$ — ускорения точек системы в момент времени $t = t^*$; многоточием обозначены величины порядка $(dt)^3$ и выше.

Определение 45 (*Действительные (истинные) перемещения*)**.** Величины в (29) суть *действительные (истинные)* перемещения точек системы за время dt.

Определение 46 (*Виртуальные перемещения*)**.** Пусть в момент времени $t = t^*$ система занимает некоторое положение, определяемое радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}^*_\nu$. *Виртуальными перемещениями* системы называется совокупность величин $\delta\mathbf{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{30}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s), \tag{31}$$

где величины $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}$ и $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ вычислены при $t = t^*$, $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}^*_\nu$.

11.3 Число степеней свободы системы

Определение 47 (*Число степеней свободы*)**.** Виртуальные перемещения $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ удовлетворяют $r+s$ уравнениям (30), (31). Число независимых виртуальных перемещений системы называется ее числом *степеней свободы* n. Ясно, что $n = 3N - r - s$.

11.4 Теорема Фробениуса о голономности дифференциальной связи в $\mathbb{R}^3$

В предположении, что уравнения геометрических связей $f_j(\mathbf{r}, t) = 0$ независимы, можно ввести обобщенные координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ на конфигурационном многообразии и записать уравнения $g_l = 0$ дифференциальных связей в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{li}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_i + b_l(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{32}$$

В пространстве $\{\mathbf{q}, t\}$ уравнения (32) можно переписать в виде

$$\omega_l = \sum_{i=1}^{n} a_{li}(\mathbf{q}, t)dq_i + b_l(\mathbf{q}, t)dt = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{33}$$

где ω_l — дифференциальные 1-формы.

Теорема 5 (Фробениус)**.** *Теорема Фробениуса утверждает, что связи (32) интегрируемы тогда и только тогда, когда $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m = 0$ при всех i.*

12 Элементарная работа сил системы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Случай потенциального поля сил.

12.1 Силовое поле. Силовая функция. Потенциал

Определение 48 (*Силовое поле*)**.** Предположим, что на материальную точку, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, во всем пространстве или в какой-то его части действует сила, зависящая от положения точки. В этом случае говорят, что в пространстве или в его части задано *силовое поле*, а так же, что точка движется в силовом поле.

Определение 49 (*Потенциальное силовое поле*)**.** Силовое поле называется *потенциальным*, если существует скалярная функция U, зависящая только от координат x_ν, y_ν, z_ν точек P_ν материальной системы (и, быть может, от времени), такая, что

$$\begin{cases} F_{\nu x} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \\ F_{\nu y} = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \\ F_{\nu z} = \frac{\partial U}{\partial z_\nu}, \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, N). \tag{34}$$

Определение 50 (Силовая функция, потенциал)**.** В формуле (34) функция U называется *силовой функцией*.
Функция $\Pi = -U$ называется *потенциалом* или *потенциальной энергией*.

Определение 51 (*Стационарное/нестационарное потенциальное поле*)**.** Потенциальное поле называтеся *стационарным*, если функция Π не зависит явно от времени и *нестационарным* в противном случае.

Определение 52 (*Потенциальная сила*)**.** Силы $\mathbf{F}_\nu$, удовлетворяющие (34), называются *потенциальными*.

Элементарная работа сил стационарного потенциального силового поля представляет собой полный дифференциал:

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = dU = -d\Pi. \tag{35}$$

Поэтому, если в рассматриваемой области пространства Π является однозначной функцией от x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$), то полная работа сил потенциального поля при переходе из одного положения системы в другое не зависит от путей перехода точек из начальных положений в конечные.

Пример: (однородное поле тяжести) пусть m — масса точки, g — ускорение свободного падения, тогда $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$, $\Pi = mgz$.

12.2 Элементарная работа сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы

Пусть $\mathbf{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν системы ($\nu = 1, 2, \dots, N$), а $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек P_ν относительно начала координат.

Пусть положение системы задается ее обобщенными координатами q_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Элементарную работу системы сил на виртуальных перемещениях $\delta\mathbf{r}_\nu$ будем обозначать δA. Найдем выражение для элементарной работы через обобщенные координаты и их вариации δq_j.

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left[\sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \right]}_{Q_j} \delta q_j. \tag{36}$$

Определение 53 (*Обобщенная сила*)**.** Величина Q_j в формуле (36) называется *обобщенной силой* и соответствует обобщенной координате q_j ($j = 1, 2, \dots, m$). В общем случае обобщенные силы будут функциями обобщенных координат, скоростей и времени.

После введения понятия обобщенной силы, формулу (36) можно переписать в виде:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j. \tag{37}$$

Утверждение 10 (*Вычисление обобщенной силы*)**.** *В практических задачах при вычислении обобщенных сил, формулой (37) обычно не пользуются. Обычно дают системе такое виртуальное перемещение, при котором* $\delta q_k = 0\ \forall k \neq j$, *тогда* $\delta A = \delta A_j = Q_j \delta q_j$ *и*

$$\boxed{Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}} \text{ — Вычисление обобщенной силы.} \tag{38}$$

12.3 Случай потенциального поля сил

Пусть $\mathbf{F}_\nu$ — потенциальные силы с потенциалом $\Pi = \Pi(\mathbf{r}_\nu, t)$. ТОгда и обобщенные силы — потенциальные, причем им соответствует потенциал, полученный из функции $\Pi(\mathbf{r}_\nu, t)$, если в ней выразить величины $\mathbf{r}_\nu$ через обобщенные координаты. С учетом формулы (35) имеем

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu) = -\delta \Pi = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Отсюда следует, что в случае потенциальных сил обобщенные силы могут быть вычислены по формулам

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)} \text{ — Выражение обобщенный сил в потенциальном поле.} \tag{39}$$

13 Голономные связи. Достаточное условие голономности дифференциальной связи. Идеальные связи. Уравнения Лагранжа голономной системы с идеальными связями и их свойства: ковариантность, невырожденность.

Механической системой будем называть конечную или бесконечную совокупность материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что *положение* механической системы известно, если известно положение любой ее точки в некоторой декартовой системе координат. Это означает, что нам известна вектор-функция:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu) = \begin{Vmatrix} x(\nu) \\ y(\nu) \\ z(\nu) \end{Vmatrix},$$

ставящая в соответствие точке системы, имеющей номер ν, ее декартовы координаты x, y, z.

13.1 Уравнения Лагранжа для голономной системы

Определение 54 (*Конфигурационное многообразие*)**.** Механическая система называется системой с конечным числом степеней свободы, если если можно ввести такое конечномерное линейное (векторное) пространство R^m и такое множесто точек M в нем6 что между всеми возможными положениями механической системы и всеми точками множества $M \subset R^m$ имеется взаимно-однозначное соответствие.

Множество M называется *конфигурационным многообразием* механической системы если указанное соответствие дифференцируемо в обе стороны (под дифференцируемостью понимается k-кратная непрерывная дифференцируемость, при этом конкретное значение k несущественно).

(а) (б)

Рис. 8:

Пример 1 (*Конфигурационное многообразие: тор*)**.** На Рис. 8 (а) изображен двухзвенный маятник, состоящий из двух материальных точек 1 и 2, соединенных невесомыми, нерастяжимыми стержнями. Конфигурационное многообразие этой системы является тором (Рис. 8 (б)). Откладывая углы α и β от произвольно выбранных за нулевые меридиана и параллели, убеждаемся в наличии взаимно однозначного соответствия между точками тора и положениями двухзвенного маятника. Сам тор в R^3 может быть задан, например, таким уравнением:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5)^2 + 16x_3^2 = 16.$$

P.S.

Числом степеней свободы механической системы называется размерность ее конфигурационного многообразия. Напомним, что размерностью многообразия называется разность между размерностью пространства, в которое оно погружено, и числом уравнений, задающих многообразие аналитически. В примере выше, число степеней свободы равно двум.

Определение 55 (*Лагранжевы параметры*)**.** *Параметризацией* механической системы с конечным числом степенй свободы называется введение конечного числа параметров $q_1, \ldots, q_n$, задание которых однозначно определяет положение системы: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q_1, \ldots, q_n)$. Сами параметры $q_1, \ldots, q_n$ — *лагранжевы параметры.*

Определение 56 (*Глобальная параметризация*)**.** В качестве лагранжевых параметров $q_1, \ldots, q_n$ можно взять координаты того пространства R^m, в которое погружено конфигурационное многообразие ($M \subset R^m$): $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, ..., $q_m = x_m$, тогда запись $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu), t, \mathbf{q}$, где $\mathbf{q} \in M \subset R^m$ определяет *глобальную параметризацию.*

Определение 57 (*Локальная параметризация*)**.** Если взаимно-однозначного соответствия между положениями механической системы и точками ее конфигурационного многообразия требовать не всюду, а лишь в некоторой окрестности выбранного положения, то, используя уравнения многообразия, можно уменьшить число параметров q_i, до минимального, равного числу степеней свободы. Такая параметризация называется *локальной.*

Определение 58 (*Обобщенные координаты*)**.** Геометрически независимые параметры q_i, задающие локальную параметризацию, называются локальными координатами конфигурационного многообразия или *обобщенными координатами* рассматриваемой механической системы.

В примере выше, локальная параметризация может быть такой:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(1,q) = \begin{Vmatrix} l_1 \cos q_1 \\ l_1 \sin q_1 \end{Vmatrix}, \\ \mathbf{R}(2,q) = \begin{Vmatrix} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \end{Vmatrix}, \end{cases}$$

где $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$.

Определение 59 (*Стационарная параметризация*)**.** Если параметризация $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, t, q)$ от времени явно не зависит, то такая параметризация называется *стационарной.* В противном случае параметризация *нестационарная.*

Определение 60 (*Голономные механические системы*)**.** Если механическая система движется, то локальные кординаты конфигурационного многообразия $\mathbf{q}$ являются функциями времени: $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если в движении системы локальные координаты не стеснены никакими дополнительными условиями типа $f_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ связывающими производные от обобщенных координат, то такие координаты называются кинематически независимыми, а сами механические системы — *голономными.*

Определение 61 (*Виртуальное перемещение*)**.** Виртуальным перемещением механической системы, локальная параметризация которой — $\mathbf{R}(\nu, t, q)$, называется полный дифференциал этой функции при фиксированном времени:

$$\delta \mathbf{R} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Определение 62 (*Идеальная связь*)**.** Связи называются идеальными, если виртуальная работа реакций связей тождественно по δq равна нулю.

Утверждение 11 (*Необходимое и достаточное условие идеальности связи*)**.** *Для того чтобы связи были идеальными, необходимо и достаточно равенство нулю коэффициентов линейной формы виртуальной работы, вычисленных для* $\mathbf{F} = \mathbf{F}^l$ *(действующие на элемнет* dm *силы с массовой плотностью* $\mathbf{F}$ *разбиты на два класса — реакции связей, которые обозначаются* $\mathbf{F}^l$ *и все остальное с плотностью* $\mathbf{F}^d$*).*

Если в примере со стержнем предположить, что он находится в однородном поле тяжест с силой тяжести, направленной вдоль оси x, то $\mathbf{F}^d = \begin{Vmatrix} g \\ 0 \end{Vmatrix}$, где g — ускорение силы тяжести.

Определение 63 (*Обобщенные силы мех. системы*)**.** Коэффициенты линейной формы виртуальной работы заданных сил $\mathbf{F}^d$ называются *обобщенными силами* рассматриваемой механической системы:

$$Q_i = \int \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}^d \right) dm.$$

Определение 64 (*Кинетическая энергия механической системы*)**.** Кинечтической энергией механической системы называется интеграл

$$T = \frac{1}{2} \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) dm$$

Утверждение 12 (*Уравнения Лагранжа для голономных механических систем (вывод: стр.133 Журавлев)*)**.**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)} \text{ — \textit{Уравнения Лагранжа для голономных систем.}} \tag{40}$$

Определение 65 (*Потенциальные обобщенные силы*)**.** Обобщенные силы Q_i, называются *потенциальными*, если существует такая скалярная функция времени и обобщенных координат $U(t, q_1, \ldots, q_n)$, что силы Q_i могут быть представлены в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Определение 66 (*Обобщенно потенциальные обобщенные силы*)**.** Обобщенные силы Q_i называются *обобщенно потенциальными*, если существует такая функция времени, координат и скоростей $U(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, что обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Определение 67 (*Функция Лагранжа (лагранжиан)*)**.** В случае потенциальных и обобщенно потенциальных обобщенных сил можно ввести функцию $\mathcal{L} = T + U$, называемую *функцией Лагранжа* или *лагранжианом.*

Утверждение 13 (*Уравнения Лагранжа с использованием лагранжиана*)**.**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)} \text{ — \textit{Уравнения Лагранжа.}} \tag{41}$$

13.2 Ковариантность уравнений Лагранжа

Если обобщенные координаты q_i, подвергнуть невырожденным дважды непрерывно дифференцируемым преобразованиям $q_i \to \widetilde{q}_i$:

$$q_i = q_i(t, \widetilde{q}),$$

то в новых переменных уравнения Лагранжа сохранят свою форму. Сказанное означает коммутативность диаграммы:

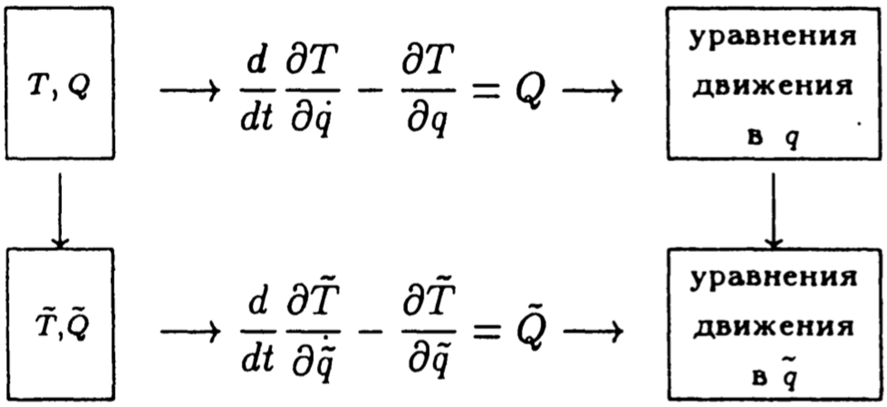

Рис. 9: Ковариантность

Справедливость утверждения очевидна, поскольку переменные $\widetilde{q}_i$ также являются локальными координатами конфигурационного многообразия системы. Напомним, что ковариантность уравнений движения означает инвариантность правила их составления (уравнения Лагранжа), а не инвариантность самих, полученных в результате применения этого правила уравнений.

13.3 Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей.

Выясним, как зависит кинетическая энергия механической системы от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$:

$$T = \frac{1}{2}\int \mathbf{V}^2 dm = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2 dm =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j \underbrace{\int \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j}\right) dm}_{a_{ij}} + \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\int \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i}\right) dm}_{b_i} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right) dm}_{T_0} =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}_{T_2} + \underbrace{\sum_i b_i\dot{q}_i}_{T_1} + T_0 = T_2 + T_1 + T_0. \tag{42}$$

Кинетическая энергия представляет собой сумму трех форм от обобщенных скоростей: квадратичной T_2, линейной T_1 и формы нулевой степени T_0. Коэффициенты этих форм являются функциями времени и координат.

Определение 68 (*Натуральные механические системы*)**.** Механические системы, у которых кинетическая энергия зависит от обобщенных скоростей указанным образом, называются *натуральными*.

P.S.

В натуральных системах функция Лагранжа вводится как разность $T - \Pi$ и является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей. В натуральных системах уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений.

13.4 Преобразование Функции Лагранжа

Из формулы (42): $T = T_2 + T_1 + T_0$. Так как $\mathcal{L} = T - \Pi$, где $\Pi = -U$, то функцию лагранжа $\mathcal{L}$ можно представить в виде многочлена второй степени относительно обобщенных скоростей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = T_1 \quad \mathcal{L}_2 = T_2 \quad \mathcal{L}_0 = T_0 - \Pi.$$

13.5 Невырожденность уравнений Лагранжа

В силу указанной структуры кинетической энергии 13.3 уравнений Лагранжа всегда оказываются линейными по обобщенным ускорениям:

$$\sum_j a_{ij}\ddot{q}_j + F_i(t, q, \dot{q}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Матрица коэффициентов при ускорениях $A = \{a_{ij}\}$, являющаяся матрицей квадратичной (T_2) части кинетической энергии невырождена: $\det A \neq 0$. (доказательство: Журавлев стр. 117)

14 Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа и её преобразование. Циклические координаты и первые интегралы.

14.1 Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил

Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил.

14.2 Функция Лагранжа

Функция Лагранжа.

14.3 Преобразование функции Лагранжа

Преобразование функции Лагранжа.

14.4 Циклические координаты

Определение 69 (*Циклическая координата*)**.** Пусть система имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \dots, q_n$ — ее обобщенные координаты. Координата q_α называется *циклической*, если она не входит в функцию Лагранжа, то есть $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$.

P.S.

Из п.148 формула (10) стр. 258 (Маркеев) следует то, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$, следовательно, если координата циклическая, то она так же не входит в функцию Гамильтона. Верно и обратное.

14.5 Понятие первого интеграла

Рассмотрим автономную (отсутствует t) динамическую систему общего вида:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n). \tag{43}$$

Правые части определены в некоторой области $D \subset \mathbb{R}$.

Определение 70 (*Глобальный первый интеграл*)**.** Скалярная функция $G(x_1, \dots, x_n)$, не являющаяся тождественной константой и определенная в той же области D, что и рассматриваемая автономная система (43), называется *глобальным первым интегралом* или просто первым интегралом, если вдоль каждого решения системы (43) она остается постоянной:

$$G[x_1(t), \dots, x_n(t)] \equiv const \ \forall t.$$

Утверждение 14 (Необходимое и достаточное условие ПИ)**.** *Если функция $G(x)$ дифференцируемая, то необходимым и достаточным условием первого интеграла является следующее тождество:*

$$\sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i(x_1, \dots, x_n) \equiv 0.$$

Определение 71 (*Локальный ПИ*)**.** Если функция $G(x)$ удовлетворяет определению 70, но она определена в некоторой подобласти D, то она называется *локальным первым интегралом.*

Утверждение 15 (Количество функционально независимых ПИ)**.** *Если правые части системы (43) дифференцируемы, то в окрестности любой точки x_0, такой, что $F(x_0) \neq 0$, система (43) имеет $n-1$ функционально независимых интегралов.*

Определение 72 (*Первый интеграл неавтономной системы*)**.** В случае неавтономной системы $\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, определение первого интеграла сводится к приведенному выше определению формальным сведением к автономной системе добавлением еще одного уравнения $\dot{t} = 1$. Первым интегралом неавтономной системы будет скалярная функция, удовлетворяющая всем указанным выше условиям. В частности, в случае дифференцируемости этой функции должно выполняться тождество

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i \equiv 0 \ \forall t.$$

15 Натуральные и ненатуральные системы. Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

15.1 Натуральные механические системы

Натуральные механические системы.

15.2 Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщенных скоростей

Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщенных скоростей.

15.3 Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений

Используя структуру выражения кинетической энергии (42), уравнения Лагранжа (40) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k = g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{44}$$

где функции g_i не зависят от обобщенных ускорений. Определитель линейной относительно $\ddot{q}_i$ системы уравнений (44) отличен от нуля, поэтому она разрешима и имеет единственное решение

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k, t).$$

16 Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Интеграл энергии, консервативные системы. Гироскопические силы. Диссипативные силы, функция Рэлея.

16.1 Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы

Пусть помимо потенциальных сил к системе приложены также некоторые непотенциальные силы. Часть обобщенных сил, соответствующую непотенциальным силам, обозначим через Q_i^*. Пусть $E = T + \Pi$ — полная механическая энергия системы, а $T = T_2 + T_1 + T_0$ (см. 42).

Определение 73 (*Мощность непотенциальных сил*)**.** Величина $N^* = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i$ называется *мощностью непотенциальных сил.*

Теорема 6 (*Об изменении полной механической энергии голономной системы*)**.** *(Вывод: п.142 стр. 275 Маркеев)*

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}} \text{ — Изменение полной мех. энергии } E. \tag{45}$$

16.2 Консервативные системы. Интеграл энергии

Рассмотрим некоторые частные случаи применения теоремы (6):

1. Пусть система *склерономна.* Тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, следовательно:
$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$
2. Пусть система склерономна и *потенциал не зависит явно от времени* ($\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$), следовательно:
$$\frac{dE}{dt} = N^*. \tag{46}$$

Определение 74 (*Консервативная система*)**.** Если система:

1. склерономна;
2. все силы потенциальны;
3. потенциал не зависит явно от времени,

то такая система называется *консервативной.* Для консервативной системы $\frac{dE}{dt} = 0$ и имеет место интеграл энергии
$$E = T + \Pi \equiv const. \tag{47}$$

Определение 75 (*Интеграл энергии*)**.** Величина (47) называется *интегралом энергии.*

16.3 Гироскопические силы

Определение 76 (*Гироскопические силы*)**.** Непотенциальные силы называются гироскопическими, если их мощность (N^*) равна нулю.

P.S.

Из формулы (46) следует, что если система не является консервативной по причине наличия в ней гироскопических сил, то, несмотря на это, интеграл энергии у нее существует.

16.4 Диссипативные силы

Определение 77 (*Диссипативные силы*)**.** Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна или равна нулю (то есть $N^* \leqslant 0$, но $N^* \not\equiv 0$).

P.S.

Из равенства (46) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал Π не зависит явно от времени, при наличии диссипативных сил
$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$
то есть полная механическая энергия системы убывает во время движения. Систему в этому случае называют *диссипативной.*

16.5 Функция Релея

Пусть задана положительная квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (b_{ik} = b_{ki}), \tag{48}$$

такая, что непотенциальные силы Q_i^* задаются соотношениями

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{49}$$

Тогда для склерономной системы мощность N^* непотенциальных сил равна

$$N^* = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu^* \cdot \mathbf{v}_\nu) = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = -2R \leqslant 0. \tag{50}$$

Определение 78 (*Функция Рэлея*)**.** Функция R (48) называется *диссипативной функцей Рэлея.*

Утверждение 16 (*Связь функции Рэлея и энергии*)**.** *Из формул (49) и (50) следует, что в случае склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени*

$$\frac{dE}{dt} = -2R,$$

то есть скорость убывания полной механической энергии системы равна удвоенной функции Рэлея.

Пример 2. В качестве примера рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложена сила сопротивления, пропорциональная скорости этой точки: $\mathbf{F}_\nu = -k\mathbf{v}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, где $k > 0$. Мощность этих сил будет равна $N^* = \sum\limits_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu) = -2R$, где функция Рэлея $R = \frac{1}{2} k \sum\limits_{\nu=1}^{N} v_\nu^2$.

17 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площадей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине.

17.1 Задача двух тел. Уравнение Бине

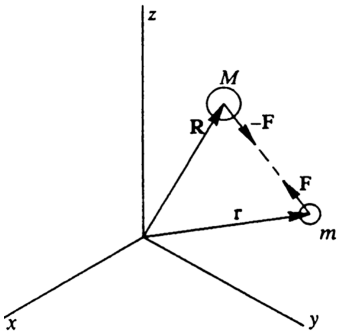

Рис. 10:

Если считать, что сила взаимодействия между планетой и Солнцем много больше сил взаимодействия планет друг с другом, то задача изучения движения любой планеты сводится к задаче движения в инерциальном пространстве двух тел (Рис. 10). Масса Солнца обозначена буквой M, масса планеты — буквой m.

Оба тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой равен

$$F = \gamma \frac{mM}{(\mathbf{R} - \mathbf{r})^2},$$

где коэффициент γ — *универсальная гравитационная постоянная*, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы Солнца и планеты соответственно. Отметим, что центр масс системы Солнце + планета в произвольной инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно, следовательно мы можем выбрать такую инерциальную систему отсчета, в которой этот центр покоится, и поместить начало координат в этот центр. Тогда в новой системе координат $M\mathbf{R} + m\mathbf{r} = 0$. Значит достаточно найти закон движения планеты $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, а движение Солнца будет определяться из соотношения $\mathbf{R}(t) = -\frac{m}{M}\mathbf{r}(t)$. Подставим эту связь в выражение для силы тяготения и запишем уравнение движения планеты:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{mM}{(1 + \frac{m}{M})^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Обозначив величину $\frac{\gamma M^3}{(M+m)^2}$ буквой $k = \mathrm{const}$, получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \tag{51}$$

домножим обе части векторно слева на $\mathbf{r}$ и получим: $[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}] = 0$. Полученное соотношение можно переписать как $\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = 0$ (так как $[\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}] = 0$), откуда следует

$$[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{C}. \tag{52}$$

Отсюда следует, что движение происходит в неизменной плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{C}$, а значит исходную систему отсчета можно выбрать так, чтобы это была плоскость $\{x, y\}$. Следовательно уравнение (51) пример вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \\ \ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}. \end{cases} \tag{53}$$

Решение системы нелинейных уравнений (53) удобно проводить в полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{54}$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа (40):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

в которых $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ и (F_1, F_2) — проекция силы (F_x, F_y) на направление к центру и на перпендикуляр к нему. Подсчитаем коэффициенты Ламе:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Кинетическая энергия точки: $T = \frac{1}{2}v^2 = (H_1^2\dot{r}^2 + H_2^2\dot{\varphi})^2$. Проекция силы $F_1 = -\frac{k}{r^2}$, $F_2 = 0$. Уравнения Лагранжа дают

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения слудует $r^2\dot{\varphi} = C$ — модуль вектора неизменного момента количества движения $[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{C}$. Поскольку $\frac{r^2 d\varphi}{2} = dS$ — элемент площади, заметаемой радиусом $\mathbf{r}$ при бесконечно малом смещении вдоль траектории, то константа $C = \frac{2dS}{dt}$ выражает собой закон постоянства *секторной скорости.*

Определение 79 (*Интеграл площадей*)**.** Выражение $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}C$ носин название интеграла площадей (площади, заметенные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.)

Этот закон позволяет исключить переменную φ из уравнений:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}.$$

Сделаем замену: $\boxed{u = \frac{1}{r}}$, а вместо независимой переменной t, выберем в качестве независимой переменную φ. Тогда $\frac{dr}{dt} = -C\frac{du}{d\varphi}$, а $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}$. После этого, написанное выше уравнение приобритет вид

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{C^2}} \text{ — Уравнение Бине.} \tag{55}$$

Его общее решение:

$$u = A\cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{k}{C^2},$$

или в исходной переменной:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}, \quad \psi = \varphi + \varphi_0,$$

где $p = \frac{C^2}{k}$, $e = \frac{C^2 A}{k}$.

Если $e < 1$, то полученное решение представляет собой уравнение эллипса, записанное в полярных координатах (этот случай имеет место для планет).

В общем случае при $e = 1$ траектория представляет собой параболу. Если $e > 1$ — гиперболу.

17.2 Законы Кеплера

Утверждение 17 (Первый закон Кеплера)**.** *Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится солнце.*

P.S.

Более точно, в фокусе находится центр масс системы «Солнце» + «планета», однако масса Солнца намного больше массы любой планеты и этот закон практически точен.

Утверждение 18 (Второй закон Кеплера)**.** *Площади, заметаемые радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены*

P.S.

Этот закон является следствием отмеченного выше постоянства секторной скорости и, так же как и первый закон, должен формулироваться для центра масс.

Утверждение 19 (Третий закон Кеплера)**.** *Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.*

Этот закон получим, если воспользуемся известной из геометрии связью между параметром эллипса p и его полуосями a и b: $p = \frac{b^2}{a}$. Константу интеграла площадей C можно выразить через площадь эллипса и через период обращения так: $C = \frac{2\pi ab}{T}$. Поскольку $p = \frac{C^2}{k} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{kT^2}$, то указанная выше связь между p, a и b дает:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}.$$

Поскольку константа k слабо зависит от массы планеты m, то и этот закон тем точнее, чем меньше соотношение $\frac{m}{M}$.

18 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера. Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа. Задача двух тел.

18.1 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера. Задача двух тел.

Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, законы Кеплера.

18.2 Интеграл площадей

Интеграл площадей.

18.3 Интеграл энергии в задаче двух тел

Кинетическая и потенциальная энергия движения материальной точки в центральном поле определяется равенствами

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Pi = -m\frac{k}{r}.$$

Так как других сил, помимо потенциальных, нет и потенциал Π не зависит от времени, то полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна. Таким образом, в задаче двух тел существует интеграл энергии (75), который запишем в виде

$$\boxed{v^2 - \frac{2k}{r} = h \quad (h = \text{const})} \text{ — Интеграл энергии в задаче двух тел.} \tag{56}$$

Константа энергии h определяется начальным положением и скоростью точки:

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

P.S.

Из интеграла (56) следует, что при удалении материальной точки от центра ее скорость убывает, а при приближении к центру — возрастает.

18.4 Интеграл Лапласа

Из (51) и (52) следует равенство

$$[\mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{r}}] = -\frac{k}{r^3}[[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] \times \mathbf{r}], \tag{57}$$

но так как

$$[\mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{r}}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}]$$

и

$$[[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] \times \mathbf{r}] = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}r^2 - \mathbf{r}r\dot{r} = r^3\frac{r\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

то равенство (57) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}] = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Откуда следует, что

$$\boxed{\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}} + k\frac{\mathbf{r}}{r} = -r\mathbf{f}} \text{ — Интеграл Лапласа} \tag{58}$$

Определение 80 (*Интеграл и вектор Лапласа.*)**.** Соотношение (58) называется *интегралом Лапласа*, а вектор $\mathbf{f}$ — *вектор Лапласа*. Знак минус в правой части (58) введен для удобства дальнейшего использования интеграла (58).

19 Момент инерции системы относительно оси. Матрица тензора инерции. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей и ортогональном преобразовании. Свойства осевых моментов инерции.

19.1 Момент инерции системы относительно оси. Матрица тензора инерции.

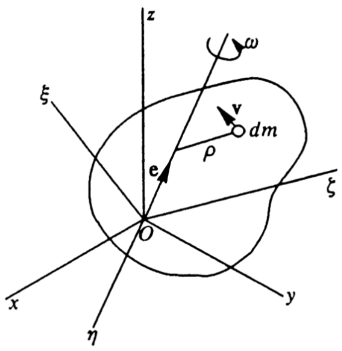

Рис. 11:

Пусть твердое, тело вращается вокруг неподвижной оси, направление которой задается единичным вектором $\mathbf{e}$ (Рис. 11), с угловой скоростью ω. Поскольку модуль скорости элемента массы dm равен $\omega\rho$, где ρ — расстояние от оси $\mathbf{e}$ до элемента массы dm, то кинетическая энергия тела как механической системы $T = \frac{1}{2}\int(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{dm}$ приобретает вид

$$T = \frac{\omega^2}{2}\int \rho^2\,\mathrm{dm} = \frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_e. \tag{59}$$

Здесь через $\mathcal{I}_e$ обозначен коэффициент, называемый *моментом инерции* твердого тела вокруг оси $\mathbf{e}$.

Определение 81 (*Момент инерции ТТ вокруг оси*)**.** *Моментом инерции* твердого тела относительно оси $\mathbf{e}$ называется интеграл

$$\mathcal{I}_e = \int \rho^2\,\mathrm{dm}, \tag{60}$$

где ρ — расстояние от элемента массы dm до оси $\mathbf{e}$.

Утверждение 20 (Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси)**.**

$$T = \frac{\omega^2}{2}\int \rho^2\,\mathrm{dm} = \frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_e.$$

Утверждение 21 (Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси)**.** $K = \mathcal{I}_e\omega$.

Матрица тензора инерции.
Главные оси инерции и эллипсоид инерции.
Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей.
Преобразование матрицы тензора инерции при ортогональном преобразовании.
Свойства осевых моментов инерции.

19.2 Кинетическая энергия и кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

(Итог тут)

Пусть в теле есть неподвижная точка O (Рис. 11). Воспользуемся формулой Эйлера (16): $T = \frac{1}{2}\int([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}])\,\mathrm{dm}$.

Рассмотрим некоторые жестко связанные с телом оси, в них вектор $\mathbf{r}$ будет иметь компоненты ξ,η,ζ, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ компоненты p,q,r. Векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$ можно представить как линейное преобразование вектора $\boldsymbol{\omega}$ с матрицей преобразования $\hat{r}$:

$$[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}] = \hat{r}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение под интегралом кинетической энергии можно представить в виде соответствующего произведения матриц: $([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]) = \boldsymbol{\omega}^\intercal\hat{r}^\intercal\hat{r}\boldsymbol{\omega}$, то выражение для кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}^\intercal \underbrace{\hat{r}^\intercal\hat{r}}_{\mathcal{I}}\,\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\intercal\mathcal{I}\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{I}\boldsymbol{\omega}). \tag{61}$$

Определение 82 (*Тензор Инерции*)**.** Буквой $\mathcal{I}$ в (61) обозначен *тензор инерции*:

$$\mathcal{I} = \int \hat{r}^\intercal\hat{r}\,\mathrm{dm}.$$

Вид тензора $\mathcal{I}$

Произведение стоящих под интегралом матриц $\hat{r}^\intercal$ на $\hat{r}$ имеет вид

$$\hat{r}^\intercal \hat{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^2+\eta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \zeta^2+\xi^2 & -\zeta\eta \\ -\xi\zeta & -\zeta\eta & \eta^2+\xi^2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Видно, что по диагонали тензора инерции получились моменты инерции вокруг осей ζ, η, ξ.

Определение 83 (*Центробежные и осевые моменты инерции*)**.** Элементы вне главной диагонали (62) называются *центробежными моментами инерции*. Элементы на главной диагонали называются *осевыми моментами инерции.*

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_\xi & -\mathcal{I}_{\xi\eta} & \mathcal{I}_{\xi\zeta} \\ -\mathcal{I}_{\xi\eta} & \mathcal{I}_\eta & -\mathcal{I}_{\eta\zeta} \\ -\mathcal{I}_{\xi\zeta} & -\mathcal{I}_{\eta\zeta} & \mathcal{I}_\zeta \end{pmatrix}.$$

Утверждение 22 (Кинетическая энергия твердого тела вращающегося вокруг неподвижной точки)**.**

$$T = \frac{1}{2}\int (\mathbf{v}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}])\,\mathrm{dm} \equiv \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\omega}\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{v}])\,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{K}),$$

где $\mathbf{K}$ *— кинетический момент (см. ниже).*

Утверждение 23 (Кинетический момент твердого тела вращающегося вокруг неподвижной точки)**.** *Сравнивая два выражения для кинетической энергии (полученные выше), находим выражение для кинетического момента* $\mathbf{K}$*:*

$$\mathbf{K} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}$$

19.3 Свойства осевых моментов инерции. Параллельный перенос осей

Пусть осуществлен параллельный переном осей: $\xi = \xi' + a$, $\eta = \eta' + b$, $\zeta = \zeta' + c$. Изменение осевых моментов инерции проследим на примере изменения момента инерции вокруг оси ξ. В соответствии с (62) имеем:

Изменение **осевого момента инерции** при $\parallel$ переносе:

$$\mathcal{I}_\xi = \int (\zeta^2+\eta^2)\,\mathrm{dm} = \int (\zeta'^2+\eta'^2)\,\mathrm{dm} + 2c\int \zeta'\,\mathrm{dm} + 2b\int \eta'\,\mathrm{dm} + (a^2+b^2)M.$$

Если в результате переноса центр масс тела совпал с началом координат, то $\int \zeta'\,\mathrm{dm} = \int \eta'\,\mathrm{dm} = \int \xi'\,\mathrm{dm} = 0$ и мы приходим к теореме Гюйгенса-Штейнера:

Теорема 7 (*Гюйгенса-Штейнера*)**.** *Момент инерции тела вокруг оси, проходящей через центр масс, имеет минимальное значение в сравнении с моментом инерции вокруг прочих осей, параллельных данной, и отличается от них произведением массы тела на квадрат расстояния до соответствующей оси [то есть на* $(a^2+b^2)M$*].*

Изменение **центробежных моментов инерции** при $\parallel$ переносе (на примере осей ξ, η):

$$\mathcal{I}_{\xi\eta} = \int \xi\eta\,\mathrm{dm} = \int \xi'\eta'\,\mathrm{dm} + a\int \eta'\,\mathrm{dm} + b\int \xi'\,\mathrm{dm} + abM.$$

Видно, что если параллельный перенос осуществляется из центра масс вдоль одной из координатных осей (из трех величин a, b, c не равна нулю только одна), то центробежные моменты инерции *не меняются.*

19.4 Поворот осей

Пусть от осей $\xi\eta\zeta$ перешли к осям $\xi'\eta'\zeta'$ при помощи матрицы поворота S, так, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ — кинетический момент) в новых осях приобрели вид

$$\boldsymbol{\omega}' = S\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}' = S\mathbf{K}.$$

Связь между $\mathbf{K}'$ и $\boldsymbol{\omega}'$ принимает вид:

$$\mathbf{K}' = S\mathcal{I}S^\intercal\boldsymbol{\omega}'.$$

Следовательно, тензор инерции в повернутых осях может быть подсчитан по формуле

$$\mathcal{I}' = S\mathcal{I}S^\intercal.$$

19.5 Главные оси инерции. Эллипсоид инерции

Выше было показано, что при преобразовании поворота, тензор инерции в повернутых осях выражается как $\mathcal{I}' = S\mathcal{I}S^\intercal$. Из алгебры известно, что любая симметрическая положительно определенная матрица преобразованием поворота может быть приведена к диагональному виду:

$$\mathcal{I}' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Определение 84 (*Главные оси инерции*)**.** Оси, при переходе в которые тензор инерции тела имеет диагональный вид, называются *главными осями инерции тела.* Если эти оси дополнительно проходят через центр масс, то они называются *главными центральными осями инерции.*

P.S.

В главных осях кинетическая энергия приобретает простейший вид:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Определение 85 (*Эллипсоид инерции*)**.** *Эллипсоид инерции* — это геометрическая поверхность, жестко связанная с телом, которая строится так: в произвольном направлении, задаваемом вектором $\mathbf{e}$, отложим отрезок длиной $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_e}}$. Геометрическое место таких точек и есть эллипсоид инерции.

20 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси. Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении.

20.1 Кинетическая энергия и кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной точки и оси

Кинетическая энергия и кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси
Кинетическая энергия и кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

20.2 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении.

Движением системы относительно ее центра масс называется движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Такая система координат называется *кёниговой.* Отметим, что кёнигова система координат не вращается.

Пусть $\mathbf{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс, $\mathbf{v}_\nu$ — абсолютная скорость точки P_ν системы, $\mathbf{v}_{\nu r}$ — скорость точки P_ν в ее движении относительно центра масс. Так как кёнигова система отсчета движется только поступательно, то переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны $\mathbf{v}_C$. Тогда абсолютная скорость точки P_ν будет определяться формулой:

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r}$$

Теорема 8 (Теорема Кёнига для кинетической энергии системы)**.** *Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергией движения системы относительно кёниговой системы отсчета.*

□ Из определения кинетической энергии следует:

$$T = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}_\nu^2 \,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r})^2 \,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}\int \left[\mathbf{v}_C^2 + 2(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_{\nu r}) + \mathbf{v}_{\nu r}^2\right] \mathrm{dm}\,.$$

Второе слагаемое $\frac{1}{2}\mathbf{v}_C \int \mathbf{v}_{\nu r}\,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_C \cdot m\mathbf{v}_{Cr})$ равно нулю, так как начало кениговой системы отсчета лежит в центре масс системы, а значит относительная скорость центра масс равна нулю. Следовательно

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\int v_{\nu r}^2 \,\mathrm{dm} \;\blacksquare$$

Теорема 9 (Теорема Кёнига для момента импульса системы)**.** *Момент импульса системы равен сумме момента импульса, который имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и момента импульса движения системы относительно кёниговой системы отсчета.*

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C] + \mathbf{K}^*,$$

где $\mathbf{K}^* = \int [\mathbf{r}_{\nu r} \times \mathbf{v}_{\nu r}]\,\mathrm{dm}$ *— момент импульса движения системы относительно кёниговой системы отсчета.*

□ доказательство: Фомичев стр.34 ■

21 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Случай Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения; перманентные вращения.

21.1 Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера.

Теорема 10 (Об изменении кинетического момента)**.** *Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если $\mathbf{K}_O$ и $\mathbf{M}_O^{(e)}$ — кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O, то

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}. \tag{63}$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на ее оси. Тогда, согласно утверждению 23, компоненты вектора кинетического момента $\mathbf{K}_O$ выражаются через величины p, q, r и элементами тензора инерции тела для точки O по формулам:

$$\begin{cases} K_{Ox} = \mathcal{I}_x p - \mathcal{I}_{xy} q - \mathcal{I}_{xz} r, \\ K_{Oy} = -\mathcal{I}_{xy} p + \mathcal{I}_y q - \mathcal{I}_{yz} r, \\ K_{Oz} = -\mathcal{I}_{xz} p - \mathcal{I}_{yz} q + \mathcal{I}_z r. \end{cases} \tag{64}$$

Если абсолютную производную вектора $\mathbf{K}_O$ выразить через его локальную производную, то уравнение (63) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O] = \mathbf{M}_O^{(e)}. \tag{65}$$

Пусть M_x, M_y, M_z — проекции вектора главного момента внешних сил $\mathbf{M}_O^{(e)}$ на оси O_x, O_y и O_z. Будем считать оси O_x, O_y, O_z — главными осями инерции для точки O. В этом случае $\mathcal{I}_{xy} = \mathcal{I}_{xz} = \mathcal{I}_{yz} = 0$, а $\mathcal{I}_x = A$, $\mathcal{I}_y = B$ и $\mathcal{I}_z = C$ являются главными моментами инерции.

Тогда векторное уравнение (65) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} A\dot{q} + (C - B)qr = M_x, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_y, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_z. \end{cases}} \text{— Динамические уравнения Эйлера.} \tag{66}$$

21.2 Динамические уравнения Эйлера. Случай Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки: первые интегралы уравнений движения

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место *случай Эйлера* движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот случай, очевидно, возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку.

В случае Эйлера, динамические уравнения Эйлера (66) принимают вид

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \tag{67}$$

Найдем два первых интеграла системы (67):

1. Если первое уравнение умножить на Ap, второе — на Bq, а третье — на Cr и результаты сложить, то получим $A^2 p\dot{p} + B^2 q\dot{q} + C^2 r\dot{r} = 0$, откуда следует первый интеграл

$$\boxed{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}}.$$

2. Если же первое, второе и третье уравнения умножить соответственно на p, q, r, то после сложения получим $Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0$, откуда следует второй первый интеграл

$$\boxed{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const}}.$$

21.3 Перманентные вращения

Определение 86 (*Стационарное (перманентное) вращение*)**.** Будем называть стационарным вращением такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянна относительно тела.

Так как при стационарном вращении выполнен случай Эйлера, то их системы динамических уравнений (67) получим:

$$\begin{cases} (C-B)qr = 0, \\ (A-C)rp = 0, \\ (B-A)pq = 0. \end{cases} \tag{68}$$

Отсюда следует, что стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки O, причем величина угловой скорости тела может быть произвольной.

Если два из моментов инерции равны, например $A = B$, то уравнения (68) удовлетворяются при $p = q = 0$ и любом r (вращение вокруг главной оси инерции Oz), а также при $r = 0$ и любых p и q (вращение вокруг любой оси, проходящей через точку O, лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции и, следовательно, являющейся главной осью инерции).

Если величины A, B и C различны, то уравнения (67) могут иметь только такие решения, для которых две из величин p, q, r равны нулю, а третья произвольна, т. е. снова вращение происходит вокруг главной оси инерции.

22 Случай Эйлера движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки: регулярная прецессия в случае динамической симметрии тела.

22.1 Кинематические уравнения Эйлера

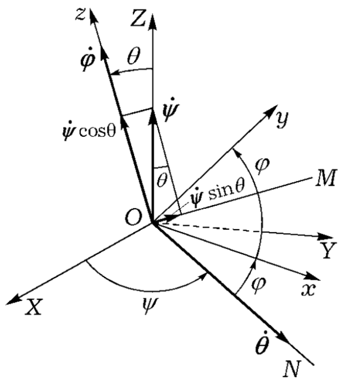

Рис. 12:

Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера и их производные. Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений: с угловой скоростью $\dot{\psi}$ вокруг оси OZ, с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси Oz (Рис. 12). Мгновенная угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ равна сумме угловых скоростей составляющих вращений. Пусть p, q, r — проекции $\boldsymbol{\omega}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz, жестко связанные с телом. Выражения для p, q, r через углы Эйлера и их производные легко получить из рис. 13, на котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии узлов. Имеем

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad \text{— Кинематические уравнения Эйлера} \tag{69}$$

22.2 Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия.

Кратко про прецессионное движение — билет 9

Определение 87 (*Динамически симметричное тело*)**.** Будем называть тело динамически симметричным, если два его главных момента инерции для точки O равны, например $A = B$. Ось Oz тогда будем называть *осью динамической симметрии.*

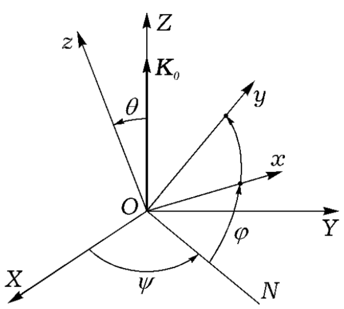

Рис. 13:

Исследуем движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Неподвижную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ее ось OZ (Рис. 13) была направлена по вектору $\mathbf{K}_O$ (который в случае Эйлера постоянен). Для проекций Ap, Aq, Cr вектора $\mathbf{K}_O$ на оси жестко связанной с телом системы координат $Oxyz$, образованной главными осями инерции, получим такие выражения

$$\begin{cases} Ap = K_O\sin\theta\sin\varphi, \\ Aq = K_O\sin\theta\cos\varphi, \\ Cr = K_O\cos\theta. \end{cases} \tag{70}$$

Из последнего уравнения системы (70) при $A = B$ следует, что $r = r_0 = \text{const}$, то есть проекция угловой скорости тела на ось его динамической симметрии постоянна. С учетом этого и третьего равенства системы (70) получаем $\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \text{const}$, то есть угол нутации постоянен.

При $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $r = r_0 = \text{const}$ кинематические уравнения Эйлера (69) запишутся в виде

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi, \\ q = \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi, \\ r_0 = \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{71}$$

Подставив выражение для p из (71) в (70), получим

$$\dot{\psi} = \frac{K_O}{A} = \omega_2 = \text{const}\,. \tag{72}$$

Определение 88 (*Угловая скорость прецессии*)**.** Величина ω_2 называется *угловой скоростью прецессии.*

Последнее из равенств (71) позволяет найти величину $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi}\cos\theta_0 = r_0 - \frac{K_O}{A}\cos\theta_O = r_0 - \frac{C}{A}r_0 = \frac{A-C}{A}r_0 = \omega_1 = \text{const}\,. \tag{73}$$

Определение 89 (*Угловая скорость собственного вращения*)**.** В формуле (73) величина ω_1 называется *угловой скоростью собственного вращения.*

Определение 90 (*Прецессия*)**.** Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют *прецессией*.

Определение 91 (Регулярная прецессия)**.** Прецессия называется *регулярной*, если вращение тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

Вывод:

Таким образом, динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию. В этой прецессии ось симметрии тела описывает круговой конус с осью $\mathbf{K}_O$ и углом при вершине $2\theta_0$, движение оси симметрии вокруг $\mathbf{K}_O$ происходит с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$; одновременно тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ вокруг оси симметрии.

23 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой. Основная формула гироскопии.

23.1 Вынужденная регулярная прецессия. Основная формкла гироскопии

Определение 92 (*Гироскоп*)**.** Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции тела является эллипсоидом вращения, называют *гироскопом.*

Ранее было показано, что если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то гироскоп совершает свободную регулярную прецессию вокруг неизменного кинетического момента $\mathbf{K}_O$.

Но для того, чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию, вовсе не обязательно, чтобы момент внешних сил относительно неподвижной точки был равен нулю. Рассмотрим этот вопрос подробно. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, а $Oxyz$ — система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O. Пусть A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и $A = B$. Динамические уравнения Эйлера (66) в этом случае будут такими:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - A)qr = M_x, \\ A\dot{q} + (C - A)rp = M_y, \\ C\dot{r} = M_z. \end{cases} \tag{74}$$

углы Эйлера ψ, θ, φ вводим обычным образом. Кинематические уравнения Эйлера имеют вид (69). Найдем условия, при которых гироскоп сможет совершать *вынужденную регулярную прецессию* вокруг оси Oz с заданными постоянными значениями угла нутации ($\theta = \theta_0$), угловой скорости собственного вращения ($\dot{\varphi} = \omega_1$) и угловой скорости прецессии ($\dot{\psi} = \omega_2$). Иными словами, надо найти, каким должен быть момент внешних сил $\mathbf{M}_O$ относительно точки O, чтобы была возможна регулярная прецессия гироскопа с заданными величинами $\theta_0, \omega_1, \omega_2$.

Для заданных величин $\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ кинематические уравнения Эйлера (69) принимают вид

$$\begin{cases} p = \omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi, \\ q = \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi, \\ r = \omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1. \end{cases} \tag{75}$$

Последнее из равенств (75) показывает, что r — постоянная величина. Поэтому третье уравнение из (74) дает

$$M_z = 0.$$

Подставив величины p, q, r из формул (75) в первое из уравнений (74), можно выразить M_x:

$$M_x = A\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi(\omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1).$$

Подставив сюда вместо производной $\frac{d\varphi}{dt}$ ее значение ω_1, получим

$$M_x = \omega_2\omega_1 \sin\theta_0 \cos\varphi \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta_0\right].$$

Аналогично получим M_y:

$$M_y = -\omega_2\omega_1 \sin\theta_0 \sin\varphi \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta_0\right].$$

Замечая, что в системе координат $Oxyz$ вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ имеет компоненты $0, 0, \omega_1$, а вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ — компоненты $\omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi$, $\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi$, $\omega_2 \cos\theta_0$, можно формулы выше переписать в виде одного векторного равенства

$$\boxed{\mathbf{M}_O = [\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1] \left(C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta_0\right)} \text{ — Основная формула Гироскопии.} \tag{76}$$

Формула (76) позволяет по заданным моментам инерции A, C, углу нутации θ_0 и векторам угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ найти момент внешних сил $\mathbf{M}_O$, необходимый для осуществления регулярной прецессии.

24 Случай Лагранжа движения твёрдого тела с неподвижной точкой. Частные движения: стационарные вращения, регулярная прецессия.

24.1 Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат

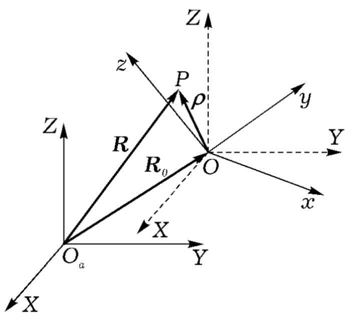

Рис. 14:

Часто приходится встречаться с необходимостью дифференцирования вектора, заданного своими компонентами в системе координат $Oxyz$, движущейся произвольным образом. Скорость изменения этого вектора в неподвижной системе координат $O_\alpha XYZ$ называется его *абсолютной производной*, а скорость изменения вектора в системе $Oxyz$ — *относительной* или *локальной производной*. Найдем связь между этими производными.

На Рис. 14 $\overline{OP} = \boldsymbol{\rho}$ — вектор, заданный в движущейся системе координат $Oxyz$. Тот же вектор $\overline{OP}$, заданный в неподвижной системе координат $O_\alpha XYZ$, обозначим $\mathbf{r}$.

Пусть $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — обсолютная производная вектора $\overline{OP}$, а вектор $\frac{\widetilde{d}\mathbf{r}}{dt}$ — его относительная производная. Обе производные заданные в системе координат $O_\alpha XYZ$.

Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $O_x yz$ относительно $O_\alpha XYZ$, то

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\widetilde{d}\mathbf{r}}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]}. \tag{77}$$

24.2 Случай Лагранжа. Уравнение движения тела с неподвижной точкой в поле тяжести

В случае Лагранжа изучается движение динамически симметричного тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. При этом предпполагается, что центр тяжести волчка лежит на оси симметрии на расстоянии L от неподвижной точки O.

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится на оси вращения, т. е., например, выполняются равенства $A = B$, $a = b = 0$, а $c = L$.

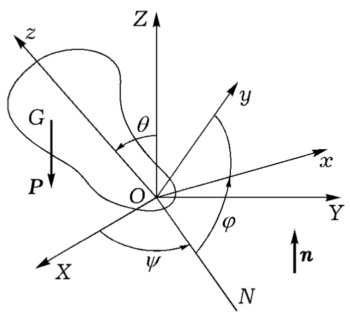

Рис. 15:

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Ось OZ неподвижной системы координат направим вертикально вверх. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$, оси которой направим вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O. Координаты центра тяжести G в системе координат $Oxyz$ обозначим a, b, c. Ориентацию тела относительно неподвижной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ (Рис. 15).

Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz обозначим A, B, C. Силу тяжести обозначим $\mathbf{P}$.

Пусть единичный вектор $\mathbf{n}$ вектикальной оси OZ имеет в жестко связанной с телом системе координат $Oxyz$ компоненты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Выпишем кинематические уравнения Эйлера (69):

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{\gamma_1} + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q = \dot{\psi}\underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{\gamma_2} - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r = \dot{\psi}\underbrace{\cos\theta}_{\gamma_3} + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Вектор $\mathbf{n}$ постоянен в неподвижной системе координат, поэтому его абсолютная производная равна нулю: $\frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0$. Учитывая связь абсолютной и локальной производных вектора (77), последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{n}}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 0, \tag{78}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Обозначая как p, q, r проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz, векторное уравнение в (78) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \tag{79}$$

Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести и реакция точки O. Последняя не создает момента относительно точки O, а момент $\mathbf{M}_O$ силы тяжести $\mathbf{P}$ относительно точки O равен $[\overline{OG}\times\mathbf{P}]$. Учитывая, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{n}$, можно написать

$$\mathbf{M}_O = P[\mathbf{n}\times\overline{OG}]. \tag{80}$$

Если M_x, M_y, M_z — проекции $\mathbf{M}_O$ на оси O_x, O_y, O_z, то из (80) получим

$$\begin{cases} M_x = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \\ M_y = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \\ M_z = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a) \end{cases} \tag{81}$$

Тогда динамические уравнения Эйлера (66) запишутся в виде

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \\ B\dot{q} + (A-C)rp = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \\ C\dot{r} + (B-A)pq = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a). \end{cases} \tag{82}$$

Переход к случаю Лагранжа

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится на оси вращения, т. е., например, выполняются равенства $A = B$, $a = b = 0$, а $c = L$.

Система (82) запишется в виде

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = P\gamma_2 c, \\ A\dot{q} + (A-C)rp = P\gamma_1 c, \\ C\dot{r} = 0. \end{cases} \tag{83}$$

Укажем первые интегралы:

1. Первый ПИ следует из того, что модуль вектора $\mathbf{n}$ постоянен и равен единице:
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

2. Второй ПИ следует из теоремы об изменении кинетического момента. В самом деле, так как внешние силы — сила тяжести и реакция точки O — не создают момента относительно вертикальной оси, то проекция кинетического момента $\mathbf{K}_O$ тела на вертикаль постоянна, т. е. $(\mathbf{K}_O\cdot\mathbf{n}) = \mathrm{const}$. В подвижной системе координат вектор $\mathbf{K}_O$ имеет компоненты $Ap, Bq = Aq, Cr$, поэтому последнее равенство может быть записано в виде
$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \mathrm{const}\,.$$

3. Замечая далее, что работа реакции точки O равна нулю, сила тяжести является потенциальной и потенциал Π не зависит от времени, получим, что во время движения тела его полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна:
$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + Pc\gamma_3 = \mathrm{const}\,.$$

4. Четвертым первым интегралом будет проекция угловой скорости тела на ось динамической симметрии тела:
$$r = \mathrm{const}\,.$$

25 Выпуклые функции и их свойства. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона и её свойства. Канонические уравнения.

25.1 Выпуклые множества

Определение 93 (*выпуклое множество*)**.** Множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x_1, x_2 оно содержит отрезок

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \{\mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2 \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

Из определения следует, что выпуклость является инвариантом относительно линейных преобразований. Кроме того, пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло, и замыкание выпуклого множества является выпуклым.

Утверждение 24. *По индукции выпуклое множество вместе с точками* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ *содержит и любую их выпуклую комбинацию:*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{x}_k, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1.$$

Определение 94 (*Выпуклая оболочка*)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $\mathcal{A}$ есть выпуклое подмножество и называется *выпуклой оболочкой* множества $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{conv} \mathcal{A}$. Пересечение всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих $\mathcal{A}$ есть замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и обозначается через $\overline{\operatorname{conv}} \mathcal{A}$.

Пример 3. Простейшими выпуклыми множествами выявляются *гиперплоскости* и *полупространства.* Их аналитическая запись связана с общим видом линейного функционала в $\mathbb{R}^n$. Гиперплоскость определяется элементом $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ и числом $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$H(\mathbf{x}^*, \alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}.$$

Неравенства $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle > \alpha$ $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle < \alpha$ определяют открытые полупространства, на которые разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость H.

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

25.2 Выпуклые функции

Чтобы избежать оговорок, введём расширение $\overline{\mathbb{R}}$ множества $\mathbb{R}$, пополнив его двумя несобственными элементами $\pm\infty$. Арифметические операции с участием несобственных элементов определяются, в основном, очевидным образом. Исключения представляют равенства $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, а сочетание $\infty - \infty$ считается лишённым смысла.

Определение 95 (epi /Надграфик)**.** Пусть f — функция с областью определения $D \subset \mathbb{R}^n$, принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}$. Множество $\operatorname{epi} f$ называется *надграфиком* функции f:

$$\operatorname{epi} f = \{(\alpha, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D,\ \alpha \geqslant f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Определение 96 (*Эффективное множество* $\operatorname{dom} f$)**.** *Эффективным множеством* $\operatorname{dom} f$ функции f называется проекция $\mathbb{R}^n$ надграфика:

$$\operatorname{dom} f = \{\mathbf{x} \mid \exists \alpha :\ (\alpha, \mathbf{x}) \in \operatorname{epi} f\}.$$

Определение 97 (Выпуклая функция)**.** Функция f называется *выпуклой*, если $\operatorname{epi} f$ есть выпуклое множество. Выпуклую функцию называют *собственной*, если ее надграфик не пуст и не содержит вертикальных прямых. Остальные функции называют *несобственными.*

Если f задана только на D, то ее обычно продолжают на все $\mathbb{R}^n$, полагая $f(\mathbf{x}) = +\infty$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D$. Продолженная таким образом функция имеет тот же надграфик, что и исходная функция.

Критерий выпуклости функции

Несмотря на свою простоту неравенство Иенсена (1) является важным и плодотворным инструментом в анализе.

Теорема 11 (неравенство Йенсена)**.** *Для того, чтобы функция* $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ *была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек* $\mathbf{x}_i$ *и чисел* $\lambda_i \geqslant 0$*, таких, что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$*, выполнялось неравенство Йенсена:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\mathbf{x}_i). \tag{84}$$

☐ Пусть f — выпуклая функция. Если хотя бы для одного $i = 1, \ldots, m$ выполняются условия $\lambda_i > 0$ и $f(\mathbf{x}_i) = \infty$, то (84) тривиальным образом выполняется.

Допустим, что $x_i \in \operatorname{dom} f$, $i = 1, \ldots, m$. В силу выпуклости надграфика

$$\left(\sum \lambda_i f(\mathbf{x}_i),\ \sum \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \in \operatorname{epi} f \quad \Longrightarrow \quad f\left(\sum \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leqslant \sum \lambda_i f(\mathbf{x}_i).$$

Покажем в обратную сторону. Пусть выполняется (84). Тогда для любых $(\alpha_i \mathbf{x}_i) \in \operatorname{epi} f$, $i = 1, \ldots, m$, имеем

$$f(\mathbf{x}_i) \leqslant \alpha_i \quad \Longrightarrow \quad \sum \lambda_i f(\mathbf{x}_i) \leqslant \sum \lambda_i \alpha_i \quad \Longrightarrow \quad f\left(\sum \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leqslant \sum \lambda_i \alpha_i \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \left(\sum \lambda_i \alpha_i,\ \sum \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum \lambda_i (\alpha_i, \mathbf{x}_i) \in \operatorname{epi} f,$$

что и означает выпуклость надграфика. ■

Свойства выпуклых функций

1. Сумма конечного числа, а также поточечная верхняя грань произвольного семейства выпуклых функций, является выпуклой функцией.

2. Собственная выпуклая функция f является непрерывной в каждой внутренней точке $\operatorname{dom} f$.

3. Пусть f — дважды непрерывно дифференцируема на открытом выпуклом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Она является выпуклой в том и только том случае, если ее *гессиан* $\operatorname{Hess} f$ неотрицательно определён для всех $\mathbf{x} \in D$.

   Гессиан функции $f(\mathbf{x})$ — это матрица всех её вторых частных производных по переменным x_j, $j = 1, \ldots, n$.

4. Квадратичная форма $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ выпукла тогда и только тогда, когда матрица A неотрицательно определена.

25.3 Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона и её свойства. Канонические уравнения.

Преобразование Лежандра

Пусть дана функция $X(x_1, \ldots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0.$$

Перейдем от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к новым переменным $y_1, \ldots, y_n$ по формулам

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{85}$$

Определение 98 (*Преобразование Лежандра*)**.** *Преобразованием Лежандра* функции $X(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция новых переменных $Y(y_1, \ldots, y_n)$, определяемая равенством $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - X$, в правой части которого переменные x_i выражены через новые переменные y_i при помощи уравнений (85).

Функция Гамильтона

Рассмотрим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, функция L зависит от переменных $q_i, \dot{q}_i, t$. Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т. е. положения и скорости ее точек. Переменные $q_i, \dot{q}_i, t$ называют переменными Лагранжа.

Определение 99 (Переменные Гамильтона)**.** Помимо переменных Лагранжа $q_i, \dot{q}_i, t$, состояние системы могут задавать величины q_i, p_i, t, где p_i — обобщенный импульс. Переменные q_i, p_i, t называются переменными Гамильтона.

To be continued...

26 Скобки Пуассона и их свойства. Первые интегралы системы Гамильтона. Понятие группы преобразований и алгебры Ли. Алгебры Ли гамильтонианов и первых интегралов. Теорема Якоби-Пуассона.

26.1 Скобки Пуассона и их свойства. Первые интегралы системы Гамильтона

Пусть $\mathcal{U}$ — пространство гладких функций на расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^{2n+1}$. Определим операцию на $\mathcal{U}$

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R} : (f,g) \to \{f,g\}.$$

Свойства:

1. Кососимметричность: $\{f,g\} = -\{g,f\}$
2. Билинейность: $\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\} = \alpha_1\{f_1,g\} + \alpha_2\{f_2,g\}$
3. Правило Лейбница: $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2,g\} + f_2\{f_1,g\}$
4. $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$
5. Если $\{q_k, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$ и $\{p_k, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$, тогда $\dot{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q}, H\}$ и $\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\}$.
6. $\{q_i, q_k\} = 0$, $\{p_i, p_k\} = 0$, $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$

27 Свойства фазового потока системы Гамильтона: теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма и теорема Пуанкаре о возвращении.

28 Понятие задачи вариационного исчисления с закреплёнными концами. Вариационный принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа. Варианты вариационного принципа (укороченное действие, принцип Мопертюи- Лагранжа).

29 Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Инфинитезимальная образующая группы симметрий. Теорема Э. Нётер. законы сохранения основных динамических величин.

30 Понятие канонического преобразования. Критерии каноничности преобразования (без доказательства).