MODELOS MATEMÁTICOS

1. **Cuantos años le tomará a tu inversión en triplicar su valor si la tasa que manejas en la inversión es del 7% de interés compuesto continuo?**

Solución:

Modelo interés continuo: caso particular del interés compuesto donde la capitalización es en cada instante de tiempo y cuya ecuación es:

$$M = Ce^{rt}$$

Donde:

C= Capital
r= tasa de interés
t = tiempo
M=Monto

t=?
r=tasa anual
C= desconocido
M=3C

$$3C = Ce^{rt}$$

$$3 = e^{0,07t}$$

$$Ln3 = 0,07t$$

$$t = \frac{ln3}{0,07} = 15,6 \text{ años}$$

2. **Cuánto dinero debes invertir para obtener en 5 años 6000000 COP si la tasa de interés es del 7% compuesto continuamente.**

Solución:

Modelo interés continuo: caso particular del interés compuesto donde la capitalización es en cada instante de tiempo y cuya ecuación es:

$$M = Ce^{rt}$$

Donde:

C= Capital
r= tasa de interés
t = tiempo
M=Monto

t=5 años
r=7%
C= desconocido
M=600000 COP

$$600000 = Ce^{0,07(5)}$$

$$600000 = C\ 1.419$$

$$C = 422,832\ COP$$

3. Una inversión de 300 dólares se capitaliza continuamente a una tasa de interés anual del 7,5% ¿Cuál será el valor de la inversión después de 72 meses?

Solución:

Modelo interés continuo: caso particular del interés compuesto donde la capitalización es en cada instante de tiempo y cuya ecuación es:

$$M = Ce^{rt}$$

Todo debe estar en las mismas unidades

72 meses= 6 años

$$M = 300e^{7.5\%6}$$

$$M = 470.49 \text{ dólares}$$

4. El número de personas que viven en un pueblo es de 10000. Si después de una década hay 20000 personas. Calcule cuántas personas habrá a los 15 años (partiendo desde el inicio). Y en qué momento se llegará a los 50000 habitantes.

Solución:

Modelo de crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

P(t)= Población
Po=Población inicial
K=Constante de crecimiento
T= tiempo

P(t)= 20000
Po=10000
K=Constante de crecimiento
T= 10

Hallamos la K

$$20000 = 10000e^{K10}$$

$$2 = e^{K10}$$

$$ln2 = k10$$

$$k = 0,0693$$

$$Cuántas\ personas\ habrán\ a\ los\ 15\ años?$$

$$P\,(t) = 10000e^{0{,}0693\ 15}$$

$$P(t) = 28{,}278$$

$$En\ qu\acute{e}\ momento\ habr\acute{a}n\ 50000\ habitantes?$$

$$50000 = 10000e^{0{,}0693\ t}$$

$$5 = e^{0{,}0693\ t}$$

$$\ln ln\ 5\ = 0{,}0693\ t$$

$$t = 23.22\ a\tilde{n}os$$

5. En el año 2000 la población mundial era de 6.6 mil millones de personas con una tasa de crecimiento de 300 mil personas por día . calcule con esa tasa de crecimiento cuántas personas se esperan para el 2018.

Solución:

Modelo de crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

$$P'(t) = kP(t)$$

P(t)= Población
Po=Población inicial
K=Constante de crecimiento
T= tiempo
P'(t)= tasa de crecimiento

P(t)=
Po=6600000000
K=Constante de crecimiento
T= 10
P’(0)=300000 por día ----- 109500000por año

$$P'(0) = kP(0)$$

$$109500000 = k6600000000$$

$$k = 0,01659$$

$$P\ (18) = 6600000000e^{(0,01659)*18}$$

$$P\ (18) = 8896782095$$

Rta: 8.8 mil millones de personas

6. Si en una base de datos el número de datos se triplicó en 7 horas ¿Cuánto tardó en duplicarse?

Solución:

Modelo de crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

$$P'(t) = kP(t)$$

P(t)= Población
Po=Población inicial
K=Constante de crecimiento
T= tiempo

P'(t)= tasa de crecimiento

$$3P_0 = P_0 e^{K7}$$

$$3 = e^{K7}$$

$$\ln ln\, 3 \;\; = k7$$

$$K = 0{,}1569$$

Para que se duplique tenemos

$$2P_0 = P_0 e^{0{,}1569t}$$

$$2 = e^{0{,}1569*t}$$

$$ln2 = 0,1569 * t$$

$$t = 4.4\ horas$$

7. Una cadena de bloques crece a un ritmo de 20 bloques por hora cuando hay 400 bloques. ¿Cuántos bloques hay después de 5 horas? En cuanto tiempo se duplicarán el número de bloques

Solución:

Modelo de crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

$$P'(t) = kP(t)$$

P(t)= Población
Po=Población inicial
K=Constante de crecimiento
t= tiempo
P'(t)= tasa de crecimiento

P(t)=
Po=400
K=
P'(0)=20

$$P'(t) = kP(t)$$

$$20 = k400$$

$$k = 0.05$$

$$P(5) = 400e^{0.05(5)}$$

$$P(5) = 513.61$$

Rta: en 5 horas hay 513 bloques

$$800 = 400e^{0.05(t)}$$

$$\ln ln\ (2) \ = 0,05t$$

$$t = 13.86$$

Rta: los bloques se duplican en 13.86 horas

8. Actualmente tienes 1500 amigos en Facebook. Tu red de amigos de Facebook crece actualmente a una tasa de 10 amigos nuevos por semana, ¿cuánto tiempo tardarás en alcanzar el límite permitido de los 5000 amigos en Facebook?

Solución:

Modelo de crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

$$P'(t) = kP(t)$$

P(t)= Población
Po=Población inicial
K=Constante de crecimiento
T= tiempo
P'(t)= tasa de crecimiento

P(t)=
Po=1500
K=
P'(0)=10

$$P'(t) = kP(t)$$

$$10 = k1500$$

$$k = 0.0067$$

$$5000 = 1500e^{0.0067(t)}$$

$$3,33 = 0,0067\ (t)$$

$$t = 497.01$$

Rta: tardarás 497 semanas en alcanzar el límite

9. **Un cuerpo se calienta a 90° y se expone al aire libre con una temperatura de 13°. Si al cabo de una hora su temperatura es de 40° ¿En cuanto tiempo alcanzará los 23°?**

Solución:

Modelo de enfriamiento de newton

$$T\ (t) = Tm + e^{Kt}(To - Tm)$$

$$T'(t) = k(T - Tm))$$

T(t)= Temperatura
To=Temperatura inicial
K=Constante de calentamiento
t= tiempo
T'(t)= Velocidad de cambio de temperatura
Tm= temperatura ambiente

T(1)= 40°C
To=90
K=Constante de calentamiento
T'(t)= Velocidad de cambio de temperatura
Tm= 13°C

$$T(1) = Tm + e^{K1}(To - Tm)$$

$$40 = 13 + e^{K1}(90 - 13)$$

$$40 - 13 = e^{K}(77)$$

$$0.3506 = e^{K}$$

$$k =- 1.0481$$

$$T = Tm + e^{Kt}(To - Tm)$$

$$23 = 13 + e^{t-1.0481}(90 - 13)$$

$$0,1298 = e^{-1.0481\,t}$$

$$t = 1.94\ horas$$

El tiempo que tarda en llegar a 23 °C es de 1.94 horas