Математические методы аналитической механики

Лекция: ***Нормальные формы. Периодические решения***

Понятие о методе нормальной формы

Мотивация

- Как исследовать динамику вблизи частного решения?
- Как поведение решений зависит от параметров системы?
- Какие могут быть перестройки решений?

- Большинство задач о движении системы не поддаются точному решению.
- В этом случае применяются различные подходы. Один из них --- методы теории возмущений, ключевая идея которых состоит в том, что неинтегрируемую систему уравнений представляют в виде возмущения интегрируемой системы, допускающей точное решение.
- Тогда приближённое решение исходной системы ищется в виде формального ряда поправок различных порядков к точному решению начальной системы.

Способы построения формальных решений

- Метод нормальной формы Пуанкаре

Основан на последовательном упрощении исходной системы с помощью такой аналитической замены переменных, при которой линейная часть имеет жорданову форму, а в нелинейной части обращено в нуль наиболее возможное число слагаемых.

- Метод осреднения

Его идея состоит в том, чтобы решение неавтономной системы уравнений движения заменить на некотором интервале времени решением автономной системы.

Варианты для канонических уравнений

- Нестационарная каноническая теория возмущений для функции Гамильтона вида $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$
- Стационарная каноническая теория возмущений для функции Гамильтона вида $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$
- Метод гамильтоновой нормальной формы

Метод осреднения

Рассмотрим исходную систему вида (***в стандартной форме***)

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant \varepsilon \ll 1 \quad (\,*\,)$$

где $\mathbf{f}$ - вектор-функция класса $C^r, r \geqslant 2$, периодическая по t с периодом $T > 0$.

Автономная усреднённая система определяется как

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y}, t, 0) dt \equiv \varepsilon \langle \mathbf{f} \rangle (\mathbf{y})\,. \quad (\,*\,*\,)$$

Теорема Н.Н. Боголюбова

Существует замена переменных $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{w}(\mathbf{y}, t, \varepsilon)$ класса C^r, приводящая систему (*) к виду

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}) \right\rangle + \varepsilon^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, t, \varepsilon) \,.$$

Если $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ - решения систем (*) и (**) с начальными условиями $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ соответственно и $|\, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \,| = O(\varepsilon)$, то $|\, \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) \,| = O(\varepsilon)$ на интервале $t \sim 1/\varepsilon$.

Приведение к стандартной форме

- Рассмотрим колебательную систему $\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$
- Выполним замену $x = r\cos\varphi, \quad \dot{x} = -r\sin\varphi$
- Дифференцируем подстановку и используем исходное уравнение:
$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi, -\ddot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi - \varepsilon f$
- Получаем систему $\dot{r} = -\varepsilon f\sin\varphi,\ r\dot{\varphi} = r - \varepsilon f\cos\varphi$, откуда находим уравнение в стандартной форме $\dfrac{\partial r}{\partial\varphi} = -\varepsilon\dfrac{rf\sin\varphi}{r - \varepsilon f\cos\varphi} = \varepsilon F$
- По Т. Боголюбова его решение близко к решению усреднённого уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \varepsilon\left\langle F\right\rangle$$

Пример. Осциллятор с нелинейным демпфирование

- Рассмотрим свободы колебания одномерного осциллятора с потенциалом $\Pi(x) = \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$, нагруженный кубическим демпфированием: $Q = -\varepsilon \dot{x}^3,\ \varepsilon \ll 1$

- Выполняя соответствующее масштабирование переменных $x \to x/\sqrt{\omega}, t \to t/\omega$, получим Лагранжиан $L = \dfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{1}{2}x^2$ и уравнение Лагранжа: $\ddot{x} + x = -\varepsilon \dot{x}^3$, т.е. $f = -r^3 \sin^3 \varphi$

- Уравнение траектории:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\varepsilon \frac{r^3 \sin^4 \varphi}{1 - \varepsilon r^2 \sin^3 \varphi \cos \varphi} \approx -\varepsilon r^3 \sin^4 \varphi + \dots$$

Пример. Осциллятор с нелинейным демпфирование

- Осреднённое уравнение: $\dfrac{d\langle r\rangle}{d\varphi} = -\left\langle \varepsilon r^3 \sin^4\varphi \right\rangle = -\dfrac{3}{8}\varepsilon\langle r\rangle^3$
- При начальном условии $r(0) = a$ получим решение

$$\langle r\rangle = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon a^2\varphi}} \approx a - \frac{3}{8}\varepsilon a^3\varphi$$

Нормальная форма Пуанкаре

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T, \quad \boldsymbol{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T. \tag{1}$$

$\mathbf{f}(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$ - положение равновесия

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{g} = [g_1, \ldots, g_n]^T, \quad g_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} g^i_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \quad k_1 + \ldots + k_n \geqslant 2.$$

Задача. Найти такую аналитическую замену переменных $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$, чтобы максимально возможным образом упростить систему, т.е. привести матрицу $\mathbf{A}$ к жордановой форме, а также обнулить максимально возможное число коэффициентов $g^i_{\mathbf{k}}$ в нелинейной части.

Этапы нормализации

- Упрощение линейной части. Пусть $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ - СЧ матрицы $\mathbf{A}$. Тогда замена $\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}}$ приводит систему к виду
- $$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$
- Пусть k — минимальная степень мономов содержащихся в $\tilde{\mathbf{g}}$. Ищем преобразование $\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{y}$ в виде
- $$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) = [p_1, \ldots, p_n]^T,$$ $$p_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} p^i_{k_1,\ldots,k_n} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \quad k_1 + \ldots + k_n = k.$$
- Полином $p_i(\mathbf{y})$ содержит $\binom{n+k-1}{k}$ мономов с коэффициентами $p^i_{\mathbf{k}}\mathbf{y}^{\mathbf{k}}$, которые требуется подобрать так, чтобы слагаемые степени k исчезли из правой части равенства

Этапы нормализации

- Подстановка приводит к
- $$\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}^T}\right)\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{\Lambda y}+\boldsymbol{\Lambda p}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}), \quad \dot{\boldsymbol{y}}=\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}^T}\right)^{-1}(\boldsymbol{\Lambda y}+\boldsymbol{\Lambda p}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}))$$
- Разложим последнее уравнение в ряд по степеням $\mathbf{y}$, сохраняя только слагаемые степени не выше k.
- $$\dot{\boldsymbol{y}}=\left(\boldsymbol{E}-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}^T}\right)(\boldsymbol{\Lambda y}+\boldsymbol{\Lambda p}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}))+O(\boldsymbol{y}^{k+1})=$$
$$=\boldsymbol{\Lambda y}+\boldsymbol{\Lambda p}+\boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{y})-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}^T}\boldsymbol{\Lambda y}+O(\boldsymbol{y}^{k+1}).$$

Гомологическое уравнение

- Коэффициенты полиномов $p^i_{\mathbf{k}}$ подбираются так, чтобы в полученной системе члены степени k исчезли
- Гомологическое уравнение $\boldsymbol{\Lambda p} - \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}^T}\boldsymbol{\Lambda y} = -\boldsymbol{g}^k$
- В координатной форме $\lambda_i p_i - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial p_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j = -g^k_i, \quad i = 1, \ldots, n.$
- Решение $p^i_{k_1,\ldots,k_n} = \dfrac{g^i_{k_1,\ldots,k_n}}{k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n - \lambda_i}.$

Резонансы

- **Определение**. Набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ собственных чисел называется ***резонансным***, если между ними существует целочисленное соотношение вида $\lambda_j = \left(\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}\right), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\,\mathbf{k}\,| \geqslant 2$. Величина $|\,\mathbf{k}\,| = \sum_i^n k_i$ называется ***порядком резонанса***.

- Все нерезонансные слагаемые могут быть исключены при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ни исключены, ни каким-либо образом ими преобразованы.

Нормальная форма системы

- ***Нормальной формой*** системы (1) называется форма, содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые.

- ***Нормализующим преобразованием*** (вплоть до степени k) называется последовательность преобразований с полиномиальными коэффициентами, приводящее систему к ее нормальной форме (вплоть до слагаемых степени k).

- Количество резонансных слагаемых, а также их вид определяются исключительно собственными значениями $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы $\mathbf{A}$, образующей линейную часть

- **Теорема Пуанкаре–Дюлака.** С помощью полиномиальных преобразований систему (1) можно привести к форме, содержащей лишь линейные и резонансные слагаемые.

Общее правило нахождения резонансных слагаемых для случая двух уравнений

- Условие резонансов в первом и втором уравнениях
- $$\lambda_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2, \quad \lambda_2 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$$
- Введём новую переменную $\lambda = \lambda_1/\lambda_2, \quad \lambda_2 \neq 0$
- $$k_2 = -\lambda(k_1 - 1), \quad k_2 = 1 - \lambda k_1$$
- Эти уравнения задают две прямые в плоскости (k_1, k_2), проходящие через точки (1, 0) и (0, 1) соответственно. Угол наклона прямых определяется отношением частот λ

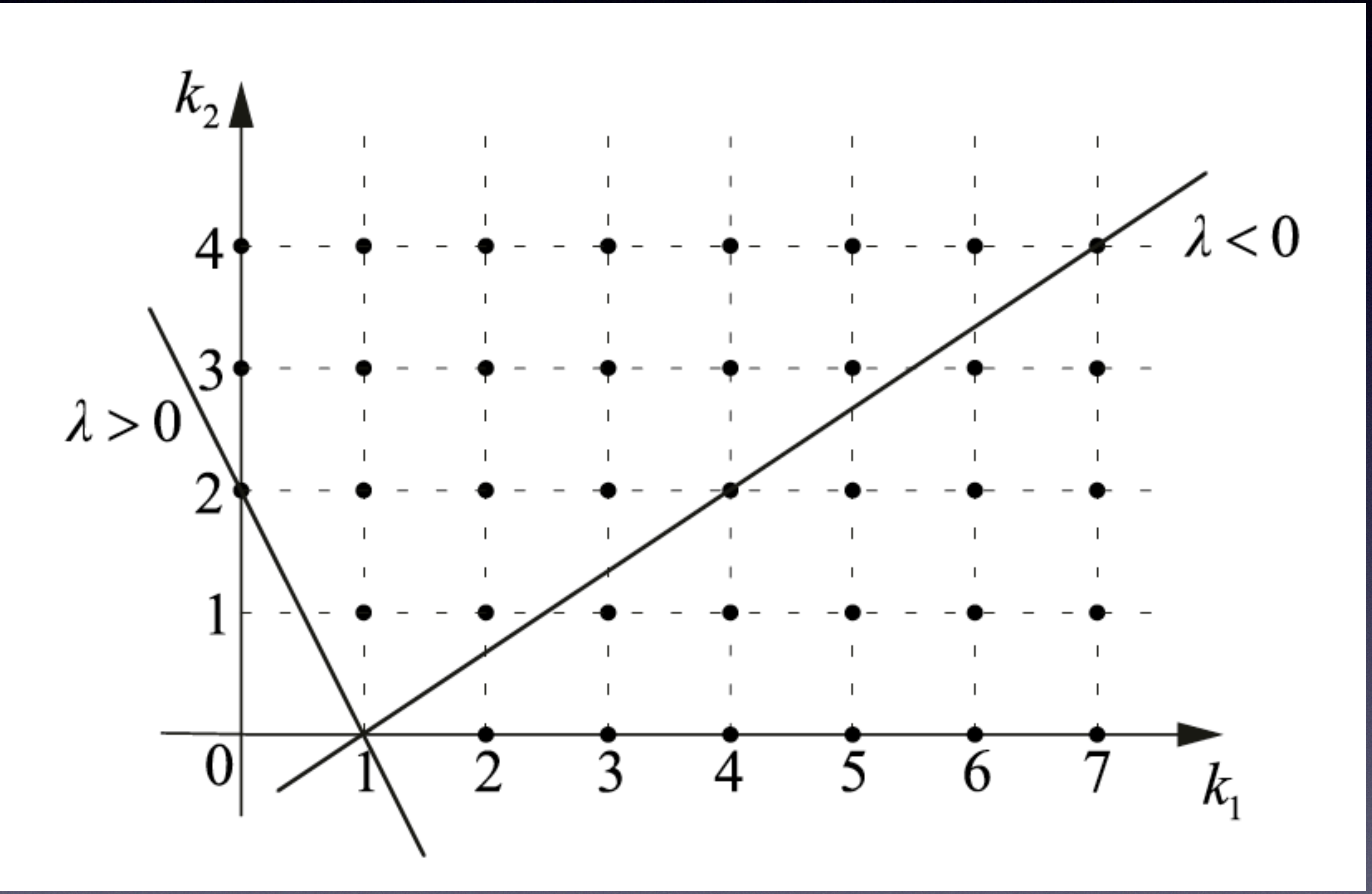
Все возможные варианты для прямой $k_2 = -\lambda(k_1 - 1)$

1) $\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ - резонансов нет

2) $\lambda > 0, \quad \lambda = m \in \mathbb{N}$ - присутствует резонансный член порядка m. НФ: $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g^1_{m,0} x_1^m$

3) $\lambda \leqslant 0$, $\lambda = -p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ - присутствуют резонансные члены порядков $(1 + mq, mp), m \in \mathbb{N}$. НФ:
$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g^1_{1+q,p} x_1^{1+q} x_2^p + g^1_{1+2q,2p} x_1^{1+2q} x_2^{2p} + \dots$

4) Если λ — иррациональное число, то резонансных членов нет, но есть проблема малых знаменателей



Пример: осциллятор Дюффинга

- Найдем поправку первого порядка к амплитуде и частоте гармонического осциллятора при учёте кубической нелинейности
$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega, \alpha = \mathrm{const}$$

- Представим это уравнение в форме Коши:
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - \alpha x^3.$$

- СЧ $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, общее решение $x = ce^{i\omega t} + \overline{c}e^{-i\omega t}, \quad y = i\omega\left(ce^{i\omega t} - \overline{c}e^{-i\omega t}\right)$

- Замена $z = ce^{i\omega t}$ даёт $x = z + \overline{z}, \quad y = i\omega\left(z - \overline{z}\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(x - \frac{i}{\omega}y\right), \quad \overline{z} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{i}{\omega}y\right)$

- Уравнения станут $\dot{z} = i\omega z + \frac{i\alpha}{2\omega}\left(z + \overline{z}\right)^3, \quad \dot{\overline{z}} = -i\omega\overline{z} - \frac{i\alpha}{2\omega}\left(z + \overline{z}\right)^3$

Пример: осциллятор Дюффинга

- Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ имеем два резонансных соотношения $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$

- По теореме Пуанкаре–Дюлака нормальная форма первого уравнения
$$\dot{\zeta} = i\omega\zeta + \frac{3i\alpha}{2\omega}\zeta^2\overline{\zeta}.$$

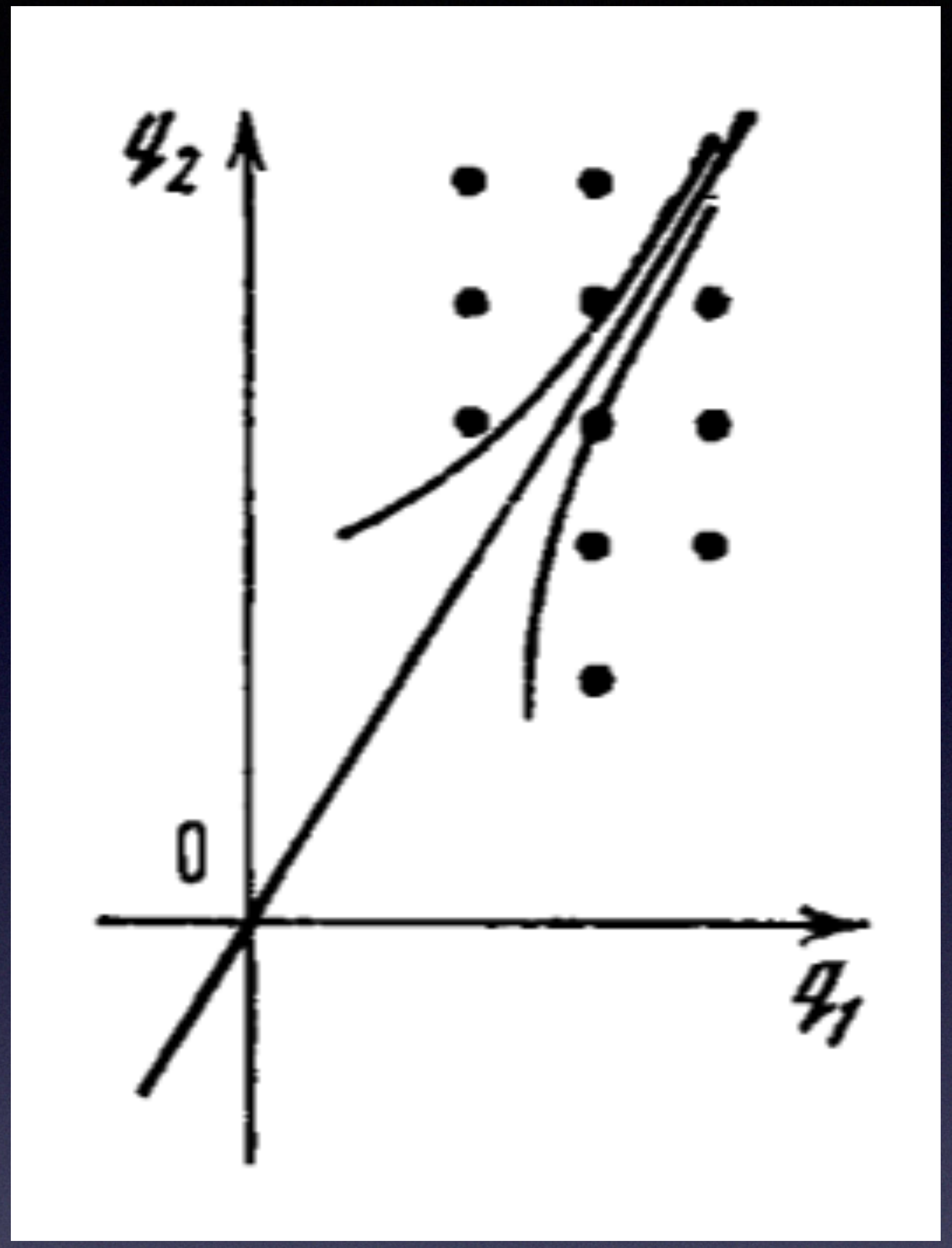
- Приведение к форме обеспечивается заменой
$$z = \zeta + \frac{\alpha}{4\omega^2}\zeta^3 + p^1_{2,1}\zeta^2\overline{\zeta} - \frac{3\alpha}{4\omega^2}\zeta\overline{\zeta}^2 - \frac{\alpha}{8\omega^2}\overline{\zeta}^3$$

Проблема сходимости

- Сходимость нормализующего преобразования зависит от условия на сильную несоизмеримость частот
$$\left|\left(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Lambda}\right)\right| > \varkappa / |\,\mathbf{k}\,|^{\nu}, \quad \varkappa, \nu = const > 0$$

- Если частоты невозмущённого движения постоянны и сильно несоизмеримы, то различие между усреднённым и точным движением остаётся малым на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$

- Если выполнено слабое условие $\left|\left(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Lambda}\right)\right| > 0$, то точность может быть хуже, чем ε



Гамильтонова нормальная форма

Методы нормализации

- Метод производящих функций Якоби
- Метод нормализации с помощью рядов Ли
  - Метод Депри-Хори
  - Метод инвариантной нормализации Журавлева
- Метод параметрической производящей функции

Метод нормализации с помощью рядов Ли

- Переход от невозмущенного гамильтониана H_0 к возмущенному $H = H_0 + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k$ осуществляется с помощью вспомогательной системы с гамильтонианом G - генератор Ли преобразования

- $$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}, \quad (\mathbf{x}(0) = \mathbf{q}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{p}) \to (\mathbf{x}(1) = \mathbf{Q}, \mathbf{y}(1) = \mathbf{P})$$

- Ряды Ли

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\mathbf{Q} * G^k, \ \mathbf{p} = \mathbf{P} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\mathbf{P} * G^k,$$

$$\widetilde{H} = H + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} H * G^k$$

Метод инвариантной нормализации В.Ф.Журавлёва

Метод инвариантной нормализации (симметризации) В.Ф.Журавлёва использует интегрирование гомологического уравнения для получения генератора Ли $\mathcal{G}$ и нормальной формы $\mathcal{H}$. Пусть исходный гамильтониан имеет вид

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k(\mathbf{q},\mathbf{p}).$$

Ищем его нормальную форму $\mathcal{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ и генератор Ли нормализующего преобразования в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \sum_{k=1} \varepsilon^k \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{G} = \sum_{k=1} \varepsilon^k \mathcal{G}_k.$$

Гомологические уравнения имеют вид

$$H_0 * \mathcal{F}_k = 0, \quad \mathcal{F}_k = H_0 * \mathcal{G}_k + M_k, k = 1, \ldots,$$

где $H * \mathcal{G}^k$ – k-я итерация скобки Пуассона, а функция M_k выражается через вычисленные ранее $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{G}_j$, $i, j < k$. Первые значения M_k, $k = 1, 2, 3, 4$, суть

$$M_1 = H_1, \quad M_2 = H_2 + \frac{1}{2}(H_1 + \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_1,$$
$$M_3 = H_3 + \frac{1}{2}(H_2 + \mathcal{F}_2) * \mathcal{G}_1 + \frac{1}{2}(H_1 + \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_2 + \frac{1}{12}(H_1 - \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_1^2,$$

Метод инвариантной нормализации В.Ф.Журавлёва

Пусть $\mathbf{z}(t,\mathbf{Z})$ — решение системы с гамильтонианом H_0 и начальными условиями $\mathbf{Z}$, тогда

$$\int_0^t M_k(\mathbf{z}(t,\mathbf{Z}))dt = t\mathcal{F}_k(\mathbf{Z}) + \mathcal{G}_k(\mathbf{Z}) + f(t), \quad f(t) = -\mathcal{G}_k(\mathbf{z}(t)).$$

На каждом шаге нормализации выполняется процедура усреднения функции M_k вдоль невозмущённого решения $\mathbf{Z}(t)$. Получаем следующий член $\mathcal{F}_k$ нормальной формы и $\mathcal{G}_k$ генератора Ли. Нормализующее преобразование задаётся формулами

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\mathbf{Q} * \mathcal{G}^k, \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\mathbf{P} * \mathcal{G}^k. \tag{8}$$

Особенность метода состоит в том, что он позволяет строить нормальную форму гамильтониана, у которого невозмущённая часть H_0 не приведена к нормальной форме. В этом случае говорят о *симметризации* гамильтониана H относительно невозмущённого гамильтониана H_0.

Пример: Уравнение Дюффинга

Уравнение Дюффинга

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$$

записывается в канонической форме с гамильтонианом

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) + \varepsilon \frac{1}{4} q^4.$$

Первое слагаемое — это H_0, второе — H_1.

Решение невозмущённой системы есть

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}.$$

Вычисляя квадратуру от M_1, получим

$$\int\limits_0^t M_1(q(t,Q,P), p(t,Q,P)\,dt = t\left(\frac{3}{32}\left(Q^2 + P^2\right)^2\right) - \frac{1}{32} QP\left(3P^2 + 5Q^2\right) + f(t).$$

Множитель при t есть $\mathcal{F}_1$ — член нормальной формы первого порядка, следующее слагаемое — член $\mathcal{G}_1$ генератора Ли.

Пример: Уравнение Дюффинга (продолжение)

Квадратура от M_2 приводит к слагаемым $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{G}_2$ равным соответственно

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{17}{512}\left(Q^2 + P^2\right)^3, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{1}{768} QP\left(57Q^4 + 104P^2Q^2 + 39P^4\right).$$

Ещё одна итерация для квадратуры от M_3 даёт следующий член нормальной формы:

$$\mathcal{F}_3 = \frac{375}{16384}\left(Q^2 + P^2\right)^4.$$

Итак, с точностью до членов 4-го порядка по ε нормальная форма имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}Z + \varepsilon\frac{3}{32}Z^2 - \varepsilon^2\frac{17}{512}Z^3 + \varepsilon^3\frac{375}{16384}Z^4,$$

где $Z = P^2 + Q^2$. Соответствующее каноническое преобразование согласно (8) получается в виде

$$q = Q - \varepsilon\frac{Q}{32}\left(9P^2 + 5Q^2\right) + \varepsilon^2\frac{Q}{2048}\left(547P^4 + 742P^2Q^2 + 227Q^4\right) + \ldots,$$
$$p = P + \varepsilon\frac{3}{32}P\left(P^2 + 5Q^2\right) - \varepsilon^2\frac{1}{2048}P\left(77P^4 + 922P^2Q^2 + 685Q^4\right) + \ldots.$$

Периодические решения

- Cris Moore - 1993
- Alain Chenciner and Richard Montgomery
- Carles Simo - 1998

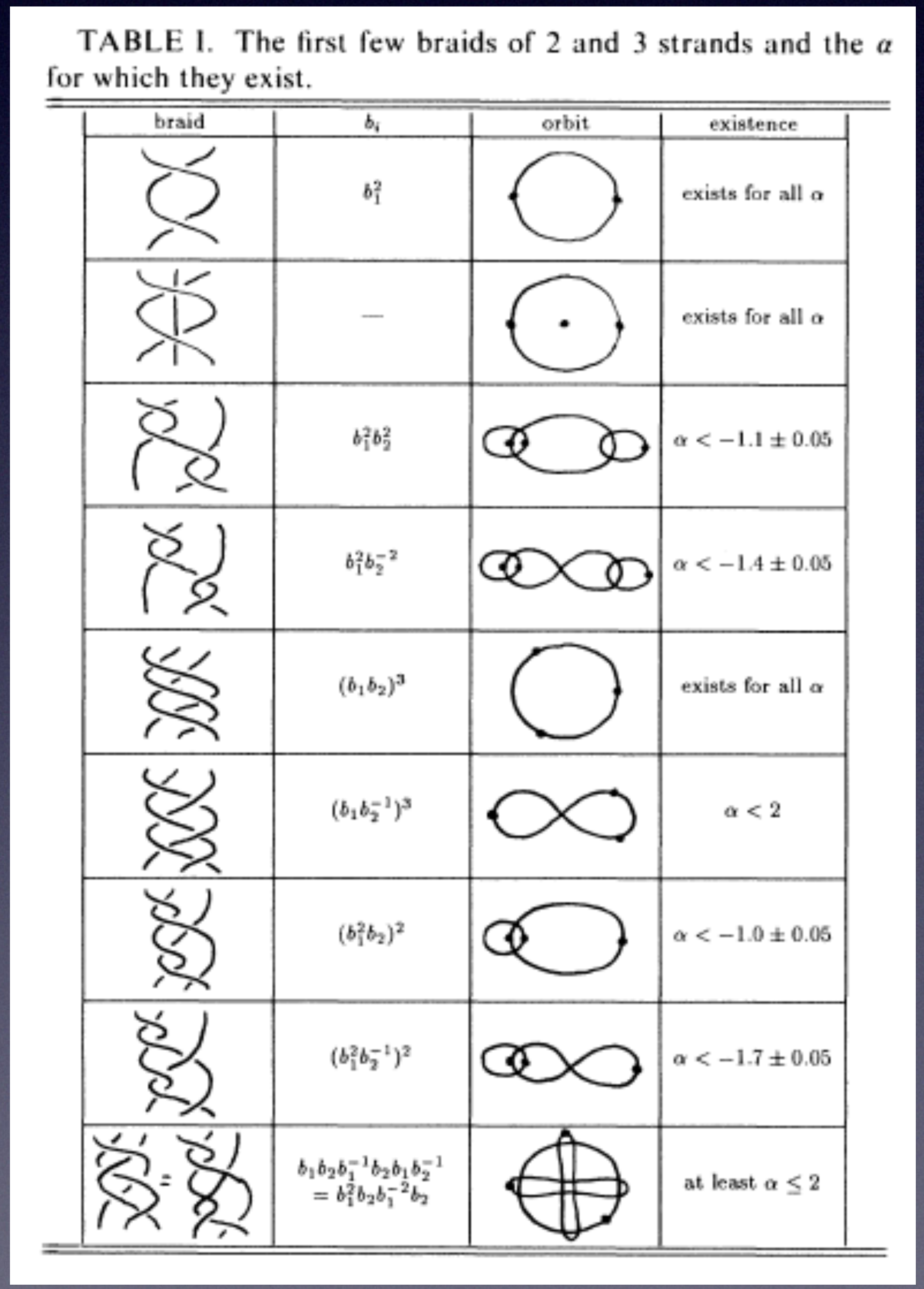
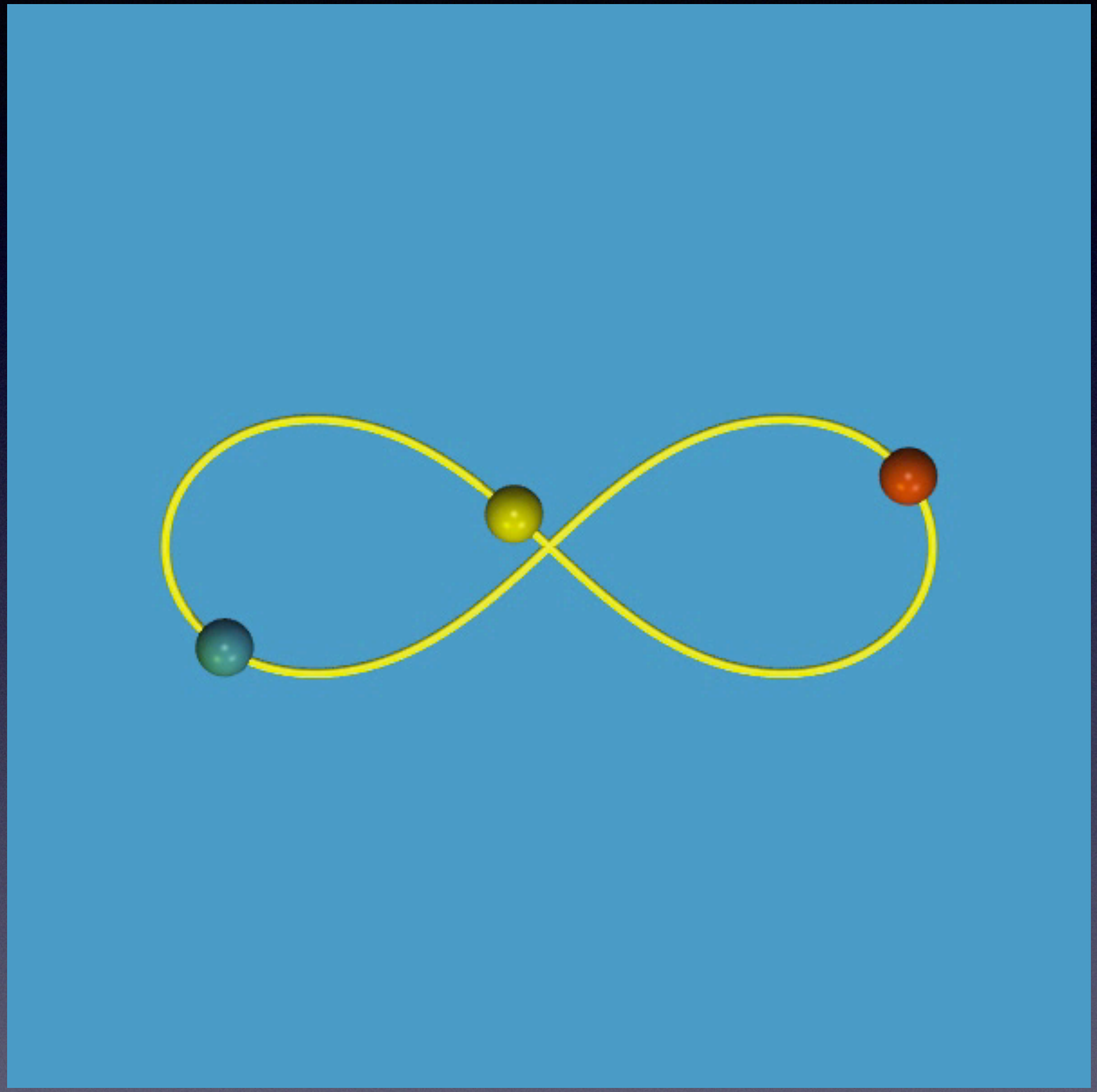
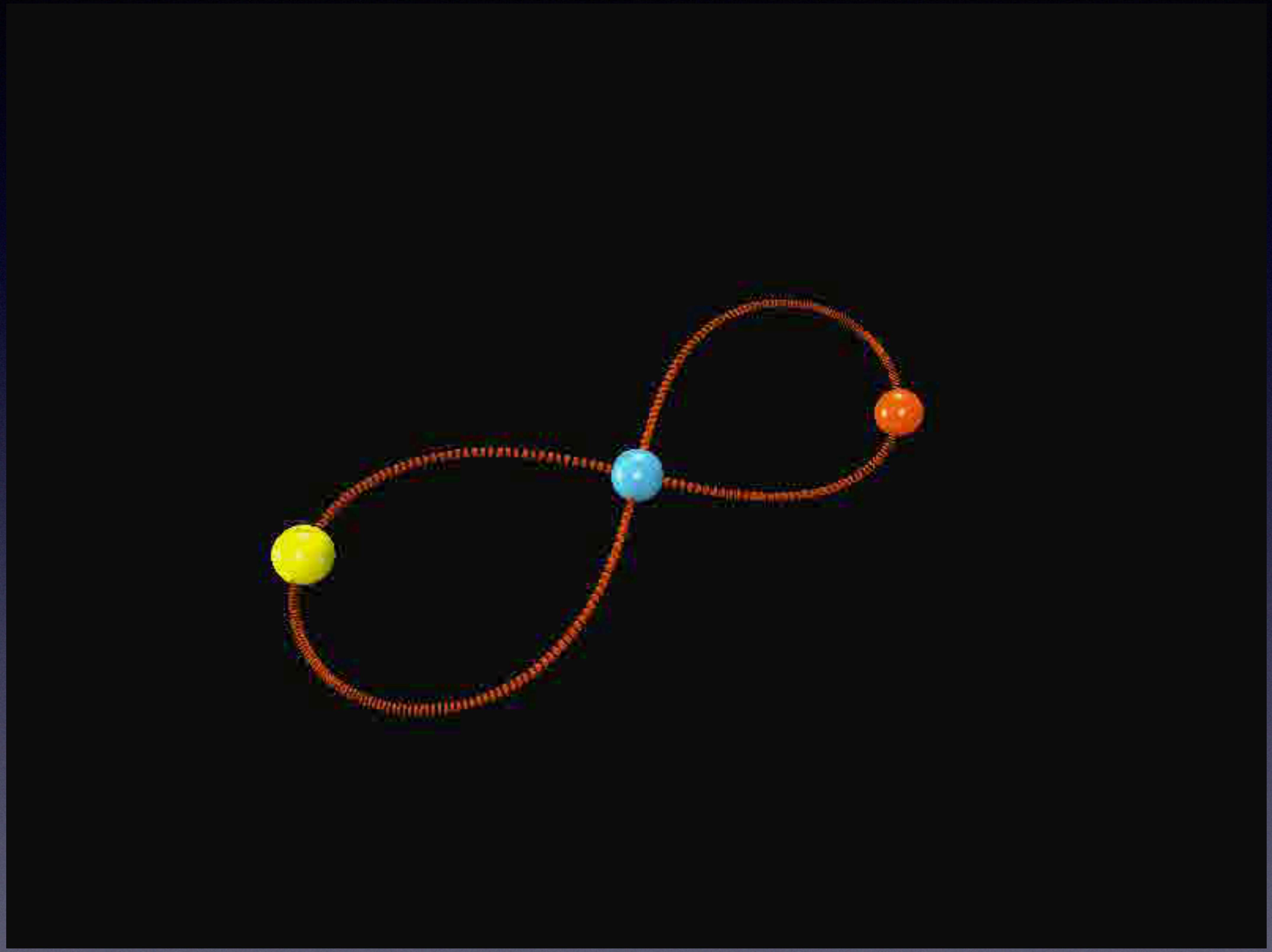


TABLE I. The first few braids of 2 and 3 strands and the α for which they exist.

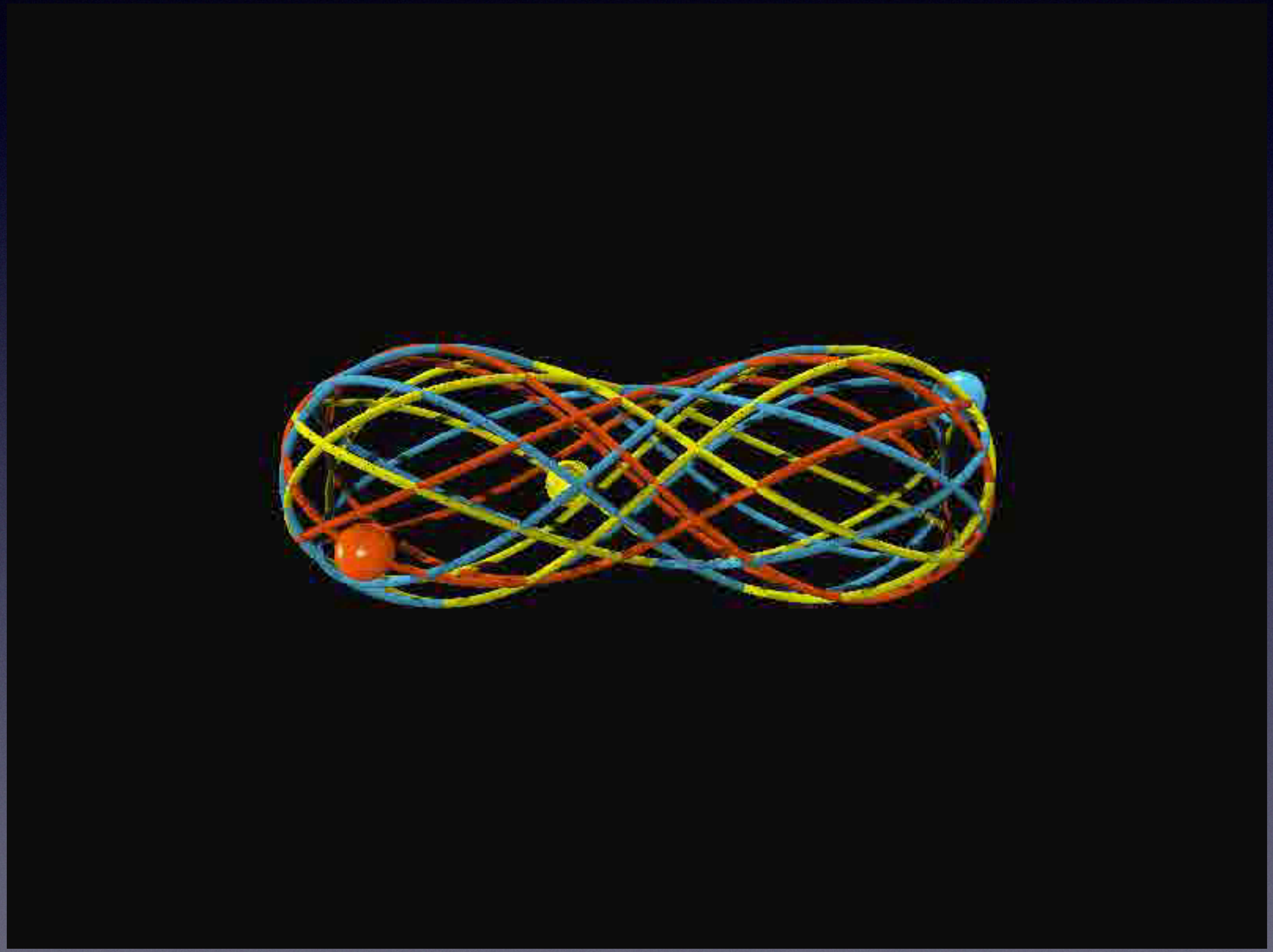
braid	b_i	orbit	existence
	b_1^2		exists for all α
	—		exists for all α
	$b_1^2 b_2^2$		$\alpha < -1.1 \pm 0.05$
	$b_1^2 b_2^{-2}$		$\alpha < -1.4 \pm 0.05$
	$(b_1 b_2)^3$		exists for all α
	$(b_1 b_2^{-1})^3$		$\alpha < 2$
	$(b_1^2 b_2)^2$		$\alpha < -1.0 \pm 0.05$
	$(b_1^2 b_2^{-1})^2$		$\alpha < -1.7 \pm 0.05$
	$b_1 b_2 b_1^{-1} b_2 b_1 b_2^{-1} = b_1^2 b_2 b_1^{-2} b_2$		at least $\alpha \leq 2$

Хореографии и периодические движения

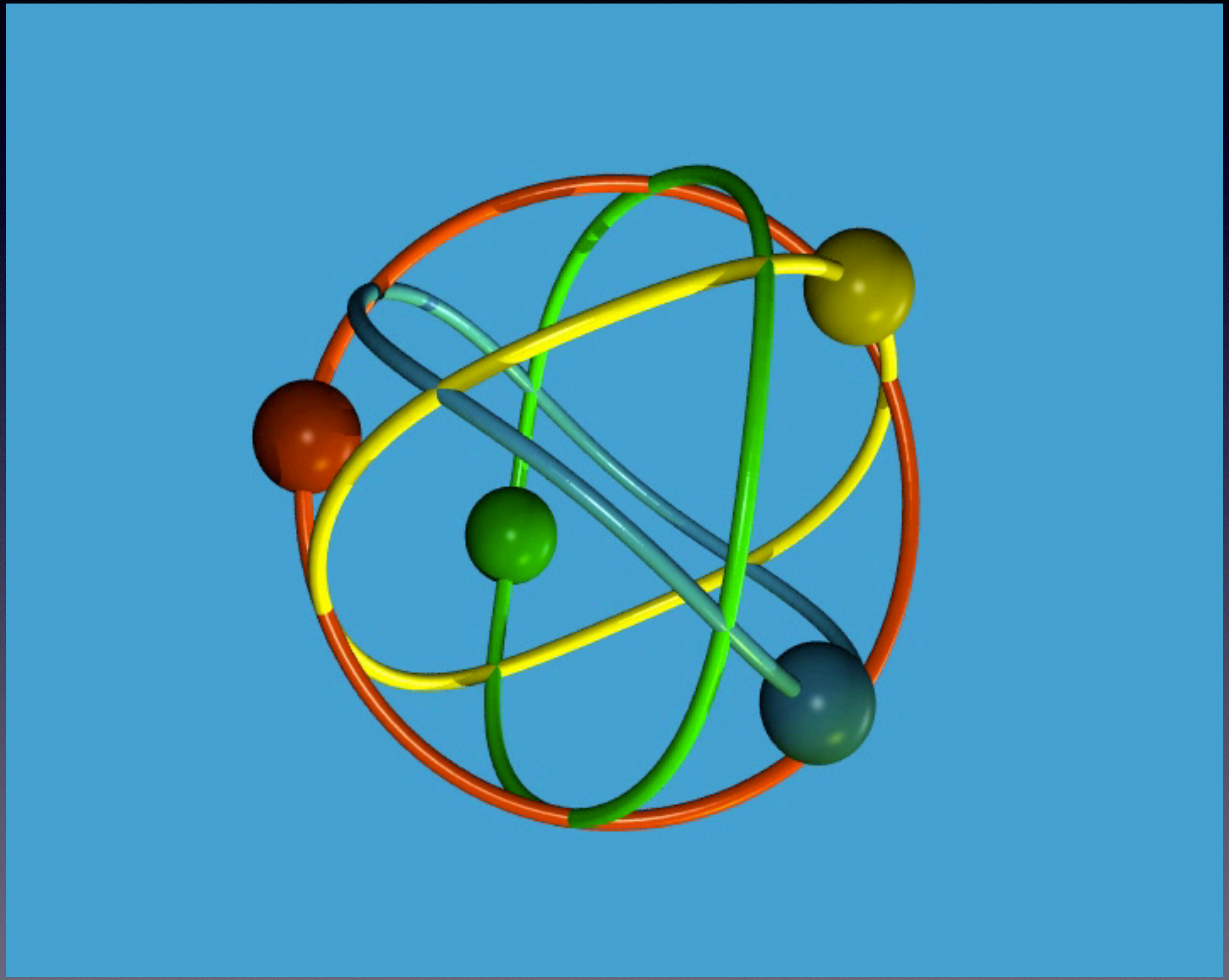


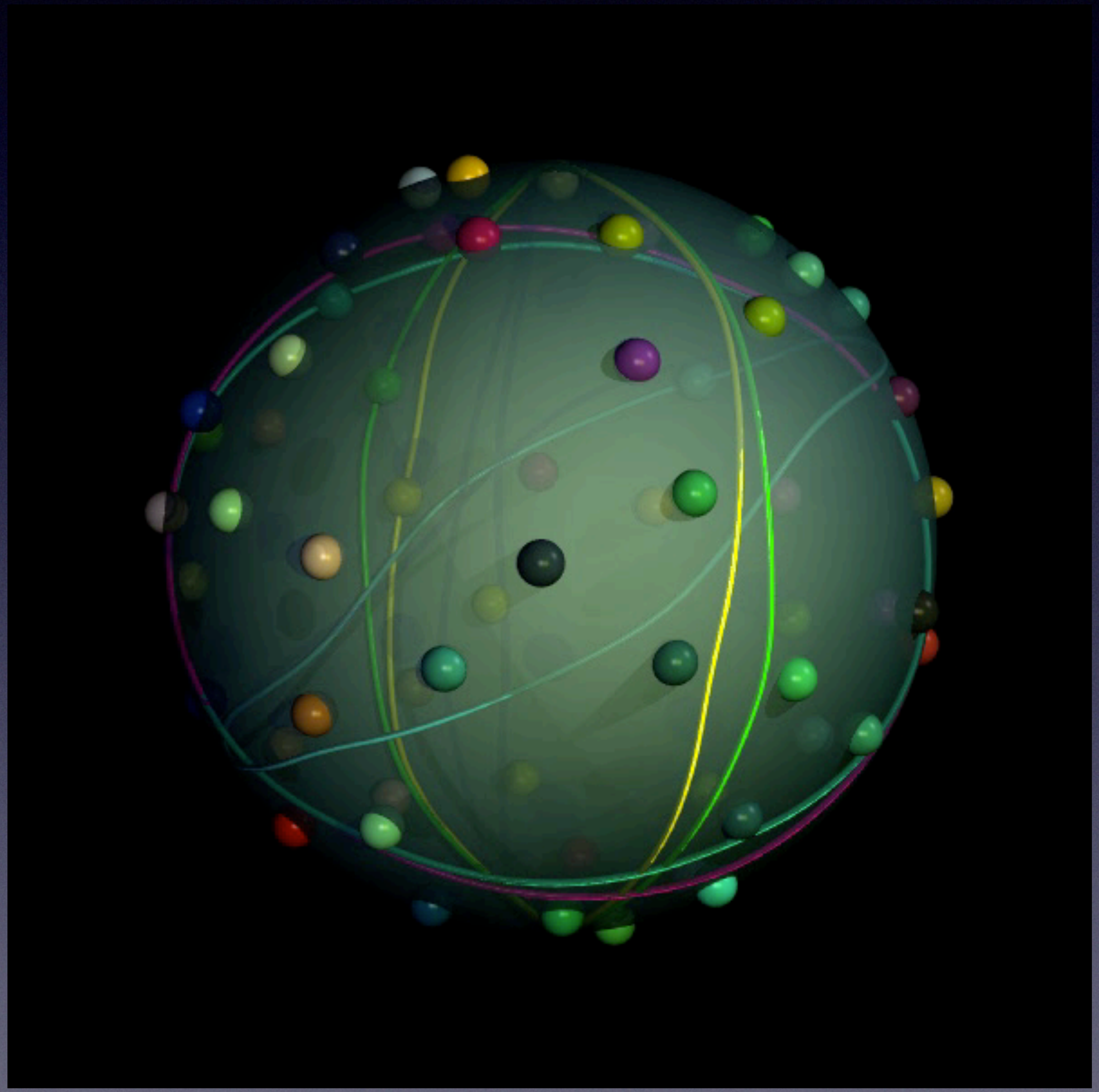


Хореографии и периодические движения



Хореографии и периодические движения





Список литературы

- Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — 3-е, испр. и доп. — М. : Наука.
- Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов. — 3-е изд. — М.-Ижевск : НИЦ .Регулярная и хаотическая динамика., 2007.
- Барбашова Т. Ф., Кугушев Е. И., Попова Т. В. Теоретическая механика в задачах. Лагранжева механика. Гамильтонова механика: Учебное пособие. — М. : МЦНМО, 2013. — 392 с.
- Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. — 3-е изд. — М. : Физматлит, 2008.
- Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560 стр.
- Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. — М. : ЛЕНАНД, 2015. — 304 с.
- Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1979. 252 с.
- Сахаров А.В. Метод нормальных форм Пуанкаре https://mipt.ru/upload/medialibrary/4f8/sakharov-a.v.-metod-normalnykh-form-puankare.pdf