Лекция: Функция Гамильтона. Канонические уравнения

Александр Батхин

Кафедра теоретической механики МФТИ

Курс «Математические методы аналитической механики»
ФИВТ, II курс, весенний семестр, 2019–2010 уч. год

Преобразование Лежандра

Определение

Преобразование Лежандра функции $f(\mathbf{x})$ есть функция $g(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p})$ находится из соотношения $\mathbf{p} = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$.

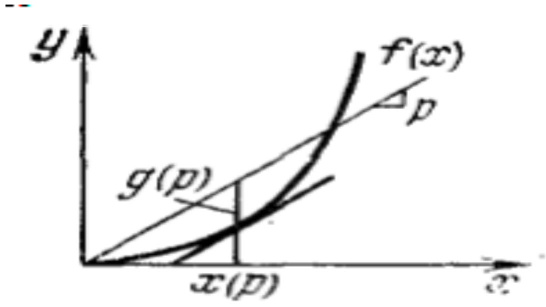

Рис.: Преобразование Лежандра функции $f(\mathbf{x})$.

Пример. Преобразование Лежандра степенной функции

- Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0$$

- Тогда

$$p = f'(x) = x^{\alpha - 1} \Rightarrow x = p^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

- Применяя преобразование Лежандра, получаем

$$g(p) = \left[p \cdot x - \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \right] \Bigg|_{x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}} = p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Вывод:

только при $\alpha = 2$ степенная функция переходит сама в себя.

Преобразование Лежандра функции Лагранжа

Пусть $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – функция Лагранжа натуральной механической системы, определённая на расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times TM$. Тогда L есть выпуклая квадратичная функция от обобщённых скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ и, следовательно, вектор обобщённой скорости $\dot{\mathbf{q}}$ выражается из уравнения $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$. Здесь $\mathbf{p}$ — вектор обобщённого импульса.

Определение

Преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot{\mathbf{q}}$ есть результат преобразования

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left[(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right]\Big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})},$$

а функция $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ называется **функцией Гамильтона** или **гамильтонианом**.

Теорема Эйлера об однородной функции

Определение

Функция $F(\boldsymbol{\xi})$ называется однородной степени k, если

$$F(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda^k F(\boldsymbol{\xi}),$$

где $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Теорема (Эйлера)

Пусть $F(\boldsymbol{\xi})$ — однородная функция степени k. Тогда имеет место формула

$$\left(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial F(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = kF(\boldsymbol{\xi}).$$

Доказательство.

Дифференцируя равенство $F(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda^k F(\boldsymbol{\xi})$ по λ и полагая $\lambda = 1$, получаем требуемое соотношение. □

Структура функции H

Для натуральной системы общего вида с Лагранжианом

$$L = L_2 + L_1 + L_0 = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

имеем $H = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) - L = \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}\right) - L =$

в силу теоремы Эйлера

$= (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0 =$

с учётом структуры L_0

$= T_2 - T_0 + \Pi.$

Следовательно, H есть обобщённая энергия системы.

Если система **склерономна**, то $H = T + \Pi$, т.е. является функцией полной энергии системы.

Схема преобразования Лежандра функции Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа натуральной механической системы в виде $L = T - \Pi$.
2. Из системы $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ выразить $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$.
3. Подставить $\dot{\mathbf{q}}$ в выражение

$$H = \left[(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) - L\right]\big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})}.$$

Замечание

Преобразование Лежандра можно записать в симметричной форме $H + L = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}})$ откуда сразу следует его инволютивность.

Преобразование выпуклой квадратичной функции

Во многих приложения функция Лагранжа $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ есть квадратичная функция от обобщённых скоростей $\dot{\mathbf{q}}$:

$$L = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{a}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(t, \mathbf{q}),$$

где матриц-функция A и вектор-функция $\mathbf{a}$ зависят от переменных $t, \mathbf{q}$. Тогда имеем

$$\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}} = A\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}).$$

Подставляя последнее выражение в формулу преобразования Лежандра после серии упрощений получаем

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p}\right) - \left(A^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{p}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right) + \Pi(t, \mathbf{q}).$$

Канонические уравнения

Для получения уравнений движения и основных свойств функции Гамильтона H выпишем её полный дифференциал:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, d\mathbf{q}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, d\mathbf{p}\right) = \left(\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, d\dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, d\mathbf{q}\right) + (\dot{\mathbf{q}}, d\mathbf{p}).$$

Осталось учесть, что $\mathbf{p} - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$ и $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{p}}$.

Приравнивая выражения при одинаковых дифференциалах, получим **канонические уравнения**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases}$$

Свойства функции Гамильтона

Из предыдущих выкладок непосредственно получаем:

1. $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$, $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$.
2. $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$. Действительно,
$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}\right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$
подставляем правые части уравнений Гамиль
Следовательно, если функция H не зависит явно от времени, то она есть первый интеграл системы канонических уравнений: $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = \mathrm{const}$.
3. Если координата q_i циклическая, т. е. $\partial H / \partial q_i = 0$, то $p_i = \mathrm{const}$, т. е. является первым интегралом системы.

Замечание о сопряжённом пространстве

Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ выбрана система координат $\mathbf{x}$, то сопряжённое пространство — это пространство **линейных функционалов** $\mathbf{y}$ на $\mathbf{x}$, т.е. таких линейных функций, что $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_i x_i y_i = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Сопряжённое пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$, но закон преобразования векторов в нём иной.

Пусть определена замена координат $\mathbf{X} = A\mathbf{x}$, где A — невырожденная матрица. Тогда
$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \left(\mathbf{y}, A^{-1}\mathbf{X}\right) = \left(\mathbf{y}A^{-1}, \mathbf{X}\right) = (\mathbf{Y}, \mathbf{X}).$$
Следовательно, $\mathbf{Y} = \mathbf{y}A^{-1}$.

Такие объекты называются **ковекторами**.

Фазовое пространство

Поскольку вектор $\mathbf{p}$ берётся из сопряжённого пространства, то функция Гамильтона $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ определена на т.н. **кокасательном расслоении** TM^*. Это расслоение есть дифференцируемое многообразие размерности $2n$.

Будем называть его **фазовым пространством** соответствующей системы Гамильтона, а $\mathbb{R} \times TM^*$ — расширенным фазовым пространством.

Введём фазовый вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, тогда система канонических уравнений запишется в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = J\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & E^n \\ -E^n & 0 \end{pmatrix} \text{— симплектическая единица.}$$

Матрица J обладает свойствами

$$J^{-1} = J^{\mathrm{T}} = -J, \quad J \cdot J^{\mathrm{T}} = E^{2n}, \quad \det J = 1.$$

Рекомендуемая литература

- *Амелькин Н. И.* Лагранжева и гамильтонова механика. М.: МФТИ, 2014. 112 с.
- *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- .Теоретическая механика. /. С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещёв. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 432 с.
- *Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Д.* Классическая механика. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2012. 828 с.
- *Голубев Ю. Ф.* Основы теоретической механики. 2-е изд. М.: Изд–во МГУ, 2000. 719 с.
- *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
- *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. 3-е изд. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.