МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Н. И. Амелькин

ЛАГРАНЖЕВА И ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 531.36(073)
ББК 22 213 я73
А61

Издание осуществлено при поддержке Правительства Российской Федерации в рамках выполнения базовой части государственного задания в сфере научной деятельности за № 2014/120 НИР № 2583.

Рецензенты

Академик РАН *В. Ф. Журавлев*

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова *А. В. Карапетян*

Амелькин, Н. И.

А61 **Лагранжева и гамильтонова механика:** учеб. пособие / Н. И. Амелькин. – М. : МФТИ, 2014. – 112 с.
ISBN 978-5-7417-0533-9

Даются основные сведения из курса аналитической механики по уравнениям Лагранжа и Гамильтона.

Предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей университетов, физико-технических и инженерно-технических вузов.

УДК 531.36(073)
ББК 22 213 я73

ISBN 978-5-7417-0533-9

Предисловие

В предлагаемом учебном пособии приводятся основные сведения из курса аналитической механики по уравнениям Лагранжа и Гамильтона. Перечень рассматриваемых здесь вопросов и объем излагаемого материала соответствуют программе курса теоретической механики МФТИ.

В целях компактного изложения материала используется матричный математический аппарат. Для удобства читателя необходимые сведения из матричного анализа приведены в первом (вспомогательном) параграфе книги.

Основные методические отличия данного пособия от других учебников состоят в следующем.

В разделе «Уравнения Гамильтона» большое внимание уделено вопросу о понижении порядка гамильтоновой системы при наличии первых интегралов. Помимо циклических первых интегралов приводятся примеры других первых интегралов, позволяющих понизить порядок системы на две единицы.

Теорема Лиувилля об интегрируемых системах доказана в двух вариантах: сначала с позиций канонических уравнений Гамильтона, а затем с позиций уравнения Гамильтона–Якоби.

Существенно отличается от традиционного изложение раздела «Канонические преобразования». Здесь критерий каноничности преобразований выводится непосредственно из определения. При этом сначала доказывается локальный критерий каноничности, а затем критерий каноничности в терминах производящих функций. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана гамильтоновых систем рассматриваются отдельно и для вывода критерия каноничности не используются.

§1. Элементы матричного анализа

Этот параграф носит вспомогательный характер. Здесь приводятся матричные формы записи правил дифференцирования векторных функций по векторному аргументу, а также *теорема об условиях интегрируемости*, часто используемая в различных разделах аналитической механики.

Векторы в n-мерном пространстве задаются своими компонентами в некотором базисе этого пространства и записываются либо в виде вектора-столбца, либо в виде вектора-строки следующим образом:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}.$$

Здесь символ «T» означает знак транспонирования.

Всюду далее, рассматривая различные векторные функции векторных аргументов, будем предполагать, что эти функции достаточно гладкие, так что все вычисляемые производные существуют и непрерывны.

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – n-мерная вектор-функция m-мерного вектора $\mathbf{x}$. Для таких функций определяются две операции дифференцирования:

1°. Производная от вектора-столбца $\mathbf{f}$ по вектору-строке $\mathbf{x}^T$, представляющая собой матрицу частных производных размера $n \times m$ (матрицу Якоби преобразования вектора $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{f}$):

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

2°. Производная от вектора-строки $\mathbf{f}^T$ по вектору-столбцу $\mathbf{x}$ – матрица частных производных размера $m \times n$, транспонированная к матрице (1):

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T . \qquad (2)$$

Для скалярных функций производная (1) будет вектором-строкой, а производная (2) – вектором-столбцом.

Первый дифференциал функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно записать либо в виде вектора-столбца, либо в виде вектора-строки следующим образом:

$$d\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x}, \qquad d\mathbf{f}^T = d\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} . \qquad (3)$$

На основании этих формул можно найти выражение для производной от любой функции векторного аргумента, вычислив дифференциал функции. Из этих формул, в частности, следует

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Производные от сложных функций. Пусть задана вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ и требуется вычислить производную $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}^T$. Записывая с помощью формул (3) первый дифференциал функции $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, получим

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T} d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x} .$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}, \qquad \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{y}}. \tag{4}$$

Вторая из формул (4) получается транспонированием первой.

Производные обратных функций. Пусть $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y})$ – прямая и обратная функции, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – векторы одинаковой размерности. На основании (3) имеем

$$d\mathbf{x}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T}d\mathbf{y}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}d\mathbf{x}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T}=\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{y}}=\left(\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)^{-1}. \tag{5}$$

В случае, когда связь между переменными $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ задана векторным уравнением неявного вида $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, матрица производных $\partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}^T$ находится из уравнения, получаемого дифференцированием тождества $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))\equiv 0$ по переменной $\mathbf{x}$, и определяется формулой

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}=-\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}.$$

Попутно заметим, что по *теореме о неявных функциях* уравнение $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ разрешимо относительно $\mathbf{y}$, если

$$\det(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{y}^T)\neq 0.$$

Производные от линейных форм. Пусть $\mathbf{y}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{A}$ – постоянная матрица (не зависит от $\mathbf{x}$), число столбцов которой совпадает с размерностью вектора $\mathbf{f}$. В этом случае имеем

$$d\mathbf{y}=\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}d\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}=\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}^T. \tag{6}$$

Для линейных функций $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ формулы (6) принимают вид

$$\frac{\partial(\mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial(\mathbf{Ax})^T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T.$$

Производные от билинейных форм. Пусть $z(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{f}$, где $\mathbf{A}$ – постоянная матрица, у которой число столбцов совпадает с размерностью вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, а число строк – с размерностью вектора $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Используя формулы (3) и учитывая, что $z(\mathbf{x})$ – скалярная функция, получим для ее первого дифференциала следующее выражение:

$$dz = d\mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \mathbf{A}\, d\mathbf{f} = d\mathbf{x}^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{g}\right).$$

Отсюда следует искомая формула для производной билинейной формы:

$$\frac{\partial(\mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{g}. \tag{7}$$

Для квадратичных форм получим

$$\frac{\partial(\mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{f}, \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}, \tag{8}$$

а в случае, когда $\mathbf{A}$ – симметрическая матрица, будем иметь

$$\frac{\partial(\mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{f}, \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}. \tag{9}$$

Для скалярных функций $F(\mathbf{x})$ векторного аргумента определяются матрицы вторых производных следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^T} \right). \tag{10}$$

Для матрицы вторых производных от квадратичной формы $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$ получаем при учете формул (8) и (6) следующее выражение:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} \right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

Отметим известное из анализа свойство *симметричности* матрицы вторых производных функции $F(\mathbf{x})$, которое записывается в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \tag{11}$$

и означает перестановочность операций дифференцирования скалярной функции по разным скалярным переменным.

Отметим также, что для векторных функций $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, где t – скалярный аргумент, перестановочны операции $\partial/\partial \mathbf{x}$ и $\partial/\partial t$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}) . \tag{12}$$

Это равенство вытекает из свойства (11), поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f_k}{\partial t}) .$$

При вычислении производных по векторному аргументу $\mathbf{x}$ от векторной функции $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ или скалярной функции $z(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}$, где матрица $\mathbf{A}$ зависит от переменной $\mathbf{x}$, возникает проблема определить понятие производной $\partial \mathbf{A}/\partial \mathbf{x}$ от матрицы по вектору и правило умножения этой производной на другие объекты. Существующие определения этих производных в виде плоских матриц [6] не совсем удобны по той причине, что при вычислении производных от функций указанного выше вида используются одни правила умножения таких матриц на вектор, а при вычислении дифференциалов – другие.

Но правила дифференцирования указанных выше векторных и скалярных функций можно получить, не используя понятие производной от матрицы по вектору. Применяя правила дифференцирования по отдельным координатам, будем иметь

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{f})}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}\mathbf{f} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} , \tag{13}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{f})}{\partial x_k} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_k} + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}\mathbf{f}\ . \tag{14}$$

В векторно-матричной форме соотношения (13) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} + \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_1}\mathbf{f} \ \ldots \ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_n}\mathbf{f}\right]. \tag{15}$$

Эта производная представляет собой матрицу размера $m \times n$ (m – число строк матрицы $\mathbf{A}$), где первое слагаемое есть производная (6) от линейной формы $\mathbf{Af}$, вычисленная при постоянной матрице $\mathbf{A}$, а второе слагаемое трактуется как производная от вектора $\mathbf{Af}$ при постоянном $\mathbf{f}$.

Векторно-матричная запись для соотношений (14) имеет вид

$$\frac{\partial(\mathbf{g}^T\mathbf{A}\mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}^T\mathbf{g} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_1}\mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^T\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_n}\mathbf{f} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Эта производная представляет собой вектор-столбец, причем первые два слагаемых есть производная (7) от билинейной формы $\mathbf{g}^T\mathbf{Af}$, вычисленная при постоянной матрице $\mathbf{A}$, а последнее слагаемое трактуется как производная скаляра $\mathbf{g}^T\mathbf{Af}$ при постоянных $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$.

В заключение данного параграфа приведем известную из анализа теорему *об условиях интегрируемости* (условиях потенциальности векторного поля). В этой теореме $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ – заданная векторная функция векторных переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, причем размерности векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{x}$ одинаковы.

Теорема 1.1. *Для того чтобы существовала скалярная функция* $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}^T$ *была симметрической*, т.е.

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T}=\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f_j}{\partial x_k}-\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=0\,. \tag{18}$$

При этих условиях решение уравнения (17) *определяется с точностью до аддитивной функции* $\varphi(\mathbf{u})$ *формулой*

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})=\int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})d\theta\,. \tag{19}$$

Равенство (17) можно заменить эквивалентным условием: *дифференциальная форма* $d\mathbf{x}^T\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ *является дифференциалом функции* $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ *по переменной* $\mathbf{x}$, т.е.

$$d\mathbf{x}^T\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})=d_{\mathbf{x}}\Phi=d\mathbf{x}^T(\partial\Phi/\partial\mathbf{x})\,. \tag{17*}$$

Необходимость условия (18) доказывается легко. Если функция $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ существует, то равенство (18) следует из уравнения (17) при учете свойства (11).

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия (18) функция (19) удовлетворяет уравнению (17). Производная от функции (19) определяется на основании формулы (7) следующим выражением:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}&=\int_0^1[\mathbf{f}(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})+\frac{\partial\mathbf{f}^T(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{x}]d\theta=\\&=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial\theta}[\theta\,\mathbf{f}(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})]-\theta\frac{\partial\mathbf{f}(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\theta}+\frac{\partial\mathbf{f}^T(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{x}\right)d\theta.\end{aligned} \tag{20}$$

В свою очередь, вводя обозначение $\mathbf{y}=\theta\,\mathbf{x}$ и используя формулы (4) для производных от сложных функций, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{f}^T(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\mathbf{y}^T}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{f}^T(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{y}}=\theta\frac{\partial\mathbf{f}^T(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial\mathbf{y}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\theta\,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}^T}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}^T}\mathbf{x}\,.$$

Подставляя эти выражения в (20) и учитывая, что

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta}[\theta\mathbf{f}(\theta\mathbf{x},\mathbf{u})]d\theta = [\theta\mathbf{f}(\theta\mathbf{x},\mathbf{u})]\Big|_0^1 = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}),$$

будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \int_0^1 \theta\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{y},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}}\right)\mathbf{x}\,d\theta\,.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (18) функция (19) удовлетворяет уравнению (17). *Теорема доказана*.

Теорема 1.1 содержательна тем, что она не только определяет условия существования решения $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})$, но и дает явную формулу для этого решения.

§2. Уравнения Лагранжа

2.1. Механические связи и их классификация

Рассмотрим систему из N материальных точек, движущихся в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Положение каждой *j*-й точки определяется в этой системе отсчета радиусом-вектором $\mathbf{r}_j$ с тремя декартовыми координатами x_j, y_j, z_j, а положение всей системы – набором из $S = 3N$ координат *S*-мерного вектора $\mathbf{R}$, составленного из координат всех материальных точек системы:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_S \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}^T = \left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \right). \tag{1}$$

Если на возможные положения $\mathbf{R}$ и скорости $\dot{\mathbf{R}}$ системы не наложено никаких ограничений, то система называется *свободной*. В противном случае говорят, что на систему наложены *механические связи*.

Определение. *Механическими связями называются ограничения на положения* $\mathbf{R}$ *и скорости* $\dot{\mathbf{R}}$ *системы, которые выполняются при любых действующих в системе силах.*

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только *удерживающих* (*двухсторонних*) связей. Для таких связей ограничения на положения и скорости системы аналитически выражаются в виде равенств

$$f_k(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Удерживающие связи (2) называются *конечными* (*геометрическими*), если они задают ограничения только на положения системы, т.е. уравнения связей имеют вид

$$f_k(\mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Если же в уравнение связи входят скорости $\dot{\mathbf{R}}$, то связь называется *дифференциальной* (*кинематической*).

Отметим [2], что *все известные примеры дифференциальных механических связей характеризуются линейной зависимостью от скоростей* $\dot{\mathbf{R}}$, т.е. выражаются уравнениями вида

$$f = \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{R}} + b = \sum_{i=1}^{S} a_i \dot{R}_i + b = 0\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{R}, t)$ – S-мерная вектор-функция, а $b = b(\mathbf{R}, t)$ – скалярная функция переменных $\mathbf{R}, t$. Почленным умножением на dt уравнение (4) приводится к дифференциальной форме:

$$\mathbf{a}^T d\mathbf{R} + bdt = \sum_{i=1}^{S} a_i\, dR_i + bdt = 0\,. \tag{5}$$

Связь называется *стационарной* (*склерономной*), если в уравнение этой связи не входит время t. В противном случае связь называется *нестационарной* (*реономной*).

Дифференциальная связь (4) называется *интегрируемой*, если она представима в виде *эквивалентной* конечной связи

$$F(\mathbf{R}, t) - c = 0\,, \tag{6}$$

где c – константа интегрирования. Под *эквивалентностью* связей (4) и (6) при этом понимается, что уравнение

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}^T} \dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0\,, \tag{7}$$

получаемое дифференцированием уравнения (6) по времени, *эквивалентно* уравнению (4), т.е. в каждый момент времени уравнениями (4) и (7) описывается одно и то же множество $\{\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}\}$ состояний системы. Отметим, что тождественное совпадение уравнений (4) и (7) является только достаточным условием их эквивалентности.

Ввиду произвольности константы c интегрируемая кинематическая связь эквивалентна семейству конечных связей (6). Но каждому отдельному значению константы c соответствует единственная конечная связь. Поскольку значение константы c однозначно определяется начальными условиями $\mathbf{R}_0, t_0$ в виде $c = F(\mathbf{R}_0, t_0)$, то задание этих начальных условий фактически превращает интегрируемую кинематическую связь в конкретную конечную связь.

Остановимся на вопросе об условиях интегрируемости кинематических связей.

Определим сначала достаточные условия интегрируемости связи (4), рассматривая случай, когда эквивалентность уравнений (4) и (7) обусловлена их тождественным совпадением, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}^T}\dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \mathbf{a}^T\dot{\mathbf{R}} + b\,. \tag{8}$$

Ввиду произвольности $\dot{\mathbf{R}}$ тождество (8) выполняется только в случае, если функция $F(\mathbf{R},t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{a}\,,\ \frac{\partial F}{\partial t} = b\,. \tag{9}$$

Поэтому на основании теоремы 1.1 *об условиях интегрируемости* получаем следующее достаточное условие интегрируемости кинематической связи:

Для того чтобы связь (4) *была интегрируемой*, *достаточно*, *чтобы матрица*

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{R}^T} & \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial b}{\partial \mathbf{R}^T} & \dfrac{\partial b}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

была симметрической, *т.е.* $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^T$.

Необходимые условия интегрируемости связи (4) имеют существенно более сложный вид и здесь не приводятся. Но во многих конкретных примерах вопрос об интегрируемости кинематической связи можно решить исходя непосредственно из определения. Например, в некоторых случаях, предположив сначала, что связь интегрируема, удается либо доказать, что функции F, дающей уравнение (7), эквивалентное уравнению (4), не существует, либо найти F в явном виде. Можно воспользоваться также следующими соображениями. В случае интегрируемой связи в каждый момент времени различные положения системы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ связаны некоторым уравнением

$$F(\mathbf{R}_0, t) = F(\mathbf{R}_1, t) = c\,, \qquad (11)$$

т.е. *не могут быть произвольными*. Следовательно, отсутствие какой-либо зависимости вида (11) между допустимыми положениями системы в один и тот же момент времени является признаком неинтегрируемости связи. Поэтому если, например, рассматриваемая связь такова, что уравнение $\mathbf{a}^T \delta\mathbf{R} = 0$, получаемое из уравнения (5) при $dt = 0$ (при фиксированном времени), допускает перемещение системы из *любого положения* $\mathbf{R}_0$ *в произвольное положение* $\mathbf{R}_1$, то эта связь неинтегрируемая.

Простейшим примером интегрируемой кинематической связи является ограничение, описывающее плоское качение колеса по прямой дороге без скольжения. Эта связь описывается уравнением $\dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$, где x – координата центра колеса, φ – угол поворота колеса, R – радиус колеса. Эта связь представима в эквивалентном конечном виде $x - R\varphi = c$, а значение константы интегрирования c зависит в данном случае от того, с какими значениями x_0, φ_0 поставлено колесо на дорогу.

Кинематическая связь $t(\dot{x} + \dot{y}) + x + y = 0$ тоже интегрируема. Ей соответствует эквивалентная конечная связь $t(x + y) - c = 0$.

В предыдущих примерах связи удовлетворяли достаточным условиям интегрируемости. В следующем примере связь $\dot{x} + \dot{y} + x + y = 0$ этим условиям не удовлетворяет, поскольку, как нетрудно убедиться, матрица (10) не является симметрической. Тем не менее эта связь интегрируема. Ей соответствует эквивалентная конечная связь $\ln|x + y| + t - c = 0$.

Способ доказательства неинтегрируемости кинематических связей проиллюстрируем на примере связи $\dot{y} + x = 0$. Предположим, что эта связь интегрируема, т.е. существует функция $F(x, y, t)$, такая, что уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad (12)$$

эквивалентно уравнению $\dot{y}+x=0$. Если указанные уравнения эквивалентны, то подстановка выражения $\dot{y}=-x$ в уравнение (12) должна обращать это уравнение в тождество, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}-\frac{\partial F}{\partial y}x+\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0 .$$

Отсюда ввиду произвольности $\dot{x}$ следуют равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}\equiv 0 , \quad -\frac{\partial F}{\partial y}x+\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0 .$$

Первое из этих равенств показывает, что функция F не зависит от x. Вследствие этого второе тождество может выполняться при любых значениях x только в случае, если $\partial F/\partial y\equiv 0$, $\partial F/\partial t\equiv 0$. Таким образом, функция F не зависит от переменных x,y,t, т.е. является тождественной постоянной. Но такая «функция» не задает никаких ограничений на положения системы. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y}+x=0$ противоречит определению интегрируемости.

Связь $\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0$, описывающая ограничение на движение конька по льду, неинтегрируемая. Это можно доказать разными способами [2, 3], в частности, показав, что уравнение $\delta x\sin\varphi-\delta y\cos\varphi=0$ допускает перемещение из *любой* точки $\{x_0,y_0,\varphi_0\}$ в *произвольную* точку $\{x_1,y_1,\varphi_1\}$.

Аналогичным образом можно показать, что в задаче о движении шара по горизонтальной плоскости ограничения, описывающие условия качения шара *без скольжения*, представляют собой неинтегрируемые кинематические связи.

Все конечные и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*, а все остальные связи – *неголономными*. В свою очередь системы без связей и системы, на которые наложены *только* голономные связи, *называются голономными*, а при наличии хотя бы одной неголономной связи – *неголономными*.

Числом степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора $\mathbf{R}$, задающего положение системы без связей, и числом m *независимых* связей, наложенных на систему:

$$n = S - m\ . \qquad (13)$$

Если все m связей голономны, т.е. выражаются в конечном виде (3) или (6), то из уравнений этих связей можно выразить m переменных R_i через остальные n переменных R_k, рассматриваемых как независимые, и время t. Вследствие этого положение голономной системы в каждый момент времени будет однозначно определяться значениями n переменных.

В качестве независимых переменных не обязательно выбирать именно компоненты вектора $\mathbf{R}$. Произвольный набор из n *независимых* переменных $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, ..., q_n)$, через которые *однозначными* функциями

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t) \qquad (14)$$

определяется положение системы в любой заданный момент времени, будем называть *обобщенными координатами* голономной системы.

Введение *независимых* переменных, однозначно определяющих положение системы в виде (14), называется *параметризацией* механической системы. Под *независимостью* переменных подразумевается, что в каждый момент времени разным значениям вектора $\mathbf{q}$ отвечают разные положения системы. В этом случае ввиду однозначности функций (14) между положениями системы и значениями вектора $\mathbf{q}$ имеется взаимно однозначное соответствие. Если такое соответствие имеет место для всех возможных положений системы, то параметризация называется *глобальной*. В практических задачах достаточно, чтобы выбор независимых переменных удовлетворял условиям *локальной параметризации*, т.е. когда взаимно однозначное соответствие между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{q}$ требуется не всюду, а только *в некоторой окрестности каждого положения системы*. Условия локальной параметризации формулируются следующим образом.

Для любого положения системы любая вариация вектора $\mathbf{q}$ *приводит к изменению положения системы в данный момент времени*, *т.е.*

$$\forall\, d\mathbf{q} \neq 0 \quad \delta\mathbf{R}(d\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} \neq 0 . \tag{15}$$

Здесь $\delta\mathbf{R}$ – *изохронный* дифференциал функции $\mathbf{R}(\mathbf{q},t)$.

В дальнейшем будем полагать, что выбор обобщенных координат удовлетворяет условиям (15) локальной параметризации.

Таким образом, *для голономной системы число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат*, *однозначно определяющих положение системы в любой заданный момент времени*. Неголономные системы указанным свойством не обладают. И это принципиальное различие между голономными и неголономными системами приводит в итоге к тому, что для голономных систем можно написать уравнения движения в независимых координатах, число которых равно числу степеней свободы системы, а для неголономных – нет.

В классической механике рассматриваются системы с конечным числом степеней свободы. Это, однако, не означает, что рассматриваемые системы состоят из конечного числа материальных точек. Все выше изложенное легко обобщается и на случаи, когда исследуемые системы содержат твердые тела. Для этого нужно лишь определить правила вычисления числа степеней свободы и способы задания положения твердых тел.

Твердое тело представляет собой систему из бесконечного числа точек с бесконечным числом связей. При этом все эти связи являются голономными. Они задаются уравнениями $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = c_{ij} = \text{const},$ описывающими неизменность расстояния между любой парой точек в теле. Из курса динамики твердого тела [5] известно, что в силу этих связей положение твердого тела можно задать шестью независимыми переменными, например, тремя координатами x_c, y_c, z_c некоторого полюса *C*, выбранного в теле, и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ, задающими ориентацию связанного с телом базиса по отношению к неподвижному базису. Через эти переменные однозначно определяется положение каждой точки тела.

Таким образом, в общем случае твердое тело имеет шесть степеней свободы. Если же тело вырожденное, т.е. представляет собой систему точек, лежащих на одной прямой, то оно имеет пять степеней свободы (его положение можно определить пятью переменными x_c, y_c, z_c, ψ, θ).

В дальнейшем будем считать, что связи $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = c_{ij} = \mathrm{const}$, определяющие твердые тела, уже учтены, так что положение каждого тела, входящего в механическую систему, задается некоторым набором из шести (или пяти) переменных. При этом под компонентами $R_1, ..., R_S$ вектора $\mathbf{R}$, определяющего положение системы без связей, будем подразумевать совокупность переменных, задающих положение всех тел и всех отдельных точек механической системы. Число n степеней свободы такой системы будет определяться той же формулой (13), а в случае голономных связей также можно выбрать n обобщенных координат, задающих параметризацию системы в виде (14), удовлетворяющую условиям (15).

2.2. Общее уравнение динамики

Рассмотрим произвольную механическую систему, положение которой в выбранной системе отсчета задается S-мерным вектором $\mathbf{R}$. Будем считать известными зависимости

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{R}), \tag{16}$$

которыми определяется положение $\mathbf{r}_j$ каждой материальной точки системы через вектор $\mathbf{R}$. Если система состоит из конечного числа отдельных материальных точек, то компоненты вектора $\mathbf{R}$ можно отождествить согласно (1) с совокупностью декартовых координат этих точек. Если же система включает твердые тела, то положение каждой точки каждого тела тоже будет однозначно определяться конкретной функций вида (16) через те из компонент вектора $\mathbf{R}$, которые задают положение этого тела.

Пусть на рассматриваемую систему наложены p конечных связей

$$f_k(\mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, ..., p \tag{17}$$

и d дифференциальных связей вида (4):

$$\phi_i = \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{R}} + b_i = \sum_{\nu=1}^{S} a_{i\nu} \dot{R}_\nu + b_i = 0; \quad i = 1,...,d . \tag{18}$$

Заменяя уравнения (17) эквивалентными дифференциальными равенствами и умножая почленно уравнения (18) на dt, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R} + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0; \quad k = 1,..., p, \\ &\mathbf{a}_i^T d\mathbf{R} + b_i dt = 0; \qquad\quad i = 1,..., d. \end{aligned} \tag{19}$$

Множество всех решений $d\mathbf{R}(dt)$ системы (19) называется множеством *возможных перемещений* механической системы. Для любого фиксированного значения dt размерность этого множества равна числу степеней свободы системы $n = S - p - d$.

Важнейшим в механике систем со связями является понятие *виртуальных перемещений. Виртуальные перемещения системы* определяются как множество всех решений $\delta\mathbf{R}$ системы уравнений

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R} = 0 \ \ (k = 1,..., p), \ \ \mathbf{a}_i^T \delta\mathbf{R} = 0 \ \ (i = 1,..., d) , \tag{20}$$

получаемой из (19) при $dt = 0$, и трактуются как перемещения, допускаемые связями, при «замороженном» времени. Размерность множества виртуальных перемещений также совпадает с числом степеней свободы системы. Если все конечные связи стационарны, а во всех кинематических связях $b_i = 0$, то виртуальные перемещения совпадают с возможными.

Возможные и виртуальные перемещения материальных точек системы выражаются через $d\mathbf{R}$ и $\delta\mathbf{R}$ вытекающими из (16) соотношениями

$$d\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R} , \qquad \delta\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R} . \tag{21}$$

При выводе законов движения произвольной механической системы используются элементарные законы, описывающие движение ее материальных точек, т.е. законы Ньютона.

В инерциальной системе отсчета движение каждой материальной точки механической системы описывается уравнением

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{N}_j . \qquad (22)$$

Здесь результирующая сила, действующая на точку, разделена на две части. Первое слагаемое $\mathbf{F}_j$ называется *активной силой* и определяется как сила, действующая на точку при отсутствии связей в системе. Второе слагаемое $\mathbf{N}_j$ называется *реакцией связи*. Это дополнительные силы, которые возникают при наложении на систему механических связей. Активные силы $\mathbf{F}_j$ представляют собой заранее известные функции времени, положения и скоростей механической системы, а реакции связей $\mathbf{N}_j$ являются неизвестными в уравнениях (22).

Если заданы только связи (17), (18) и ничего неизвестно о характере реакций, вызываемых этими связями, то задача определения движения механической по заданным активным силам оказывается неопределенной (для системы из N материальных точек число $3N + p + d$ скалярных уравнений (17), (18), (22) меньше числа $6N$ неизвестных $\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N$, $\mathbf{N}_1,...,\mathbf{N}_N$). Задача становится полностью определенной, если рассмотрение ограничить случаем *идеальных связей.*

Определение. Связи называются *идеальными, если суммарная работа реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т.е.*

$$\sum_j \mathbf{N}_j^T \delta \mathbf{r}_j = 0 . \qquad (23)$$

Здесь суммирование ведется по всем материальным точкам системы.

Во многих практических примерах условие (23) обеспечивается за счет ортогональности реакций связи к множеству виртуальных перемещений системы. Таким примером является задача о движении точки по неподвижной или движущейся по заранее известному закону *гладкой поверхности*. В обоих случаях действующая на точку реакция гладкой поверхности нормальна к плоскости виртуальных перемещений точки.

Свободное твердое тело представляет собой систему материальных точек с идеальными связями. Реакции связей в этом случае являются внутренними силами, а сами связи таковы, что работа этих сил на любом перемещении тела равна нулю.

Система твердых тел, соединенных *идеальными шарнирами* (при вращении одного тела относительно другого отсутствует момент сил трения в шарнире), является системой с идеальными связями.

Твердое тело, катящееся по неподвижной или движущейся по заранее известному закону поверхности *без скольжения*, тоже есть система с идеальными связями. В этой задаче реакция, действующая на тело со стороны поверхности, приложена в точке контакта, виртуальное перемещение которой равно нулю.

Два тела, катящиеся друг по другу *без скольжения*, тоже образуют систему с идеальными связями. Действующие в точке контакта тел реакции подчиняются третьему закону Ньютона: $\mathbf{N}_{12} = -\mathbf{N}_{21}$, а виртуальные перемещения контактирующих точек одинаковы. Поэтому суммарная работа этих сил равна нулю.

В приведенных примерах показаны системы, движение которых характеризуется отсутствием трения *скольжения*. В связи с этим идеальные связи часто называют *связями без трения*.

Понятие идеальных связей применимо и к системам с трением. Во многих задачах силы трения могут быть определены на основе экспериментальных законов трения и отнесены к активным силам. Тогда оставшиеся составляющие реакций связей будут удовлетворять условию (23), и, следовательно, связи можно считать идеальными.

Далее всюду будем полагать, что наложенные на систему связи идеальны. Из условия идеальности связей (23) и уравнений (22) получаем следующее уравнение, называемое *общим уравнением динамики*:

$$\sum_j (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{r}}_j)^T \delta\mathbf{r}_j = 0 . \qquad (24)$$

Примечательно, что в этом уравнении отсутствуют реакции связей. Это уравнение утверждает, что *для любого совместимого со* *связями движения системы сумма работ активных сил* $\mathbf{F}_j$ *и сил инерции* $(-m_j \ddot{\mathbf{r}}_j)$ *на любом виртуальном перемещении системы равна нулю*.

2.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Рассмотрим голономную систему с идеальными связями, движущуюся в некоторой инерциальной системе отсчета. Для такой системы, как было показано выше, можно выбрать обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n$ в количестве, равном числу степеней свободы системы, которые будут задавать параметризацию системы в виде (14). На основании равенств (16) положения материальных точек системы тоже будут выражаться через $\mathbf{q}$ и t конкретными зависимостями:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}, t). \qquad (25)$$

Дифференцируя равенства (25) по времени, получим

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}. \qquad (26)$$

Отсюда вытекают следующие тождества:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}. \qquad (27)$$

Обратим внимание, что здесь и далее *при вычислении частных производных* $\partial f / \partial q_k$ и $\partial f / \partial \dot{q}_k$ от функций $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ координаты q_k и скорости $\dot{q}_k$ следует рассматривать как независимые переменные.

Сопоставляя следующие два соотношения:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial t}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial t\, \partial q_k},$$

получаем вторую группу тождеств:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}. \qquad (28)$$

Тождества (28) означают перестановочность операций вычисления полной производной по времени и частной производной по координате.

Обратимся теперь к общему уравнению динамики (24). Предварительно покажем, что виртуальные перемещения материальных точек системы представляют собой *изохронные* дифференциалы функций (25), т.е. выражаются в виде

$$\delta \mathbf{r}_j=\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_s}dq_s . \qquad (29)$$

Учитывая, что функции (14) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{q},t)$, будучи подставлены в уравнения голономных связей $f_k(\mathbf{R},t)=0$, должны обращать эти уравнения в тождества, получим

$$f_k(\mathbf{R}(\mathbf{q},t),t)\equiv 0;\quad k=1,...,m .$$

Дифференцируя эти тождества, будем иметь

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q}+\left(\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}+\frac{\partial f_k}{\partial t}\right)dt\equiv 0;\quad k=1,...,m . \qquad (30)$$

Отсюда, ввиду того, что $d\mathbf{q}$ и dt независимы, следует

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q}=\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T}\delta\mathbf{R}=0\ ;\quad k=1,\ ...,\ m , \qquad (31)$$

т.е. изохронные дифференциалы $\delta\mathbf{R}=(\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{q}^T)d\mathbf{q}$ функций $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{q},t)$ подчиняются тем же самым уравнениям (20), что и виртуальные перемещения голономной системы. Учитывая соотношения (21), получаем для виртуальных перемещений материальных точек выражения

$$\delta \mathbf{r}_j=\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q}=\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}d\mathbf{q} ,$$

полностью совпадающие с выражениями (29).

Подставляя выражения (29) в общее уравнение динамики (24), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j}(\mathbf{F}_j - m_j\ddot{\mathbf{r}}_j)^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right)dq_k = 0\,. \tag{32}$$

Ввиду того, что вариации $dq_1,...,dq_n$ независимы, уравнение (32) эквивалентно системе из n уравнений:

$$\sum_j m_j \ddot{\mathbf{r}}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1,...,n\,. \tag{33}$$

Выразим ускорения каждой материальной точки через ее кинетическую энергию $T_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j^T \dot{\mathbf{r}}_j \big/ 2$ с помощью формулы

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}\,. \tag{34}$$

Учитывая тождества (27) и (28), преобразуем левые части уравнений (33) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь $T = \sum\limits_j T_j$ – суммарная кинетическая энергия системы.

Соотношение (35) позволяет записать уравнения (33) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k\,; \quad k = 1,...,n\,. \tag{36}$$

Здесь через Q_k обозначены правые части уравнений (33), называемые *обобщенными силами*:

$$Q_k = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1,\ldots,n. \tag{37}$$

Уравнения (36) носят название *уравнений Лагранжа второго рода*. Они представляют собой систему из n уравнений второго порядка для n обобщенных координат $q_1,\ldots,q_n$. Второй порядок уравнений (36) обусловлен тем, что в левую часть этих уравнений помимо t, $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ обязательно входят вторые производные по времени от обобщенных координат, т.е. обобщенные ускорения $\ddot{\mathbf{q}}$. Обобщенные силы, стоящие в правых частях уравнений, могут зависеть только от t, $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ (в классической механике случаи, когда силы зависят от ускорений, не рассматриваются).

Уравнения Лагранжа (36) можно записать также в векторном виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F}_j, \tag{38}$$

где $\mathbf{Q}$ – n-мерный вектор-столбец обобщенных сил. Левая часть уравнений Лагранжа представляет собой результат действия на функцию $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ дифференциального *оператора Эйлера*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}.$$

Алгоритм составления уравнений Лагранжа сравнительно простой. Нужно сначала выбрать независимые обобщенные координаты $\mathbf{q}$ и выразить кинетическую энергию системы в виде $T = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$. После выполнения всех требуемых операций дифференцирования получается конкретный вид левых частей уравнений (36). Обобщенные силы вычисляются по формулам (37). При этом, учитывая определение частных производных, эти формулы можно переписать в виде

$$Q_k = \frac{\sum_j \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j(dq_k)}{dq_k} = \frac{\delta A(dq_k)}{dq_k}. \tag{37*}$$

Здесь $\delta A(dq_k)$ – работа активных сил на виртуальном перемещении системы, обусловленном изменением координаты q_k на величину dq_k.

Обобщенные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q},t)$ называются *потенциальными*, если существует скалярная функция $\Pi(\mathbf{q},t)$ (потенциальная энергия), такая, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q},t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}. \tag{39}$$

В силу теоремы об *условиях интегрируемости* критерием потенциальности обобщенных сил является симметричность матрицы $\partial \mathbf{Q}^T / \partial \mathbf{q}$, т.е. условие

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T}. \tag{40}$$

Отметим, что если все активные силы $\mathbf{F}_j$ потенциальны, т.е. $\exists\, \Pi(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N,t)$, такая, что $\mathbf{F}_j = -\partial \Pi / \partial \mathbf{r}_j$, то потенциальными будут и обобщенные силы, поскольку в этом случае будем иметь

$$\mathbf{Q} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F}_j = -\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}.$$

Обобщенные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ называются *обобщенно потенциальными*, если существует скалярная функция $V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ (обобщенный потенциал), такая, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \tag{41}$$

Если обобщенные силы потенциальны или обобщенно-потенциальны, то имеется возможность записать уравнения Лагранжа в наиболее компактной форме. Для этого используется *функция Лагранжа* (*лагранжиан*) L. В случае потенциальных сил *лагранжиан* определяется формулой

$$L = T - \Pi, \tag{42}$$

а в случае обобщенно-потенциальных сил формулой

$$L = T - V\,. \tag{43}$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0\,. \tag{44}$$

В дальнейшем механические системы, описываемые уравнениями Лагранжа вида (44), будем называть *лагранжевыми* системами. Примечательно, что уравнения движения, а следовательно, и все свойства лагранжевых систем определяются одной функцией – лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

Обратим внимание, что выше была изложена процедура составления уравнений Лагранжа в инерциальных системах отсчета. Она основывалась на уравнениях (22), справедливых в инерциальных системах отсчета, и поэтому в уравнениях Лагранжа (38) кинетическая энергия $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ тоже должна вычисляться в инерциальной системе отсчета.

В неинерциальной системе отсчета движение каждой материальной точки описывается уравнением

$$m_j\,\ddot{\mathbf{r}}_j^{\text{отн}} = \mathbf{F}_j + \mathbf{J}_j^{\text{пер}} + \mathbf{J}_j^{\text{кор}} + \mathbf{N}_j\,,$$

где $\mathbf{J}_j^{\text{пер}}$ и $\mathbf{J}_j^{\text{кор}}$ – переносная и кориолисова силы инерции, действующие на точку. На основании этих уравнений, повторяя дословно все выкладки, проведенные при выводе уравнений (38), получим уравнения Лагранжа, составленные в неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{\text{отн}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T^{\text{отн}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\text{пер}} + \mathbf{Q}^{\text{кор}}\,. \tag{45}$$

Здесь $T^{\text{отн}}$ – кинетическая энергия системы, вычисленная относительно неинерциального базиса, $\mathbf{Q}$ – обобщенные силы, соответствующие активным силам $\mathbf{F}_j$, а $\mathbf{Q}^{\text{пер}}$ и $\mathbf{Q}^{\text{кор}}$ – обобщенные силы, обусловленные переносными и кориолисовыми силами инерции.

Очевидно, что конкретный вид уравнений Лагранжа зависит не от способа их составления (в инерциальной или неинерциальной системе отсчета), а от выбора обобщенных координат. Если уравнения (38) и (45) записаны в одних и тех же обобщенных координатах, то они должны тождественно совпадать. Отсюда следует

$$\mathbf{Q}^{\text{ин}} = \mathbf{Q}^{\text{пер}} + \mathbf{Q}^{\text{кор}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}; \quad V = T^{\text{отн}} - T, \tag{46}$$

т.е. силы инерции являются обобщенно потенциальными.

Отметим, что составление уравнений Лагранжа в неинерциальных системах отсчета в большинстве случаев представляет собой более громоздкую процедуру, чем их составление в инерциальной системе отсчета. То возможное упрощение, которое получается в выражении для кинетической энергии $T^{\text{отн}}$ по сравнению с T, компенсируется существенным усложнением, связанным с вычислением обобщенных сил $\mathbf{Q}^{\text{пер}}$ и $\mathbf{Q}^{\text{кор}}$. Если же для вычисления этих сил использовать формулу (46), то в результате придем к уравнениям (38), составленным в инерциальной системе отсчета.

Следует иметь в виду, что если ставится задача написать уравнения движения некоторой механической системы относительно неинерциального базиса, то это означает, что в качестве обобщенных координат нужно использовать переменные, описывающие положение системы в этом базисе, и никоим образом не регламентирует способ составления этих уравнений. В большинстве таких задач проще получить искомые уравнения, составляя их в инерциальных системах отсчета, т.е. на основе уравнений (38), а не уравнений (45).

2.4. Свойства уравнений Лагранжа

1. Ковариантность. Прежде всего отметим, что под ковариантностью уравнений подразумевается инвариантность правила их составления по отношению к замене переменных, а не инвариантность самих уравнений [2].

Ковариантность уравнений Лагранжа означает, что при любой невырожденной дважды непрерывно дифференцируемой замене координат

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t)\,, \qquad \det\left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right) \neq 0\,, \tag{47}$$

уравнения Лагранжа сохраняют свою форму, т.е. в новых переменных $\tilde{\mathbf{q}}$ эти уравнения принимают аналогичный (38) вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\mathbf{F}_j\,, \tag{48}$$

где $\tilde{T}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ – кинетическая энергия системы, записанная в новых переменных, $\tilde{\mathbf{Q}}$ – соответствующие новым координатам обобщенные силы.

Ковариантность уравнений Лагранжа следует из самого вывода этих уравнений. Если исходные координаты $\mathbf{q}$ удовлетворяют условиям (15) локальной параметризации, то в силу оговоренных выше свойств преобразования (47) новые координаты $\tilde{\mathbf{q}}$ также будут удовлетворять этим условиям, вследствие чего для них справедливы уравнения (48). В ковариантности уравнений Лагранжа можно убедиться и непосредственной проверкой, применив преобразование (47) к уравнениям (38). Используя правила дифференцирования сложных и обратных функций, получим в конечном итоге уравнения

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}\,,$$

которые после умножения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{q}^T / \partial \tilde{\mathbf{q}}$ приводятся к виду (48).

Связь между обобщенными силами $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Q}$ выражается следующей *формулой преобразования обобщенных сил* при замене координат:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\mathbf{F}_j = \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{F}_j = \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}\mathbf{Q}\,. \tag{49}$$

При преобразованиях координат в *лаграгжевых* системах (44) новый лагранжиан $\widetilde{L}(\dot{\widetilde{\mathbf{q}}},\widetilde{\mathbf{q}},t)$ определяется как старый лагранжиан $L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$, выраженный через новые переменные.

2. Калибровочная инвариантность. Непосредственной проверкой устанавливается, что для функции $\varphi=\dot{f}(\mathbf{q},t)$, представляющей собой полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, справедливо тождество

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}\equiv 0. \tag{50}$$

Отсюда следует, что при добавлении такой функции к кинетической энергии системы уравнения Лагранжа остаются неизменными. Это свойство уравнений Лагранжа называется *калибровочной инвариантностью*.

Уравнения Лагранжа (44) остаются неизменными, если функцию L заменить функцией $L'=cL+\dot{f}(\mathbf{q},t)$, где $c\neq 0$ – постоянная. Таким образом, лагранжиан системы (44) определен с точностью до мультипликативной постоянной $c\neq 0$ и аддитивной функции $\varphi=\dot{f}(\mathbf{q},t)$.

3. Структура кинетической энергии и функции Лагранжа. Выясним зависимость кинетической энергии системы $T(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$ от обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$. На основании соотношений (26) имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_j m_j\dot{\mathbf{r}}_j^T\dot{\mathbf{r}}_j=\frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial\mathbf{q}^T}\dot{\mathbf{q}}\right)^2+\dot{\mathbf{q}}^T\left(\sum_j m_j\frac{\partial\mathbf{r}_j^T}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial t}\right)^2.$$

Ввиду того, что производные $\partial\mathbf{r}_j^T/\partial\mathbf{q}$ и $\partial\mathbf{r}_j/\partial t$ могут зависеть только от $\mathbf{q}$ и t, кинетическая энергия представляется в виде

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}+T_0=T_2+T_1+T_0, \tag{51}$$

где $T_2\geq 0$ – квадратичная форма обобщенных скоростей, T_1 – линейная форма обобщенных скоростей, T_0 – форма, не зависящая от скоростей. При этом симметрическая матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q},t)$ размера

$n\times n$, n-мерный вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q},t)$ и скалярная функция $T_0(\mathbf{q},t)$ определяются выражениями

$$\mathbf{A}=\sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T},\ \mathbf{b}=\sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t},\ T_0=\frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}\right)^2. \quad (52)$$

Функция Лагранжа, определяемая формулами (42) и (43), имеет аналогичную (51) структуру, т.е. тоже выражается функцией второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{d}+L_0=L_2+L_1+L_0. \quad (53)$$

Действительно, для случая потенциальных сил лагранжиан определяется формулой $L=T-\Pi(\mathbf{q},t)$, на основании которой получаем

$$L_2=T_2,\ \ L_1=T_1,\ \ L_0=T_0-\Pi. \quad (54)$$

Для выяснения структуры функции $L=T-V$ в случае обобщенно потенциальных сил определим структуру обобщенного потенциала $V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$. Из формулы (41) следует

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\frac{\partial^2 V}{\partial\dot{\mathbf{q}}\partial\dot{\mathbf{q}}^T}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t).$$

Отсюда, учитывая, что в механике рассматриваются только те случаи, когда силы не зависят от ускорений, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\dot{\mathbf{q}}\partial\dot{\mathbf{q}}^T}\equiv 0.$$

Это тождественное равенство означает, что обобщенный потенциал линейно зависит от обобщенных скоростей, т.е.

$$V=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{c}(\mathbf{q},t)+\Pi(\mathbf{q},t)=V_1+V_0. \quad (55)$$

Здесь второе слагаемое в обобщенном потенциале, если оно не равно нулю, трактуется как «обычная» потенциальная энергия, поскольку получаемая за счет него формулой (41) составляющая обобщенной силы определяется выражением $-\partial V_0/\partial\mathbf{q}$, аналогичным определению (39) «обычного» потенциала. Из формулы (45) следует, что и в случае обобщенно потенциальных сил функция Лагранжа $L = T - V$ имеет структуру вида (53), где

$$L_2 = T_2\,,\;\; L_1 = T_1 - V_1\,,\;\; L_0 = T_0 - V_0 = T_0 - \Pi\,. \tag{56}$$

Система называется *склерономной* (стационарной), если параметризация (14) стационарна, т.е. $\partial\mathbf{R}/\partial t \equiv 0$. Для склерономных систем положения материальных точек будут зависеть только от значений обобщенных координат $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q})$, а кинетическая энергия не зависит явно от времени и выражается квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}\,; \qquad \frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0\,. \tag{57}$$

Заметим, что если все наложенные на систему связи (3) стационарны, то имеется возможность выбрать обобщенные координаты $\mathbf{q}$ так, что и параметризация (14) будет стационарной: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$. Но зависящая от времени замена координат $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\widetilde{\mathbf{q}}, t)$ делает параметризацию нестационарной. Поэтому *между стационарностью связей и стационарностью параметризации прямой зависимости, вообще говоря, нет*.

4. Разрешимость относительно старших производных. Подставляя выражение для кинетической энергии (51) в уравнения Лагранжа (38), получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)\,.$$

После выполнения операций дифференцирования уравнения примут вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)\,. \tag{58}$$

Таким образом, уравнения Лагранжа линейны по обобщенным ускорениям, а матрица коэффициентов при обобщенных ускорениях совпадает с матрицей квадратичной части кинетической энергии системы.

Покажем, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений, т.е. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Предположим противное, т.е. $\det \mathbf{A} = 0$. Тогда найдется вектор обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^* \neq 0$, такой, что

$$T_2(\dot{\mathbf{q}}^*) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{*T}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}\dot{\mathbf{q}}^*\right)^2 = 0 .$$

Отсюда следует существование вектора $d\mathbf{q}^* = \lambda\dot{\mathbf{q}}^* \neq 0$, такого, что

$$\delta\mathbf{r}_j(d\mathbf{q}^*) = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q}^* = 0 \ \forall\, j ,$$

т.е. отличная от нуля вариация обобщенных координат не приводит к изменению положения системы, что противоречит оговоренным выше условиям (15) локальной параметризации.

Таким образом, уравнения Лагранжа разрешимы относительно старших производных, т.е. представимы в нормальной форме Коши:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) . \tag{59}$$

Этот факт и составляет содержание *основной теоремы* лагранжева формализма. Из него следует, что при необременительных ограничениях на правые части, которые в задачах механики выполняются, система уравнений (59) имеет единственное решение для любых начальных условий $t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$, т.е. движение системы полностью *детерминировано* ее состоянием (положением и скоростями) в начальный момент времени.

Учет структуры кинетической энергии (51) и функции Лагранжа (53) позволяет записать условие $\det \mathbf{A} \neq 0$ в следующем виде:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) \neq 0 . \tag{60}$$

Отметим, что в силу неравенства $T_2 \geq 0$ условие $\det \mathbf{A} \neq 0$ означает строгую положительную определенность матрицы $\mathbf{A}$.

Лагранжевы системы, в которых функция L имеет структуру (53), где L_2 – строго положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей, называются *натуральными*.

2.5. Первые интегралы уравнений Лагранжа. Теоремы об изменении обобщенной и полной энергии

Первым интегралом системы дифференциальных уравнений называется функция фазовых переменных и времени, сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

Уравнения Лагранжа представляют собой уравнения второго порядка. Фазовыми переменными в них являются обобщенные координаты $\mathbf{q}$ и обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}}$. Поэтому первыми интегралами уравнений Лагранжа могут быть функции вида $f(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$.

Распространенным типом первых интегралов в лагранжевых системах являются *циклические* интегралы. Переменная называется *циклической*, если она не входит в выражение для функции Лагранжа L. Из уравнений Лагранжа (44) следует, что если q_k – циклическая координата, то функция $\partial L / \partial \dot{q}_k$ является циклическим первым интегралом системы.

Рассмотрим голономную систему, в которой обобщенные силы $\mathbf{Q}$ имеют непотенциальные составляющие $\mathbf{Q}^*$. Полагая, что потенциальные и обобщенно потенциальные составляющие обобщенных сил учтены в лагранжиане L, получим уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^* . \qquad (61)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} - L , \qquad (62)$$

называемую *обобщенной энергией* системы. Определяя структуру этой функции на основе структуры функции Лагранжа (53), получим

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}) - \frac{\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}}{2} - \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{d} - L_0 = \frac{\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}}{2} - L_0 = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (63)$$

Таким образом, обобщенная энергия не содержит членов, линейно зависящих от обобщенных скоростей.

Если система склерономна, то $T_0 = T_1 = 0$ и обобщенная энергия совпадает с полной энергией:

$$H = E = T + \Pi\,. \quad (64)$$

Выясним, как меняется обобщенная энергия на движениях системы (61). Вычислим полную производную по времени от функции (62):

$$\dot{H} = \ddot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}^T\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Сокращая подобные члены и учитывая уравнения Лагранжа (61), получим

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{q}}^T\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{Q}^* - \frac{\partial L}{\partial t}\,. \quad (65)$$

Формула (65) описывает искомый закон изменения обобщенной энергии на движениях системы (61). Первое слагаемое в этой формуле есть *мощность* непотенциальных сил $\mathbf{Q}^*$.

Если непотенциальные силы отсутствуют, а лагранжиан не зависит явно от времени, т.е. $\partial L/\partial t \equiv 0$, то обобщенная энергия сохраняется:

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = h = \mathrm{const}\,. \quad (66)$$

Этот первый интеграл называется *обобщенным интегралом энергии*, или интегралом Пенлеве–Якоби.

Заметим, что условие существования обобщенного интеграла энергии (66) тоже можно сформулировать в терминах циклических переменных. Этот первый интеграл существует, когда циклической переменной является время t.

Для склерономной системы из формулы (65) получим в силу соотношений (57) и (64) закон изменения полной энергии:

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* + \frac{\partial V}{\partial t} . \tag{67}$$

Здесь V – обобщенный потенциал, определяемый формулой (55). В случаях, когда учтенные в лагражиане силы имеют обычный потенциал или линейная по скоростям часть V_1 обобщенного потенциала (55) не зависит явно от времени, т.е. $\partial\mathbf{c}/\partial t \equiv 0$, формула (67) принимает вид

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t} . \tag{68}$$

Склерономная система называется *консервативной*, если все обобщенные силы потенциальны, а потенциальная энергия не зависит явно от времени, т.е. $\partial\Pi/\partial t \equiv 0$. Для консервативной системы обобщенный интеграл энергии принимает вид закона сохранения полной энергии:

$$E = T + \Pi = \mathrm{const} . \tag{69}$$

Полная энергия *склерономной* системы будет сохраняться и в случаях, когда силы обобщенно потенциальны, но $\partial V/\partial t \equiv 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы оба слагаемых обобщенного потенциала (55) не зависели явно от времени.

Обобщенные силы называются *гироскопическими*, если для любого значения вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ их мощность равна нулю, т.е.

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \, Q_k^* = 0 \ \forall \dot{\mathbf{q}} . \tag{70}$$

В силу этого свойства гироскопические силы $\mathbf{Q}^*$ никак не влияют на законы изменения обобщенной и полной энергии и, следовательно, не нарушают законов сохранения (66), (69).

Примерами гироскопических сил являются сила Лоренца, действующая на точечный электрический заряд в магнитном поле, и кориолисова сила инерции. Эти силы ортогональны скоростям точек и не совершают работы на любых движениях системы.

Обобщенные силы называются *диссипативными*, если их мощность не положительна и при этом существуют движения, на которых мощность этих сил отрицательна.

Диссипативные силы называются *строго диссипативными* (определенно диссипативными, силами с полной диссипацией), если их мощность отрицательна на любом движении системы, т.е.

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* < 0 \ \forall \ \dot{\mathbf{q}} \neq 0 . \tag{71}$$

Если в системе действуют только диссипативные непотенциальные силы, то из формулы (65) при $\partial L / \partial t \equiv 0$ получим $\dot{H} \leq 0$, а для склерономной системы из формулы (67) при $\partial V / \partial t \equiv 0$ будем иметь $\dot{E} \leq 0$. Для случая строго диссипативных сил неравенства принимают вид

$$\dot{H} < 0 \ \forall \ \dot{\mathbf{q}} \neq 0 \ \text{и} \ \dot{E} < 0 \ \forall \ \dot{\mathbf{q}} \neq 0 . \tag{72}$$

§3. Уравнения Гамильтона

3.1. Гамильтоновы системы

Рассмотрим систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ фазовых переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p}$, где

$$\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, ..., q_n), \quad \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, ..., p_n).$$

Переменные $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ будем называть обобщенными координатами и обобщенными импульсами соответственно. Предполагается, что система разрешима относительно производных, т.е. представима в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Если через $\mathbf{x}$ обозначить $2n$-мерный вектор-столбец фазовых переменных $\mathbf{x}^T = (\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T)$, а через $\mathbf{X}$ – $2n$-мерный вектор-столбец правых частей системы (1) $\mathbf{X}^T = (\mathbf{Q}^T, \mathbf{P}^T)$, то эта система запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \tag{2}$$

Определение. Система дифференциальных уравнений четного порядка (1) называется *гамильтоновой*, если существует скалярная функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, с помощью которой система представима в следующей *канонической* форме:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \text{ т.е. } \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad k = 1, ..., n. \tag{3}$$

Функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом* системы, а сами уравнения (3) – *каноническими уравнениями* Гамильтона. Переменные q_k и p_k называются *сопряженными* друг к другу гамильтоновыми переменными.

Из приведенного определения следует, что гамильтониан системы определен с точностью до аддитивной функции времени.

Для записи уравнений (3) в терминах фазового вектора $\mathbf{x}$ используется следующая матрица, называемая *симплектической единицей*:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица порядка n.

Матрица $\mathbf{J}$ обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}\,, \quad \mathbf{J}\,\mathbf{J}^T = \mathbf{E}_{2n}\,, \quad \det \mathbf{J} = 1\,. \tag{5}$$

С помощью матрицы (4) канонические уравнения (3) записываются в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\,. \tag{6}$$

Условия гамильтоновости системы определяются с помощью теоремы об *условиях интегрируемости*. В силу этой теоремы для гамильтоновости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{J}\,\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}^T$ была симметрической, т.е.

$$\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}^T} + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{J} \equiv 0\,. \tag{7}$$

Для системы, записанной в форме (1), критерий гамильтоновости описывается следующими тремя матричными тождествами:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}^T} \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}^T} \equiv \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}^T} \equiv -\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{q}}\,.$$

Канонические уравнения Гамильтона представляют особый интерес в механике в связи с тем, что этими уравнениями можно описать движения *лагранжевых* систем, в частности, голономных систем в случаях, когда действующие силы имеют обычный или обобщенный потенциал. В указанных случаях движения системы описываются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0\,, \tag{8}$$

которые представляют собой систему из n уравнений второго порядка для n-мерного вектора обобщенных координат $\mathbf{q}$.

Переход от уравнений Лагранжа (8) к уравнениям Гамильтона (3) осуществляется следующим образом.

1. *Преобразованием Лежандра*:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{9}$$

определяются *обобщенные импульсы* $\mathbf{p}$. Вследствие того, что $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, обобщенные импульсы выражаются соотношениями (9) в виде функций *переменных Лагранжа* $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$. Кроме того, при условии

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right) \neq 0\,, \tag{10}$$

которое выполняется для всех *натуральных* систем, уравнения (9) разрешимы относительно скоростей $\dot{\mathbf{q}}$, т.е. имеется возможность выразить в явном виде обобщенные скорости через *переменные Гамильтона* $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,. \tag{11}$$

2. *Функция Гамильтона* определяется формулой

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]_{\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)} = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L. \tag{12}$$

Отметим, что по определению функция Гамильтона есть функция гамильтоновых переменных, т.е. в формуле (12) обобщенные скорости должны быть выражены через гамильтоновы переменные соотношениями (11).

Функция (12), выраженная через переменные Лагранжа, представляет собой *обобщенную энергию* системы, а для склерономной системы – полную энергию $E = T + \Pi$ (см. раздел «уравнения Лагранжа»).

Учитывая правила дифференцирования сложных функций и формулу (9), получим для производных от функции (12) следующие выражения:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \ . \tag{13}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} \ . \tag{14}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial t}\mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \ . \tag{15}$$

Уравнения (11) в силу соотношений (14) записываются с помощью функции (12) в виде $\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ и совпадают с первой группой канонических уравнений Гамильтона (3). В свою очередь, учитывая определение (9) и равенства (13), получаем, что уравнения Лагранжа (8) принимают в переменных Гамильтона следующий вид: $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}$, т.е. полностью совпадают со второй группой уравнений (3).

Таким образом, уравнения Лагранжа (8) приводятся преобразованием Лежандра (9) к форме канонических уравнений Гамильтона (3).

Преобразование Лежандра представляет собой один из возможных вариантов преобразования уравнений второго порядка в уравнения первого порядка. Достоинство этого преобразования состоит в том, что в результате получаются уравнения, разрешенные относительно производных, и эти уравнения, как и уравнения Лагранжа (8), определяются одной функцией – в данном случае гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

К уравнениям Гамильтона (но уже не каноническим) приводятся уравнения Лагранжа и в случаях, когда имеются непотенциальные составляющие $\mathbf{Q}^*$ обобщенных сил $\mathbf{Q}$. Полагая, что потенциальные составляющие обобщенных сил учтены в лагранжиане $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, получим уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \ . \tag{16}$$

Используя преобразование Лежандра (9) и определяя функцию $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ формулой (12), получим соотношения (11), (13), (14), на основании которых уравнения (8) запишутся в переменных Гамильтона следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \ \ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}^*(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\mathbf{q},t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}^*(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,. \qquad (17)$$

Эти $2n$-уравнений первого порядка, так же, как и уравнения (3), имеют нормальную форму Коши, но не являются каноническими.

Переход от уравнений Гамильтона (17) к уравнениям Лагранжа осуществляется следующей процедурой.

1. Из первой группы уравнений (17)

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \qquad (18)$$

при условии

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{p}^T}\right) \neq 0 \qquad (19)$$

выражаются обобщенные импульсы через переменные Лагранжа:

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)\,. \qquad (20)$$

2. Функция Лагранжа определяется на основании формулы (12) соотношением

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = [\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)]_{\mathbf{p}=\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}\,, \qquad (21)$$

в котором обобщенные импульсы выражены с помощью функций (20) через переменные Лагранжа.

Вычисляя частную производную от обеих частей равенства (21) по переменной $\dot{\mathbf{q}}$, получим с учетом уравнений (18) следующее соотношение:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)\,.$$

Подставляя его во вторую группу уравнений (17) и учитывая равенства (13), придем к уравнениям Лагранжа вида (16):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}^*(\mathbf{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, t) = \mathbf{Q}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) .$$

Описанной процедурой канонические уравнения Гамильтона (3) преобразуются в уравнения Лагранжа (8).

Отметим, что для произвольной гамильтоновой системы условие (19) может не выполняться. В таких случаях переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Лагранжа невозможен.

Дальнейшее изложение будет посвящено в основном изучению гамильтоновых систем, т.е. систем, описываемых каноническими уравнениями Гамильтона (3).

3.2. Скобки Пуассона

Скобки Пуассона являют собой пример вспомогательных функций, используемых для компактной записи громоздких выражений.

Для двух скалярных функций $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ и $f_2(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *скобка Пуассона* (f_1, f_2) определяется следующим скалярным выражением:

$$(f_1, f_2) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial q_s}\frac{\partial f_2}{\partial p_s} - \frac{\partial f_1}{\partial p_s}\frac{\partial f_2}{\partial q_s} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}. \quad (22)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – $2n$-мерный вектор-столбец переменных Гамильтона $\mathbf{q}, \mathbf{p}$, а $\mathbf{J}$ – симплектическая матрица (4).

Если заданы m функций $f_1, f_2, ..., f_m$, то все скобки Пуассона (f_j, φ) функций f_j с функцией φ можно записать в виде вектора-столбца следующим образом:

$$(\mathbf{f}, \varphi) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} (f_1, \varphi) \\ (f_2, \varphi) \\ \vdots \\ (f_m, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Здесь через $\mathbf{f}$ обозначен m-мерный вектор-столбец, составленный из функций $f_1, f_2, ..., f_m$.

В свою очередь все скобки Пуассона (f_j, f_k) можно записать одним выражением в виде кососимметрической матрицы размера $m \times m$:

$$\mathbf{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & (f_1, f_2) & \dots (f_1, f_m) \\ (f_2, f_1) & 0 \quad \dots & (f_2, f_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_m, f_1) & (f_m, f_2) \quad .... & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Косая симметрия матрицы $\mathbf{\Phi}$ ($\mathbf{\Phi}^T = -\mathbf{\Phi}$) следует из приведенных ниже свойств скобок Пуассона.

Свойства скобок Пуассона:

1°. $(f_j, f_k) = -(f_k, f_j)$;

2°. $(f_j, c(t) f_k) = c(t)(f_j, f_k)$;

3°. $(f_j + f_k, f_s) = (f_j, f_s) + (f_k, f_s)$;

4°. $\dfrac{\partial (f_j, f_k)}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial t}, f_k\right) + \left(f_j, \dfrac{\partial f_k}{\partial t}\right)$;

5°. $((f_1, f_2), f_3) + ((f_2, f_3), f_1) + ((f_3, f_1), f_2) = 0$.

Свойства 1° – 3° следуют непосредственно из определения (22), а для доказательства свойства 4° достаточно учесть перестановочность операций дифференцирования по $\mathbf{x}$ и t.

Докажем свойство 5°, называемое *тождеством Пуассона*. Вычисляя по определению (22) левую часть равенства 5° с использованием правил дифференцирования билинейных форм, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}=$$

$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}^T\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}}+$$

$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial^2 f_3}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}^T\frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}+$$

$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}^T\frac{\partial^2 f_3}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}.$$

Каждое из шести слагаемых в этом выражении есть скаляр и, следовательно, при транспонировании не меняется. Заменив каждое четное слагаемое его транспонированным значением и учитывая, что $\mathbf{J}^T=-\mathbf{J}$ и что матрица вторых производных каждой функции симметрическая, получим тождество 5°.

3.3. Первые интегралы гамильтоновых систем

Первым интегралом *системы дифференциальных уравнений первого порядка* (2) *называется функция* $f(\mathbf{x},t)$ *фазовых переменных и времени, определенная в той же области, что и сама система, и сохраняющая свои значения на любом решении этой системы*. Тот факт, что функция $f(\mathbf{x},t)$ является первым интегралом системы, описывается уравнением

$$f(\mathbf{x},t)=c,$$

где c – постоянная первого интеграла, значение которой определяется начальными условиями движения системы.

Первые интегралы отражают законы сохранения, представляющие самостоятельный интерес в механике. Кроме того, первые интегралы используются в большинстве методов интегрирования уравнений движения, поскольку они позволяют понизить порядок системы.

Критерий первого интеграла вытекает непосредственно из определения и формулируется следующим образом:

Для того чтобы функция $f(\mathbf{x},t)$ *была первым интегралом системы* (2), *необходимо и достаточно, чтобы ее полная производная* *по времени, вычисленная в силу уравнений* (2)*, была равна нулю во всей области определения системы* (2), т.е.

$$\dot{f}\Big|_{(2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(2)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0\,. \tag{25}$$

Для гамильтоновой системы критерий первого интеграла принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial t} = (f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0. \tag{26}$$

Здесь (f, H) – скобка Пуассона функций f и H. Для векторных функций $\mathbf{f}$ этот критерий записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = (\mathbf{f}, H) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \equiv 0. \tag{26*}$$

Теорема Якоби–Пуассона. *Если* $f_1(\mathbf{x},t)$ *и* $f_2(\mathbf{x},t)$ *– первые интегралы некоторой гамильтоновой системы, то их скобка Пуассона* (f_1, f_2) *также является первым интегралом этой системы*.

Доказательство. По условиям теоремы функции f_1 и f_2 удовлетворяют критерию (26), т.е.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \equiv -(f_1, H) = (H, f_1)\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} \equiv -(f_2, H)\,.$$

Учитывая эти равенства и используя свойства 1°, 4° и 5° скобок Пуассона, получим

$$((f_1, f_2), H) + \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} = ((f_1, f_2), H) + (\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2) - (\frac{\partial f_2}{\partial t}, f_1) =$$
$$= ((f_1, f_2), H) + ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция (f_1, f_2) тоже удовлетворяет критерию (26) первого интеграла. *Теорема доказана*.

На первый взгляд может показаться, что при наличии у гамильтоновой системы двух первых интегралов с помощью теоремы Якоби–Пуассона можно «тиражировать» новые первые интегралы в виде функций (f_1, f_2), $(f_1,(f_1, f_2))$ и т.д. Однако в подавляющем большинстве случаев такие функции оказываются либо зависимыми по отношению к исходным функциям, либо тождественными константами.

Циклические первые интегралы. Переменная называется *циклической*, если она не входит в выражение для функции Гамильтона. В силу канонических уравнений Гамильтона (3) каждой циклической координате q_k соответствует *циклический* первый интеграл $p_k = \beta_k = \text{const}$ (сохраняется обобщенный импульс p_k), а каждому циклическому импульсу p_k – первый интеграл $q_k = \alpha_k = \text{const}$ (сохраняется обобщенная координата q_k).

Если циклической переменной является время t, т.е. $\partial H/\partial t \equiv 0$ (такие системы называются *обобщенно консервативными*), то в этом случае первым интегралом системы будет функция Гамильтона:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = h = \text{const}. \tag{27}$$

Этот интеграл называется *обобщенным интегралом энергии*. Его наличие следует из критерия (26). Ввиду того, что $(H, H) \equiv 0$, условие первого интеграла для функции $f = H$ имеет вид $\partial H/\partial t \equiv 0$.

Отметим, что в силу соотношений (13) и (15) гамильтониан системы не будет зависеть от координаты q_k или времени t, если не зависит от координаты q_k или времени t лагранжиан, и наоборот.

Другие примеры первых интегралов. Общих методов поиска первых интегралов не существует. Поэтому в большинстве случаев применяется «метод угадывания», т.е. делается предположение, что некая функция является первым интегралом системы, а потом с помощью критерия (26) это предположение доказывается или опровергается. В приведенных ниже примерах наличие первых интегралов обусловлено специальной структурой функции Гамильтона.

1°. Гамильтониан с *отделимыми парами сопряженных переменных*. Пары сопряженных переменных q_k, p_k $(k = 1,...,m)$ называются *отделимыми*, если гамильтониан системы имеет следующую структуру:

$$H = H[f_1(q_1, p_1),..., f_m(q_m, p_m), q_{m+1}, p_{m+1},..., q_n, p_n, t]. \qquad (28)$$

Для такой системы для всех $k = 1,...,m$ скобки Пуассона (f_k, H) равны нулю:

$$(f_k, H) = \frac{\partial f_k}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f_k}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial f_k}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial p_k} - \frac{\partial f_k}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial q_k} \equiv 0.$$

Поэтому в силу критерия (26) система имеет первые интегралы

$$f_k(q_k, p_k) = c_k; \quad k = 1,...,m. \qquad (29)$$

Отметим, что первые интегралы (29) представляют собой обобщение циклических интегралов, существующих в случаях, когда циклической переменной является обобщенная координата q_k или обобщенный импульс p_k. В первом случае $f_k = p_k$, а во втором случае $f_k = q_k$.

2°. Гамильтониан со структурой *вложенных функций* («матрешка»). Рассмотрим гамильтонову систему, для которой функция Гамильтона выражается в виде

$$\begin{aligned} &H = H(f_m, q_{m+1}, p_{m+1},..., q_n, p_n, t) = H(f_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t); \\ &f_k = f_k(f_{k-1}, q_k, p_k); \; k = 2,...,m, \; f_1 = f_1(q_1, p_1). \end{aligned} \qquad (30)$$

Здесь через $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ обозначены ($n - m$)-мерные векторы неотделимых переменных q_j, p_j ($j = m+1,...,n$).

Вычисляя скобки Пуассона (f_k, H) для всех $k = 1,...,m$, получим

$$(f_k, H) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_k}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial q_j} \equiv 0.$$

Отсюда в силу критерия (26) следует, что система имеет первые интегралы:

$$f_1(q_1, p_1) = c_1, \quad f_k(c_{k-1}, q_k, p_k) = c_k; \; k = 2,...,m. \qquad (31)$$

3°. Гамильтониан с *отделимой группой сопряженных переменных*. Обобщением случаев 1° и 2° является следующая структура гамильтониана:

$$H = H[f(q_1, p_1, ..., q_m, p_m), \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t]\,. \tag{32}$$

Здесь $2 \le m \le n$, f – произвольная функция своих переменных, через $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ обозначены ($n - m$)-мерные векторы неотделимых переменных q_j, p_j ($j = m+1, ..., n$).

Для такой системы получаем

$$(f, H) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_j} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция f является первым интегралом системы:

$$f(q_1, p_1, ..., q_m, p_m) = c\,. \tag{33}$$

В зависимости от структуры функции *f*, фигурирующей в гамильтониане (32), система может иметь помимо (33) и другие первые интегралы. Например, если функция f имеет структуру функции f_m (30), то, как было показано выше, система имеет m первых интегралов. Аналогичным свойством обладают системы с гамильтонианом следующего вида:

$$H = H(f, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)\,; \quad f = \frac{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^{m} \psi_k(q_k, p_k)}\,. \tag{34}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что в этом случае помимо первого интеграла

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^{m} \psi_k(q_k, p_k)} = c \tag{35}$$

система имеет m следующих первых интегралов:

$$f_k(q_k, p_k) = \varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) = c_k\,; \quad k = 1,...,m\,. \quad (36)$$

Нетрудно проверить, что в совокупности первые интегралы (35), (36) зависимы. Кроме того, поскольку уравнение (35) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(q_k, p_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) = 0\,,$$

то постоянные c_k тоже зависимы между собой:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k = 0. \quad (37)$$

В рассматриваемом примере в качестве независимых первых интегралов следует взять m функций f_k, а для того, чтобы в уравнениях (36) фигурировали только *произвольные* постоянные, исключить c_m, используя равенство (37). Тогда независимые первые интегралы запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) = c_k\,;\ k = 1,...,m-1, \\ &\varphi_m(q_m, p_m) - c\psi_m(q_m, p_m) = -\sum_{k=1}^{m-1} c_k\,, \end{aligned} \quad (38)$$

где $c_1, c_2, ..., c_{m-1}, c$ будут произвольными постоянными.

3.4. Использование первых интегралов в задачах интегрирования уравнений движения

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = X_k(x_1, ..., x_N, t)\,; \quad k = 1,...,N\,, \quad (39)$$

описывающая движение некоторой механической системы, имеет m независимых первых интегралов

$$f_j(x_1, ..., x_N, t) = c_j\,;\ j = 1,...,m\,, \quad (40)$$

где c_j – произвольные постоянные первых интегралов. Тогда из уравнений (40) можно в явном виде выразить m переменных $x_1,...,x_m$ через остальные переменные $x_{m+1},...,x_N$ и время t:

$$x_s = \varphi_s(x_{m+1},...,x_N, t, c_1,...,c_m); \; s = 1,...,m \,. \tag{41}$$

Подставляя эти выражения в последние $N-m$ уравнения системы (39), получим систему, которая имеет порядок $N-m$:

$$\dot{x}_k = X_k^*(x_{m+1},...,x_N, c_1,...,c_m, t); \quad k = m+1,....,N \,. \tag{42}$$

Таким образом, каждый первый интеграл позволяет понизить порядок системы, по крайней мере, на одну единицу. Если будет найдено общее решение системы (42), то оно будет иметь вид

$$x_k = \psi_k(c_1,...,c_N, t); \quad k = m+1,....,N \,, \tag{43}$$

где $c_1,...,c_N$ – произвольные постоянные. Тогда общее решение для переменных $x_1,...,x_m$ находится подстановкой решения (43) в (41).

Если система (39) имеет полный набор независимых первых интегралов, т.е. $m = N,$ то явный вид ее общего решения определяется путем разрешения системы уравнений (40) относительно $x_1,...,x_N$.

Если система (39) *автономна*, т.е. правые части не зависят явно от времени, и имеет $N-1$ *автономных* (не зависящих от времени) первых интегралов, то в качестве (42) получим одно уравнение следующего вида:

$$\dot{x}_N = X_N^*(x_N, c_1,...,c_{N-1}) \,.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными интегрируется. Его решение $x_N = \psi_N(c_1,...,c_N, t)$ находится из уравнения

$$F(x_N, c_1,...,c_{N-1}) = \int \frac{dx_N}{X_N^*(x_N, c_1,...,c_{N-1})} = t + c_N \,,$$

которое можно трактовать, как неавтономный первый интеграл системы.

В таких случаях, когда построение общего решения системы дифференциальных уравнений сводится к вычислению интегралов от известных функций и обращению функций, говорят, что система *интегрируется в квадратурах*. Использование термина «в квадратурах» объясняется тем, что раньше квадратурами называли неопределенные интегралы (первообразные).

Исследуем теперь подробно, что дают рассмотренные в п. 3.3 первые интегралы для понижения порядка гамильтоновой системы.

Начнем с циклических первых интегралов и покажем, что каждый из них позволяет понизить порядок системы не на одну, а на две единицы.

Пусть $q_1,...,q_m$ – циклические координаты, т.е.

$$H = H(p_1,...,p_m,\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)\,, \tag{44}$$

где через $\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}$ обозначены ($n-m$)-мерные векторы нециклических переменных q_j, p_j ($j = m+1,...,n$). Для функции Гамильтона с такой структурой уравнения для переменных $\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}$ при учете первых интегралов $p_k = c_k$ ($k = 1,...,m$) записываются с помощью функции

$$\tilde{H} = H(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t) \tag{45}$$

в канонической форме

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{F}}(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t),\;\; \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{G}}(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t) \tag{46}$$

и образуют *замкнутую* систему порядка $2n-2m$. Если будет найдено общее решение системы (46), то оно будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{x}}(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{c}},t)\,,\;\; \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{y}}(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{c}},t)\,, \tag{47}$$

где $\tilde{\mathbf{c}}$ – ($2n-2m$)-мерный вектор произвольных постоянных. После подстановки этого решения в функцию (45) циклические координаты $q_1,...,q_m$ определятся из уравнений

$$\dot{q}_k = \partial H\big/\partial p_k = \partial\tilde{H}\big/\partial c_k = F_k(c_1,...,c_m,\tilde{\mathbf{c}},t)$$

с помощью квадратур

$$q_k = \int F_k \, dt + c_{m+k}\,; \quad k = 1,\dots,m\,.$$

Таким образом, при наличии m циклических первых интегралов задача поиска общего решения гамильтоновой системы сводится к интегрированию системы уравнений (46), порядок которой на $2m$ единиц меньше, чем порядок исходной системы. Кроме того, при понижении порядка системы с использованием циклических первых интегралов сохраняется свойство гамильтоновости системы.

Если функция Гамильтона не зависит от всех обобщенных координат, т.е. $H = H(p_1,\dots,p_n,t)$, то система интегрируется, а ее общее решение записывается в виде

$$p_k = c_k\,, \qquad q_k = \int \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial c_k} dt + c_{n+k}\,; \quad k = 1,\dots,n\,.$$

Аналогичным образом показывается, что при наличии циклических импульсов p_k каждый циклический интеграл $q_k = c_k$ позволяет понизить порядок системы на две единицы.

Уравнения Уиттекера. Обобщенный интеграл энергии

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = h \tag{48}$$

тоже является циклическим первым интегралом и позволяет понизить порядок системы на две единицы. В этом случае в процедуре понижения порядка используется свойство автономности системы, которое позволяет исключить время t и выбрать в качестве независимой переменной, играющей роль времени, одну из обобщенных координат. Полагая, что $\partial H / \partial p_1 \neq 0$, выразим из уравнения (48) обобщенный импульс p_1:

$$p_1 = -K(q_1, q_2,\dots,q_n, p_2,\dots,p_n,h)\,, \tag{49}$$

а обобщенную координату q_1 выберем в качестве независимой переменной. Из уравнений Гамильтона выразим производные от переменных q_k, p_k ($k = 2,\dots,n$) по координате q_1:

$$\frac{dq_k}{dq_1} = \frac{\partial H / \partial p_k}{\partial H / \partial p_1}, \quad \frac{dp_k}{dq_1} = -\frac{\partial H / \partial q_k}{\partial H / \partial p_1}. \tag{50}$$

Учитывая, что подстановка выражения (49) в уравнение (48) обращает это уравнение в тождество

$$H(q_1, q_2, ..., q_n, -K, p_2, ..., p_n, h) \equiv h,$$

и дифференцируя это тождество по переменным q_k, p_k ($k = 2,...n$), получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_k} = 0.$$

С учетом этих равенств уравнения (50) приводятся к виду

$$\frac{dq_k}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_k}; \quad k = 2,...,n \tag{51}$$

Уравнения (51) носят название *уравнений Уиттекера*. Они образуют замкнутую систему из $2n-2$ уравнений для $2n-2$ неизвестных q_k, p_k ($k = 2,...,n$), а координата q_1 играет роль времени. Уравнения (51) имеют гамильтонову форму (3), а в роли функции Гамильтона выступает функция K (49), называемая *функцией Уиттекера*.

Общее решение системы (51) будет иметь вид

$$q_k = x_k(q_1, c_1, ..., c_{2n-2}, h), p_k = y_k(q_1, c_1, ..., c_{2n-2}, h); k = 2,...,n, \tag{52}$$

а та часть решения, которой определяется поведение координат, будет описывать множество траекторий в координатном пространстве системы.

Если общее решение (52) системы (51) найдено, то закон движения исходной гамильтоновой системы в зависимости от времени определяется следующей процедурой. Из уравнения Гамильтона $\dot{q}_1 = \partial H / \partial p_1$ после подстановки в его правую часть выражений (49) и (52) получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{q}_1 = F(q_1, c_1, ..., c_{2n-2}, h),$$

решение которого $q_1 = x_1(c_1,...,c_{2n-1},h,t)$ определяется квадратурой

$$\int \frac{dq_1}{F(q_1,c_1,...,c_{2n-2},h)} = t + c_{2n-1}.$$

После подстановки этого решения в (52) находится зависимость переменных q_k, p_k ($k = 2,...,n$) от времени, а затем по формуле (49) определяется зависимость p_1 от времени.

3.5. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

Теорема Лиувилля дает достаточные условия интегрируемости гамильтоновых систем. Прежде чем приступить к формулировке этой теоремы, дадим определение инволюции.

Функции $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p},t),...,f_m(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *образуют систему в инволюции, если все их скобки Пуассона* (f_j, f_k) $(j,k = 1,...,m)$ *тождественно равны нулю.*

Обозначив через $\mathbf{f}$ m-мерный вектор-столбец, составленный из функций $f_1,...,f_m$, условие их инволюции можно записать в виде (см. формулу (24) настоящего параграфа)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0. \qquad (53)$$

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система порядка* $2n$ *имеет* n *независимых первых интегралов в инволюции, то она интегрируется в квадратурах.*

Доказательство. Запишем уравнения, определяющие указанные в теореме первые интегралы, в векторном виде:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\boldsymbol{\alpha}) = 0. \qquad (54)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – n-мерный вектор произвольных постоянных. Значения этих постоянных однозначно определяются значениями $\mathbf{q},\mathbf{p},t$. Поэтому уравнение (54) разрешимо относительно $\boldsymbol{\alpha}$, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\alpha}^T) \neq 0. \qquad (55)$$

Вследствие независимости первых интегралов система (54) разрешима относительно некоторой группы из n переменных. Полагая, что

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0\,, \tag{56}$$

выразим в явном виде импульсы:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})\,. \tag{57}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (54), получим тождество

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}), t, \boldsymbol{\alpha}) \equiv 0\,. \tag{58}$$

Дифференцируя это тождество по переменной $\mathbf{q}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\,. \tag{59}$$

Подставляя это выражение в условие инволюции (53), будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\right)\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = 0\,.$$

Это матричное равенство после сокращения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T$ принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0\,. \tag{60}$$

Из него следует, что матрица $\partial \boldsymbol{\psi} / \partial \mathbf{q}^T$ – симметрическая, и поэтому в силу теоремы *об условиях интегрируемости* существует функция $S(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$, такая, что

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\,. \tag{61}$$

Обозначим через $H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ функцию, получаемую из функции Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ после подстановки вместо импульсов их выражений (57), т.е.

$$H^*(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha}) = H(\mathbf{q},\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha}),t)\,. \tag{62}$$

Для частных производных функции H^* получим следующие выражения:

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,, \qquad \frac{\partial H^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,. \tag{63}$$

По условию теоремы функции (57) удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Поэтому имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,. \tag{64}$$

Из соотношений (63), (64) при учете (60) получаем равенство

$$-\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\,. \tag{65}$$

Из равенств (60) и (65) следует симметричность матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{q}^T & \partial\boldsymbol{\psi}/\partial t \\ -\partial H^*/\partial\mathbf{q}^T & -\partial H^*/\partial t \end{pmatrix}, \tag{66}$$

вследствие чего по теореме об условиях интегрируемости существует функция $S(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha})$, которая помимо (61) удовлетворяет уравнению

$$-H^* = \frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{67}$$

При этом решение системы (61), (67) определяется с точностью до слагаемого $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ следующей формулой:

$$S(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^1 [\mathbf{q}^T \boldsymbol{\psi}(\theta\,\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha}) - t\,H^*(\mathbf{q},\theta\,t,\boldsymbol{\alpha})]\,d\theta\,. \tag{68}$$

Перейдем теперь к заключительной части доказательства теоремы. Покажем, что вектор-функция

$$\mathbf{U}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) = \partial S/\partial\boldsymbol{\alpha} \tag{69}$$

– первый интеграл системы. Вычисляя полную производную по времени от этой функции в силу уравнений Гамильтона, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)=\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}},H\right)+\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \boldsymbol{\alpha}}=\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T\,\partial \boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}+\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \boldsymbol{\alpha}}\,. \tag{70}$$

Отсюда, учитывая соотношения (61), (63) и (67), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}+\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\alpha}\partial t}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(H^*+\frac{\partial S}{\partial t}\right)=0\,. \tag{71}$$

Таким образом, n-мерная вектор-функция (9) является первым интегралом системы, т.е. переменные $\mathbf{q}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{U}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)=\frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\beta}\,, \tag{72}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ – n-мерный вектор произвольных постоянных.

Покажем, что из уравнений (72) можно в явном виде найти решение $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$. По теореме о неявных функциях система (72) разрешима относительно $\mathbf{q}$, если выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}^T}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T\partial \boldsymbol{\alpha}}\right)\neq 0\,. \tag{73}$$

Дифференцируя тождество (58) по $\boldsymbol{\alpha}$ и учитывая (61), получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}}=-\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}=-\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T\partial \boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}\,.$$

Отсюда в силу неравенств (57), (58) следует условие (73).

Таким образом, уравнения (72) представляют собой систему из n независимых первых интегралов, из которой с помощью квадратур находится общее решение для обобщенных координат: $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$. После постановки этого решения в (57) находится общее решение для обобщенных импульсов: $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$. *Теорема доказана*.

Отметим, что условие (56) разрешимости первых интегралов (54) относительно импульсов не является принципиальным и использовалось только для упрощения доказательства теоремы.

Доказанную теорему можно трактовать таким образом, что для гамильтоновой системы порядка $2n$ при наличии n первых интегралов в инволюции можно найти еще n дополнительных первых интегралов, которые в совокупности с исходными определяют общее решение системы.

Следствие. *Гамильтонова система второго порядка*, *имеющая первый интеграл*, *интегрируется в квадратурах*.

Рассмотрим теперь вопрос о понижении порядка гамильтоновой системы **в случаях 1°–3°**, когда гамильтониан системы имеет структуру (28), (30) или (32). В каждом из этих случаев учет первых интегралов (29), (31) или (33), соответственно, позволяет записать уравнения для неотделимых переменных $\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}$ в виде замкнутой канонической системы порядка $2(n-m)$ с функцией Гамильтона $\tilde{H} = H(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)$, где $\mathbf{c}$ – произвольные постоянные первых интегралов. Если будет найдено общее решение этой системы

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t)\,,\ \ \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t)\,,$$

то после его подстановки в уравнения движения для отделимых переменных получится «приведенная» замкнутая каноническая система порядка $2m$ с функцией Гамильтона:

1°. $H^* = H(f_1(q_1,p_1),...,f_m(q_m,p_m),\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),t)$,

2°. $H^* = H(f_m(q_1,p_1,...,q_m,p_m),\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),t)$,

3°. $H^* = H(f(q_1,p_1,...,q_m,p_m),\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{c},\tilde{\mathbf{c}},t),t)$.

Из структуры функции H^* видно, что приведенная система имеет те же первые интегралы, что и исходная система. При этом в случаях 1°, 2° система имеет m первых интегралов (29), (31), в каждом из которых фигурирует только одна пара сопряженных переменных:

$$f_k(q_k,p_k,\boldsymbol{\alpha}) = 0;\ k = 1,...,m\,. \qquad (74)$$

Такие первые интегралы образуют, очевидно, систему в инволюции. Поэтому в силу теоремы Лиувилля в указанных случаях приведенная система интегрируется в квадратурах.

Таким образом, в случаях 1°, 2° m первых интегралов (29), (31) позволяют понизить порядок исходной гамильтоновой системы на $2m$ единиц, а при $m = n$ система интегрируется в квадратурах. Аналогичное утверждение имеет место и для случая 3°, если функция f имеет структуру вида (34), поскольку первые интегралы (38) тоже образуют систему в инволюции.

§4. Принцип Гамильтона

4.1. Принцип Гамильтона для лагранжевых систем

Рассмотрим *лагранжеву* систему – систему, уравнения которой определяются одной функцией Лагранжа $L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$ и записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=0\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{q}$ – n-мерный вектор независимых обобщенных координат. Такими уравнениями описываются голономные механические системы, в которых обобщенные силы имеют обычный потенциал $\varPi(\mathbf{q},t)$ или обобщенный потенциал $V(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$. В указанных случаях лагранжиан определяется формулой $L=T-\varPi$ или $L=T-V$ соответственно, где T – кинетическая энергия системы.

Дадим определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Расширенным координатным пространством системы называется $(n+1)$-мерное пространство обобщенных координат $\mathbf{q}$ и времени t. Те кривые $\mathbf{q}(t)$ в этом пространстве, которые соответствуют действительным траекториям движения системы с *заданным* лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$, т.е. являются решениями уравнений (1), будем называть *прямыми путями этой* системы и обозначать через $\mathbf{q}^*(t)$, а все остальные кривые – *окольными* путями для *этой* системы.

Действием по Гамильтону называется следующий функционал:

$$W=\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)dt\,. \qquad (2)$$

Этот функционал ставит в соответствие каждой кривой $\mathbf{q}(t)$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t_0,t_1]$, некоторое число W. Значения этого интеграла зависят как от кривой $\mathbf{q}(t)$, которую можно условно называть аргументом функционала, так и от структуры лагранжиана $L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$.

Обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \delta\mathbf{q}(t)$ произвольную непрерывно дифференцируемую на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функцию, которую будем называть *вариацией кривой* $\mathbf{q}(t)$, и запишем приращение функционала (2), получаемое при переходе от кривой $\mathbf{q}(t)$ к кривой $\mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$:

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} L[(\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), (\mathbf{q} + \boldsymbol{\varepsilon}), t]dt - \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)dt \,. \tag{3}$$

Первой вариацией функционала (2) на кривой $\mathbf{q}(t)$ называется линейная по $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ часть выражения (3) , т.е.

$$\delta W\Big|_{\mathbf{q}(t)} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt \,. \tag{4}$$

Интегрируя первое слагаемое в выражении (4) по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} dt = \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt \,,$$

получаем следующую формулу для вариации действия по Гамильтону:

$$\delta W\Big|_{\mathbf{q}(t)} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt \,. \tag{5}$$

При формулировке принципа Гамильтона в качестве *допустимых* вариаций кривой $\mathbf{q}(t)$ используются всевозможные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_0, t_1]$ функции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = 0 \,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = 0 \,. \tag{6}$$

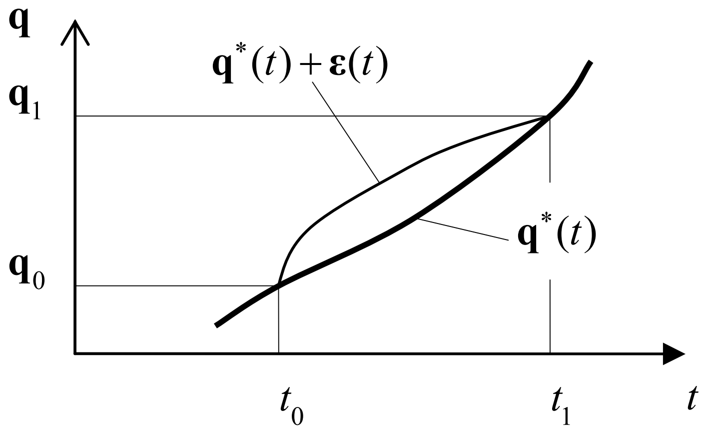
Такие вариации представляют собой всевозможные «деформации» кривой, оставляющие на месте точки $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ и $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$.

Теорема (принцип Гамильтона). *Если кривая* $\mathbf{q}^*(t)$, *соединяющая две точки* $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$ *расширенного координатного пространства*, *является прямым путем системы с лагранжианом* $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, *то при любом допустимом варьировании этой кривой первая вариация функционала* (2) *равна нулю*:

$$\delta W\Big|_{\mathbf{q}^*(t)} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)dt = 0 . \qquad (7)$$

Иначе говоря, *на прямом пути системы действие по Гамильтону принимает стационарное значение*.

Утверждение теоремы следует непосредственно из формулы (5) при учете условий (6) и того, что каждая точка прямого пути удовлетворяет уравнениям Лагранжа (1).



Обратная теорема. *Если на некоторой дважды непрерывно дифференцируемой кривой* $\mathbf{q}(t)$, *соединяющей точки* $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ *и* $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$ *расширенного координатного пространства*, *функционал* (2) *принимает стационарное значение*, *то эта кривая является прямым путем системы с лагранжианом* $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

Для доказательства этой теоремы используется *основная лемма вариационного исчисления,* которая гласит [7]:

Если $\mathbf{f}(x)$ *– непрерывная функция на отрезке* $[a, b]$ *и для любой непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функции* $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ *выполняется равенство*

$$\int_a^b \boldsymbol{\varepsilon}^T(x)\mathbf{f}(x)dx = 0,$$

то $\mathbf{f}(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

По условиям обратной теоремы для *произвольной* функции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющей условиям (6), выполняется равенство

$$\delta W\Big|_{\mathbf{q}(t)} = -\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt = 0. \tag{8}$$

При этом вследствие того, что $\mathbf{q}(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, выражение в скобках под интегралом (8) будет непрерывной функцией времени. Поэтому из равенства (8) в силу *основной леммы* следует, что кривая $\mathbf{q}(t)$ должна удовлетворять уравнениям (1), т.е. является прямым путем системы с лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

В вариационном исчислении уравнения (1) носят название *уравнений Эйлера*, а кривые, определяемые этими уравнениями, называются *экстремалями функционала* (2). При этом задача нахождения экстремалей, соединяющих две заданные точки расширенного координатного пространства, называется *задачей с закрепленными концами*. Именно в этой задаче в качестве *допустимых* вариаций кривых используются функции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (6).

Заметим, что *в классе непрерывно дифференцируемых функций* вариационная задача с закрепленными концами может не иметь решения, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Остановимся вкратце на вопросе о характере экстремума действия по Гамильтону на прямых путях системы. Ответ зависит от наличия или отсутствия на прямом пути *сопряженных кинетических фокусов*.

Две точки A и A^* расширенного координатного пространства называются сопряженными друг к другу *кинетическими фокусами*, если краевая задача определения экстремали, соединяющей эти точки, имеет особенность. В большинстве случаев такая особенность выражается в том, что эти точки соединяются бесконечным числом прямых путей системы.

Установлено, что если на отрезке прямого пути отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке, то действие по Гамильтону на этом пути принимает строгий локальный минимум. В противном случае существует такое варьирование прямого пути с закрепленными граничными точками, при котором приращение функционала действия принимает нулевые или отрицательные значения (речь идет о приращениях функционала, получаемых за счет вариаций высших порядков; первая вариация функционала действия на любом прямом пути равна нулю).

Заметим, что кинетические фокусы, если они есть в системе, располагаются на некотором конечном расстоянии друг от друга. Поэтому если начальная и конечная точки прямого пути выбраны достаточно близко друг к другу, то действие по Гамильтону будет принимать на этом пути локальный минимум. В связи с этим принцип Гамильтона часто называют принципом наименьшего действия.

4.2. Принцип Гамильтона для голономных систем общего вида

Рассмотрим голономную систему общего вида, описываемую уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=\mathbf{Q}\,. \tag{9}$$

Пусть кривая $\mathbf{q}^*(t)$, соединяющая две точки $\{t_0,\mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1,\mathbf{q}_1\}$ расширенного координатного пространства, является прямым путем этой системы. Рассматривая непрерывно дифференцируемые вариации этой кривой $\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\delta\mathbf{q}(t)$, получим для вариации кинетической энергии следующее выражение:

$$\delta T=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}+\boldsymbol{\varepsilon}^T\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\boldsymbol{\varepsilon}^T\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right). \tag{10}$$

Учитывая уравнения Лагранжа (9), будем иметь

$$\delta T + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right). \tag{11}$$

Отсюда, рассматривая *допустимые* вариации $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, т.е. вариации, удовлетворяющие граничным условиям (6), получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0 . \tag{12}$$

Здесь

$$\delta A = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \tag{13}$$

– элементарная работа активных сил на виртуальном перемещении системы, обусловленном вариацией $\delta \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ вектора $\mathbf{q}$ в момент времени t.

Таким образом, для голономных систем общего вида принцип Гамильтона заключается в том, что *при любом допустимом варьировании прямого пути интеграл* (12) *равен нулю*.

Обратное утверждение формулируется следующим образом: *Если при любом допустимом варьировании дважды непрерывно дифференцируемой кривой* $\mathbf{q}(t)$, *соединяющей точки* $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ *и* $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$, *интеграл* (12) *равен нулю*, *то эта кривая является прямым путем системы*.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству обратной теоремы для лагранжевых систем. Используя формулы (10) и (13), получим

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right).$$

При учете того, что допустимые вариации $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ удовлетворяют граничным условиям (6), равенство (12) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right) dt = 0 .$$

Отсюда на основании *основной леммы* получаем, что рассматриваемая кривая удовлетворяет уравнениям (9).

Отметим, что в общем случае равенство (12) не сводится к условию стационарности некоторого функционала, как это имеет место для лагранжевых систем. Только в том случае, когда силы потенциальны или обобщенно потенциальны, элементарная работа $\delta A = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}$ выражается в виде изохронного дифференциала некоторой функции, а равенство (12) принимает вид (7).

4.3. Формула преобразования лагранжиана при замене координат и времени

Используя принцип Гамильтона, исследуем вопрос о преобразованиях уравнений Лагранжа (1) при замене координат и времени.

Уравнения Лагранжа, как известно, ковариантны относительно преобразований координат. Выясним, обладают ли эти уравнения таким же свойством по отношению к преобразованиям координат и времени.

Рассмотрим невырожденное преобразование

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}), \qquad t = t(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}), \tag{14}$$

где $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\tilde{t}$ – новые координаты и новое время. При таком преобразовании кривая $\mathbf{q}(t)$, соединяющая точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$, переходит в кривую $\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t})$, соединяющую точки $\{\tilde{t}_0, \tilde{\mathbf{q}}_0\}$ и $\{\tilde{t}_1, \tilde{\mathbf{q}}_1\}$, а интеграл (2) действия по Гамильтону записывается в новых переменных в виде

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} L\frac{dt}{d\tilde{t}}d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \tilde{L}d\tilde{t}\,, \tag{15}$$

где подынтегральная функция

$$\tilde{L}\left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}\right) = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)\frac{dt}{d\tilde{t}} \tag{16}$$

выражена через новые переменные $d\tilde{\mathbf{q}}/d\tilde{t}$, $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{t}$.

Прямым путям системы $\mathbf{q}^*(t)$ в исходных переменных будут соответствовать в пространстве новых переменных прямые пути

$\widetilde{\mathbf{q}}^*(\widetilde{t})$. При этом, поскольку в исходных переменных прямые пути $\mathbf{q}^*(t)$ соответствуют экстремалям функционала (15), то в новых переменных экстремалями этого же функционала будут прямые пути $\widetilde{\mathbf{q}}^*(\widetilde{t})$. В силу обратной теоремы принципа Гамильтона экстремали функционала (15) в новых переменных описываются уравнениями

$$\frac{d}{d\widetilde{t}}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\widetilde{\mathbf{q}}'} - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\widetilde{\mathbf{q}}} = 0\,; \quad \widetilde{\mathbf{q}}' = \frac{d\widetilde{\mathbf{q}}}{d\widetilde{t}}\,. \tag{17}$$

Отсюда следует, что уравнения Лагранжа (1) ковариантны по отношению к преобразованиям (14), а лагранжиан системы в новых переменных определяется формулой (16).

Чтобы выражение (16) для нового лагранжиана $\widetilde{L}$ записать в новых лагранжевых переменных $\widetilde{\mathbf{q}}', \widetilde{\mathbf{q}}, \widetilde{t}$, нужно выразить $\mathbf{q}$ и t соотношениями (14), а для вычисления $\dot{\mathbf{q}}$ и $dt/d\widetilde{t}$ использовать следующие формулы:

$$\frac{dt}{d\widetilde{t}} = \frac{\partial t}{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}\widetilde{\mathbf{q}}' + \frac{\partial t}{\partial\widetilde{t}}\,, \qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{q}}{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}\widetilde{\mathbf{q}}' + \dfrac{\partial\mathbf{q}}{\partial\widetilde{t}}}{\dfrac{\partial t}{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}\widetilde{\mathbf{q}}' + \dfrac{\partial t}{\partial\widetilde{t}}}\,. \tag{18}$$

4.4. Теорема Эмми Нетер

Нижеследующая теорема устанавливает связь между первыми интегралами (законами сохранения) механических систем и свойством инвариантности их уравнений движения по отношению к преобразованиям координат и времени.

Отметим, что инвариантность уравнений по отношению к преобразованию переменных означает, что уравнения преобразуются так же, как при тождественном преобразовании. В свою очередь инвариантность уравнений движения лагранжевой системы будет иметь место в том случае, когда инвариантен относительно преобразования лагранжиан системы, т.е. когда лагранжиан $\widetilde{L}$ в новых переменных, вычисленный по формуле (16), имеет точно такую же структуру, что и старый лагранжиан L.

Рассматривается однопараметрическое семейство преобразований координат и времени:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \alpha), \qquad \tau = \varphi(\mathbf{q}, t, \alpha). \tag{19}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{q}}$ и τ – новые координаты и новое время, а α – параметр. Предполагается, что преобразование (19) имеет обратное

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tau, \alpha), \quad t = t(\tilde{\mathbf{q}}, \tau, \alpha), \tag{20}$$

а при $\alpha = 0$ оно тождественно, т.е.

$$\tilde{\mathbf{q}}\big|_{\alpha=0} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, 0) = \mathbf{q}, \qquad \tau\big|_{\alpha=0} = \varphi(\mathbf{q}, t, 0) = t. \tag{21}$$

Теорема Эмми Нетер. *Если лагранжиан системы* $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ *инвариантен относительно преобразования* (19), *удовлетворяющего условиям* (20), (21), *то эта система имеет первый интеграл*

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}. \tag{22}$$

Под инвариантностью лагранжиана относительно преобразования (19) подразумевается, что новый лагранжиан $\tilde{L}(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau)$, вычисленный с помощью обратного преобразования (20) по формуле (16):

$$\tilde{L}(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau) = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \frac{dt}{d\tau}, \tag{23}$$

имеет точно такую же структуру, что и старый лагранжиан L, т.е. $\tilde{L}$ не зависит от α и

$$\tilde{L}(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau) = L(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau). \tag{24}$$

Иными словами, при наличии инвариантности новый лагранжиан $\tilde{L}$ получается формальной заменой в функции L старых лагранжевых переменных $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t$ на новые переменные $\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}, \tau$.

Доказательство. Из условий (21) теоремы следует

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right|_{\alpha=0} = \dot{\mathbf{q}}\,, \qquad \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\alpha=0} = 1\,. \tag{25}$$

Отсюда, используя тождество

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}\,, \tag{26}$$

получаем

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\varphi}\right|_{\alpha=0} = \dot{\mathbf{q}}\,. \tag{27}$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{\eta} = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}, \qquad \xi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{28}$$

Учитывая перестановочность операций дифференцирования по α и t, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}\right)\right)_{\alpha=0} = \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt}\,, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right)_{\alpha=0} = \frac{d\xi}{dt}\,. \tag{29}$$

Кроме того, дифференцируя тождество (26) по параметру α, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\varphi}\right)\right)_{\alpha=0} = -\dot{\mathbf{q}}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt}\,. \tag{30}$$

Условие теоремы об инвариантности лагранжиана по отношению к преобразованию (19) можно записать в виде

$$L\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \varphi\right)\frac{d\varphi}{dt} = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)\,. \tag{31}$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от α, то не зависит от α и левая часть. Поэтому, дифференцируя левую часть по параметру α и полагая $\alpha = 0$, получим при учете второго из соотношений (25) следующее равенство:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\varphi}\right) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + L\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 .$$

После подстановки выражений (27)–(30) будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial t}\xi + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\frac{d\xi}{dt} = 0 . \tag{32}$$

С учетом уравнений Лагранжа (1) это равенство преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\eta}\right) + \frac{d}{dt}\left(\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\xi\right) = 0 . \tag{33}$$

Отсюда, учитывая определение обобщенных импульсов и функции Гамильтона

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L ,$$

получаем, что функция (22) является первым интегралом системы. *Теорема доказана*.

Замечание. Для проверки инвариантности лагранжина достаточно убедиться, что полученное с помощью формулы (23) выражение не зависит от α. Действительно, в силу соотношений (25), (27) и условий (21) при $\alpha = 0$ новый лагранжиан (23) будет тождественно совпадать со старым. Поэтому при отсутствии зависимости $\tilde{L}$ от α инвариантность будет иметь место при любых значениях α.

§5. Канонические преобразования

5.1. Локальный критерий каноничности

Для гамильтоновой системы с n степенями свободы уравнения движения, записанные в векторно-матричной форме, имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \ \ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \ \Rightarrow \ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}; \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}$ – $2n$-мерный вектор-столбец фазовых переменных $\mathbf{q},\mathbf{p}$, $H(\mathbf{x},t)$ – гамильтониан, $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица порядка n, $\mathbf{J}$ – матрица порядка $2n$, называемая *симплектической единицей*, обладающая свойствами:

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}\,\mathbf{J}^T = \mathbf{E}_{2n}, \quad \det\mathbf{J} = 1. \tag{3}$$

Уравнения Лагранжа, как известно, ковариантны относительно преобразований обобщенных координат, причем «новая» функция Лагранжа определяется как «старая» функция Лагранжа, выраженная через новые переменные.

Уравнения Гамильтона (1) свойством ковариантности относительно *произвольных преобразований* фазовых переменных не обладают, т.е. гамильтонова система в результате преобразования переменных может оказаться не гамильтоновой.

Определение. *Каноническими называются невырожденные преобразования фазовых переменных*

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x},t); \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

переводящие ***любую*** *гамильтонову систему в гамильтонову систему*. Это означает, что $\forall H(\mathbf{x},t)\ \exists\, \tilde{H}(\mathbf{y},t)$, такая, что канонические уравнения (1) и в новых переменных $\mathbf{y}$ будут иметь каноническую форму

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{y}}. \tag{5}$$

Иными словами, каноническими называются все преобразования, относительно которых ковариантны канонические уравнения Гамильтона.

Канонические преобразования используются для упрощения уравнений движения гамильтоновых систем, в частности, в задачах интегрирования.

При использовании канонических преобразований задача определения конкретного вида уравнений движения в новых переменных сводится к нахождению одной функции – функции Гамильтона в новых переменных. Для произвольных (не канонических) преобразований такого простого алгоритма определения уравнений движения в новых переменных нет.

Отметим, что из приведенного определения непосредственно не следует, по каким формулам вычисляется «новый» гамильтониан $\widetilde{H}$. Ответ на этот вопрос будет дан после того, как будут получены условия каноничности преобразования.

Для вывода условий каноничности преобразования будет использоваться вспомогательная теорема. В этой теореме $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ – $2n$-мерная векторная функция фазовых переменных $\mathbf{x}$ и времени t, а $\mathbf{F}$ – кососимметрическая матрица:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}; \quad F_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Теорема 5.1. *Для того чтобы при* ***любой*** *скалярной функции* $H(\mathbf{x},t)$ *существовала скалярная функция* $\Phi(\mathbf{x},t)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\mathbf{F}\,\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось матричное тождество

$$\mathbf{F} = c\mathbf{J}\,, \tag{8}$$

где c *– постоянная.*

Доказательство достаточности. При выполнении тождества (8) уравнение (7) принимает вид

$$-c\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\,,$$

а по теореме 1.1 условие существования функции Φ (условие интегрируемости) при учете перестановочности операций $\partial/\partial\mathbf{x}$ и $\partial/\partial t$ сводится к матричному равенству

$$-c\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0\,,$$

которое при условии (8) выполняется для любых функций H.

Докажем *необходимость* условия (8), рассматривая различные варианты функций H. Сначала возьмем линейные по переменной $\mathbf{x}$ функции $H = \mathbf{x}^T\mathbf{J}^{-1}\mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ – произвольный постоянный вектор. В этом случае будем иметь $\partial H/\partial\mathbf{x} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{b}$, а уравнения (7) примут вид

$$\mathbf{F}\,\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \;\Rightarrow\; \varphi_j = \sum_{s=1}^{2n} F_{js}\, b_s + \partial f_j/\partial t = \partial\Phi/\partial x_j\;;\; j = 1,\ldots,2n\,.$$

Записывая условия интегрируемости для этой системы, получим

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{2n}\left(\frac{\partial F_{js}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_j}\right) b_s + \frac{\partial}{\partial t} F_{jk} = 0\,. \tag{9}$$

В свою очередь из формул (6), определяющих матрицу $\mathbf{F}$, имеем

$$\frac{\partial F_{js}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right).$$

С учетом этих формул уравнения (9) переписываются в виде

$$\sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_s} b_s + \frac{\partial}{\partial t} F_{jk} = 0\,; \quad k, j = 1,...,m\,.$$

Ввиду произвольности выбора коэффициентов b_s отсюда следует

$$\partial F_{jk} \big/ \partial t = 0, \;\; \partial F_{jk} \big/ \partial x_s = 0\,; \quad k, j = 1,...,m\,, \tag{10}$$

т.е. $\mathbf{F}$ – *постоянная* матрица.

В силу постоянства матрицы $\mathbf{F}$ условие интегрируемости для уравнений (7) сводится к матричному равенству

$$\mathbf{C}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathbf{C}^T = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{CH} = (\mathbf{CH})^T\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{H}$ – симметрическая матрица вторых производных функции H, $\mathbf{C} = \mathbf{FJ}$ – постоянная матрица.

Равенство (11) должно выполняться для любых функций H. Записывая его поэлементно

$$(\mathbf{C}\,\mathbf{H})_{jk} = (\mathbf{CH})_{kj} \Rightarrow \sum_{s=1}^{2n} C_{js} H_{sk} = \sum_{s=1}^{2n} C_{ks} H_{sj} \tag{12}$$

и рассматривая функции $H = x_k^2$, получим

$$C_{jk} = 0\,; \quad j \neq k\,. \tag{13}$$

С учетом этих равенств соотношения (12) переписываются в виде

$$C_{jj} H_{jk} = C_{kk} H_{kj}. \tag{14}$$

Отсюда ввиду симметричности матрицы $\mathbf{H}$ ($H_{jk} = H_{kj}$) следует $C_{jj} = C_{kk}$, что в сочетании с (13) дает $\mathbf{C} = \mathbf{FJ} = -c\,\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, c – постоянная. В результате получаем тождество (8): $\mathbf{F} = c\mathbf{J}$. *Теорема доказана.*

Определим условия каноничности преобразования. Обозначим через $\mathbf{M}$ матрицу Якоби преобразования (4):

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{pmatrix} \partial\widetilde{\mathbf{q}} / \partial \mathbf{x}^T \\ \partial\widetilde{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{x}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\widetilde{\mathbf{q}} / \partial \mathbf{q}^T & \partial\widetilde{\mathbf{q}} / \partial \mathbf{p}^T \\ \partial\widetilde{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{q}^T & \partial\widetilde{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}^T \end{pmatrix};\; \det \mathbf{M} \neq 0. \tag{15}$$

Пусть это преобразование переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову систему. Из уравнений (5) и (1) имеем

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{M}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{J}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{y}} .$$

Умножив обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{M}^T\mathbf{J}$, и учитывая формулы связи между производными

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{M}^T\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{y}} , \tag{16}$$

получим уравнение

$$\mathbf{M}^T\mathbf{J}\,\mathbf{M}\,\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{M}^T\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mathbf{x}} . \tag{17}$$

Покажем, что уравнение (17) можно записать в виде (7), если в качестве $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ взять вектор-функцию

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{p}} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \widetilde{q}_s}{\partial \mathbf{x}}\widetilde{p}_s . \tag{18}$$

Для этой функции матрица $\mathbf{F}$ (6) выражается в виде

$$\mathbf{F} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \widetilde{q}_s}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \widetilde{p}_s}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{q}_s}{\partial \mathbf{x}^T} + \left(\frac{\partial^2 \widetilde{q}_s}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial^2 \widetilde{q}_s}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\right)\widetilde{p}_s\right).$$

Отсюда ввиду симметричности матрицы вторых производных от любой скалярной функции имеем

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}^T} . \tag{19}$$

С другой стороны, используя правила умножения блочных матриц, получим для произведения $\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M}$ точно такое же выражение:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}} & \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial \widetilde{\mathbf{p}}/\partial \mathbf{x}^T \\ -\partial \widetilde{\mathbf{q}}/\partial \mathbf{x}^T \end{pmatrix} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}^T} .$$

Таким образом, имеет место тождество

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} . \qquad (20)$$

В свою очередь для второго слагаемого в уравнении (17) получаем выражение

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}} & \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \widetilde{\mathbf{p}} / \partial t \\ - \partial \widetilde{\mathbf{q}} / \partial t \end{pmatrix} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}}{\partial t} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t} ,$$

при учете которого для производной $\partial \mathbf{f} / \partial t$ имеем

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial t \partial \mathbf{x}} \widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial t \partial \mathbf{x}} \widetilde{\mathbf{p}} .$$

Отсюда ввиду перестановочности операций $\partial / \partial \mathbf{x}$ и $\partial / \partial t$ следует тождество

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\widetilde{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t} \right) . \qquad (21)$$

С учетом тождеств (20), (21) уравнение (17) принимает вид

$$\mathbf{F} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} ; \qquad \Phi = \widetilde{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t} - \widetilde{H} . \qquad (22)$$

По определению канонических преобразований для *любой* функции H должна существовать функция Φ, удовлетворяющая уравнению (22). На основании теоремы 5.1, учитывая тождество (20), приходим к следующей формулировке условий каноничности:

Теорема 5.2 (критерий каноничности). *Для каноничности преобразования* (4) *необходимо и достаточно, чтобы матрица Якоби* (15) *удовлетворяла тождеству*

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = c \mathbf{J} , \qquad (23)$$

где $c \neq 0$ *– постоянная*, называемая *валентностью* преобразования. Условие $c \neq 0$ вытекает из требования о невырожденности преобразования, поскольку из равенства (23) якобиан преобразования определяется формулой

$$(\det \mathbf{M})^2 = c^{2n} . \qquad (24)$$

Матрицы $\mathbf{M}$, удовлетворяющие равенству (23), называются *обобщенно симплектическими* при $c \neq 1$ и просто *симплектическими* при $c = 1$. Каноническое преобразование при $c = 1$ называется *унивалентным*.

Нетрудно убедиться, что преобразование, обратное к каноническому, тоже является каноническим. Умножив равенство (23) слева на матрицу $(\mathbf{M}^T)^{-1}$, а справа на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, получим, учитывая перестановочность операций обращения и транспонирования матриц, следующее равенство:

$$\mathbf{M}^{-1^T}\mathbf{J}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}/c\,. \tag{25}$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}^{-1}$ обратного преобразования удовлетворяет критерию (23), а валентность обратного преобразования равна $1/c$.

Отметим также, что обращением обеих частей равенства (25) критерий каноничности приводится к следующему виду:

$$\mathbf{MJ}\,\mathbf{M}^T = c\mathbf{J}\,. \tag{26}$$

Рассмотрим последовательность двух канонических преобразований $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$. Матрицы Якоби этих преобразований $\mathbf{M}_1 = \partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}^T$ и $\mathbf{M}_2 = \partial\mathbf{z}/\partial\mathbf{y}^T$ удовлетворяют критерию (23), а матрица Якоби результирующего преобразования определяется выражением

$$\mathbf{M} = \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{x}^T} = \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{y}^T}\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}^T} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\,.$$

Подставляя это выражение в критерий (23), получим

$$\mathbf{M}^T\mathbf{J}\,\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^T\mathbf{M}_2^T\mathbf{J}\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{M}_1 = c_2\mathbf{M}_1^T\mathbf{J}\;\mathbf{M}_1 = c_2c_1\mathbf{J}\,.$$

Отсюда следует, что результирующее преобразование является каноническим, а его валентность равна произведению валентностей последовательных преобразований.

Запись условий каноничности через скобки Лагранжа. Представляя матрицу $\mathbf{M}$ в блочном виде (15) и используя правила перемножения блочных матриц, получим из критерия (23) следующее матричное равенство:

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J}\,\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} [\mathbf{q},\mathbf{q}^T] & [\mathbf{q},\mathbf{p}^T] \\ [\mathbf{p},\mathbf{q}^T] & [\mathbf{p},\mathbf{p}^T] \end{Vmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Здесь

$$[\mathbf{q},\mathbf{q}^T] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{q}^T} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}, \qquad [\mathbf{q},\mathbf{p}^T] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}^T} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T},$$

$$[\mathbf{p},\mathbf{p}^T] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}^T} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T}, \qquad [\mathbf{p},\mathbf{q}^T] = -[\mathbf{q},\mathbf{p}^T]$$

– матрицы размера $n\times n$, называемые обобщенными *скобками Лагранжа* для вектор-функций $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$, задающих преобразование. Через элементы этих матриц (обычные скобки Лагранжа) критерий каноничности (23) записываются в виде

$$[\mathbf{q},\mathbf{q}^T]_{ij} = [q_i, q_j] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial q_j} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_j}\right) = 0,$$

$$[\mathbf{q},\mathbf{p}^T]_{ij} = [q_i, p_j] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_j}\right) = c\,\delta_{ij},$$

$$[\mathbf{p},\mathbf{p}^T]_{ij} = [p_i, p_j] = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_j}\right) = 0.$$

Здесь δ_{ij} – символы Кронекера.

Запись условий каноничности через скобки Пуассона. Критерий каноничности, записанный в форме (26), выражается через функции $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$, задающие преобразование, следующим матричным равенством:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{J}\,\mathbf{M}^T = \begin{Vmatrix} (\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{q}}^T) & (\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}^T) \\ (\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{q}}^T) & (\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{p}}^T) \end{Vmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Здесь

$$(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{q}}^T)=\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{q}},\quad (\widetilde{\mathbf{p}},\widetilde{\mathbf{p}}^T)=\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{q}},$$

$$(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}}^T)=\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\mathbf{q}},\quad (\widetilde{\mathbf{p}},\widetilde{\mathbf{q}}^T)=-(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}}^T)$$

– матрицы размера $n\times n$, называемые обобщенными *скобками Пуассона* для вектор-функций $\widetilde{\mathbf{q}}$ и $\widetilde{\mathbf{p}}$. Через элементы этих матриц (обычные скобки Пуассона) условия каноничности (28) записываются в виде

$$(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{q}}^T)_{jk}=(\widetilde{q}_j,\widetilde{q}_k)=\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{q}_k}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{q}_k}{\partial\mathbf{q}}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial q_s}\frac{\partial\widetilde{q}_k}{\partial p_s}-\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial p_s}\frac{\partial\widetilde{q}_k}{\partial q_s}\right)=0,$$

$$(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}}^T)_{jk}=(\widetilde{q}_j,\widetilde{p}_k)=\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial\mathbf{q}}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial q_s}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial p_s}-\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial p_s}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial q_s}\right)=c\delta_{jk},$$

$$(\widetilde{\mathbf{p}},\widetilde{\mathbf{p}}^T)_{jk}=(\widetilde{p}_j,\widetilde{p}_k)=\frac{\partial\widetilde{p}_j}{\partial\mathbf{q}^T}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial\widetilde{p}_j}{\partial\mathbf{p}^T}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial\mathbf{q}}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\widetilde{p}_j}{\partial q_s}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial p_s}-\frac{\partial\widetilde{p}_j}{\partial p_s}\frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial q_s}\right)=0.$$

Критерий каноничности в форме (23) или (26) задает ограничение на матрицу Якоби преобразования (4) в каждой точке фазового пространства и поэтому носит название *локального* критерия каноничности. С помощью этого критерия можно проверить на каноничность любое заданное в явной форме преобразование. Для решения задач, связанных с построением канонических преобразований, используются критерии каноничности, записанные в терминах производящих функций.

5.2. Критерий каноничности в терминах производящих функций

Теорема 5.3 (критерий каноничности). *Для каноничности преобразования* (4) *необходимо и достаточно существование функции* $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *и постоянной* $c\neq 0$, *таких, что*

$$\widetilde{\mathbf{p}}^T \delta\widetilde{\mathbf{q}} - c\,\mathbf{p}^T d\mathbf{q} = -\delta\, F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,. \qquad (29)$$

Здесь и далее символом δ обозначаются *изохронные* дифференциалы функций (дифференциалы, вычисленные при «замороженном» времени). Полные дифференциалы функций обозначаются символом d . Для независимых переменных операции δ и d совпадают. В критерии (29)

$$\delta\widetilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{x}^T}d\mathbf{x} = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}d\mathbf{q} + \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T}d\mathbf{p} = d\widetilde{\mathbf{q}} - \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}}{\partial t}dt\,, \qquad (30)$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}^T}d\mathbf{x} = \frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}^T}d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial\mathbf{p}^T}d\mathbf{p} = dF - \frac{\partial F}{\partial t}dt\,. \qquad (31)$$

Доказательство. Критерий каноничности (23) при учете тождества (20) записывается в виде

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T} - \frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}} = c\mathbf{J}\,; \quad \mathbf{f} = \frac{\partial\widetilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{p}}\,, \quad c \neq 0\,. \qquad (32)$$

Обозначим через $\boldsymbol{\psi}$ $2n$ -мерный вектор:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Тогда при учете равенства

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}^T} - \frac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{J} \qquad (34)$$

тождество (32) переписывается в виде

$$\frac{\partial(\mathbf{f} - c\boldsymbol{\psi})}{\partial\mathbf{x}^T} - \frac{\partial(\mathbf{f} - c\boldsymbol{\psi})^T}{\partial\mathbf{x}} = 0\,. \qquad (35)$$

Полученное равенство означает симметричность матрицы $\partial(\mathbf{f} - c\boldsymbol{\psi})/\partial\mathbf{x}^T$ и по теореме 1.1 является критерием существования скалярной функции $F(\mathbf{x},t)$, такой, что

$$\mathbf{f} - c\boldsymbol{\psi} = -\partial F/\partial\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{f} - c\boldsymbol{\psi})^T d\mathbf{x} = -\delta F\,. \qquad (36)$$

После подстановки в левую часть этого равенства выражений (32), (33), получаем равенство (29). *Теорема доказана*.

Функция F, фигурирующая в критерии (29), называется *производящей функцией* канонического преобразования. Она определяется с точностью до аддитивной функции времени. При этом если преобразование не зависит от времени, то и функция F не будет зависеть от времени.

Дифференциальное равенство (29) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}} - c\mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \tag{37}$$

которая в подробной записи выглядит следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{n} \tilde{p}_s \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial q_k} - cp_k = -\frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad \sum_{s=1}^{n} \tilde{p}_s \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial p_k} = -\frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad k = 1,\ldots,n. \tag{37*}$$

Условия существования функции F, удовлетворяющей уравнениям (37), определяются теоремой 1.1. Нетрудно проверить, что эти условия описываются через скобки Лагранжа теми же тождествами (27), что и критерий (23).

Формула преобразования гамильтониана. Формулу для вычисления гамильтониана $\tilde{H}$ в новых переменных $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ можно получить из уравнения (22). При учете тождества (20) и вытекающего из (36) равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

уравнение (22) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(cH + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\tilde{H} - \tilde{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right).$$

Отсюда с точностью до аддитивной функции, зависящей только от времени, функция $\tilde{H}$ определяется формулой

$$\tilde{H} = cH + \tilde{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{38}$$

Для вычисления функции $\widetilde{H}(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}},t)$ по формуле (38) нужно выразить «старые» переменные $\mathbf{q},\mathbf{p}$ через «новые» переменные $\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}}$ по формулам обратного преобразования. При этом необходимо знать валентность c и производящую функцию F (если последняя зависит от времени). Для стационарных (не зависящих от времени) преобразований формула (38) принимает упрощенный вид $\tilde{H} = cH$, и для вычисления функции $\widetilde{H}(\widetilde{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{p}},t)$ знание производящей функции не требуется.

Основное тождество. Учитывая, что полные дифференциалы функций выражаются через изохронные дифференциалы формулами (30), (31), равенства (29) и (38) можно записать одним соотношением, называемым *основным тождеством*:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^T d\widetilde{\mathbf{q}} - \widetilde{H}dt - c(\mathbf{p}^T d\mathbf{q} - Hdt) = -dF\,; \quad c \neq 0\,. \tag{39}$$

Тождество (39) включает собственно критерий каноничности (29) и формулу (38) преобразования гамильтониана.

Важное свойство основного тождества (39) состоит в том, что оно инвариантно относительно выбора независимых переменных. При его использовании для исследования каноничности преобразования в качестве независимых переменных можно выбрать не только переменные $\{\mathbf{q},\mathbf{p}\}$, но и другие наборы из $2n$-переменных, например, $\{\mathbf{q},\widetilde{\mathbf{q}}\}$, $\{\mathbf{q},\widetilde{\mathbf{p}}\}$, $\{\mathbf{p},\widetilde{\mathbf{p}}\}$.

Примеры канонических преобразований. Из критерия (29) следует, что тождественное преобразование

$$\tilde{q}_k = q_k\,,\ \ \tilde{p}_k = p_k\,; \qquad k = 1,\ldots,n \tag{40}$$

является унивалентным ($c = 1$) каноническим преобразованием с производящей функцией $F = 0$.

Преобразование

$$\begin{aligned} &\widetilde{q}_j = p_j\,,\ \ \widetilde{p}_j = -q_j\,; \quad j = 1,\ldots,m \\ &\widetilde{q}_k = q_k\,,\ \ \widetilde{p}_k = p_k\,; \qquad k = m+1,\ldots,n \end{aligned} \tag{41}$$

также является унивалентным каноническим преобразованием с производящей функцией $F = \sum_{j=1}^{m} q_j p_j$. *С помощью этого преобразования можно поменять ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы для любой пары сопряженных переменных* q_j, p_j.

Рассмотрим линейное преобразование

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Aq} + \mathbf{Bp}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Cq} + \mathbf{Dp}, \tag{42}$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ – постоянные матрицы размера $n \times n$. Матрица Якоби этого преобразования определяется выражением

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{Vmatrix},$$

а критерий каноничности (23) записывается в виде

$$\begin{Vmatrix} (\mathbf{A}^T\mathbf{C} - \mathbf{C}^T\mathbf{A}) & (\mathbf{A}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}^T\mathbf{B}) \\ (\mathbf{B}^T\mathbf{C} - \mathbf{D}^T\mathbf{A}) & (\mathbf{B}^T\mathbf{D} - \mathbf{D}^T\mathbf{B}) \end{Vmatrix} = c \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда получаем условия каноничности преобразования (42):

$$\mathbf{A}^T\mathbf{C} - \mathbf{C}^T\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B}^T\mathbf{D} - \mathbf{D}^T\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}^T\mathbf{B} = c\mathbf{E}_n; \quad c \neq 0. \tag{43}$$

Производящая функция преобразования (42) определяется из уравнений (37), которые для рассматриваемого примера принимают вид

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Cq} + (\mathbf{A}^T\mathbf{D} - c\mathbf{E}_n)\mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{B}^T\mathbf{Cq} + \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}.$$

Отсюда, учитывая последнее из равенств (43), находим

$$-F = \mathbf{q}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Cq}/2 + \mathbf{p}^T\mathbf{B}^T\mathbf{Dp}/2 + \mathbf{q}^T\mathbf{C}^T\mathbf{Bp}.$$

Преобразование растяжения $\tilde{\mathbf{q}} = \alpha\,\mathbf{q}$, $\tilde{\mathbf{p}} = \beta\,\mathbf{p}$ является каноническим с валентностью $c = \alpha\beta$ и производящей функцией $F = 0$. При таком преобразовании функция Гамильтона в новых переменных выражается через функцию $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ формулой $\widetilde{H} = \alpha\beta\, H(\widetilde{\mathbf{q}}/\alpha\,,\, \widetilde{\mathbf{p}}/\beta\,,\, t)$.

Замечание. Произвольное каноническое преобразование можно представить в виде комбинации унивалентного преобразования и преобразования растяжения. Ввиду того, что преобразование растяжения принципиально не изменяет структуру функции Гамильтона, для целей упрощения уравнений движения используются унивалентные канонические преобразования.

Важный пример канонического преобразования дает нижеследующая теорема.

Теорема 5.4. *Фазовый поток любой гамильтоновой системы* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0\,, t)$ *представляет собой унивалентное каноническое преобразование начальных значений фазовых переменных* $\mathbf{x}_0$ *в текущие значения* $\mathbf{x}$.

Доказательство. Положим $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. В момент времени t_0 преобразование тождественное и матрица Якоби $\mathbf{M}_0 = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0^T = \mathbf{E}_{2n}$ удовлетворяет критерию (22) при $c = 1$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что матрица $\mathbf{F} = \mathbf{M}^T\mathbf{J}\,\mathbf{M}$ не меняется с течением времени.

Вычислим производную $\dot{\mathbf{F}}$ в силу канонических уравнений Гамильтона. Предварительно заметим, что в рассматриваемом случае полные производные по времени от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{M}$ определяются через частные производные следующими выражениями:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}\,, \qquad \dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}_0^T}\Big).$$

Поэтому, используя перестановочность операций вычисления частных производных по $\mathbf{x}_0$ и t, получим соотношение

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}_0^T}\Big) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0^T}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}\Big) = \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{x}_0^T}\,,$$

с учетом которого матрица $\dot{\mathbf{F}}$ запишется в виде

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^T}{\partial \mathbf{x}_0}\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^T} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}_0}\mathbf{J}\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{J}^T\right)\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^T} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}_0}\mathbf{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0^T}\left(\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right).$$

На основании формул для производных от сложных функций имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T}\right) = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}_0}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T}, \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0^T}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^T}.$$

С учетом этих равенств получим

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\right)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0^T} \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что термин *производящая функция* не совсем точно характеризует функцию $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, фигурирующую в критерии (29), так как заданием этой функции и валентности $c \neq 0$ преобразование однозначно не определяется. К примеру, разные преобразования растяжения

$$\tilde{q}_k = q_k\,\alpha_k,\ \tilde{p}_k = p_k/\alpha_k;\ k = 1,\ldots,n$$

характеризуются одной и той же функцией $F = 0$ и валентностью $c = 1$. Отмеченное обстоятельство не позволяет использовать критерий в форме (29) для построения канонических преобразований. Критерий, позволяющий конструктивно строить канонические преобразования, удается получить при использовании *свободных* канонических преобразований.

Свободные канонические преобразования. *Преобразование*

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \tag{44}$$

называется свободным, если в нем в качестве независимых переменных можно выбрать переменные $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}}$, т.е. формулы преобразования можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t). \tag{45}$$

Преобразование (44) будет свободным, если

$$\det\left(\partial\tilde{\mathbf{q}}/\partial\mathbf{p}^T\right)\neq 0\,. \tag{46}$$

В этом и только в этом случае можно выразить $\mathbf{p}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ из первой группы уравнений (44), а затем из второй группы уравнений (44) найти $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$.

Отметим, что *тождественное преобразование не является свободным*.

Для свободных преобразований основное тождество (39) записывается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}}^T(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)\,d\tilde{\mathbf{q}}-c\,\mathbf{p}^T(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)\,d\mathbf{q}-(\tilde{H}-c\,H)\,dt=-dS(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t), \tag{47}$$

где $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ есть функция F, выраженная через переменные $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t$, называемая *производящей функцией свободного преобразования*.

Приравнивая в обеих частях равенства (47) коэффициенты при независимых вариациях $d\tilde{\mathbf{q}},d\mathbf{q}$, получаем такую формулировку критерия каноничности для *свободных* преобразований (критерий в $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}}$-описании):

Теорема 5.5. *Для каноничности свободного преобразования необходимо и достаточно существование производящей функции* $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ *и постоянной* $c\neq 0$, *таких, что*

$$\tilde{\mathbf{p}}=-\frac{\partial S}{\partial\tilde{\mathbf{q}}},\quad c\,\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}}\,. \tag{48}$$

В свою очередь приравнивая в обеих частях равенства (47) коэффициенты при dt, получаем *формулу преобразования гамильтониана*:

$$\tilde{H}=c\,H+\partial S/\partial t\,. \tag{49}$$

Для свободных преобразований проверка условий каноничности сводится к проверке тождеств

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}-\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial\tilde{\mathbf{q}}}=0\,,\ \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{q}^T}-\frac{\partial\mathbf{p}^T}{\partial\mathbf{q}}=0\,,\ \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{q}^T}+c\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}=0\,;\ c\neq 0. \tag{50}$$

Термин *производящая функция* адекватно характеризует функцию $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$. Если заданы $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ и $c \neq 0$, то уравнениями (48) однозначно определяются формулы преобразования в виде (45). Для того чтобы эти формулы приводились к виду (44), должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}\, \partial \tilde{\mathbf{q}}^T}\right) \neq 0. \tag{51}$$

Это условие гарантирует возможность выразить из второй группы уравнений (48) переменные $\tilde{\mathbf{q}}$ через $\mathbf{q},\mathbf{p},t$, а затем из первой группы уравнений (48) найти зависимость $\tilde{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{q},\mathbf{p},t$.

При условии (51) однозначно определяются и формулы обратного преобразования. При этом зависимость $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)$ находится из первой группы уравнений (48), а затем из второй группы определяется $\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)$.

Таким образом, все множество *свободных* канонических преобразований можно получить на основе формул (48), рассматривая всевозможные функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$, удовлетворяющие условию (51), и постоянные $c \neq 0$.

5.3. Уравнение Гамильтона–Якоби

В этом разделе излагается метод Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона. Идея метода основывается на изложенных выше свойствах свободных канонических преобразований.

Пусть задана гамильтонова система с гамильтонианом $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. Ставится задача: найти такое свободное унивалентное каноническое преобразование, в результате которого получится система с «новым» гамильтонианом $\tilde{H} = 0$. Тогда в новых переменных уравнения Гамильтона будут иметь простейший вид $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$, $\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0$ с очевидным общим решением:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\beta}, \tag{52}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – n-мерные векторы *произвольных* постоянных, а закон движения системы в исходных переменных $\mathbf{q},\mathbf{p}$ будет определен по формулам обратного преобразования.

Задача поиска указанного выше преобразования сводится к нахождению его производящей функции, которая вследствие (52) превращается в функцию $S = S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ и для которой условие (51) принимает вид

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\mathbf{q}\,\partial\boldsymbol{\alpha}^T}\right) \neq 0\,. \tag{53}$$

В свою очередь уравнение, из которого находится функция S, получается из формулы (49), если положить $\widetilde{H} = 0$, $c = 1$, а обобщенные импульсы в гамильтониане $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ заменить частными производными функции S согласно формулам (48): $\mathbf{p} = \partial S/\partial\mathbf{q}$. В итоге получается следующее уравнение в частных производных, называемое уравнением *Гамильтона–Якоби*:

$$H(\mathbf{q},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}},t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{54}$$

Определение. *Полным интегралом* уравнения Гамильтона–Якоби (54) называется его решение $S = S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$, удовлетворяющее условию (53) и зависящее от n произвольных постоянных $\boldsymbol{\alpha}$.

Теорема Якоби. *По полному интегралу* $S = S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ *уравнения Гамильтона–Якоби* (54) *общее решение гамильтоновой системы находится из системы уравнений*

$$-\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial S}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)\,, \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)\,, \tag{55}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ – n*-мерный вектор произвольных постоянных*.

Действительно, уравнения (55) следуют из соотношений (48), (52) и задают в неявной форме закон движения системы в переменных $\mathbf{q},\mathbf{p}$. Но по теореме о неявных функциях при выполнении условия

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T \partial \boldsymbol{\alpha}}\right) \neq 0\,,$$

которое, очевидно, совпадает с условием (53), из первой группы уравнений (55) находится в явном виде решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$, а после его подстановки во вторую группу уравнений (55) находится решение $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$.

Таким образом, если известен полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то процедура нахождения общего решения гамильтоновой системы сводится к вычислению производных $\partial S/\partial \mathbf{q}$ и $\partial S/\partial \boldsymbol{\alpha}$ в уравнениях (55) и обращению функций.

Уравнения (55) при выполнении условия (53) можно трактовать как $2n$ независимых первых интегралов гамильтоновой системы, наличие которых и позволяет найти общее решение в явном виде.

Постоянные $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ в общем решении однозначно определяются через начальные условия $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$, поскольку в силу (53) из второй группы уравнений (55) можно найти в явном виде $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, а после подстановки в первую группу уравнений (55) определяется $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

По известному полному интегралу $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ однозначно определяется и гамильтониан системы. Он находится из уравнения (54) по формуле

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} = \varphi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)\,, \tag{56}$$

в которую нужно подставить найденные из второй группы уравнений (55) функции $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, чтобы получить функцию $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

Таким образом, полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби содержит всю информацию о гамильтоновой системе.

В изложенном выше методе Якоби задача интегрирования канонических уравнений Гамильтона, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения, сводится к поиску полного интеграла уравнения в частных производных (54).

Для гамильтоновых систем произвольного вида общих методов построения точных решений, равно как и методов нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби, нет. Здесь мы рассмотрим так называемый *метод разделения переменных*, с помощью которого удается найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в отдельных случаях, характеризующихся специальной структурой функции Гамильтона.

Суть *метода разделения переменных* состоит в том, что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби ищется в виде

$$S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) = S_0(\boldsymbol{\alpha},t) + \sum_{k=1}^{n} S_k(q_k,\boldsymbol{\alpha}), \tag{57}$$

т.е. в искомом решении должны быть разделены переменные $t, q_1, ..., q_n$ так, что t входит только в S_0, а q_k только в S_k. Зависимость функций S_0 и S_k от $\boldsymbol{\alpha}$ при этом заранее не регламентируется. Этим, собственно, идейная часть «метода» и ограничивается. Далее рассматриваются *случаи разделения переменных*, т.е. приводятся примеры функций Гамильтона, структура которых позволяет найти полный интеграл в виде (57), и излагается процедура поиска этого решения. Все эти случаи характеризуются наличием у гамильтоновой системы первых интегралов определенного вида.

Случаи разделения переменных

1°. Гамильтониан с отделимыми парами сопряженных переменных:

$$H = H[f_1(q_1,p_1), f_2(q_2,p_2), ..., f_n(q_n,p_n), t]. \tag{58}$$

2°. Система вложенных функций («матрешка»):

$$H = H[f_n,t];\; f_k = f_k(f_{k-1},q_k,p_k);\; k = 2,...,n,\; f_1 = f_1(q_1,p_1). \tag{59}$$

3°. $$H = H(f,t);\quad f = \frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(q_k,p_k)}{\sum_{k=1}^{n}\psi_k(q_k,p_k)}. \tag{60}$$

В каждом из перечисленных случаев система имеет n независимых первых интегралов (см. раздел «Уравнения Гамильтона»). В случае 1° первые интегралы выражаются функциями

$$f_k(q_k, p_k) = \alpha_k; \; k = 1,...,n. \tag{61}$$

В случае 2° первые интегралы имеют вид

$$f_1(q_1, p_1) = \alpha_1, \;\; f_k(q_k, p_k, \alpha_{k-1}) = \alpha_k; \; k = 2,...,n. \tag{62}$$

В случае 3° первые интегралы записываются в виде

$$\begin{gathered} f_k = \varphi_k(q_k, p_k) - \alpha_n \psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k; \; k = 1,...,n-1, \\ f_n = \varphi_n(q_n, p_n) - \alpha_n \psi_n(q_n, p_n) = -\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k, \end{gathered} \tag{63}$$

а функция $f = \alpha_n$ является зависимым от (63) первым интегралом.

Рассматриваемые три случая характеризуются общим свойством: *система имеет* n *независимых первых интегралов, в каждом из которых фигурирует только одна пара сопряженных переменных*:

$$f_k(q_k, p_k, \boldsymbol{\alpha}) = 0; \; k = 1,...,n, \tag{64}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – n-мерный вектор произвольных постоянных. Это общее свойство позволяет изложить процедуру нахождения полного интеграла методом разделения переменных для всех трех случаев единообразно.

Предполагаем, что каждый из первых интегралов (64) разрешим относительно импульсов, т.е. уравнения (64) можно переписать в виде

$$p_k = \psi_k(q_k, \boldsymbol{\alpha}); \; k = 1,...,n \tag{65}$$

Тогда, выражая обобщенные импульсы по формулам (55), получим для слагаемых S_k полного интеграла (57) следующие уравнения:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k}{\partial q_k} = \psi_k(q_k, \boldsymbol{\alpha}); \; k = 1,...,n \tag{66}$$

Отсюда функции S_k находятся с помощью формул

$$S_k = \int \psi_k(q_k, \boldsymbol{\alpha}) dq_k; \quad k = 1,...,n \tag{67}$$

Функция S_0 находится непосредственно из уравнения Гамильтона–Якоби с учетом того, что $\partial S / \partial t = \partial S_0 / \partial t$, а гамильтониан в каждом случае выражается через постоянные $\boldsymbol{\alpha}$ и время t. Для случая 1° получим

$$H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, t) + \partial S_0 / \partial t = 0 .$$

Отсюда находим

$$S_0 = -\int H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, t) dt . \qquad (68)$$

Для случаев 2° и 3° будем иметь

$$H(\alpha_n, t) + \partial S_0 / \partial t = 0 . \quad \Rightarrow \quad S_0 = -\int H(\alpha_n, t) dt . \qquad (69)$$

Покажем, что полученное решение действительно является полным интегралом, т.е. удовлетворяет условию (53).

Обозначим через $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\psi}$ вектор-функции, составленные из скалярных функций f_k и ψ_k, фигурирующих в уравнениях (64) и (65). Тогда эти уравнения запишутся в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 . \qquad (70)$$

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \partial S / \partial \mathbf{q} . \qquad (71)$$

Ввиду того, что значения постоянных $\boldsymbol{\alpha}$ однозначно определяются значениями $\mathbf{q}, \mathbf{p}$, уравнения (70) разрешимы относительно $\boldsymbol{\alpha}$, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\alpha}^T) \neq 0 . \qquad (72)$$

В свою очередь, условие разрешимости уравнений (70) относительно импульсов описывается неравенством

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0 . \qquad (73)$$

Учитывая, что подстановка выражений (71) в уравнения (70) приводит к тождеству

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \equiv 0 ,$$

и дифференцируя это тождество по $\boldsymbol{\alpha}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T \partial \mathbf{q}} .$$

Из этого матричного соотношения в силу неравенств (72) и (73) следует неравенство (53).

Замечание. В изложенной выше процедуре построения полного интеграла предполагалось, что все первые интегралы (64) разрешимы относительно импульсов. Это условие не является принципиальным. Если, например, первые m уравнений (64) неразрешимы относительно импульсов p_j, то они разрешимы относительно координат q_j. Поэтому с помощью унивалентного канонического преобразования (41) система приводится к виду, в котором все первые интегралы (64) будут разрешимы относительно импульсов.

В заключение докажем теорему Лиувилля об интегрируемых системах с позиций уравнения Гамильтона–Якоби:

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \qquad (74)$$

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система порядка $2n$ имеет n независимых первых интегралов в инволюции, то она интегрируется методом Якоби.*

Доказательство. Запишем уравнения, определяющие указанные в теореме первые интегралы:

$$f_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \boldsymbol{\alpha}) = 0 ; \quad k = 1, ..., n,$$

в векторном виде:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \boldsymbol{\alpha}) = 0 . \qquad (75)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – n-мерный вектор произвольных постоянных. Значения этих постоянных однозначно определяются значениями $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$. Поэтому уравнения (75) разрешимы относительно $\boldsymbol{\alpha}$, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\alpha}^T) \neq 0 . \qquad (76)$$

Условие инволюции первых интегралов (все скобки Пуассона (f_j, f_k) тождественно равны нулю) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0\,. \tag{77}$$

Вследствие независимости первых интегралов система (75) разрешима относительно некоторой группы из n переменных. Имея в виду, что преобразованием вида (41) можно поменять ролями координаты и импульсы любой пары сопряженных переменных, без ущерба для общности можно считать, что система (75) разрешима относительно импульсов, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0\,. \tag{78}$$

Выражая из уравнений (75) импульсы

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) \tag{79}$$

и учитывая, что $\partial S / \partial \mathbf{q} = \mathbf{p}$, получим следующую систему уравнений, эквивалентную уравнению (74):

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \psi_{n+1} = -H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{80}$$

Здесь $H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ – функция, полученная из функции Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ после подстановки вместо импульсов их выражений (79).

Покажем, что для системы (80) выполнены *условия интегрируемости*, т.е. существует решение $S(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$. Дифференцируя тождество

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}), t, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{81}$$

по переменной $\mathbf{q}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\,.$$

Подставляя это выражение в условие инволюции (77), будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}-\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\right)\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}=0.$$

Отсюда после сокращения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{p}^T$ следует

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}-\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}=0\,. \tag{82}$$

По условию теоремы функции (79) удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Поэтому имеем

$$\dot{\mathbf{p}}=\dot{\boldsymbol{\psi}}=\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{q}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,.$$

Исключая отсюда производную $\partial H/\partial \mathbf{q}$ с помощью соотношения

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}+\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

и учитывая (82), приходим к следующему равенству:

$$-\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}}=\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \mathbf{q}}=\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\,. \tag{83}$$

Из равенств (82) и (83) следует, что $(n+1)$-мерная матрица

$$\begin{pmatrix} \partial \boldsymbol{\psi}/\partial \mathbf{q}^T & \partial \boldsymbol{\psi}/\partial t \\ \partial \psi_{n+1}/\partial \mathbf{q}^T & \partial \psi_{n+1}/\partial \mathbf{q}^T \end{pmatrix}$$

является симметрической. Поэтому для системы (80) выполнены условия интегрируемости, а ее решение $S(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha})$ определяется с точностью до несущественного слагаемого $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ следующей формулой:

$$S(\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha})=\int_0^1[\mathbf{q}^T\boldsymbol{\psi}(\theta\mathbf{q},t,\boldsymbol{\alpha})-t\,H^*(\mathbf{q},\theta t,\boldsymbol{\alpha})]d\theta\,. \tag{84}$$

Покажем, что полученное решение будет полным интегралом. Дифференцируя тождество (81) по $\boldsymbol{\alpha}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T}\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T \partial \mathbf{q}} .$$

Отсюда в силу неравенств (76), (78) следует

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T \partial \mathbf{q}}\right) \neq 0 .$$

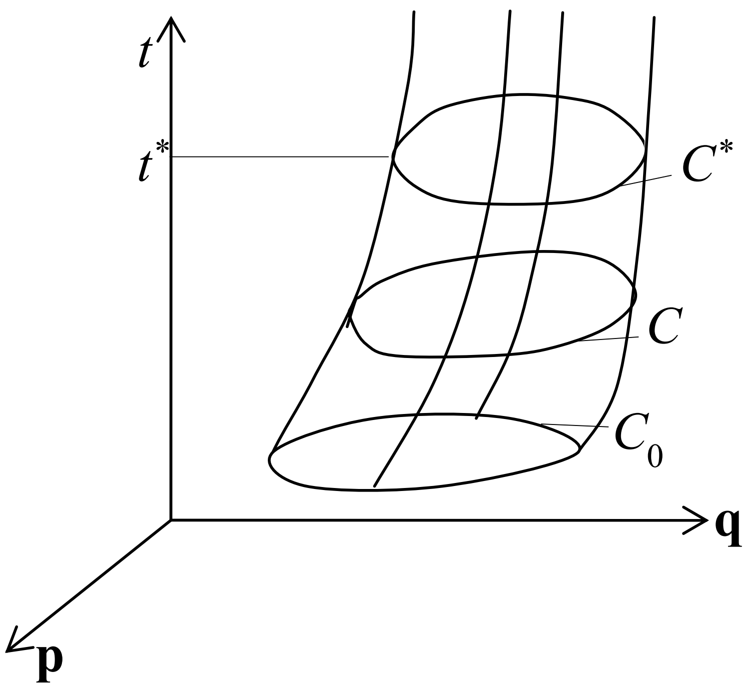
Теорема доказана.

§6. Интегральные инварианты гамильтоновых систем

Рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы – фазовое пространство переменных $\mathbf{q},\mathbf{p}$, дополненное осью времени t. В этом пространстве выберем произвольный замкнутый контур C_0 – одномерное множество точек, описывающееся параметрическими формулами

$$\begin{gathered}\mathbf{q}_0=\mathbf{q}_0(\alpha), \quad \mathbf{p}_0=\mathbf{p}_0(\alpha), \quad t_0=t_0(\alpha); \quad \alpha\in[0,1], \\ \mathbf{q}_0(0)=\mathbf{q}_0(1), \quad \mathbf{p}_0(0)=\mathbf{p}_0(1), \quad t_0(0)=t_0(1),\end{gathered} \tag{1}$$

где функции $\mathbf{q}_0(\alpha), \mathbf{p}_0(\alpha), t_0(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по параметру α.



Для гамильтоновой системы с заданным гамильтонианом $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ каждая точка контура C_0 задает начальные условия и определяет однозначно траекторию движения этой системы:

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,t_0,t), \;\; \mathbf{p}=\mathbf{g}(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,t_0,t), \tag{2}$$

т.е. решение канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial \dot{H} / \partial \mathbf{p},$$
$$\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}. \qquad (3)$$

Эти траектории называются *прямыми путями системы*, а множество траекторий, порождаемое контуром C_0, – *трубкой прямых путей системы*.

На трубке прямых путей, порождаемой контуром C_0, можно произвольным образом выбрать другой замкнутый контур C. Точки этого контура будут образами точек контура C_0, т.е. каждая точка контура C определяется решением (2), соответствующим некоторой точке $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0$ контура C_0. Все контуры, охватывающие одну и ту же трубку прямых путей системы, называются *согласованными*.

Условимся далее называть контур, все точки которого характеризуются одним и тем же моментом времени t, *изохронным* и обозначать C^*.

Ниже будет исследоваться поведение контурных интегралов Пуанкаре и Пуанкаре–Картана на трубках прямых путей гамильтоновых систем.

Интеграл Пуанкаре определяется выражением

$$I_{\text{П}} = \oint_{C^*} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} = \oint_{C^*} \sum_{k=1}^{n} p_i \, \delta q_i \,. \qquad (4)$$

Здесь C^* – изохронный контур.

Интеграл Пуанкаре–Картана имеет вид

$$I_{\text{ПК}} = \oint_{C} (\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} - H \delta t) \,, \qquad (5)$$

где C – произвольный контур в расширенном фазовом пространстве, а H – функция Гамильтона.

Символом δ здесь и далее обозначается приращение функции при «движении» по контуру. Для контура C_0 (1) это приращение можно представить в виде дифференциала функции по параметру α.

Если контур начальных условий C_0 параметризован в соответствии с формулами (1), то в силу соотношений (2) решения системы, образующие трубку прямых путей, будут иметь вид

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}(\alpha, t), \; \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{g}}(\alpha, t); \quad \tilde{\mathbf{f}}(1, t) = \tilde{\mathbf{f}}(0, t), \; \tilde{\mathbf{g}}(1, t) = \tilde{\mathbf{g}}(0, t). \quad (6)$$

Для того чтобы на основе этих решений получить произвольный контур *C*, согласованный с контуром C_0, необходимо для каждого значения α задать значение момента времени t. Эту зависимость зададим функцией

$$t = t(\alpha, \tau); \quad t(0, \tau) = t(1, \tau), \; t(\alpha, 0) = t_0(\alpha), \quad (7)$$

непрерывно дифференцируемой по параметрам α и τ. Рассматривая всевозможные функции вида (7) и задаваясь различными значениями параметра τ, можно получить произвольное смещение контура вдоль трубки прямых путей системы.

Теорема 6.1. *Для гамильтоновых систем интегралы Пуанкаре* (4) *и Пуанкаре–Картана* (5) *сохраняют свои значения при произвольном смещении контура вдоль любой трубки прямых путей системы*. Такое свойство контурных интегралов называется *инвариантностью*.

Заметим, что применительно к интегралу Пуанкаре, который определен только на изохронных контурах, под произвольным смещением контура подразумевается переход от изохронного контура C_0^* к любому другому изохронному контуру C^*, согласованному с C_0^*. Кроме того, интеграл Пуанкаре является, очевидно, частным случаем интеграла Пуанкаре–Картана (на изохронных контурах интегралы (4) и (5) тождественно совпадают). Поэтому для доказательства теоремы 6.1 достаточно установить инвариантность интеграла (5).

Доказательство теоремы. С помощью соотношений (2) интеграл (5) по контуру C выражается через интеграл по контуру C_0 в виде

$$I_{\text{ПК}} = \oint_C (\mathbf{p}^T \delta\mathbf{q} - H\delta t) = \oint_{C_0} (\mathbf{g}^T(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t)\delta\mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t) - H\delta t). \quad (8)$$

Здесь функция Гамильтона $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ также выражена через $\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,t_0,t$ с помощью соотношений (2), символ δ обозначает дифференциал функций по параметру α, а t – произвольная функция вида (7).

Вычислим производную от интеграла (8) по параметру τ при $\tau = 0$ (ее обозначим штрихом). Учитывая перестановочность операций дифференцирования по α и τ, уравнения Гамильтона (3), а также формулы

$$\mathbf{g}^T\delta\mathbf{f}' = \delta(\mathbf{g}^T\mathbf{f}') - \delta\mathbf{g}^T\mathbf{f}', \quad H\delta t' = \delta(Ht') - t'\delta H, \quad \oint\limits_{C_0}\delta\varphi = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{f}' = t'\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} = t'\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{g}' = t'\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} = t'\dot{\mathbf{p}}, \quad H' = t'\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}^T}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}^T}\delta\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t,$$

получим

$$\begin{aligned} I'_{\text{ПК}}\Big|_{\tau=0} &= \oint\limits_{C_0}(\mathbf{g}'^T\delta\mathbf{f} + \mathbf{g}^T\delta\mathbf{f}' - H'\delta t - H\delta t') = \\ &= \oint\limits_{C_0}(\mathbf{g}'^T\delta\mathbf{f} - \delta\mathbf{g}^T\mathbf{f}' - H'\delta t + t'\delta H) = \\ &= \oint\limits_{C_0}t'(\dot{\mathbf{p}}^T\delta\mathbf{f} - \dot{\mathbf{q}}^T\delta\mathbf{g} - \frac{\partial H}{\partial t}\delta t + \delta H) = \\ &= \oint\limits_{C_0}t'(-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}^T}\delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}^T}\delta\mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial t}\delta t + \delta H) \equiv 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь учтено, что при $\tau = 0$ $\delta\mathbf{f} = \delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{g} = \delta\mathbf{p}$. Полученное выражение для производной $I'_{\text{ПК}}$ оказалось тождественно равным нулю для любой функции $t' = \partial t/\partial\tau$ и для любого контура C_0. Это означает, что интеграл Пуанкаре–Картана сохраняет свое значение при любом смещении контура вдоль трубки прямых путей гамильтоновой системы. *Теорема доказана*.

В интегралах Пуанкаре и Пуанкаре–Картана интегрирование ведется по одномерному множеству (контуру) в фазовом или расширенном фазовом пространстве. Поэтому они называются *относительными* интегральными инвариантами *первого порядка*. При этом интеграл Пуанкаре называется *универсальным* инвариантом вследствие того, что его выражение не зависит от H.

Для интегралов Пуанкаре и Пуанкаре–Картана имеют место и обратные теоремы.

Теорема 6.2. *Если для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p},t), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \end{aligned} \tag{12}$$

инвариантен интеграл вида Пуанкаре–Картана:

$$I = \oint_C (\mathbf{p}^T \delta\mathbf{q} - F\delta t),$$

то эта система гамильтонова, а ее гамильтониан определяется выражением $H = F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$.

Доказательство. Как и при доказательстве «прямой» теоремы, рассмотрим произвольный контур C_0, параметризованный формулами (1), и согласованный с ним контур C, параметризованный формулами (7). Тогда интеграл (12) по контуру C выразится через интеграл по контуру C_0 соотношением вида (8), где вместо H будет стоять функция F, а для производной I' получим аналогичное (11) выражение:

$$\begin{aligned} I'\big|_{\tau=0} &= \oint_{C_0} t'(\dot{\mathbf{p}}^T \delta\mathbf{f} - \dot{\mathbf{q}}^T \delta\mathbf{g} - \frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \delta F) = \\ &= \oint_{C_0} t'(\mathbf{P}^T \delta\mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{p} - \frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \delta F). \end{aligned} \tag{13}$$

По условию теоремы эта производная равна нулю для любой функции $t' = \partial t / \partial\tau$ и для любого контура C_0, что возможно только в случае, если

$$\mathbf{P}^T\delta\mathbf{q}-\mathbf{Q}^T\delta\mathbf{p}-\frac{\partial F}{\partial t}\delta t+\delta F=0\,.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться в любой точке любого контура C_0, а значит, в любой точке расширенного фазового пространства, то из него в силу уравнений (12) и формулы для полного дифференциала

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}^T}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial F}{\delta\mathbf{p}^T}\delta\mathbf{p}+\frac{\partial F}{\partial t}\delta t$$

вытекают равенства

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{Q}=\frac{\partial F}{\partial\mathbf{p}},\quad \dot{\mathbf{p}}=\mathbf{P}=-\frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}}\,.$$

Из них следует гамильтоновость системы (12) и формула $H=F$. *Теорема доказана*.

Теорема 6.3. *Если для системы дифференциальных уравнений* (12) *инвариантен интеграл Пуанкаре, то эта система гамильтонова*.

Доказательство. Так как интеграл Пуанкаре определен только на изохронных контурах, то условие теоремы сводится к равенству

$$0=\dot{I}_\Pi\Big|_{t=t_0}=\oint_{C_0^*}(\dot{\mathbf{g}}^T\delta\mathbf{f}+\mathbf{g}^T\delta\dot{\mathbf{f}})=\oint_{C_0^*}(\dot{\mathbf{g}}^T\delta\mathbf{f}-\dot{\mathbf{f}}^T\delta\mathbf{g})=\oint_{C_0^*}(\mathbf{P}^T\delta\mathbf{q}-\mathbf{Q}^T\delta\mathbf{p})\,,$$

которое выполняется для любого изохронного контура C_0^*. Отсюда следует, что выражение $\mathbf{P}^T\delta\mathbf{q}-\mathbf{Q}^T\delta\mathbf{p}$ должно быть *изохронным* дифференциалом некоторой функции $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, т.е.

$$\mathbf{P}^T\delta\mathbf{q}-\mathbf{Q}^T\delta\mathbf{p}=\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}^T}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}^T}\delta\mathbf{p}\,.$$

Из этого соотношения вытекают равенства

$$\mathbf{Q}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}},\quad \mathbf{P}=\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}\,,$$

свидетельствующие о том, что система (12) является гамильтоновой. *Теорема доказана*.

Из прямой и обратной теорем для интеграла Пуанкаре следует, что *инвариантность этого интеграла является критерием гамильтоновости* системы. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли другие контурные интегралы, обладающие таким же свойством (речь идет об интегралах, определенных на изохронных контурах C^*)? Нижеследующая теорема утверждает, что с точностью до мультипликативной постоянной интеграл Пуанкаре является единственным интегралом такого рода.

Ниже будем использовать такую форму записи канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор-столбец фазовых переменных, $H(\mathbf{x},t)$ – гамильтониан, $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{J}$ – *симплектическая единица* порядка $2n$, обладающая свойствами

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}\,\mathbf{J}^T = \mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \tag{15}$$

Произвольный контурный интеграл в $2n$-мерном пространстве фазовых переменных записывается в виде

$$I = \oint_{C^*} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \oint_{C^*} \mathbf{f}^T(\mathbf{x},t)\delta\mathbf{x}, \tag{16}$$

где C^* – изохронный контур, $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ – произвольная $2n$-мерная функции фазовых переменных $\mathbf{x}$ и времени t.

В свою очередь с учетом равенства

$$\delta\mathbf{x}^T \mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{p}^T\delta\mathbf{q} - \mathbf{q}^T\delta\mathbf{p} = 2\mathbf{p}^T\delta\mathbf{q} - \delta(\mathbf{p}^T\mathbf{q}) \tag{17}$$

интеграл Пуанкаре определяется выражением

$$I_{\Pi} = \oint_{C^*} \mathbf{p}^T\delta\mathbf{q} = \frac{1}{2}\oint_{C^*} \delta\mathbf{x}^T\mathbf{J}\mathbf{x}. \tag{18}$$

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Интеграл* (16) *является универсальным интегральным инвариантом гамильтоновых систем в том и только в том случае, когда он отличается от интеграла Пуанкаре на мультипликативную постоянную* $c \neq 0$, *т.е.*

$$I = \oint_{C^*} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},t) = c\, I_{\Pi} = \frac{c}{2} \oint_{C^*} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} \quad \forall C^* . \tag{19}$$

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна: если интеграл (16) выражается через интеграл Пуанкаре соотношением (19), то его инвариантность следует из инвариантности интеграла Пуанкаре.

Докажем необходимость. Пусть интеграл (16) является универсальным инвариантом, т.е. сохраняет свои значения вдоль *любой* трубки прямых путей *любой* гамильтоновой системы. Тогда, выразив с помощью соотношений $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$, формально описывающих закон движения системы (14), интеграл по контуру C^* через интеграл по согласованному с ним контуру C_0^*, получим

$$0 = \frac{dI}{dt} = \oint_{C_0^*} (\delta \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\psi}^T \dot{\mathbf{f}}) =$$

$$= \oint_{C_0^*} (\delta(\dot{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{f}) - \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \delta \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\psi}^T \dot{\mathbf{f}}) = \oint_{C_0^*} (\delta \boldsymbol{\psi}^T \dot{\mathbf{f}} - \delta \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\psi}}).$$

Отсюда при учете формул

$$\delta \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \delta \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \delta \boldsymbol{\psi} \Big|_{t=t_0} = \delta \mathbf{x}$$

и уравнений Гамильтона (14) следует

$$\dot{I} \Big|_{t=t_0} = \oint_{C_0^*} \delta \mathbf{x}^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = 0 . \tag{20}$$

Полученный интеграл равен нулю по любому замкнутому изохронному контуру. Поэтому выражение под знаком интеграла есть полный изохронный дифференциал некоторой функции $\Phi(\mathbf{x}, t)$, т.е.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}. \qquad (21)$$

По условиям теоремы функция $\Phi(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющая уравнению (21), должна существовать при любых функциях $H(\mathbf{x},t)$. Необходимые и достаточные условия существования такой функции определены теоремой 5.1, доказанной в §5, и выражаются следующим тождеством:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = c\,\mathbf{J}\,, \qquad (22)$$

где c – постоянная. Это равенство, записанное в эквивалентном виде

$$\partial(\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2)\big/\partial\mathbf{x}^T = \partial(\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2)^T\big/\partial\mathbf{x}\,,$$

означает, что дифференциальная форма $\delta\mathbf{x}^T(\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2)$ представляет собой изохронный дифференциал δF некоторой функции $F(\mathbf{x},t)$. На основании этого получаем равенство

$$0 = \oint_{C^*}\delta F = \oint_{C^*}\delta\mathbf{x}^T(\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2) = \oint_{C^*}\delta\mathbf{x}^T\mathbf{f} - \frac{c}{2}\oint_{C^*}\delta\mathbf{x}^T\mathbf{J}\mathbf{x}\,,$$

которое в точности совпадает с равенством (19). Неравенство $c \neq 0$ обусловлено тем, что в противном случае интеграл (16) есть тождественный нуль, а такие «инварианты» не представляют интереса. *Теорема доказана*.

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема

Фазовым объемом называется интеграл $2n$-го порядка, представляющий собой объем $2n$-мерной области G в *фазовом* пространстве, определяемый выражением

$$I = \int\underset{G}{\cdots}\int \delta q_1 ... \delta q_n \delta p_1 ... \delta p_n = \int\underset{G}{\cdots}\int \delta x_1 \delta x_2 ... \delta x_{2n}\,.$$

Если в момент времени t_0 выбрать в фазовом пространстве некоторую область G_0, то для системы с заданным гамильтонианом

$H(\mathbf{x},t)$ каждая точка $\mathbf{x}_0$ этой области будет порождать траекторию прямого пути $\mathbf{x}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0,t)$, а все точки области – $(2n+1)$-мерный *пучок прямых путей*. В сечении этого пучка гиперплоскостью $t=\mathrm{const}\neq t_0$ получается область G_t, *согласованная* с областью G_0.

Теорема Лиувилля утверждает, что *на решениях гамильтоновых систем фазовый объем сохраняется, т.е. объемы любых двух **согласованных** областей равны*:

$$\int\underset{G}{\cdots}\int \delta x_1\delta x_2 ... \delta x_{2n} = \int\underset{G}{\cdots}\int \delta x_1\delta x_2 ... \delta x_{2n}.$$

Для доказательства теоремы выразим объем по области G_t через объем по согласованной с ним области G_0 известной формулой

$$\int\underset{G}{\cdots}\int \delta x_1\delta x_2 ... \delta x_{2n} = \int\underset{G}{\cdots}\int |\mathbf{M}|\,\delta x_1\delta x_2 ... \delta x_{2n}\ ;\ \ |\mathbf{M}|=\det(\mathbf{M}).$$

Здесь $\mathbf{M}=\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0^T$ – матрица Якоби преобразования $\mathbf{x}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0,t)$ начальных значений $\mathbf{x}_0$ фазовых переменных в текущие значения $\mathbf{x}$. Ранее было установлено (теорема 5.4), что это преобразование каноническое и унивалентное. Поэтому из формулы (24) § 5 имеем $(\det\mathbf{M})^2=1$. Поскольку в момент $t=t_0$ преобразование тождественное, т.е. $\det\mathbf{M}(t_0)=1$, то из непрерывности решения $\mathbf{x}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0,t)$ следует $\det\mathbf{M}(t)=1$. *Теорема доказана*.

Заметим, что фазовый объем может сохраняться и для не гамильтоновых систем. Общая формулировка теоремы Лиувилля звучит так.

Если правые части системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ *m-го порядка удовлетворяют условию*

$$\mathrm{div}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}=0,$$

то на решениях системы фазовый объем сохраняется. Доказательство можно найти в учебнике [4].

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М. : Физматлит, 2008. – 264 с.
2. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – М. : Физматлит, 2008. – 304 с.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М. : Наука, 1990. – 416 с.
4. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.
5. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела. – М. : МФТИ, 2010. – 80 с.
6. *Величенко В.В.* Матрицы, геометрия, механика и ЭВМ. М. : МФТИ, 1984. – 267 с.
7. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 344 с.
8. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М. : Гостехиздат, 1946. – 655 с.

Оглавление

Учебное издание

Амелькин Николай Иванович

ЛАГРАНЖЕВА И ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *И.А. Волкова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 30.06.2014. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$ Усл. печ. л. 7,0
Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 300 экз. Заказ № 229.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700. Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок