Билеты к экзамену по курсу «Математические методы аналитической механики» (ФПМИ)

TeX:**Астафуров Евгений**

1 июня 2020 г.

Содержание

1 Постулаты классической механики. Понятие силы. Инерциальные системы отсчёта и законы Ньтона. Группа преобразований Галилея, инвариантность уравнений механики.

1.1 Постулаты и аксиомы классической механики

1. Первая группа аксиом, определяющих поведение объектов (точки, прямые, плоскости) целиком задействована из Евклидовой геометрии.

2. Объекты в $\mathbb{E}^3$ полагаются зависящими от времени; отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ называется *движением.*

3. *Материальная точка* — геометрическая точка, которой поставлена в соответствие величина m, называемая *массой* (масса полагается независящей ни от времени, ни от положения в пространстве). Материальная точка однохначно задается парой $\mathbf{r}, m$, где $\mathbf{r}$ — вектор в евклидовом пространстве, отнесенный к какой либо декартовой системе координат.

4. Каждой паре материальных точек может быть поставлена пара векторов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (называемых *силами*), причем эти векторы удовлетворяют соотношению $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

1.2 Законы Ньютона. Инерциальные СО

Перечислим три закона Ньютона:

1. Существуют *инерциальные* СО.

2. Существуют СО, в которых выполнено
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$
причем такие СО называются инерциальными.

3. В инерциальной СО, если равнодействующая сил на материальную точку равна нулю, то данная материальноя точка движется равномерно и прямолинейно.

1.3 Группа преобразований Галилея. Инвариантность уравнений механики

Определение 1. *Принцип относительности Галилея* — все уравнения и законы механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета.

Определение 2. Преобразования, осуществляющие переход от одной инерциальной СО к другой, носят названия *преобразований Галилея* и могут быть записаны в следующем виде: $\{t, \mathbf{r}\} \to \{t', \mathbf{r}'\} : \begin{cases} t' = t + \tau \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}t + A\mathbf{r} \end{cases}$, где постоянные $\mathbf{r}_o$ и τ характеризуют смещение начала отсчета координат и времени, а постоянная $\mathbf{v}$ характеризует равномерное и прямолинейное движение новой СО относительно старой, матрица A — матрица поворота осей новой системы координат относительно старой. Совокупность этих независимых коэффициентов представляет собой *группу преобразований Галилея.*

Утверждение 1. *Законы классической механики инвариантны относительно группы преобразований Галилея.*

2 Кинематика точки. Траектория, скорости и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в полярных координатах (с испольованием комплекснозначных функций).

2.1 Траектория, скорость и ускорение

Определение 3. Движение материальной точки задается явной функцией от времени $\mathbf{r}(t)$, что эквивалентно заданию трех скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$ при рассмотрении в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

причем кривая, которую описывает $\mathbf{r}(t)$ называется *траекторией точки.*

Определение 4. *Скоростью* материальной точки называется вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Определение 5. *Ускорением* материальной точки называется величина $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$. Модуль ускорения $w = |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$, а направление задается косинусами:

$$\cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \frac{\ddot{z}}{w}.$$

2.2 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Помимо декартовых координа $x(t), y(t)$, движение может быть задано в полярных координатах (Рис. 1): пусть заданы функции $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, найдем скорость и ускорение точки P.

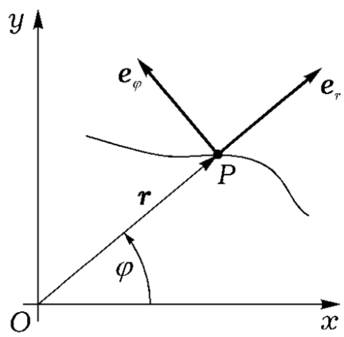

Рис. 1: Движение в полярной СК

Определение 6. *Радиальной осью* называется ось, направленная вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Определение 7. *Трансверсальной осью* называется ось, направленная вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_\varphi$, который образован поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки вектора $\mathbf{e}_r$.

Так как $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, в системе координат Oxy имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) \\ \mathbf{w} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi, (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi). \end{cases} \tag{1}$$

Определение 8. Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсальную оси называются соответственно *радиальными* и *трансверсальными* скоростями (для ускорений аналогично).

$$v_r = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) \quad v_\varphi = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi).$$

3 Кинематика точки. Естественный трёхгранник. Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки. Уравнения Френе-Серре.

3.1 Естественный трехгранник

Пусть задан закон движения материальной точки $x(t), y(t), z(t)$. Выберем на траектории произвольную точку s в момент времени $t = 0$, тогда $s = s(t)$. Рассматривая s в качестве нового параметра для траектории, получим выражение для скорости:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}[s(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{st} = \boldsymbol{\tau}\dot{s},$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ определяет направление касательной к траектории в рассматриваемой точке. Вычислим ускорение точки:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \tag{2}$$

Определение 9. *Вектором кривизны* называется вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ (см. 2). Он связан с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ и *радиусом кривизны* ρ следующим соотношением:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}.$$

Тогда формула (2) перепишется в виде:

$$\boxed{\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}} \text{ — Ускорение точки.} \tag{3}$$

Определение 10. *Естественным (сопровождающим) трехгранником* называется набор векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, где последний вектор дополняет первые два таким образом, чтобы получившийся базис из трех векторов был правым.

Исходя из вышесказанного можем записать выражения для скорости и ускорения в осях трехгранника:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ v^2/\rho \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

3.2 Теорема Гюйгенса и разложении ускорения точки

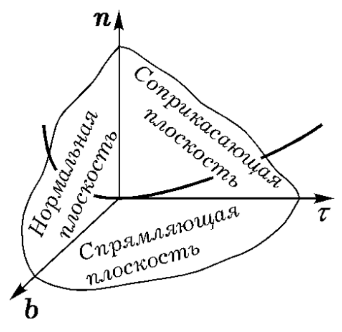

Рис. 2: Сопровождающий трехгранник

Сформулируем теорему:

Теорема 1 (*Теорема Гюйгенса*)**.** *Исходя из формулы (3), ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости. Его можно записать в виде:*

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{w}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{w}_\tau$ *— касательное ускорение,* $\mathbf{w}_n$ *— нормальное ускорение точки.*

3.3 Уравнения Френе-Серре

Рассмотрим вектор кривизны (9) в сопровождающем трехграннике: $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Из выражения

$$\frac{d(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}))}{ds} = (2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}) = (2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}) = 0,$$

откуда получаем, что векторы первой и второй производной $\boldsymbol{\tau}$ ортогональны, следовательно вторая производная направлена по главной нормали:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}} \text{ — Первая формула Френе-Серре.} \tag{5}$$

Рассматривая вектор $\mathbf{b}$ и выполяняя с ним те же действия, что и с вектором $\boldsymbol{\tau}$, приходим ко второй формуле Френе-Серре (коэффициент χ — *кручение* кривой линии):

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}} \text{ — Вторая формула Френе-Серре.} \tag{6}$$

Теперь найдем производную нормали по длине дуги:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d[\mathbf{b}\times\boldsymbol{\tau}]}{ds} = [\frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\boldsymbol{\tau}] + [\mathbf{b}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}] = -\chi\underbrace{[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}]}_{-\mathbf{b}} + \frac{1}{\rho}\underbrace{[\mathbf{b}\times\mathbf{n}]}_{-\boldsymbol{\tau}},$$

откуда следует третья формула Френе-Серре:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \chi\mathbf{b} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau}} \text{ — Третья формула Френе-Серре.} \tag{7}$$

4 Криволинейные координаты точки. Коэффициенты Ламе. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах. Скорость точки в цилиндрических координатах.

4.1 Криволинейные координаты точки

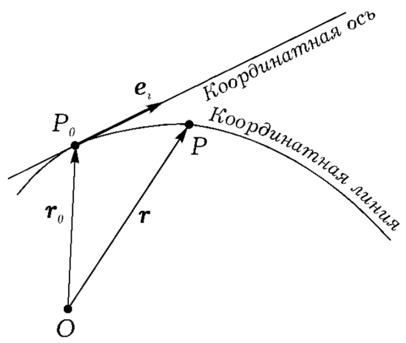

Рис. 3: Оси в криволинейных координатах

Введем определение:

Определение 11 (*Криволинейные координаты*)**.** Всякие три числа q_1, q_2, q_3, однозначно определяющие положение точки в пространстве называются *криволинейными координатами.* Движение считается заданным, если заданы функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Утверждение 2. *Связь между декартовыми и криволинейными координатами дается формулой*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1(t))\mathbf{i} + y(q_2(t))\mathbf{j} + z(q_3(t))\mathbf{k}. \tag{8}$$

Определение 12 (*Координатная линия*)**.** Рассмотрим произвольную точку P_0 (Рис. 3) с координатами q_{10}, q_{20}, q_{30}. *Первой координатной линией* называется кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\cdot, q_{20}, q_{30})$, получающуюся из (8) при фиксированных $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ и переменном q_1. Аналогично получаются *вторая* и *третья координатные линии.*

Определение 13 (*Координатная ось*)**.** Касательную к координатной линии в точке P_0 называют *координатной осью* (соответственно *первой*, *второй* и *третьей*). Единичный $\mathbf{e}_i$ вектор i-ой координатной оси может быть записан в виде

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \text{ где } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\mathbf{k}. \tag{9}$$

4.2 Коэффициенты Ламе

Определение 14 (*Коэффициенты Ламе*)**.** Коэффициент H_i в формуле (9) называется i-ым *коэффициентом Ламе* и равен

$$\boxed{H_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}} \text{ — Коэффициент Ламе.} \tag{10}$$

4.3 Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

Утверждение 3 (*Скорость в КК*)**.** *Из того, что* $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dq_3}\frac{dq_3}{dt} = v_{q_1}\mathbf{e}_1 + v_{q_2}\mathbf{e}_2 + v_{q_3}\mathbf{e}_3$ *следует, что проекции скоростей на координатные оси (опр. 13) равны:*

$$\boxed{v_{q_i} = H_i \dot{q}_i} \text{ — Проекция скорости на координатную ось.} \tag{11}$$

Утверждение 4 (*Ускорение в КК*)**.** *(Вывод см. Маркеев стр. 28) Проекция ускорения на i-ую координатную ось равно*

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{d\dot{q}_i}\right) - \left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dq_i}\right)\right]} \text{ — Проекция ускорения на координатную ось} \tag{12}$$

Если ввести обозначение $T = \frac{v^2}{2}$, то выражение для w_{q_i} можно записать в следующем виде

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)} \text{ — Проекция ускорения на координатную ось (T).} \tag{13}$$

4.4 Скорость и ускорение точки в циллиндрических координатах

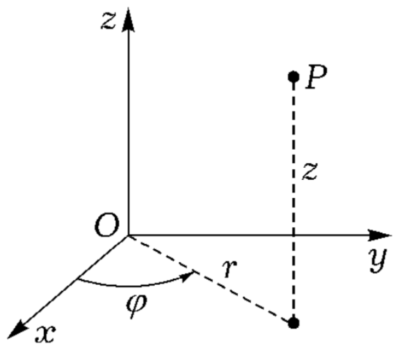

Рис. 4: Циллиндрические координаты

Положим $\begin{cases} q_1 = r, \\ q_2 = \varphi, \\ q_3 = z, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$ Коэффициенты Ламе:

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1.$$

Из формулы (11) получаем:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Так же $T = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2)$, а значит по формуле (13) имеем:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

5 Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае его движения (формулы Эйлера и Ривальса).

5.1 Кинематика твердого тела

Определение 15 (*Абсолютно твердое тело*)**.** *Абсолютно твердое тело* — такая механическая система, у которой взаимные расстояния между всеми точками постоянны.

Определение 16 (*Поступательное движение*)**.** *Поступательным* назовем такое движение, при котором перемещения всех его точек геометрически равны.

Определение 17 (*Вращение*)**.** Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг некоторой неподвижной прямой называется *вращением.*

Определение 18 (*Винтовое перемещение*)**.** *Винтовым перемещением* называется совокупность поступательного перемещения и вращения вокруг неподвижной прямой, вдоль которой происходит поступательное перемещение.

5.2 Углы конечного вращения. Углы Эйлера

С любым твердым телом может быть жестко связан координатный трехгранник (*триэдр*) xyz (Рис. 5), в котором все точки тела неподвижны. Обычно начало триэдра помещается в неподвижную точку твердого тела (ТТ).

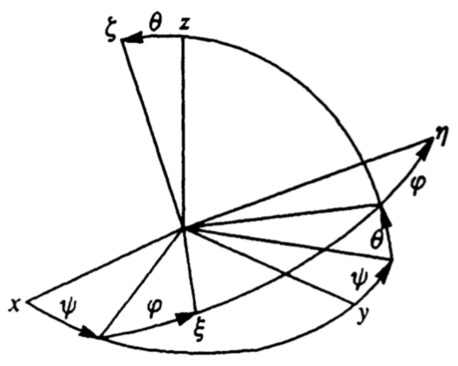

Рис. 5: 3-1-3

Определение 19 (*Ориентация ТТ*)**.** *Ориентация ТТ* определяется как ориентация одного триэдра (жестко связанного с ТТ) относительно другого, принимаемого за неподвижный.

Определение 20 (*Углы конечного вращения*)**.** Три числа ψ, θ, φ, определяющие ориентацию ТТ, не являются *наблюдаемыми* (как это имело место в случае декартовых координат и материальной точки). Углы ψ, θ, φ называют *углами конечного вращения.*

Определение 21 (*Углы Эйлера*)**.** Существует, однако, множество различных способов задать поворот ТТ с помощью углов конечного вращения ψ, θ, φ, но самым распространенным является способ углов Эйлера, так называемый метод «3-1-3»:

- Первый поворот совершается вокруг оси номер три (оси z) на угол ψ (Рис. 5) — *угол прецессии.*
- Второй поворот совершается вокруг оси номер один (оси x) на угол θ (поворачиваем триэдр, получившийся на первом шаге) — *угол нутации.*
- Третий поворот совершается вокруг оси номер три (оси z) на угол φ (поворачиваем триэдр, получившийся на втором шаге) — *угол собственного вращения.*

5.3 Векторно-матричное задание движения ТТ

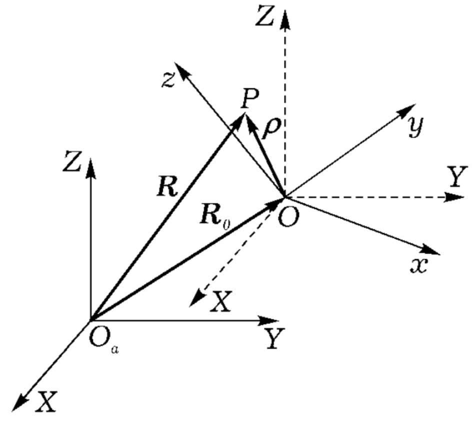

Рис. 6:

Пусть $O_\alpha XYZ$ — абсолютная система координат (Рис. 7), O — произвольная фиксированная точка ТТ, $OXYZ$ — система координат, полученная из $O_\alpha XYZ$ при помощи поступательного перемещения, а $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с ТТ.

Пусть P — некоторая точка ТТ и $\boldsymbol{\rho}$ — ее радиус-вектор в системе координат $Oxyz$. Тогда если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки P в системе координат $OXYZ$, то векторы $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$ связны соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к $OXYZ$. Тогда радиус вектор точки P твердого тела в абаолютной системе координат $O_\alpha XYZ$ задается:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}. \tag{14}$$

5.4 Угловая скорость и угловое ускорение ТТ. Формулы Эйлера и Ривальса

Определение 22 (*Угловая скорость*)**.** Существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый *угловой скоростью* тела, с помощью которого скорость точки P (Рис. 7) может быть представлена в виде

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]} \text{ — Скорость ТТ,} \tag{15}$$

где $\mathbf{v}_O$ — скорость полюса O, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ от полюса не зависит.

Утверждение 5 (*Формула Эйлера*)**.**

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]} \text{ — } \textit{Формула Эйлера.} \tag{16}$$

Определение 23 (*Угловое ускорение*)**.** Чтобы найти ускорение $\mathbf{w}$ точки P твердого тела, продифференцируем выдажение (15), получим:

$$\boxed{\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}]} \text{ — Ускорение ТТ,} \tag{17}$$

где величина $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется *угловым ускорением.*

Утверждение 6 (*Формула Ривальса*)**.** *Подставляя в (17) формулу Эйлера (16), пполучаем*

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]} \text{ — } \textit{Формула Ривальса.} \tag{18}$$

6 Комплексная форма описания плоско-параллельного движения точки и твёрдого тела. Мгновенные центры скоростей и ускорений.

6.1 Комплексная форма описания плоско-параллельного движения точки и твёрдого тела

При аналитическом решении некоторых задач кинематики плоского движения может быть использован метод комплекснозначных функций. Будем рассматривать плоскость движения как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Тогда положение любой точки на ней с радиус-вектором $\mathbf{r}$ задается комплексным числом z.

- Переход в декартову систему координат фактически означает запись числа z в алгебрарической форме $z = x + iy$.
- Переход в полярную систему координат означает запись в показательной форме $z = \rho e^{i\varphi}$. Это можно интерпретировать как результат поворота точки оси абсцисс с координатой ρ на угол φ вокруг начала координат. При необходимости выделить действительную и мнимую части нужно перейти к тригонометрической форме записи $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть движение точки описывается комплексно-значной функцией $z(t)$ вещественного аргумента t. Тогда кинематические характеристики движения (скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$) суть первая и вторая производные функции $z(t)$ по t, то есть так же являются комплекснозначными функциями вещественного аргумента.

Определение 24 (*Радиальная и трансверсальная компонента* $\mathbf{v}$)**.** Так как $\dot{z}(t) = \mathbf{v}(t) = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi})e^{i\varphi}$, то вещественная часть множетеля при $e^{i\varphi}$ — *радиальная* состовляющая вектора скорости, а мнимая часть множетеля при $e^{i\varphi}$ — *трансверсальная* состовляющая вектора скорости.

Определение 25 (*Радиальная и трансверсальная компонента* $\mathbf{w}$)**.** Так как $\ddot{z}(t) = \mathbf{w}(t) = \left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + i(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\right] e^{i\varphi}$, то вещественная и мнимая части множетеля при $e^{i\varphi}$ – суть *радиальная* и *трансверсальная* состовляющие вектора ускорения $\mathbf{w}$.

7 Понятие гиперкомплексной числовой системы. Алгебра кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твёрдого тела. Теорема Эйлера о конечном повороте.

7.1 Алгебра кватернионов

Определение 26 (*Кватернион*)**.** *Кватернионы* представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа и записываются выражениями следующего вида

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ — компоненты кватерниона Λ, а i_1, i_2, i_3 — кватернионные единицы.

Определение 27 (*Кватернионное сложение*)**.** Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры: если $\begin{cases} \Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 \\ M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3, \end{cases}$ то

$$\Lambda + M = (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k + \mu_k) i_k.$$

Определение 28 (*Произведение кватерниона на скаляр*)**.** Произведение кватерниона Λ на скаляр a определятся «поэлементно»

$$a\Lambda = a\lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} a\lambda_k i_k.$$

Определение 29 (*Произведение кватернионов*)**.** Правила умножения кватернионных единиц определяется следующей таблицей:

$i_k \circ i_k = -1$
$i_1 \circ i_2 = i_3$
$i_2 \circ i_3 = i_1$
$i_3 \circ i_1 = i_2$
$i_2 \circ i_1 = -i_3$
$i_3 \circ i_2 = -i_1$
$i_1 \circ i_3 = -i_2$

В связи с этими правилами можно использовать такую интерпретацию кватернионов, при которой элементы i_1, i_2, i_3 отождествляются с единичными векторами, образующими в трехмерном пространстве правую тройку. Тогда по аналогии с комплексными числами, кватернион Λ можно представить как сумму скалярной λ_0 и векторной части $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}.$$

Утверждение 7 (*Формула умножения кватернионов*)**.**

$$\boxed{\Lambda \circ M = \lambda_0\mu_0 + \lambda_0\boldsymbol{\mu} + \mu_0\boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}] - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu})} \tag{19}$$

Определение 30 (*Сопряженный кватернион*)**.** По аналогии с комплексными числами, определяется сопряженный кватернион $\widetilde{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$ к кватерниону $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$.

Определение 31 (*Норма кватерниона*)**.** *Нормой* кватерниона называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение:

$$\|\Lambda\| = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2.$$

Если $\|\Lambda\| = 1$, то такой кватернион называется *нормированным*. Норма произведения кватернионов: $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$.

Определение 32 (*Обратный кватернион*)**.** Кватернионом, *обратным* к Λ называется кватернион Λ^{-1}, определяемый из условия

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1.$$

Домножим обе части $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$ на $\widetilde{\Lambda}$ слева и получим:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\widetilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|}.$$

7.2 Кватернионный способ задания ориентации ТТ

Теорема 2 (*О положении ТТ*)**.** *Пусть базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ связан с ТТ, а базис $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ — неподвижен. Произвольное положение ТТ с неподвижной точкой задается нормированным кватернионом Λ по формулам:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \Lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \widetilde{\Lambda}, \\ \mathbf{e}_2 = \Lambda \circ \mathbf{i}_2 \circ \widetilde{\Lambda}, \\ \mathbf{e}_3 = \Lambda \circ \mathbf{i}_3 \circ \widetilde{\Lambda} \end{cases} \tag{20}$$

7.3 Теорема Эйлера о конечном повороте тела с неподвижной точкой

Теорема 3. *Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}$ на угол $\theta = 2\arccos\lambda_0$, где $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ — нормированный кватернион, задающий положение тела.*

□ Запишем кватернион Λ в тригонометрической форме: $\Lambda = \cos\varphi + \mathbf{e}\sin\varphi$, где $\cos\varphi = \lambda_0$ и $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}$. Дополним вектор $\mathbf{e}$ единичными векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ до правой тройки таким образом, чтобы вектор $\mathbf{r}$ оказался в плоскости векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{j}$. Тогда $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta)$. Учитывая, что из условия ортогональности векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{j}$ следует равенство $\mathbf{j} \circ \widetilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{j}$, по теореме о положении твердого тела получим

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}|(\Lambda \circ \mathbf{e} \circ \widetilde{\Lambda}\cos\beta + \Lambda \circ \mathbf{j} \circ \widetilde{\Lambda}\sin\beta) = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + (\mathbf{j}\cos 2\varphi + \mathbf{k}\sin 2\varphi)\sin\beta),$$

сравнивая полученное выражение с вектором $\mathbf{r}$, получаем требуемое. ■

8 Формулы сложения поворотов твёрдого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона. Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой.

8.1 Формулы сложения поворотов твердого тела в кватернионах

Пусть кватернион Λ задает поворот тела из базиса $\mathbf{I}$ в базис $\mathbf{I}'$, а кватернион M — из базиса $\mathbf{I}'$ в базис $\mathbf{I}''$. В результате двух указанных поворотов начальное положение $\mathbf{r}$ точки тела преобразуется в конечное положение $\mathbf{r}''$ по формуле:

$$\mathbf{r}'' = M \circ \mathbf{r}' \circ \widetilde{M} = M \circ \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \widetilde{\Lambda} \circ \widetilde{M} = N \circ \mathbf{r} \circ \widetilde{N},$$

где $N = M \circ \Lambda$ — кватернион результирующего поворота.

По индукции можно показать, что в случае n последовательных поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, формула сложения имеет вид:

$$N = \Lambda_n \circ \ldots \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1.$$

8.2 Параметры Родрига-Гамильтона

Запишем единичный кватернион в форме $\Lambda = \lambda_0 + \lambda\mathbf{e}$, где $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$, а вектор $\mathbf{e}$ — единичный вектор, задающий направление вектора $\boldsymbol{\lambda}$.

Так как кватернион Λ — единичный, то $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$. Два скаляра, удовлетворяющих уравнению единичной окружности всегда могут быть представлены в таком виде, что

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Теорема 4 (*О повороте базиса*)**.** *Поворот, определяемый кватернионом $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ — есть поворот вокруг вектора $\mathbf{e}$ на угол φ.*

□ Доказательство состоит в непосредственном вычислении матрицы поворота A по заданному кватерниону Λ. Между всеми ортогональными матрицами ($\det A = 1$) и всеми поворотами твердого тела существует взаимнооднозначное соответствие. Действительно, рассмотрим образ первого единичного вектора триедра xyz:

$$\mathbf{i}' = A\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

то есть образом первого орта является первый столбец матрицы A (аналогично для остальных).

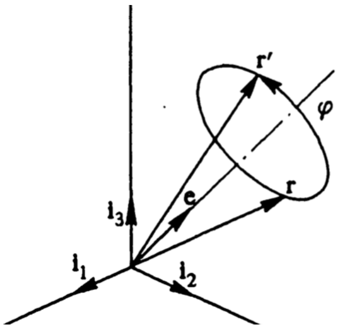

Рис. 7:

Столбцы матрицы A представляют собой образы ортов исходного базиса. Вычислим эти образы. При этом исходный базис выберем так: $\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \perp \mathbf{e}$. Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_1 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2}) = \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{i}_2' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_2\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_2 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_2\sin\frac{\varphi}{2}) = \mathbf{i}_2\cos\varphi + \mathbf{i}_3\sin\varphi, \\ \mathbf{i}_3' = (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \mathbf{i}_3 \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_3\sin\frac{\varphi}{2}) = -\mathbf{i}_2\sin\varphi + \mathbf{i}_3\cos\varphi. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. ■

Таким образом, в записи единичного кватерниона $\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$, вектор $\mathbf{e}$ есть единичный вектор оси *Эйлерова* поворота, а φ — угол этого поворота.

Определение 33 (*Параметры Родрига-Гамильтона*)**.** В покомпонентной записи кватернион $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ имеет вид

$$\Lambda = \left\{\cos\frac{\varphi}{2}, x\sin\frac{\varphi}{2}, y\sin\frac{\varphi}{2}, z\sin\frac{\varphi}{2}\right\}, \tag{21}$$

коэффициенты которого носят название параметров *Родрига-Гамильтона* конечного поворота.

Теорема Эйлера о конечном повороте твёрдого тела с неподвижной точкой — 7.3.

9 Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Прецессионное движение твёрдого тела.

9.1 Уравнения Пуассона

Рассмотрим движение тела с неподвижной точкой O относительно базиса $\mathbf{I}$. Моментам времени t и $t+\Delta t$ соответствуют положения связанного с телом базиса $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{E}(t+\Delta t)$.

По теореме Эйлера о конечном повороте (7.3) указанные положения можео совместить одним поворотом вокруг некоторой оси $\mathbf{e}(t,\Delta t)$ на некоторой угол $\Delta\varphi(t,\Delta t)$.

Угловой скоростью твердого тела относительно базиса $\mathbf{I}$ в момент времени t называется предел

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi(t,\Delta t)}{\Delta t}\mathbf{e}(t,\Delta t). \tag{22}$$

Найдем выражение для вектора угловой скорости через кватернион $\Lambda(t)$, задающий положение ТТ относительно базиса I. Из формулы сложения поворотов (8.1) $\Lambda(t+\Delta t) = \delta\Lambda\circ\Lambda(t)$, где $\delta\Lambda$ — кватернион, который соответствует перемещению тела из положения $\mathbf{E}(t)$ в положение $\mathbf{E}(t+\Delta t)$. Исходя из теоремы номер (4) кватернион $\delta\Lambda$ запишется в виде

$$\delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \mathbf{e}(t,\Delta t)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 1 + \mathbf{e}(t,\Delta t)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} + O((\Delta\varphi)^2).$$

Найдем $\dot\Lambda$, для этого посчитаем следующую разность:

$$\Delta\Lambda = \Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t) = \delta\Lambda\circ\Lambda(t) - \Lambda(t) = (\delta\Lambda - 1)\circ\Lambda(t),$$

откуда следует

$$\dot\Lambda = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta\Lambda - 1}{\Delta t}\circ\Lambda(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda(t). \tag{23}$$

Утверждение 8 (*Уравнения Пуассона*)**.** *Из формулы (23) следуют два уравнения*

$$\boxed{\begin{cases}\dot\Lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\Lambda(t),\\ \boldsymbol{\omega} = 2\dot\Lambda\circ\widetilde{\Lambda}.\end{cases}} \text{ — \textit{Уравнения Пуассона}} \tag{24}$$

где кватернион $\Lambda(t)$ задает положение твердого тела относительно базиса $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела относительно базиса $\mathbf{I}$.

9.2 Прецессионное движение твердого тела

Определение 34 (*Прецессионное движение*)**.** Движение ТТ с неподвижной точкой называется *прецессионным*, если некоторая фиксированная в ТТ ось $\mathbf{e}$ (проходящая через неподвижную точку), совершает движение по поверхности неподвижного кругового конуса. Если составляющие угловой скорости не зависят от времени, то такая прецессия называется *регулярной*.

Пусть ось $\mathbf{e}$ — фиксированная в теле ось, а ось $\mathbf{i}$ — ось конуса (по поверхности которого движется ось тела $\mathbf{e}$). Пусть угол между осями $\mathbf{e}$ и $\mathbf{i}$ равен θ, и он, очевидно, не зависит от времени, следовательно $(\mathbf{i}\cdot\dot{\mathbf{e}}) = 0$, отсюда, с учетом формулы $\dot{\mathbf{e}} = [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]$ (16), получаем $(\mathbf{i}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]) = 0$, то есть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела раскладывается на ось конуса $\mathbf{i}$ и ось тела $\mathbf{e}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1(t)\mathbf{i} + \omega_2(t)\mathbf{e}.$$

Определение 35 (*Оси прецессии и собственного вращения*)**.** Ось конуса $\mathbf{i}$ называется *осью прецессии*, а ось тела $\mathbf{e}$ (которая совершает вращение по поверхности конуса) называется *осью собственного вращения.*

Определение 36 (*Угловые скорости прецессии и собственного вращения*)**.** Проекция угловой скорости ТТ на ось прецессии ω_1 называется *угловой скоростью прецессии.* Проекция угловой скорости ТТ на ось собственного вращения ω_2 называется *угловой скоростью собственного вращения.*

10 Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось. Представление винтового движения твёрдого тела с помощью дуальных чисел.

10.1 Кинематические инварианты

1. В определении угловой скорости ТТ (22), $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора полюса P. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *первым кинематическим инвариантом.*

2. Из определения (22) следует, что для любых двух точек тела A и B, скалярные произведения их скоростей на вектор $\boldsymbol{\omega}$ одинаковы. *Вторым кинематическим инвариантом* будем называть скалярное произведение скорости точки тела на угловую скорость тела: $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$.

10.2 Дуальные числа и их свойства

Рассмотрим трансцендентное расширение поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ в виде $z = a + bE$, где трансцендентный элемент $E \notin \mathbb{R}$ обладает свойством:

$$E^2 = p + qE, \ p, q \in \mathbb{R}.$$

Определение 37 (*Алгебра дуальных чисел*)**.** Если $(E - \frac{q}{2})^2 = p + \frac{q^2}{4} = 0$, полагая $\varepsilon = \frac{E - \frac{q}{2}}{k}$, $(\varepsilon^2 = 0)$ получаем расширение $\mathbb{R}$ в виде алгебры *дуальных чисел.* Для дуального числа $A = a + \varepsilon b$ имеет место представление

$$A = a + \varepsilon b = a[1 + \varepsilon(b/a)] = a[1 + \varepsilon p(A)],$$

где a — главная часть, $b = \operatorname{mom} A$ — моментная часть, $b/a = p(A)$ — параметр дуального числа A.

Действия над дуальными числами:

- Ассоциативны по отношению к умножению: $(a_1 + \varepsilon b_1)(a_2 + \varepsilon b_2) = (a_1 a_2) + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
- Дистрибутивны по отношению к сложению: $(a_1 + \varepsilon b_1) + (a_2 + \varepsilon b_2) = (a_1 + a_2) + \varepsilon(b_1 + b_2)$.

Любая аналитическая функция, представимая степенным рядом своего аргумента, может рассматриваться как дуальная функция дуального аргумента $\Phi = \varphi + \varepsilon\psi$. В частности

$$\cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\psi\sin\varphi, \qquad \sin\Phi = \sin\varphi + \varepsilon\psi\cos\varphi.$$

P.S.

Проще говоря, дуальные числа — гиперкомплексные числа вида $a + \varepsilon b$, где ε — абстрактный элемент, квадрат которого равен нулю. Любое дуальное число однозначно определяется такой парой чисел a, b.

В отличии от комплексных чисел, алгебра дуальных чисел содержит в себе делители нуля, причес все они имеют вид $a\varepsilon$. Плоскость всех дуальных чисел представляет собой «альтернативную комплексную плоскость».

10.3 Описание винтового движения

Определение 38 (*Винтовое движение ТТ*)**.** Винтовым движением ТТ называют движение, при котором помимо вращения вокруг неподвижной оси имеет место его поступательное перемещение вдоль этой оси.

Для описания винтового движение вводится понятие *дуального угла*, характеризующего взаимное расположение двух скрещивающихся прямых:

Определение 39 (*Дуальный угол*)**.** Дуальный угол характеризует взаимное расположение двух скрещивающихся прямых. Мерой дуального угла является дуальное число $\Phi = \varphi + \varepsilon s$. Рассмотрим две скрещивающиеся прямые и единичный вектор $\mathbf{e}$, задающий общий перпендикуляр. Тогда главная часть числа Φ (величина φ) определяет угол поворота одной из прямых вокруг вектора $\mathbf{e}$, в результате которого прямые станут параллельными, а моментная часть числа Φ (величина s) — смещение этой прямой, в результате которого прямые совпадут.

P.S. Числа φ и s считаются положительными, если вращение и перемещение совершаются в положительном направлении оси $\mathbf{e}$.

P.S. Очевидно, что если прямые пересекаются под углом φ, то дуальный угол Φ становится вещественным. А если прямые параллельны, то дуальный угол содержит только моментную часть.

Утверждение 9 (*Представление винтового движения ТТ с помощью дуальных чисел*)**.** *Винтовое движение можно представить в виде композиции вращения вокруг оси с вектором* $\mathbf{e}$ *на угол* φ *и смещения на величину* s *вдоль этой же оси. В терминах кватернионах, получаем так называемый дуальный кватернион* $\Lambda_\Phi = \cos\frac{\Phi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\Phi}{2}$, *где* $\Phi = \varphi + \varepsilon s$ *— дуальное число.*

$$\boxed{\Lambda_\Phi = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon\frac{s}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \left(1 + \varepsilon\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \Lambda_\varphi \circ \Lambda_{\mathbf{s}} = \Lambda_{\mathbf{s}} \circ \Lambda_\varphi}. \tag{25}$$

11 Несвободные системы. Связи и их классификация. Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы. Число степеней свободы системы. Теорема Фробениуса о голономности дифференциальной связи в $\mathbb{R}^3$ (только формулировка).

11.1 Несвободные системы. Связи и их классификация

Определение 40 (*Несвободная система*)**.** Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ относительно некоторой прямоугольной системы координат, предполагаемой неаодвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\mathbf{r}_\nu$ и скоростями $\mathbf{v}_\nu$ ее точек. *Связями* называются ограничения, накладываемые на величины $\mathbf{r}_\nu$ и $\mathbf{v}_\nu$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах. Если на систему наложены связи, то она называется *несвободной.*

Приведем примеры несвободных систем:

1. Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи (*удерживающая, геометрическая*).

2. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$ (*удерживающая, геометрическая*).

3. Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь в этом случае задается соотношением $l^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geqslant 0$ (*неудерживающая*)

Определение 41 (*Виды связей*)**.** В общем случае связь задается соотношением

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = f(r_1, \ldots, r_N, v_1, \ldots, v_N, t) \geqslant 0. \tag{26}$$

- (**Удерживающая**) Если в неравенстве (26) реализуется только знак равенства, то такая связь называется *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей).*

- (**Неудерживающая**) Если в неравенстве (26) реализуется как знак равенства, так и знак неравенства, то такая связь называется *неудерживающей (односторонней, освобождающей).* Системы с неудерживающими связями далее не рассматриваются.

- (**Геометрическая**) Если уравнение связи можнозаписать в виде $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то такая связь называется *геометрической (конечной,голономной).*

- (**Дифференциальная**) Если в уравнение связи $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ входят проекции скоростей $\mathbf{v}_\nu$, то связь называется *дифференциальной (кинематической).*

- (**Интегрируемая**) Дифференциальную связь $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и времени (как в случае геометрической связи).

- (**Неинтегрируемая**) Если дифференциальную связь $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ нельзя представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем, то ее называют *неинтегрируемой (неголономной).*

P.S.

Если на система материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной.* Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной.*

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи линейны относительно проекций $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ скоростей точек системы. Таким образом, в дальнейшем мы будем изучать движение свободных механических систем или несвободных систем со связями, аналитическое представление которых имеет вид:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{27}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu) + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{28}$$

Векторы $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ и t. В частных случаях r и s могут быть равны нулю.

Определение 42 (*Стационарные или склерономные связи*)**.** Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если переменная t не входит в уравнения (27).

Дифференциальные связи называются *стационарными* или *склерономными*, если функция $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ (28) не зависит явно от t, а функции a_β тождественно равны нулю.

Определение 43 (*Склерономные система*)**.** Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи.

Определение 44 (*Реономная система*)**.** Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

11.2 Возможные, действительные и виртуальные перемещения точек системы.

Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, задаваемом радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}^*_{\nu 0}$, а скорости точек имеют некоторые конкретные возможные значения $\mathbf{v}^*_{\nu 0}$. Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиусов-вектором $\mathbf{r}_\nu$ точек системы для моментов времени t, следующих за t^*. Если обозначить за dt приращение времени $t - t^*$, то приращения радиус-векторов точек системы можно представить в виде:

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}^*_{\nu 0}dt + \frac{1}{2}\mathbf{w}^*_{\nu 0}(dt)^2 + \ldots, \tag{29}$$

где $\mathbf{w}^*_{\nu 0}$ — ускорения точек системы в момент времени $t = t^*$; многоточием обозначены величины порядка $(dt)^3$ и выше.

Определение 45 (*Действительные (истинные) перемещения*)**.** Величины в (29) суть *действительные (истинные)* перемещения точек системы за время dt.

Определение 46 (*Виртуальные перемещения*)**.** Пусть в момент времени $t = t^*$ система занимает некоторое положение, определяемое радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}^*_\nu$. *Виртуальными перемещениями* системы называется совокупность величин $\delta\mathbf{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{30}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s), \tag{31}$$

где величины $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}$ и $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ вычислены при $t = t^*$, $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}^*_\nu$.

12 Элементарная работа сил системы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Случай потенциального поля сил.

13 Голономные связи. Достаточное условие голономности дифференциальной связи. Идеальные связи. Уравнения Лагранжаа голономной системы с идеальными связями и их свойства: ковариантность, невырожденность.

14 Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа и её преобразование. Циклические координаты и первые интегралы.

15 Натуральные и ненатуральные системы. Анализ выражения кинетической энергии системы как функции обобщённых скоростей. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

16 Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Интеграл энергии, консервативные системы. Гироскопические силы. Диссипативные силы, функция Релея.

17 Движение материальной точки в центральном поле. Интеграл площа- дей; второй закон Кеплера. Уравнение Бине.

18 Движение точки в поле всемирного тяготения: уравнение орбиты, зако- ны Кеплера. Интеграл площадей, интеграл энергии, интеграл Лапласа. Задача двух тел.

19 Момент инерции системы относительно оси. Матрица тензора инерции. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Преобразование матрицы тензора инерции при параллельном переносе осей и ортогональном преобразовании. Свойства осевых моментов инерции.

20 Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки или вокруг неподвижной оси. Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела при его произвольном движении.