Traitement du Signal

Analyse spectrale

Plan

1. Analyse de Fourier signaux continus
    1. TF
    2. Distributions
    3. Systèmes linéaires
2. Signaux Numériques
    1. Échantillonnage
    2. Quantification, Bruit de quantification
    3. TFD-TFR
3. Analyse spectrale des signaux déterministes
    1. Fenêtres d'apodisation
    2. Spectre d'amplitude
    2. Estimation de la Densité Spectrale de Puissance
4. Analyse spectrale des signaux aléatoires
    1. Propriétés temporelles des signaux aléatoires
    2. Propriétés fréquentielles des signaux aléatoires
    3. Estimation de la densité spectrale de puissance
    4. Applications
5. Application
    1. Calcul du seuil de perception auditive dans MPEG

http://thierry.paquet.free.fr

Quelques notions…

Un signal représente l'évolution au cours du temps (pas toujours) d'une grandeur physique (courant, tension, pression etc…)

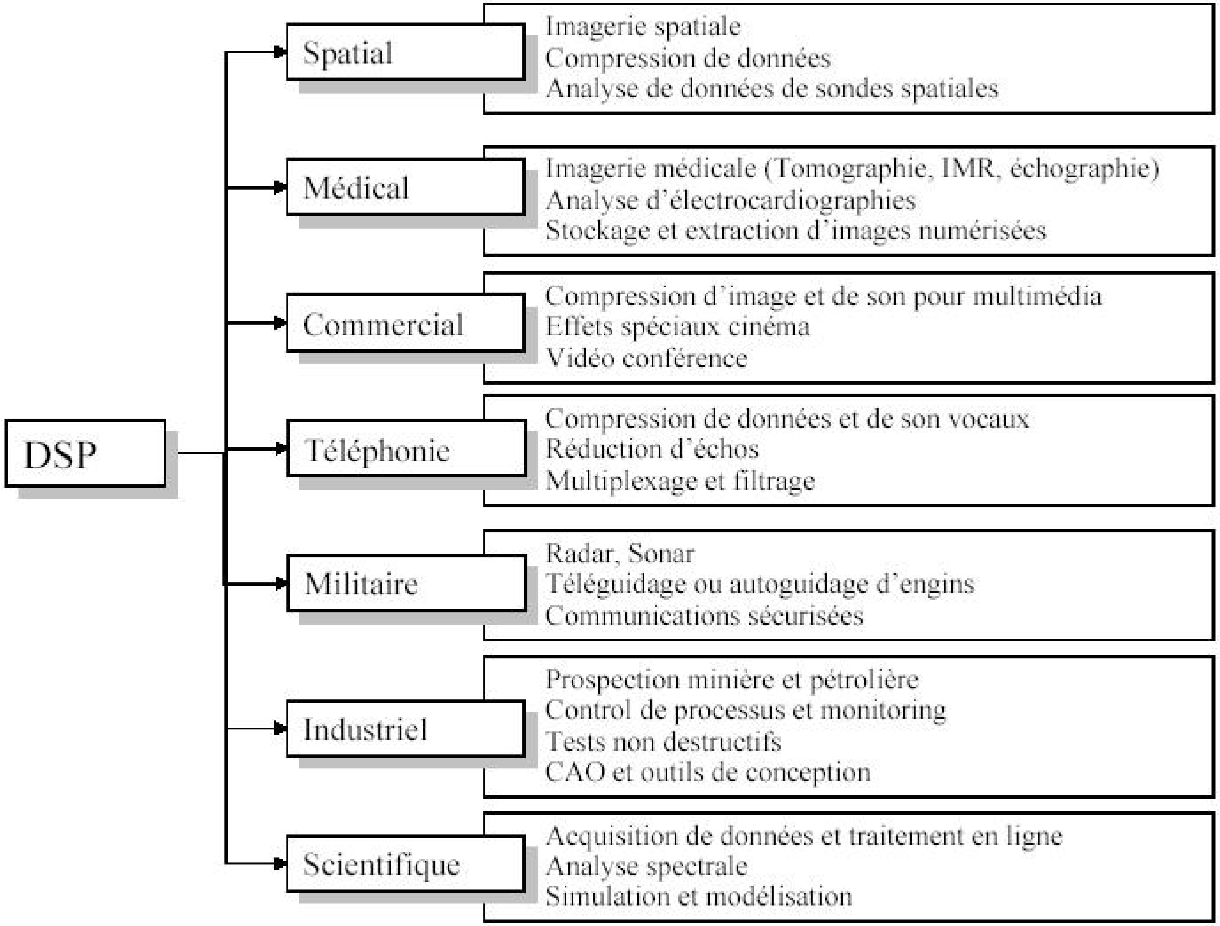
Ce signal est porteur d'une information produite par la source qui l'a émis:

- signal de parole (acoustique)
- signal radio (EM)
- signal radar (EM)

Analyser le signal c'est extraire l'information produite par la source pour:

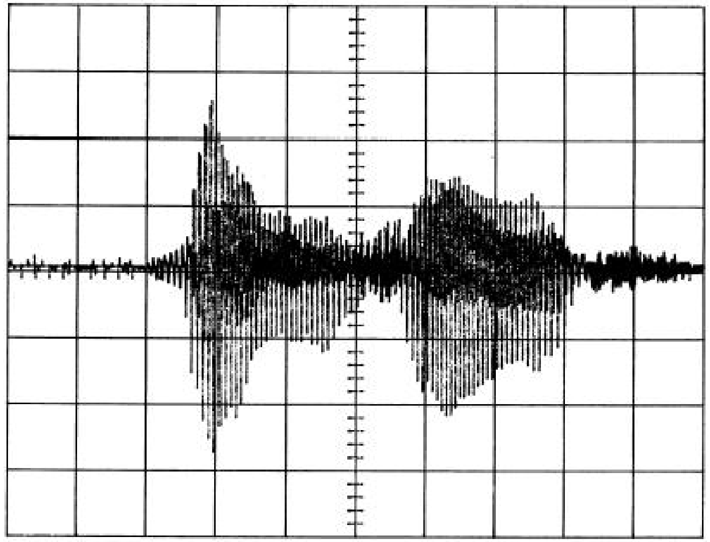
- la reproduire fidèlement: radio
- détecter des évènements: surveillance, détection
- connaître les propriétés de la source: bande passante…

Quelques applications…

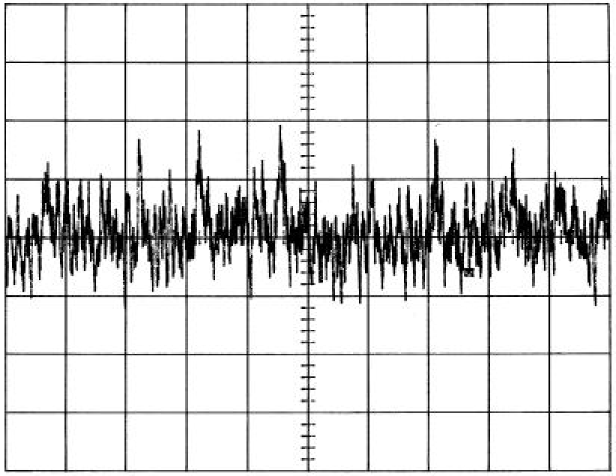


Quelques applications…

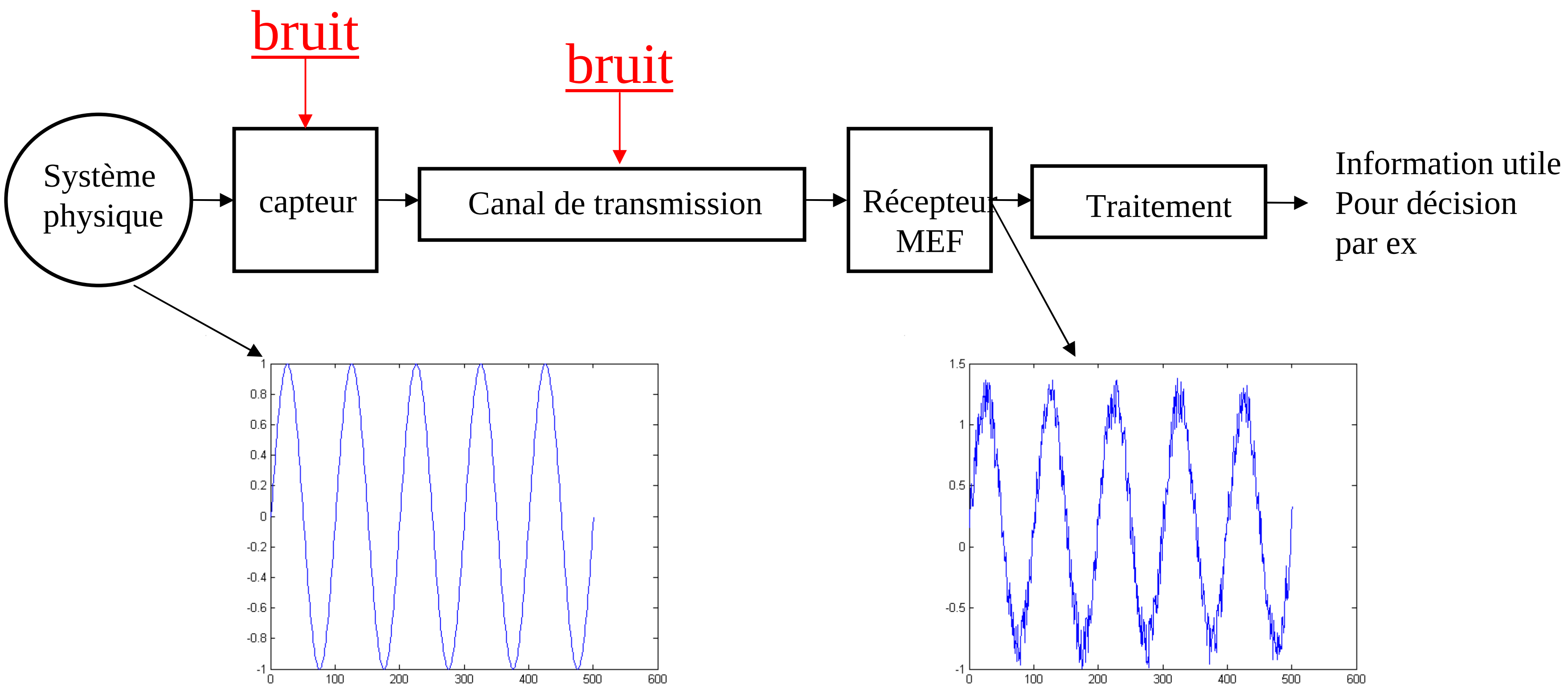
Bonjour



« B » de
Bonjour

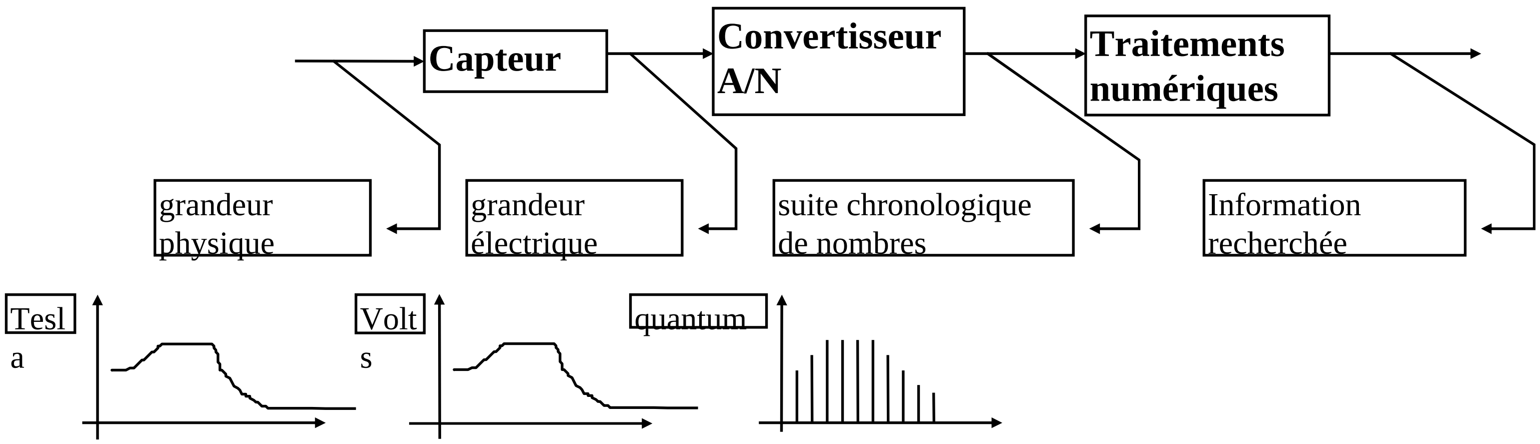


Déterministe / Aléatoire



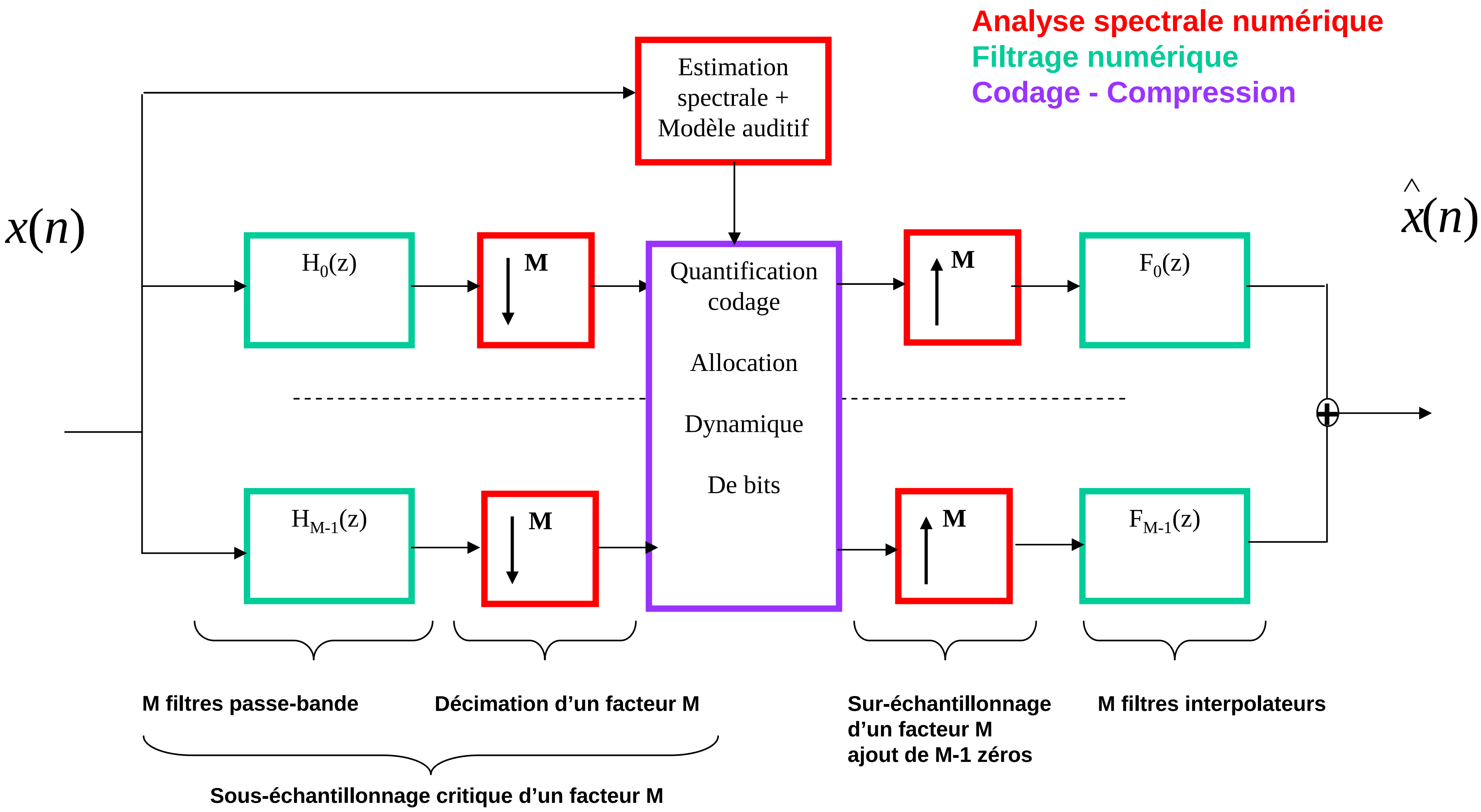
Introduction

Organisation d'un système de traitement numérique du signal



Traitement numérique = Programme de traitement

Exemple : Compression Audio



1. Analyse de Fourier

Intérêt:

- Décomposition d'un signal quelconque sur une base orthogonale de signaux élémentaires.

-Facilite l'étude des systèmes répondant au principe de superposition.

Signaux Harmoniques Analogiques

Représentation temporelle

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t) = \frac{A}{2}(\exp(2\pi j f_o t) + \exp(-2\pi j f_o t))$$

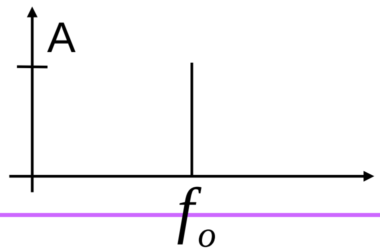
t est la variable, A et fo sont les 2 paramètres
qui caractérisent complètement le signal

Représentation fréquentielle

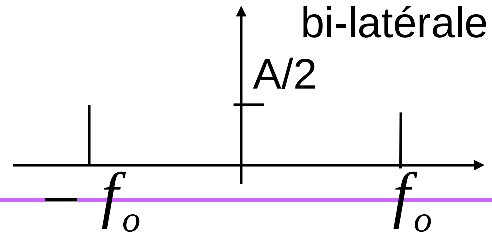
$$X(f) = A\delta(f_o) = \frac{A}{2}\delta(f_o) + \frac{A}{2}\delta(-f_o)$$

f est la variable, A et fo sont les 2 paramètres
qui caractérisent complètement le signal

mono-latérale



bi-latérale



Signaux Périodiques Analogiques (1)

Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique $x_p(t)$ **de période** $T_o = \dfrac{1}{f_o}$ **peut s'écrire**

$$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \; n f_o t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi \; n f_o t)$$

$$x_p(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \cos(2\pi \; n f_o t + \varphi_n)$$

avec

$$a_o = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_p(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x_p(t)\cos(2\pi n f_o t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x_p(t)\sin(2\pi n f_o t)dt$$

$$\varphi_n = Arctg(\frac{b_n}{a_n})$$

Signaux Périodiques Analogiques (1)

Un signal périodique présente donc un spectre de raies :

Spectre d'amplitude

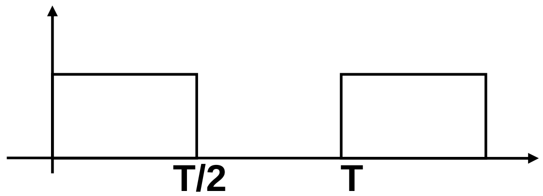
$$\left|X(f)\right| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}\delta(f - nf_o)$$

Spectre de phase

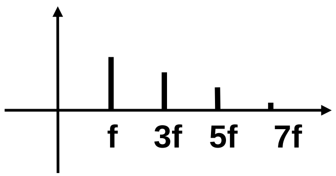
$$\varphi_n = Arctg(\frac{b_n}{a_n})$$

Signaux Périodiques Analogiques (2)

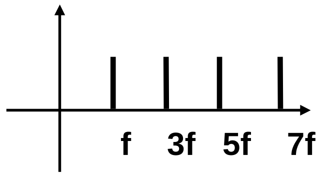
Exemple, cas d'un signal carré :



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

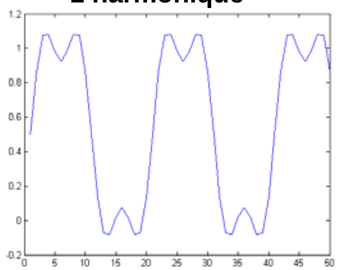


$$a_o = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0$$

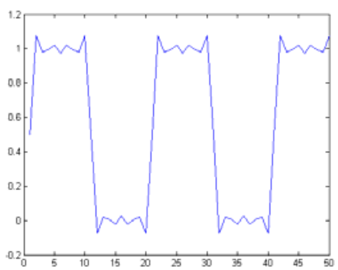
$$\varphi_n = Arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \quad si \quad n \quad impair \qquad b_n = 0 \quad \sin on$$

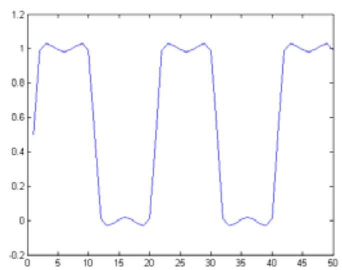
1 harmonique



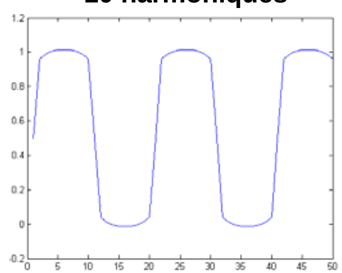
5



7



10 harmoniques



Signaux Analogiques (1)

Signaux périodiques – Série de Fourier – Notations complexes

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n \exp(2\pi j n f_o t)$$

spectre de raies

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^{To} x_p(t) \exp(-2\pi j n f_o t) dt$$

Égalité de Bessel-Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

On peut calculer la puissance sur la représentation temporelle
ou sur la représentation fréquentielle

Signaux Analogiques (2)

Signaux quelconques – Transformée de Fourier

on considère que le signal a une période infinie

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp(2\pi jft)df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-2\pi jft)dt$$

Spectres: les spectres deviennent continus

$$\left|X(f)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(X(f) + \mathrm{Im}^2(X(f)}$$

$$\Phi(f) = Arctg(\frac{\mathrm{Im}(X(f)}{\mathrm{Re}(X(f)})$$

Conservation de l'énergie – Bessel parsseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

Signaux Analogiques (3)

Propriétés de la TF:

dérivation

$$F[x'(t)] = 2\pi jf \quad F(x(t)) = 2\pi jf \quad X(f)$$

retard

$$F[x(t-\tau)] = \exp(-2\pi jf\tau) \quad X(f)$$

dilatation

$$F[x(at)] = \frac{1}{a} \quad X(f/a)$$

Produit de convolution (Filtrage)

$$F[x(t) \otimes u(t)] = X(f) \times U(f)$$

Signaux Analogiques (4)

Distributions:

Définie sur l'espace vectoriel des fonctions de R^n indéfiniment dérivables et à support borné

Exemple:
Soit **f** une fonction sommable sur tout ensemble borné, elle définit une distribution D_f par la relation:

$$\langle D_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

Dirac:

$$\langle \delta(t), \varphi \rangle = \varphi(0)$$

$$\langle \delta(t-x), \varphi \rangle = \varphi(x)$$

Dérivation:

$$\left\langle \frac{\partial D}{\partial t}, \varphi \right\rangle = -\left\langle D, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle$$

Transformée de Fourier:

$$\langle FD, \varphi \rangle = \langle D, F\varphi \rangle$$

$$\langle F\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, F\varphi \rangle$$

Signaux Analogiques (5)

La distribution de Dirac:

$$\langle \delta(t), \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \langle \delta(t-x), \varphi \rangle = \varphi(x)$$

$$F(1) = \delta(f) \qquad F(e^{2j\pi f_0 t}) = \delta(f - f_0)$$

$$F(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

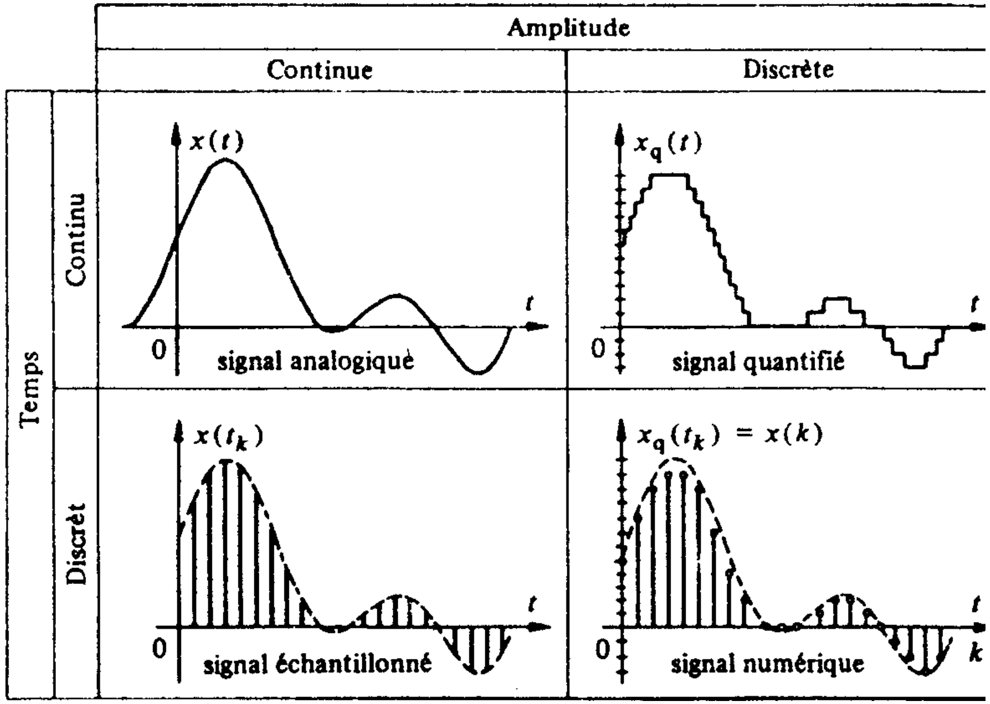
$$F(\sin(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$

$$F(\delta(t)) = 1 \qquad F(\delta(t - t_0)) = e^{-2j\pi f t_0}$$

2. Signaux numériques

Échantillonnage: $x(t_k) = x(kT_e)$ Te est la période d'échantillonnage

Quantification: $x_q(t) = arrondi\left(\frac{x(t)}{q}\right)$ q: pas de quantification du CAN

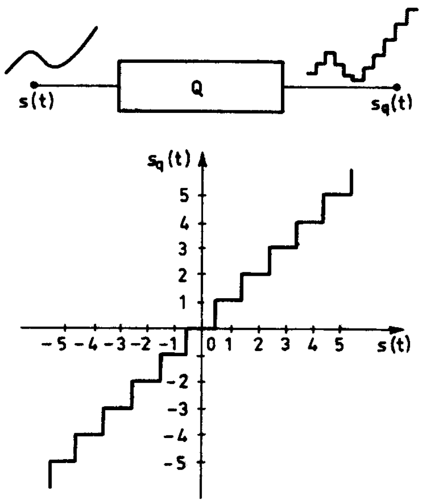


$$x_q(kT_e) = arrondi\left(\frac{x(kT_e)}{q}\right)$$

Incidence des 2 opérations dans l'analyse du signal?

Quantification

Exemple:
Quantification par arrondi



Erreur de quantification:

$$x(t) = x_q(t) + e(t)$$

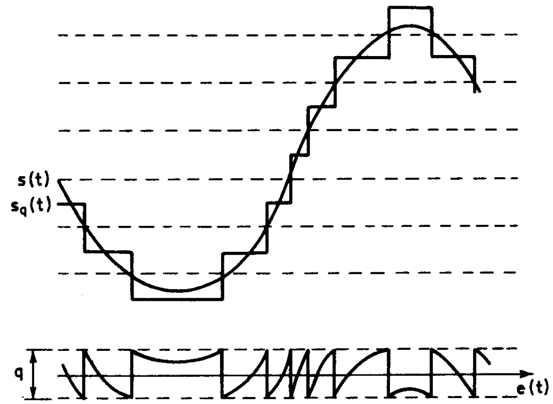
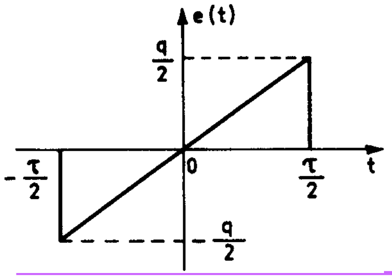


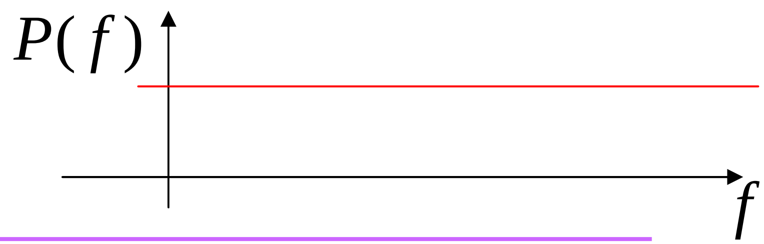
FIG. I.12. *Erreur de quantification*

Puissance de l'erreur:



$$B = \frac{q^2}{12} = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^2(t)\,dt$$

Uniformément répartie en fréquence (bruit blanc)

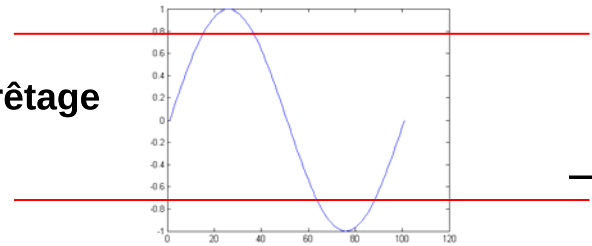


Quantification(2)

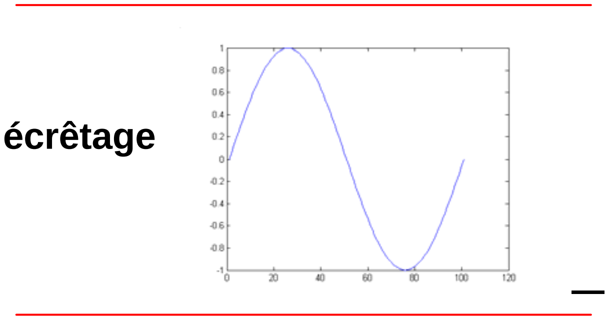
Dynamique de codage d'un signal

Pour un convertisseur sur N bits, un signal est quantifié correctement (sans écrêtage) si son amplitude **A** est dans l'intervalle $[-A_m, A_m]$ avec $A_m = 2^{N-1} q$

Avec écrêtage



sans écrêtage



On appelle puissance de crête d'un convertisseur, la puissance du signal sinusoïdal ayant l'amplitude maximale admissible sans écrêtage $A = A_m$

$$P_c = \frac{A_m^2}{2} = 2^{2N-3} q^2$$

La dynamique de codage est le rapport signal sur bruit maximal

$$\frac{P_c}{B} = 2^{2N} \frac{3}{2} \Rightarrow 6{,}02\, N + 1{,}76\ dB$$

Description Fréquentielle des signaux numériques

Transformée de Fourier d'un signal numérique

les intégrales deviennent des sommes discrètes

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\exp(-2\pi j \quad f \quad kT_e)$$

f en Hz

Propriétés

Périodicité $X(f) = X(f + f_e)$ le spectre d'un signal numérique est périodique

Parité

$$\mathrm{Re}(X(f)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\cos(2\pi f k T_e\ )$$

paire

$$\mathrm{Im}(X(f)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\sin(2\pi f k T_e\ )$$

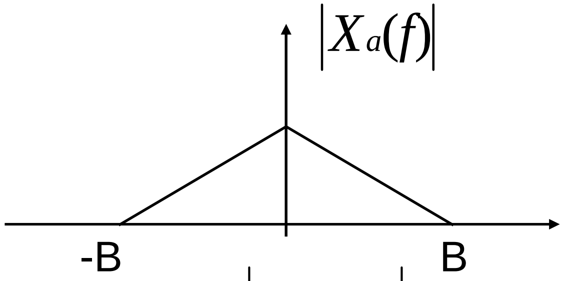
impaire

Spectres

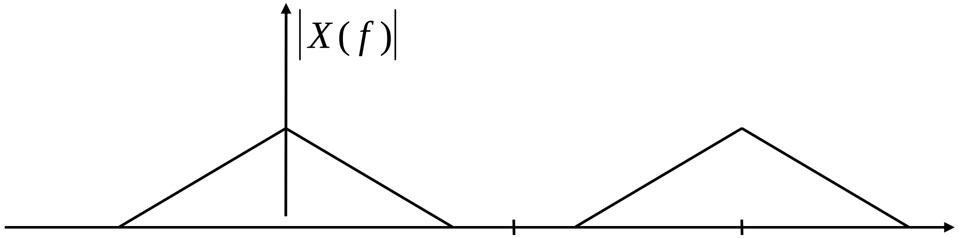
$$|X(f)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(f))^2 + \mathrm{Im}(X(f))^2} \qquad Arg(X(f)) = Arctg(\frac{\mathrm{Im}(X(f))}{\mathrm{Re}(X(f))})$$

Conséquences (1)

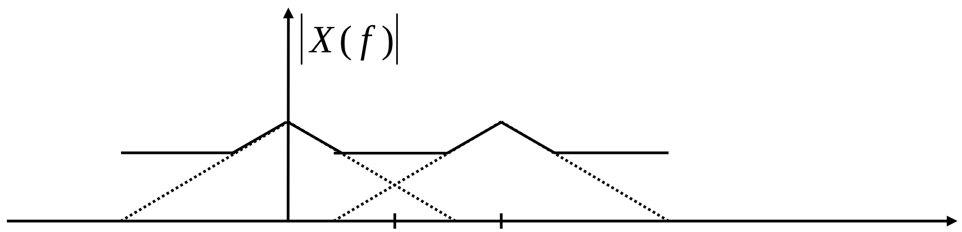
Un signal analogique Xa(t) dont le spectre d'amplitude Xa(f) occupe la bande [-B;+B]
Peut être représenté par un signal numérique x(k) de spectre périodique X(f) de période Fe



Si $B < \frac{f_e}{2}$ on retrouve complètement $|X_a(f)|$ sur une période de $|X(f)|$



Si $B > \frac{f_e}{2}$ il y a repliement de $|X_a(f)|$ sur une période de $|X(f)|$



UNIVERSITÉ DE ROUEN

Conséquences (2)

Théorème de Shannon

Un signal analogique **$x_a(t)$** occupant la bande de fréquence **[0,B]** ne peut être reconstitué exactement à partir de ses échantillons **x(k)** que si ceux-ci ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage **f_e** telle que **$f_e > 2B$**

Formule de l'interpolateur idéal de Schannon

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\,\frac{\sin\left(\pi(t/T_e - k)\right)}{\pi(t/T_e - k)}$$

Conséquence du théorème de Shannon

$\longrightarrow$ **Capteur** $\longrightarrow$ **Filtre AR** ($F_c < F_e/2$) $\longrightarrow$ **Convertisseur A/N , F_e , g** $\longrightarrow$ **Traitements numériques** $\longrightarrow$

Il faut placer des filtre anti-repliement (AR) avant le convertisseur

Description Fréquentielle des signaux numériques

Transformée de Fourier d'un signal numérique

les intégrales deviennent des sommes discrètes

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\exp(-2\pi j f k T_e)$$

f en Hz

Propriétés

Périodicité $\quad X(f) = X(f + f_e) \qquad X(\nu) = X(\nu + 1)$

Parité

$$\mathrm{Re}(X(\nu)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\cos(2\pi\nu k) \quad \text{paire}$$

$$\mathrm{Im}(X(\nu)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k)\sin(2\pi\nu k) \quad \text{impaire}$$

Spectres

$$|X(\nu)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(\nu))^2 + \mathrm{Im}(X(\nu))^2} \qquad Arg(X(\nu)) = Arctg\left(\frac{\mathrm{Im}(X(\nu))}{\mathrm{Re}(X(\nu))}\right)$$

Transformée de Fourrier Discrète

Rappel des relations de base

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\exp(-2\pi jfkT_e)$$

Réciproquement

$$x(k) = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f)\exp(2\pi jfkT_e)\,df$$

Pour calculer X(f) il faut discrétiser f

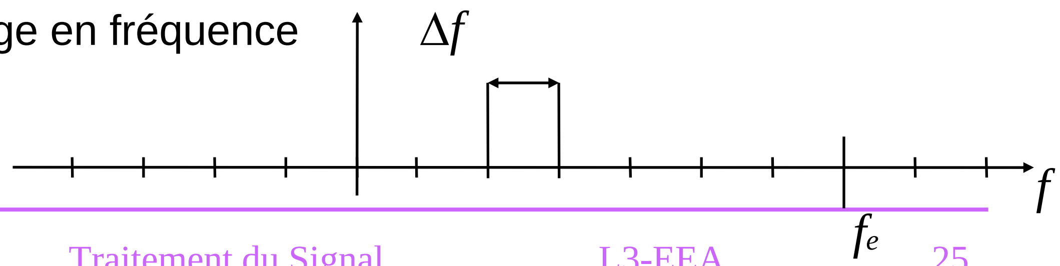
- on choisit N pts sur une période entre 0 et Fe

$$fe = N\Delta f$$

- chaque fréquence de la TFD s'écrit

$$f = n\Delta f = \frac{n}{N} f_e$$

- Δf Est la période d'échantillonnage en fréquence



Transformée de Fourrier Discrète (2)

Définition:

si **x(k)** est un signal numérique de durée **N** échantillons, échantillonné à la période $\mathbf{T_e}$ alors les deux relations suivantes définissent respectivement la transformée de Fourier Discrète directe et inverse de **x(k)**

$$X(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-2\pi j n\Delta f k T_e)$$

$$X(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-2\pi j \frac{nk}{N})$$

$$x(kT_e) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\exp(2\pi j \frac{nk}{N})$$

- les fréquences **n∆f sont les fréquences harmoniques** de la TFD

- N est le **nombre d’échantillons temporels et fréquentiels** c’est la durée du signal

Transformée de Fourrier Discrète (3)

Propriétés

Celles de la TF

Périodicité fréquentielle

$X(n\Delta f)$ est de période f_e

$X(n)$ est de période N échantillons

$X(\nu=n/N)$ est de période 1

Périodicité temporelle

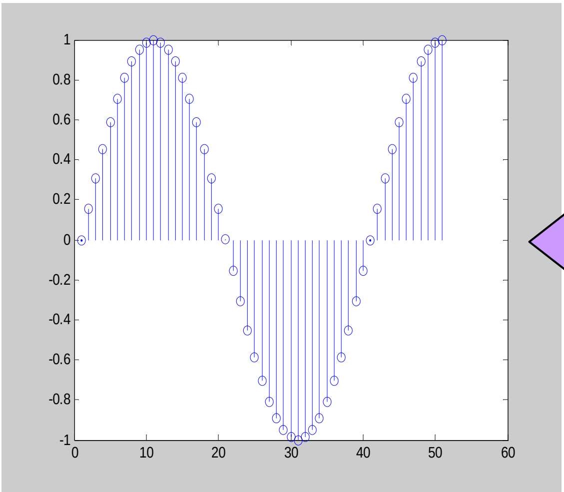
Du fait de l'échantillonnage en fréquence à la période $\Delta f = \frac{f_e}{N}$

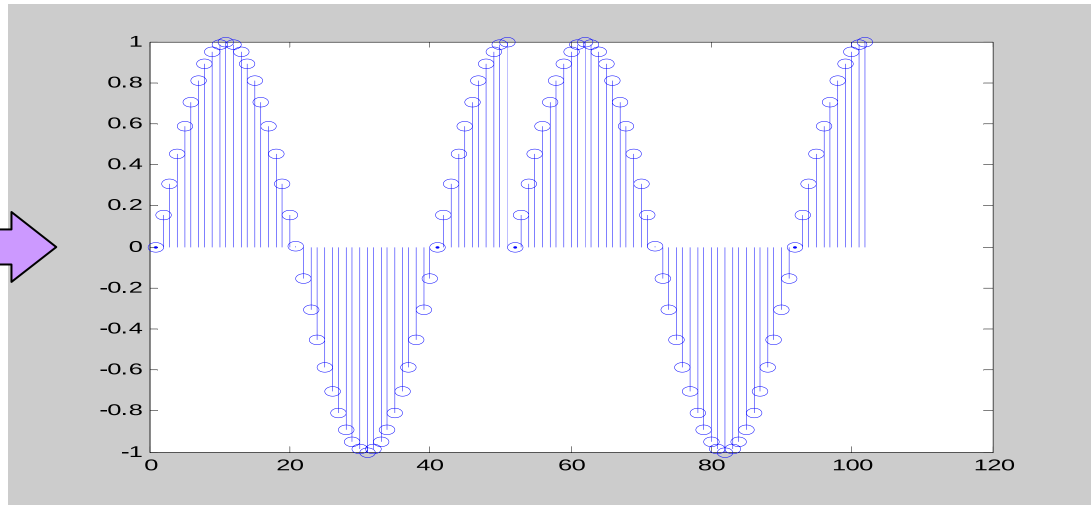
on introduit une période temporelle égale $\frac{1}{\Delta f} = \frac{N}{f_e} = NT_e = D$

à la durée du signal

Propriétés de la TFD

Périodicité temporelle égale à la durée du signal





Transformée de Fourrier Rapide (Cooley-Tukey 1965)

Premier algorithme de calcul rapide de la TFD

L'application des formules de base nécessite pour le calcul directe d'une TFD
N (N multiplications complexes + (N-1) sommes complexes)
donc un nombre d'opérations proportionnel à N^2

L'algorithme rapide nécessite un nombre d'opérations proportionnel à $N \log_2(N)$

Principe de calcul d'une TFR

la formule de base est

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-2\pi j \frac{nk}{N})$$

si N est pair

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) \exp(-2\pi j \frac{n2i}{N}) + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) \exp(-2\pi j \frac{n(2i+1)}{N})$$

soit encore

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) \exp(-2\pi j \frac{n2i}{N}) + \exp(-2\pi j \frac{n}{N}) \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) \exp(-2\pi j \frac{n2i}{N})$$

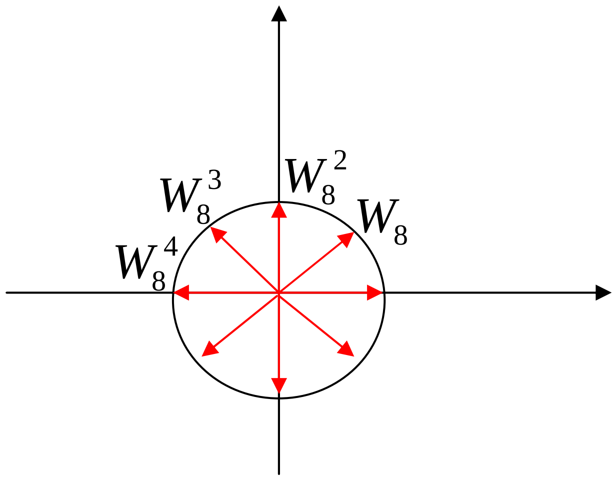
Transformée de Fourrier Rapide (2)

Finalement

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)\exp(-2\pi j \frac{n2i}{N}) + \exp(-2\pi j \frac{n}{N}) \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)\exp(-2\pi j \frac{n2i}{N})$$

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)\exp(-2\pi j \frac{ni}{N/2}) + W_N^n \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)\exp(-2\pi j \frac{ni}{N/2})$$

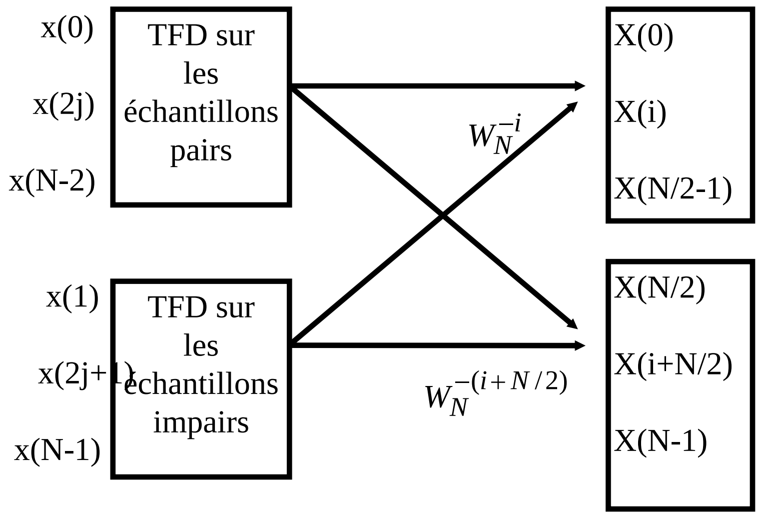
$$X(n) = TFD_{pairs}(n) + W_N^n \quad TFD_{impairs}(n)$$



avec $$W_N = \exp\left(\frac{-2\pi j}{N}\right)$$

TFR (3)

Si N est pair on met en œuvre une étape Papillon



TFR (4)

Si N est pair multiple de 4 alors N/2 est encore pair et on peut écrire

$$X(n)=\sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N})+\exp(-2\pi j\frac{n}{N})\sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N})$$

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N})=\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i)\exp(-2\pi j\frac{n4i}{N})+\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+2)\exp(-2\pi j\frac{n(4i+2)}{N})$$

$$=\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4})+\exp(-2\pi j\frac{n2}{N})\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+2)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4})$$

$$=\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4})+W_{N/2}^{n}\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+2)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4})$$

$$TFD_{multiplesde4}(n)+W_{N/2}^{n}TFD_{pairesnonmultiplesde4}(n)$$

TFR (5)

Si N est pair multiple de 4 alors N/2 est encore pair et on peut écrire

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N}) + \exp(-2\pi j\frac{n}{N})\sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N})$$

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)\exp(-2\pi j\frac{n2i}{N}) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+1)\exp(-2\pi j\frac{n4i}{N}) + \sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+3)\exp(-2\pi j\frac{n(4i+2)}{N})$$

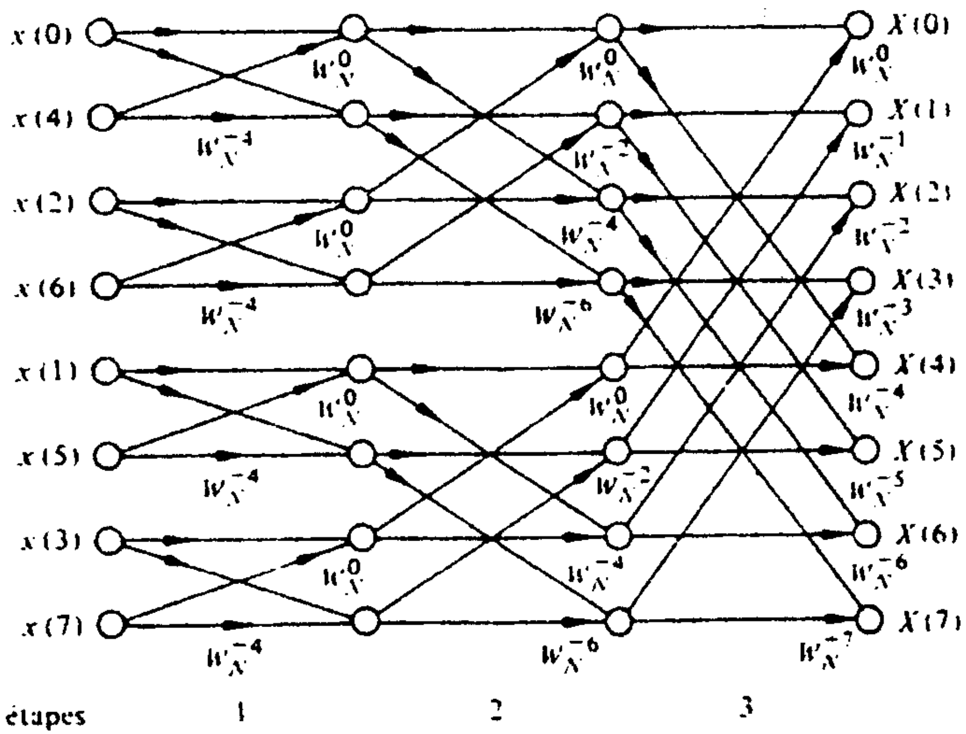
$$= \sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+1)\exp(-2\pi j\frac{n(4i)}{N}) + W_N^{2n}\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+3)\exp(-2\pi j\frac{n(4i+2)}{N})$$

$$= \sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+1)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4}) + W_{N/2}^{n}\sum_{i=0}^{N/4-1} x(4i+3)\exp(-2\pi j\frac{ni}{N/4})$$

$$= TFD_{4+1}(n) + W_{N/2}^{n}\ TFD_{4+3}(n)$$

TFR (6)

Exemple : 7 étapes papillons pour N = 8



TFR (7)

Finalement si $N = 2^T$

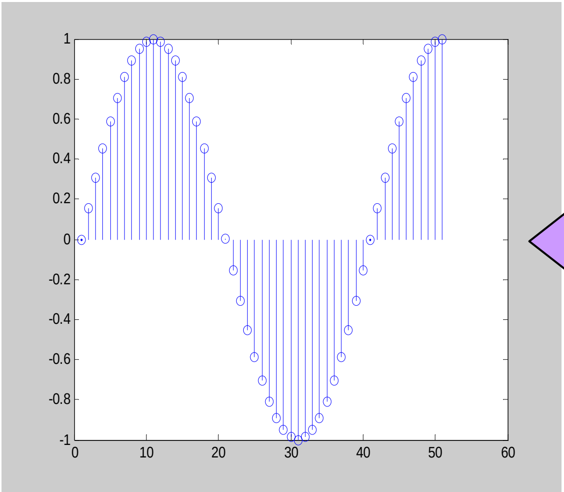
le calcul de la TFD se ramène à T TFD binaires et (N-1)-T opérations papillons non binaires

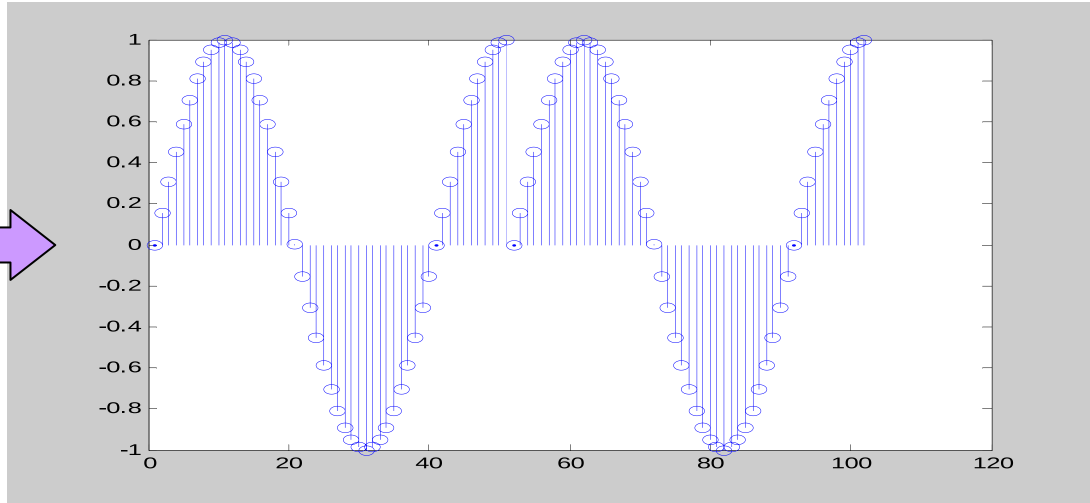
3. Analyse Spectrale non paramétrique

Calcul de spectres par TFD:

- **Respecter théorème d'échantillonnage (filtres AR)**
- **Périodicité sur la durée N d'observation (???)**

N échantillons **vues comme un signal discontinu**

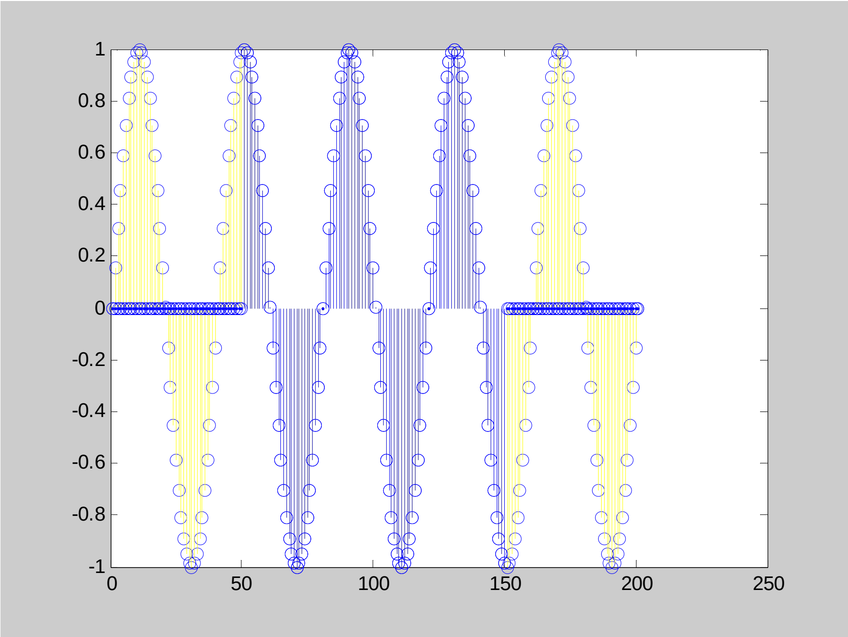




Fenêtres d'apodisation(1)

Limitation de la durée du signal

$$x_N(k) = x(k) \times rect_N(k)$$

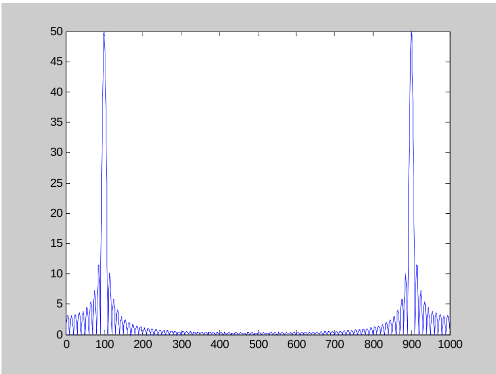


Fenêtres d'apodisation(2)

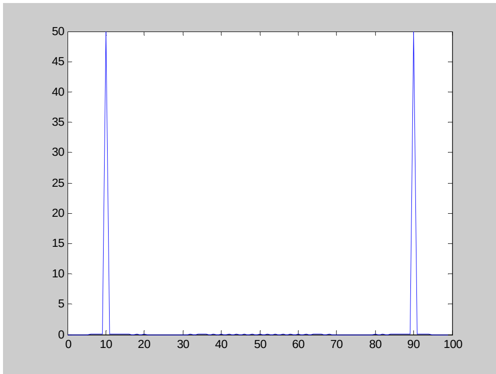
En fréquence on a donc

$$X_N(f) = x(f) \otimes \mathrm{Rect}_N(f)$$

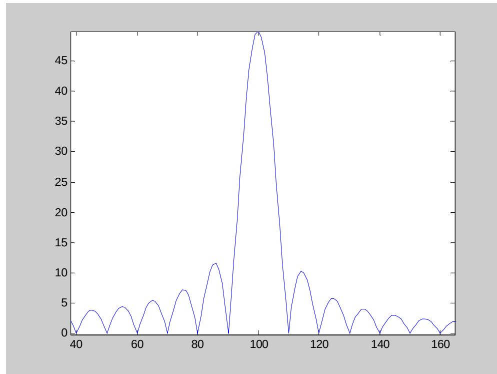
fenêtre fréquentielle



=



$\otimes$



Le spectre théorique est filtré en fréquence par Rect(f)

Il faut choisir le « moins mauvais » filtre (fenêtre)

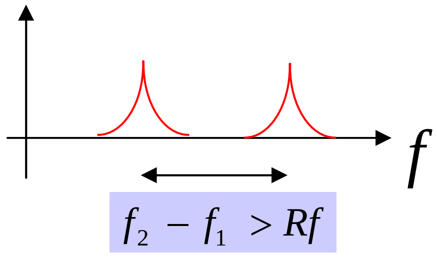
Fenêtres d'apodisation(3)

Paramètres caractéristiques

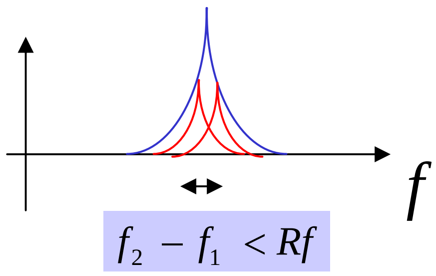
Résolution fréquentielle

c'est la distance la plus faible entre deux fréquences que l'on peut distinguer

$$Rf = \frac{\gamma_w}{N} f_e = \gamma_w \Delta f$$



Les 2 fréquences se distinguent l'une de l'autre



Les 2 fréquences ne se distinguent plus l'une de l'autre

Largeur normalisée de la fenêtre γ_w

Fenêtres d'apodisation(4)

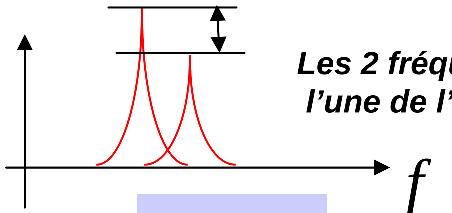
Paramètres caractéristiques

Résolution en amplitude

C'est le rapport d'amplitude que l'on peut distinguer pour deux fréquences à la limite de la résolution fréquentielle

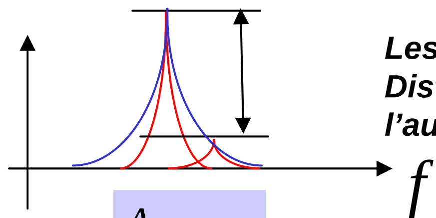
Deux fréquences proches ayant un rapport d'amplitude inférieur ne sont pas distinguables

$$Ra = \frac{A(LobeCentral)}{A(1er \quad Lobe \quad Secondaire)}$$



Les 2 fréquences se distinguent l'une de l'autre

$$\frac{A_1}{A_2} < Ra$$



Les 2 fréquences ne se Distinguent plus l'une de l'autre

$$\frac{A_1}{A_2} > Ra$$

On l'exprime en décibel $\lambda_w = 20Log10(Ra)$

$$A_{1dB} - A_{2dB} < R_{a \ dB}$$

$$A_{1dB} - A_{2dB} > R_{a \ dB}$$

Fenêtre Rectangulaire

$$w_r(k)=\begin{cases}1 & si \quad |k|<\frac{N-1}{2}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$W_r(\nu)=\sum_{k=\frac{-(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} w_r(k)\exp(-2\pi j\nu k)$$

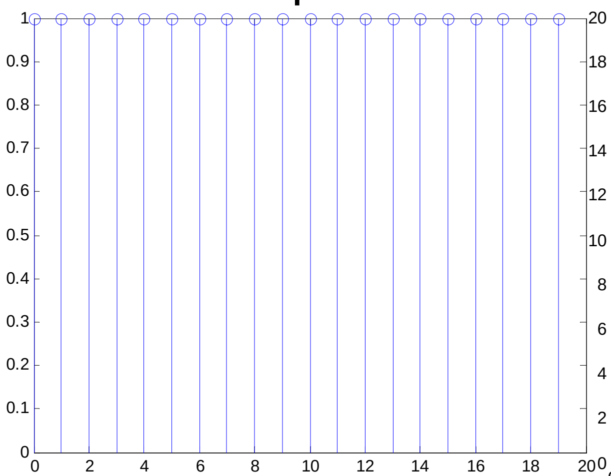
La Transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire échantillonnée vaut:

$$W_r(\nu)=\exp(\pi j f)\frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

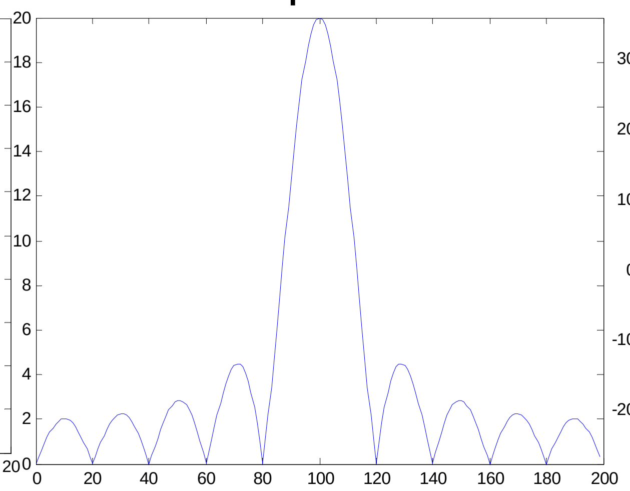
$$\lambda_r = 13dB$$

$$\gamma_r=2$$

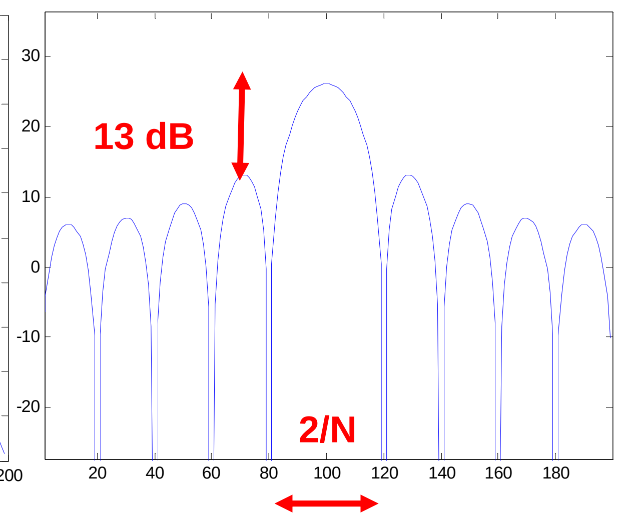
Fenêtre temporelle



Fenêtre fréquentielle



en décibels



Fenêtre de hanning

Définie en fréquence

$$W_h(\nu)=\frac{1}{4}W_r\left(\nu+\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{2}W_r(\nu)+\frac{1}{4}W_r\left(\nu-\frac{1}{N}\right)$$

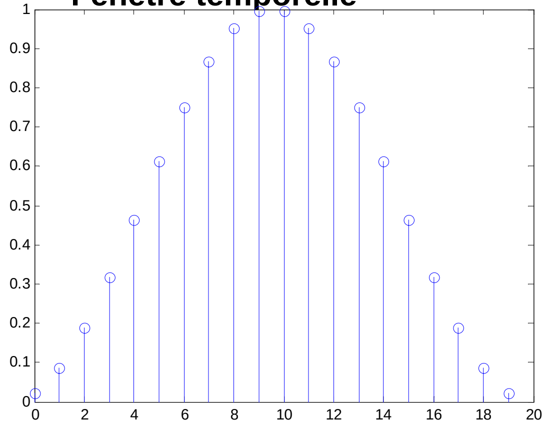
forme temporelle

$$w_h(k)=0{,}5+0{,}5\cos\left(\frac{\pi(k+N/2)}{N}\right)$$

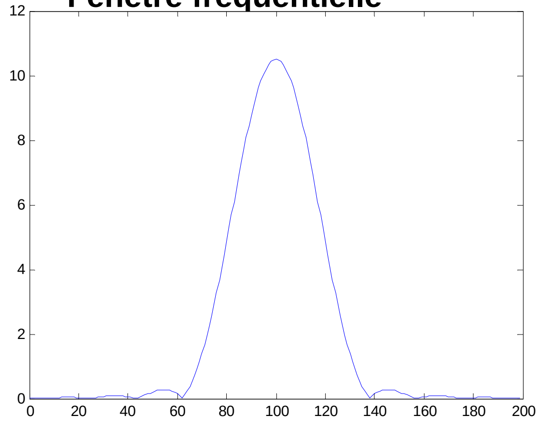
$$\gamma_h=4$$

$$\lambda_h=32dB$$

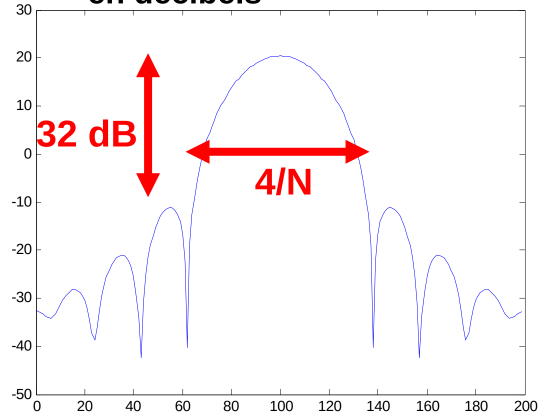
Fenêtre temporelle



Fenêtre fréquentielle



en décibels



Fenêtre de Hamming

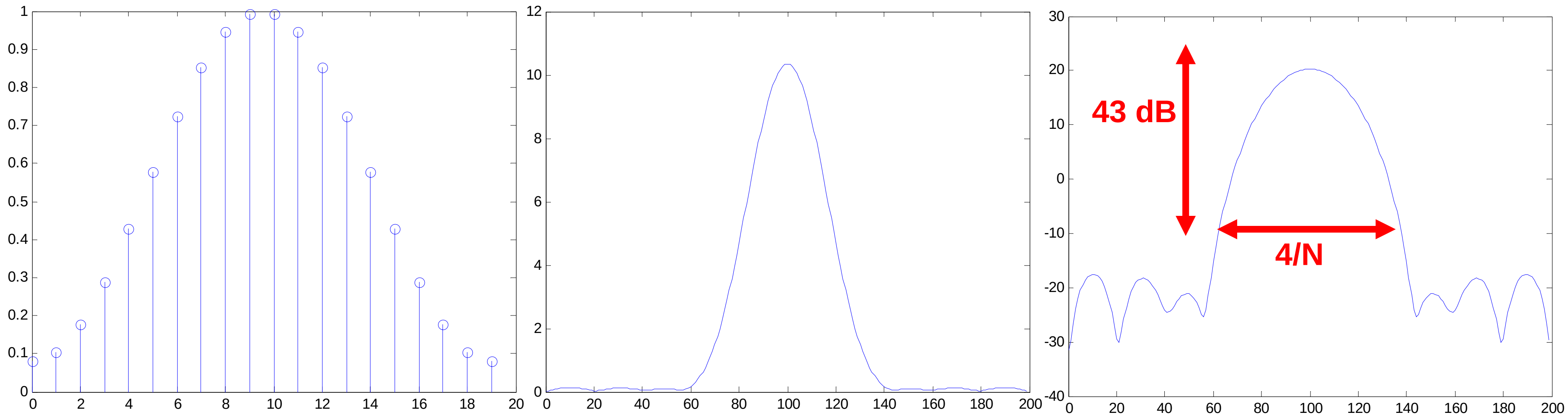
Richard Wesley Hamming 1915-1998

Une variante de la fenêtre de hanning

$$w_H(k) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{\pi(k + N/2)}{N}\right)$$

$$\gamma_H = 4 \qquad \lambda_H = 43dB$$

Fenêtre temporelle **Fenêtre fréquentielle** **en décibels**



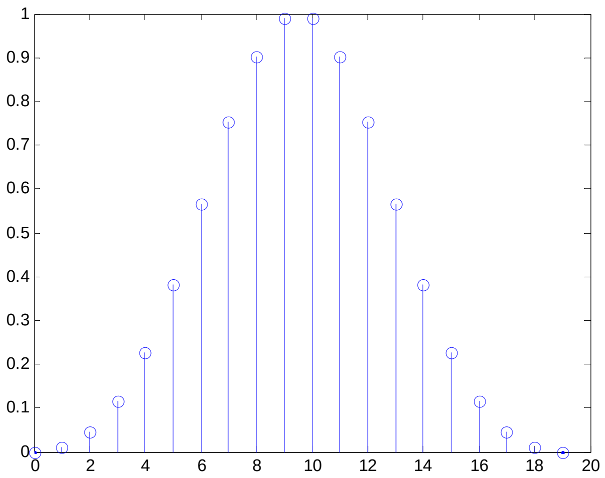
Fenêtre de Blackman

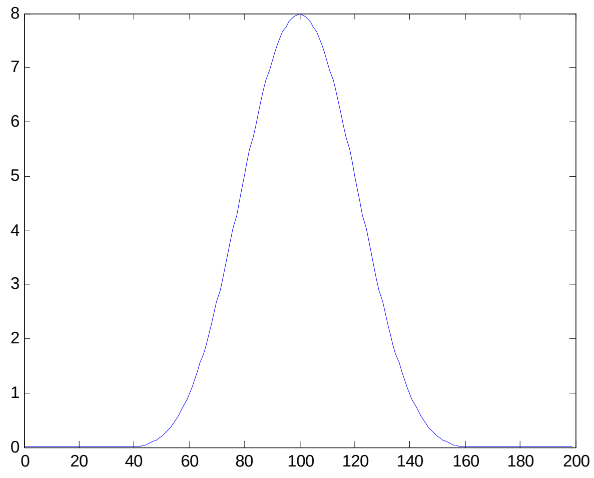
On étend le principe de construction de hanning à 2 cosinus

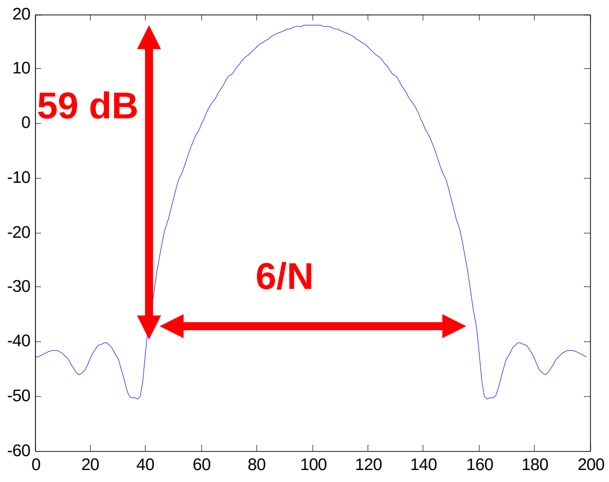
$$w_B(k) = 0{,}42 + 2(0{,}25\cos(\frac{2\pi(k+N/2)}{N}) + 0{,}04\cos(\frac{4\pi(k+N/2)}{N}))$$

$$\gamma_B = 6 \qquad \lambda_B = 59dB$$

Fenêtre temporelle **Fenêtre fréquentielle** **en décibels**







Calcul d'un spectre d'amplitude par TFD (1)

Le spectre obtenu doit être corrigé selon la fenêtre utilisée

$$X_N(f) = X(f) \otimes W(f)$$

Il faut diviser par l'amplitude du pic de la fenêtre en 0 (le continu)

$$W(0) = \sum_{0}^{N-1} w(k)$$

Le spectre d'amplitude mis à l'échelle est donc calculé par

$$\left| X_N(f) \right| = \frac{\left| X(f) \otimes W(f) \right|}{W(0)}$$

Calcul d’un spectre d’amplitude par TFD (2)

Instructions MatLab

```
N=100;
nu=0.305;
k=[0:N-1];
signal = sin(2*pi*nu*k);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fenetre = Hanning(N);

Signal = signal.*fenetre';

spectre = fft(Signal);

WO = sum(fenetre); % coefficient de normalisation

plot(k,20*log10(abs(spectre)./WO),'r');
```

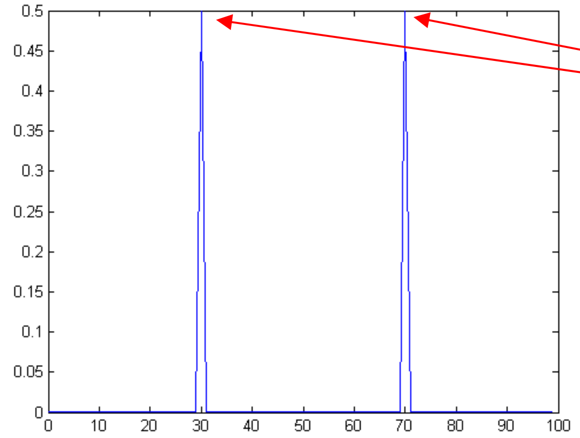
Calcul d'un spectre d'amplitude par TFD(3)

Fenêtre Rectangulaire

$\nu = 0{,}300$

Amplitude 1

N=100



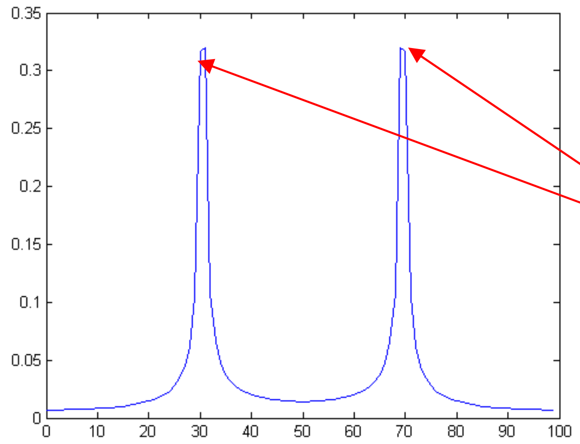
On trouve bien le spectre d'amplitude Bilatéral avec des amplitude 0,5

Fenêtre Rectangulaire

$\nu = 0{,}305$

Amplitude 1

N=100

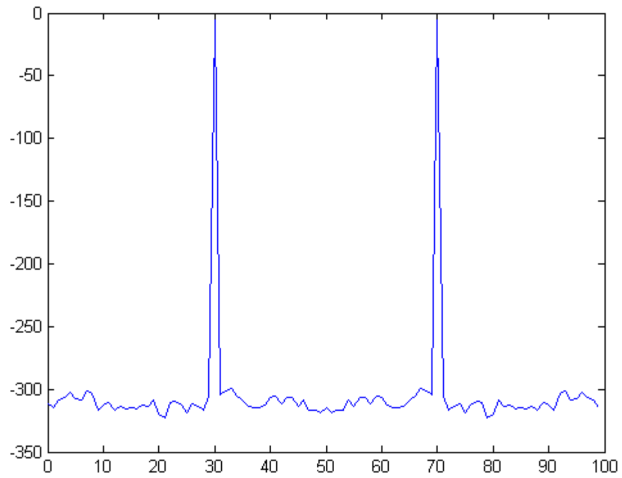


On ne retrouve pas le spectre d'amplitude bilatéral par l'effet de filtrage

Les deux pics sont affaiblis et élargis

Calcul d'un spectre d'amplitude par TFD(4)

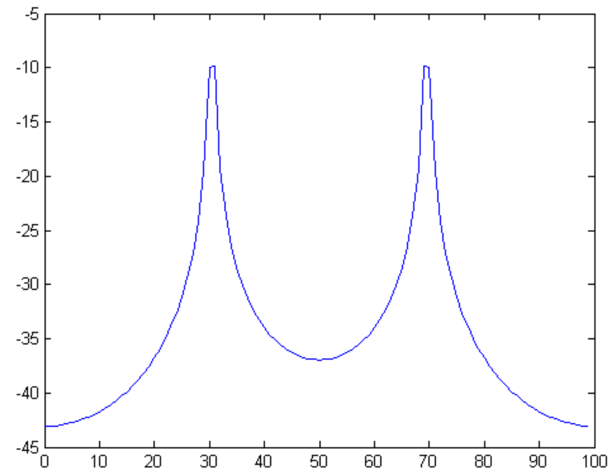
Fenêtre Rectangulaire
$\nu = 0{,}300$
Amplitude 1
N=100



en décibel

On retrouve le résultat théorique avec 2 pics à -3dB

Fenêtre Rectangulaire
$\nu = 0{,}305$
Amplitude 1
N=100



On ne retrouve pas le résultat du fait de l'effet de filtrage de la fenêtre

2 pics larges apparaissent avec une amplitude de -10dB

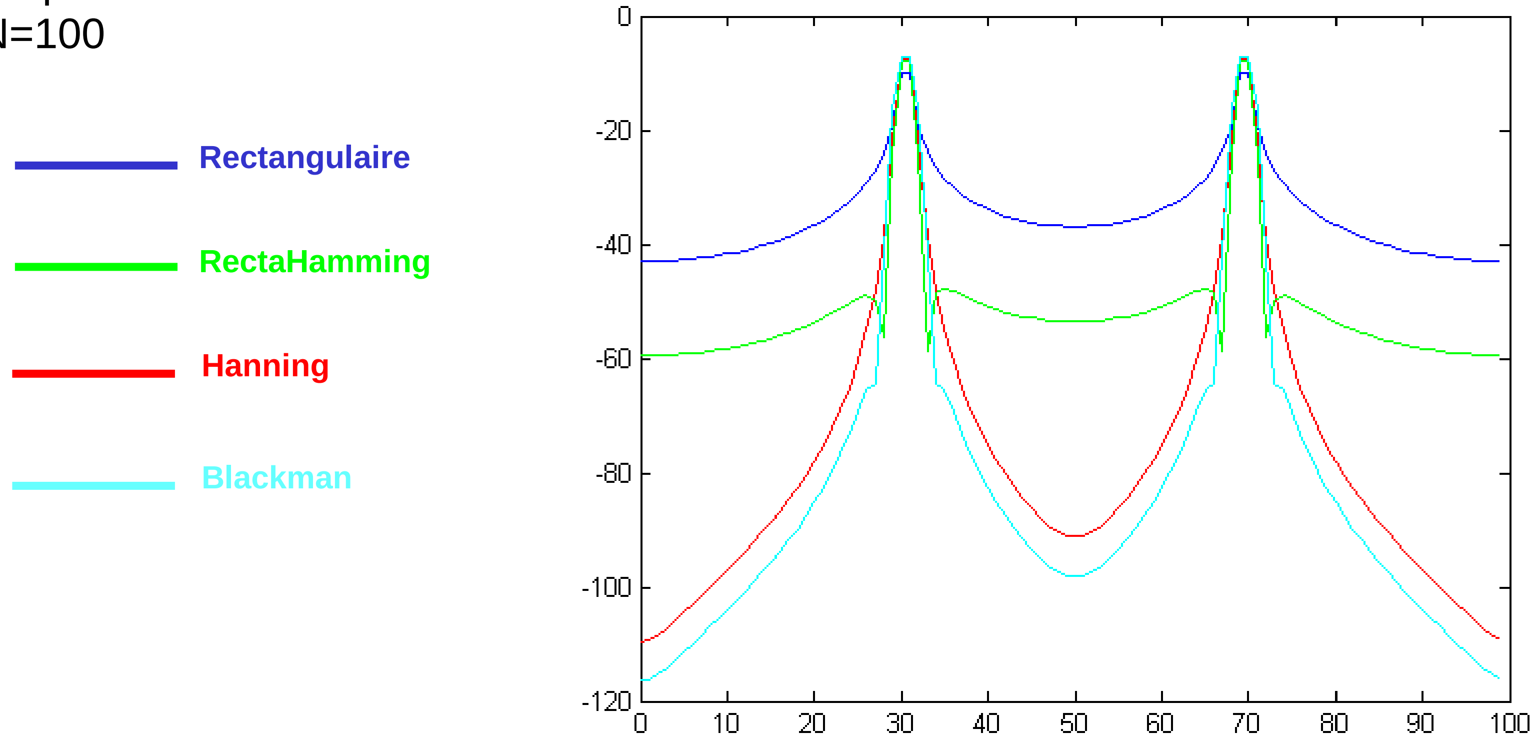
Calcul d'un spectre d'amplitude par TFD(5)

Spectre d'amplitude d'un sinus

$\nu = 0{,}305$

Amplitude 1

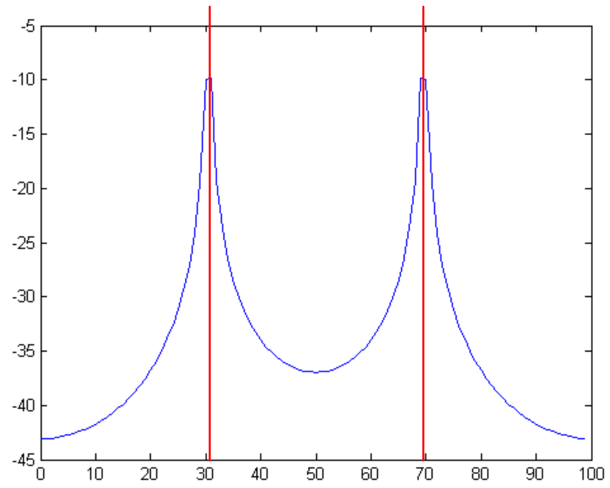
N=100



Calcul du Périodogramme (1)

Le calcul du spectre d'amplitude par transformée de Fourier Discrète est inutilisable du fait de la limitation de la durée du signal. On parvient à limiter cet effet en utilisant une fenêtre d'apodisation mais sans l'annuler toutefois.

Le spectre d'amplitude se trouve filtré par la fenêtre spectrale, et de ce fait l'amplitude est distribuée sur plusieurs harmoniques.



Calcul du Périodogramme (2)

Pourtant le théorème de Parseval est toujours vérifié

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Pour une durée d'observation T la puissance est

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = P_x$$

que l'on ré-écrit

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

Où $\Phi_x(f) = \frac{1}{T}|X(f)|^2$ est le périodogramme,

c'est une densité de puissance en fonction de la fréquence
On dit « Densité Spectrale de Puissance »

Calcul du Périodogramme (3)

En numérique on calcule

$$\Phi_x(n) = \frac{1}{NP} \left| TFD(x(k) \times w(k)) \right|^2$$

Où P est un facteur de normalisation qui dépend de la fenêtre, il correspond à la puissance de la fenêtre

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)^2$$

Calcul du Périodogramme (4)

```
N=100;
nu=0.305;
k=[0:N-1];
signal = sin(2*pi*nu*k);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fenetre = boxcar(N);
Signal = signal.*fenetre';

% puissance de la fenetre pour la normalisation
P = norm(fenetre)^2;
spectre = fft(Signal);

% calcul de la puissance moyenne sur la duree d'observation N
periodogramme = abs(spectre).^2./P/N;

% intègre le periodogramme sous le premier pic du sinus entre les harmoniques n=29 et n=35
Puissance = sum(periodogramme(29:34));

% multiplie la puissance par deux pour prendre les deux pics en compte
%
Puissance = Puissance *2

plot(k,20*log10(periodogramme),'r');
hold on;
plot(k(29:34),20*log10(periodogramme(29:34)),'(o');
```

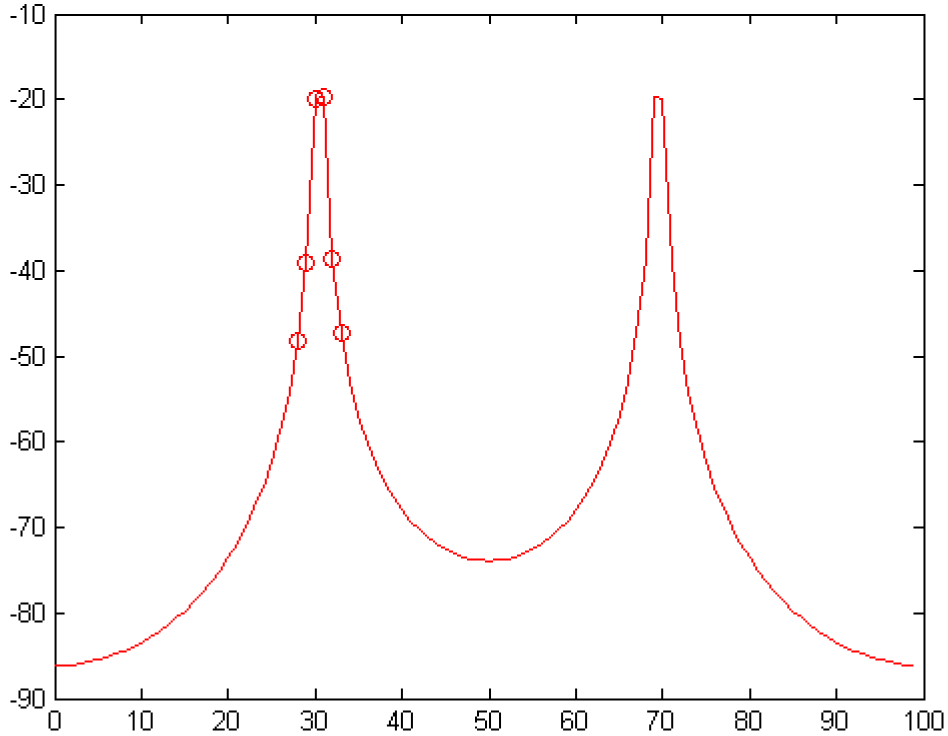
Calcul du Périodogramme (5)

Fenêtre rectangulaire
Amplitude du sinus = 1

Puissance théorique = $\frac{1}{2}$

Amplitude efficace = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

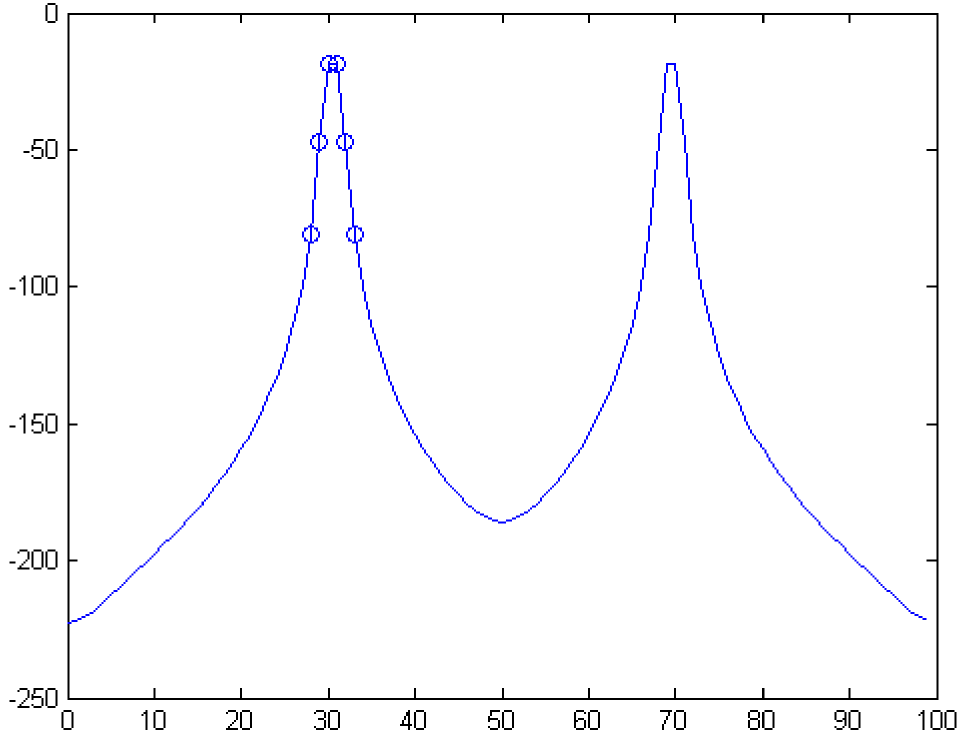
Puissance mesurée = 0.4670



Calcul du Périodogramme (6)

Fenêtre de hanning
Amplitude du sinus = 1

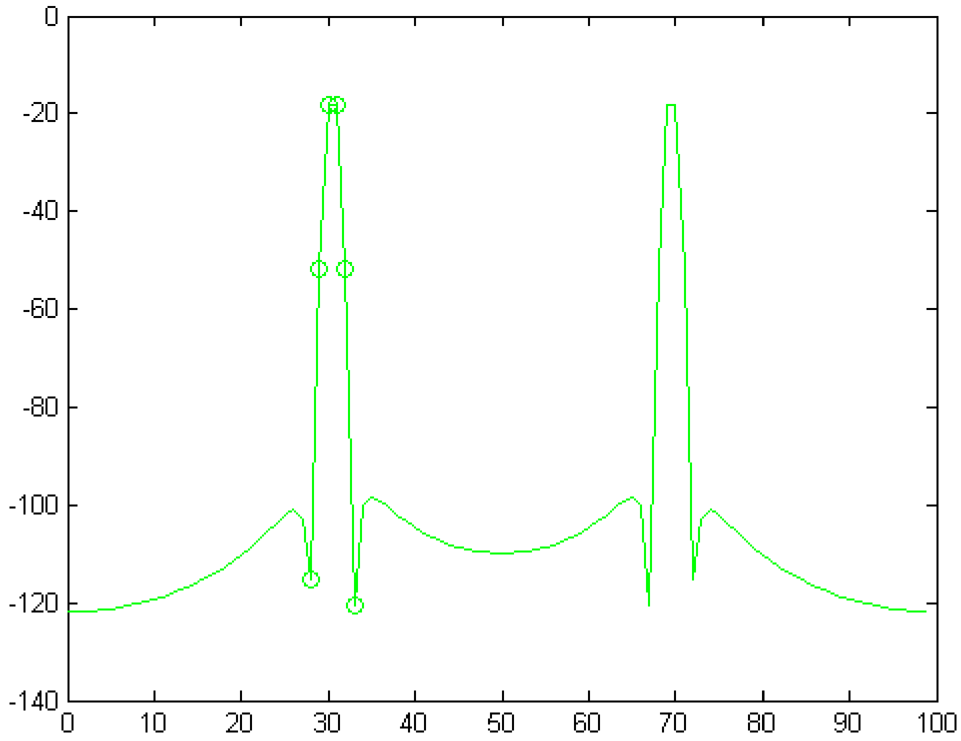
Puissance = 0,4999



Calcul du Périodogramme (7)

Fenêtre de Hamming
Amplitude du sinus = 1

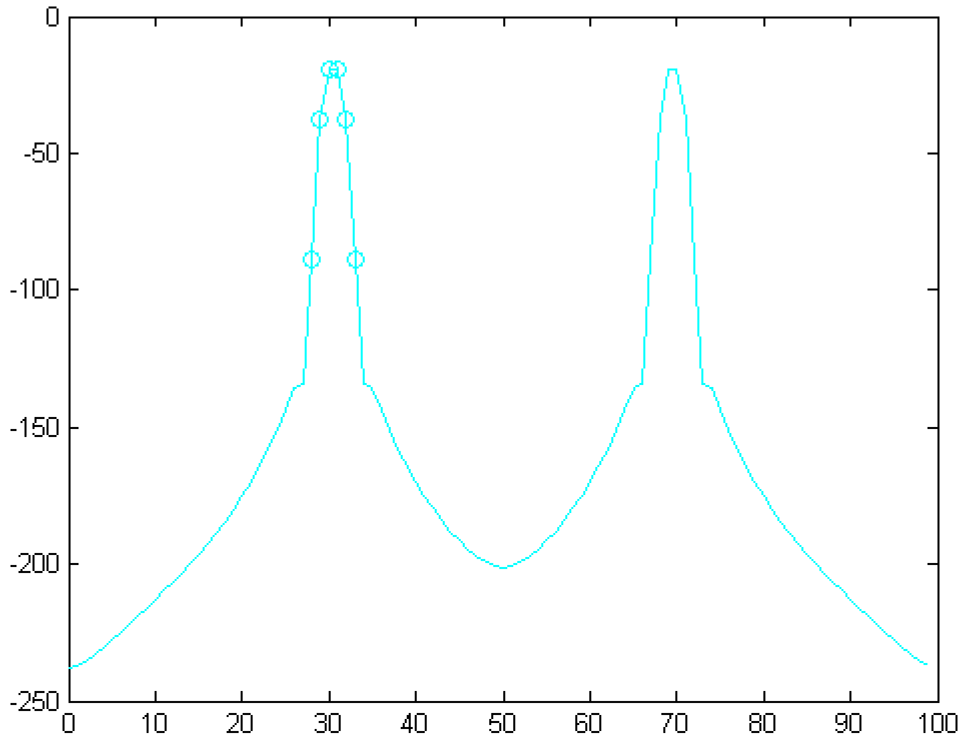
Puissance = 0,4997



Calcul du Périodogramme (8)

Fenêtre de Blackman
Amplitude du sinus = 1

Puissance = 0,5



Calcul du Périodogramme (9)

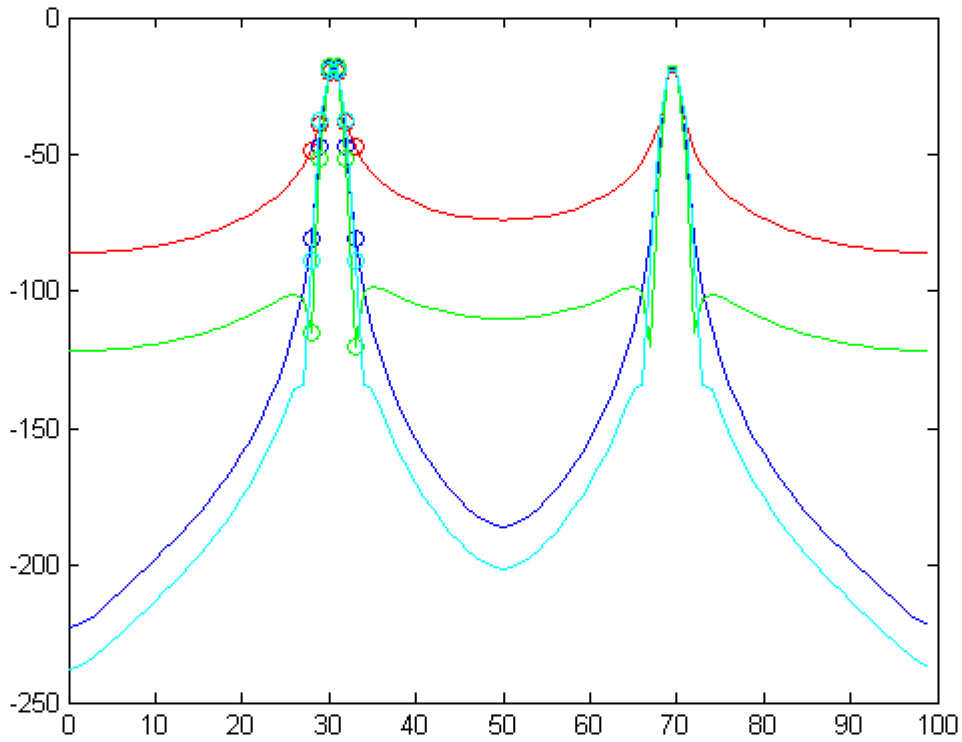
Amplitude du sinus = 1
Puissance = 0,5

Fenetre rectangulaire
Puissance = 0,4670

Fenêtre de hanning
Puissance = 0,4999

Fenêtre de Hamming
Puissance = 0,4997

Fenêtre de Blackman
Puissance mesurée = 0,5



4. Analyse spectrale des signaux aléatoires

4.1. Introduction

Les signaux aléatoires ne sont pas exactement prédictibles au cours du temps

On souhaite développer des techniques pour

- Analyser le contenu fréquentiel des signaux en présence de bruit
- Déterminer les propriétés des systèmes qui ont générés ces signaux

4.2 Processus aléatoire (1)

Définition

On définit un processus aléatoire comme une application qui à chaque expérience ω fait correspondre une fonction du temps qu'on appellera signal aléatoire

On le note souvent $X(t)$ mais en toute rigueur on doit noter $X(t,\omega)$ pour marquer son caractère aléatoire.

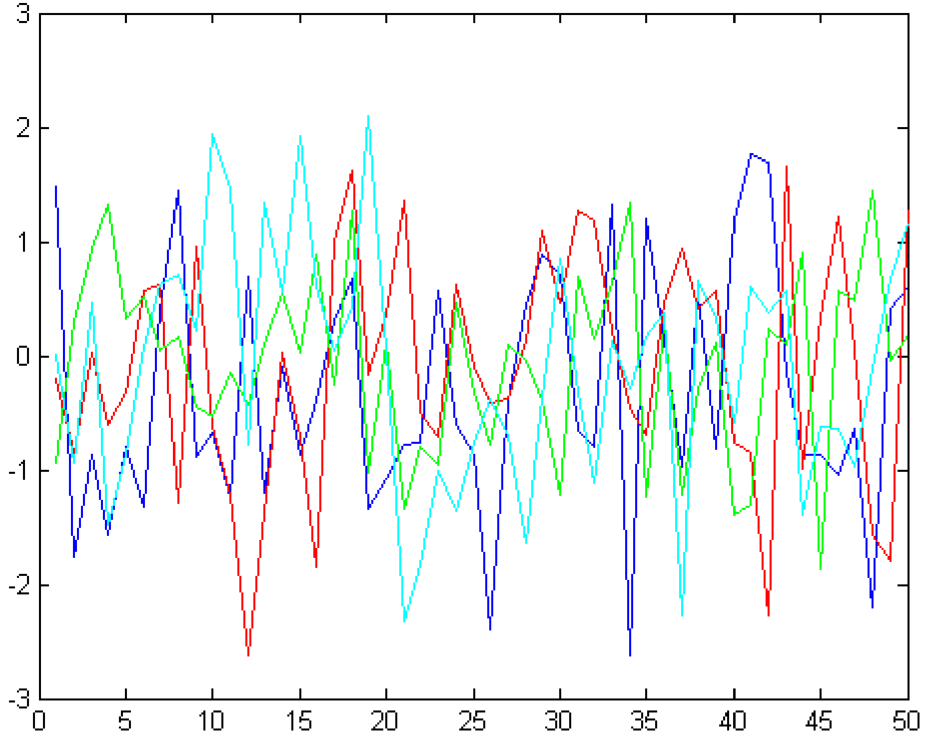
Il y a donc 2 façons d'analyser de représenter le signal aléatoire
-pour une expérience donnée ω_0 le signal aléatoire est une fonction du temps.
$X(t)$ est une trajectoire du processus aléatoire

-pour un instant donné t_0
$X(t_0,\omega)$ est une variable aléatoire $X(\omega)$

4.2. Processus aléatoire (2)

Exemple:

4 trajectoires différentes du même processus provenant de 4 expériences différentes



UNIVERSITÉ DE ROUEN

4.2. Signaux Aléatoires (3)

Exemples:

Signal déterministe :

dont on peut prédire avec exactitude la valeur à tout instant

$$\sin(\omega t)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Signal aléatoire :

la prédiction ne peut être exacte, notion d'incertitude ou d'erreur

$$P(\min \leq X(t_o) < \max) = \int_{\min}^{\max} p_{X(to)}(v)dv$$

On veut connaître avec précision l'incertitude sur une mesure ou une prédiction

$$P(v \leq X(t_o) < v + dv) = p_{X(to)}(v)dv$$

Chaque mesure ou prédiction s'accompagne d'un intervalle de confiance qui donne la probabilité que la mesure soit dans cet intervalle

4.2. Signaux Aléatoires (4)

La loi du processus caractérise complètement l'aspect aléatoire du signal :

$$p_{X(to)}(v)$$

En générale l'aspect aléatoire du signal est indésirable et provient du système de transmission : Bruit de fond

Un signal possède en générale un aspect déterministe (signal utile) et un aspect aléatoire (bruit de fond)

$$X(t) = u(t) + b(t)$$

Exemples de bruits

Bruit thermique - Bruit Johnson:

du à aux agitations aléatoires des électrons sous l'effet de la température présent dans tout composant actif ou passif présentant une certaine résistance même en l'absence de tension appliquée

Soit R la résistance du composant : alors courant comme tension suivent une loi gaussienne de moyenne nulle et de d'écart types respectifs $\sigma_i^2 = k\,\mathrm{TR}\,B$ **et** $\sigma_u^2 = \dfrac{kTB}{R}$ **(ce sont les valeurs efficaces)**

Alors on a par la loi d'Ohm $\sigma_u = R\sigma_i$

et la puissance totale du courant électrique dans la bande de fréquence B est $\sigma_i\sigma_u = kTB$

k est la constante de Boltzmann et T la température
($kT=4.10^{-21}$ à l'ambiante), on déduit que en V^2 et en A^2

Bruit de grenaille :

Du à la fluctuation des porteurs de charges au passage d'une jonction
N'existe qu'en présence d'un courant moyen *Io* non nul

$$\sigma_{ig}^2 = 2eI_oB$$

Il suit une loi aléatoire gaussienne $p(i) = \dfrac{1}{\sigma_{ig}\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(i-I_o)^2}{2\sigma_{ig}^2})$

Rapport signal/bruit

$$x(t)=u(t)+b(t)$$

Rapport signal sur bruit

$$\xi = \frac{P_{utile}}{P_{bruit}}$$

chiffre le degré de contamination du signal utile par du bruit (rapport des puissances)

Facteur de bruit d'un système

$$F = \frac{\xi_{entre}}{\xi_{sortie}}$$

chiffre la détérioration d'un système

4.3 Rappel sur les Variables Aléatoires (1)

Définition

C'est une fonction X définie sur une espace d'expériences qui associe à toute partie de cette espace une valeur numérique réelle

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega)$$

Ω **est l'espace des expériences**

$X(\omega)$ **est le résultat de l'expérience** ω

Rappel sur les Variables Aléatoires (2)

Loi d'une variable aléatoire

La loi de la variable aléatoire X est une fonction de probabilité que l'on note

$P_X(x)$ telle que $$P_X(x) = P(\{\omega / X(\omega) = x\})$$

C'est la fonction qui associe une probabilité aux résultats des expériences

Variable aléatoire discrète

Lorsque l'espace des résultats possibles est de taille finie.
Exemple : le dés

Variable aléatoire continue

Lorsque l'espace des résultats possibles est un intervalle de $\mathbb{R}$

alors $P_X(x) = 0; \forall x$

la loi de X notée $p_X(u)$ est une densité de probabilité telle que $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u)du = 1$$

UNIVERSITÉ DE ROUEN

Rappel sur les Variables Aléatoires

Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire

Espérance **ou valeur attendue** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} u p_X(u)du)$

c'est la moyenne sur une infinité de mesures

Variance : $Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (u-E(X))^2 p_X(u)du$

Écart type **ou écart moyen à la moyenne:** $\sigma=\sqrt{Var(x)}$

Exemples

Loi uniforme : sur l'intervalle [a,b]

$$p_X(u) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{b-a}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi normale :

$$p_X(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E(X) = m_X \qquad Var(X) = \sigma^2$$

4.4 Description temporelle des Signaux aléatoires

On décrit les signaux aléatoires par les propriétés des variables aléatoires qui dépendent du temps

Moyenne

$$m_X(t) = E(X(\omega, t))$$

Fonction d'autocovariance

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\Big(\big(X(t_1) - E\big(X(t_1)\big)\big) \times \big(X(t_2) - E\big(X(t_2)\big)\big)\Big)$$

On montre que

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\big(X(t_1) \times X(t_2)\big) - m_X(t_1) m_X(t_2)$$

4.4. Signaux Stationnaires

Signal aléatoire Stationnaire au second ordre

Moyenne et variance ne dépendent pas du temps

$$m_X = E(X(\omega,t)); \forall t$$

$$R_{XX}(\tau) = E\Big(\big(X(t) - m_X\big) \times \big(X(t+\tau) - m_X\big)\Big) \quad \forall \tau$$

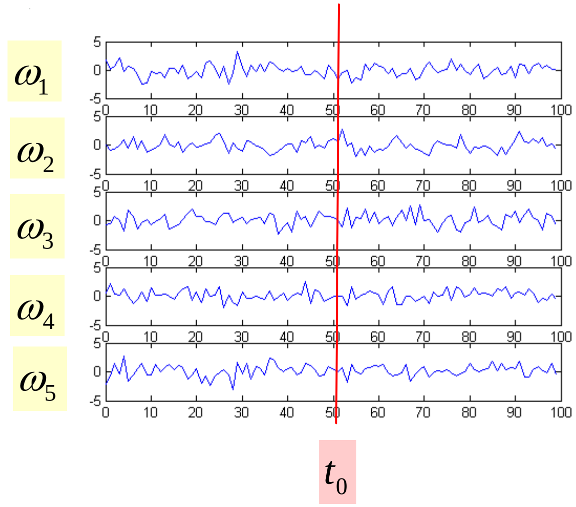
$$R_{XX}(\tau) = E\big(X(t) \times X(t+\tau)\big) - m_X^2$$

4.4. Signaux Ergodiques

Calcule de la moyenne d'un signal stationnaire

D'après la définition $m_X = E(X(\omega,t)); \forall t$

On doit choisir un instant quelconque t_0 **et calculer la moyenne sur les différentes expériences qui donnent chacune une réalisation de** $X(t_0,\omega) \quad \forall \omega$



$$m_X = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X(t_0,\omega_i)$$

On doit réaliser une moyenne en t_0 **sur l'ensemble des expériences**

4.4. Signaux Ergodiques

Définition:

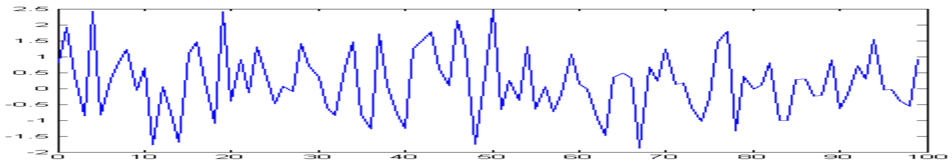
Un signal stationnaire est ergodique si on peut estimer ses moments par des estimations au cours du temps

On confond moyenne d'ensemble et moyenne au cours du temps

$$m_X = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} X(k, \omega)$$

On ne fait qu'une seule expérience, et on estime les paramètres sur la trajectoire mesurée

ω



4.4. Fonction d'autocorrélation

Chiffre la ressemblance entre le signal et une version décalée de lui-même

$$\varphi_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

pour un signal numérique de durée N on aura

$$\varphi_{XX}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{0}^{N} X(k)X(k+\tau)$$

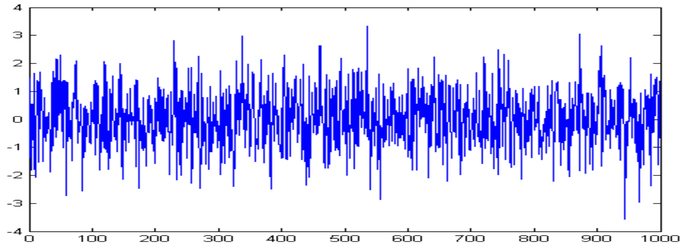
Pour un signal parfaitement aléatoire on a : $\varphi_{XX}(\tau) = \sigma^2 \delta(0)$

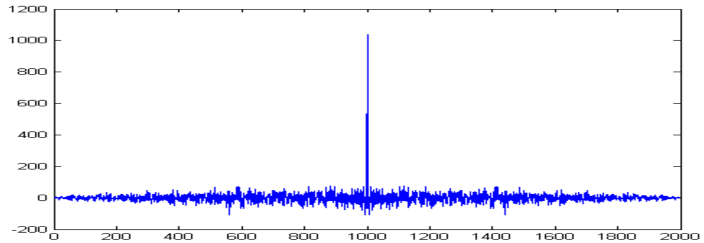
dès qu'on le décale d'un seul échantillon, il n'y a plus de ressemblance avec lui-même
C'est un Bruit Blanc

4.4. Exemples

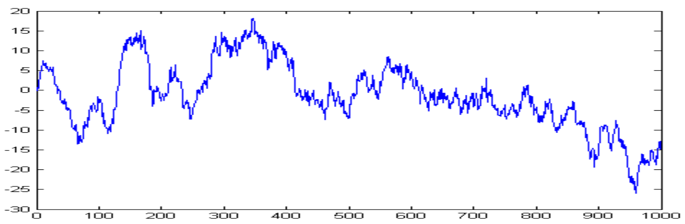
Signal | **Autocorrélation**

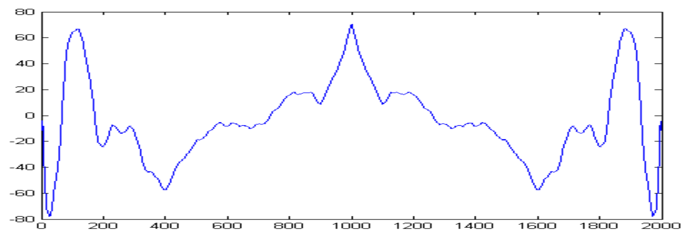
Bruit Blanc



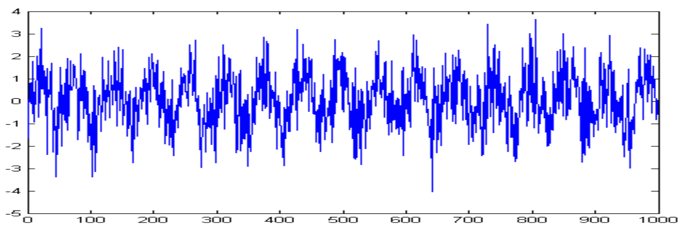


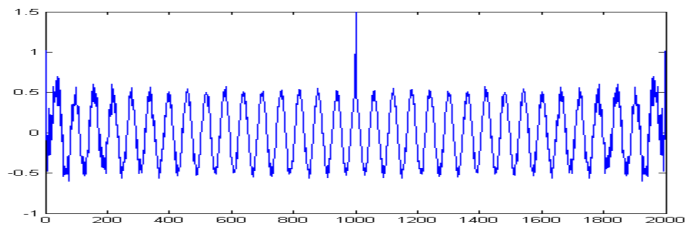
Bruit Blanc moyenné





Bruit Blanc avec sinus





4.4. Fonction de Covariance et d'autocorrélation

$$R_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) - m_X^2$$

4.5. Densité Spectrale de Puissance

On cherche à représenter les signaux aléatoire en fréquence

Le « réflexe » est de calculer la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$\Phi_{XX}(f) = TF(\varphi_{XX}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{XX}(\tau)\exp(-2\pi jf\tau)d\tau$$

Par inversion de la TF on a également

$$\varphi_{XX}(\tau) = TF^{-1}(\Phi_{XX}(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XX}(f)\exp(2\pi jf\tau)df$$

4.5. Densité Spectrale de Puissance

Or la puissance du signal s'écrit

$$P_X = \varphi_{XX}(0) + m_X^2 = \left[\int \Phi_{XX}(f)\exp(2\pi j f \tau)df\right]_{\tau=0} + m_X^2$$

soit finalement $$\boxed{P_x = \int \Phi_{XX}(f)df + m_X^2}$$

donc $\boxed{\Phi_{XX}(f)}$ **est la densité spectrale de puissance du signal aléatoire**

Théorème de Wiener-Kintchine

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est la densité spectrale de puissance

4.6. Notion d'estimation

- **La théorie des probabilités et des variables aléatoires permet de calculer les grandeurs caractéristiques des signaux (moyennes, variances, covariances…) si on connaît les lois de probabilité**

$$m_X = E(X) = \int x p_X(x) dx$$

- **La connaissance de la loi est équivalente à l'observation du processus sur une infinité d'expériences**

$$m_X = E(X) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X(\omega_i)$$

4.6. Notion d'estimation

- **Dans la pratique on fait un nombre d'expériences limité et on calcule la moyenne empirique**

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(\omega_i)$$

  - **C'est l'estimateur de la moyenne empirique**
  - **Le résultat de l'estimation est d'autant meilleur que le nombre d'expériences est grand (exemple lancé de dé)**

- **On montre que l'estimateur de la moyenne empirique converge vers l'espérance mathématique**

4.6. Notion d'estimation

Définition

Un estimateur est une fonction qui détermine une valeur $\hat{\alpha}$, estimation d'une grandeur α à partir d'un échantillon de réalisations de variables aléatoires $X(t)$

on note $\hat{\alpha} = f\big(X(1), X(2), \ldots, X(N)\big)$

Or comme toute fonction de variables aléatoires est une variables aléatoire, un estimateur est une variable aléatoire

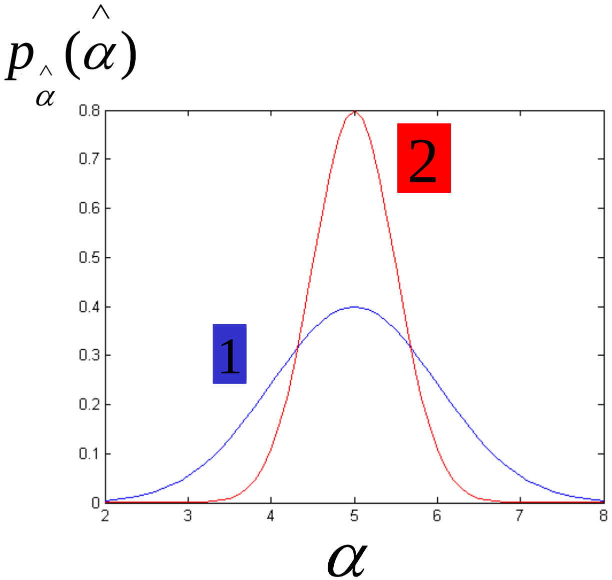
Un estimateur est donc caractérisé par une densité de probabilités

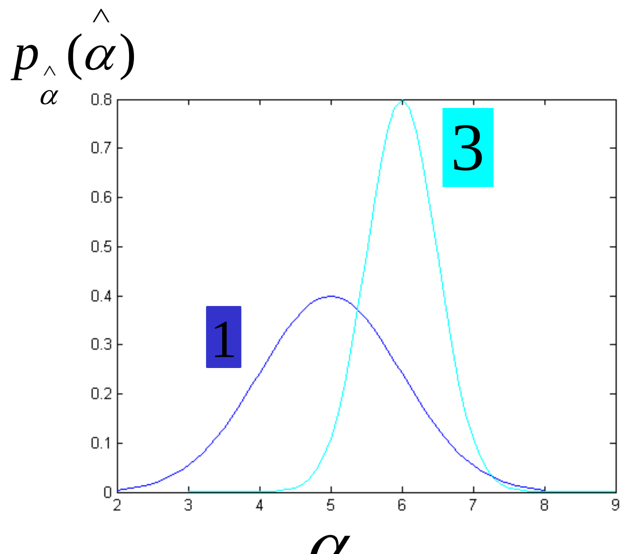
On la note $p_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha})$

4.6. Notion d'estimation

Biais et variance d'un estimateur

intuitivement un bon estimateur doit avoir une grande probabilité de donner un résultat proche de la valeur que l'on cherche à estimer





La variance de l'estimateur 2 est plus faible que celle de 1

La moyenne de 3 n'est pas la valeur de α on dit que 3 est biaisé

1 et 2 sont non biaisés

4.6. Notion d'estimation

Biais d'un estimateur

Le biais d'un estimateur est la différence entre sa valeur moyenne et la vrai valeur que l'on veut estimer

$$b_{\hat{\alpha}} = E(\hat{\alpha}) - \alpha$$

Variance d'un estimateur

C'est la variance de la variable aléatoire qu'il représente

$$\mathrm{var}_{\hat{\alpha}} = E\left(\left(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\right)^2\right)$$

Estimateur consistant

un estimateur est consistant lorsque le biais et la variance tendent vers zéro lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini

4.7. Estimation de la fonction d'autocorrélation

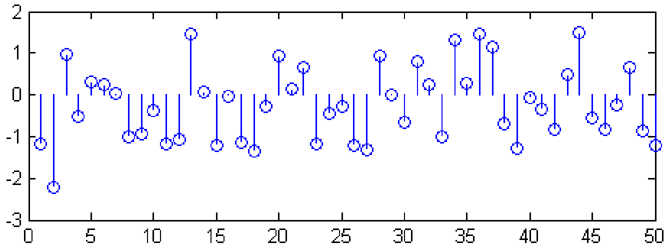
- **On veut estimer $\varphi_{XX}(\tau)$ quand N est fini**

$$\varphi_{XX}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{0}^{N} X(k)X(k+\tau)$$

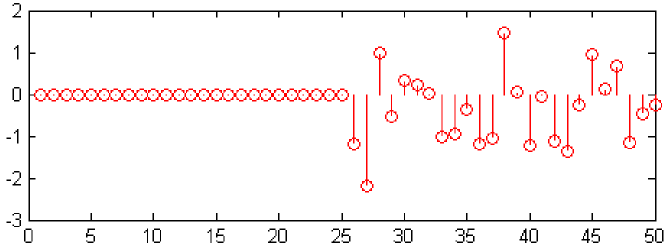
- **Estimateur sans biais**

  Lorsqu'on ne dispose que de N échantillons il n'y a que $N-\tau$ valeurs possibles des produits $X(k)X(k+\tau)$

$X(k)$



$X(k+25)$



Pour N=50, et τ =25
il n'y a que 25 termes non nuls

4.7. Estimation de la fonction d'autocorrélation

- **Estimateur sans biais**

$$\hat{C}'_{XX}(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{0}^{N-|\tau|-1} X(k) X(k+\tau)$$

  - **On montre que**

$$b_{\hat{C}'_{XX}(\tau)} = 0$$

$$\lim_{\tau \to \infty} \left[\operatorname{var}_{\hat{C}'_{XX}(\tau)} \right] = 0$$

  - **L'estimateur est donc consistant**

4.7. Estimation de la fonction d'autocorrélation

- **Estimateur biaisé**

$$\hat{C}_{XX}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-|\tau|-1} X(k)X(k+\tau)$$

  - **On montre que**

$$b_{\hat{C}_{XX}(\tau)} = \frac{-\tau}{N}\varphi_{XX}(\tau)$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\operatorname{var}_{\hat{C}_{XX}(\tau)}\right] = 0$$

  - **On montre que cet estimateur est consistant**

4.8. Estimation de la densité spectrale de puissance

- **Estimateur spectral simple de la densité spectral de puissance**
  - **Prendre la transformée de Fourier de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation**

$$\hat{\Phi}_{XX}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{C}_{XX}(k) \exp(-2\pi j n k)$$

  - **C'est l'estimateur du périodogramme**

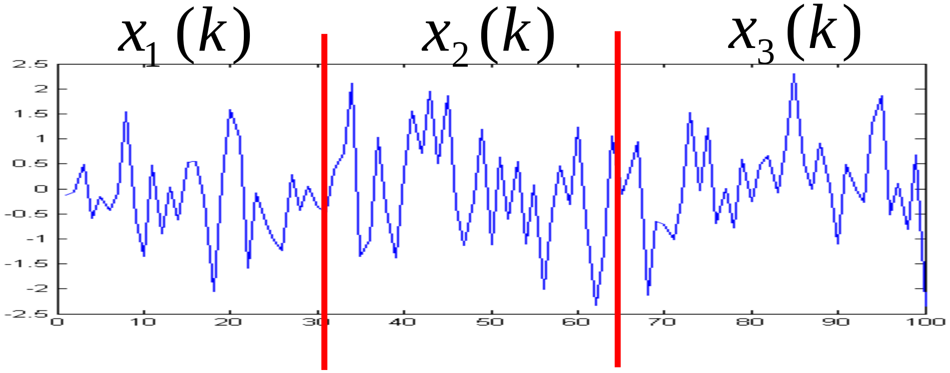
$$\hat{\Phi}_{XX}(n) = \frac{1}{N} \left| X(n) \right|^2$$

  - **Comme l'estimateur de $\hat{C}_{XX}$ est biaisé l'estimateur du périodogramme est biaisé également**

  - **On montre que la variance est non nulle et qu'elle ne dépend pas de la durée du signal, elle ne peut donc pas s'annuler à la limite**

4.8. Estimation de la densité spectrale de puissance

- **Estimateur spectral moyenné**
  - **Une manière simple pour réduire la variance est de calculer une moyenne sur plusieurs estimateurs simples indépendants**
  - **On découpe le signal en L tronçons de durée K tels que** $N = L \times K$



Alors $\overline{\Phi}(n) = \dfrac{1}{L}\sum_{l} \hat{\Phi}_l(n)$ **avec** $\hat{\Phi}_l(n) = \dfrac{1}{N}\left|TFD(x_l(k))\right|^2$

4.8. Estimation de la densité spectrale de puissance

- **Estimateur spectral moyenné**
  - **La variance diminue par rapport à l'estimateur simple**

$$Var_{\overline{\Phi}} = \frac{1}{L} Var_{\Phi_{XX}} = \frac{K}{N} Var_{\Phi_{XX}}$$

4.8. Estimation de la densité spectrale de puissance

- **Estimateur spectral adouci**

$$\hat{R}_{XX}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)\,\hat{C}_{XX}(k)\exp(-2\pi jnk)$$

  - **Les propriétés sont liées aux propriétés de la fenêtre: résolution fréquentielle**

4.8. Estimation de la densité spectrale de puissance

- **Estimateur spectral modifié**

$$\overline{R_x}(f) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{KP}\left|TFD(x_l(k) * w(k))\right|^2$$

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)^2$$

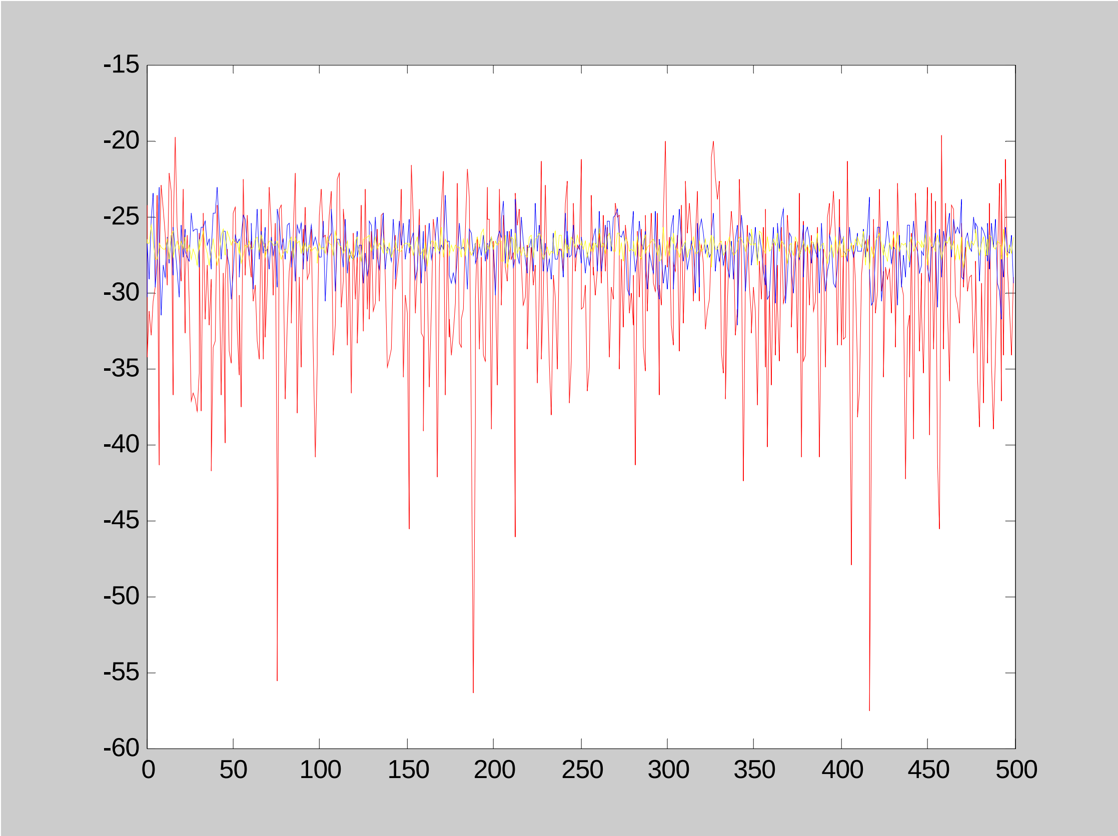
$$N = L \times K$$

- **La variance décroit avec L**

$$Var_{\overline{R_X}} = \frac{1}{L} Var_{\Phi_{XX}}$$

Application (1)

Bruit Blanc de variance 1
échantillonné sur des tronçons de 1000 pts
R = 1 moy B= 8 moy J= 64 moy



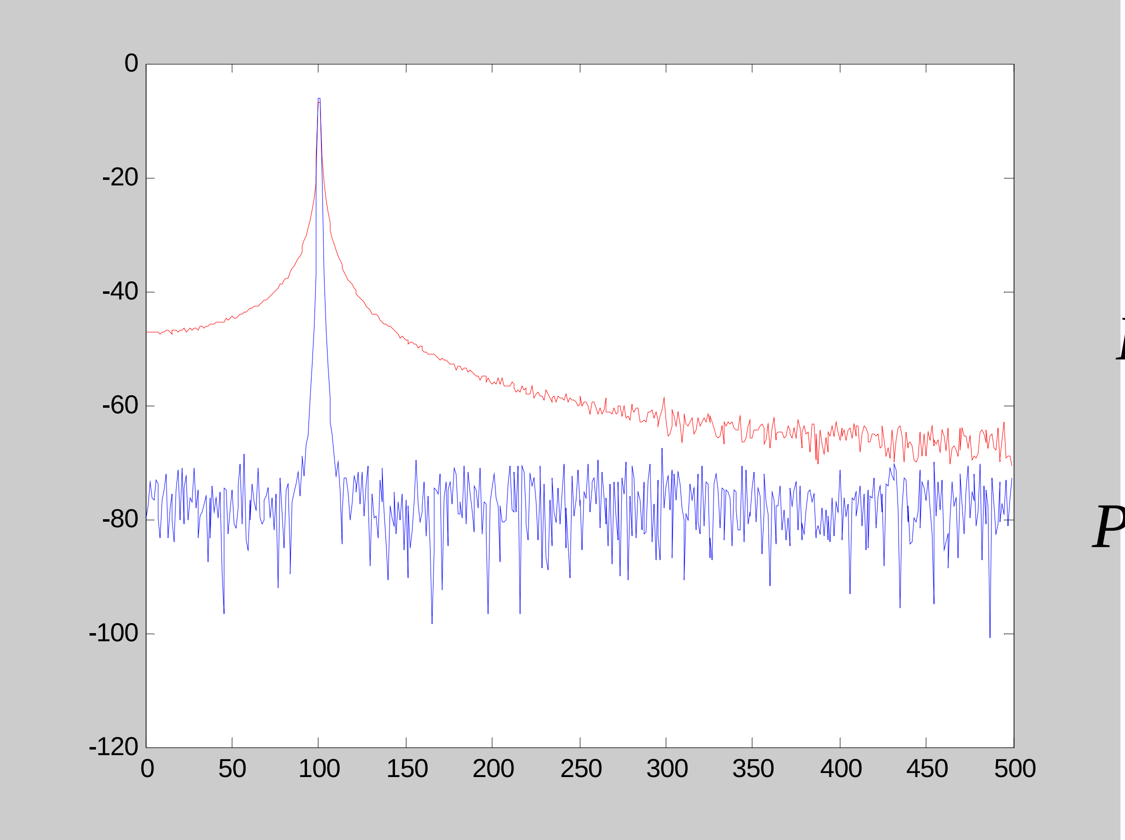
$$P=\sum_{f=f_1}^{f_2}\Phi(f)$$

$$P=500*10^{\frac{-27}{20}}=0,9976$$

Application (2)

Sinus d'amplitude 1 quantifié sur 8 bits

Rectangulaire **Hanning**

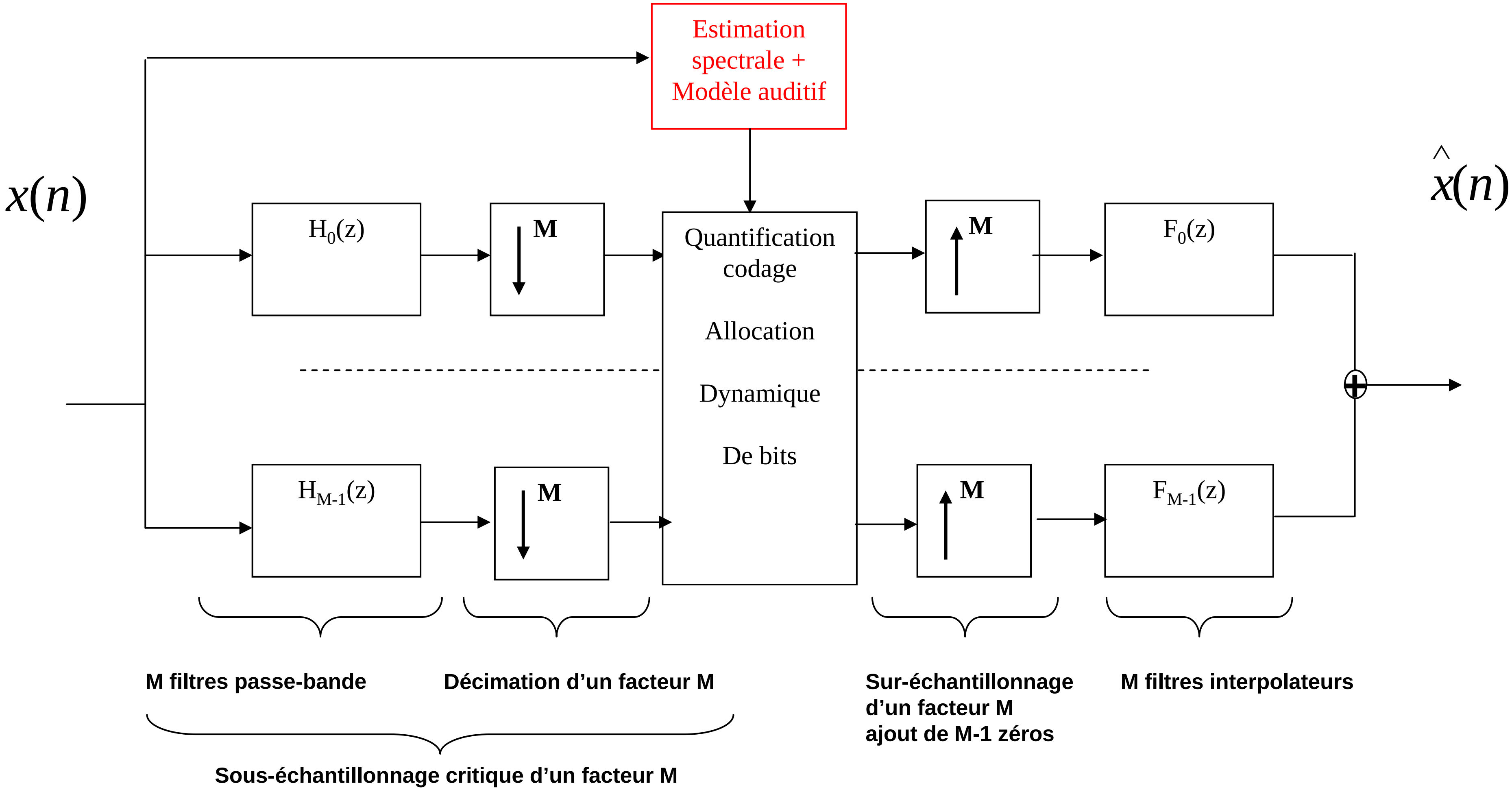


$$P = \sum_{f=90}^{110} \Phi(f) = 0.5$$

$$Pbruit = 500 * 10^{\frac{-78}{20}} = 7{,}92 * 10^{-6}$$

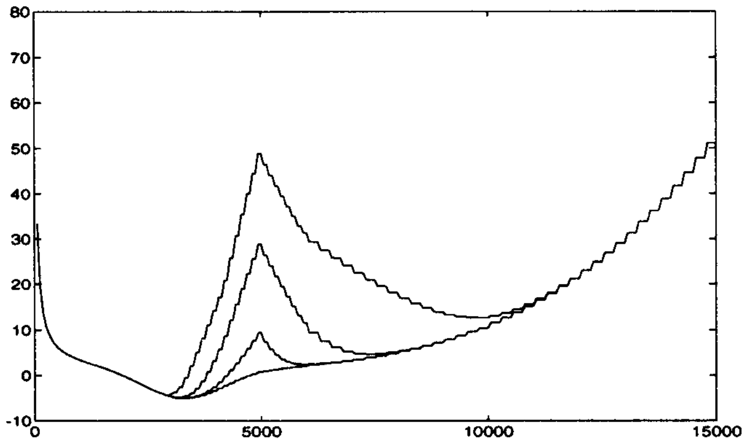
$$Pbruit = \frac{q^2}{12} = \frac{(2/255)^2}{12} = 5{,}12 * 10^{-6}$$

5. Principe du MP3: Modèle auditif de l'oreil



Effet de masquage

Seuil d'audition absolue et courbes de masquage d'une sinusoïde à la fréquence 5KHz pour des puissances de 20, 40 et 60 db

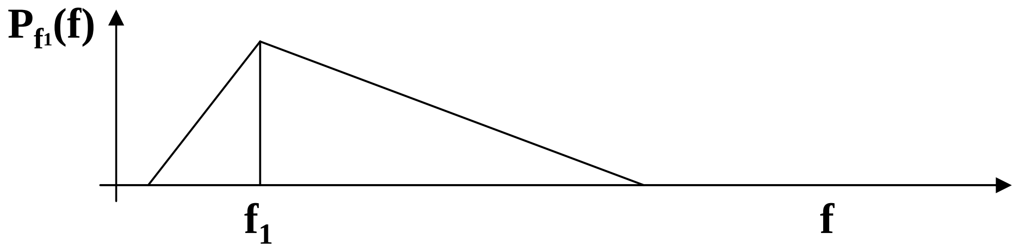


dans une ambiance parfaitement silencieuse l'oreille n'est sensible à une fréquence qu'à condition que sa puissance dépasse le seuil d'audition absolu (0dB)

Une fréquence masque ces voisines i.e. augmente le seuil de perception

Inutile de coder ce que nous ne percevons pas dans le signal musical.
Une compression avec perte est possible en utilisant le modèle auditif humain

Courbes de masquage du Modèle MPEG Audio 1



f_2 perçue si P(f_2) > **$P_{f_1}(f_2)$ courbe de masquage en f_2 par la présence de f_1**

Si l'on exprime la fréquence en Bark (Barkhausen, 1881-1956)

$$f_{bark} = 13\,arctg\left(0{,}76\frac{f_{hertz}}{1000}\right) + 3{,}5\,arctg\left(\left(\frac{f_{hertz}}{7500}\right)^2\right)$$

alors les courbes de masquage peuvent être représentées par des segments de droites dont la pente ne dépend que de f_1

La courbe de masquage s'écrit $P_2(f_2, f_1, P_1) = P_1(f_1) + a(f_1) + M((f_1 - f_2, P_1)$

Courbes de masquage du Modèle MPEG Audio 1

La courbe de masquage s'écrit $P_2(f_2, f_1, P_1) = P_1(f_1) + a(f_1) + M((f_1 - f_2, P_1)$

Avec $P_1(f_1)$ **la puissance de la fréquence** f_1

$a(f_1)$ **l'indice de masquage tel que** $a_t(f_1) = -1{,}525 - 0{,}275 f_1 - 4{,}5$ **son tonal (sinus)**

$a_n(f_1) = -1{,}525 - 0{,}175 f_1 - 0{,}5$ **son non tonal**

$-3 < f_1 - f_2 < -1 \Longrightarrow M(f_1 - f_2, P_1) = 17\left(f_1 - f_2 + 1\right) - \left(0.4 P_1 + 6\right)$

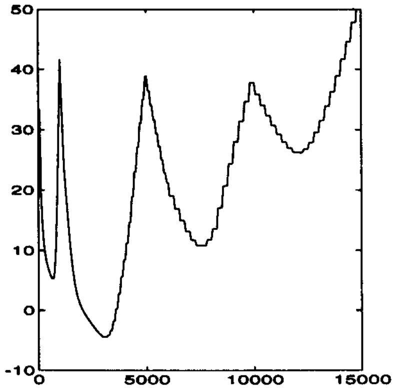
$-1 < f_1 - f_2 < 0 \Longrightarrow M(f_1 - f_2, P_1) = \left(f_1 - f_2\right)\left(0.4 P_1 + 6\right)$

$0 < f_1 - f_2 < 1 \Longrightarrow M(f_1 - f_2, P_1) = -17\left(f_1 - f_2\right)$

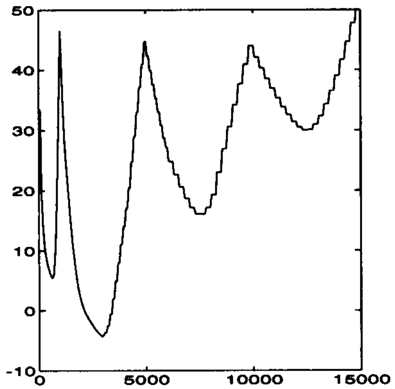
$1 < f_1 - f_2 < 8 \Longrightarrow M(f_1 - f_2, P_1) = -\left(f_1 - f_2 - 1\right)\left(17 - 0.15 P_1\right) - 17$

Exemples

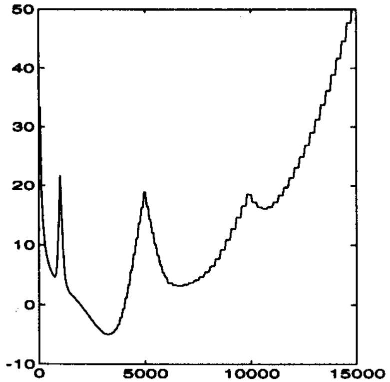
Courbes de masquage par 3 sons purs
à 1, 5 et 10 KHz et une puissance de 50dB



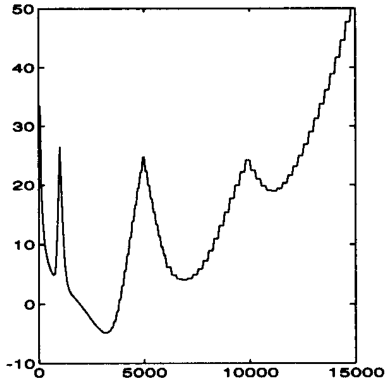
Courbes de masquage par 3 bruits à bande étroite
P=50dB



Courbes de masquage par 3 sons purs
à 1, 5 et 10 KHz et une puissance de 30dB

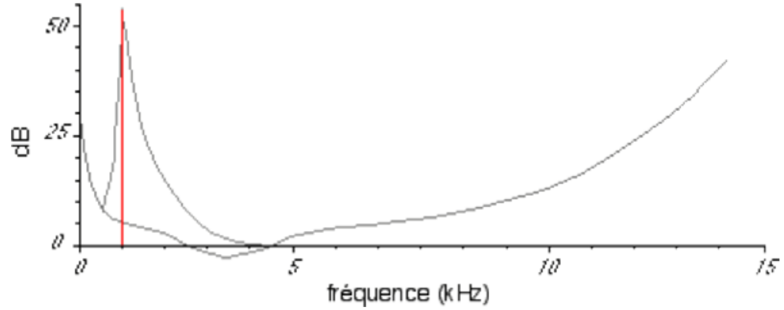


Courbes de masquage par 3 bruits à bande étroite
P=30dB

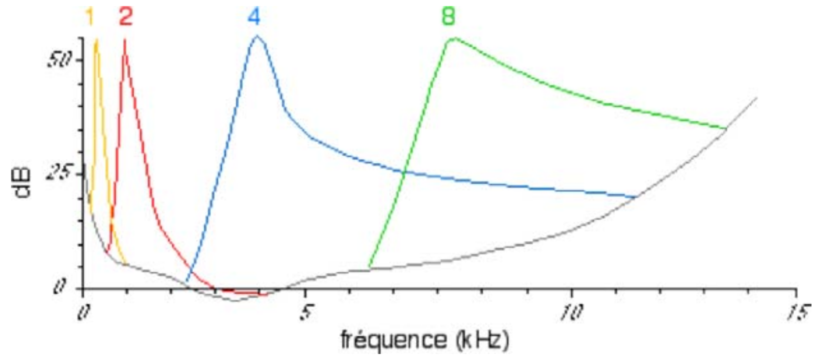


Notion de bande critique

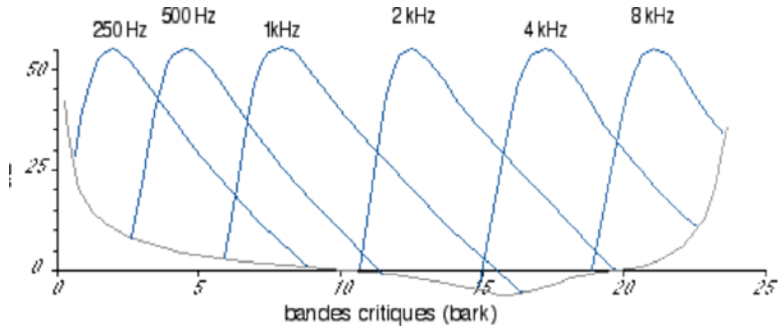
C’est la bande de fréquence dont la perception est modifiée en présence d’une fréquence masquante



La largeur de la bande critique augmente avec la fréquence Masquante



1 Bark mesure la largeur d’une bande critique quelle que soit sa position sur l’axe des fréquences



$$si \;\; f < 500 \; Hz \quad 1 Bark = f/100$$

$$si \;\; f > 500 \; Hz \quad 1 Bark = 9 + 4 \log(f/1000)$$

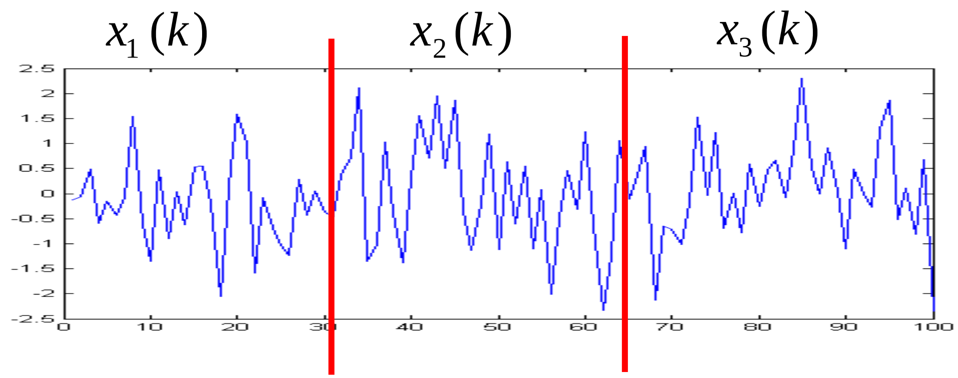
Les 24 bandes critiques de la bande audible

$$\Delta f = \frac{32KHz}{512} = 62{,}5Hz$$

Numéro de la bande	Fréquence inférieure	Fréquence supérieure	Largeur de la bande critique
1	20	100	80
2	100	200	100
3	200	300	100
4	300	400	100
5	400	510	110
6	510	630	120
7	630	770	140
8	770	920	150
9	920	1080	160
10	1080	1270	190
11	1270	1480	210
12	1480	1720	240
13	1720	2000	280
14	2000	2320	320
15	2320	2700	380
16	2700	3150	450
17	3150	3700	550
18	3700	4400	700
19	4400	5300	900
20	5300	6400	1100
21	6400	7700	1300
22	7700	9500	1800
23	9500	12000	2500
24	12000	15500	3500

Calcul de la courbe de Masquage

- **Il s’agit d’analyser la composition spectrale du signal pour déterminer les bandes de fréquence qui ne sont pas audibles**
- **On procède à des analyses locales pour avoir des propriétés de stationnarité du signal**
- **Le signal audio est donc analysé par tronçons successifs** $x_l(k) \quad k=0,\ldots,511$
  - **N = 512 échantillons**
  - **D = 16 ms pour F_e = 33KHz**
  - **D = 11,6 ms pour F_e = 44 Khz**



- **On note** $x_l(k) \quad k=0,\ldots,511$ **les 512 échantillons du tronçon n° *l***
- **On note** $X_l(n) \quad n=0,\ldots,511$ **les 512 échantillons de la TFD du trançons**

Les 25 bandes critiques du MPEG

Pour $f_e = 44{,}1 KHz$ $\qquad \Delta f = \dfrac{44{,}1KHz}{512} = 86{,}1Hz$

Limites des bandes critiques

N° de bandes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Fréquences (Hz)	86	172	258	431	517	689	775	947	1120	1292	1464	1723	1981	2326	2756

N° de bandes	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Fréquences (Hz)	3187	3876	4479	5340	6374	7580	9302	11370	15504	19983

Calcul de la courbe de Masquage

- **Etape 1**: estimation de la densité spectrale de puissance par l'estimateur adouci (fenêtre de hanning mais sans moyennage)

$$R_l(n) = 10 \times \log_{10}\left[\frac{1}{NP}\left|TFD(x_l(k) * w(k))\right|^2\right]$$

- **Etape 2:** normalisation à 96dB (par translation + ou – du max)

$$\max_n R_l(n) = 96dB$$

Calcul de la courbe de Masquage

- **Etape 3:** Détection des composantes tonales vérifiant les 3 conditions

$$S(n) > S(n-1)$$
$$S(n) \geq S(n+1)$$
$$S(k) - S(k+j) \geq 7dB$$

avec si $k \in [3,63]$ $alors$ $j = -2,+2$ (basses fréquences)

si $k \in [64,126]$ $alors$ $j = -3,-2,+2,+3$ (fréquences moyennes)

si $k \in [127,250]$ $alors$ $j = -6,\ldots,-2,+2,\ldots,+6$ (hautes fréquences)

Calcul de la courbe de Masquage

- **Etape 4:** Renforcement des composantes tonales

  On ajoute aux composantes tonales la puissance des deux harmoniques voisines

si n est tonale

$$P_1(n) = 10 \times \log_{10}\left(10^{R_l(n-1)/10} + 10^{R_l(n)/10} + 10^{R_l(n+1)/10}\right)$$

Calcul de la courbe de Masquage

- **Etape 5:** Renforcement des composantes non tonales

  Dans chaque bande critique on somme les puissances des composantes non tonales

si n est non tonale

$$P_1(n) = 10 \times \log_{10}\left(\sum_{\substack{debut, \\ n \ non \ tonale}}^{fin} 10^{R_l(n)/10} \right)$$

Calcul de la courbe de Masquage

- **Etape 6:** Elimination des fréquences tonales et non tonales inférieures au seuils d'audition

- **Etape 7:** passer à une échelle en Bark

- **Etape 8:** deux composantes tonales séparées de moins de 0,5 Bark entraînent l'élimination de la moins puissante

  - **Il reste Nt composantes tonales et Nn composantes non tonales**

- **Etape 9**: calcul du seuil de masquage à la fréquence

$$S_m(n_2) = 10 \times \log_{10}\left(10^{S_a(n_2)/10} + \sum_{j=1}^{N_t} 10^{P_2(n_1, n_2, P_1)/10} + \sum_{j=1}^{N_n} 10^{P_2(n_1, n_2, P_1)/10} \right)$$

Bibliographie

M. Bellanger, Traitement numérique du signal, 6eme édition, Dunod, 1998

Blanchet, Charbit, Traitement numérique du signal, Hermes, 1998.

M. Kunt, Techniques modernes de traitement numérique du signal, Volume 1, PPUR, 1991.

P. Réfrégier, Théorie du signal, Masson, 1993.