Unidad 5. Análisis exploratorio de datos

1. Introducción

El proceso científico

El campo de la estadística se enfoca en el proceso científico de

- recolectar
- organizar
- analizar y
- extraer conclusiones

a partir de los "datos".
Recordamos que:

"todo dato es una construcción".

Las otras ciencias

La estadística se vincula con disciplinas o líneas disciplinares como:

- bioinformática
- genética (bioestadística genética)
- agronomía
- astronomía
- economía
- educación
- electrónica
- geología
- ciencias de la salud
- teoría de comunicación
- teoría de la información
- inteligencia artificial
- ...

¿Cómo la estadística colabora en la investigación?

La estadística puede asistir a otros campos científicos a través de

- El diseño de experimentos y encuestas
- La organización, descripción y resumen de los datos, abriendo paso a la estadística descriptiva.
- La producción de inferencias y toma de decisiones

¿Cómo la estadística colabora en la investigación?

La recolección de datos incluye los siguienes pasos:

1. Definir los objetivos del problema y proceder al desarrollo del experimento o encuesta.

2. Definir las variables y parámetros de interés.

3. Definir los procedimientos de recolección de datos y técnicas de medición: muestreo, tamaño muestral, dispositivos de medición de datos (cuestionarios, encuestas telefónicas, perfil de las/los encuestadoras/res, etc).

2. Conceptos básicos

Población y muestra

Definición

La **población** *es el conjunto o colección de todos los objetos o sujetos o mediciones que son objeto de interés del estudio.*

Definición

Un **parámetro** *es una medida resumen sobre la población.*

Definición

Cada elemento de la población se denomina **unidad de análisis** *(unidad experimental en el contexto de un experimento).*

Definición

La **muestra** *de unidades es un subconjunto seleccionado de la población y el* **tamaño muestral** *es su cardinal.*

Producción industrial

Ejemplo

Se quiere estimar el porcentaje o proporción de partes averiadas en una fábrica durante una semana dada (cinco días) producidas por día. Se seleccionan al azar por día 20 piezas fabricadas durante los cinco días.

Así:

- La población consiste en "todas las partes producidas en la fábrica durante la semana".
- El parámetro es la proporción
- La muestra de unidades es el conjunto de 100 piezas elegidas al azar durante la semana.

Variables y datos

Definición

Una **variable** *es una característica que varía en cada unidad de análisis.*

Definición

Un **dato** *es el valor observado de la variable medido en una unidad de análisis.*

Definición

La **muestra estadística** *son todos los datos correspondientes a la muestra de unidades.*

Definición

La **población estadística** *son todos los datos correspondientes a la población de unidades.*

Observación: La noción de variable sigue siendo la misma de antes, cambia el sentido por el nuevo contexto.

Tipos de datos

Definición

Un dato **cuantitativo** *es una observación medida en escala numérica. Se clasifica en continuo o discreto.*

Definición

Un dato **categórico** *define la pertenencia de un objeto a una categoría o clase. Se clasifica en nominal u ordinal.*

Observación: Las variables reciben una denominación análoga.

Aplicaciones

Ejemplo

1. *La respuesta a un tipo de terapia puede ser clasificada en mejora, mejora pacial o sin mejora. Estos datos son cualitativos (categóricos nominales)*
2. *Los números de almaceneros minoristas según barrio en Río Cuarto son datos cuantitativos.*
3. *El grupo sanguíneo de una persona de Moldes es un dato categórico nominal.*
4. *El nivel educativo de un sujeto de la ciudad de Moldes puede ser pensado como un dato categórico ordinal.*

3. Resumen estadístico y visualización

Medidas de resumen y visualización

En estadística descriptiva se exploran los "datos" mediante:

- gráficos y
- medidas de resumen o **estadísticos**.

Seguimos una estrategia con dos momentos:

- Análisis descriptivo univariado: se resume y representa la información por cada variable separadamente.
- Análisis descriptivo multivariado: se representan y resumen las variaciones conjuntas de las variables.

Para ambos análisis seguiremos los siguientes materiales

- Bianco, A. (2019)[1]
- Maronna, R. (2021).

[1] http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2019/estadistica_M/

Encuesta a estudiantes

Los datos provienen de una encuesta a estudiantes de un curso introductorio de estadística[2]. Hay 362 observaciones y 17 variables. Las variables son:

1. Year: Año en la institución: FirstYear, Sophomore, Junior, o Senior
2. Gender: Género: F o M
3. Smoke: Fuma? No ó Yes
4. Award: Premio preferido: Academy, Nobel, o Olympic
5. HigherSAT: Qué puntaje SAT es más alto? Math o Verbal
6. Exercise: Horas semanales de ejercicio
7. TV: Horas semanales de TV
8. Height: altura (en pulgadas)
9. Weight: peso (en libras)
10. Siblings: número de hermanos
11. BirthOrder: orden de nacimiento, $1 =$ mayor, $2 =$ segundo mayor, etc.
12. VerbalSAT: puntaje SAT en lengua
13. MathSAT:puntaje SAT en matenáticas
14. SAT: puntaje SAT combinado de lengua y matemáticas
15. GPA: puntaje promedio obtenido en el colegio
16. Pulse: pulso cardíaco (latidos por minuto)
17. Piercings: número de piercings

[2] https://rdrr.io/rforge/Lock5Data/man/StudentSurvey.html

Base de datos

En R, levantamos la base de datos

```
base_datos=read.csv("StudentSurvey.csv",header=TRUE)
```

Utilizando la función `colnames()` le cambiamos los nombres de las variables del inglés al castellano.

```
> colnames(base_datos)
[1] "Año"             "Genero"          "Fuma"            "Premio"
[5] "SATmax"          "Ejercicio"       "TV"              "Altura"
[9] "Peso"            "Hermanos"        "Ordennacimiento" "SATLengua"
[13] "SATMatematica"   "SAT"              "GPA"             "Pulso"
[17] "Piercings"
```

Y, utilizando la función `gsub()` modificamos para las variables categóricas los nombres de las categorías, del inglés al castellano.

Representación de datos categóricos

Distribución empírica de una variable categórica.

- Tabla de frecuencias absolutas o relativas: indica el número de observaciones que caen en cada una de las clases de la variable o la frecuencia relativa de una clase (el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de observaciones).
- Gráfico de Barras: a cada categoría o clase de la variable se le asocia una barra cuya altura representa la frecuencia o la frecuencia relativa de esa clase. Las barras difieren sólo en altura, no en ancho y se representan separadas por un espacio.
- Gráfico de Tortas: Se representa la frecuencia relativa de cada categoría como una porción de un círculo, en la que el ángulo se corresponde con la frecuencia relativa correspondiente.

Tablas y gráficos de barras

La siguiente tabla nos da la distribución (empírica) de la variable Fuma:

Fuma	
No	Si
319	43

Tabla: Tabla de frecuencias absolutas para la variable Fuma

Gráficos de barras

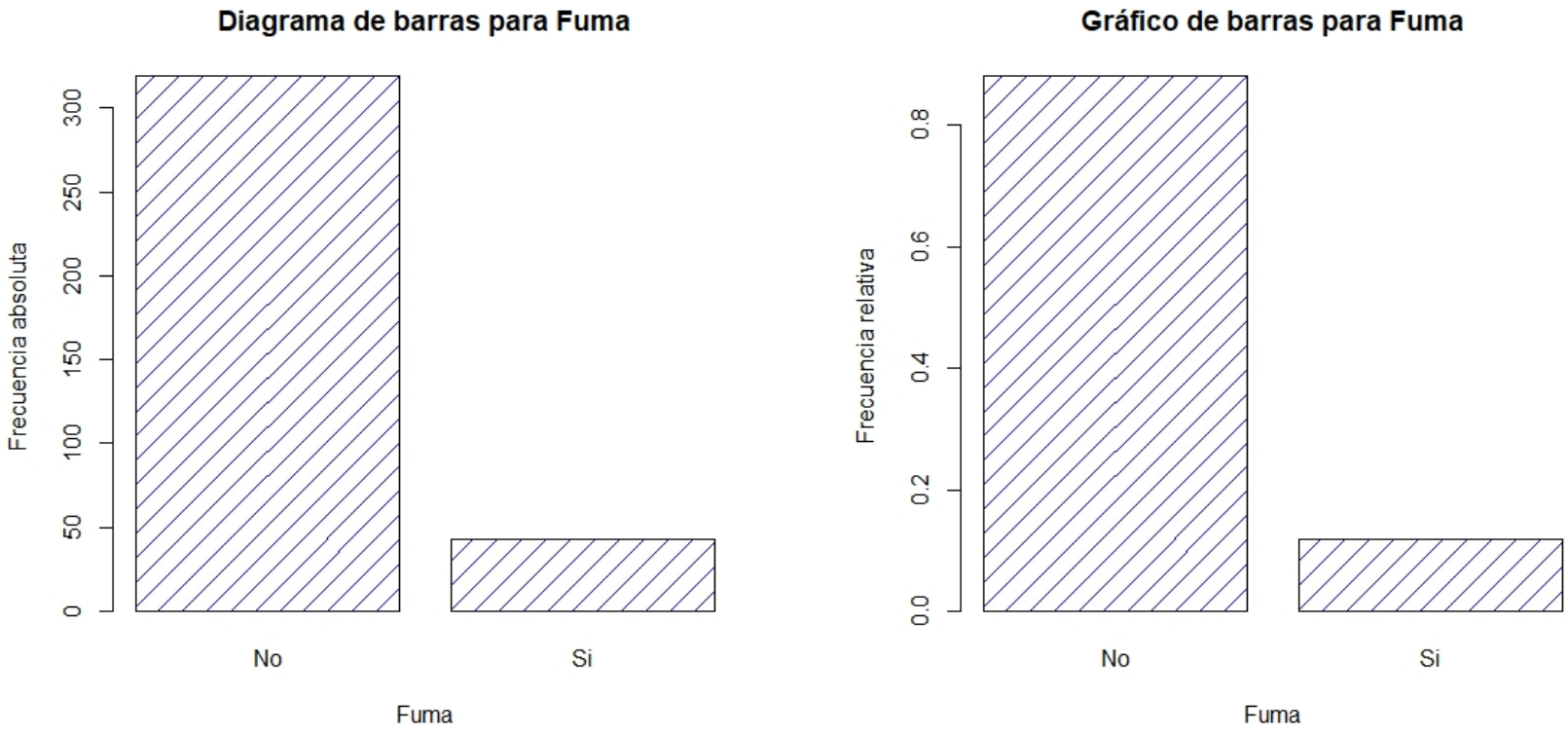


Figura: Gráfico de barras de la variable Fuma.

Gráfico de torta

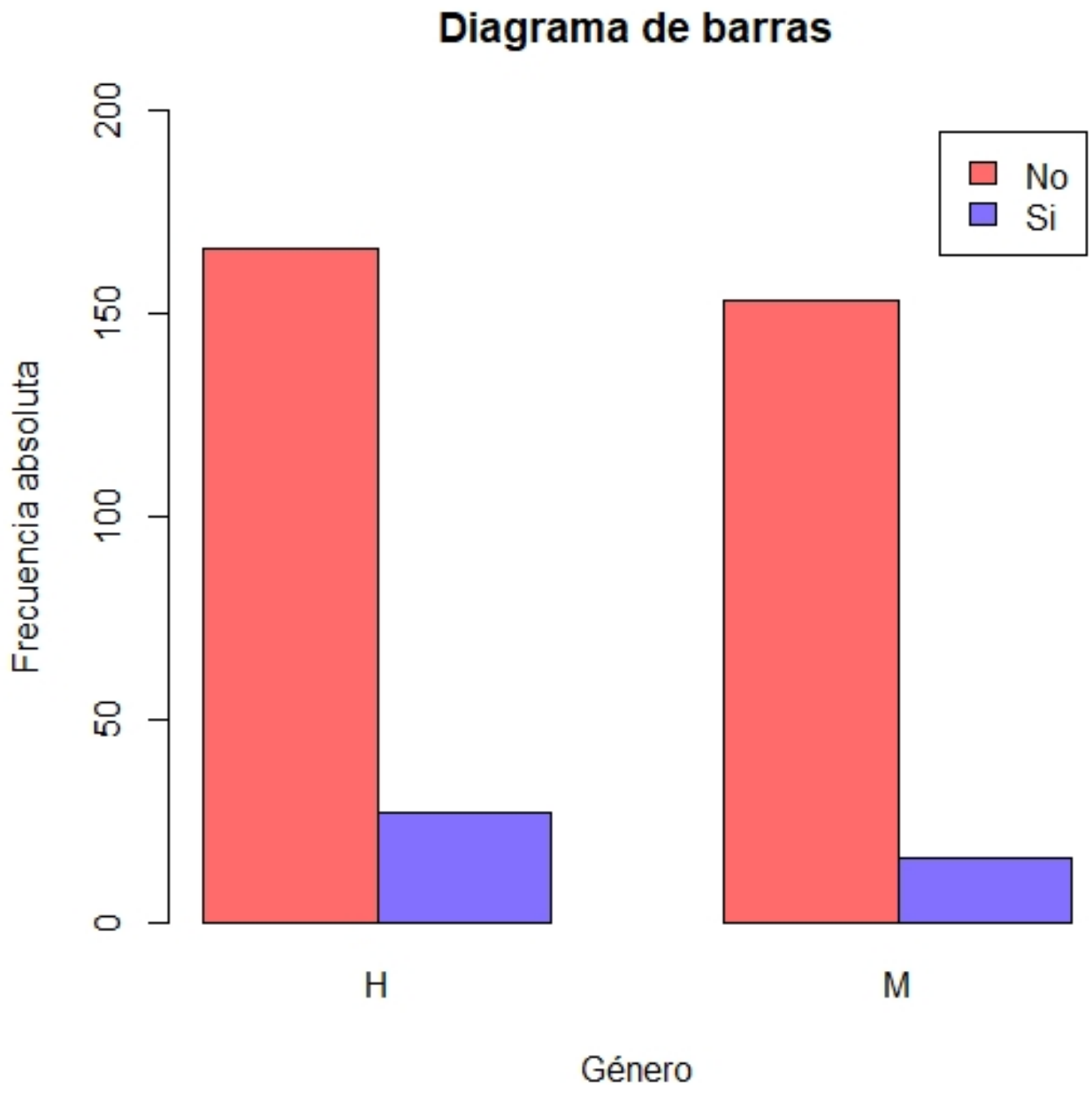
Tablas de contingencia

Tabla de contingencia para la distribución empírica de dos variables categóricas

	Género	
Fuma	H	M
No	166	153
Si	27	16
Total	193	169

Tabla: Tabla de contingencia para las variables Fuma y Género

Gráficos de barras para datos categóricos bivariados



Histograma para datos cuantitativos

Dada una muestra $x_1, \ldots, x_n$ de datos cuantitativos y un intervalo (a_0, a_m) que los contenga[3], un histograma se construye del siguiente modo:

- Se elige una partición en m sub-intervalos $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ y sea $L_j = a_j - a_{j-1}$, $j = 1, \ldots, m$.
- Sea $f_j = \#\{i : x_i \in [a_{j-1}, a_j)\}$ (o $f_{j,r} = f_j/n$).
- Se grafica la función igual a f_j/L_j (ó $f_{j,r}/L_j$) en el intervalo $[a_{j-1}, a_j)$ y 0 fuera de los intervalos.

[3] Maronna (2021)

Histograma para datos cuantitativos

Notar que:

- Se obtiene un conjunto de rectángulos con área f_j (ó $f_{j,r} = f_j/n$)
- Un histograma es una versión discreta de la densidad, en la que áreas miden frecuencias.
- En los lenguajes, como R o Python, hay diferentes definiciones de histogramas (ver en R la documentación para la función `hist`).

Histograma de Altura

```
hist(base_datos$Altura,  ylab='Frecuencia absoluta',main='Histograma para la variable altura',
xlab='Altura (en pulgadas)',  breaks = 5)
```

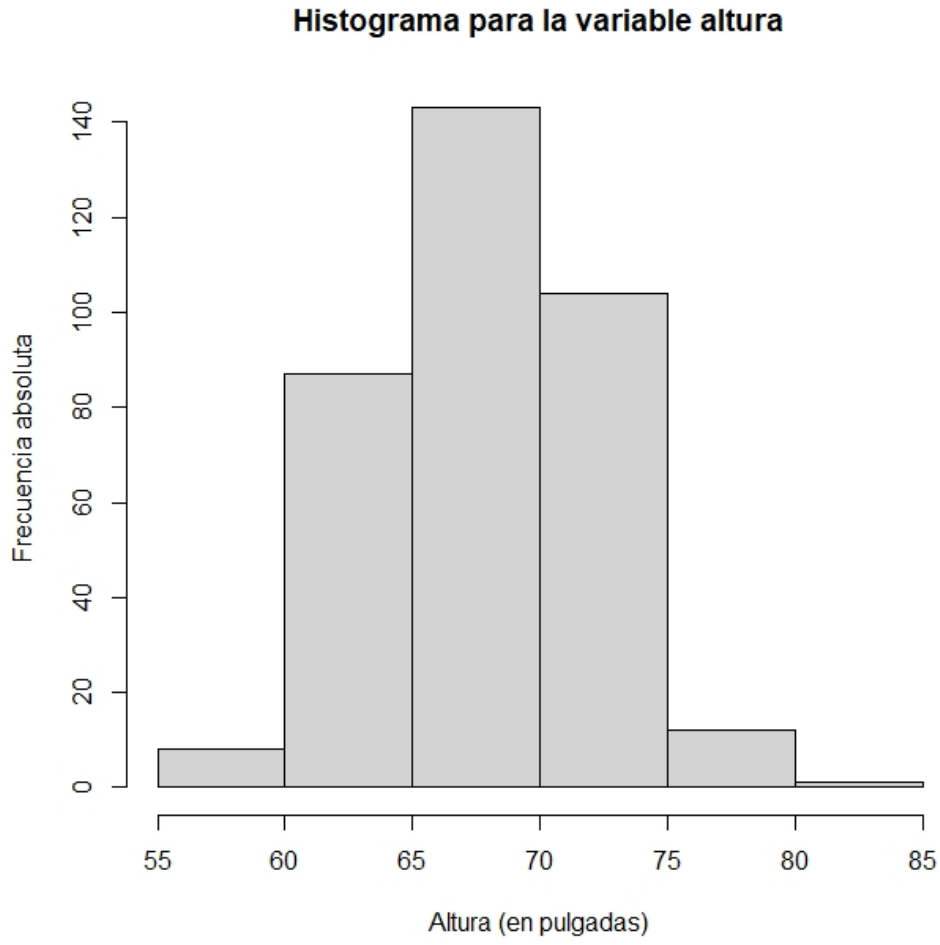


Figura: Histograma para Altura

¿Qué preguntas puede responder un histograma?

A partir de un histograma, como en Bianco (2021) nos preguntamos:

- ¿Cuál es el rango de variación de los datos (mínimo y máximo)?
- ¿Cuáles son los intervalos de mayor frecuencia?
- ¿La distribución es unimodal o multimodal (más de un pico)?
- ¿La distribución es simétrica?
- Si es asimétrica, ¿la asimetría es a derecha o a izquierda?
- ¿En torno a qué valor están aproximadamente centrados los datos?
- ¿Cuán dispersos en torno a este centro están los datos?
- ¿Hay datos atípicos en relación a la mayoría de los datos?

Algunos tipos de histogramas

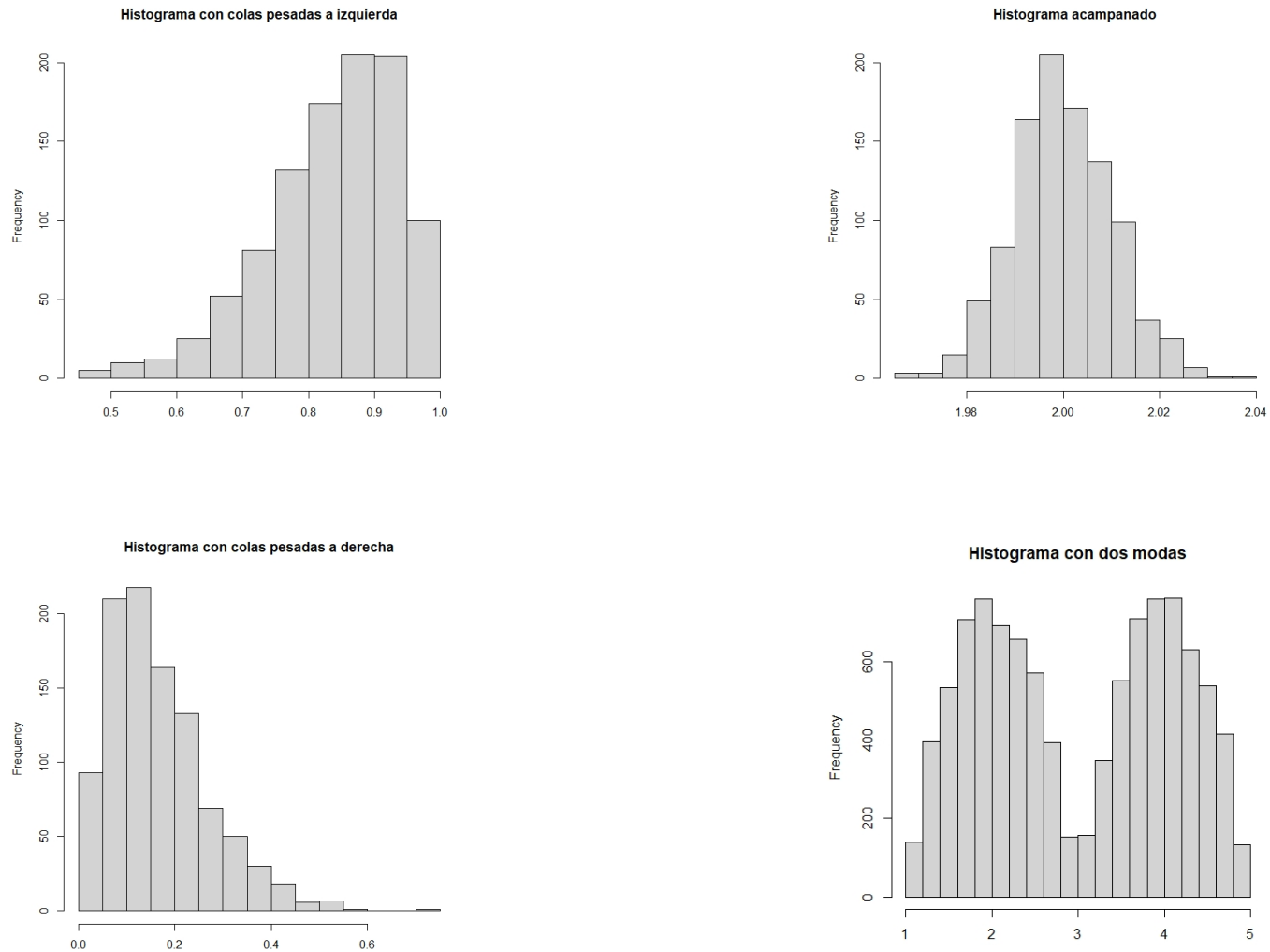
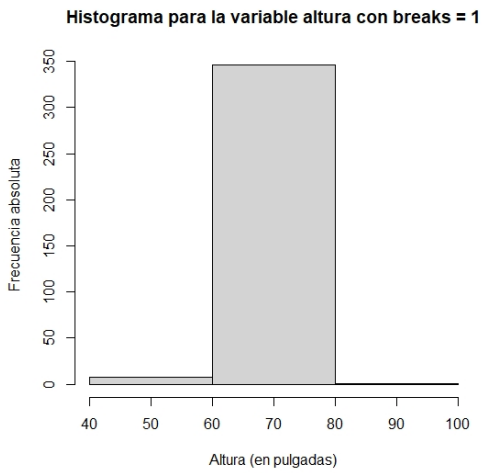
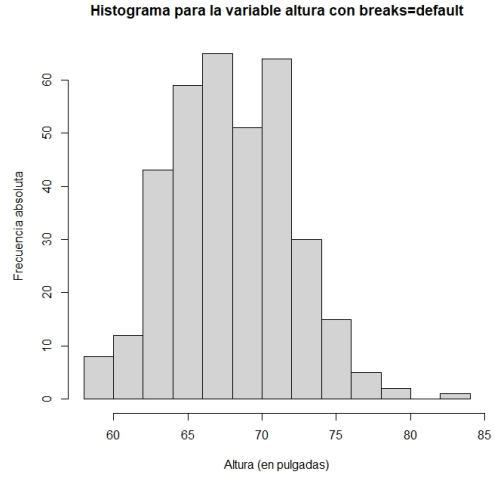
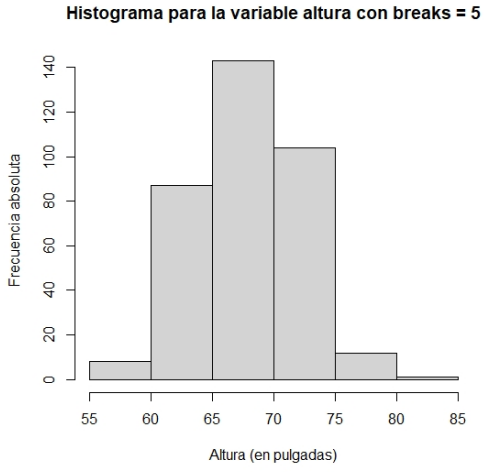


Figura: Diferentes tipos de histogramas

Selección del número de subintervalos







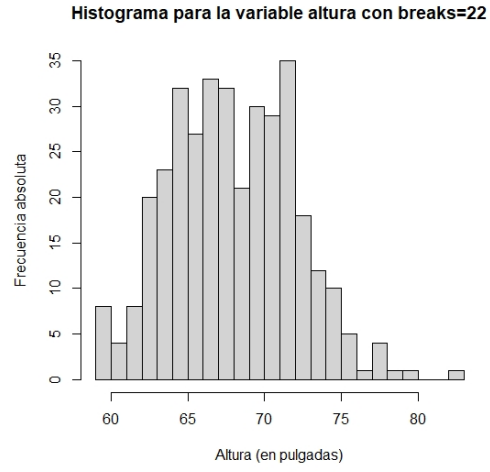


Figura: Histogramas con diferentes número de breaks (extremos de subintervalos) para la variable Altura

Selección del número de subintervalos

Hay varios métodos para seleccionar el número de subintervalos:

- Método de Sturges.
- Regla de Freedman - Diaconis.
- Regla de Scott.

En R se utiliza un método de dos pasos.

Diagramas de dispersión para datos bivariados cuantitativos

Consideremos dos variables cuantitativas X e Y, dadas

- una muestra estadística $x_1, \ldots, x_n$ de la variable X
- una muestra estadística $y_1, \ldots, y_n$ de la variable Y

en un diagrama de dipersión se grafican (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

El objetivo de tal diagrama o gráfico es visualizar alguna estructura entre los datos bivariados.

Correlación entre variables de la encuesta

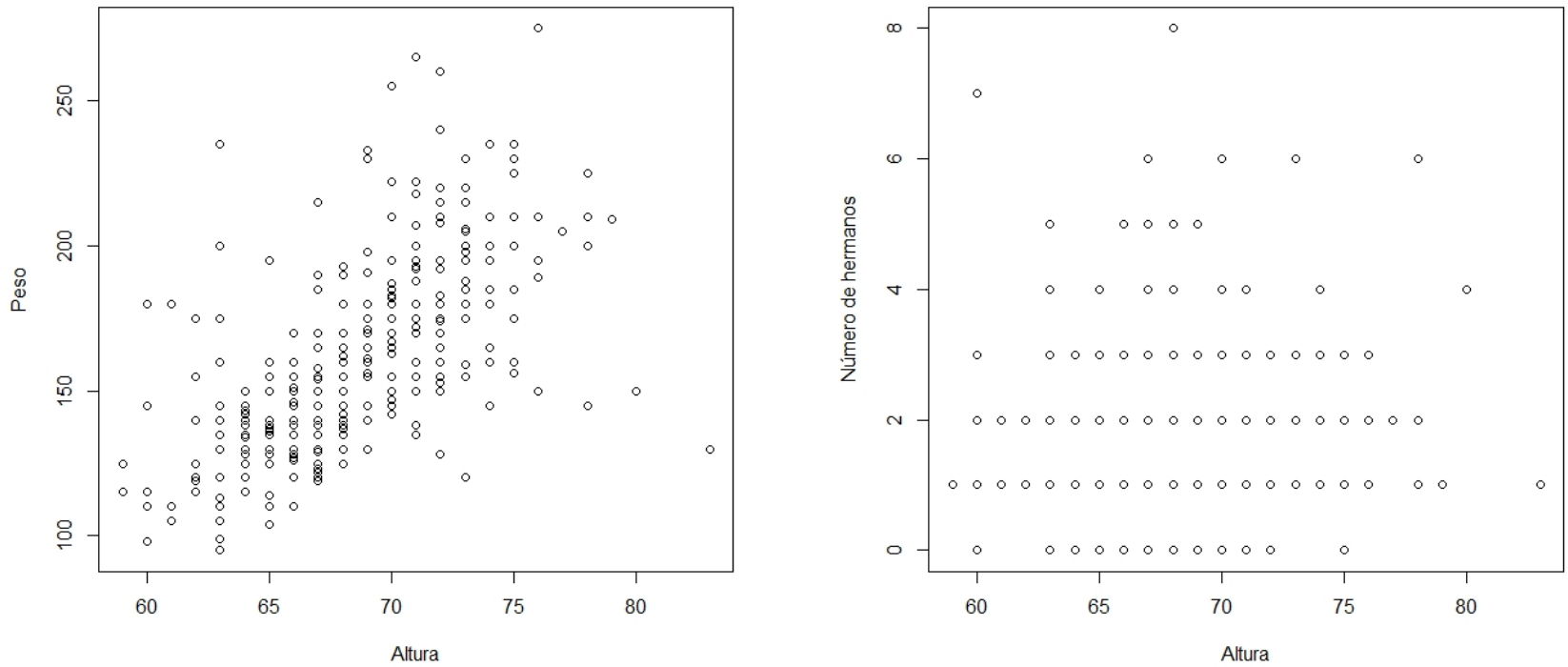


Figura: Diagramas de dispersión

Claramente entre Altura y Número de hermanos no hay ningún patrón, en cambio el otro diagrama sugiere que a mayor Altura mayor Peso.

Medidas de resumen

Consideremos una variable X con codominio Δ tal que

$$\Delta \subseteq I\!R \text{ o } \Delta \text{ es un conjunto de categorías.}$$

Un estadístico es una función

$$T : \Delta^n \to I\!R$$

que permite resumir el comportamiento de los datos.

Medidas de resumen para datos categóricos

- Las frecuencias de cada categoría o nivel de la variable.
- La moda (o modas): el valor (o valores) más frecuente (s).

Ejemplo

Para los datos de la variable Fuma

Fuma	
No	Si
319	*43*

la moda es No.

Medidas de resumen para datos cuantitativos

La función de distribución empírica correspondiente a una muestra $x_1, \ldots, x_n$ de una variable cuantitativa se define como:

$$\forall x \in I\!R: \quad F_n^*(x) = \frac{1}{n} \# \{i : x_i \leq x\}.$$

Las medidas de resumen (para datos cuantitativos) se pueden dividir en:

- medidas de posición
- medidas de dispersión
- Medidas de sesgo o asimetría

Medida de posición central

Representa el "centro" de la muestra ordenada (Bianco, 2019).

- Media o promedio muestral:

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- Dados los datos ordenados

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(k)} \leq x_{(k+1)} \leq \ldots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

se definen:

Mediana muestral

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_{(k+1)} & \text{si } n = 2k+1 \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

También se denota como $\text{med}_{1 \leq i \leq n}(x_i)$.

Media α-podada muestral. Si $0 \leq \alpha < 1/2$ y $m = [n\alpha]$:

$$\bar{x}_{\alpha,n} = \frac{1}{n-2m} \sum_{i=m+1}^{n-m} x_{(i)}$$

Ejemplo "toy o juguete"

Consideremos los datos:

4.4, 5.2, 4.2, 6.6, 5.3, 4.2, 5.5, 5.7, 5.6, 4.7

- Media Muestral:

$$\bar{x}_{10} = \frac{51.4}{10} = 5.14$$

- Ordenamos los datos:

4.2, 4.2, 4.4, 4.7, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 6.6

Mediana muestral: $10 = 2 \times 5 \Rightarrow k = 5$

$$\tilde{x}_{10} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{5.2 + 5.3}{2} = 5.25$$

- Media 10% podada muestral $(\alpha = 0.1)$:

$$\bar{x}_{0.1} = \frac{x_{(2)} + \ldots + x_{(9)}}{8} = 5.08$$

Resumen de Altura

Consideremos los datos de la variable Altura (hay 7 NA o valores perdidos):

```
> mean(u$Altura); median(u$Altura); mean(u$Altura, trim=0.3)
[1] 68.42254
[1] 68
[1] 68.34266
```

¿Cómo interpretamos estos estadísticos en términos del contexto de la encuesta?:

- las alturas de los 355 estudiantes - que informaron el dato - están alrededor de 68.4 pulgadas
- la mitad de los estudiantes tienen una altura igual o inferior a 68 pulgadas.

¿Qué significa "centro"?

Los siguientes histogramas corresponden a dos muestras de datos diferentes.

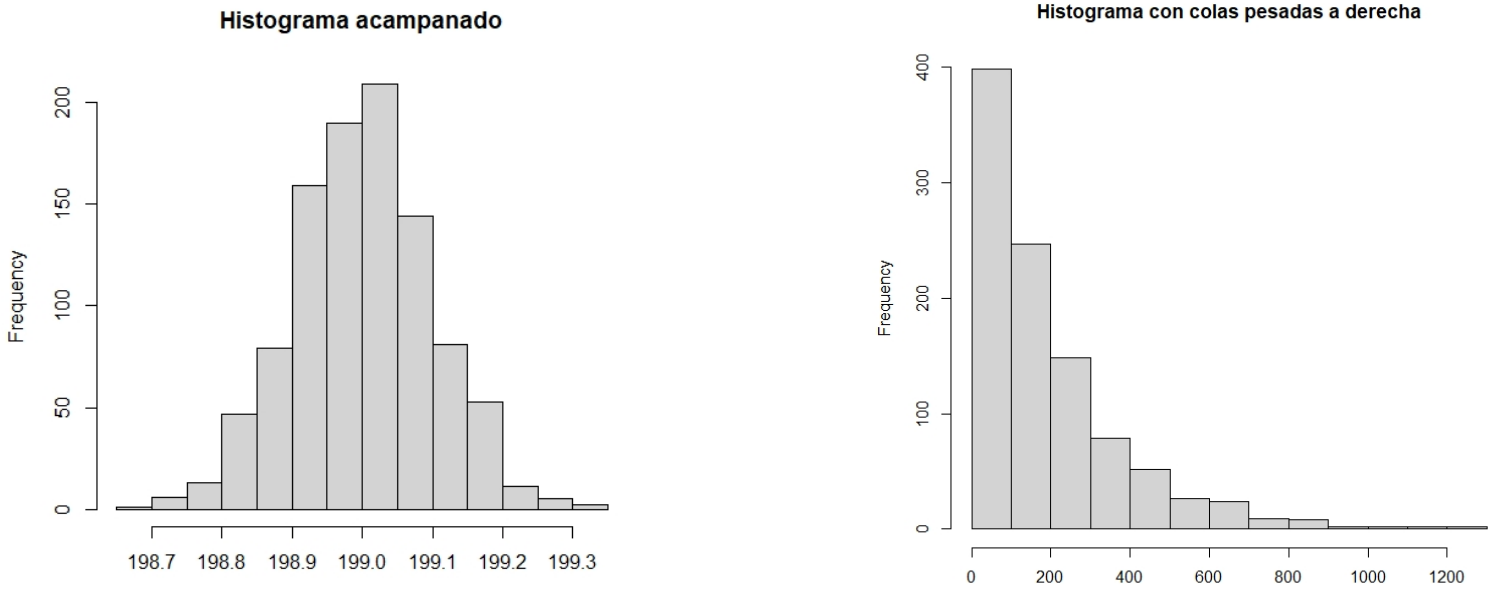


Figura: De izquiera a derecha: $\bar{x} = 199 \approx \tilde{x} = 198.99$; $\bar{x} = 187.4 > \tilde{x} = 125.8$

Medidas de resumen: el cuantil

Sea F_n^* la función de distribución empírica asociada a $x_1, \ldots, x_n$ y sean $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ los valores de la muestra ordenados (estadísticos de orden).
A $x_{(1)}$ se le denomina el i-esimo estadístico de orden, $i = 1, \ldots, n$.

Dado $\alpha \in (0, 1)$, el cuantil muestral α se define como[4]

$$x_\alpha^* = (1 - h)x_{(k)} + hx_{(k+1)} \quad \text{para } \alpha \in [1/2n, 1 - 1/2n],$$

donde k y h son respectivamente la parte entera y la parte fraccionaria de $u = n_a + 0.5$; o sea, $k = [u]$ y $h = u - [u]$.

El cuantil x_α^* deja una proporción α de las observaciones $x_1, \ldots, x_n$ por debajo de él.

[4] ver Maronna, 2021 y la documentación de R
https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/quantile

Medidas de resumen: cuartiles

Hay tres percentiles muy utilizados:

- El cuantil $\alpha = 0.25$ llamado primer cuartil y denotado por Q_1.
- El cuantil $\alpha = 0.5$ que es la mediana denotado por Q_2[5].
- El cuantil $\alpha = 0.75$ llamado tercer cuartil y denotado por Q_3.

Un resumen de los 5 números consiste de los tres cuartiles, el mínimo y el máximo.

[5] también denotado por $\tilde{x}$, como antes.

Cuartiles y cuantiles para el puntaje SAT Lengua

Basados en

```
> quantile(base_datos$SATLengua, prob=.10)
10%
500
> summary( base_datos$SATLengua)
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
390.0   550.0   600.0   594.2   640.0   800.0
```

podemos establecer que

- El 10 por ciento de los estudiantes tiene un puntaje SAT en Lengua igual o inferior a 500.
- El 25% del grupo de estudiantes tiene un puntaje en dicha asignatura menor o igual a 550, la mitad igual o menos que 600, el 75% posee un puntaje igual o inferior a 640. El puntaje mínimo es 390 y el máximo es 800.

Medidas de dispersión

Capturan la variabilidad presente en los datos.

- Rango:

$$\text{rango} = x_{(n)} - x_{(1)}$$

- Varianza:

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Desvío muestral:

$$s_n = \sqrt{s_n^2}$$

- Coeficiente de variación:

$$\text{cv}_n = \frac{\sqrt{s_n}}{\bar{x}_n} \times 100\%$$

Medidas de dispersión

Medidas de dispersión

- Mediana de Desvíos Absolutos:

$$\text{mad} = 1.4826\,\text{med}_{1\leq i\leq n}\left(|x_i - \tilde{x}|\right)$$

- Distancia Intercuartil:

$$d_I = Q_3 - Q_1$$

Nota: asumiendo normalidad, para que s, la mad y d_I "identifiquen" a σ se introduce el factor de corrección $d_I/1.349$.

Medidas de sesgo o asimetría

- Medida de sesgo

$$\bar{\eta}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{3/2}}$$

- Medida de sesgo de Fisher

$$\hat{\eta}_3 = \frac{\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

  donde s^2 es la varianza muestral.

Si los coeficientes son cercanos a cero indican simetría, caso contrario la presencia de sesgo. Ver skewness para su cómputo en R.

Medidas de dispersión para Altura

A partir de

```
Altura<- base_datos[!is.na(base_datos$Altura), ]$Altura # Removemos los NA
> rango
[1] 24
> var(Altura)
[1] 16.63452
> sd(Altura)
[1] 4.078544
> cv=(sd(Altura)/mean(Altura))*100; cv
[1] 5.960819
> mad(Altura)
[1] 4.4478
IQR<- quantile(Altura,.75)-quantile(Altura,.25);IQR # ó IQR(Altura)
75%
6
```

concluimos que:

- La diferencias entre las alturas máxima y mínima es de 24 pulgadas.
- En promedio las alturas de los estudiantes distan del promedio en 4.08 pulgadas.
- El porcentaje de variabilidad de la muestra de alturas relativa a su media es del 6%.

Diagrama de caja o boxplot.

Como en Bianco (2019), para construir un diagrama de caja:

- Representamos una escala vertical u horizontal.
- Dibujamos una caja cuyos extremos son los cuartiles Q_3 y Q_1 y dentro de ella un segmento que corresponde a la mediana.
- A partir de cada extremo dibujamos un segmento, llamado bigote, hasta el dato más alejado que está a lo sumo 1.5 veces el rango intercuartílico desde cada uno de los extremos de la caja.
- Marcamos con $\circ$ a aquellos datos que están a más de $1.5d_I$ de cada extremo de la caja.

Diagrama de caja: ejemplo juguete.

En R computamos los estadísticos de dispersión para una muestra juguete:

```
toy
-2 10  0  0 -4  3  3  1  4 15
 Q3<- quantile(toy,.75);  Q2<- quantile(toy,.5); Q1<- quantile(toy,.25)
Q1;Q2;Q3
25%
0
50%
2
75%
3.75
max(toy); min(toy)
15
4
1.5*IQR(toy)+Q3
9.375
Q1- 1.5*IQR(toy)
-5.625
```

Diagrama de caja: ejemplo juguete.

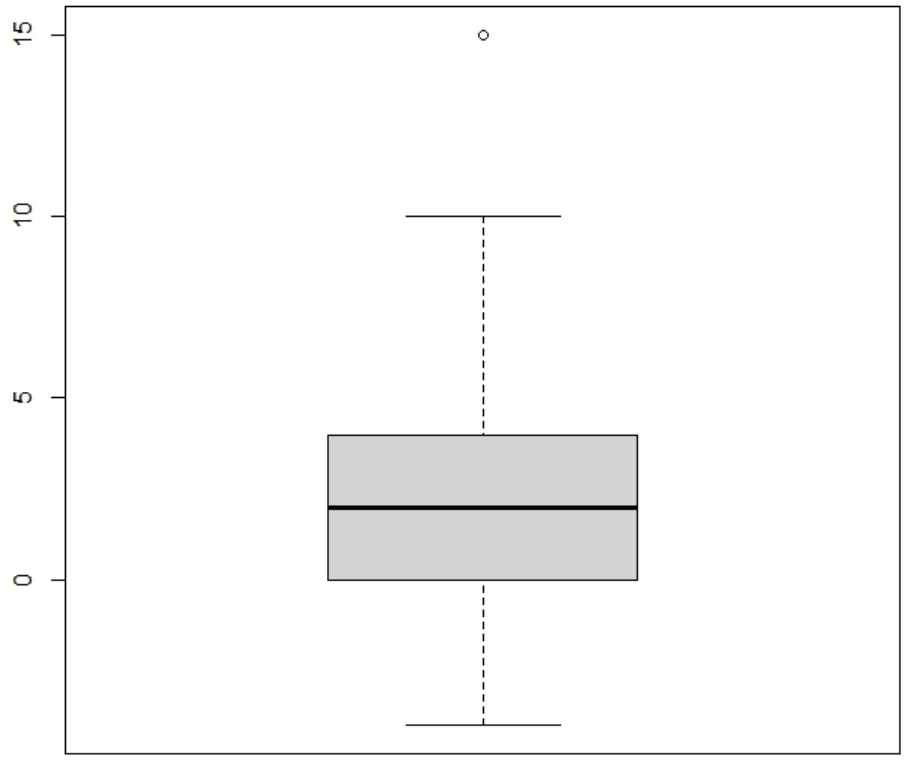


Figura: Diagrama de caja para Altura